



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND
BIOMECHANICS

DEFORMAČNĚ NAPĚŤOVÁ ANALÝZA OSOVĚ SYMETRICKÉHO TĚLESA, ŘEŠENA ANALYTICKY A NUMERICKY

STRESS-STRAIN ANALYSIS OF AXISYMMETRIC BODY SOLVED BY ANALYTICAL AND
NUMERICAL APPROACHES

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

TOMÁŠ MÍVALT

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. KAMIL NOVÁK

BRNO 2015

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky

Akademický rok: 2014/2015

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Tomáš Mívalt

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Základy strojního inženýrství (2341R006)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Deformačně napěťová analýza osově symetrického tělesa, řešena analyticky a numericky

v anglickém jazyce:

Stress-strain analysis of axisymmetric body solved by analytical and numerical approaches

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

V současné době jsme schopni řešit četné problémy z technické praxe pomocí metody konečných prvků, jednoduše nazýváno MKP. Díky tomuto numerickému přístupu jsme schopni řešit nejen jednoduché lineární úlohy ale také komplexní a velmi složité nelineární problémy, které jsou způsobeny kontaktem mezi tělesy, vazbami a materiálem. I přes rozšířené dostupné konečno-prvkové řešiče, analytické řešení má dominantní roli ve vzdělávací procesu a poskytuje podstatné informace o D-N stavech těles.

Hlavním cílem práce je vybrat vhodnou osově symetrickou strojní součást a provést deformačně napěťovou analýzu pomocí analytického a numerického přístupu a diskutovat výsledky, výhody a nedostatky.

Cíle bakalářské práce:

1. Zaměřit se na "Výpočtové modelování"
2. Provést rešerši možnosti řešení reálných (složených) těles
3. Provést analytický výpočet pro libovolný technický příklad
4. Provést výpočet pomocí programu MKP (dominantně Ansys)
5. Diskutovat výhody a nevýhody anal./num. řešení, diskutovat věrohodnost výsledků a odchylek

Seznam odborné literatury:

1. Mechanika těles: Pružnost pevnost I, Janíček P., Ondráček E., Vrbka J., Burša J., VUT, 2004
2. Mechanika těles: Pružnost a pevnost II, Ondráček E., Vrbka J., Janíček P., Burša J., VUT, 2006
3. Pružnost a pevnost II: Úlohy do cvičení, Janíček, Petruška, VUT, 2006
4. Mechanics of materials, Gere J.M., Timoshenko S.P., Chapman and Hall, London, 1991
5. Systémové pojetí vybraných oborů pro techniky 1., 2., Janíček P. VUT Cerm, 2010
6. Manuály Ansys

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Kamil Novák

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2014/2015.

V Brně, dne 20.11.2014

L.S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
Ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
Děkan fakulty

ABSTRAKT

Bakalářská práce se zabývá deformačně-napět'ovou analýzou osově symetrického tělesa. Jako vhodné osově symetrické těleso byl zvolen píst spalovacího motoru. Práce obsahuje rozbor zatížení pístu, možnosti výpočtu osově symetrického tělesa, dále pak rešerši historicky používaných přístupů a vyhodnocení napětí. V praktické části práce byl spočítán konkrétní píst spalovacího motoru jednak pomocí analytických modelů (vetknutá, podepřená deska a složené těleso) a také pomocí metod konečných prvků v systému ANSYS. V závěru práce bylo vše zhodnoceno a porovnáno.

KLÍČOVÁ SLOVA

píst, dno pístu, spalovací motor, deformačně napět'ová analýza, osová symetrie, ANSYS

ABSTRACT

The bachelor's thesis deals with stress-strain analysis of axisymmetric body. As suitable axisymmetric body was chosen combustion engine piston. Thesis includes study of piston loads and possibilities of stress-strain calculations. This is followed by research in field of historical approaches of stress-strain calculations and tension evaluating and classification. In the practical part of thesis, analytical solution was solved with different computational models – fixed plate, supported plate and composite body – composed of shell and plate. After solving analytical models, numerical approach took place; FEM with different resolutions was used in ANSYS system. In conclusion of the thesis, all data and result were compared and appropriate conclusions were made.

KEY WORDS

piston, piston crown, combustion engine, stress-strain analysis, axisymmetric, ANSYS

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

MÍVALT, T. *Deformačně napět'ová analýza osově symetrického tělesa, řešena analyticky a numericky*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2015. 83 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Kamil Novák.

Prohlášení autora o původnosti práce

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma **Deformačně napět'ová analýza osově symetrického tělesa, řešena analyticky a numericky** vypracoval samostatně s použitím odborné literatury a pramenů, uvedených na seznamu, který tvoří přílohu této práce.

V Brně dne 20. května 2015

Tomáš Mívalt

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji svému vedoucímu bakalářské práce, Ing. Kamilu Novákovi za jeho čas, který se mnou strávil, cenné rady, podporu a podklady, které mi věnoval.

Dále bych chtěl poděkovat přítelkyni Luce za podporu při psaní této práce.

Obsah

Obsah.....	9
Úvod	11
1 Cíle práce.....	12
2 Píst spalovacího motoru	13
2.1 Zatížení.....	13
2.1.1 Zatížení od tlaku plynů	13
2.1.2 Zatížení od setrvačných sil.....	14
2.1.3 Další zatížení	18
2.2 Materiály pístů, výroba pístů.....	18
2.3 Píst VW Golf MK1 1.8 GTI 8V	19
3 Analytické řešení	20
3.1 Saint Venantův princip.....	20
3.2 Diferenciální algoritmus řešení přímé úlohy pružnosti	21
3.2.1 Deformační varianta diferenciálního přístupu řešení přímé úlohy.....	22
3.2.2 Výpočtové modelování.....	23
3.2.3 Vyhodnocení napětí	23
3.2.4 Historie výpočtových modelů a složených těles	25
3.3 Modelování dna pístu pomocí vetknuté kruhové desky.....	27
3.4 Modelování dna pístu pomocí podepřené kruhové desky	30
3.5 Modelování pístu pomocí složeného tělesa.....	32
3.5.1 Deformace skořepiny.....	33
3.5.2 Deformace stěny.....	35
3.5.3 Deformace desky.....	35
3.5.4 Výpočet stykové síly a momentu.....	36
3.5.5 Napětí a deformace složeného tělesa	37
3.6 Vliv osazení dna pístu, střední tloušťka desky a dělená vetknutá deska.....	39
4 Numerické řešení.....	42
4.1 Numerické řešení vetknuté desky	43
4.2 Numerické řešení podepřené desky	45
4.3 Numerické řešení složeného tělesa.....	46
4.4 Vliv zakřivení dna na D-N stav.....	51
4.5 Numerický 3D Model – GOLF1.....	54
4.5.1 Mohrova kružnice – GOLF1	57
4.6 Numerický 3D model – GOLF2.....	58
4.7 Numerický 3D model – GOLF3.....	62

4.7.1 Numerický 3D model – GOLF3 – setrvačné účinky.....	65
4.7.2 Numerická analýza modelu GOLF4 – kontaktní úloha	66
5 Porovnání jednotlivých přístupů	71
5.1 Diskuze k výsledkům.....	73
5.2 Další možné studie na téma MKP analýzy pístu	74
6 Závěr.....	75
Seznam použitých zdrojů.....	76
Seznam použitých zkratk a symbolů	78
Seznam obrázků	80
Seznam tabulek.....	82
Seznam příloh.....	83

Úvod

V bakalářské práci se zabývám deformačně-napět'ovou (DN) analýzou osově symetrického tělesa. Jako vhodné osově symetrické těleso jsem si vybral píst spalovacího motoru. Píst je strojní součást, která zajišťuje přenos sil mezi mechanismem a pracovním médiem (tekutinou). Kromě spalovacích motorů se písty vyskytují např. v kompresorech, čerpadlech, hydraulických válcích aj.

V práci je provedena rešerše historických přístupů k pevnostním výpočtům pístů, porovnání jednotlivých analytických modelů pro DN analýzu a výpočet metodou konečných prvků (MKP) v systému ANSYS.

Jako vhodný model pro celou práci jsem si vybral píst z automobilu Volkswagen Golf 1 1.8 GTI, především kvůli jeho geometrii, která na rozdíl od řady novějších pístů do jisté míry odpovídá osově symetrickému tělesu, a dají se na ni aplikovat analytické metody.

Vzhledem k obecné úrovni řešení jsem si stanovil podmínky, které přibližně odpovídají skutečné situaci ve válci motoru. Z komerčních důvodů je navíc řada materiálových charakteristik a pracovních parametrů veřejně nedostupná. Výsledky DN analýzy jsou tedy spíše kvalitativní než kvantitativní a jednotlivé hodnoty napětí/posuvů jsou uvedeny pro porovnání jednotlivých výpočtových přístupů.

1 Cíle práce

Základní cíle bakalářské práce byly stanoveny vedoucím práce v následujícím znění:

1. Zaměřit se na "Výpočtové modelování"
2. Provést rešerši možnosti řešení reálných (složených) těles
3. Provést analytický výpočet pro libovolný technický příklad
4. Provést výpočet pomocí programu MKP (dominantně ANSYS)
5. Diskutovat výhody a nevýhody anal./num. řešení, diskutovat věrohodnost výsledků a odchylek

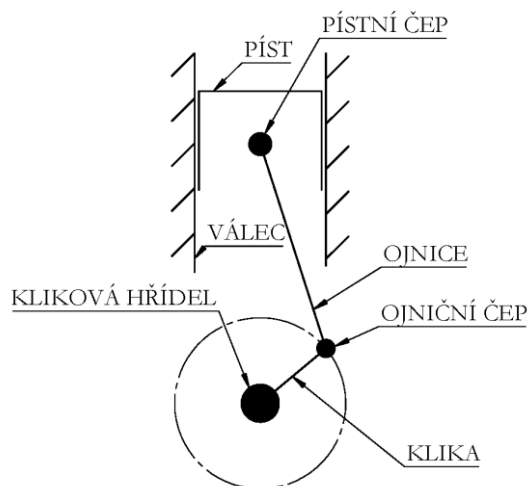
Dále jsem rozšířil kapitoly s ohledem na vybraný „technický příklad“ o:

1. Namáhání pístu, kinematika a dynamika
2. Materiály a výroba pístů
3. Vliv zakřivení dna na jeho DN stav

2 Píst spalovacího motoru

2.1 Zatížení

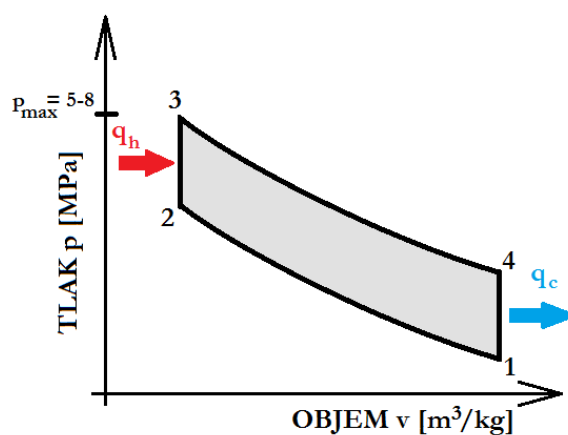
Ve spalovacích motorech je píst pohyblivá součást, která koná přímočarý vratný pohyb. Píst je spojen pístním čepem s ojnicí, která je spojena ojničným čepem s klikovou hřídelí. Tyto tři součásti dohromady tvoří klikový mechanismus, který mění přímočarý pohyb pístu na rotační pohyb klikové hřídele.



Obr. 1 : Schéma klikového mechanismu

2.1.1 Zatížení od tlaku plynů

Primární zatížení pístu způsobuje expanze zažehnutých plynů v pracovní části cyklu. Pokud zobrazíme jednotlivé termodynamické děje zážehového motoru v p - v diagramu, dostaneme tzv. Ottův cyklus, což je ideální oběh zážehového motoru. Ten je zobrazen na Obr. 2.



Obr. 2 : Ottův cyklus v p - v diagramu

Po nasátí vzduchu s palivovými parami se píst nachází na úrovni dolní úvratě (bod 1), oba ventily (sací i výfukový) jsou zavřeny a směs je adiabaticky (ve skutečnosti spíše polytropicky) stlačována. Ideálně na úrovni horní úvratě je směs zapálena (bod 2) a teplota a tlak prudce naroste. Tlak v bodě 3 je maximální tlak, který na píst působí. Hodnota tohoto tlaku se u dnešních aut zážehových motorů pohybuje od 5 do 8 MPa.

Výrobci motorů se tuto hodnotu snaží maximalizovat, zvyšuje se tím účinnost a výkon motoru. My budeme pro účely této práce pro daný píst VW Golf uvažovat tlak $p_{max} = 6 \text{ MPa}$.

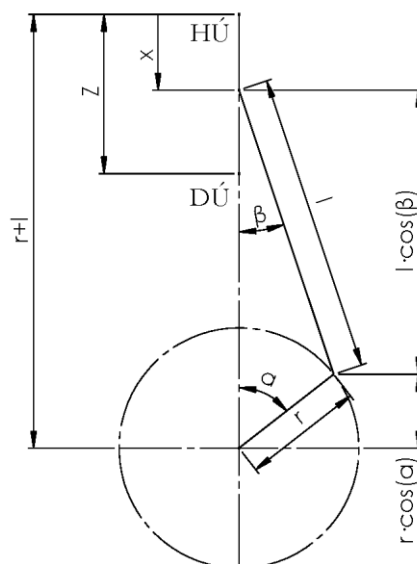
Po izochorickém přívodu tepla q_h (z hlediska termodynamiky nahrazení samotného spalování - děj 23) začíná pracovní část – adiabatická (polytropická) expanze, při tomto ději 34 se píst pohybuje dolů. Poté, opět ideálně na úrovni dolní úvratě, je otevřen výfukový ventil a je odvedeno zbytkové teplo a tlak klesá na původní hodnotu – izochorický odvod tepla q_c (děj 41). Následuje výfuk a opětovné nasátí směsi (není v p-v diagramu zobrazeno).

Šedá plocha, ohraničená ději, odpovídá vykonané práci cyklu a zároveň ji lze spočítat jako rozdíl přivedeného a odvedeného tepla v případě adiabatických kompresí/expanzí.

2.1.2 Zatížení od setrvačných sil

Píst ve válci se pohybuje velkou rychlostí. Ve vysokootáčkových motorech motocyklů může mít kliková hřídel otáčky až $n=16000 \text{ min}^{-1}$, což způsobuje setrvačné účinky, jak od hmot posuvných, tak od hmot rotačních. My se budeme zabývat setrvačnou silou od hmot posuvných, jelikož tato síla působí na píst. Setrvačné síly od hmot rotačních zachytává klikový čep.

2.1.2.1 Kinematika klikového mechanismu



Obr. 3: Důležité úhly a vzdálenosti klikového mechanismu

Pro určení setrvačných sil budeme potřebovat zrychlení pístu. Pokud si zavedeme vzdálenost pístu x od horní úvratě, bude se tato vzdálenost obecně rovnat výrazu:

$$x = (r + l) - (r \cdot \cos(\alpha) + l \cdot \cos(\beta)) \quad (1)$$

kde r je délka kliky a l délka ojnice.

Zavedeme klikový poměr, což je poměr délky kliky k délce ojnice, a pomocí sinové věty dostaneme:

$$\lambda = \frac{r}{l} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} \quad (2)$$

Z čehož vyjádříme $\cos(\beta)$

$$\cos^2(\beta) = 1 - \sin^2(\beta) \Rightarrow \cos(\beta) = \sqrt{1 - \lambda^2 \cdot \sin^2(\alpha)} \quad (3)$$

Pro usnadnění následujících výpočtů provedu substituci a následně v dalším kroku Taylorův rozvoj této funkce v bodě $t=0$:

$$y = \sqrt{1 - t} \text{ kde } t = \lambda^2 \cdot \sin^2(\alpha) \quad (4)$$

Vzhledem k tomu, že klikový poměr je většinou číslo v intervalu $(0,1)$ a hodnota funkce $\sin(\alpha)$ nabývá vždy hodnot $< -1,1 >$, a protože u funkce \sin a koeficientu λ je hodnota exponentu u čtvrtého členu rovna 8, budou nám pro výpočet stačit první tři členy, dosáhneme tím dostatečné přesnosti výpočtu.

