



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A  
BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND  
BIOMECHANICS

## METODY ŘEŠENÍ NAMÁHÁNÍ PRUTŮ PRUTOVÉ SOUSTAVY

METHODS OF SOLVING STRESS RODS BAR SYSTEM

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

MARTIN LAMRICH

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. ZDENĚK FLORIAN, CSc.

BRNO 2011



Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky

Akademický rok: 2010/2011

## **ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE**

student(ka): Martin Lamrich

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Strojní inženýrství (2301R016)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

### **Metody řešení namáhání prutů prutové soustavy**

v anglickém jazyce:

### **Methods of solving stress rods bar system**

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Cílem bakalářské práce je vytvořit přehled metod řešení prutových soustav, jejich vzájemné porovnání a posouzení možnosti jejich využití v současné době.

Cíle bakalářské práce:

1. Provedení rešerše dostupné literatury v oblasti řešeného problému.
2. Vypracování přehledu metod pro řešení prutových soustav.
3. Vzájemné posouzení vhodnosti metod pro jejich využití v současné době.
4. Na vybraných prutových soustavách provést řešení vybranými metodami.

Seznam odborné literatury:

- [1] Juliš, K., Brepta, R. a kol: Mechanika I. Díl, Praha, SNTL, 1986
- [2] Binder, R.: Statika, Bratislava SVTL 1959
- [3] Štrejtr, J.: Technická mechanika I, Praha SNTL 1954

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Zdeněk Florian, CSc.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2010/2011.

V Brně, dne 2.11.2010

L.S.

---

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
Ředitel ústavu

---

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.  
Děkan fakulty

## **ABSTRAKT:**

Bakalárska práca pojednáva o metódach na riešenie prútových sústav a ich vzájomnom porovnaní. V prvej časti tejto práce je uvedený teoretický základ pre následný výpočet uvedený v ďalšej časti tejto práce.

Grafické, analytické a numerické metódy pre riešenie prútových sústav sú aplikované na vzorové úlohy. Každá z úloh obsahuje teoretickú časť kde sú spomenuté výhody, nevýhody a vhodnosť použitia danej metódy. Na daných prútových sústavách je aplikovaný numerický výpočet pomocou metódy konečných prvkov v programe ANSYS .

Záver je zameraný na zhrnutie práce a porovnanie výsledkov. Analytické výpočty boli prevedené vo výpočtovom software MATHCAD 14.

## **ABSTRACT:**

The bachelors thesis deals with methods of solving stress rod bar systems and their mutual comparison. In the first part of this work is mentioned theoretical basic for the subsequent calculations.

Graphical, analytical and numerical methods of solving stress rod bar systems are applied to representative examples. Each of the examples contains theoretical part where are mentioned advantages, disadvantages and suitability for use of the methods. Due to Finite Element Method in ANSYS software is carried out a numerical calculation on the solved rod bar systems.

Conclusion is intent on summary of work and comparison of results. Analytical calculations were carried out in MATHCAD 14 software.

## **KLÚČOVÉ SLOVÁ:**

Prúťová sústava, metóda konečných prvkov, osová sila v prúte, Castiglianova veta, metódy riešenia prúťových sústav

## **KEYWORDS:**

Bar system, Finite Element Method, axial force in the rod, Castigliano's theorem, methods of solving bar systems

## **BIBLIOGRAFICKÁ CITÁCIA:**

LAMRICH, M. Metody řešení namáhání prutů prutové soustavy. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2011. 70 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Zdeněk Florian, CSc..



## **ČESTNÉ PREHLÁSENIE:**

Prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracoval samostatne pod odborným vedením vedúceho bakalárskej práce za použitia uvedenej literatúry.

V Brne máj 2011

.....  
Martin Lamrich



## **POĎAKOVANIE:**

V tomto odstavci by som chcel predovšetkým poďakovať vedúcemu mojej bakalárskej práce pánovi Ing. Zdeňkovi Florianovi Csc. za veľmi cenné rady a pripomienky, tiež za jeho ochotu a obetavosť. Ďalej by som chcel poďakovať môjmu kolegovi Jánovi Kouřilovi za drobné postrehy, týkajúce sa riešenia problému a samozrejme mojim rodičom za podporu po celú dobu môjho štúdia.



## Obsah

<b>1. Úvod</b> .....	11
<b>2. Ciele bakalárskej práce</b> .....	13
<b>3. Rešerž</b> .....	14
<b>4. Namáhanie prúta</b> .....	16
4.1. Prostý ťah a tlak .....	16
4.2. Vzperná stabilita prúta .....	17
4.2.1. Kritická sila vzperu u viazaného prúta .....	18
<b>5. Metódy riešenia staticky určitých prútových sústav</b> .....	19
5.1.1. Určenie pohyblivosti sústav telies .....	19
5.1.2. Statická určitosť .....	21
5.2. Styčnicková metóda .....	22
5.2.1. Styčnicková metóda (obecná) .....	23
5.2.2. Styčnicková metóda (postupná) .....	26
5.3. Cremonova metóda .....	28
5.4. Priesečná metóda .....	30
5.4.1. Priesečná metóda (Ritterova) .....	30
5.4.2. Priesečná metóda (Culmannova) .....	32
5.5. Metóda náhradných prútov (Henneberg) .....	35
5.6. Metóda zjednodušovania sústav .....	41
5.7. Metóda neurčitej mierky .....	43

<b>6. Staticky neurčité prútové sústavy</b> .....	49
6.1. Castiglianova veta.....	49
<b>7. Metóda konečných prvkov</b> .....	55
7.1. Výpočet riešených úloh pomocou MKP.....	57
7.1.1. Úloha číslo 1. ....	58
7.1.2. Úloha číslo 2. ....	59
7.1.3. Úloha číslo 2.1. ....	61
7.1.4. Úloha číslo 3. ....	62
<b>8. Zhodnotenie a porovnanie výsledkov</b> .....	63
8.1. Úloha číslo 1. ....	63
8.2. Úloha číslo 2. ....	65
8.3. Úloha číslo 3. ....	66
8.4. Zhodnotenie výsledkov.....	67
<b>9. Záver</b> .....	68
<b>10. Zoznam použitých zdrojov</b> .....	69
<b>11. Zoznam použitých symbolov a skratiek</b> .....	70

## 1. Úvod

Priehradové konštrukcie sú z historického hľadiska významným typom konštrukcie. Výpočtovým modelom priehradovej konštrukcie je prúťová sústava. V minulosti bola práve priehradová konštrukcia jedna z mála konštrukcií, ktorú bolo možné výpočtovo modelovať a riešiť pomocou jednoduchých výpočtových a grafických metód. Táto skutočnosť ovplyvnila vývoj množstva špeciálnych metód, na ktoré v súčasnej dobe nie je vo výučbe čas. Ďalším faktorom, ktorý zatienil tieto metódy je rozvoj počítačového priemyslu a hlavne rýchly rozvoj numerických metód mechaniky. Čo má nepochybne radu výhod, avšak základné úvahy, algoritmy a výsledky riešení pochádzajúce z práve týchto metód môžu byť aplikovateľné v iných oblastiach mechaniky telies.

Prúťové sústavy predstavujú špeciálne sústavy telies, ktoré sa využívajú hlavne pri navrhovaní veľkorozmerných nosných konštrukcií v mostovom a pozemnom stavitel'stve na konštrukciu mostov, stožiarov a strešných konštrukcií z dôvodu ekonomickej nenáročnosti v porovnaní s rámovými, alebo betónovými konštrukciami.

Praktické príklady prúťových sústav : stožiare vysokého napätia, osvetľovacie veže a rampy, strešné a mostové konštrukcie, anténne systémy, a pod.



Obr. 1.1  
*Stožiar vysokého napätia* [9]



Obr. 1.2  
*Nosná a strešná konštrukcia štadiónu* [10]

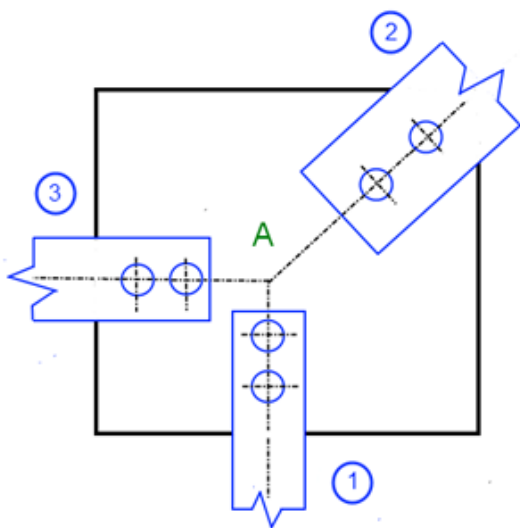


Obr. 1.3  
*Mostová konštrukcia* [11]

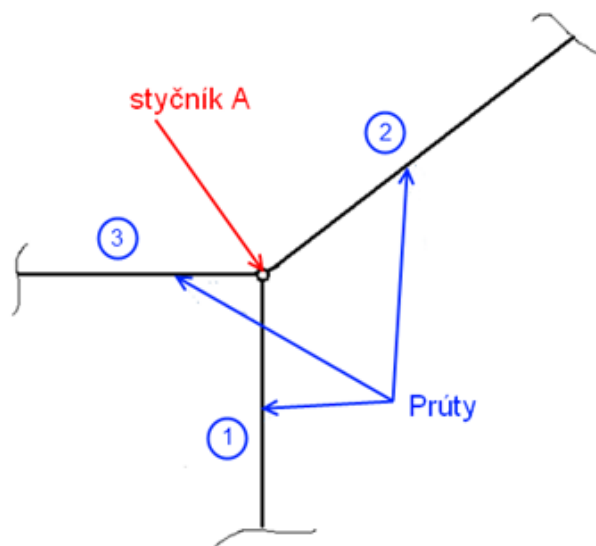
Teoreticky je prútová sústava vymedzená ako (výpočtový) model priehradovej konštrukcie, ktorá sa skladá z nehmotných, nezaťažných, binárnych členov s dvomi rotačnými (v rovine), sférickými (v priestore) väzbami, ktoré sa nazývajú prúty. Prútom rozumieme modelové teleso, ktoré je jednoznačne určené strednicou, ktorá je spojnicou ťažísk priečných prierezov a v prípade prútových sústav hovoríme výhradne o priamych prútoch. Spojením viacerých prútov v spoločných bodoch, ktoré sa nazývajú styčníky (uzly) vzniká prútová sústava. Sústava prútov vytvára nepohyblivé prútové teleso.

Styčníky (styčnickové telesá) spájajú dva alebo viac prútov, pričom stredy sférických (priestor) respektíve rotačných (rovina) kinematických dvojíc splývajú. Vonkajšie sily pôsobia iba na styčnickové telesá. Priečozová plocha prútov môže byť rôzna a po dĺžke prúta je spravidla konštantná. [1]

Na obrázku 1.5 je zobrazené spojenie priehradovej konštrukcie z obrázka 1.4 a jej model s kĺbovou väzbou. Základnou podmienkou pre použitie tohto modelu je, že osy prútov sa pretínajú v jednom bode.

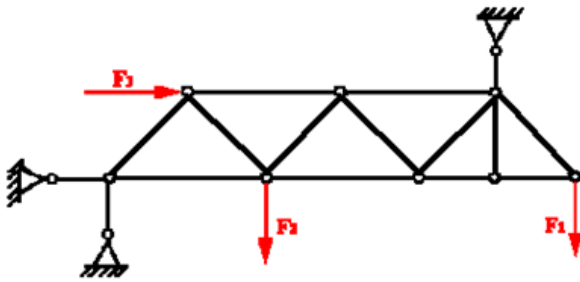


Obr. 1.4 [1]

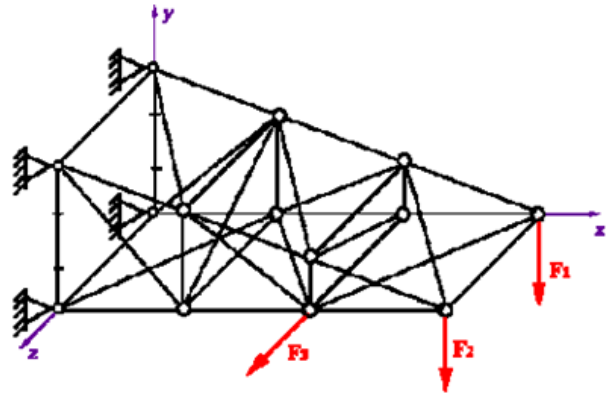


Obr. 1.5 [1]

Podľa priestorového usporiadania prútov delíme prútové sústavy na rovinné (obr.1.6) a priestorové (obr.1.7). Prúty, styčníky a sily rovinatej prútovej sústavy ležia v jednej rovine, štruktúra priestorovej prútovej sústavy vytvára priestorový útvar. [1]



Obr. 1.6 [1]



Obr. 1.7 [1]

## 2. Ciele bakalárskej práce

Cieľom mojej práce je vypracovať prehľad dostupných metód pre riešenie prútových sústav a ich vzájomné posúdenie a využitie v dnešnej dobe, keďže tieto metódy sú výborným nástrojom na prvotný pevnostný návrh konštrukcií, z hľadiska získania predstavy týkajúcej sa deformácie a napätosti, ktoré je možné využiť pri posudzovaní správnosti výsledkov numerického riešenia.

Metóda konečných prvkov je veľmi výkonný nástroj na výpočet deformačných a pevnostných charakteristík, ale je potrebné s ňou pracovať s určitou dávkou nadhľadu a mať istú skúsenosť s týmto nástrojom, pretože pri nesprávnej interpretácii analytickej úlohy, môže nastať značná odlišnosť výsledkov, preto ďalším cieľom tejto práce je na vybraných prútových sústavách uskutočniť riešenie vybranými metódami (analytické, grafické) a porovnať ho s numerickým riešením (MKP).

### 3. Rešerž

#### **STATIKA**

Autor: Zdenek Florian, Emanuel Ondráček, Karel Přikryl

V týchto skriptách, je na stranách 137-141 rozbor a charakteristiky prútových sústav, tiež je tu vysvetlená statická určitosť prútových a kinematický rozbor sústav.

#### **MECHANIKA TĚLES – ÚLOHY ZE STATIKY**

Autor: Zdeněk Florian, Miroslav Suchánek.

Skriptá spracúvajú mimo iné aj výpočet staticky určitých prútových sústav a to na stranách 69 – 99.

#### **MECHANIKA I. díl – Statika a kinematika**

Autor: Karel Juliš, Rudolf Brepta, a kol.

Práca na stranách 141 – 155 pojednáva o štruktúre a vytváraní prútových sústav, metódach riešenia prútových sústav.

#### **STATIKA**

Autor: Ing Karel Juliš, Otakar Tepřík, Adolf Slavík

Práca na stranách 121 – 143 pojednáva o vytváraní prútových sústav v praxi, ich statickej a tvarovej určitosti a metódach statického riešenia rovinných a priestorových prútových sústav.

### **Ansysis tutorials STU Bratislava – výpočet rovinnej prútovej sústavy**

Autor: Roland Jančo,

V práci je názorne rozpracovaný výpočet jednoduchej prútovej sústavy pomocou metódy konečných prvkov v programe ANSYS 10.0 .

### **STATIKA PRE ŠPECIÁLNE INŽINIERSTVO**

Autor: Jozef KOVAČIK, Martin BENIAČ

Táto práca obsahuje stručný popis metód statiky na riešenie prútových sústav s naznačenými aplikáciami na príkladoch.

### **INTERAKTÍVNY UČEBNÝ TEXT PRUŽNOSŤ A PEVNOSŤ**

Autor: Jana HORNÍKOVÁ

Práca obsahuje riešené a neriešené príklady a textovú časť v ktorej sú prehľadnou formou vysvetlené pojmy z predmetu Pružnosť a Pevnosť

## 4. Namáhanie prúta

Z vymedzenia prútovej sústavy vyplýva, že prúty tejto sústavy môžu byť namáhané na ťah, tlak a vzper, vyplýva to zo skutočnosti, že prútová sústava je zaťažená výhradne len v styčníkoch, ktorých namáhanie sa prenáša v osových silách prútov stýkajúcich sa v týchto styčníkoch. [2]

### 4.1. Prostý ťah a tlak

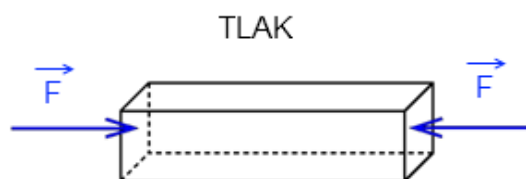
#### Definícia:

Prostý ťah (tlak) je namáhanie priameho prizmatického púta, ak :

- Sú splnené prútové charakteristiky,
- Priechne prierezy sa vzájomne oddľujú ( približujú) a následne deformujú, (tj menia veľkosť, ale nemenia tvar),
- Jedinou nenulovou zložkou VVÚ (výsledné vnútorné účinky) je normálová sila  $N$ ,
- Deformácie sú z hľadiska statickej rovnováhy prvku nepodstatné. [2]



Obr. 4.1 teleso namáhané ťahom [2]



Obr. 4.2 teleso namáhané tlakom [2]

## 4.2. Vzperná stabilita prúta

Z vymedzenia prostého tlaku vyplýva, že priečne prierezy sa vzájomne iba približujú. Ak v skutočnosti namáhame relatívne tenkú tyč ( pomer charakteristického rozmeru priečného prierezu k dĺžke prúta je malý) tlakom, na počiatku zaťažovania sa zaťažovaná tyč stláča a od určitého okamžiku sa začne prehýbať. Podstatnou deformáciou sa stane ohyb. V počiatkovej fáze je podstatné stláčanie strednice a nepodstatný jej ohyb, pri väčších zaťažujúcich silách je tomu naopak – ohyb je podstatný a nepodstatné je stláčanie. Rozhranie týchto dvoch stavov označujeme medzný stav vzpernej stability. [2]

Medzný stav vzpernej stability je stav, v ktorom sa mení charakter podstatnej deformácie

Prút namáhaný na tlak kontrolujeme na vzper za týchto predpokladov:

- strednica prútu je v nezaťaženom stave ideálne priama,
- prút je prizmatický a neskrutkový
- prierez prútu je hrubostenný ( tj. všetky rozmery priečného prierezu sú rádovo rovnako veľké),
- prút je zaťažený dvomi rovnovážnymi osamelými silami  $F$ , ktoré pôsobia v ťažisku čiel prúta ich nositeľky sú totožné so strednicou prúta v nezaťaženom stave,
- materiál prúta je homogénny , izotropný a bez obmedzení lineárne pružný,
- v priebehu celého zaťažovania platia prútové predpoklady prostého namáhania prúta.