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot t^k = 1 - \frac{1}{2} \cdot t - \frac{1}{8} \cdot t^2 \dots \quad (5)$$

Výsledná funkce pro vzdálenost x od horní úvratě, závislá pouze na jedné proměnné (úhlu natočení klikové hřídele α):

$$x(\alpha) = r + l - r \cdot \cos(\alpha) - l \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \lambda^2 \cdot \sin^2(\alpha) - \frac{1}{8} \cdot \lambda^4 \cdot \sin^4(\alpha) \right] \quad (6)$$

Tuto funkci upravíme

$$x(\alpha) = r \cdot (1 - \cos(\alpha)) + \frac{\lambda}{2} \cdot \sin^2(\alpha) \quad (7)$$

Když rovnici přepíšeme do tvaru, kdy je závislá na čase, dostaneme:

$$x(t) = r \cdot (1 - \cos(\omega \cdot t)) + \frac{\lambda}{2} \cdot \sin^2(\omega \cdot t) \quad (8)$$

Kde ω je úhlová rychlost otáčení klikové hřídele. Tuto rovnici derivujeme, dostaneme rychlost pístu:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = r \cdot \omega \cdot (\sin(\omega \cdot t) + \lambda \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t)) \quad (9)$$

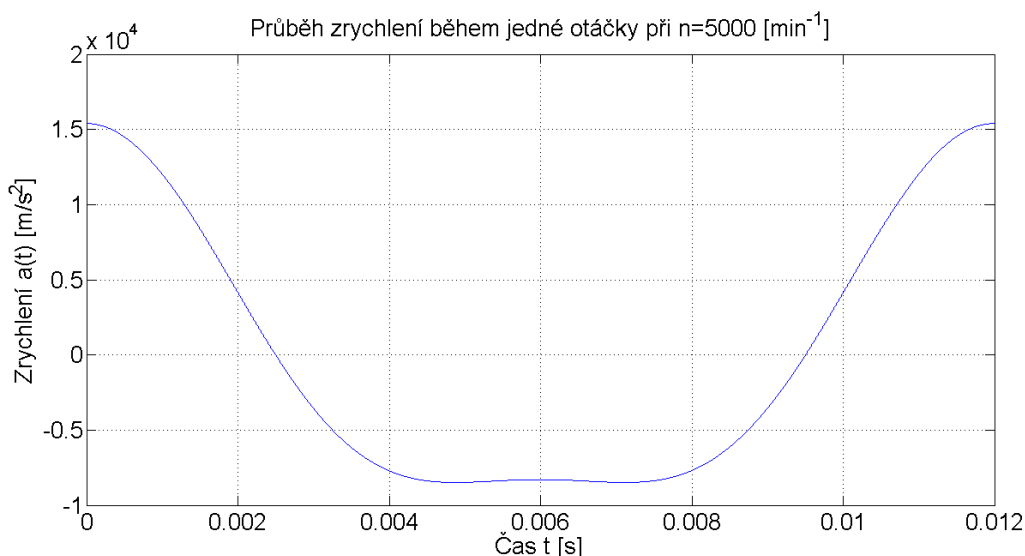
Po druhé derivaci dostaneme zrychlení pístu:

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = r \cdot \omega^2 \cdot (\cos(\omega \cdot t) + \lambda \cdot \cos(2\omega \cdot t)) \quad (10)$$

Z úvahy i rovnice 10 je vidět, že maximální zrychlení pístu bude v obou úvratích. Nás zajímá případ horní úvratě, protože zde zároveň působí tlak od plynů. Pro $\alpha = \omega \cdot t = 0^\circ$ je tedy zrychlení rovno:

$$a_{max} = r \cdot \omega^2 \cdot (1 + \lambda) \quad (11)$$

Průběh zrychlení pro délku ojnice $l = 144\text{mm}$ a délku kliky $r = 45.8\text{mm}$:

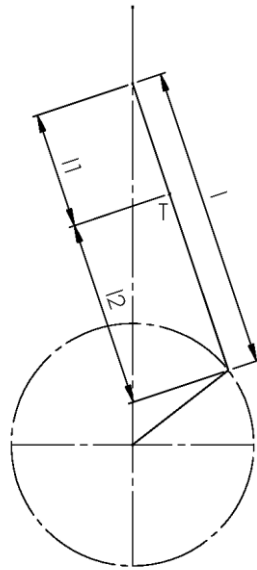


Obr. 4 Graf zrychlení

2.1.2.2 Hmotnost posuvných částí

Pro získání setrvačné síly, působící na pístní čep v HU, ještě musíme určit hmotnost posuvných částí klikového mechanismu. Tato hmotnost zahrnuje hmotnost pístu včetně pístních kroužků, pístního čepu a hmotnost posouvající se části ojnice. Rozdělíme tedy ojnici na dvě části – první o hmotnosti m_{op} , což bude hmotnost posouvající se části ojnice, a část o hmotnosti m_{or} , což bude hmotnost rotační části ojnice.

Vycházím z toho, že hmotnost celé ojnice známe, zároveň jsme schopni určit polohu těžiště T.



Obr. 5 rozdělení ojnice

Platí tedy, že celková hmotnost ojnice se rovná součtu obou její částí:

$$m_o = m_{op} + m_{or} \quad (12)$$

Zároveň musí platit rovnováha momentů vzhledem k těžišti

$$m_{op} \cdot l_1 = m_{or} \cdot l_2 \quad (13)$$

Z těchto vztahů vyjádříme hmotnost posuvné části ojnice:

$$m_{op} = m_o \cdot \frac{l_2}{l} \quad (14)$$

V hrubém odhadu lze říci, že hmotnost posuvných částí ojnice je cca 30 % hmotnosti celé ojnice.

Pro náš případ se celková hmotnost posuvných částí rovná

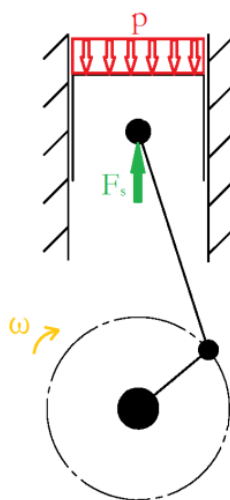
$$m_{pos} = m_{píst} + m_{příslušenství} + m_{op} = 0,286 + 0,050 + 0,150 \text{ kg} = 0,486 \text{ kg}$$

2.1.2.3 Výsledná setrvačná síla pro maximální otáčky

Z Newtonova zákona vyjádříme setrvačnou sílu, která působí proti tlaku od spalin v HU jako

$$F_S = a_{max} \cdot m_{op} = 15397 \cdot 0,486 \text{ N} = 7483 \text{ N} \quad (15)$$

Výsledné zatížení pístu od tlaku plynů a setrvačných sil vypadá následovně:



Obr. 6 : zatížení pístu

2.1.3 Další zatížení

Mezi další zatížení pístu patří především tepelné zatížení. Teplo je do pístu přiváděno spalováním paliva, nebezpečným místem je dno pístu, jelikož je v přímém kontaktu se spalinami. Další teplo vzniká třením pístu o stěny válce. Teplo je odváděno pomocí chladících kanálek ve stěně válce, sekundárně pak olejem pomocí mazacího systému. Teplo způsobuje také určité tepelné dilatace, což například při nedodržení výrobních tolerancí může způsobit přídavné namáhání od stěny válce až zadření. Při nedostatečném chlazení může dojít ke změně mechanických vlastností materiálu jako např. pokles meze kluzu a pevnosti.

Já se ve své práci tepelným namáháním nezabývám, jelikož téma mé práce je porovnání numerického a analytického přístupu k řešení symetrických těles, avšak konkrétně u pístů spalovacích motoru je tepelné namáhání velmi důležitou složkou celkového zatížení.

2.2 Materiály pístů, výroba pístů

V dnešní době se samotné písty vyrábějí především ze slitin hliníku. To především kvůli nízké hustotě, což způsobuje menší setrvačné síly, vysoké pevnosti i za zvýšených teplot, dobré tepelné vodivosti, podobné tepelné roztažnosti, jako má stěna válce (vyrábí se rovněž z hliníkových slitin) a také odolnosti proti opotřebení. Z technologického hlediska mají slitiny hliníku dobré lící vlastnosti.

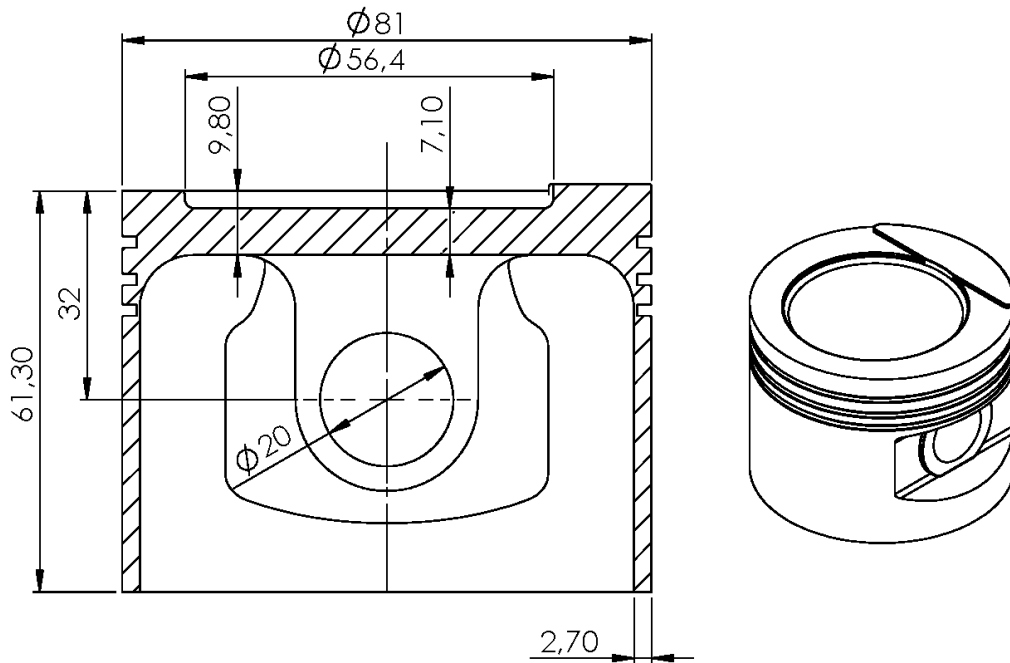
Jedna z používaných slitin je AlSi12 CuNiMg, pro 2 dobré motory se používá slitina hliníku s vyšším obsahem křemíku – např. AlSi 18, která má nižší tepelnou roztažnost a méně se opotřebovává, je ale hůř obrobitelná. Můžeme se setkat také s písty z tvárné litiny, případně z lité oceli (skládané písty DD, VOLVO). [21, 22]

Písty se převážně vyrábí odléváním do kovových forem s následným obrobením, vysoce namáhané písty se vyrábí kováním.

2.3 Píst VW Golf MK1 1.8 GTI 8V

Celou moji práci se budeme věnovat jednomu jedinému pístu, který je používán v automobilu Volkswagen Golf 1.8 GTI 8V. Budeme uvažovat, že je vyroben ze slitiny hliníku AlSi12 CuNiMg, jelikož je to hliníková slitina, budeme uvažovat Poissonovo číslo $\mu = 0.33$ a modul pružnosti $E = 73 \text{ GPa}$, budeme uvažovat, že se daná slitina chová jako ideální Hookovský materiál. Tyto hodnoty budeme uvažovat pro všechny analýzy, ať už analytické nebo numerické. Hodnoty setrvačných účinků použijeme z kapitoly 2.1.2.3.

Dále budeme uvažovat, že skutečná geometrie pístu je následující:



Obr. 7 : Geometrie pístu Golf

3 Analytické řešení

V této kapitole se budeme zabývat metodou analytického pevnostního výpočtu pístu. Analytické řešení nám poskytne podstatné informace o D-N stavu zatíženého tělesa, uvidíme však, že konkrétní hodnoty napětí a posuvů nebudou až tak relevantní, přičemž největší nepřesnosti se dopustíme v místech, kde skutečné silové působení nahradíme vazbou případně staticky ekvivalentním zatížením. Na začátku této kapitoly si ukážeme *Saint-Venantův* princip. Dále si popíšeme princip řešení symetrických těles.

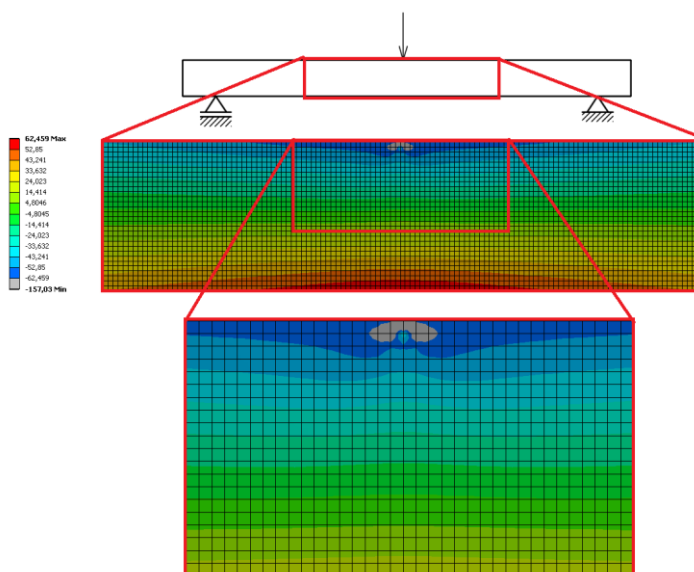
3.1 Saint Venantův princip

V prosté pružnosti a pevnosti je Saint Venantův princip definován jako

„Nahradíme-li silovou soustavu působící v okolí bodu A tělesa Ω jinou, staticky ekvivalentní silovou soustavou v okolí bodu A tělesa Ω , pak napjatost tělesa Ω bude pro oba zatěžovací stavy prakticky stejná s výjimkou jisté části tělesa Ω_s , která obsahuje bod A . [1]“

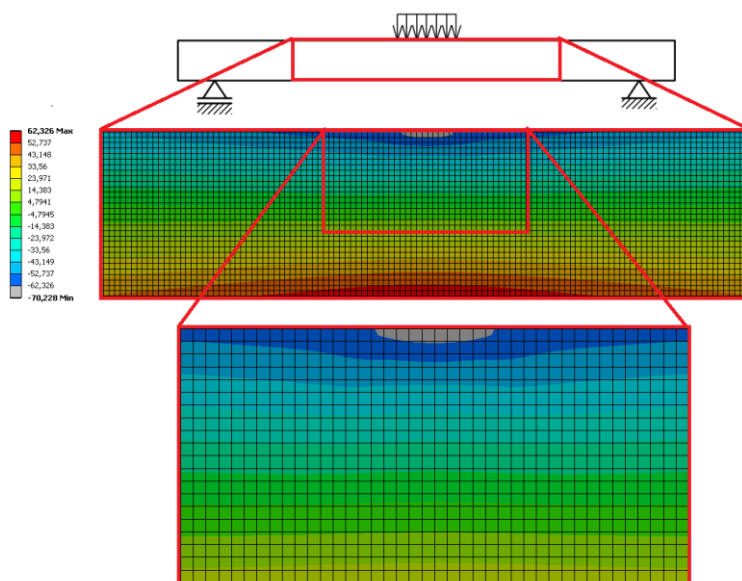
Pokud tedy nosník zatížíme osamělou silou, konstantním liniovým zatížením nebo lineárním zatížením, přičemž všechna zatížení jsou navzájem staticky ekvivalentní, neznamená to, že i výsledný D-N stav bude stejný. V blízkém okolí zatížení (ale i vazeb) se bude napjatost výrazně odlišovat podle způsobu zatížení. V místech, která jsou vzdálenější, se napjatost bude shodovat s analytickým řešením. Na úrovni stykových výslednic (tedy na úrovni statiky) musí být stykové výslednice vždy stejné pro všechny tři způsoby zatížení.

Na následujících obrázcích je případ 3 bodového ohybu. Úloha je staticky určitá, nosník je zatížen uprostřed osamělou silou nebo konstantním liniovým zatížením, maximální ohybový moment bude vždy uprostřed nosníku (vyříznutá část). Při použití analytického přístupu dostáváme hodnotu cca 63 MPa. V místě zatížení je však podle obou obrázků mnohonásobně vyšší (v místě působící osamělé síly cca 157 MPa.) Ve vzdálenějších oblastech se napjatosti však téměř srovnávají. Zároveň je nutné také zmínit, že v případě zatížení osamělou silou do jednoho místa prutu bude lokální porušení napjatosti tak velké, jak je velká konečno-prvková síť (při velikosti elementu $\rightarrow 0$ se napjatost $\rightarrow \infty$).



Obr. 8 : Nosník zatížený osamělou silou

Pokud nyní nosník o stejných rozměrech a mat. charakteristikách zatížíme konstantním zatížením, které je staticky ekvivalentní předchozímu případu, maximální napětí bude pouze 70 MPa.



Obr. 9 : Nosník zatížený liniovým zatížením

Jak je vidět, zatížení v ostatních místech nosníku, jako např. na dolní straně nosníku, jsou v obou případech téměř stejná, ale v místě působení zatížení jsou odlišné. To odpovídá Saint-Venantovu principu.

Saint-Venantův princip ale neplatí pouze pro prutová tělesa, ale i pro jiná (obecná) tělesa, kterými se budeme zabývat. V případě kruhové desky rozdělené na dvě oblasti je to například viditelné z Obr. 32, v případě složeného tělesa např. na Obr. 41 dále v textu.

3.2 Diferenciální algoritmus řešení přímé úlohy pružnosti

V analytickém řešení musíme vždy převést reálný problém na modelový problém. Tudíž skutečné těleso – např. dno pístu převedeme na modelové těleso – např. podepřená rotační deska, kterou zatížíme modelovým zatížením – tlak.