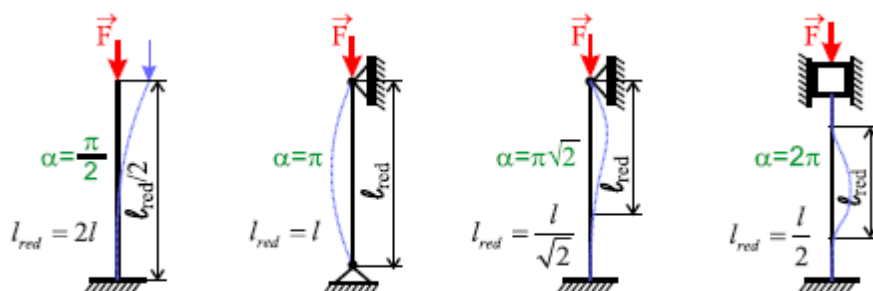
[2]

#### 4.2.1. Kritická sila vzperu u viazaného prúta

Na výpočet kritickej sily u viazaného prúta namáhaného na vzper sa využíva vzťah:

$$\text{buď} \quad F_{kr} = \alpha^2 \cdot E \cdot J / l^2 \quad \text{alebo} \quad F_{kr} = \pi^2 \cdot E \cdot J / l_{red}^2$$

Veličina  $\alpha$  je daná uložením prúta ( v prípade voľného prúta  $\alpha = \pi$ ), redukovaná dĺžka sa stanoví podľa obrázka (4.2.1). Je to dĺžka prúta, ktorého sila odpovedá kritickej sile zadaného viazaného prútu. Pretože v koncových bodoch voľného prúta je nulový ohybový moment aj v prehnutom stave, odpovedá redukovaná dĺžka vzdialenosti dvoch najbližších bodov s nulovým ohybovým momentom na deformovanej strednici prúta. [2]



Obr. 4.2.1 spôsoby uloženia prútov namáhaných na vzper [2]

Tieto uloženia nie sú charakteristické pre priehradové konštrukcie. Vzperná stabilita priehradových konštrukcií v praxi je často len veľmi ťažko riešiteľná, až neriešiteľná pomocou teoretických základov Pružnosti a Pevnosti, preto sa vzperná únosnosť často určuje podľa normy ČSN EN 1993-1-1 Navrhování ocelových konstrukcí.

## 5. Metódy riešenia staticky určitých prútových sústav

Metódami statiky možno riešiť len staticky určité prútové sústavy. Týmito metódami možno určiť vonkajšie stykové sily a sily v prútoch. Na výpočet deformácie prútových sústav, a tým aj na riešenie staticky neurčitých úloh je potrebné použiť vzťahy z oblasti pružnosti a pevnosti. Z obecného hľadiska je možné hovoriť o experimentálnych a výpočtových metódach. Experimentálnym metódam nebudem v ďalšej časti práce venovať pozornosť, ich princíp pozostáva z pozorovaní výsledkov skúmaných situácií. K výsledkom sa dospeje na základe toho, že skúmaná situácia skutočne nastane, pre ciele tejto práce nie sú tieto metódy nijak zaujímavé.

Výpočtové metódy riešenia prútových sústav sa obecné delia na:

- analytické
- grafické
- numerické (počítačovo orientované)

[2]

### 5.1.1. Určenie pohyblivosti sústav telies

Určenie pohyblivosti zložitých, alebo výnimkových sústav telies vyžaduje samostatné kinematické riešenie, preto v statike nie je možné analyzovať výnimkové sústavy. Pohyblivosť normálnej sústavy bez degenerovaných členov určíme zo vzťahu :

$$i = (n - 1)i_v - (\sum \xi - \eta)$$

Kde:  $i$  - počet stupňov voľnosti sústavy

$\eta$  - počet obmedzených deformačných parametrov

$i_v$  - počet stupňov voľnosti voľného telesa

$\sum \xi_i$  - počet stupňov voľnosti odobraných väzbami

$(n - 1)$  - počet telies bez základného telesa

Ak sústava obsahuje degenerované členy, jej pohyblivosť určíme zo vzťahu :

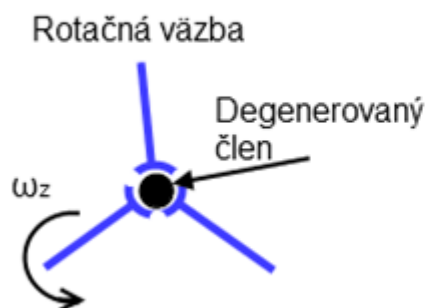
$$i = (n - 1) i_v - (\sum \xi - \eta) - k\delta$$

kde :  $k$  – počet degenerovaných členov

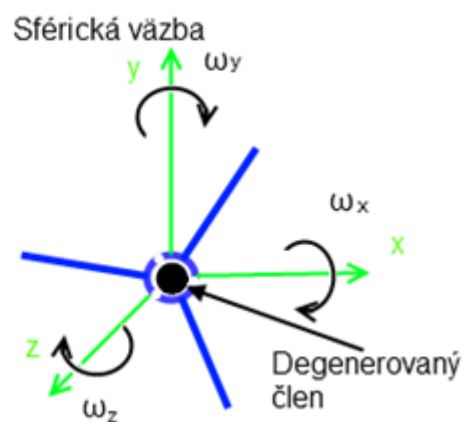
$\delta = 1$  pre degen. člen s viacnásobnou rotačnou väzbou

$\delta = 3$  pre degen. člen s viacnásobnou sférickou väzbou

Valcové (obr. 5.1.1.1) respektíve sférické (5.1.1.2) teleso (čap) má vždy 1 respektíve 3 stupne voľnosti, ktoré neovplyvnia pohyblivosť, preto ich musíme pri určovaní stupňov voľnosti odčítat'. [3]



Obr. 5.1.1.1 [3]



Obr. 5.1.1.2 [3]

### 5.1.2. Statická určitost'

Prútová sústava je staticky určitá, ak sa počet použiteľných rovníc na výpočet neznámych silových veličín rovná práve počtu neznámych silových veličín (sily v prútoch, zložky vonkajších reakcií).

Na to, aby mohla byť sústava staticky určitá musí byť splnená takzvaná nutná podmienka statickej určítosti rovinných prútových sústav, ktorá hovorí, že počet statických rovníc ( $n$ ) sa rovná rozdielu dvojnásobku počtu styčnícov( $s$ ), počtu prútov( $p$ ) a neznámych zložiek vonkajších reakcií( $\sigma$ ).

$$n = 2s - p - \sigma = 0 \quad [8]$$

Riešenie prútových sústav závisí aj od statickej určítosti sústavy. Rozlišujeme medzi vonkajšou, vnútornou a celkovou statickou určitost'ou. Prútová sústava je v stave celkovej statickej určítosti, ak je staticky určitou sústavou aj vnútorne aj vonkajšie, v opačnom prípade pôjde o staticky neurčitú (preurčenú, resp. podurčenú) prútovú sústavu.

Vonkajšia statická určitost' prútových sústav sa vzťahuje k určeniu vonkajších stykových síl uvoľneného prútového telesa z použiteľných podmienok statickej rovnováhy.

$$v = \mu \quad [3]$$

kde  $\mu$  je počet neznámych parametrov vonkajších stykových síl a  $v$  je počet použiteľných statických podmienok rovnováhy (3 v rovine, 6 v priestore). Prútová sústava je uložená po vonkajšej stránke staticky určitou, ak nastane v spomínaných podmienkach rovnosť. V opačnom prípade ide o staticky neurčité uloženie.

Vnútorná statická určitost' sa vzťahuje k určeniu síl v prútoch, táto podmienka je založená na tom, že počet použiteľných podmienok statickej rovnováhy pre priestorovú respektíve rovinnú prútovú sústavu je  $3s$  respektíve  $2s$  a teda podmienka vnútornej statickej určítosti má tvar:

$$2s - 3 = p \text{ (rovinná sústava)}$$

$$3s - 6 = p \text{ (priestorová sústava)}$$

[3]

Celková statická určitost' prútových sústav sa vzťahuje k určeniu všetkých neznámych nezávislých parametrov prútovej sústavy z použiteľných podmienok statickej rovnováhy. Z rozboru vonkajšej a vnútornej statickej určitosti je zrejmé, že celkovú podmienku statickej určitosti môžeme vyjadriť v tvare:

$$3s = p + \mu \text{ (rovinná sústava)}$$

$$2s = p + \mu \text{ (priestorová sústava)}$$

Prútová sústava je staticky určitá ak je vonkajšie aj vnútorne staticky určitá, v prípade statickej neurčitosti sústavu uvoľníme na statickú určitost' a zavedieme adekvátny počet deformačných podmienok, pre riešenie staticky neurčitých prútových sústav je nutné ďalej spomínané metódy statiky doplniť o poznatky z pružnosti a pevnosti. [3]

## 5.2. Styčnicková metóda

Základom styčnikovej metódy pre určenie osových síl v prútoch je zostavenie rovníc rovnováhy pre všetky uvoľnené telesá a ich následné riešenie.

### Postup metódy :

Metóda je založená na uvoľnení a riešení styčnikov. Vo všetkých prútoch zavedieme osovú silu, zmysel osových síl volíme ako ťahový (pôsobia smerom zo styčníka). Výhodou metódy je jej univerzálnosť. Ako uvidíme v ďalšej časti tejto práce, práve styčnicková metóda (pre názornosť postupná) je často volená na dopočítanie aj iných metód riešenia prútových sústav. Zostavené rovnice umožňujú analýzu statickej určitosti. Ďalšou výhodou je jednoduchosť metódy, na druhú stranu pri zložitejších sústavách môže byť dosť prácna.

### 5.2.1. Styčnicková metóda (obecná)

Princíp metódy, uvoľnia sa všetky styčníky, ktorých statickú rovnováhu následne zapíšeme v maticovom tvare a riešime, hlavne pomocou výpočtovej techniky.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$\mathbf{A}$  - matica sústavy, ktorá popisuje prútovú sústavu z geometrického hľadiska

$\mathbf{x}$  - stĺpcová matica neznámych parametrov

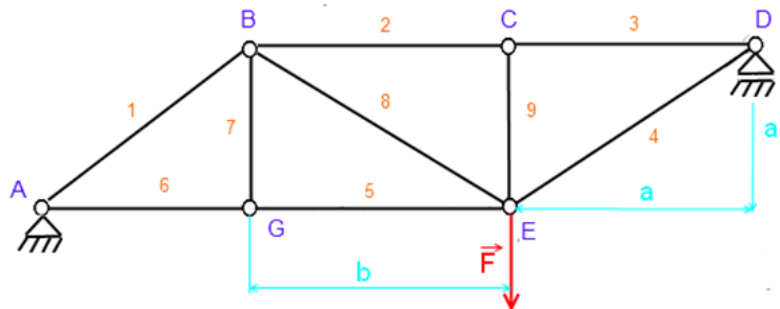
$\mathbf{b}$  - stĺpcová matica úplne zadaných silových prvkov.

[3]

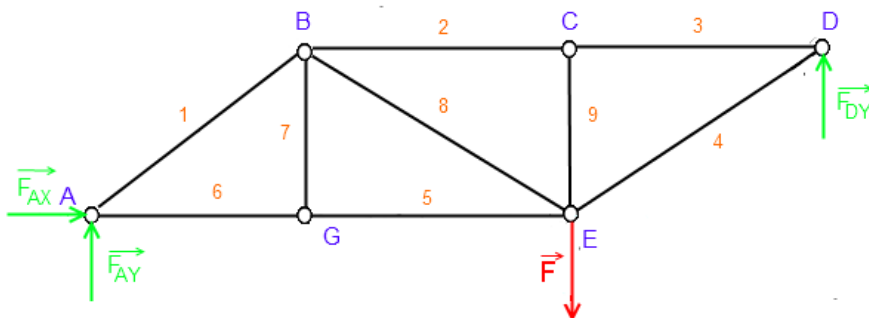
Táto metóda je výhodná pre jej univerzálnosť použitia, pre veľké konštrukcie, je pre jej prácnosť vhodné použiť počítačovú techniku.

#### Príklad:

V danej prútovej sústave určte všetky osové sily v prútoch pomocou obcej styčnickovej metódy. ( $F=2000\text{ N}$ )



#### Uvoľnenie sústavy:



**Rozbor:**

a) Úloha je zadaná úplne a správne.

b) Úloha je zadaná ako rovinná

c) Klasifikácia členov : 0-základné teleso

1-9 – prúty

A-G – styčníky, degenerované členy.

d) Klasifikácia väzieb :

a) vonkajšie A – rotačná väzba  $\xi_i = 2$

D – obecná väzba ( podpora)  $\xi_i = 1$

b) vnútorné C, G – trojnásobné rotačné väzby  $\xi_i = 3 \cdot 2$

E, B – štvornásobné rotačné väzby  $\xi_i = 4 \cdot 2$

A, D – dvojnásobné rotačné väzby  $\xi_i = 2 \cdot 2$

**Určenie pohyblivosti ( kinematický rozbor) :**

Počet členov (prútov) + základné teleso = 10

Styčníkov (degenerovaných členov)  $\delta = 6$ , celkom  $n = 16$

$$i = (n-1)i_v - \sum \xi_i - \delta + \eta = 15 \cdot 3 - (3 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 1 + 2) - 6 = \\ = 45 - (36 + 3) - 6 = 0^\circ$$

Prútová sústava je nepohyblivá.

**Určenie statickej určitosti :**

a) Vnútorná  $2s = 3 + p$        $12 = 3 + 9$

b) Vonkajšia  $\mu = v$        $3 = 3$

Je splnená nutná podmienka statickej určitosti.

[4]

Matica sústavy, matica silových prvkov a matica neznámych parametrov :

$$A_1 := \begin{pmatrix}
 \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}$$

$$b_1 := \begin{pmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 F_c \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{pmatrix}$$

$$x := \begin{pmatrix}
 F_1 \\
 F_2 \\
 F_3 \\
 F_4 \\
 F_5 \\
 F_6 \\
 F_7 \\
 F_8 \\
 F_9 \\
 F_{AY} \\
 F_{DY} \\
 F_{DX}
 \end{pmatrix}$$

Tabuľka výsledkov:

Prút číslo:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Sila(N) v prúte:	-757,875	-1464	-1464	2071	535,898	535,898	0	1072	0

### 5.2.2. Styčniková metóda (postupná)

Pri postupnej styčnikovej metóde sa v prútovej sústave rieši silová rovnováha každého uvoľneného styčníka. Riešenie začína výpočtom stykových a zaťažovacích síl.

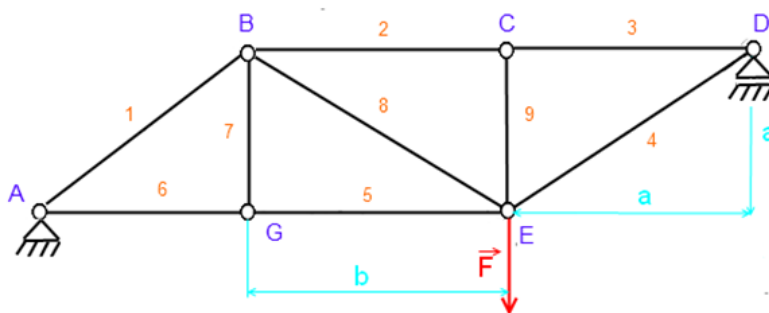
Výpočet osových síl v prútoch začíname v dvojnóm styčníku (tzn. v styčníku, ktorý ma len dve neznáme sily), potom pokračuje postupne v ďalšom novovzniknutom dvojnóm styčníku, ako bude vidno na príklade v ďalšej časti tejto práce. [5]

Pri analytickom riešení všetky neznáme sily volíme ako ťahové (+). Vo výsledkoch potom získame buď ťah (+), alebo tlak (-), ak sa znamienka nezhodujú, pôvodný predpoklad bol nesprávny a znamienko ma opačný zmysel. [8]

Výhodou metódy je jej univerzálnosť. Na jej použitie je postačujúce, aby daná prútová sústava obsahovala aspoň jeden dvojný styčník. Ako uvidíme v ďalšej časti tejto práce, práve postupná styčniková metóda je často volená na dopočítanie aj iných metód riešenia prútových sústav. [6]

**Príklad:** v danej prútovej sústave určte všetky osové sily v prútoch.

Kinematický, statický rozbor a výpočet síl vo väzbách, viz. Predošlý príklad (5.2.1 obecná styčniková metóda, strana 24)

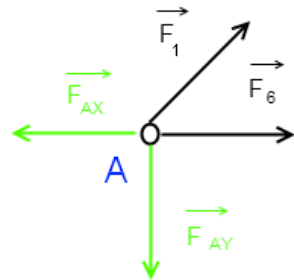


**Výpočet síl vo väzbách:**

$$F_{AY} := F_c - F_{DY} = 535.898 \text{ N} \quad F_{DY} := F_c \cdot \frac{(a + b)}{2 \cdot a + b} = 1.464 \times 10^3 \text{ N}$$

Uvoľnenie a výpočet osových síl v jednotlivých styčníkoch:

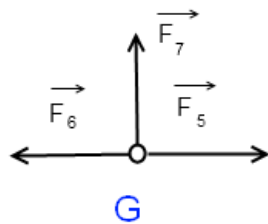
Styčník A :



$$F_1 := \frac{-F_{AY}}{\sin(45^\circ)} = -758.018 \text{ N}$$

$$F_6 := -F_1 \cdot \cos(45^\circ) = 536 \text{ N}$$

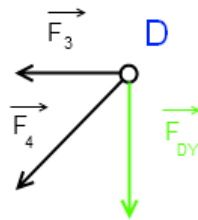
Styčník G:



$$F_7 := 0 \text{ N}$$

$$F_5 := F_6 = 536 \text{ N}$$

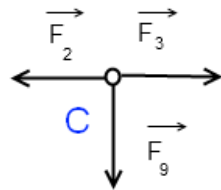
Styčník D:



$$F_3 := -F_{DY} = -1.464 \times 10^3 \text{ N}$$

$$F_4 := \frac{F_{DY}}{\sin(45^\circ)} = 2.07 \times 10^3 \text{ N}$$

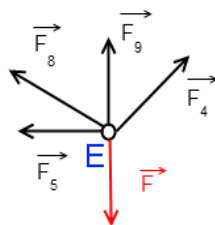
Styčník C:



$$F_2 := F_3 = -1.464 \times 10^3 \text{ N}$$

$$F_9 := 0 \text{ N}$$

Styčník E:



$$F_8 := \frac{(F_c - F_5)}{\sin(30^\circ) + \cos(30^\circ)} = 1.072 \times 10^3 \text{ N}$$

Tabuľka výsledkov:

Prút	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Sila (N)	-758,018	-1464	-1464	2070	536	536	0	1072	0

### 5.3. Cremonova metóda

Grafické riešenie prútovej sústavy, ktorého základom je grafická interpretácia styčnikovej metódy, teda grafické riešenie rovnováhy styčnikov.

Cremonovu metódu je vhodné aplikovať na jednoduchšie prútové sústavy a to tak, že sa skonštruuje schéma prútovej sústavy v mierke, vedľa ktorej sa vynáša zložkový obrazec nazývaný Maxwellov-Cremonov (krátko Cremonov) obrazec.

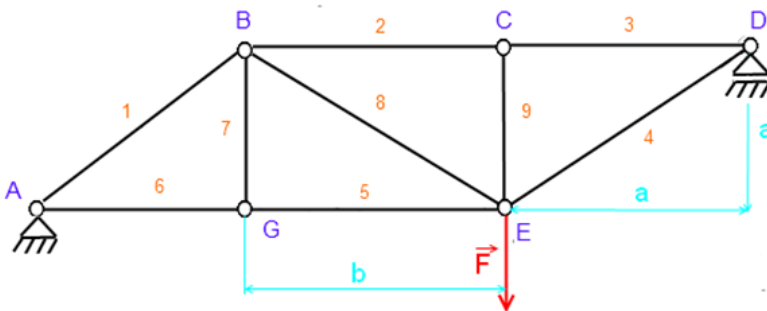
#### Zásady metódy:

- Ak osová sila pôsobí do uzla, jedná sa o silu tlakovú (-), ak pôsobí von z uzla ide o silu ťahovú (+)
- Veľkosť osových síl odmeriame v zložkovom obrazení, ktorý je v zvolenej mierke.

Postup Cremonovej metódy spočíva v prekreslení vyšetrovanej sústavy v zvolenej mierke a zvolení mierky síl. Nasleduje určenie stykových výslednic vo väzbách uloženia a to graficky, alebo analyticky. Nakreslíme uzavretý obrazec vonkajších a stykových síl uloženia v tom poradí, ako idú za sebou pri zvolenom kladnom smeru obehu vonkajších prútovej sústavy. Cremonov obrazec začíname u styčnika s dvomi neznámymi prútmi a nakreslíme jemu prislúchajúci zložkový obrazec, stále dodržiujeme zásadu, aby následnosť síl v obrazení odpovedala kladnému smeru.

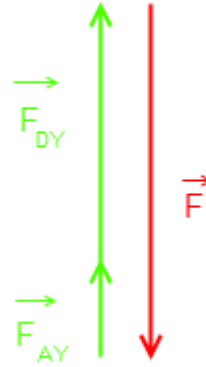
Táto metóda je v hodná pre rovinné prútové sústavy, je názorná, umožňuje rozvíja predstavivosť a v niektorých prípadoch môže byť podstatne rýchlejšia než styčnikové metódy (obecná, postupná), avšak jej použitie vyžaduje určitú skúsenosť [5]

**Príklad:** Určite osovú silu v prútoch pomocou Cremonovej metódy v danej prútovej sústave:

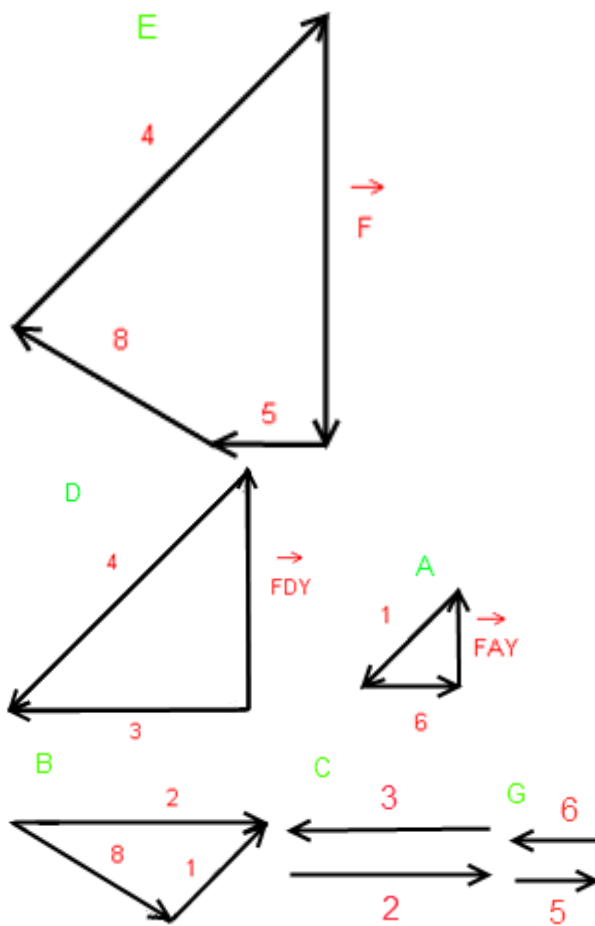


Kinematický, statický rozbor a výpočet síl vo väzbách, viz. predošlý príklad (5.2.1 obecná styčniková metóda, strana 24)

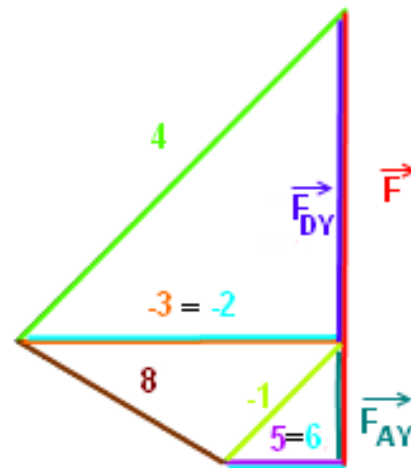
Silový obrazec vonkajších síl:



Silové obrazce jednotlivých styčnícov:



Cremonov obrazec:



Mierka: (1mm=37N)

Tabuľka výsledkov:

Prút číslo:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Sila(N) v prúte:	-758	-1464	-1464	2071	536	536	0	1072	0

## 5.4. Priesečná metóda

Je to statická metóda vhodná na riešenie zložených prútových sústav . Táto metóda je známa v dvoch formách:

- grafická Culmannova metóda
- analytická Ritterova metóda

Priesečná metóda sa spravidla používa ak je potrebné určiť osovú silu len v niektorých prútoch. Priesečné metódy sú volené na riešenie úloh mnohokrát práve preto, že sú použiteľné aj v niektorých prípadoch kde nie je možné použitie postupnej styčnikovej metódy.

Postup riešenia pozostáva z uvoľnenia časti prútovej sústavy, pričom sa myšlienkový, uvoľňovací rez vedie cez prút ktorého osová sila má byť spočítaná. Táto osová sila sa určí riešením silovej rovnováhy uvoľnenej časti prútovej sústavy. [6]

### 5.4.1. Priesečná metóda (Ritterova)

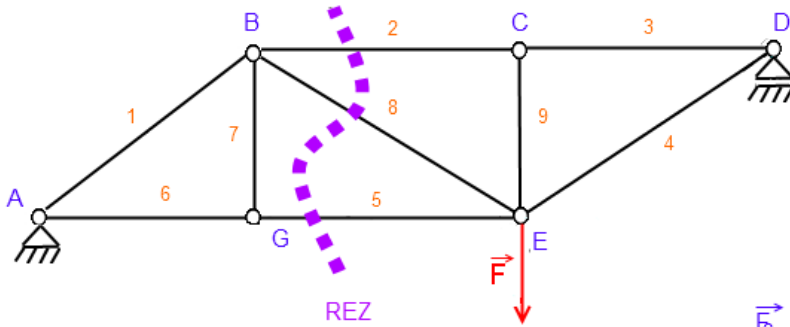
Princíp metódy vychádza z momentových podmienok statickej rovnováhy telesa, respektíve jeho jednej časti odrezanej rezom cez maximálne tri prúty nepretínajúce sa v jednom bode a následnom uvoľnení . Vzniknuté osovú silu musia byť v rovnováhe s vonkajšími silami pôsobiacimi na odrezanú časť prútovej sústavy. Momentové podmienky rovnováhy odrezanej časti prútovej sústavy píšeme k bodom , ktoré sú priesečníkom osí dvoch prerezaných prútov. [5]

Výhodou metódy je , že ak potrebujeme spočítať len jednu osoú silu v sústave, je možné spočítať práve len túto silu bez prácného počítania ostatných síl.

Pre názornosť a porovnanie je priesečná metóda (Ritterova) realizovaná na rovnakom príklade ako predošlé metódy (styčniková , Cremonov obrazec).

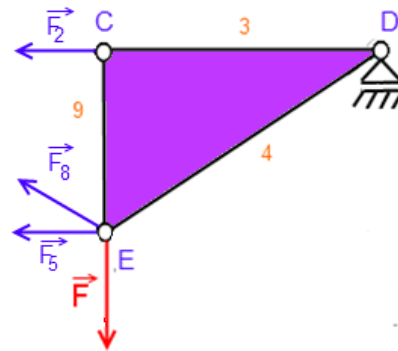
**Príklad:**

vyšetrite osové sily v prútoch danej prútovej sústavy pomocou priesečnej metódy (Ritterovej):

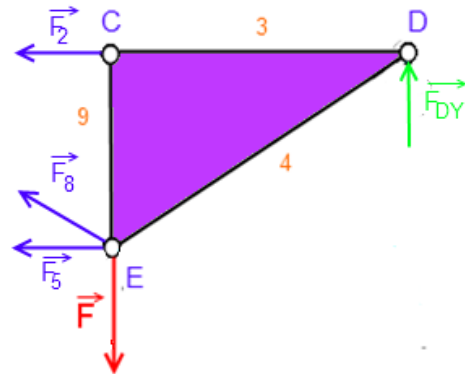


Kinematický, statický rozbor a výpočet síl vo väzbách, viz. predošlý príklad (5.2.1 obecná styčnicková metóda, strana 24)

**Odrezaná časť sústavy:**



**Uvoľnená odrezaná časť sústavy:**



**Výpočet osových síl zo statickej rovnováhy :**

$$\sum F_x = 0$$

$$F_5 + F_2 + F_8 \cdot \sin(60^\circ) = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-F + F_{DY} + F_8 \cdot \cos(60^\circ) = 0$$

$$\sum M_E = 0$$

$$F_{DY} \cdot a = -F_2 \cdot b$$

$$F_5 := -F_2 - F_8 \cdot \sin(60^\circ) = 535.898 \text{ N}$$

$$F_8 := \frac{(F_C - F_{DY})}{\cos(60^\circ)} = 1.072 \times 10^3 \text{ N}$$

$$F_2 := -F_{DY} = -1.464 \times 10^3 \text{ N}$$

Ostatné prúty je možné dopočítať napríklad už spomínanou styčnickovou metódou, alebo zistiť pomocou Cremonovej metódy, alebo ďalším rezaním sústavy.

**Tabuľka výsledkov:**

Prút	1	2	3	4	5	6	7	8	9
číslo:									
Sila(N)	-758	-1464	-1464	2071	536	536	0	1072	0
v prúte:									

#### 5.4.2. Priesešná metóda (Culmannova)

Culmannova metóda je grafický spôsob riešenia rovnováhy štyroch síl v rovine pomocou Culmannovej priamky, štyroch síl v rovine, pričom u troch z nich poznáme nositeľky a jednu zo síl poznáme úplne. Štyri sily sú v rovnováhe, keď výslednice ľubovoľných dvoch síl leží na priamke výslednej sily zostávajúcich dvoch síl a má rovnakú veľkosť a opačný smer pôsobenia. Táto priamka sa nazýva Culmannova priamka. [6]

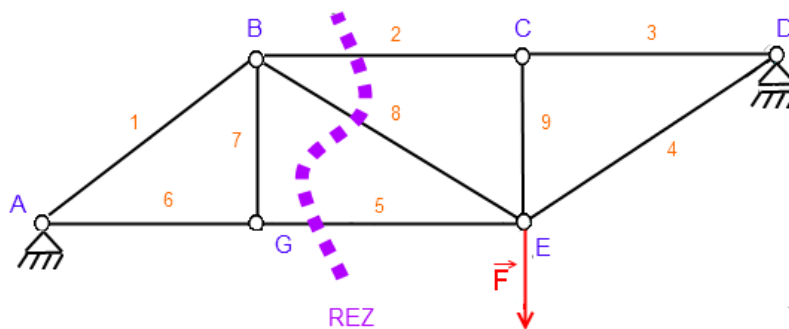
Princíp metódy spočíva v rozdelení sústavy uvoľňovacím rezom na dve časti. Uvoľňovací rez je vedený cez tri prúty (nie viac, máme k dispozícii len tri podmienky rovnováhy), ktoré sa nepretínajú v jednom bode. Vychádzame z toho, že na oboch uvoľnených častiach je rovnováha síl. Prevedieme výpočet rovnováhy síl, z praktických dôvodov sa volí časť, pre ktorú je výpočet menej prácny. Ak na uvoľnenú časť pôsobí viac ako jedna známa sila, určíme výslednicu týchto síl. Po vyriešení rovnice graficky pomocou Culmannovej priamky, odmeriame potrebný úsek a získame hľadané sily v mierke. [8]

Po určení síl v troch prútoch možno pokračovať v riešení osových síl v sústave ďalej, napríklad postupnou styčnickovou metódou.

Pokiaľ sa uspokojíme s určením len jednej osovej sily, môžeme prerezať aj viac ako tri prúty, ale osi všetkých prútov, okrem toho ktorého osovú silu zisťujeme, musia tvoriť zväzok síl, musia teda smerovať do jedného bodu. [8]

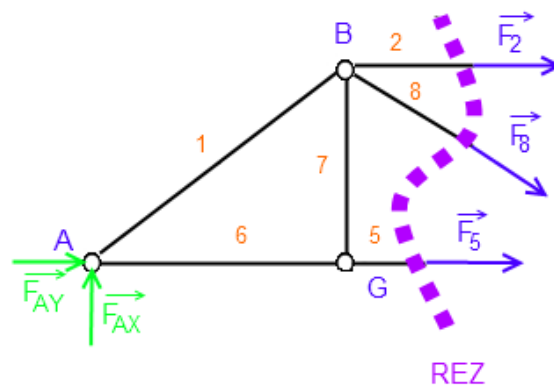
### Príklad:

vyšetrite osové sily v prútoch danej prútovej sústavy pomocou priesečnej metódy (Culmannovej):

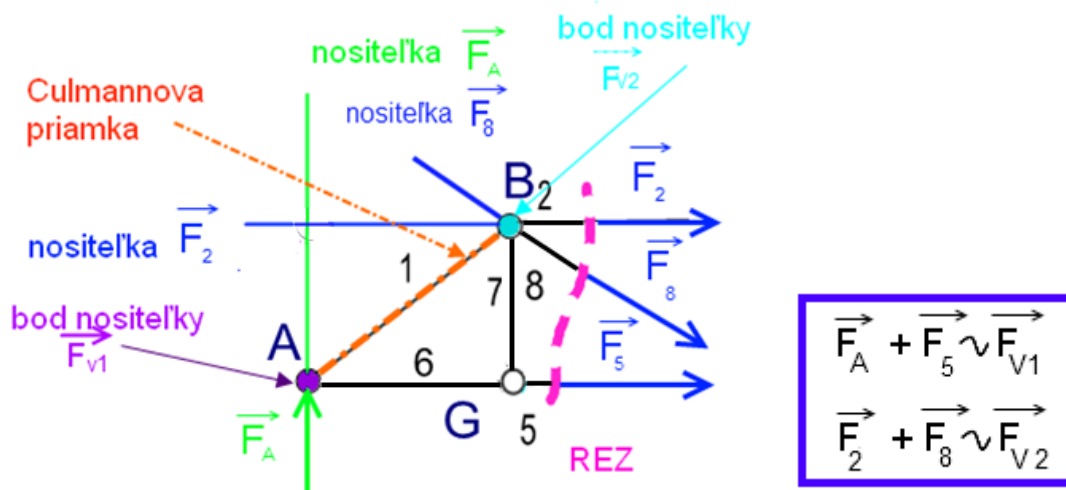


Kinematický, statický rozbor a výpočet síl vo väzbách, viz. predošlý príklad ( 5.2.1 obecná styčnicková metóda, strana 24)

Uvoľnená časť sústavy:

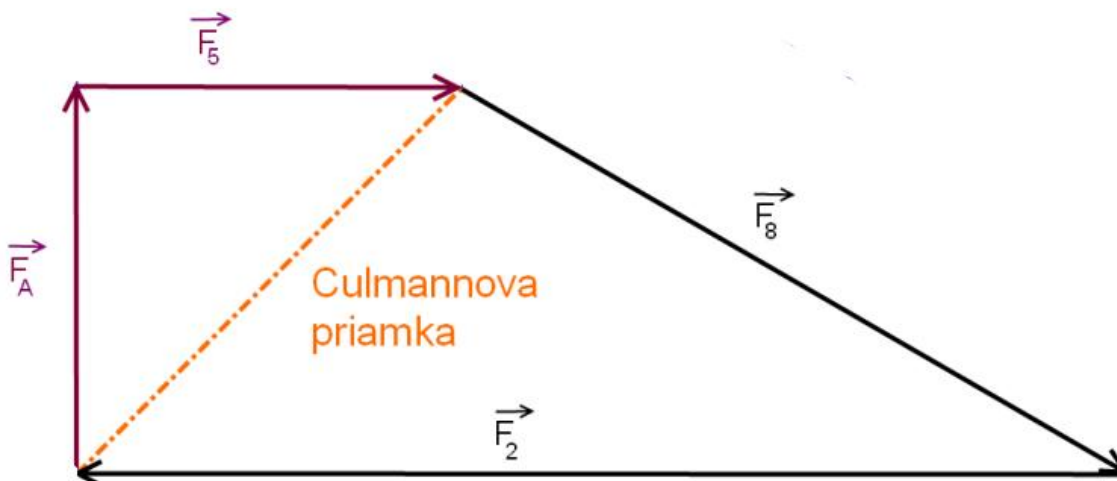


Znázornenia nositeliek síl pôsobiacich na uvoľnené teleso a aplikácia Culmannovej priamky:



Výsledný silový diagram:

Mierka: (1mm = 10N)



Je zrejmé, že sila v prúte 7 ( $F_7$ ) je nulová, pretože ak by mala inú veľkosť nebolo by možné uzavrieť silový obrazec, z tejto skutočnosti tiež vplyva, že veľkosť sily v prúte 5 ( $F_5$ ) je rovná  $F_{AY}$ .