Dále se typ problému dělí na problém přímý – známe všechny vstupy, které potřebujeme k určení deformací a napětí – tzn. geometrický tvar tělesa, materiálové charakteristiky, zatížení tělesa a vazby. Dále existuje problém nepřímý, kde jednou z neznámých je právě vstup, a který na základě výsledků z DN analýzy hledáme. V našem pojetí práce se jedná spíše o úlohu než problém (vše je vyřešeno na základě dobře prostudovaných postupů).

Mezi jiné typy úloh se řadí např. optimalizace rozměrů nebo identifikace, jejichž úroveň složitosti je podstatně vyšší než u přímé úlohy. My se tudíž budeme zabývat přímou úlohou, algoritmus řešení takové úlohy může být buďto diferenciálního typu nebo variačního typu.

Variační typ algoritmu je využíván výhradně u MKP a začal být využíván s rozvojem výpočetní techniky. Principem hledání řešení je minimalizace funkcionálu – „Ze všech kinematically přípustných stavů pružného tělesa nastává ten, který dává potenciální energii systému minimální hodnotu [5]“.

V analytickém řešení budeme využívat diferenciálního algoritmu, v kterém řešíme diferenciální rovnice s okrajovými podmínkami. Dále musíme ještě rozlišit, co chceme primárně vypočítat.

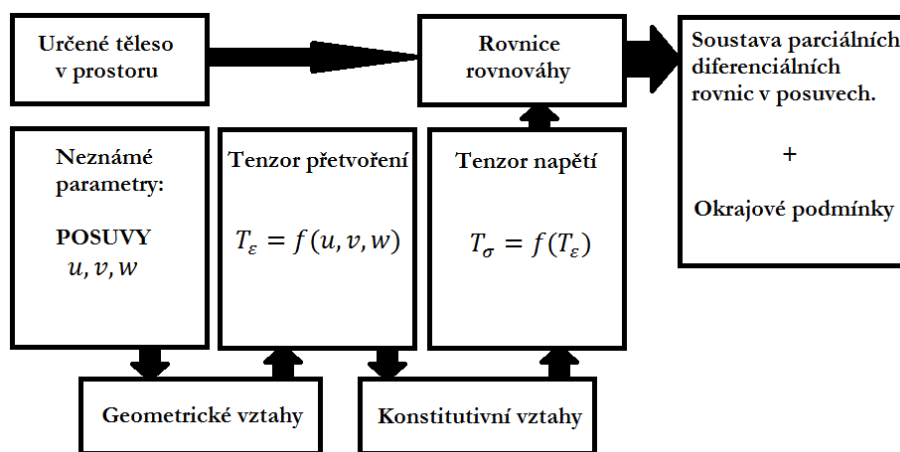
Při řešení neznáme ani deformaci ani napjatost a obojí chceme zjistit, můžeme však postupovat dvěma způsoby:

- Vypočítáme napětí a z napětí deformace - **silová varianta**
- Vypočítáme deformace a z nich vypočítáme napětí – **deformační varianta**

V mé práci budeme používat deformační variantu, jelikož je tato varianta rozšířenější, je používána v předmětu PP2 na FSI a je na ní založena většina dnešních MKP systémů.

3.2.1 Deformační varianta diferenciálního přístupu řešení přímé úlohy

„Pro deformační variantu je charakteristické, že množinu nezávislých funkcí tvoří deformační posuvy $[u, v, w]$. Z těchto posuvů se sestaví rovnice pružnosti. Tyto se řeší a výsledkem řešení jsou posuvy $[u, v, w]$, z nichž se následně určí všechny závislé veličiny. [2]“



Obr. 10 : Diferenciální přístup - deformační varianta

Na schématu výše je vidět postup matematických úprav. Největším problémem ale je samotné řešení diferenciálních rovnic. U některých základních těles je výpočet možný (např. rotační stěny, desky, skořepiny, tlustostěnná rotační tělesa...), ne však u složitějších (i když matematicky popsatelných) těles. Nabízí se zde numerické řešení, to je však pro diferenční přístup nestabilní, tudíž se u MKP využívá variačního principu.

My se v následujících částech kapitoly budeme zabývat výpočtem pístu pomocí těchto elementárních těles, pro které již byly odvozeny diferenciální rovnice.

3.2.2 Výpočtové modelování

Využívání modelování k řešení problémů není v žádném případě nová věc a první zmínka o modelování, at' matematickém, byla vyslovena již 200 let př.n.l., filozofem Archimédem. Zmiňuje se o tom alespoň A. Rényi [9]:

„Především ke stejné situaci můžeme najít velmi mnoho matematických modelů. Člověk si z nich musí vybrat ten nevhodnější, nepřiléhavější k dané situaci. Model nesmí být příliš složitý, abychom s ním mohli matematicky pracovat. Nemusí se v každém směru podobat realitě, stačí, když dá věrný opis reality v tom směru, který je důležitý.“

My se v pružnosti a pevnosti zabýváme převážně výpočtovým modelováním, které slouží k řešení problémů technické praxe [3]. Jinak řečeno vhodným modelem, který se snaží reprezentovat všechny podstatné veličiny, viz. [3,10] se snažíme postihnout skutečnost. Je logické, že podle toho, jak kvalitní máme vstupy do tohoto výpočtového modelu, takové budou i výstupy – a to například v podobě D-N analýz. V praxi jsou výpočtové modely rozčleněny podle toho, jaký přístup se aplikuje (zda analytický nebo numerický) a v závěru práce jsou všechny modely a oba přístupy kriticky zhodnoceny.

3.2.3 Vyhodnocení napětí

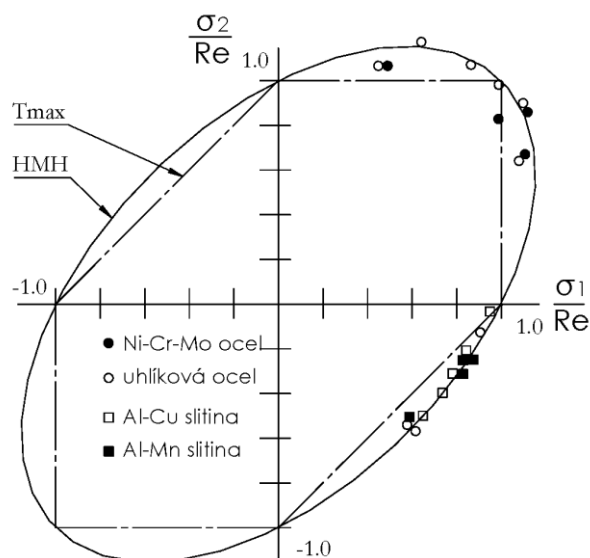
Otázka, která napětí použít pro vyhodnocení bezpečnosti, není v žádném případě triviální a závisí vždy na typu napjatosti, která v daném tělese vzniká (zda jednoosá, dvojosá nebo trojosá), na tom, v jakém stavu se materiál nachází (zda jde o materiál ve stavu křehkém nebo ve stavu tvárném – poznamenejme, že například v [11] není tato fyzikální podstata zdůrazněna) a v neposlední řadě i na místě v daném tělese.

Pokud bychom aplikovali výše zmíněné, můžeme hned vyslovit závěry:

- Píst může být rotačně symetrické těleso, které se při analytickém přístupu modeluje jako rotačně symetrická deska (podepřená nebo vetknutá) anebo (na vyšší úrovni) jako složené těleso. Pokud je těleso symetrické s konečnou tloušťkou, budou existovat při vyhodnocení vždy 3 hlavní napětí pro vrchní část pístu a 2 pro spodní část pístu (axiální napětí je rovno 0 nebo velmi blízké nule).
- Při důkladné analýze deformace pístu (z vlastní praxe a z dokumentace na internetu) není příliš častý výskyt křehkého porušení (porušení křehkým lomem). Tedy nemá význam hodnotit mezní stav křehkého porušení (podmínky křehké pevnosti).
- Dvojosý nebo trojosý stav napjatosti pro houževnatý stav materiálu obecně posoudit neumíme, protože při deterministickém posuzování bezpečnosti potřebujeme znát pouze jednu hodnotu napětí, kterou srovnáváme s mezní hodnotou mezi kluzu (příp. únavy). Je proto nutné zavést jisté redukované napětí (tedy takové napětí obecné napjatosti nahrazené napjatostí jednoosou tak, aby bezpečnosti vůči meznímu stavu pružnosti (plasticity) byla rovna pro oba případy). Pokud není píst symetrický, s výhodou se využívá právě redukované napětí. Musí se však používat s rozvahou a je vždy dobré si vždy z výsledků vytáhnout ještě hodnoty 1., 2., a 3. hlavního napětí, ze kterých je složeno.

Redukované napětí se může lišit podle toho, jakou podmínku plasticity použijeme – zda podmínku HHM (měrné energie na změnu tvaru) někdy též označovanou jako von Misses nebo τ_{max} (maximálních smykových napětí) označovanou též jako Trescovu podmínku nebo stress intensity.

V mnoha publikacích bylo odvozeno, že maximální rozdíl obou podmínek je max. 15.5 %. To, která podmínka je „lepší nebo správnější“, nelze říci. Experimenty (viz. Obr. 11) ukazují, že napětí, při kterých došlo k prvním plastickým deformacím (přetvořením), se pohybují mezi oblastmi τ_{max} a HMH. V textu je použita podmínka HMH a protože vyhodnocení bezpečnosti je již triviální operace, není o bezpečnosti pojednáno důkladněji.



Obr. 11 : Experimentální hodnoty redukovaného napětí, při nichž došlo k plastické deformaci [11]

Když víme, že je materiál pístu v houževnatém stavu, máme definované podmínky plasticity. Ještě je nutné určit, kterou plochu pístu (zda spodní nebo horní) budeme posuzovat. Tato otázka zase spočívá v tom, jaký přístup použijeme – zda analytický nebo numerický a na jaké úrovni tyto přístupy budou.

- Analytický přístup; píst je modelován deskou s jednou konstantní tloušťkou – pak je jedno, zda bude vyhodnoceno redukované napětí na horní straně nebo spodní straně (napětí však nebudou stejná vlivem rozdílných napjatostí).
- Analytický přístup; píst je modelován deskou, která má proměnnou tloušťku (skokově). V místě náhlé změny geometrie dochází vždy ke skokovým změnám napětí (vlivem rozdílných tuhostí) a tedy průběhy redukovaného napětí na vnější a vnitřní straně pístu se bude již výrazněji lišit.
- Numerický přístup; píst je modelován idealizovaným tvarem (rotačně symetrickým) – napětí pak bude velmi podobné jako ve dvou analytických případech výše (resp. stejné, až na místa blízka poruchám ve smyslu Saint Venantova principu).
- Numerický přístup, píst je modelován na té nejvyšší úrovni – reálná geometrie, kontaktní analýzy. Napjatost zde bude úplně jiná a maximální hodnoty nelze očekávat ani na horní ani na spodní straně pístu.

3.2.4 Historie výpočtových modelů a složených těles

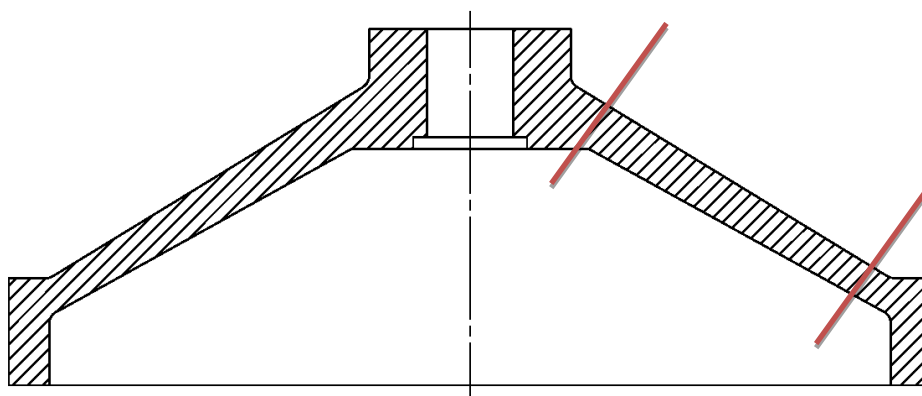
V nauce o pružnosti a pevnosti se k vyřešení problémů definují modelová tělesa, kterými mohou být prut (prutové těleso), rotační tlustostěnné těleso, stěna, deska, bez-momentová a momentová skořepina anebo tzv. složené těleso. D-N analýza složeného tělesa je vlastně D-N analýzou všech modelových těles, ze kterých je toto složené těleso složeno (ve smyslu principu superpozice). Řešení D-N analýz těchto těles vlastně představuje jeden z těch těžších problémů v analytické pružnosti. I přesto je dobré si uvědomit, že analytický přístup k řešení problémů má svůj nezastupitelný účel (dává jednoznačně představu o řešení – výsledcích). Krátká historická ukázka je v následujícím textu.

Dobré matematické základy a technické pokroky způsobily, že se na konci 19. století začaly rozvíjet teorie pro D-N analýzy obecných těles (vždy však zjednodušených). Nešťastně bylo používáno zjednodušení obecných těles pomocí prutových těles → často se tak například příruby počítaly jako zakřivené pruty, viz ukázka v [12]; naopak dna pístů jako rovné nosníky (*proužková metoda* – ještě po 2. sv. válce hojně používána). Je jasné, že takovéto zjednodušení nevedlo k reálným výsledkům, kterých se dosahovalo pomocí experimentů (na konci 19. století pouze destruktivní zkoušky – zatížení pístů, přírub, a dalších těles až do porušení, později též realizace tzv. rovinné a prostorové fotoelasticimetrie).

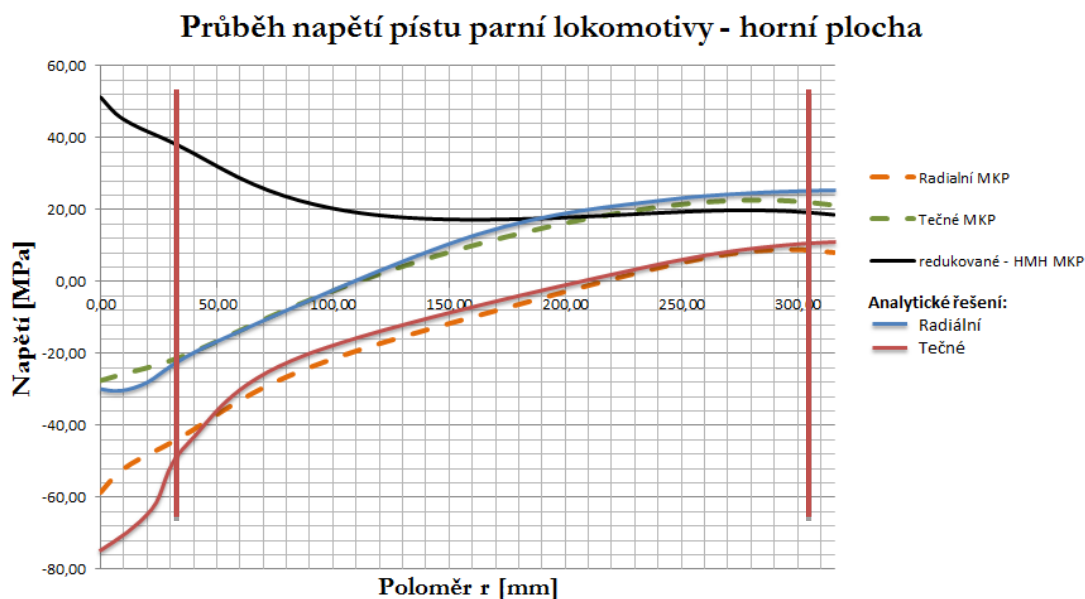
Na druhou stranu se řada autorů pokoušela rozvíjet nové a nové teorie, které pak aplikovala na své případy z praxe. Pro specifickou geometrii pístu parního stroje byly uveřejněny vztahy pro napětí (*Tellers*), které v dané době souhlasily výborně s prováděnými experimenty. Je nutné však podotknout, že se zde mluví „o výpočtu tak úžasné složitém, že pro jeden píst by trval několik týdnů.“ [23]

Pokud však autoři ve výpočtu udělali chybu, mohlo to mít katastrofické následky jako zkáza lodi *City of Paris* r. 1890 kde, alespoň podle zpráv, praskl třímetrový píst [12] a způsobil zkázu lodi.

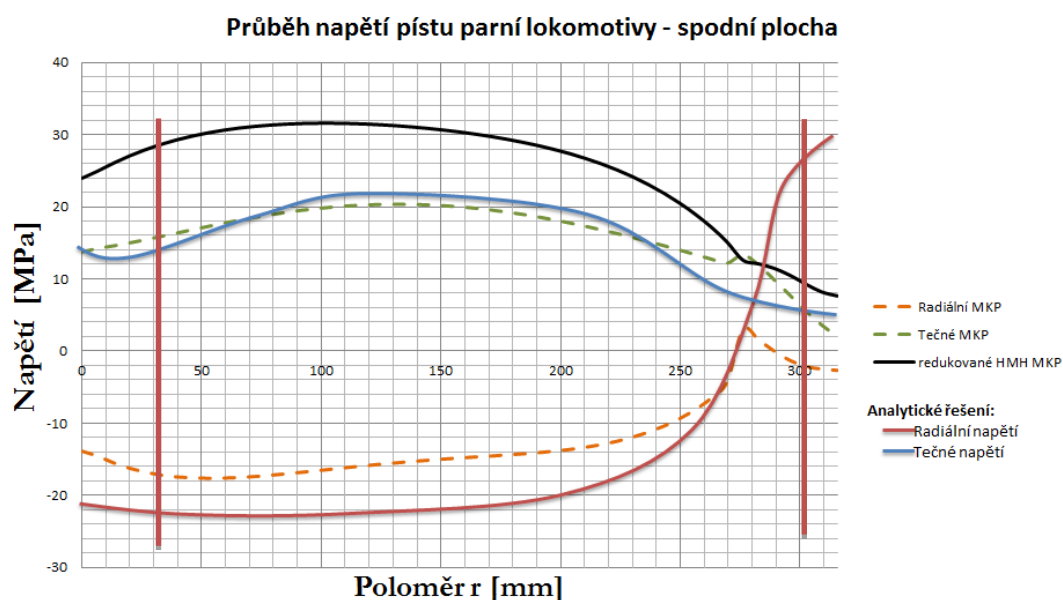
Jako historickou ukázkou uvádíme *Tellersův* výpočet napětí v pístu parní lokomotivy v porovnání s MKP analýzou stejného pístu z dnešní doby. Jak je vidět, napětí se opravdu shodují relativně přesně, až na místa vazeb (přesně dle Saint-Venantova principu).



Obr. 12 : Tvar pístu - parní lokomotivy uvažovaný v Tellersově výpočtu



Obr. 13 : Průběh napětí na pístu parní lokomotivy – Tellersův analytický výpočet a MKP řešení



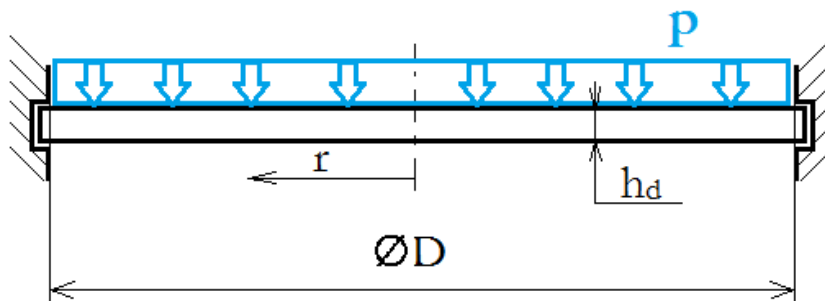
Obr. 14 : Průběh napětí na pístu parní lokomotivy 2 – Tellersův analytický výpočet a MKP řešení

Jak je vidět na Obr. 13, ve vymezené oblasti se analytický přístup přesně shoduje s MKP řešením, nicméně v oblasti vazby dochází k jejich výraznému rozdílu dle principu Saint-Venanta.

Od roku cca 1930 začíná významně publikovat *Timoshenko* [15,16,17] který uceluje nauku o pružnosti a pevnosti, uvádí četné aplikace a postupuje systémově k vyřešení D-N stavů těles. Je nutné říci, že do dnešní doby jeho publikace (z matematické stránky, aplikovatelnosti a přístupu) nebyly překonány. *Timoshenko* se stal i předlohou, ze které čerpali dřívější i nyníjší profesori na ústavu mechaniky těles, jako prof. Farlák, prof. Ondráček nebo prof. Janíček a právě díky nim se na VUT v Brně drží ucelený přehled postupů, který se na jiných školách téměř vytrácí [13,14].

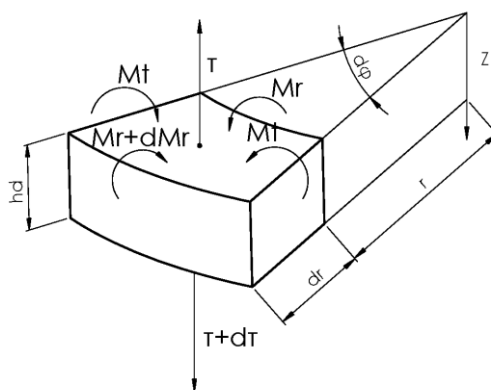
3.3 Modelování dna pístu pomocí vetknuté kruhové desky

Dno pístu (část, na kterou působí tlak spalín) budeme nyní počítat pomocí výpočtového modelu kruhové desky. Geometricky se jedná o rotačně symetrické válcové těleso, kde zatížení je vždy kolmé na rovinu střednicové plochy.



Obr. 15 : Vetknutá deska

Jak jsme si řekli v předchozí kapitole, budeme používat deformační variantu diferenciálního přístupu. Budeme se tedy snažit zjistit průhyb desky $w(r)$, dále pak natočení, což už je ale parametr závislý, ten určíme jako derivaci průhybu. Následně jsme již schopni vypočítat momenty – u rotační desky jsou to: moment radiální a moment tečný. Z těchto momentů vypočítáme napětí – radiální a tečné + osově napětí, které je na horní straně desky rovno zátěžnému tlaku p a na spodní straně desky rovno 0. Protože je osově napětí podstatně menší než radiální nebo tečné, bývá v řadě literatury považováno za přibližně rovno 0.



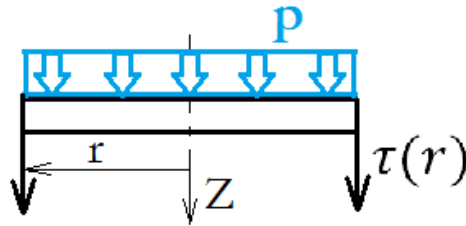
Obr. 16 : Uvolněný prvek kruhové desky – výsledné vnitřní účinky

Postupnou úpravou rovnic pružnosti pro kruhovou desku dostaneme diferenciální rovnici:

$$\frac{d^2\vartheta}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\vartheta}{dr} - \frac{1}{r^2} \cdot \vartheta = -\frac{\tau(r)}{B} \quad (16)$$

Kde ϑ je natočení desky, zároveň platí, že $\vartheta = \frac{dw}{dr}$, kde w je průhyb desky (neznámý posuv ve směru osy z). B je tzv. ohybová tuhost desky a je dána vztahem $B = \frac{E \cdot h_d^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)}$ [$MPa \cdot mm^3$]. Posouvající síla $\tau(r)$ má jednotky $\frac{N}{mm}$, protože působí po celém obvodu na daném poloměru. Diferenciální rovnice je druhého řádu, budeme tudíž potřebovat 2 okrajové podmínky pro určení natočení a další 1 pro určení posuvu.

Prvně musíme vyjádřit posouvající sílu, provedeme řez na obecném poloměru r a získáme:



Obr. 17 : Řez deskou

Pomocí silové rovnováhy získáme posouvající sílu:

$$\sum F_Z = 0: \tau \cdot 2\pi \cdot r + p \cdot \pi \cdot r^2 = 0 \Rightarrow \tau = \frac{-p \cdot r}{2} \quad (17)$$

Nyní přistoupíme k řešení diferenciální rovnice, řešení po postupných integracích je:

$$\vartheta(r) = C_1 \cdot r + \frac{C_2}{r} + \left(-\frac{1}{r \cdot B} \int \left(r \int \tau(r) dr\right) dr\right) \quad (18)$$

Zbývá určit partikulární řešení (poslední závorka předchozího vztahu), dvakrát tedy integrujeme a upravíme:

$$\vartheta_{part} = \frac{p \cdot r^3}{16 \cdot B} \quad (19)$$

Finálně chceme spočítat posuv, tudíž celou rovnici ještě jednou integrujeme, jelikož natočení je derivace posuvu:

$$w(r) = C_1 \cdot \frac{r^2}{2} + C_2 \cdot \ln(r) + \frac{p \cdot r^4}{64 \cdot B} + C_3 \quad (20)$$

Nyní musíme určit konstanty. Jelikož je deska plná a je definována i na poloměru $r = 0$, musí platit:

$$r = 0 : \vartheta = 0 .$$

Dále máme vazbu vetknutí, tudíž natočení i posuv ve vazbě musejí být nulové:

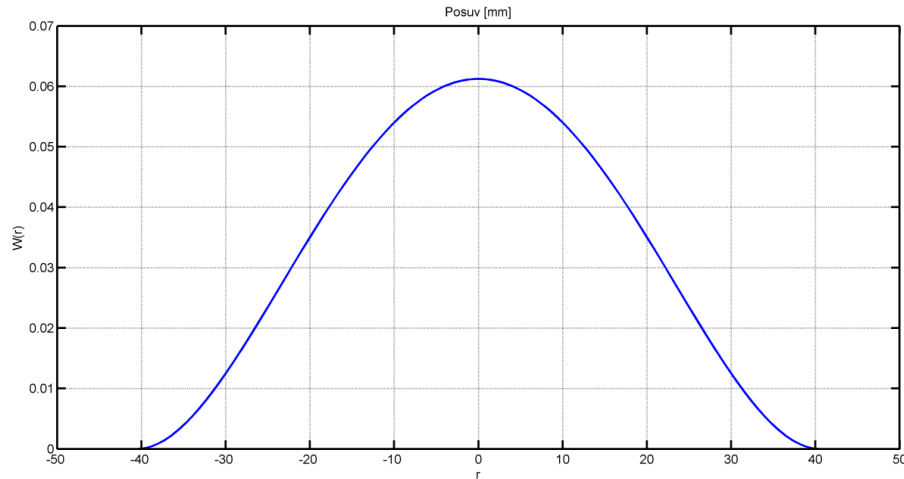
$$r = R: \vartheta = 0, w = 0.$$

Po dosazení do patřičných vztahů pro posuvy a natočení zjistíme, že $C_2=0$, což je předpoklad, který musí platit vždy, pokud je deska plná. Dále:

$$C_1 = -\frac{p \cdot R^2}{16 \cdot B}, C_3 = \frac{p \cdot R^4}{64 \cdot B} \quad (21)$$

Finální vztah pro posuv je tedy:

$$w(r) = -\frac{p \cdot R^2}{16 \cdot B} \cdot \frac{r^2}{2} + \frac{p \cdot r^4}{64 \cdot B} + \frac{p \cdot R^4}{64 \cdot B} \quad (22)$$



Obr. 18 : Graf posuvu vetknuté desky

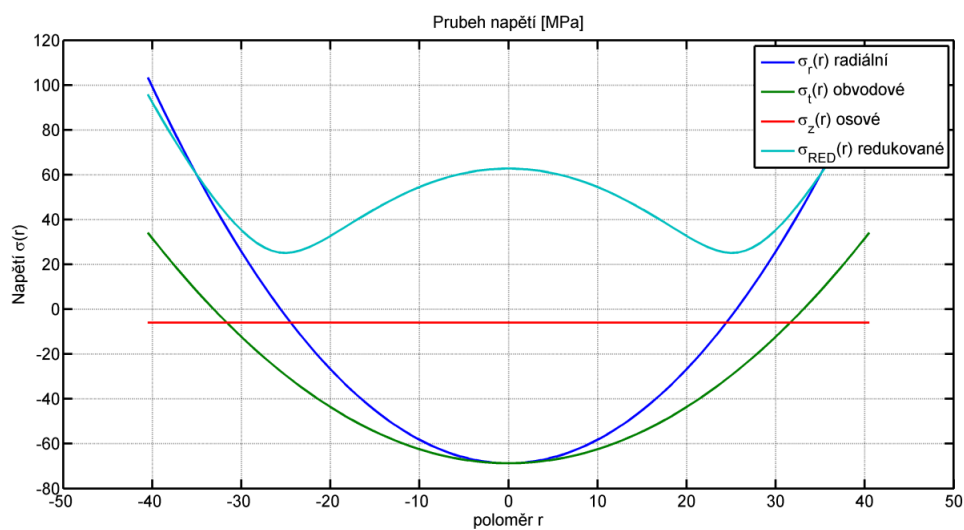
Z posuvů nyní budeme chtít zjistit radiální a tečný moment:

$$M_r(r) = -B \cdot \left(\frac{d\vartheta(r)}{dr} + \mu \cdot \frac{\vartheta(r)}{r} \right) \quad (23)$$

$$M_t(r) = -B \cdot \left(\frac{\vartheta(r)}{r} + \mu \cdot \frac{d\vartheta(r)}{dr} \right) \quad (24)$$

Z momentů vypočítáme napětí, budeme posuzovat průběh napětí pouze v extrému (na horní straně desky) v závislosti na poloměru desky.

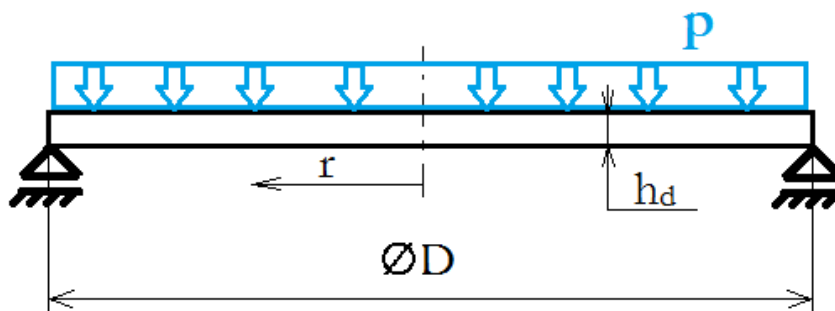
$$\sigma_{r/t}(r) = \frac{12 \cdot M_{r/t}(r)}{h_d^3} \cdot Z_{max} = \frac{12 \cdot M_{r/t}(r)}{h_d^3} \cdot \frac{-h_d}{2} = \frac{-6 \cdot M_{r/t}(r)}{h_d^2} \quad (25)$$



Obr. 19 : Vetknutá deska - napětí

Jak je vidět na průběhu redukovaného napětí (dle HMM), největší napětí je ve vazbě – vetknutí. Další špička napětí je uprostřed pístu, kde je největší průhyb. Právě s ohledem na to, že jsme skutečné těleso nahradili modelem, nemůžeme vypočítaný průběh napětí ve vazbě brát úplně vážně, jelikož dno pístu v místě vazby nebude mít nulové natočení. Proto se budeme snažit přiblížit model reálnému tělesu změnou vazeb (okrajových podmínek) a kombinací těles v další části kapitoly.

3.4 Modelování dna pístu pomocí podepřené kruhové desky



Obr. 20 : Podepřená deska

Modelové těleso v tomto případě zůstává opět stejné, změní se pouze vazby (okrajové podmínky). Část předchozí kapitoly je tedy až po rovnici č. 20 stejná. Obecná podpora nám ale nezamezuje natočení, okrajová podmínka „natočení ve středu desky je nulové“ zůstává, protože pořád máme plnou desku bez díry. Platí tedy $r = 0 : \vartheta = 0$. Vazba nám zabraňuje posuvu střednicové plochy, tudíž $r = R : w = 0$, dále musí platit, že $r = R : M_r = 0$.