Ďalšie osovú silu je možné dopočítať, novým rezaním sústavy, alebo pomocou niektorej zo spomínaných metód ( Styčnicková metóda, Cremenova metóda ... ).

Tabuľka výsledkov:

Prút číslo:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Sila(N) v prúte:	-758	-1464	-1464	2071	536	536	0	1072	0

### 5.5. Metóda náhradných prútov (Henneberg)

Postup metódy pozostáva zo zmeny prútovej sústavy, zmenou polohy jedného prúta, alebo v prípade potreby viacerých prútov tak, aby túto sústavu bolo možné staticky riešiť metódou styčnickovou. Aby bola zachovaná nutná podmienka statickej určitosti, musí byť počet odňatých prútov rovnaký ako počet pridaných, takzvaných náhradných prútov. [6]

Aby statické riešenie u náhradnej sústavy úplne jednoznačne odpovedalo statickému riešeniu danej sústavy, musia byť splnené tieto predpoklady:

- V styčníku, kde boli odobraté prútové väzby, musí pôsobiť silový účinok odpovedajúci osovým silám prútov ktoré boli odobraté danej sústave.
- Z dôvodu skutočnej neexistencie osových síl v náhradných prútoch musia byť tieto osové sily nulové.

Osové sily v prerušených prútových väzbách sa určia z podmienky nulových osových síl v náhradných prútoch. Potom sa určia sily v prútoch pod vonkajším zaťažením, avšak bez síl nahradzujúcich odobraný prút. Obidva silové stavy superponujeme tak, aby sa náhradný prút stal nulovým prútom a bolo možné ho odstrániť. [5]

**Príklad:**

V danej prútovej sústave určite všetky osovú sily v prútoch pomocou metódy náhradných prútov. ( $F=2000\text{N}$ )

**Rozbor:**

a) Úloha je zadaná úplne a správne.

b) Úloha je zadaná ako rovinná

c) Klasifikácia členov : 0-základné teleso

1-11 – prúty

A-H – styčníky,

degenerované členy.

d) Klasifikácia väzieb :

a) vonkajšie B – rotačná väzba  $\xi_i = 2$

obecná väzba ( podpora)  $\xi_i = 1$

A – obecná väzba ( podpora)  $\xi_i = 1$

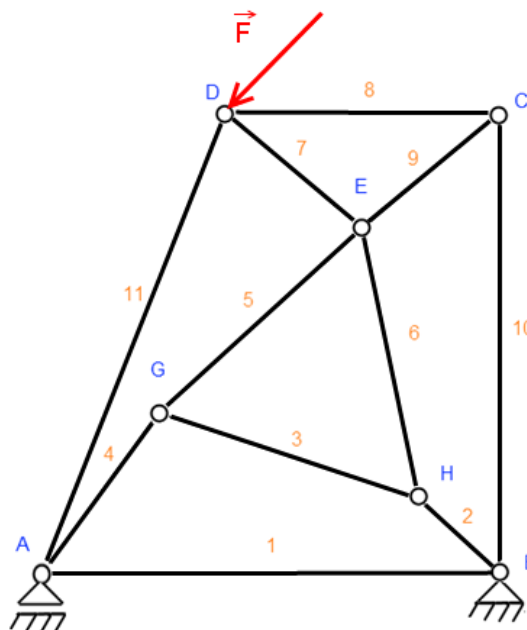
c) vnútorné A,B,C,D,G,H – trojnásobné rotačné väzby  $\xi_i = 3 \cdot 2$

E – štvornásobná rotačná väzba  $\xi_i = 4 \cdot 2$

**Určenie pohyblivosti ( kinematický rozbor) :**

Počet členov (prútov) + základné teleso = 12

Styčníkov (degenerovaných členov)  $\delta = 7$ , celkom  $n = 19$



$$i = (n-1)i_v - \sum \xi_i - \delta + \eta = 18 \cdot 3 - (4 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 6 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1) - 7 =$$

$$= 54 - (8 + 12 + 3) - 7 = 0^\circ$$

Prútová sústava je nepohyblivá.

**Určenie statickej určitosti :**

- a) Vnútoraná  $2s = 3 - P \quad 14 = 3 + 11 = 0$
- b) Vonkajšia  $\mu = v \quad 3 = 3$

Je splnená nutná podmienka statickej určitosti.

**Výpočet síl vo väzbách:**

$$\sum M_{ZB} = 0$$

$$F_{AY} \cdot l = F \cdot \sin(45^\circ) \cdot l + F \cdot \cos(45^\circ) \cdot a \Rightarrow F_{AY} = 2262,7417 \text{ N}$$

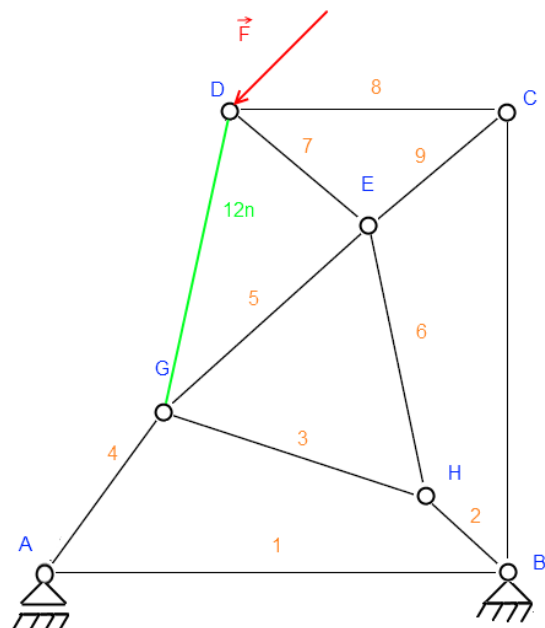
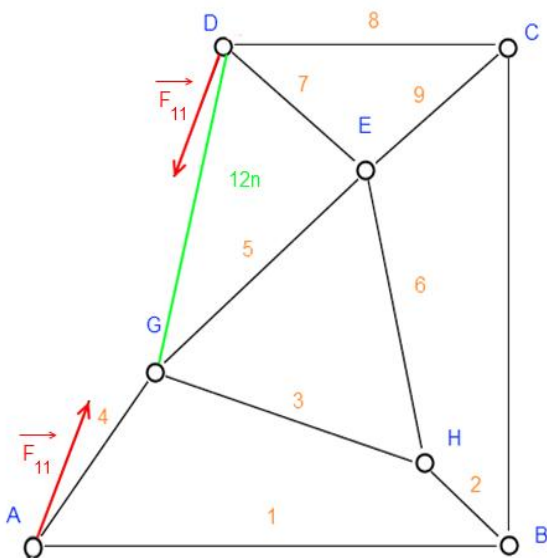
$$\sum F_y = 0$$

$$F_{BY} = F \cdot \sin(45^\circ) - F_{AY} = -848,53 \text{ N}$$

**Podsústavy:**

Stav 1

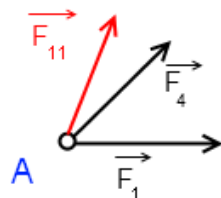
Stav 2



**Výpočet stavu 1 :**

$F_{11}$  volím 1N, ( $F_{11} = 1\text{N}$ )

Styčník A)

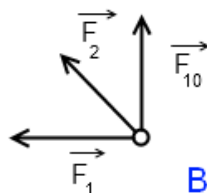


$$F_4 := -F_{11} \cdot \frac{\sin(68.2^\circ)}{\sin(53.89^\circ)}$$

$$F_4 = -1.149\text{N}$$

$$F_1 := -F_4 \cdot \cos(53.89\text{deg}) - F_{11} \cdot \cos(68.2^\circ) = 0.306\text{N}$$

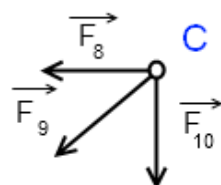
Styčník B)



$$F_2 := \frac{-F_1}{\cos(42.45^\circ)} = -0.415\text{N}$$

$$F_{10} := -F_2 \cdot \sin(42.45^\circ) = 0.28\text{N}$$

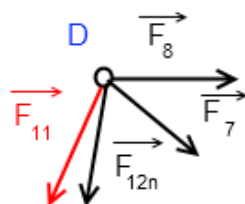
Styčník C)



$$F_9 := \frac{-F_{10}}{\cos(50^\circ)} = -0.435\text{N}$$

$$F_8 := -F_9 \cdot \cos(40^\circ) = 0.334\text{N}$$

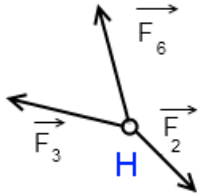
Styčník D)



$$F_{12n} := \frac{(F_8 \cdot \sin(40^\circ) - F_{11} \cdot \sin(68.2^\circ) \cdot \cos(40^\circ) - F_{11} \cdot \cos(68.2^\circ) \cdot \sin(40^\circ))}{\cos(77.34^\circ) \cdot \sin(40^\circ) + \sin(77.34^\circ) \cdot \cos(40^\circ)} = -0.828\text{N}$$

$$F_7 := \frac{(-F_{12n} \cdot \cos(12.66^\circ) - F_{11} \cdot \cos(21.8^\circ))}{\sin(40^\circ)} = -0.188\text{N}$$

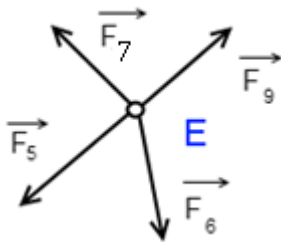
Styčník H)



$$F_3 := \frac{(F_2 \cdot \cos(47.55^\circ) - F_6 \cdot \cos(11.91^\circ))}{\sin(18.09^\circ)} = -0.28 \text{ N}$$

$$F_6 := \frac{(F_2 \cdot \sin(18.09^\circ) \cdot \sin(47.55^\circ) - F_2 \cdot \cos(47.55^\circ)) \cdot \cos(18.09^\circ)}{-\cos(11.91^\circ) \cdot \cos(18.09^\circ) + \sin(11.91^\circ) \cdot \sin(18.09^\circ)} = -0.203 \text{ N}$$

Styčník E)

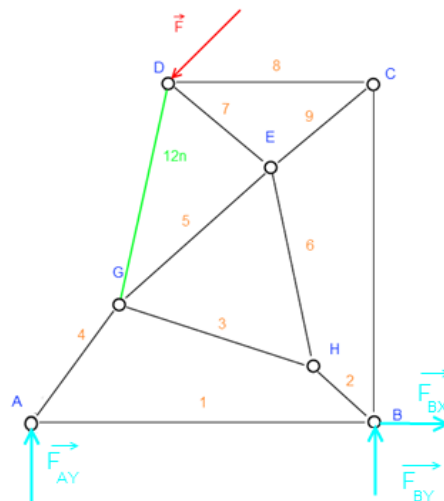


$$F_5 := \frac{(F_6 \cdot \sin(11.91^\circ) + F_9 \cdot \cos(40^\circ) - F_{12n} \cdot \cos(40^\circ))}{\cos(41.91^\circ)} = 0.31 \text{ N}$$

### Výpočet stavu 2:

Výpočet osových síl v stave 2 je obdobný ako v stave jedna, teda postupnou styčnickovou metódou spočítame osovú silu v prútoch. (stav 2 je v kapitole 7.1.3, riešený numericky pomocou programu ANSYS )

### Uvoľnená sústava stavu 2:



**Suporpozícia stavov a výpočet osových síl v zadanej sústave:**

-superponujeme stavy 1 a 2 tak , aby náhradný prút bol nulovým prútom a bolo ho možné odstrániť.

**Reálne osovú síly v prútoch vypočítame podľa vzťahu :**

$$F_i = F_i^2 + \kappa \cdot F_i^1$$

Kde  $F_i^2$  je osová síla v prúte za stavu 2

$F_i^1$  je osová síla v prúte za stavu 1

$\kappa$  je konštanta spočítaná zo vzťahu :  $\kappa = -F_{12n}^2 / F_{12n}^1$

$$\kappa = -F_{12n}^2 / F_{12n}^1$$

$$\kappa = -1325 / -0,828 = 1600$$

$$\kappa = 1600$$

**Tabuľka výsledkov:**

číslo prútu:	stav 1 (N)	stav 2 (N)	skutočná síla v prúte (N)
1	0,306	1650	1160,4
2	-0,415	-320	344
3	-0,28	-215,4	232,62
4	-1,149	-2800	-961,6
5	0,31	-1552,5	-1056,5
6	-0,2	-152,5	167,7
7	-0,188	-190	110,8
8	0,334	1269	734,6
9	-0,435	-1656	-960
10	0,28	1064,6	616,6
11	1	0	-1600

## 5.6. Metóda zjednodušovania sústav

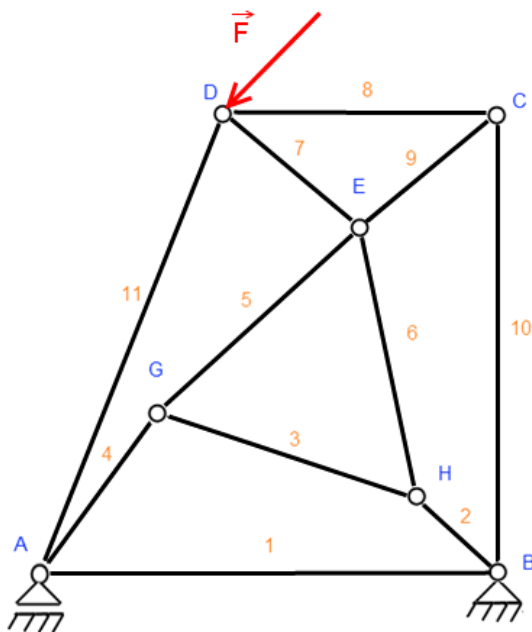
Princíp metódy je založený na tom, že prútové sústavy sa za účelom statického riešenia často považujú za sústavy zložené z prútov a stien.

Táto metóda je vhodná pre prútové sústavy, ktoré nie je možné riešiť graficky, alebo styčnickovou metódou, alebo osovú síly v každom styčníku predstavujú najmenej tri neznáme. Tieto typy prútových sústav však je možné riešiť ako sústavu zloženú z prútov a fiktívnych stien. [6]

Názorný postup riešenia takýchto sústav bude ukázaný na vzorom príklade:

### Príklad:

V danej prútovej sústave určite sily v prútoch využitím metódy zjednodušovania sústav.



Kinematický, statický rozbor a výpočet síl vo väzbách, viz. predošlý príklad (5.5 metóda náhradných prútov, strana 32)

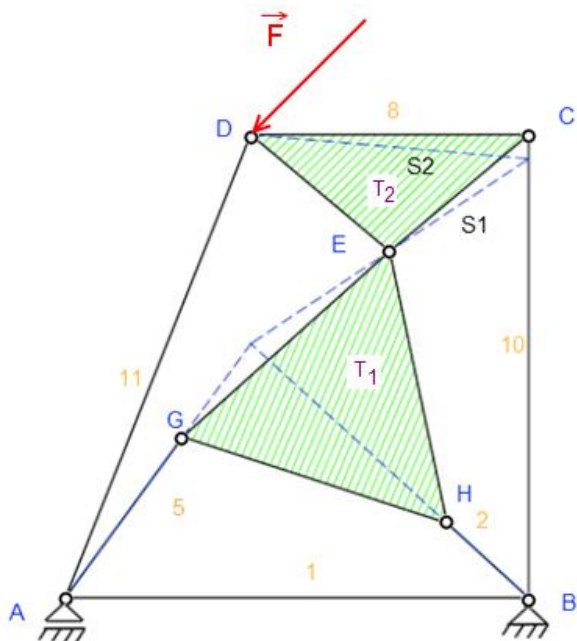
### Zamyslenie:

Daná sústava sa nedá riešiť graficky, ani styčnickovou metódou, lebo osovú síly v každom styčníku predstavujú najmenej tri neznáme. Táto sústava sa však dá riešiť ako sústava zložená z prútov a fiktívnych dosiek I a II.

**Postup riešenia:**

Skupiny prútov prútovej sústavy, ktoré tvoria uzavretý obrazec sú viazané nepohyblivo. Ak nás nezaujímajú sily v týchto prútoch, alebo ich budeme riešiť neskôr, môžeme túto podsústavu nahradiť stenou rovnakého tvaru.

Ak nahradíme prúty 3,5,6 jednotným telesom  $T_1$ , tak na toto teleso posobia 3 sily  $F_2$ ,  $F_4$  a  $S_1^1$ . U síl  $F_2$  a  $F_4$  poznáme nositeľky u sily  $S_1^1$  poznáme bod nositeľky. Dvojnásobnou aplikáciou vety o dvoch silách získame



nositeľky všetkých troch síl  $F_2$ ,  $F_4$  a  $S_1^1$ . Viz. Obrázok (.)

Teraz nahradíme prúty 7,8,9 jediným telesom  $T_2$ . Na teleso  $T_2$  posobia štyri sily  $F$ ,  $F_{11}$ ,  $F_{10}$  a  $S_1^2$ .  $S_1^1 = -S_1^2$  Pre všetky sily poznáme nositeľky a silu  $F$  poznáme úplne. Pomocou Culmannovej priamky určíme všetky sily posobiace na teleso  $T_2$ . Na základe riešenia statickej rovnováhy v styčníkoch A,B,H,G,C,D určíme ostatné sily v prútoch.

Pre riešenie rovnováhy jednotlivých členov môžeme zostaviť tieto symbolické rovnice:

člen I :  $F_5 + F_2 + S_1 = 0$  (rovnováha troch síl, určí sa smer sily  $S_1$ ),

člen II :  $F + S_2 + F_{11} + F_{10} = 0$   
 (rovnováha štyroch síl, pomocou Culmannovej priamky sa určí  $S_2$ ,  $F_{11}$ ,  $F_{10}$ ).

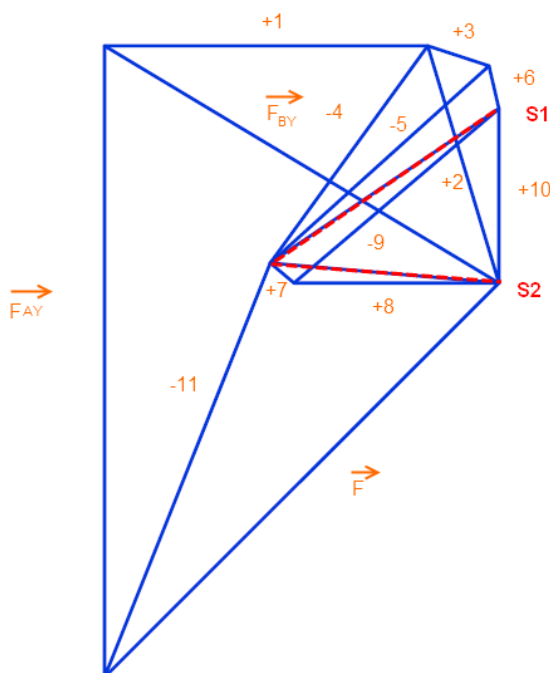
Ďalej je možné späť namiesto fiktívnych dosiek I a II uvažovať jednotlivé prúty a to takto :

$$S_1 = F_5 + F_6$$

$$S_2 = F_7 + F_9$$

Teraz je možné zostaviť Cremonov obrazec pre celú sústavu:

(Mierka 1mm = 10 N)



[6]

**Tabulka výsledkov:**

Prút číslo:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Sila v prúte(N):	1159,6	344	230,9	-961,7	-1056,1	157,6	111,6	734,4	-964	624,7	-1600,4

### 5.7. Metóda neurčitej mierky

Princíp metódy je založený na tom, že v prútoch sústavy sú priamo úmerné veľkosti pôsobiacich síl.

Pri použití tejto metódy zvolíme sily v jednom (ľubovoľnom, ale nenulovom) prúte sústavy a určíme aká veľká vonkajšia sila na danej nositeľke by túto silu vyvolala. Obecné sa takto získaná sila líši od zadanej vonkajšej sily, určíme z ich pomeru mierku, ktorou je nutné násobiť všetky zistené sily v prútoch.

Metóda neurčitej mierky sa často využíva pri statickom riešení prútovej sústavy v prípadoch, keď nie je možné uplatniť jednoduché riešenie styčnickovou metódou, táto metóda je tiež vhodná na riešenie problémov, keď je sústava zaťažená jednou, alebo najviac dvomi silami, pretože riešenie je potrebné opakovať postupne pre každú vonkajšiu zaťažovaciu silu zvlášť. [5]

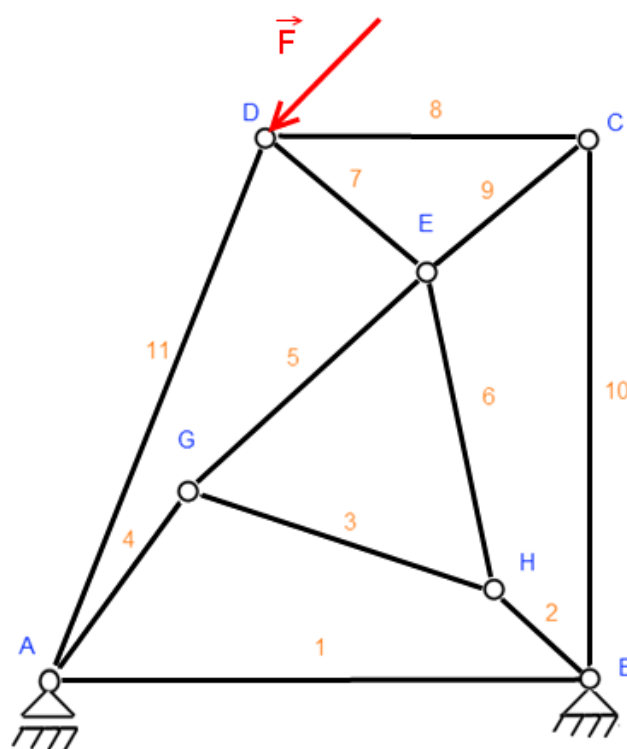
#### Príklad:

Určite osové sily v danej prútovej sústave pomocou metódy neurčitej mierky:

Kinematický , statický rozbor a výpočet síl vo väzbách, viz. predošlý príklad ( 5.5 metóda náhradných prútov, strana 32)

**Zamyslenie:**

keďže všetky styčníky sú minimálne trojné ( obsahujú minimálne tri neznáme parametre) úloha nie je riešiteľná pomocou styčníkovej metódy obcejnej, ani metódou Cremonovho obrazca. Avšak je to vhodná sústava na využitie metódy neurčitej mierky.



**Riešenie:**

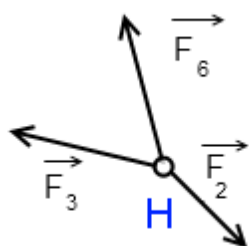
Začíname vhodnou voľbou prúta v ktorom si zvolíme veľkosť osovej sily, v tomto prípade sa ako vhodná voľba javí prút 2, pretože je možné následne v styčníku H dopočítať sily v prútoch 6 a 3 pokračovať do ďalšieho styčníka.

Výpočet stavu 1 :

V prúte 2 volím silu 1N ( $F_2 = 1N$ )

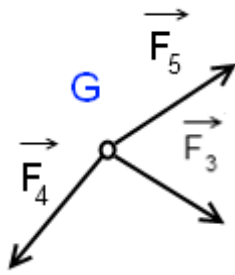
Styčník H:

$$F_3 := \frac{[F_2 \cdot \sin[42.45(^{\circ})] \cdot \sin(11.91^{\circ}) - F_2 \cdot \cos(11.91^{\circ}) \cdot \cos(42.45^{\circ})]}{\sin(18.09^{\circ}) \cdot \sin(11.91^{\circ}) - \cos(18.09^{\circ}) \cdot \cos(11.91^{\circ})} = 0.6728 N$$



$$F_6 := \frac{(F_2 \cdot \cos(42.45^{\circ}) - F_3 \cdot \cos(18.09^{\circ}))}{\sin(11.91^{\circ})} = 0.476N$$

Styčník G:

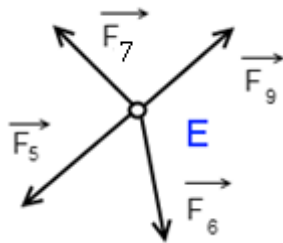


$$F_4 := \frac{[F_3 \cdot (\cos(71.91^\circ) \cdot \cos(41.91^\circ) + \sin(71.91^\circ) \cdot \sin(41.91^\circ))]}{\sin(36.11^\circ) \cdot \sin(41.91^\circ) - \cos(36.11^\circ) \cdot \cos(41.91^\circ)} = -2.8072 \text{ N}$$

$$F_5 := \frac{(F_4 \cdot \sin(36.11^\circ) - F_3 \cdot \sin(71.92^\circ))}{\cos(41.91^\circ)} = -3.083 \text{ N}$$

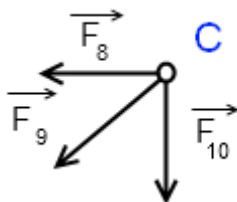
Styčník E:

$$F_9 := \frac{[F_6 \cdot (\cos(11.91^\circ) \cdot \sin(50^\circ) - \sin(11.91^\circ) \cdot \cos(50^\circ)) + F_5 \cdot (\sin(41.91^\circ) \cdot \sin(50^\circ) + \cos(41.91^\circ) \cdot \cos(50^\circ))]}{(2 \cdot \cos(50^\circ) \cdot \sin(50^\circ))} = -2.801 \text{ N}$$



$$F_7 := \frac{(F_6 \cdot \cos(11.91^\circ) + F_5 \cdot \sin(41.91^\circ) - F_9 \cdot \cos(50^\circ))}{\cos(50^\circ)} = 0.322 \text{ N}$$

Styčník C:

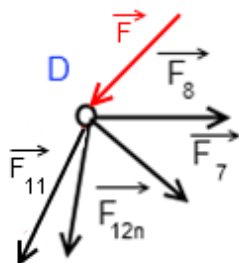


$$F_{10} := -F_9 \cdot \sin(40^\circ) = 1.8 \text{ N}$$

$$F_8 := -F_9 \cdot \cos(40^\circ) = 2.145 \text{ N}$$

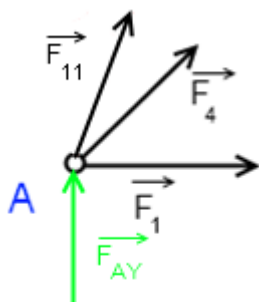
Styčník D:

$$F_c := \frac{(F_8 \cdot \cos(21.8^\circ) + F_7 \cdot \cos(50^\circ) \cdot \cos(21.8^\circ) + F_7 \cdot \sin(50^\circ) \cdot \sin(21.8^\circ))}{\cos(45^\circ) \cdot \cos(21.8^\circ) - \sin(45^\circ) \cdot \sin(21.8^\circ)} = 5.778 \text{ N}$$



$$F_{11} := \frac{(-F_c \cdot \sin(45^\circ) - F_7 \cdot \sin(50^\circ))}{\cos(21.8^\circ)} = -4.666 \text{ N}$$

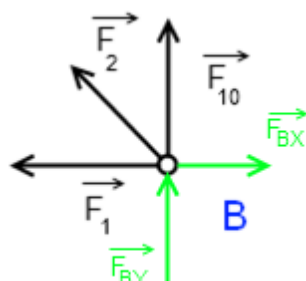
Styčník A:



$$F_1 := -F_4 \cdot \cos(53.89^\circ) - F_{11} \cdot \cos(68.2^\circ) = 3.387 \text{ N}$$

$$F_{AY} := -F_4 \cdot \sin(53.89^\circ) - F_{11} \cdot \sin(68.2^\circ) = 6.6 \text{ N}$$

Styčník B:

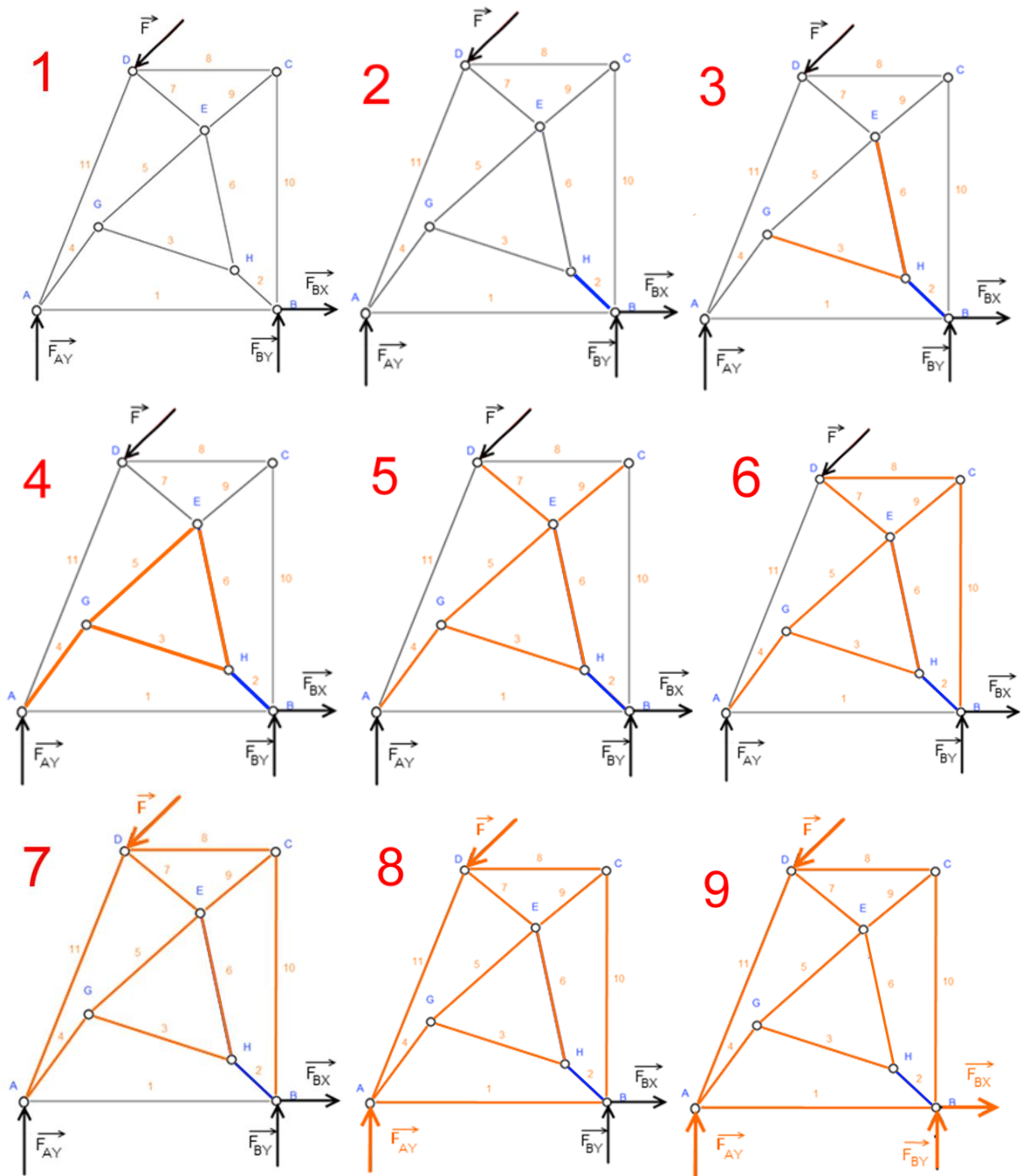


$$F_{BX} := F_1 + F_2 \cdot \cos(42.45^\circ) = 4.125 \text{ N}$$

$$F_{BY} := -F_{10} - F_2 \cdot \sin(42.45^\circ) = -2.475 \text{ N}$$

### Priebeh výpočtu:

Známe sily v prútoch sú značené oranžovou farbou, parametre ktoré je potrebné spočítať nie sú farebné (čierna farba), volená sila je modrej farby.



Výpočet koeficientu mierky:

$$m = F/F_c = 2000\text{N}/5,778\text{N} = 346$$

Výpočet reálnych stykových síl a síl v prútoch:

$$F_r = F_i \cdot m$$

Pre názornosť výpočet v prúte číslo 1:

$$F_1 = F_1^1 \cdot m = 3,38 \cdot 346 = 1169 \text{ N}$$

Tabuľka výsledkov:

Sila (i)	Veľkosť sily $F_i^1(\text{N})$	Reálna veľkosť sily (N)
1	3,387	1168,515
2	1	345
3	0,6728	232,116
4	-2,8	-966
5	-3,083	-1063,64
6	0,47	162,15
7	0,322	111,09
8	2,14	738,3
9	-2,801	-966,345
10	1,8	621
11	-4,666	-1609,77
$F_{AY}$	6,56	2263,2
$F_{BY}$	-2,47	-847,7
$F_{BX}$	4,12	1421,4

## 6. Staticky neurčité prútové sústavy

Prútové sústavy, pri ktorých nemožno určiť osovú silu v prútoch len zo statických podmienok rovnováhy, nazývame staticky neurčitými. V prípade staticky neurčitých sústav musíme statické podmienky rovnováhy styčníka doplniť deformačnými podmienkami (musí byť zohľadnená podmienka neporušenosti spojenia prútov v styčníkoch po deformácii). Celkový počet rovníc musí byť totožný s celkovým počtom neznámych osových síl v styčníku.

Obvykle sa tieto prútové sústavy riešia Castiglianovou vetou. Najvýhodnejšie je však použiť numerické metódy, napríklad metódu konečných prvkov, pre názornosť riešenie daného príkladu prevedieme aj analytickou aj numerickou metódou. Staticky neurčité prútové sústavy sú z hľadiska pevnosti a tuhosti často výhodnejšie konštrukcie, zložitejšia je však ich statická analýza pôvodnými analytickými metódami. Preto prevládalo v minulosti úsilie navrhovať sústavy staticky určité. S rozvojom numerických metód však tento problém odpadá. [1]

### 6.1. Castiglianova veta

Z hľadiska praktického použitia je Castigliánova veta najdôležitejšou vetou v lineárnej pružnosti, pretože umožňuje určovať deformačné charakteristiky akéhokoľvek lineárne pružného telesa.

Castiglianova veta v podstate vyjadruje vzťah medzi deformáciou telesa a energiou akumulovanou v telese vplyvom zaťaženia.

Každé elastické teleso sa pod účinkom vonkajšieho zaťaženia deformuje a vynaložená práca sa v telese akumuluje vo forme deformačnej energie.

*AK pôsobí na lineárne pružné teleso (sústavu) silová sústava, tak posuv  $u_j$  pôsobiska sily  $\vec{F}$  po jej nositeľke je daný parciálnou deriváciou celkovej energie napätosti telesa (sústavy) podľa tejto sily.*

$$u_j = \frac{\partial W}{\partial F_j}$$

Uhol natočenia ( $\gamma$ ) priamky spojenej s pôsobiskom silovej dvojice  $M$  v rovine jej pôsobenia je daný parciálnou deriváciou celkovej energie napätosti telesa (sústavy) podľa tejto dvojice ( $M_j$ )

$$\gamma = \frac{\partial W}{\partial M_j}$$

[2]

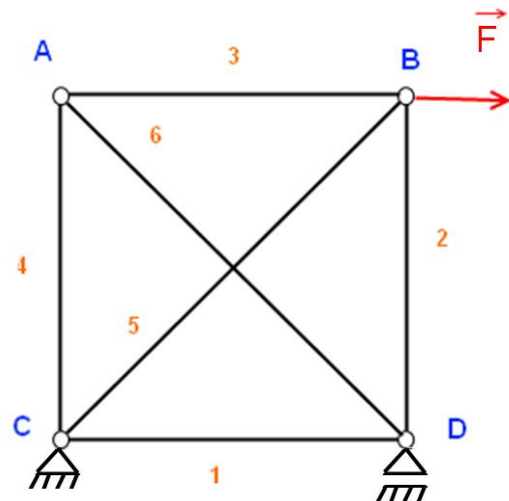
**Príklad:** V danej prútovej sústave určite osové sily v prútoch.