Pro určení okrajových podmínek budeme potřebovat obecnou rovnici pro radiální moment, nachystáme si tedy derivaci natočení:

$$\frac{d\vartheta(r)}{dr} = C_1 - \frac{C_2}{r^2} + \frac{3 \cdot p \cdot r^2}{16 \cdot B} \quad (26)$$

Dále vyjdeme z rovnice 23 a dosadíme

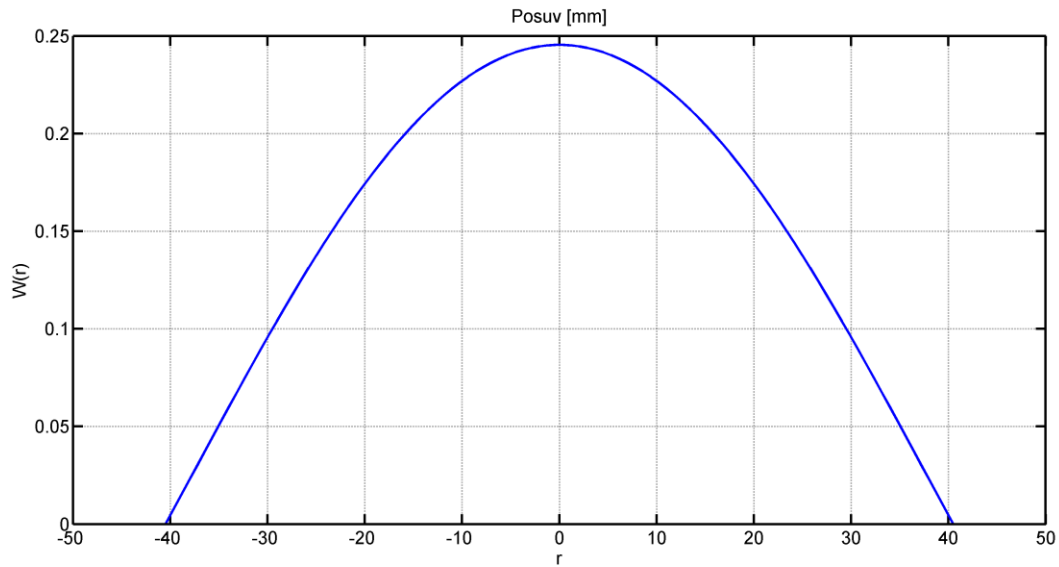
$$M_r(r) = -B \cdot \left[C_1 - \frac{C_2}{r^2} + \frac{3 \cdot p \cdot r^2}{16 \cdot B} + \mu \cdot \left(C_1 + \frac{C_2}{r^2} + \frac{p \cdot r^2}{16 \cdot B} \right) \right] \quad (27)$$

Nyní dosadíme okrajové podmínky a vyjádříme integrační konstanty:

$$C_1 = -\frac{p \cdot R^2 \cdot (3 + \mu)}{16 \cdot B \cdot (1 + \mu)}, C_2 = 0, C_3 = \frac{p \cdot R^4 \cdot (\mu + 5)}{64 \cdot B \cdot (\mu + 1)} \quad (28)$$

Nyní můžeme vyjádřit finální vztah pro posuv podepřené desky:

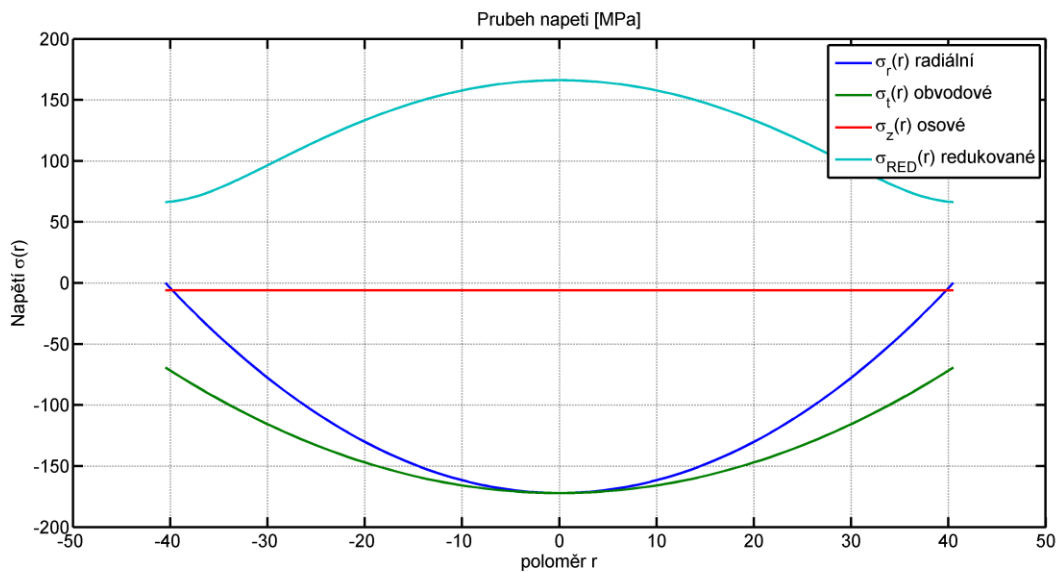
$$w(r) = -\frac{p \cdot R^2 \cdot (3 + \mu)}{16 \cdot B \cdot (1 + \mu)} \cdot \frac{r^2}{2} + \frac{p \cdot r^4}{64 \cdot B} + \frac{p \cdot R^4 \cdot (\mu + 5)}{64 \cdot B \cdot (\mu + 1)} \quad (29)$$



Obr. 21 Průběh posuvů - podepřená deska

Můžeme si všimnout, že posuvy jsou u podepřené desky v extrému cca. 3x větší, to je způsobeno především tím, že podpora nezabraňuje natočení a tím pádem se deska může volněji deformovat.

Dále dle rovnic 23, 24, 25 spočítáme průběhy momentů a napětí:



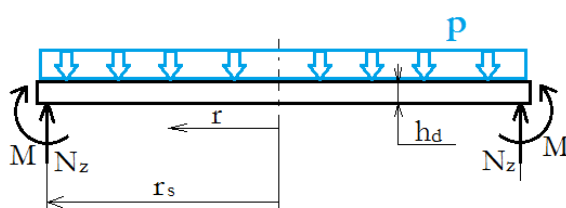
Obr. 22 : Podepřená deska - napětí

Vidíme, že radiální napětí je v podpoře skutečně nulové – to odpovídá okrajové podmínce nulového radiálního momentu. Redukované napětí se podstatně zvětšilo oproti vetknuté desce, to opět souvisí s menší tuhostí uložení této desky → větší deformace → větší napětí.

3.5 Modelování pístu pomocí složeného tělesa

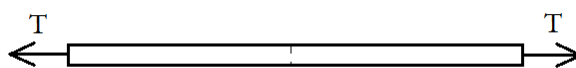
Dosud jsme řešili pouze dno pístu, nyní budeme zkoumat D-N stav i na plášti pístu. Výpočtový model složíme ze dvou částí – pomocí tzv. stěno-desky a válcové momentové skořepiny. Stěno-deska v našem modelu reprezentuje dno pístu a skládá se z desky (viz. 3.3 a 3.4) a zároveň stěny, jelikož budeme muset vyřešit i napětí ve směru střednicové plochy. Momentová skořepina poté reprezentuje plášť pístu. Stěno-desku také musíme spojit se skořepinou, díky tomu budeme muset nadefinovat deformační podmínky.

Mimo fakt, že z tohoto řešení získáme také D-N stav pláště pístu, nám toto řešení poskytne mnohem lepší informace o napjatosti na okraji dna pístu (maximální poloměr). V předchozích případech zde byla umístěna vazba (okrajová podmínka), což byla pouze aproximace reality, v tomto případě toto místo bude mít deformaci (natočení, posuv) ekvivalentní tuhosti skořepiny, což je případ, který nastává ve skutečnosti.



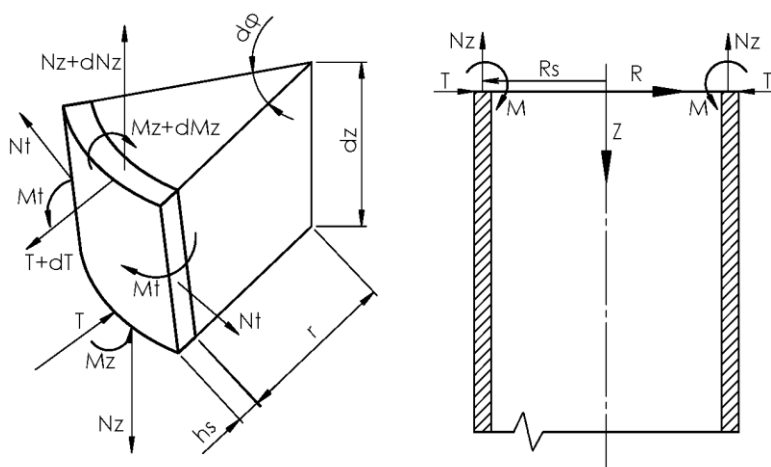
Obr. 23 : Deska pro případ momentové skořepiny

Dále musíme použít i stěnu, jelikož samotná deska nesmí být zatížena ve směru střednicové roviny, nám ale v bodě dotyku působí radiální síla skořepiny T . Stěna bude geometricky stejná jako deska a bude zatížena pouze silou od skořepiny T .



Obr. 24 : Stěna

Dále pak samotná skořepina, což je opět tenkostěnné těleso, jehož střednicová plocha je rotační válec. Tloušťka skořepiny, zatížení a vazby jsou opět rotačně souměrné.



Obr. 25 : Uvolněný prvek momentové skořepiny a silové působení

Celý výpočet se odehraje na poloměru $r_s = \frac{D-h_s}{2}$ na úrovni dotyku skořepiny a stěno-desky, tudíž u skořepiny na souřadnici $z = 0$. Působí zde tři zatížení:

- Radiální liniová síla T
- Osová liniová síla N_z
- Radiální silová dvojice M

Jsou to funkce souřadnice z , pro zjednodušení následujících výpočtů si tudíž zavedu pojmy:

$$M_1 = M(z = 0), T_1 = T(z = 0)$$

Zavedeme si tedy deformační podmínky pro spojení těles:

$$R = R_s, Z = 0: \vartheta_{SK} = \vartheta_{DES}$$

Natočení skořepiny (pláště pístu) po deformaci musí být stejné jako natočení desky (dna pístu).

Dále pak deformační podmínku posuvu. U skořepiny rozlišujeme dva posuvy – radiální u a osový w . Pro deformační podmínku použijeme radiální posuv, který musí odpovídat radiálnímu posuvu dna pístu, to ale u desek není možné, proto použijeme radiální posuv stěny, který jsme schopni vyjádřit:

$$R = R_s, Z = 0: u_{SK} = u_{STĚNY}$$

Využíváme deformační variantu řešení, tudíž budeme muset postupně vyjádřit všechny posuvy a natočení pro všechna 3 tělesa (skořepina, stěna, deska). Začneme skořepinou.

3.5.1 Deformace skořepiny

V první řadě musíme rozhodnout, zda se jedná o krátkou nebo dlouhou skořepinu. Pokud by se jednalo o skořepinu krátkou, musíme vzít v potaz silové účinky od obou konců skořepin. Naopak pokud se jedná o skořepinu dlouhou, dá se říci, že silové působení na jednom konci skořepiny neovlivňuje její chování na straně druhé a výpočet se tím pádem dosti zjednoduší.

Pro $\mu = 0.33$ použiji podmínku 5.136 z [2], která zní:

$$\begin{aligned} 2 \cdot l_0 &= 2 \cdot 1,5 \cdot \sqrt{r \cdot h} < l \\ 2 \cdot 1,5 \cdot \sqrt{40,5 \cdot 2,70} &= 31,4 < 51,5 \end{aligned} \quad (30)$$

Podmínka je tedy splněna, naše skořepina je dlouhá, můžeme tedy psát rovnici radiální posuvu pro skořepinu. Tato rovnice je řešením diferenciální rovnice 4. řádu, celé odvození je na str. 142 v [2].

$$u_{SK}(z) = e^{-\beta \cdot z} \cdot (C_1 \cdot \sin(\beta z) + C_2 \cdot \cos(\beta z)) + \left[\frac{R_s^2}{E \cdot h_s} \cdot \left(P_r - \frac{\mu}{R_s} \cdot N_z \right) \right] \quad (31)$$

Konstanty C_1 a C_2 určíme z okrajových podmínek skořepiny:

$$\begin{aligned} z = 0: M &= -B_{SK} \cdot \frac{d^2 u_{SK}}{dz^2} = M_1 \\ z = 0: T &= -B_{SK} \cdot \frac{d^3 u_{SK}}{dz^3} = T_1 \end{aligned}$$

Žádný radiální tlak p_r uvnitř skořepiny nepůsobí a osovou liniovou sílu určíme ze statické rovnováhy desky:

$$\sum F_z = 0: -N_z \cdot 2\pi R + p \cdot \pi \cdot R^2 \quad (32)$$

$$N_z = \frac{p \cdot R}{2}$$

Také se ve vztahu posuvu skořepiny objevil nový parametr β (v literatuře [2] je označován jako součinitel útlumu), který je definován jako

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{r^2 \cdot h^2}} \left[\frac{1}{\text{mm}} \right].$$

Tento parametr je dán především geometrií skořepiny, zjednodušuje nám výpočet a je rozhodující pro velikost oblasti, kde je porušena membránová napjatost.

Po derivaci a úpravách dostaneme následující rovnice pro natočení, radiální moment a radiální sílu:

$$\vartheta_{SK}(z) = \frac{du_{sk}(z)}{dz} \quad (33)$$

$$\vartheta_{SK}(z) = -\beta e^{-\beta z} (C_1 \cdot (\sin(\beta z) - \cos(\beta z)) + C_2 \cdot (\sin(\beta z) + \cos(\beta z)))$$

$$M(z) = -B_{SK} \frac{d^2 u_{sk}(z)}{dz^2} \quad (34)$$

$$M(z) = 2 \cdot B_{SK} \cdot \beta^2 e^{-\beta z} (C_1 \cdot \cos(\beta z) - C_2 \cdot \sin(\beta z))$$

$$T(z) = -B_{SK} \frac{d^3 u_{sk}(z)}{dz^3} \quad (35)$$

$$T(z) = -2 \cdot B_{SK} \cdot \beta^3 e^{-\beta z} (C_1 \cdot (\sin(\beta z) + \cos(\beta z)) + C_2 \cdot (\cos(\beta z) - \sin(\beta z)))$$

Dosadíme okrajové podmínky a vyjádříme konstanty

$$C_1 = \frac{M_1}{2 \cdot B_{SK} \cdot \beta^2} \quad (36)$$

$$C_2 = -\frac{T_1}{2 \cdot B_{SK} \cdot \beta^3} - \frac{M_1}{2 \cdot B_{SK} \cdot \beta^2} \quad (37)$$

Nyní tedy můžeme dát dohromady rovnici pro posuv skořepiny, nyní nás zajímá pouze styková plocha $Z = 0$, čímž se nám vztah dostatečně zjednoduší.

$$u_{SK}(0) = \left(-\frac{T_1}{2 \cdot B_{SK} \cdot \beta^3} - \frac{M_1}{2 \cdot B_{SK} \cdot \beta^2} \right) - \frac{R_s \cdot \mu \cdot p \cdot R}{E \cdot h_s \cdot 2} \quad (38)$$

Vyjádříme si ještě natočení skořepiny:

$$\vartheta_{SK}(0) = + \frac{M_1}{B_{SK} \cdot \beta} + \frac{T_1}{2 \cdot B_{SK} \cdot \beta^2} \quad (39)$$

Tím máme vyjádřeno vše, co ze skořepiny momentálně potřebujeme a můžeme vypočítat napětí ve skořepině.

Osové napětí:

$$\sigma_{z-ex}(z) = \frac{Nz}{h} \pm \frac{6 \cdot M_z}{h^2} \quad (40)$$

Tečné napětí:

$$\sigma_{t-ex}(z) = \frac{Nt}{h} \pm \frac{6 \cdot M_t}{h^2} \quad \text{kde } M_t = \mu \cdot M_z \quad (41)$$

3.5.2 Deformace stěny

Obecně lze vyjádřit radiální a tečné napětí stěny jako:

$$\sigma_{r/t} = A \pm \frac{B}{r^2} \quad (42)$$

Jelikož je stěna plná (bez díry uprostřed), můžeme zavést okrajovou podmínku:

$$r = 0 : u = 0 \quad (43)$$

Tato okrajová podmínka způsobí, že konstanta B je rovna nule. Radiální a tečné napětí je tedy stejné a rovno konstantě A na celém poloměru.

Další okrajovou podmínkou bude:

$$r = R_s : \sigma_r = \frac{T_1}{h_d} = A \quad (44)$$

Máme tedy vyjádřeno napětí, pro deformační podmínky skořepiny potřebujeme radiální posuv, z geometrických vztahů a zobecněného Hookova zákona dostaneme vztah:

$$u_{STĚNA}(r) = \frac{r}{E} \cdot \frac{T_1}{h_d} (1 - \mu) \quad (45)$$

3.5.3 Deformace desky

Nyní nám zbývá poslední část složeného tělesa – deska. Řešení bude hodně podobné, jako v případě desky podepřené. Zatížení – tlak, zůstává stejný, natočení uprostřed desky bude nulové a radiální moment na poloměru $r = R_s$ bude rovný momentu M_1 . Pomocí těchto okrajových podmínek vyřešíme natočení desky, z čehož už můžeme vypočítat napětí. Dále zavedeme podmínku $r = R_s : w_{DES} = 0$, z čehož vypočítáme průhyb desky.

Vyjdeme z rovnic (18), (19) a (27), doplníme okrajové podmínky a určíme neznámé konstanty.