**Zadanie:**

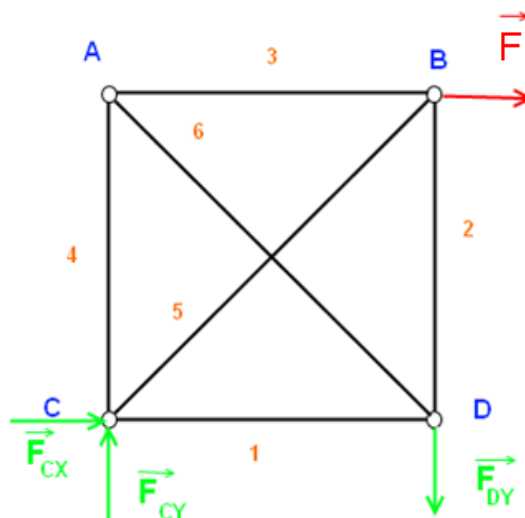
Modul pružnosti v ťahu :  $E=210\,000$  MPa

Zaťažujúca sila  $F = 2$  kN

Výrobná nepresnosť  $\delta = 0$  mm



**Úplné uvoľnenie:**



**Zamyslenie :** Prútová sústava je zaťažená silou F

**Rozbor:**

a) Úloha je zadaná úplne a správne.

b) Úloha je zadaná ako rovinná

c) Klasifikácia členov : 0-základné teleso

1-6 – prúty

A-D – styčníky, degenerované členy.

d) Klasifikácia väzieb :

a) vonkajšie C – rotačná väzba  $\xi_i = 2$

D – posuvná väzba  $\xi_i = 1$

b) vnútorné A,B,C,D – trojnásobné rotačné väzby  $\xi_i = 4 \cdot 2$

Určenie pohyblivosti ( kinematický rozbor ) :

Počet členov (prútov) + základné teleso = 7

Styčníkov (degenerovaných členov)  $\delta = 4$ , celkom  $n = 11$

počet obmedzených deformačných parametrov  $\eta = 1$

**Kinematická určitosť:**

$$i = (n-1)i_v - \sum \xi_i - \delta + \eta = 10 \cdot 3 - (3 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1) - 4 = 30 - (24 + 3) - 4 + 1 = 0^\circ$$

Prútová sústava je nepohyblivá.

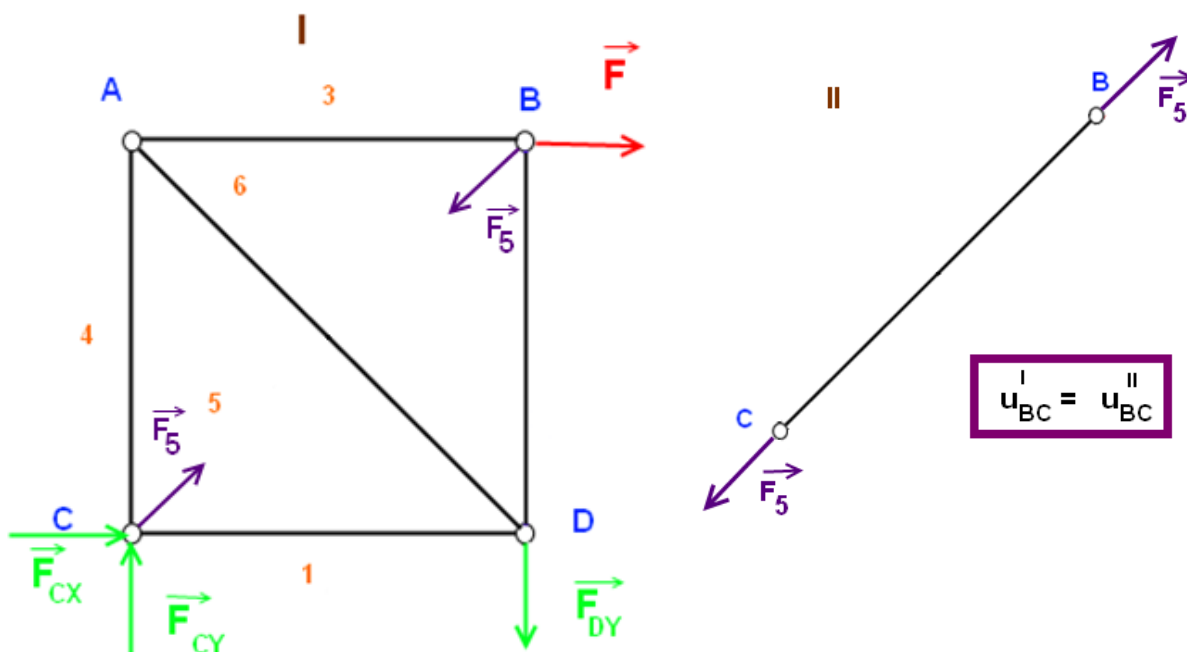
**Určenie statickej určitosti :**

a) Vnútorná  $2s = 3 + P$   $8 - 3 - 6 = -1$

b) Vonkajšia  $\mu = v$   $3 = 3$

Nie je splnená nutná podmienka statickej určítosti, sústava je 1x staticky neurčitá, pre riešenie bude nutné zaviesť jednu deformačnú podmienku pre získanie dostatočného počtu rovníc pre riešenie silovej rovnováhy sústavy.

### Čiastočné uvoľnenie:



vnútorne staticky určitou : Uvoľníme prút 5 zo styčnίκu B a do bodu B zavedieme deformačnú podmienku pre relatívny posuv bodu B,  $u_B = \delta$ .  $\delta$  je výrobná nepresnosť, tento parameter môže naberať hodnoty : 0 pre ideálne rozmery elementu

+ v prípade vôle

- v prípade presahu

V našom prípade uvažujeme ideálne rozmery elementu, teda  $\delta = 0$ .

Sily v prútoch riešime postupnou styčnίκovou metódou. Pritom neurčujeme veľkosti síl ( úloha je staticky neurčitá), ale iba ich funkčnú závislosť na silách, ktoré sú zavedené do čiastočne uvoľnených väzieb. [2]

**Výpočet stykových výslednic:**

$$\sum M_C = 0$$

$$F_{DY} \cdot l - F \cdot l = 0$$

$$F_{DY} = F$$

$$F_{DY} := F_c = 2000 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{DY} + F_{CY} = 0$$

$$F_{CY} := -F_{DY} = -2000 \text{ N}$$

$$F_{CY} = -F_{DY}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$F_{CX} := -F_c = -2000 \text{ N}$$

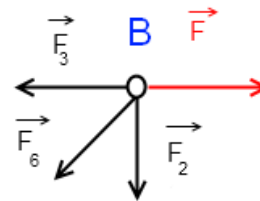
$$F_{CX} = -F$$

**Vyjadrenie deformačných podmienok a výpočet síl v prútoch:**

Styčnák B)

$$F - F_6 \cdot \cos 45^\circ - F_3 = 0$$

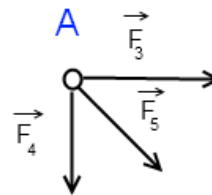
$$\underline{F_2 + F_6 \cdot \cos 45^\circ = 0}$$



Styčnák A)

$$F_3 + F_5 \cdot \cos 45^\circ = 0$$

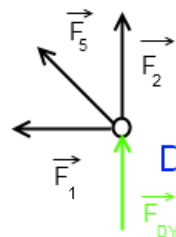
$$\underline{F_4 + F_5 \cdot \cos 45^\circ = 0}$$



Styčnák D)

$$F_1 + F_5 \cdot \cos 45^\circ = 0$$

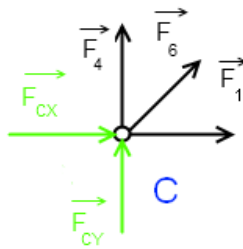
$$\underline{F_{DY} + F_2 + F_5 \cdot \cos 45^\circ = 0}$$



Styčnik C)

$$F_{CX} + F_1 + F_6 \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$F_{CY} + F_4 + F_6 \cdot \cos 45^\circ = 0$$



Vyjadrenie síl pomocou  $F_5$  :

$$F_1 = -F_5 \cdot \cos 45^\circ$$

$$F_2 = -F_5 \cdot \cos 45^\circ - F_{DY}$$

$$F_3 = -F_5 \cdot \cos 45^\circ$$

$$F_4 = -F_5 \cdot \cos 45^\circ$$

$$F_6 = F_5 + F_{DY} / \cos 45^\circ$$

Vyjadrenie deformačných podmienok a výpočet síl v prútoch:

$$u_A = \frac{\partial W}{\partial F_5} \sum_{i=1}^6 \frac{F_i \cdot l_i}{E_i \cdot S_i} \cdot \frac{\partial F_i}{\partial F_5} = \delta = 0$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial F_5} = \frac{\partial F_2}{\partial F_5} = \frac{\partial F_3}{\partial F_5} = \frac{\partial F_4}{\partial F_5} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\partial F_5}{\partial F_5} = \frac{\partial F_6}{\partial F_5} = 1$$

$$u_A = \frac{l}{E \cdot S} \left[ \begin{aligned} & -F_5 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (-F_5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - F_{DY}) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (-F_5 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (-F_5 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (-F_5 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}}) + \\ & + ((F_5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + F_{DY}) \cdot \frac{2}{\sqrt{2}}) \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right] = 0$$

$$F_5 = -1121 \text{ N}$$

Dosadením sily  $F_5$  do vzťahov získaných z podmienok statickej rovnováhy vypočítame ostatné sily v prútoch ( $F_1...F_6$ ).

Číslo prúta	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$
Sila v prúte:	792,67 N	-1208 N	792,67 N	792,67 N	-1121 N	1708,37 N

## 7. Metóda konečných prvkov

V súčasnosti Metóda konečných prvkov (ďalej len MKP) dominuje medzi modernými metódami pri riešení problémov mechaniky. Táto metóda je používaná aj v iných oblastiach inžinierskych výpočtov mechaniky kontinua. MKP je založená na úplne inom princípe než spomínané analytické metódy statiky a pružnosti pevnosti. Zatiaľ čo spomínané metódy sú založené na diferenciálnom a integrálnom počte, MKP je založená na menej známom variačnom počte, hľadá minimum potenciálnej energie.

Funkcionál – zobrazenie z množiny funkcií do množiny čísel. Je to teda pravidlo, podľa ktorého priradíme funkcii na jej definičnom obore nejakú číselnú hodnotu.

Základným funkcionálom v deformačne – napät'ovej analýze pružných telies je ich potenciálna energia. V súlade s definíciou funkcionálu je to číselná hodnota, priradená funkciám popisujúce deformačné posuvy jednotlivých bodov telesa. Pre ľubovoľný deformovaný tvar telesa je možné túto energiu napatosti určiť z pretvorenia a napatia vo všetkých bodoch telesa. Pri danom zaťažení a väzbách k okoliu, nemôže teleso v praxi zaujať ľubovoľný tvar, ale jeho deformovaný tvar je jednoznačne definovaný. Z rôznych možných deformovaných tvarov telesa je to práve energeticky najmenej náročný, čo z matematického hľadiska vyjadruje takzvaná veta o minime kvadratického funkcionálu. Formulujeme obecný prírodný princíp, že z možných dejov prebehne práve ten, ku ktorého uskutočneniu je potrebné minimum energie. Z možných deformovaných tvarov telesa, odpovedajúcich definovaným okrajovým podmienkam (zaťaženie, vazby), sa preto realizuje ten, ktorý je energeticky najmenej náročný. Príslušným energetickým funkcionálom, ktorého minimum

určuje skutočný deformovaný tvar telesa, je celková potenciálna energia telesa  $\Pi$ , definovaná ako rozdiel energie napatosti telesa  $W$  a potenciálna energia zaťaženia  $P$ .

$$\Pi = W - P$$

Celková potenciálna energia telesa je samozrejme funkciou posuvov jeho jednotlivých bodov. Variačné metódy mechaniky potom umožňujú nájsť minimum funkcionálu, teda nájsť taký tvar, v ňom bude pri daných okrajových podmienkach ( zaťaženie , vazby) Funkcionál  $\Pi$  najmenší, a ktorý sa preto v skutočnosti ako jediný realizuje.

Praktický výpočet prebieha tak, že za pomoci softvéru pre prípravu vstupných dát ( preprocessing) sa vytvorí geometrický model telesa, alebo sústavy, ktorý sa spojí, tj. bez zvyšku, rozdelí na prvky konečných rozmerov. Základným prvkom v rovine je štvoruholník, v priestore šesťuholník, niekedy je nutné použiť iné tvary prvkov ( trojuholník, štvorsten). Rohy týchto prvkov, prípadne niektoré ďalšie významné body, sú uzlovými bodmi, v nich sa určujú neznáme hodnoty posuvov, strany (hrany) prvkov vytvárajú sieť, ktorej hustota je rozhodujúca pre presnosť výsledkov.

Bodov v ktorých určujeme posuvy, nemôže byť v praxi nekonečne veľa. Hustotu siete volí výpočtár na základe svojej skúsenosti. V prípade príliš hustej siete trvá riešenie príliš dlho, naopak príliš riedka sieť môže viesť k podhodnoteniu napätia.

Všetkým prvkom je potrebné zadať konštitutívne parametre materiálu ( pre izotropný lineárne elastický materiál je to modul pružnosti a Poissonovo číslo). Ďalej sa definujú okrajové podmienky (vazby, zaťaženie), ktoré pre statickú úlohu musia zaistiť jednoznačnú polohu telesa v priestore , statická neurčitost' nijak nekomplikuje úlohu, predpíše sa len viac okrajových podmienok. Následné spustenie riešenia (solveru), čo je program, ktorý na základe vstupných hodnot zostaví a vyrieši sústavu rovníc s neznámymi posuvmi a z nich spočíta pretvorenie a napatie. Bez zadania všetkých vstupných hodnot nie je možné riešenie úlohy spustiť, takže metódou konečných prvkov nie je možné riešiť nepriame úlohy, tj, úlohy, ktoré majú neznáme parametre geometrie, zaťaženie apod.

Poslednou časťou naprogramovaného systému je postprocessing, respektíve program pre spracovanie výsledkov. Umožňuje v najroznejších podobách znázorniť rozloženie ktorýchkoľvek výstupných parametrov ( zložky napätia, posuvu a iné) v telese , alebo v zvolenej podoblasti, rovnako ako počítať redukované napätia , alebo iné hodnoty potrebné k posúdeniu medzných stavov. [2]

## 7.1. Výpočet riešených úloh pomocou MKP

Všetky úlohy boli spracované pomocou programu ANSYS

Postup riešenia:

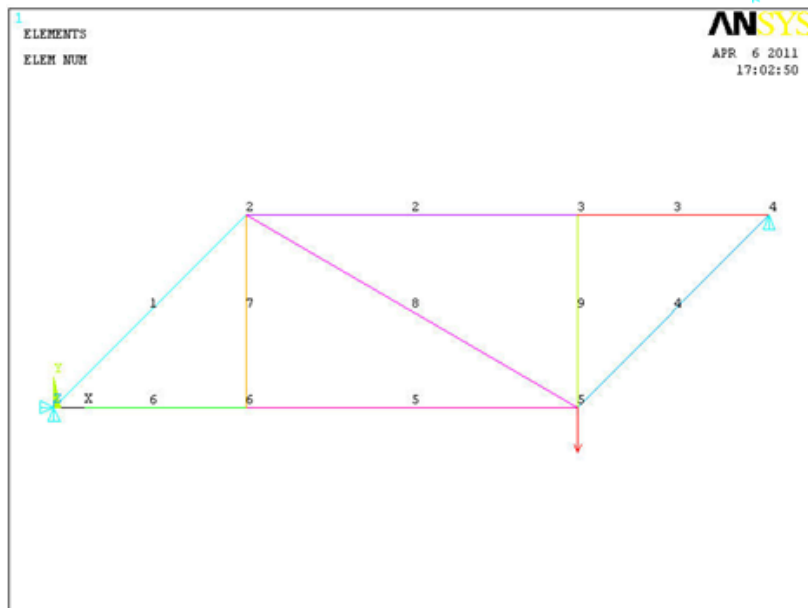
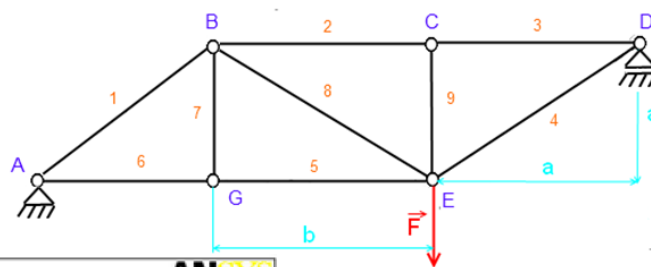
V preprocesingu sme si naštudovali daný problém a to vymodelovaním sústavy.

- zadanie bodov geometrie ( Keypoints) a to pomocou súradníc daného bodu.
- vytvorené body (styčníky) následne pospájame (vytvoríme potrebné prúty).
- V ďalšom kroku naštudujeme typ prvku ( Element). Zvolíme typ elementu Link – 2D spear, ktorý ma vlastnosti našej prútovej sústavy. Následne v reálnych konštantách naštudujeme geometrické vlastnosti našich prvkov (elementov), respektíve prierez prúta. Keďže výstupnou charakteristikou je napätie, priemer volím 1, kedy napätie v prúte je totožné s osovou silou v prúte čo je pre nás porovnateľná charakteristika. Ďalej je pre výpočet nutné naštudovať materiálové vlastnosti prútových prvkov, zvolili sme materiál lineárny, elastický, izotropný s modulom pružnosti 210 000 a s Poissonovou konštantou 0,3 , tieto charakteristiky v tomto prípade nemajú na výsledok žiadny vplyv, ale sú podstatné pre samotné riešenie problému.
- V ďalšom kroku sme naštudovali veľkosť jednotlivých prvkov (Mesh Size). Veľkosť zvolíme 1, čiže každý element sa delí na jeden prvok, teda prvok predstavuje celý jeden prút. Následne vytvoríme sieť prvkov.
- V poslednej fáze priradíme vazby a zaťaženie sústavy. Zvolíme typ analýzy (statická), pretože zaťaženie našich sústav nie je závislé na čase. Spustíme riešenie daného problému (Solve – Current LS)
- Po skončení výpočtu, prezeráme a analyzujeme výsledné dáta v postprocessingu.