Vyjádříme C_1 :

$$C_1 = -\frac{M_1}{B_D \cdot (1 + \mu)} - \frac{p \cdot R^2}{16 \cdot B_D} \cdot \frac{(3 + \mu)}{(1 + \mu)} \quad (46)$$

Můžeme tedy dle rovnic 18 a 19 vyjádřit vztah pro natočení desky:

$$\vartheta_{DES}(r) = \left[-\frac{M_1}{B_D \cdot (1 + \mu)} - \frac{p \cdot R^2}{16 \cdot B_D} \cdot \frac{(3 + \mu)}{(1 + \mu)} \right] \cdot r + \frac{p \cdot r^3}{16 \cdot B_D} \quad (47)$$

3.5.4 Výpočet stykové síly a momentu

Nyní máme vyjádřeny všechny závislosti, které potřebujeme, a můžeme se vrátit zpět k deformačním podmínkám a číselně vypočítat moment M_1 a sílu T_1 . Dosadíme tedy do deformačních podmínek:

$$R = R_s, Z = 0: \vartheta_{SK} = \vartheta_{DES}$$

$$\frac{M_1}{B_{SK} \cdot \beta} + \frac{T_1}{2 \cdot B_{SK} \cdot \beta^2} = \left[-\frac{M_1}{B_D \cdot (1 + \mu)} - \frac{p \cdot R^2}{16 \cdot B_D} \cdot \frac{(3 + \mu)}{(1 + \mu)} \right] \cdot R_s + \frac{p \cdot R_s^3}{16 \cdot B_D} \quad (48)$$

$$R = R_s, Z = 0: u_{SK} = u_{STĚNY}$$

$$\left(-\frac{T_1}{2 \cdot B_{SK} \cdot \beta^3} - \frac{M_1}{2 \cdot B_{SK} \cdot \beta^2} \right) - \frac{R_s \cdot \mu \cdot p \cdot R}{E \cdot h_s \cdot 2} = \frac{R_s}{E} \cdot \frac{T_1}{h_d} (1 - \mu) \quad (49)$$

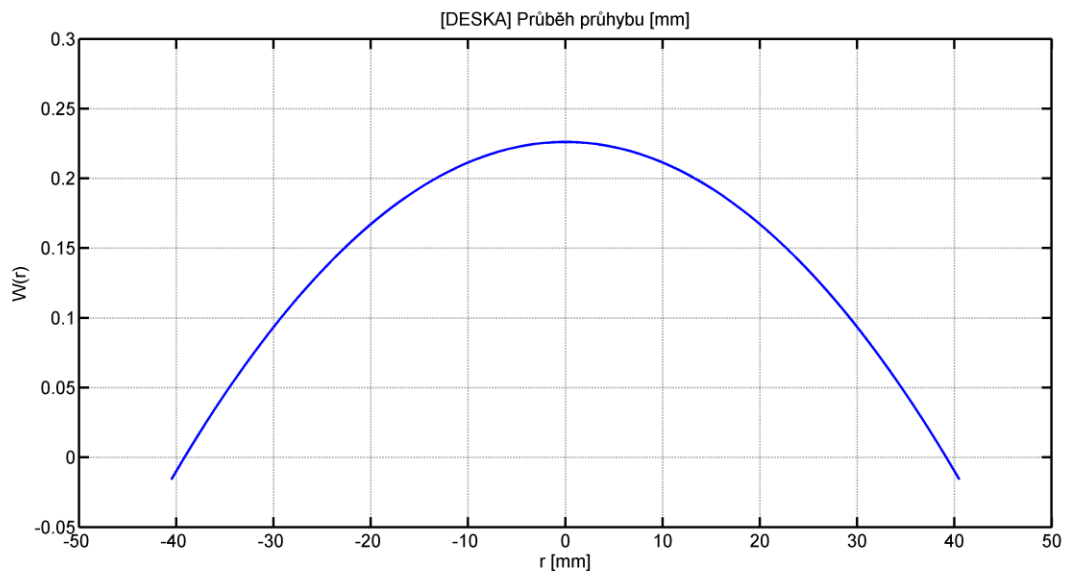
Toto už jsou pouze dvě rovnice o dvou neznámých. Po vyřešení v systému MAPLE vyjdou pro naši geometrii a zatížení následující hodnoty:

$$\begin{aligned} T_1 &= 22,45 \frac{N}{mm} \\ M_1 &= -217,60 \frac{N \cdot mm}{mm} \end{aligned} \quad (50)$$

Teď můžeme dosadit do všech potřebných rovnic a určit průběhy napětí a deformací daných částí složeného tělesa. Bude nás určitě zajímat:

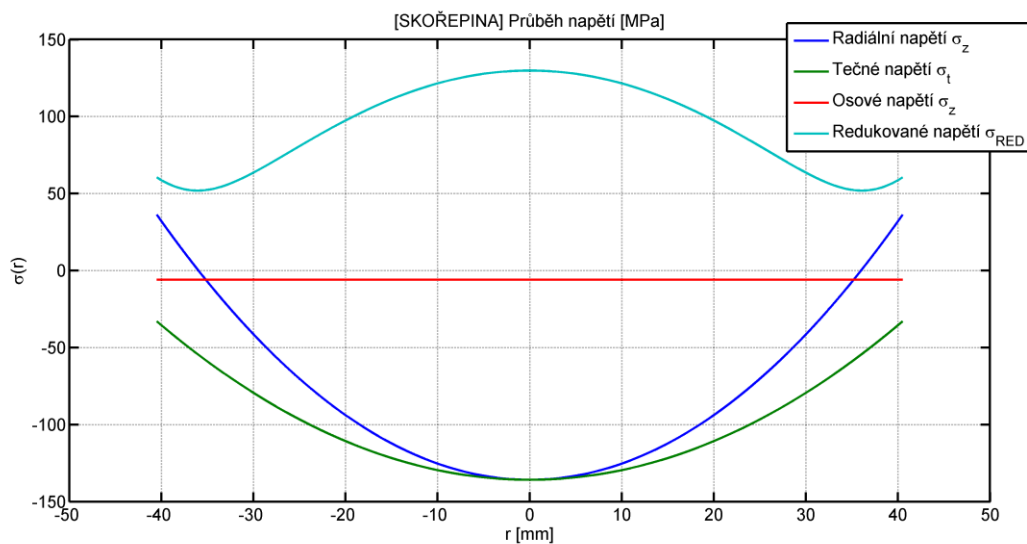
- Průhyb dna pístu – deska, určíme jako $\int \vartheta_{DES} dr$ s OP $r = R_s: w_{DES} = 0$
- Napětí na dně pístu – určíme pomocí konstitutivních vztahů
- Radiální posuv skořepiny – máme vyjádřen
- Napětí a momenty skořepiny – určíme pomocí konstitutivních vztahů skořepiny

3.5.5 Napětí a deformace složeného tělesa



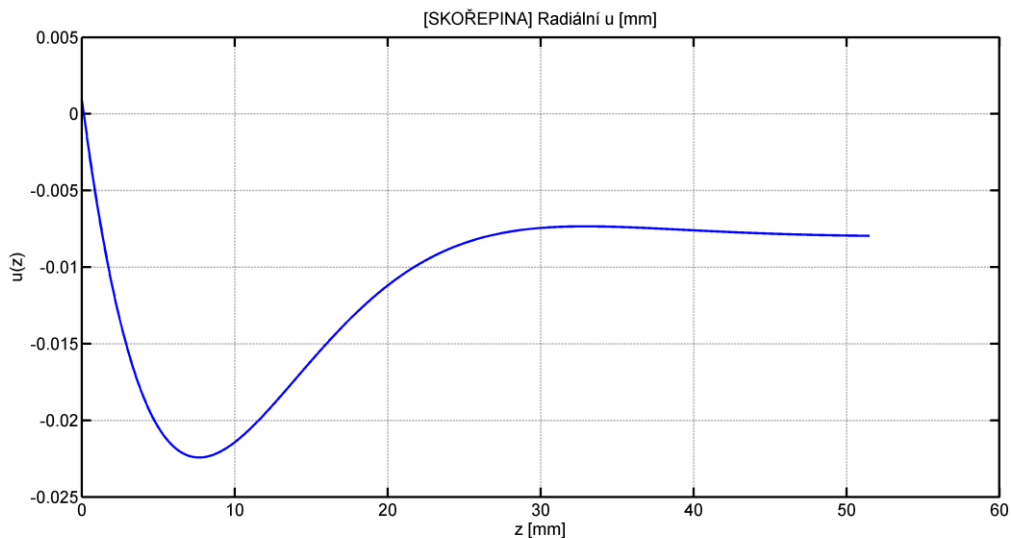
Obr. 26 : Průběh průhybu desky složeného tělesa

Jak je vidět, průběh je dosti podobný podepřené desce, což je způsobeno především tím, že stykový moment mezi skořepinou a deskou není až tak velký a deska se v tomto případě chová spíše jako podepřená než jako vetknutá – skořepina má menší tuhost než deska. To, že průběh na maximálním poloměru není přesně 0 je způsobeno tím, že okrajová podmínka pro průhyb je postavena na střednicový poloměr R_s .



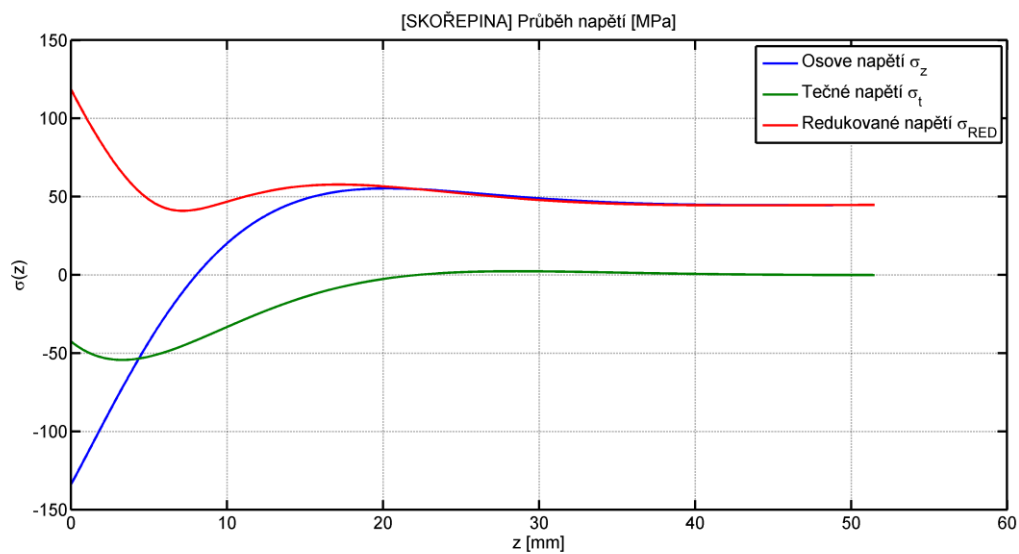
Obr. 27 : Průběh napětí desky složeného tělesa

Průběh napětí dna jsou v tomto případě průběhem podobné podepřené desce, hodnoty jsou však jiné.



Obr. 28 : Průběh posuvu skořepiny

Na Obr. 28 vidíme deformace skořepiny. V místě spojení s deskou začíná špička radiálního posuvu, a dále od této vazby se posuv opět srovná a blíží se k hodnotě $u = 8 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$.



Obr. 29 : Průběh napětí skořepiny

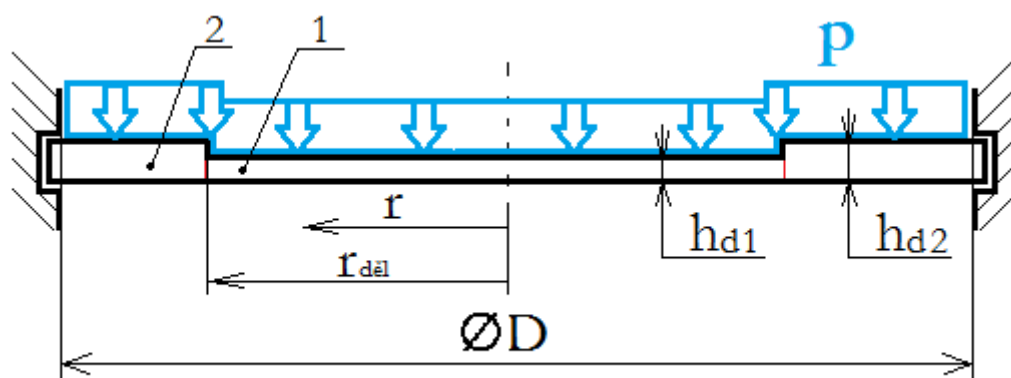
Nyní máme nový průběh napětí na vnější straně pláště pístu. Toho jsme při modelování pouze deskou nemohli dosáhnout. Zde je vidět obrovské osové napětí v místě spojení s deskou a následný pokles napětí na téměř konstantní hodnoty od určité vzdálenosti od vazby. Redukované napětí je vyjádřeno dle energetické hypotézy HMM.

3.6 Vliv osazení dna pístu, střední tloušťka desky a dělená vetknutá deska

V minulých třech kapitolách jsme vždy počítali s tloušťkou desky h_d , která zatím nebyla specifikovaná. Když se podíváme na geometrii pístu (kapitola 2.3) tak je vidět, že tloušťka dna pístu není po celém průměru konstantní. Uprostřed (ve skutečnosti trochu excentricky, ale pro analytické řešení musíme zajistit rotační symetrii úlohy) je osazení, kde je tloušťka desky pouze $h_1 = 7,1 \text{ mm}$, na průměru $\varnothing D_{\text{děl}} = 56,4 \text{ mm}$ se tloušťka desky mění na $h_2 = 9,8 \text{ mm}$.

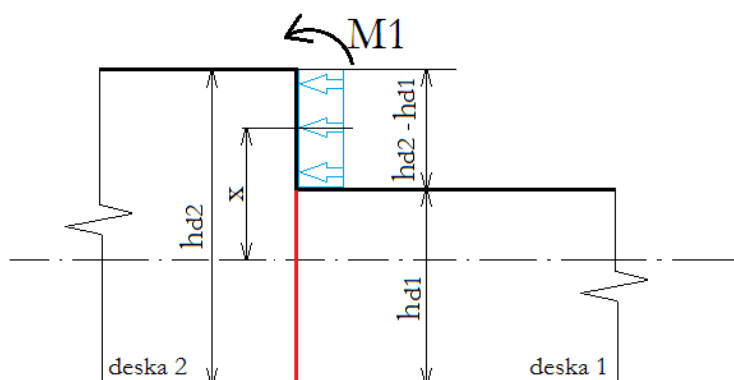
V této kapitole provedeme řešení dna pístu pomocí dělené vetknuté desky, která se bude skládat ze dvou desek, každá s jinou tuhostí, resp. tloušťkou. Rozebereme silové působení a porovnáme redukované napětí s průběhy homogenní vetknuté desky z kapitoly 3.3 s různými tloušťkami

a zároveň s numerickým řešením. Tímto porovnáním zjistíme optimální hodnotu h_d pro výpočet předchozích případů (nedělená deska). Kdybychom používali dělenou desku pro všechny případy, tak by došlo k větší složitosti celého výpočtu (zvláště u složeného tělesa), extrémnímu soupisu rovnic a na přesnosti výsledků by se to výrazně neprojeвило.



Obr. 30 Dělená, vetknutá deska

Máme tedy dvě desky – desku 1, která je plná (bez otvoru), zatížena radiálním tlakem p , o tloušťce h_{d1} . Dále máme desku 2, o tloušťce h_{d2} , která je rovněž zatížena radiálním tlakem p , není plná a je vetknutá. Desku 2 bychom ve skutečnosti měli řešit spíše jako stěno-desku, jelikož na ni působí část tlaku p ve směru střednicové plochy. Osazení je ale malé, tedy tento vliv zanedbáme. Do výpočtu zahrneme pouze ohybový moment, který vznikne na úrovni přechodu desek.



Obr. 31 : Ohybový moment na přechodu desek

Pro tento případ dělené desky nám bude stačit vyjádření natočení, z čehož vypočítáme napětí. Tato napětí porovnáme s dalšími – opět vetknutými deskami různých tloušťek.

Ohybový moment, který vzniká působením tlaku na radiální plochu osazení, vyjádříme jako:

$$M_1 = T \cdot x = p \cdot (h_{d2} - h_{d1}) \cdot x = p \cdot (h_{d2} - h_{d1}) \cdot \frac{h_{d2} - (h_{d2} - h_{d1})}{2} \quad (51)$$

Průběh výpočtu bude stejný jako v kapitole 3.3, pouze budeme mít dvě různé funkce natočení, protože desky jsou dvě. Budeme proto muset zavést deformační podmínky, které nám zajistí spojitost průběhů natočení a radiálního momentu na dělicím poloměru $r_{děl}$.