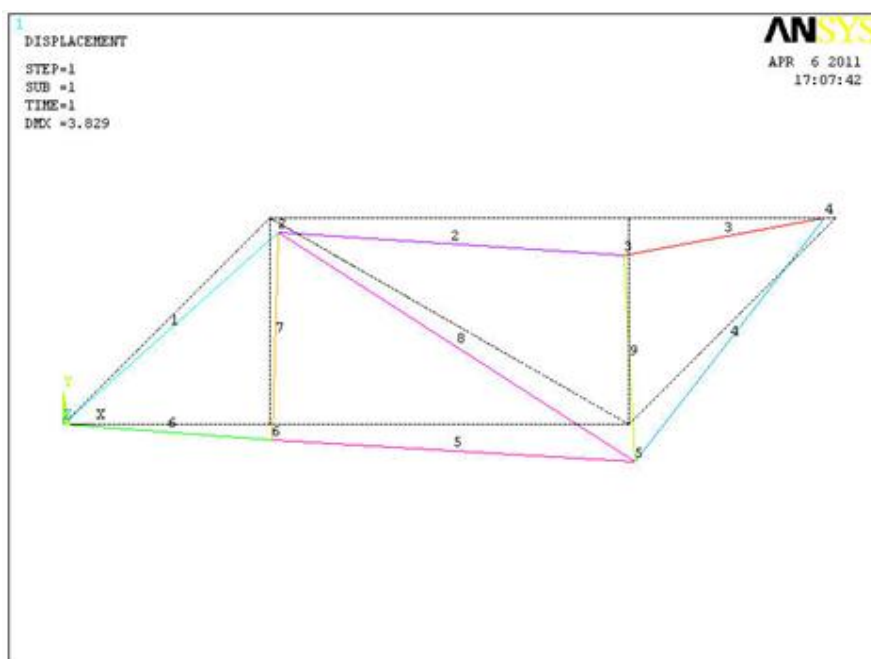
[7]

### 7.1.1. Úloha číslo 1

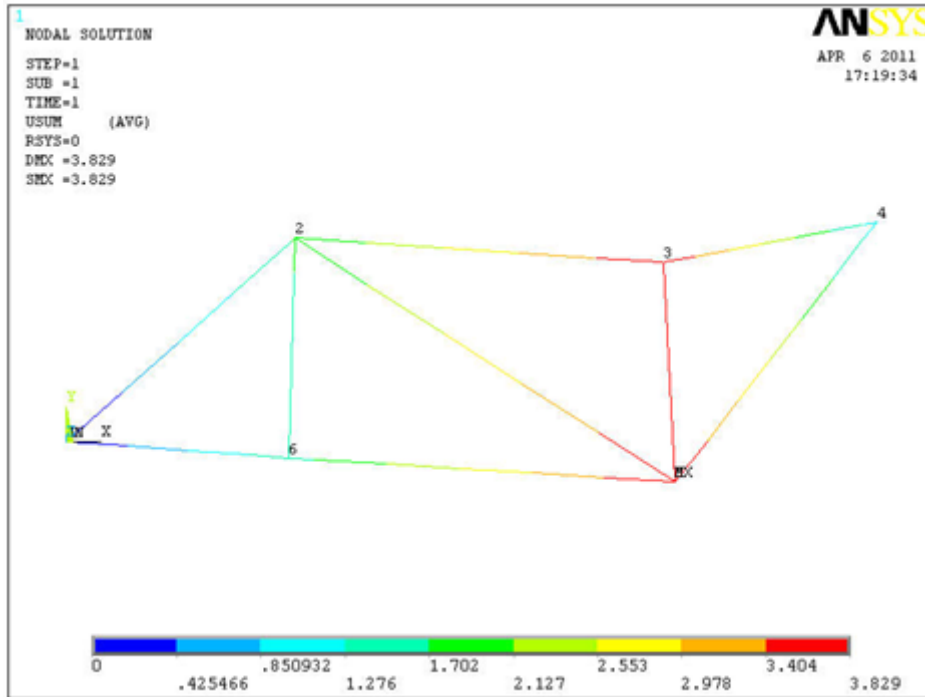
Riešená sústava je sústava z 5.2.1 strana 24.



Obr. 7.1.1.1 Sústava s väzbami a zaťažením vytvorená v programe ANSYS



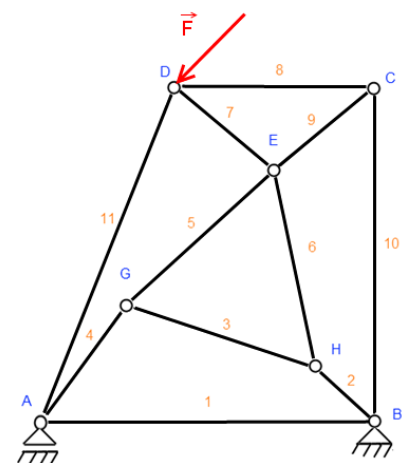
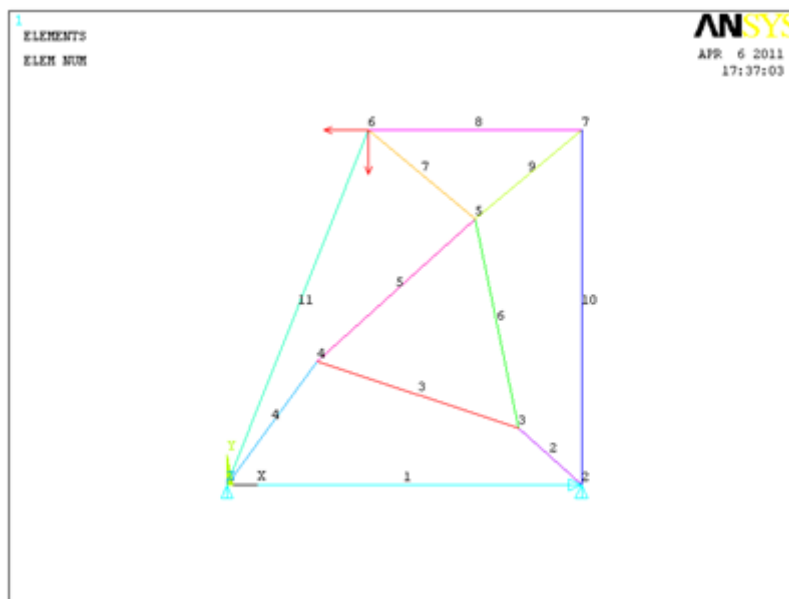
Obr. 7.1.1.2 Deformovaná a nedeformovaná sústava



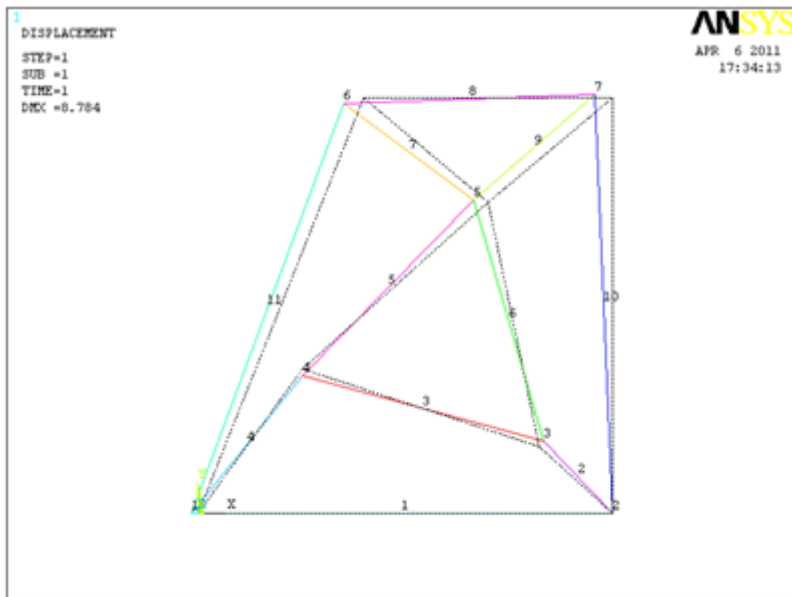
Obr. 7.1.1.3 Zobrazenie sumárnych (celkových) posuvov

## 7.1.2. Úloha číslo 2

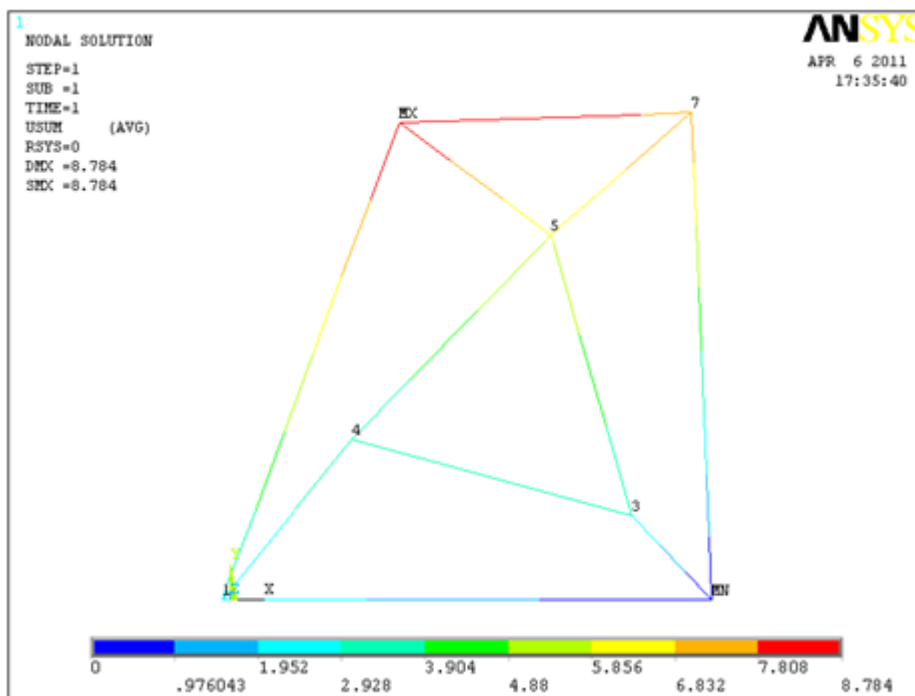
Riešená sústava je sústava z 5.5 strana 36.



Obr. 7.1.2.1 Sústava s väzbami a zaťažením vytvorená v programe ANSYS



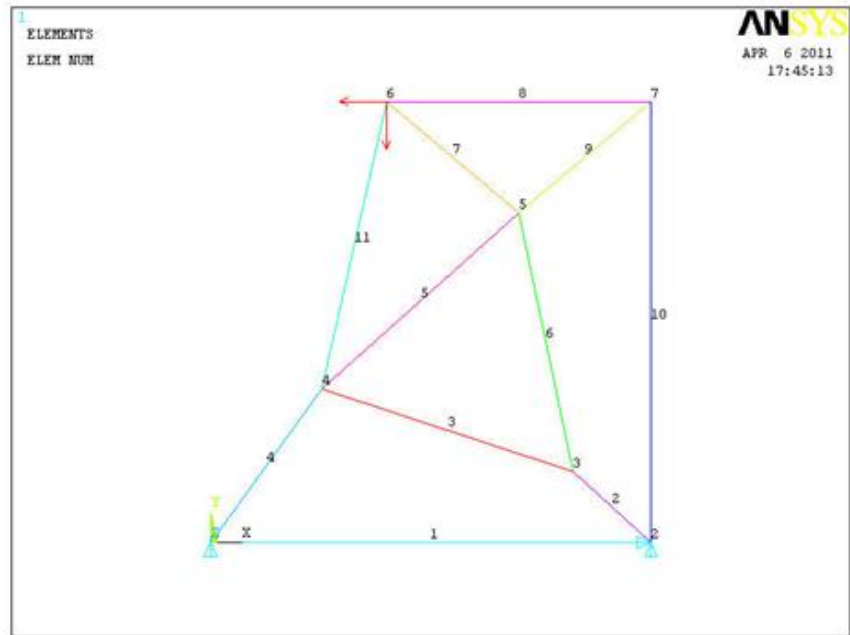
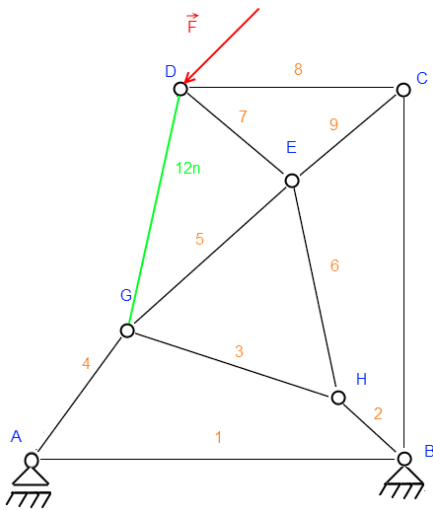
Obr. 7.1.2.2 Deformovaný a nedeformovaný stav sústavy



Obr. 7.1.2.3 Zobrazenie sumárnych (celkových) posuvov

### 7.1.3. Úloha číslo 2.1

Riešená sústava je spomínaný výpočet podsústavy z 5.5 strana 39 (stav číslo 2)



Obr. 7.1.3.1 Sústava s väzbami a zaťažením vytvorená v programe ANSYS

```

PRETAB Command
File
PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEI
**** POST1 ELEMENT TABLE LISTIN
STAT  CURRENT
ELEM  SILA
1      1650.4
2      -320.10
3      -215.38
4      -2800.7
5      -1552.5
6      -152.45
7      -189.10
8      1268.8
9      -1656.2
10     1064.6
11     -1324.8

MINIMUM VALUES
ELEM  4
VALUE -2800.7

MAXIMUM VALUES
ELEM  1
    
```

```

PRRSOL Command
File
PRINT F REACTION SOLUTIONS PER NODE
**** POST1 TOTAL REACTION SOLUTION LISTING ****
LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING X,Y,Z SOLUTIONS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

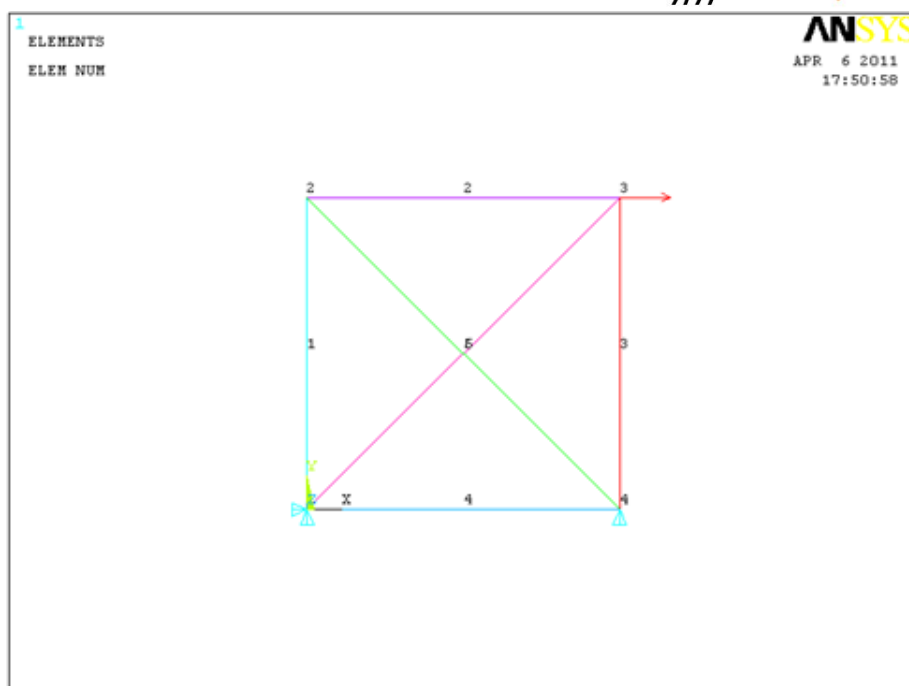
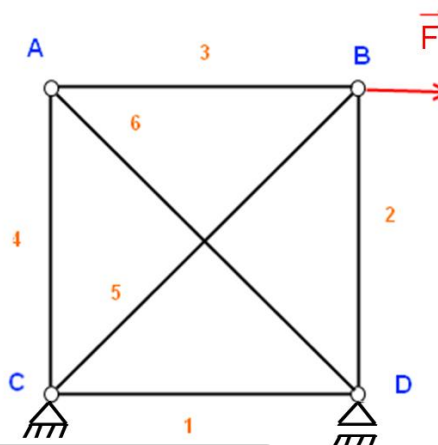
NODE  FX      FY
1      2262.7
2     1414.2   -848.53

TOTAL VALUES
VALUE  1414.2   1414.2
    
```

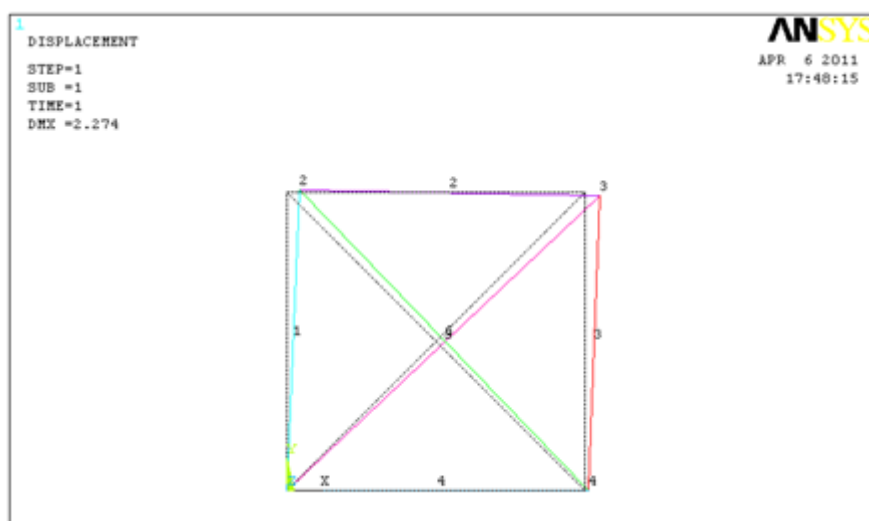
Obr. 7.3.2.2 Veľkosti osových síl v prútoch a veľkosti stykových výsledníc

### 7.1.4. Úloha číslo 3

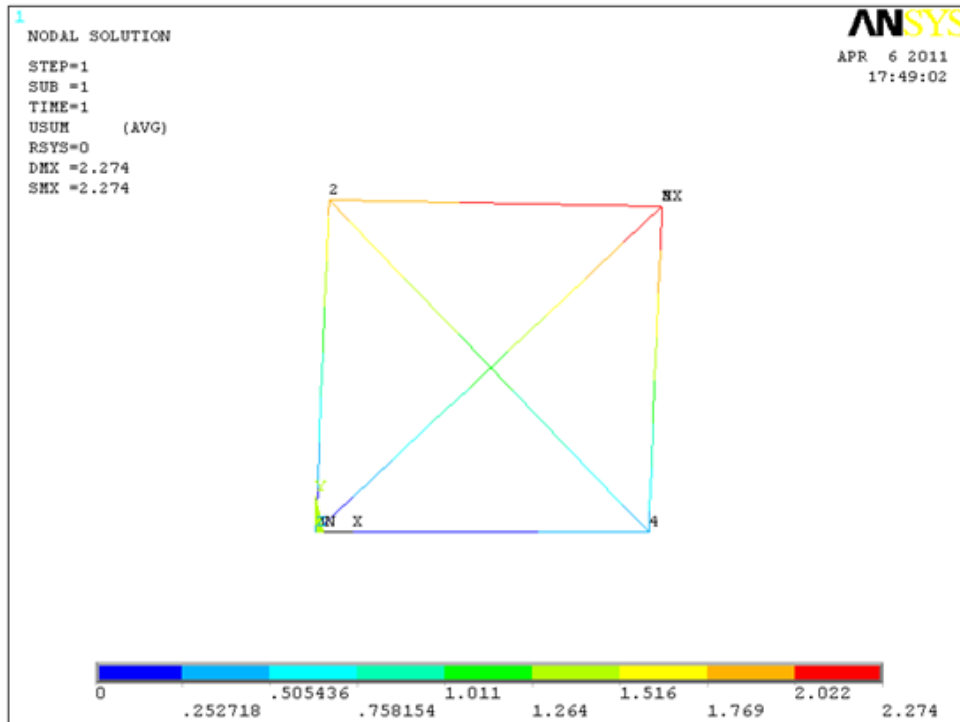
Riešená sústava je sústava z 6.1 strana 50.



Obr. 7.1.4.1 Sústava s väzbami a zaťažením vytvorená v programe ANSYS



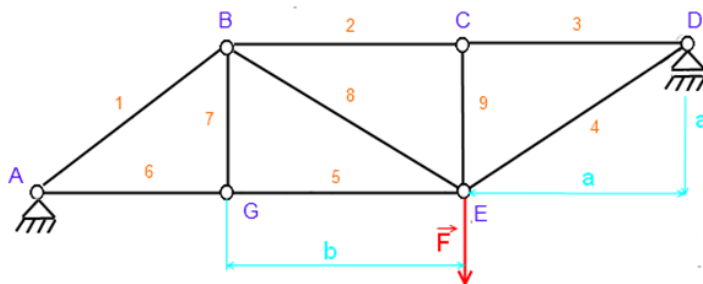
Obr. 7.1.4.2 Deformovaný a nedeformovaný stav sústavy



Obr. 7.1.4.3 Zobrazenie sumárnych (celkových) posuvov

## 8. Zhodnotenie a porovnanie výsledkov

### 8.1. Úloha číslo 1



Na danú prútovú sústavu bola aplikovaná styčnicková metóda (obecná, postupná), metóda Cremonovho obrazca, priesečná metóda (Ritterova, Culmannova) a tiež metóda konečných prvkov.

	Styčnková obecná	Styčnková postupná	Cremonov obrazec	Ritterova	Culmannova
Sila v prúte č. 1	-757,875 N	-758,018 N	-758 N	-758,018 N	-758,018 N
Sila v prúte č. 2	-1464 N	-1464 N	-1464 N	-1464 N	-1464 N
Sila v prúte č. 3	-1464 N	-1464 N	-1464 N	-1464 N	-1464 N
Sila v prúte č. 4	2071 N	2070 N	2070 N	2070 N	2070 N
Sila v prúte č. 5	535,898 N	536 N	536 N	536 N	536 N
Sila v prúte č. 6	535,898 N	536 N	536 N	536 N	536 N
Sila v prúte č. 7	0 N	0 N	0 N	0 N	0 N
Sila v prúte č. 8	1072 N	1072 N	1072 N	1072 N	1072 N
Sila v prúte č. 9	0 N	0 N	0 N	0 N	0 N
$F_{AX}$	0 N	0 N	0 N	0 N	0 N
$F_{AY}$	535,898 N	535,898 N	535,898 N	535,898 N	535,898 N
$F_{AY}$	1464 N	1464 N	1464 N	1464 N	1464 N

Výsledné dáta vyexpedované programom ANSYS z v výpočtu danej prútovej sústavy pomocou metódy konečných prvkov.

```

ANSYS PRETAB Command
File
PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT
**** POST1 ELEMENT TABLE LISTING ****
STAT   CURRENT
ELEM   $ILA
  1    -757.87
  2   -1464.1
  3   -1464.1
  4    2070.6
  5    535.90
  6    535.90
  7     0.0000
  8   1071.8
  9     0.0000

MINIMUM VALUES
ELEM   2
VALUE  -1464.1

MAXIMUM VALUES
ELEM   4
VALUE   2070.6

```

Osové sily v jednotlivých prútoch

```

ANSYS PRRSOL Command
File
PRINT F REACTION SOLUTIONS PER NODE
**** POST1 TOTAL REACTION SOLUTION LISTING ****
LOAD STEP= 0 SUBSTEP= 1
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING X,Y,Z SOLUTIONS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM
NODE   FX      FY
  1  -0.11369E-12  535.90
  4           1464.1

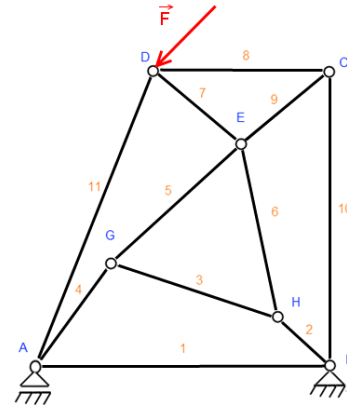
TOTAL VALUES
VALUE  -0.11369E-12  2000.0

```

Stykové výslednice

## 8.2. Úloha číslo 2

Na danú prútovú sústavu bola aplikovaná metóda náhradného prúta, metóda zjednodušovania sústav, metóda neurčitej mierky a tiež metóda konečných prvkov.



	m.náhradných prútov	m. zjednodušovania sústav	m. neurčitej mierky
Prút č.1	1160,4 N	1159,6 N	1168,515 N
Prút č.2	344 N	344 N	345 N
Prút č.3	232,62 N	230,9 N	232,116 N
Prút č.4	-961,6 N	-961,7 N	-966 N
Prút č.5	-1056,5 N	-1056,1 N	-1063,64 N
Prút č.6	167,7 N	157,6 N	162,15 N
Prút č.7	110,8 N	111,6 N	111,09 N
Prút č.8	734,6 N	734,4 N	738,3 N
Prút č.9	-960 N	-964 N	-966,345 N
Prút č.10	616,6 N	624,7 N	621 N
Prút č.11	-1600 N	-1600,4 N	-1609,77 N
$F_{AY}$	2262,74 N	2262,74 N	2263,2 N
$F_{BY}$	-848,53 N	-848,53 N	-847,7 N
$F_{BX}$	1414,4 N	1414,4 N	1421,4 N

Výsledné dáta vyexpedované programom ANSYS z v výpočtu danej prútovej sústavy pomocou metódy konečných prvkov.

```

ANSYS PRETAB Command
File
PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT
**** POST1 ELEMENT TABLE LISTING ****
STAT   CURRENT
ELEM   FORCE
  1    1161.2
  2    342.93
  3    230.74
  4   -962.31
  5  -1056.7
  6    163.32
  7    110.55
  8    735.42
  9   -960.00
 10    617.06
 11  -1599.7
MINIMUM VALUES
ELEM   11
VALUE  -1599.7
MAXIMUM VALUES
ELEM   1
    
```

Osové sily v jednotlivých prútoch

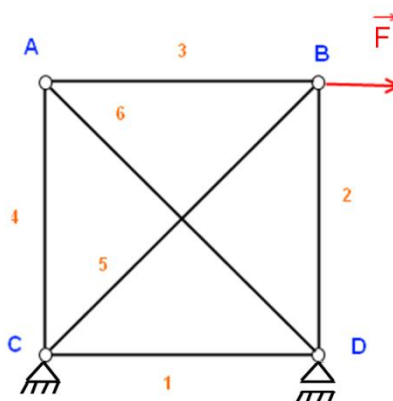
```

ANSYS PRRSOL Command
File
PRINT F REACTION SOLUTIONS PER NODE
**** POST1 TOTAL REACTION SOLUTION LISTING ****
LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0
THE FOLLOWING X,Y,Z SOLUTIONS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM
NODE   FX           FY
  1           2262.7
  2    1414.2      -848.53
TOTAL VALUES
VALUE   1414.2      1414.2
    
```

Veľkosti stykových výsledníc

### 8.3. Úloha číslo 3

Na danú prútovú sústavu bol aplikovaný princíp Castiglianovej vety a tiež metóda konečných prvkov.



Číslo prúta	Sila v prúte
1	792,67 N
2	792,67 N
3	-1208 N
4	792,67 N
5	1708,37 N
6	1708,37 N
$F_{DY}$	2000 N
$F_{CX}$	-2000 N
$F_{CY}$	-2000 N

```

PRRSOL Command
File
PRINT F REACTION SOLUTIONS PER NODE
***** POST1 TOTAL REACTION SOLUTION LISTING *****
LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0
THE FOLLOWING X,Y,Z SOLUTIONS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM
      NODE      FX      FY
        1     -2000.0    -2000.0
        4         2000.0
TOTAL VALUES
VALUE -2000.0  0.45475E-12
    
```

Veľkosti stykových výsledníc

```

PRETAB Command
File
PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT
***** POST1 ELEMENT TABLE LISTING *****
      STAT  CURRENT
      ELEM  SILA
        1   792.89
        2   792.89
        3  -1207.1
        4   792.89
        5  1707.1
        6 -1121.3
MINIMUM VALUES
ELEM 3
VALUE -1207.1
MAXIMUM VALUES
ELEM 5
VALUE 1707.1
    
```

Osové sily v jednotlivých prútoch

## 8.4. Zhodnotenie výsledkov

Stýčnicková metóda (obecná , postupná) , metóda rezu (Ritterova, Culmannova), metóda Cremonovho obrazca boli aplikovaná na zhodnú, vhodne zvolenú prútovú sústavu. Hodnoty osových síl získané jednotlivými metódami sa zhodujú. Samozrejme nie je možné hovoriť a lepšej či horšej metóde, pretože každá z metód ma svoje benefity a limity, dominuje však názor, že ak je k výpočtu možné použiť počítačovú techniku na riešenie problému sa volí obecná stýčnicková metóda, avšak pri prácnom ručnom riešení sústav dominuje postupná stýčnicková metóda ak je možné ju použiť tak sa väčšinou volí práve táto metóda. V prípade že jej použitie je obmedzené (absencia dvojných stýčnikov), riešime úlohu inou vhodnou metódou, až po stav kde už je možná aplikácia postupnej stýčnikovej metódy. Grafické metódy (Culmannova, Cremonova) sú tiež výborným nástrojom na zistenie osových síl v prútoch, hlavne čo sa týka názornosti výrazne prevyšujú analytické metódy, avšak čo sa týka presnosti výsledku, hlavne pri riešení bez počítačovej techniky, sú len relatívne presné.

Ďalšie metódy (metóda náhradného prúta, neurčitej mierky, zjednodušovania sústav) boli pre porovnanie aplikované na inú zhodnú prútovú sústavu. Získané výsledky sa zhodujú, mierna odchýlka je spôsobená z dôvodu viackrokového riešenia a následnej kumulujúcej sa chyby zaokrúhlenia. Metóda neurčitej mierka je výborným nástrojom na riešenie osových síl, riešenie bolo v porovnaní ostatných dvoch použitých metód menej náročné a prácne, avšak použiteľnosť tejto metódy je značne obmedzená. Metóda náhradného prútu, bola v porovnaní s metódou neurčitej mierky viac prácna, keďže pre výpočet je potrebné spočítať dva rôzne stavy a následne ich superponovať, ale jej univerzálnosť použitia je značne vyššia. Metóda zjednodušovania sústav sa v tomto zoskupení javí paradoxne ako najzložitejšia, avšak jej názornosť je opäť vyššia ako u ostatných dvoch spomínaných metód, avšak jej univerzálnosť použitia je opäť najnižšia zo spomínaných metód, preto by som metódu zjednodušovania sústav videl ako poslednú voľbu pre riešenie.

Na riešenie staticky neurčitých prútových sústav bolo nutné použiť znalosti z Pružnosti a Pevnosti , konkrétne aplikovanie deformačnej podmienky a použitie Castiglianovej vety. Z dôvodu jednoduchosti sústavy výpočet nebol príliš zložitý, avšak pre zložitejšie prútové sústavy je vhodné k výpočtu použiť počítačovú techniku. Získané výsledky sú opäť v zhode s výsledkami získanými pomocou metódy konečných prvkov.

## 9. Záver

Cieľom mojej práce bolo prevedenie rešerže dostupnej literatúry v oblasti riešeného problému, vypracovať prehľad dostupných metód pre riešenie prútových sústav a ich vzájomné posúdenie a využitie v dnešnej dobe, na vybraných prútových sústavách previesť riešenie vybranými metódami.

V práci boli zhrnuté všetky dostupné metódy pre riešenie deformácie a napätosti prútových sústav. U každej z metód bol vysvetlený princíp prevedenie riešenie na vzorovej úlohe. Analytické a grafické metódy spomínané v tejto práci sú výborným nástrojom na prvotný pevnostný návrh konštrukcií, z hľadiska získania predstavy týkajúcej sa deformácie a napätosti, ktoré je možné využiť pri nových návrhoch, prípadne pri kvalitatívnom posúdení riešení modernými metódami.

Všetky riešené prútové sústavy boli pre porovnanie riešené tiež pomocou metódy konečných prvkov a to v programe ANSYS. Na základe výsledkov je možné povedať, že v prvej úlohe sa numerické, grafické a analytické riešenia zhodujú. V prípade druhej sústavy sú vo výsledkoch minimálne odchýlky, ktoré sú spôsobené chybou zaokrúhlenia čiastkových výsledkov. V prípade staticky neurčitej prútovej sústavy sa výsledky analytického a numerického riešenia opäť zhodujú.

Metóda konečných prvkov nepochybne dominuje v rámci spomínaných metód, avšak jej použitie vyžaduje určitú skúsenosť a splnenie istých podmienok pre správnosť riešenie. Ďalej na jej aplikáciu je potrebný finančne a hardwarovo náročný software. Ako bolo zistené v tejto práci, dostupné analytické a grafické metódy sú výborným nástrojom práve na orientačné overenie správnosti výstupných dát variačných (numerických) metód, čím boli splnené ciele tejto bakalárskej práce.

Výpočty osových síl jednotlivých styčníc boli spracované v programe MATHCAD 14, grafické riešenia boli spracované pomocou programov AUTOCAD 2008 a INVENTOR 2008. Na grafickú úpravu bakalárskej práce boli použité programy Paint.NET a Inkscape. Na numerický výpočet s použitím metódy konečných prvkov bol použitý program ANSYS.

## 10. Zoznam použitých zdrojov

- [1] Prútové sústavy [online]. 2008-20-2 [cit. 2011-05-22]. Stuba.sk. Dostupné z WWW: <[aladin.elf.stuba.sk/Katedry/KMECH/slovakversion/Predmety/PRP-DIST/pdf\\_mechpolia/mech03.pdf](http://aladin.elf.stuba.sk/Katedry/KMECH/slovakversion/Predmety/PRP-DIST/pdf_mechpolia/mech03.pdf)>.
- [2] HORNÍKOVÁ, Jana. PRUŽNOSTĚ A PEVNOSTĚ. BRNO, 2009. 142 s. Oborová práce. FSI VUT.
- [3] FLORIAN Z., ONDRÁČEK M., PŘIKRYL K.: MECHANIKA TELES - STATIKA. Brno, 1992. 181 s. Oborová práce. VUT FSI. ISBN 80-214-2491-5.
- [4] FLORIAN Z., SUCHÁNEK M.: MECHANIKA TĚLES - Úlohy ze statiky. Brno, 2002. 137 s. Oborová práce. VUT FSI. ISBN 80-214-2268-8.
- [5] JULIŠ K.; BREPTA R.a kol.: MECHANIKA I.díl : Statika a kinematika. Praha : SNTL, 1986. 477 s. ISBN 04-224-86.
- [6] JULIŠ, K; TEPŘÍK, O; SLAVÍK, A. Statika. Praha : SNTL, 1987. 213 s. ISBN 04-229-87.
- [7] JANČO, Roland. Rovinná prútová sústava : MKP. In Prutovka [online]. Bratislava : Stuba, 2008 [cit. 2011-05-22]. Dostupné z WWW: <[kpp.sjf.stuba.sk/mkp/prutovka.html](http://kpp.sjf.stuba.sk/mkp/prutovka.html)>.
- [8] KOVAČIK, J., BENIAČ, M.: Statika pre špeciálne inžinierstvo. Žilina, 2005. 130 s. Oborová práce. ŽILINSKÁ UNIVERZITA V ŽILINE, FŠI. ISBN 80-8070-077.
- [9] <http://www.k3outdoor.sk/images/cistenie/12.jpg>
- [10] <http://i.sme.sk/cdata/3/52/5232453/k2.jpg>
- [11] <http://bechynka.wz.cz/photos2004/most27.jpg>

## 11. Zoznam použitých symbolov a skratiek

Symbol	Jednotka	Názov
N	N	Normálová sila
$F_{kr}$	N	Kritická sila vzperu
$\alpha$	-	Charakteristika uloženia
E	MPa	Modul pružnosti v ťahu
J	$m^4$	Kvadratický moment
$l_{red}$	m	Redukovaná dĺžka prútu
l	m	Dĺžka prútu
$\mu$	-	Počet neznámych parametrov
$\eta$	-	Počet obmedzených deform. parametrov
$\kappa$	-	Silový koeficient
v	-	Počet použit. podmienok stat. rovnováhy
$\Pi$	J	Potenciálna energia
$\gamma$	rad	Natočenie
$\sigma$	-	Neznáme zložky vonkajších reakcií
$\delta$	-	Počet degenerovaných členov
$\xi$	-	Počet stupňov voľ. odobratých väzbami
$i_v$	-	Počet stupňov voľnosti
n	-	Počet statických rovníc
P	J	Energia zaťaženia
s	-	Počet styčníc
W	J	Energia napätosti
A	-	Matica sústavy
x	-	Matica neznámych parametrov
b	-	Matica úplne zadaných silových prvkov
u	mm	Posuv
M	Nm	Ohybový moment
m		Koeficient mierky

SKRATKA	NÁZOV
MKP	Metóda konečných prvkov
VVÚ	Výsledné vnútorné účinky