Vnější deska je vetknutá, můžeme tedy psát:

$$r = R_{max}: \vartheta_2(r) = 0$$

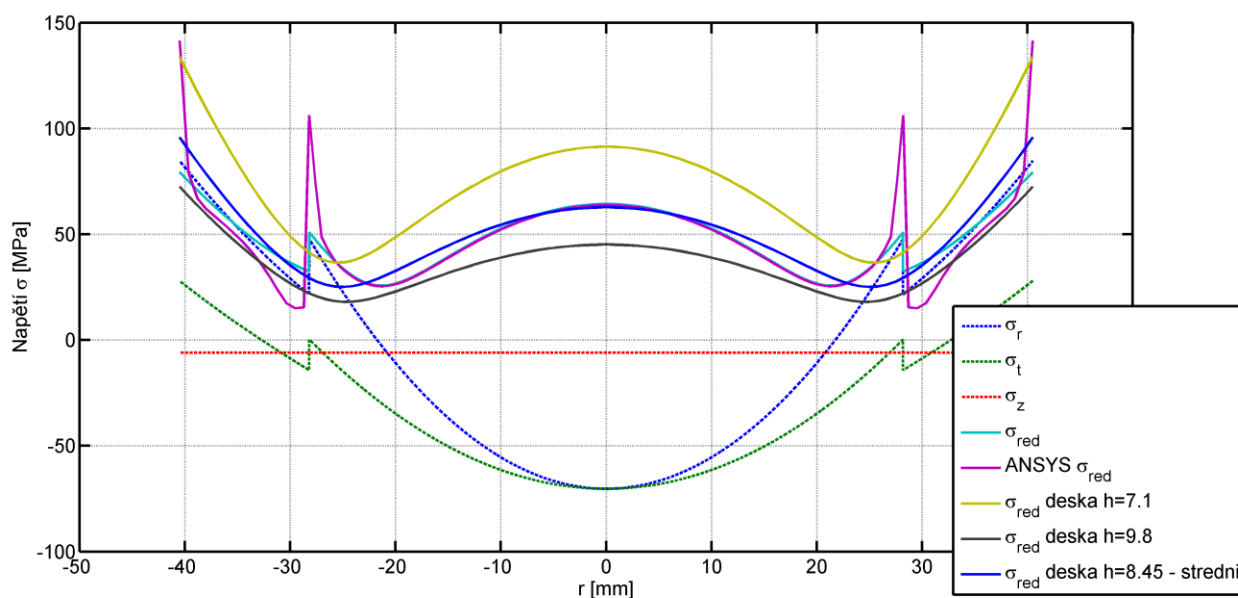
Vnitřní deska je plná, natočení uprostřed desky musí být nulové:

$$r = 0: \vartheta_1(r) = 0$$

A deformační podmínky, které nám zajistí spojitost:

$$\begin{aligned} r = R_{děl}: \vartheta_1(r) &= \vartheta_2(r) \\ r = R_{děl}: M_{R1}(r) + M_1 &= M_{R2}(r) \end{aligned}$$

Po vyjádření integračních konstant dojdeme pro geometrii $h_{d1} = 7,1 \text{ mm}$, $h_{d2} = 9,8 \text{ mm}$ a $R_{děl} = 28,2 \text{ mm}$ a $R_{max} = 40,5 \text{ mm}$ k průběhům napětí:



Obr. 32 : Průběh napětí dělené desky

Na obrázku 31 vidíme průběhy tří hlavních napětí dělené desky. Osově napětí σ_z je rovno zatěžujícímu tlaku p , jelikož vyhodnocujeme horní stranu pístu. V průběhu radiálního a tečného napětí je vidět na dělicím poloměru desek skok. Ten je zde z důvodu rozdílné tuhosti obou částí desky. Dále je na grafu vidět redukovaná napětí, které je spočítáno dle HMH z těchto tří hlavních napětí.

Další podstatný průběh je *ANSYS* σ_{RED} . To je již numerická analýza stejného problému – vetknuté kruhové desky s dvěma tloušťkami. Jak je vidět, až na oblast vetknutí a přechodu průběh souhlasí s analytickým výpočtem σ_{RED} . To přesně odpovídá principu Saint-Venanta, v oblasti ostrého přechodu desek navíc vzniká koncentrátor napětí, který analytický výpočet nezohledňuje.

Další tři průběhy jsou rovněž redukovaná napětí, již se ale nejedná o dělené desky, ale o homogenní desky, stejné jako v kapitole 3.3, s různými tloušťkami.

Při konzervativním přístupu bychom mohli zvolit tloušťku desky $h_d = 7.1 \text{ mm}$. Jak je vidět, špička napětí by se nám zvedla přibližně o 30 MPa oproti „skutečnému“ průběhu dělené desky, což už je významná hodnota. Naopak uvažování tloušťky desky $h_d = 9.8 \text{ mm}$ by nás vzdálilo od reality. Pokud zvolíme střední hodnotu tloušťky desky $h_d = 7.1 + \frac{9.8-7.1}{2} = 8.45 \text{ mm}$, dostaneme průběh, který dobře aproximuje skutečný průběh dělené desky. Uprostřed desky se tento průběh od dělené desky liší o méně než 3 %.

Mimo rozsah této práce jsme provedli analytický výpočet i pro ostatní výpočtové modely, které zohledňovali taktéž dělenou desku. Jak pro případ prostě podepřené desky, tak pro případ složeného tělesa, rozdíl v napětích (v dostatečných místech od přechodů a vazeb) nebyl větší než 5 %. Střední tloušťka byla tedy zvolena jako kompromis mezi „ještě“ platnými výsledky a zároveň nepřekračováním rozsahu této práce.

4 Numerické řešení

V této kapitole budeme řešit pevnostní výpočet pístu pomocí metody konečných prvků (MKP). Budeme opět používat deformační variantu přímého řešení úlohy, ale nyní využijeme variačního algoritmu. Principem MKP je tedy minimalizace Lagrangeova funkcionálu:

„Ze všech kinematicky přípustných stavů pružného tělesa nastává ten, který dává potenciální energii systému (funkcionálu Π) minimální hodnotu“.

Přičemž $\Pi = W - P$, kde W je energie napjatosti a P potenciál vnějšího zatížení.

Při analytickém řešení jsme hledali funkci posuvů (příp. natočení) jako spojitou funkci. Při řešení pomocí MKP dané těleso (geometrii) rozdělíme (zdiskretizujeme) na daný počet elementů (prvků) a hledáme posuvy v uzlech (body prvku).

Po zavedení matice tuhosti pro element, která má fyzikální rozměr tuhosti, a poté globální matice tuhosti pro celé těleso můžeme Lagrangeův funkcionál Π vyjádřit jako:

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{F} \quad (52)$$

Kde \mathbf{K} je globální matice tuhosti, \mathbf{F} je výsledná matice zatížení a \mathbf{U} globální matice deformačních parametrů.

Pokud máme tento funkcionál minimalizovat, musíme najít jeho stacionární hodnotu.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{U}} = 0 \quad (53)$$

Z čehož dostáváme *Základní rovnici MKP* :

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (54)$$

Dále teorii MKP nebudeme rozvádět, na toto téma bylo sepsáno hodně publikací, podrobné odvození principů MKP lze najít např. v [18].

Jelikož principem MKP je nahrazení nekonečně malého elementu (diferenciální přístup – analytické metody) tělesa elementem s konečnými rozměry, musíme stanovit, jak by měl být element v daných případech velký a také si ověřit, zda máme vhodnou síť. Při vytvoření sítě tedy budeme postupovat následovně:

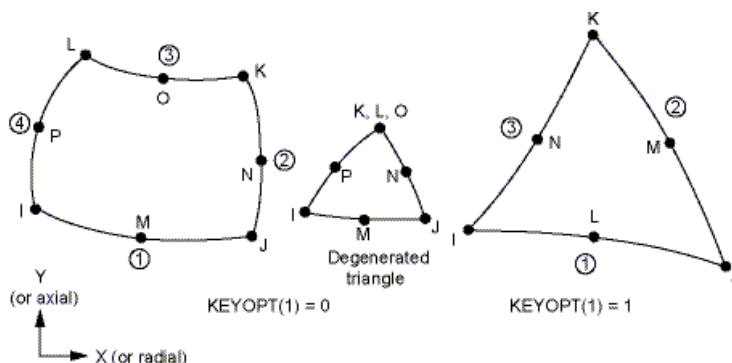
- Zvolíme počáteční velikost elementu
- Vykreslíme si řešení úlohy – posuvy a napětí
- Velikost elementu zmenšíme o 50 % a sledujeme změny průběhu posuvů a napětí
- Pokud je změna výsledků větší než 5 %, zmenšíme velikost elementu opět o 50 %, pokud je menší než 5 %, velikost sítě ponecháme

Pokud se budou výsledky lišit pouze v místech koncentrátorů napětí, přechodů apod., budeme síť zjemňovat pouze lokálně.

4.1 Numerické řešení vetknuté desky

Vyřešíme znovu problém z kapitoly 3.3, tedy nahrazení dna pístu vetknutou deskou. Pro tuto analýzu použijeme pouze 2D přístup se zapnutím osové symetrie (typ analýzy = *axisymmetric*).

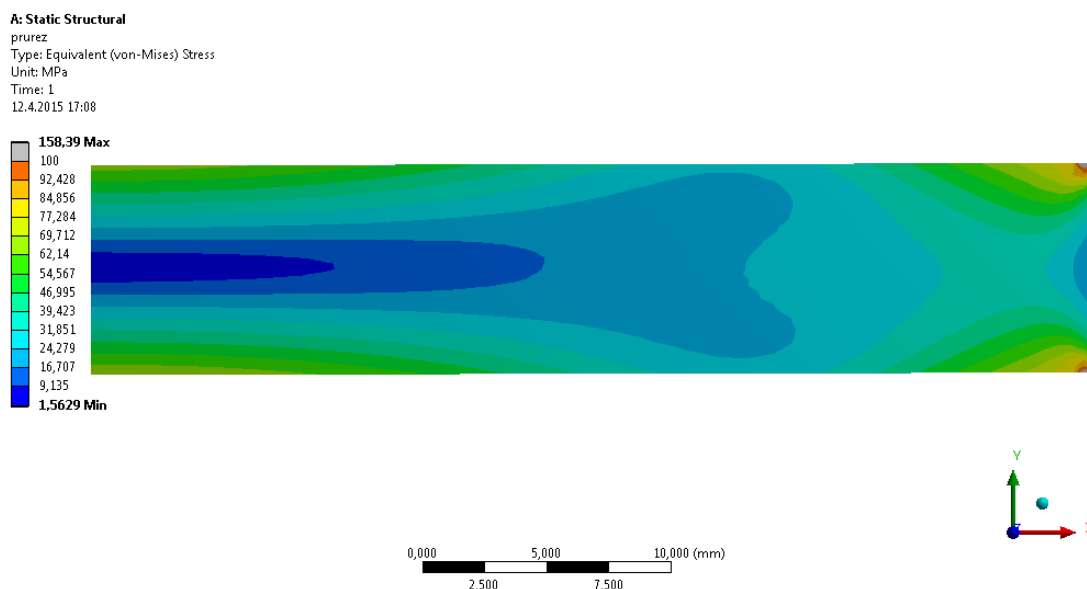
Bylo využito prvku *PLANE183*, což je prvek „vyššího stupně“ pro 2D analýzy, ve výchozím nastavení má 8 uzlů.



Obr. 33 : PLANE183

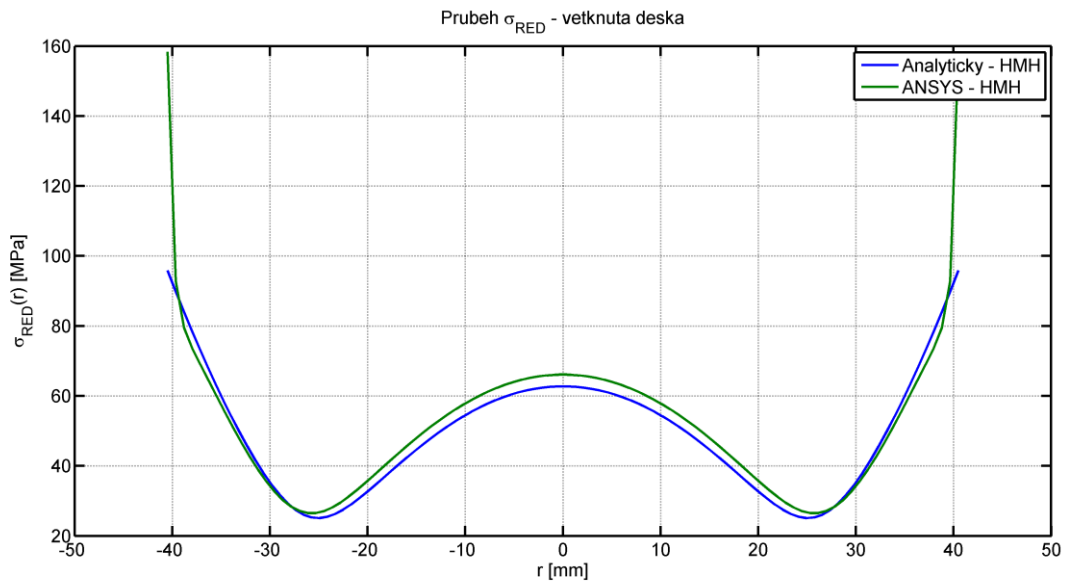
Díky uzlům 1, 2, 3, 4 je možné síťovat i složitější geometrie s celkově nižším počtem elementů.

Velikost elementu byla 0.5 mm, při nižších hodnotách se průhyb desky a napětí výrazně nelišilo (vyjma bodů horní a dolní plochy desky u vetknutí). Celkový počet prvků byl 1377 a celkový počet uzlů 4328.



Obr. 34 : Rozložení napětí na řezu desky – vetknutá deska

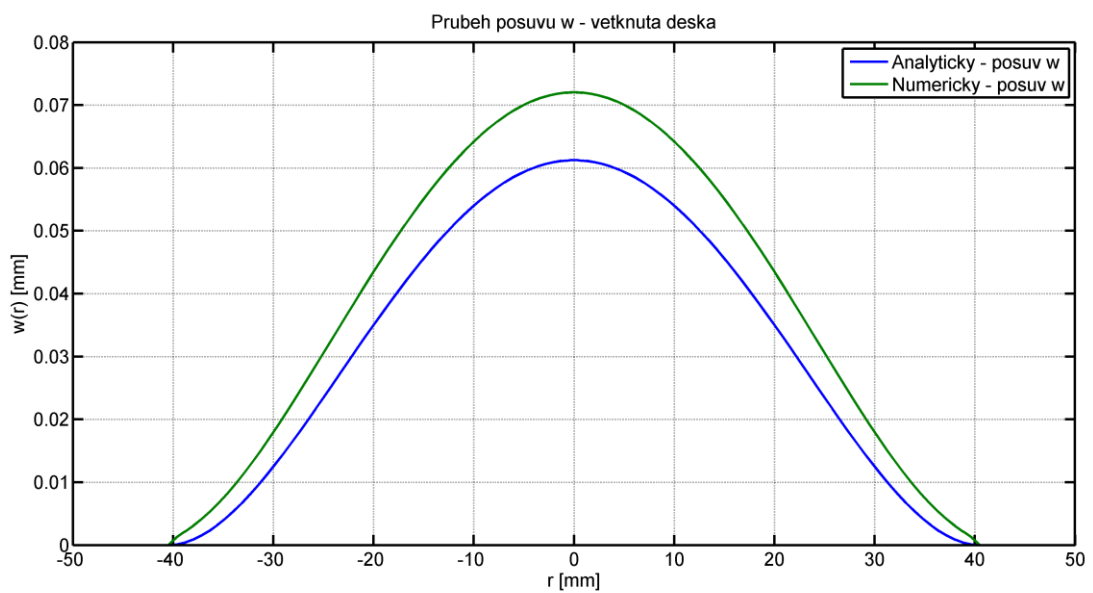
Na Obr. 34 vidíme pouze polovinu průřezu desky, na levé hraně je osa rotační symetrie (střed desky) a na pravé hraně je vetknutá hrana. Když porovnáme napětí z kapitoly 3.3 s napětím z numerického řešení, dostaneme následující průběh:



Obr. 35 : Porovnání napětí na horní straně desky

Největší rozdíl napětí je patrný ve středu pístu, rozdíl zde je asi 5 %. Na maximálním poloměru napětí numerické analýzy výrazně naroste, to je způsobeno zvolenou okrajovou podmínkou (vetknutí) a odpovídá to Saint-Venantovu principu.

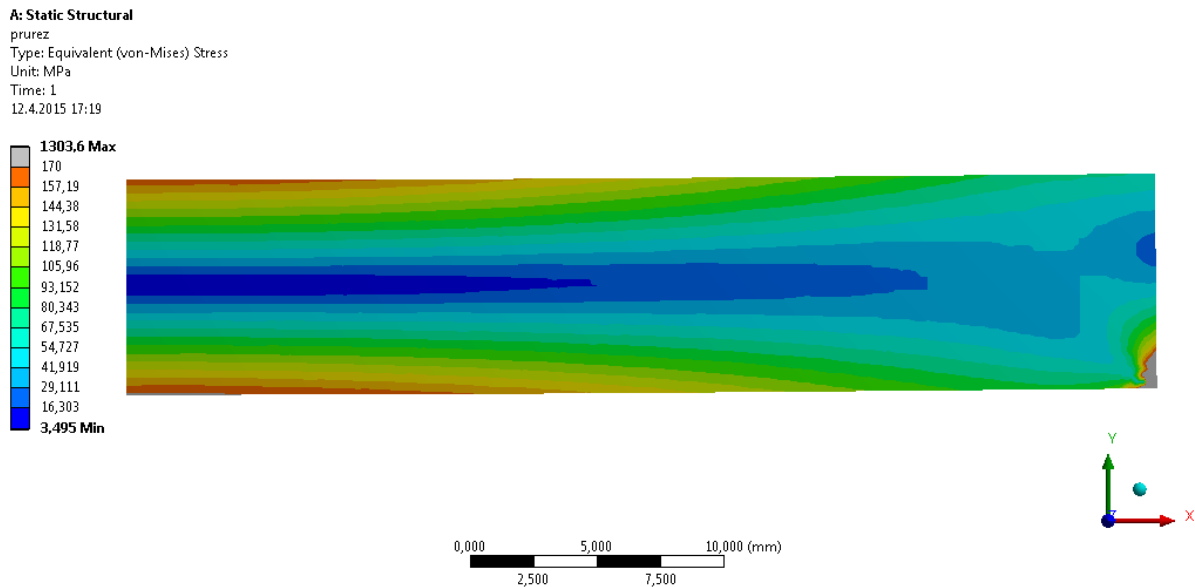
Porovnáním posuvů dostaneme následující graf:



Obr. 36 : Porovnání posuvu w - vetknutá deska

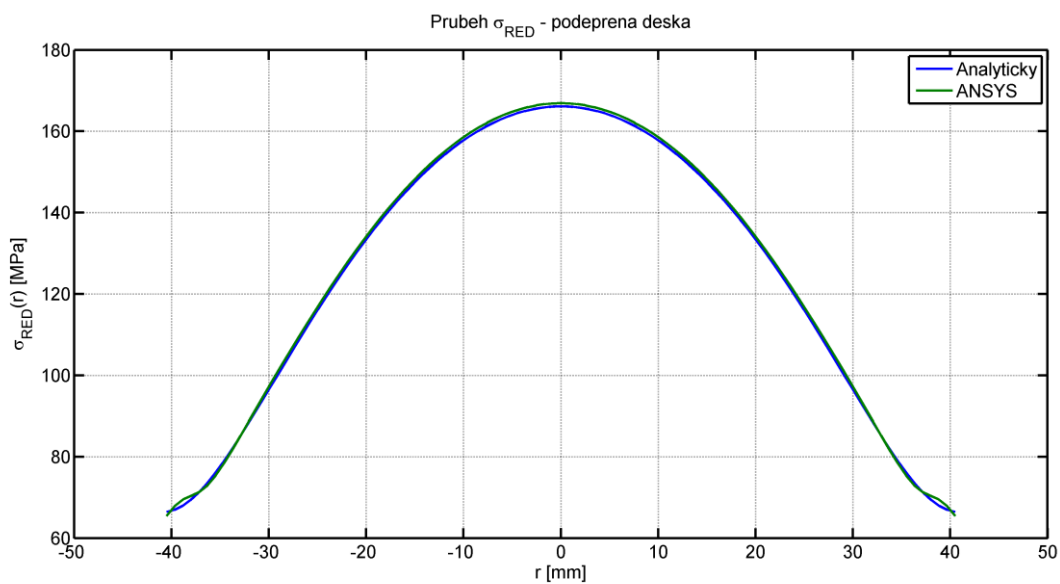
4.2 Numerické řešení podepřené desky

Typy i počty elementu zůstávají stejné z předchozí analýzy.



Obr. 37 : Rozložení napětí na řezu desky – podepřená deska

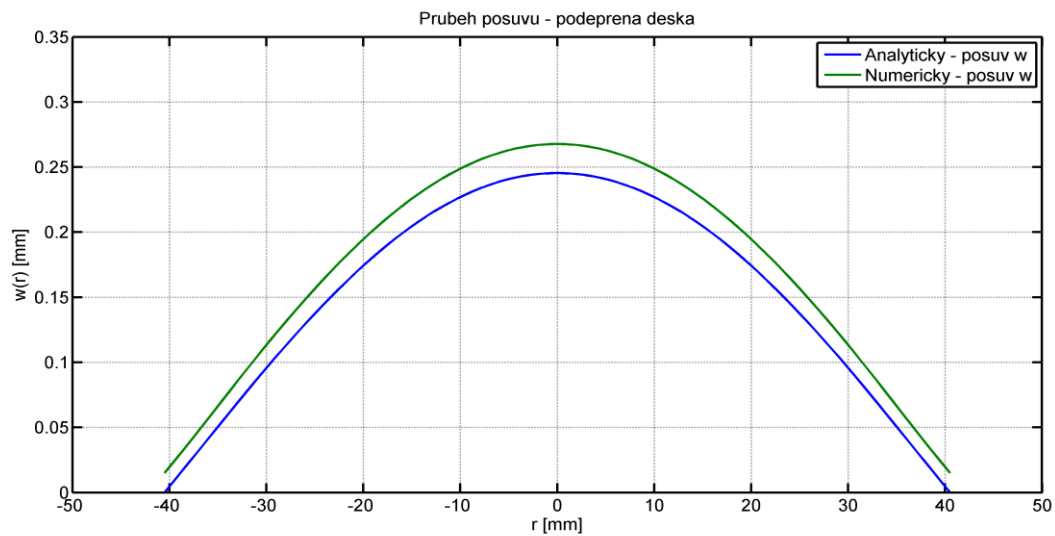
Při porovnání analytického a numerického přístupu se průběhy napětí liší ještě méně než v případě vetknuté desky, viz následující graf.



Obr. 38 Porovnání napětí na horní straně desky

Dle Obr. 37 je vidět lokální nárůst napětí v místě podepření. Napětí je v tomto místě větší než 1300 MPa. Stalo se tak z důvodu aplikace okrajové podmínky na jediný bod, čímž vznikla malá oblast s velkými deformacemi. V praxi k takovému nárůstu napětí nedochází. Pokud bychom však v praxi chtěli blíže zkoumat lokální nárůsty napětí, je nutné úlohu vždy formulovat na té nejvyšší úrovni z hlediska MKP – kontaktní úlohy. Pro porovnání mezi MKP a analytickým přístupem tento lokální nárůst chápeme jako umělý koncentrátor (ve smyslu opět S.V. principu) a nebudeme se jím dále zabývat.

Porovnání posuvů je následující:

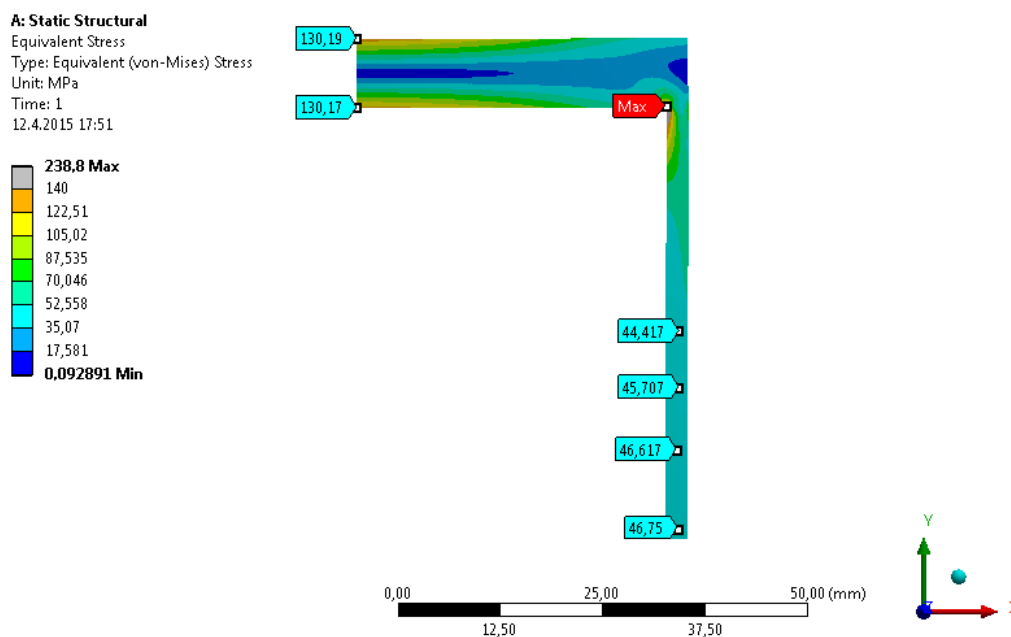


Obr. 39 : Porovnání posuvu - podepřená deska

4.3 Numerické řešení složeného tělesa

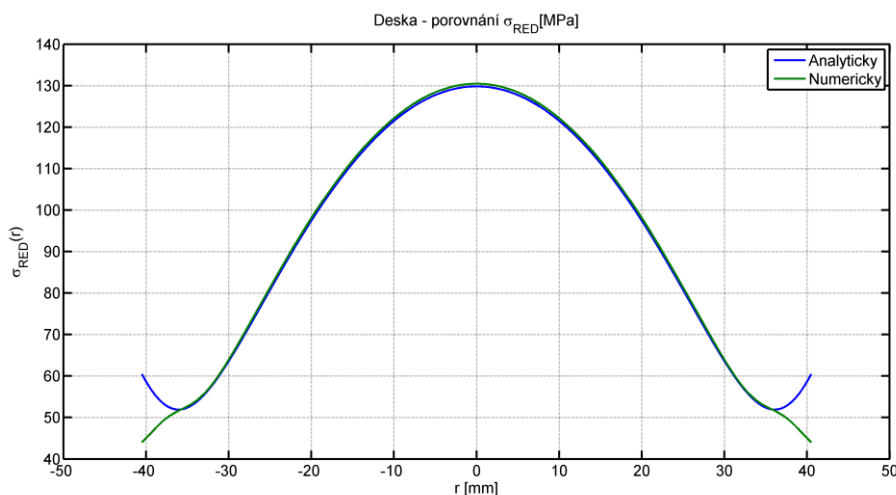
Nyní budeme řešit složené těleso z kapitoly 3.3 (stěno-deska + skořepina) pomocí MKP. Použijeme opět 2D typ analýzy v rotační symetrii.

Typ prvku zůstane PLANE183. Okrajové podmínky nastavíme následovně: pracovní tlak 6 MPa na dno pístu a nulový posuv (ve směru osy pístu) na spodní straně skořepiny. To odpovídá teorii dlouhé skořepiny v kapitole 3.3, naše skořepina je dosti dlouhá, aby jedna vazba neovlivňovala chování skořepiny na druhé straně (druhém čelu). Citlivostní analýza velikosti prvku ukázala, že nám vyhovuje velikost prvku 0,5 mm, při zjemnění sítě o 50 % se výsledky změnily pouze o 1 %, což vyhovuje stanovenému kritériu.



Obr. 40 : Celkový průběh napětí složeného tělesa pomocí MKP.

Maximální napětí je v místě vnitřního přechodu skořepiny na desku. To je logické, protože je zde roh bez zaoblení, neboli koncentrátor napětí. Tento vrubový účinek nemáme v analytickém řešení podchycen, nicméně v praxi je nežádoucí, a proto je kompenzován zaoblením určité velikosti. V kritickém místě dna pístu je napětí 130 MPa , což souhlasí s naším analytickým výpočtem. Pokud si vykreslíme průběh napětí na horní straně dna pístu z MKP řešení a z analytického řešení, dostaneme následující porovnání.

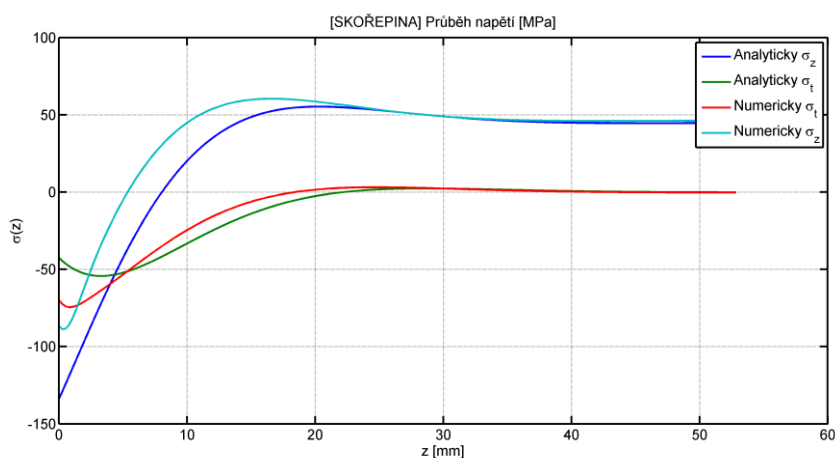


Obr. 41 : Porovnání napětí na horní straně stěno-desky složeného tělesa

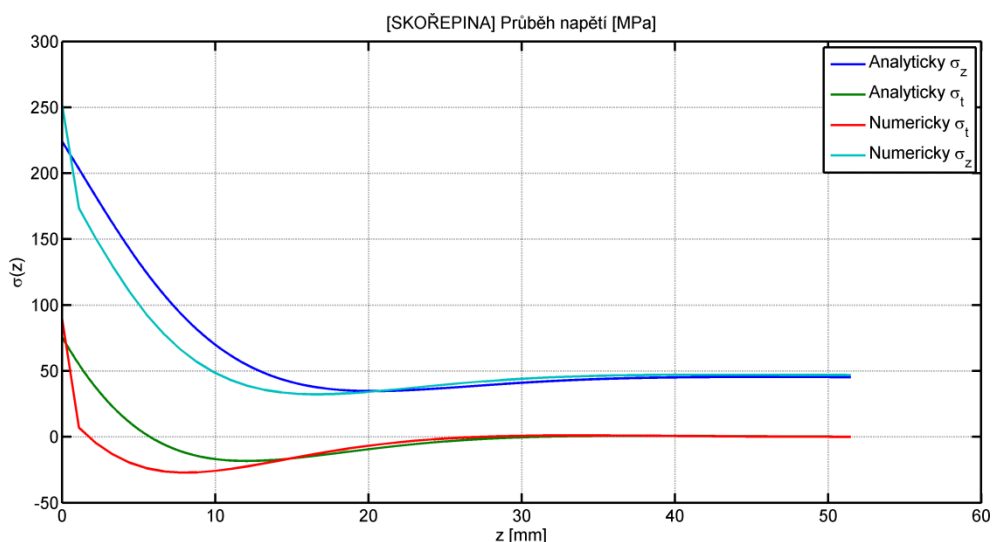
Vidíme, že průběh napětí odpovídá s chybou 0,6 % na $r = 0$. Tím máme zároveň ověřeno, že náš analytický výpočet v kapitole 3.3 je správný.

Co se na obou průbězích liší, je oblast spojení stěno-desky se skořepinou. To zase odpovídá Saint-Venantovu principu, jelikož my jsme si v analytickém přístupu zavedli stykový moment M_1 , který působí na jednom poloměru $r = R_s$ střednicové plochy, ve skutečnosti je ale přenos vnitřních účinků realizován po celém průřezu skořepiny.

Zajímavější ale bude, když se teď zaměříme na průběh napětí na vnitřní a vnější straně skořepiny (pláště pístu). Ve skořepině je dvouosá napjatost, jelikož radiální napětí je nulové. Nejdřív tedy vykreslíme průběh osového a tečného napětí pro skořepinu od $Z = 0$ do spodní vazby $Z = L$.

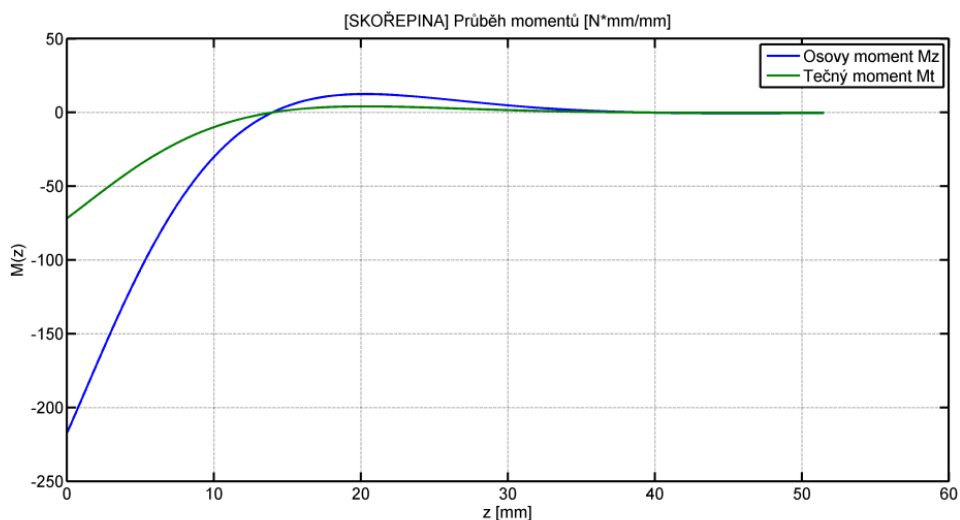


Obr. 42 : Porovnání napětí na vnější straně skořepiny



Obr. 43 : Porovnání napětí na vnitřní straně skořepiny

Na Obr. 42 vidíme, že v místě spojení skořepiny s deskou ($z=0$) je významný rozdíl obou napětí a s narůstající vzdáleností od desky se rozdíl snižuje. Dle rovnic (40) a (41) vidíme, že napětí se skládá ze dvou složek vnitřních účinků – momentů a liniových sil. Od určité vzdálenosti $z = 35$ mm jsou vnitřní momenty nulové (viz Obr. 44) a napětí vytváří pouze liniové síly, od této vzdálenosti jsou analytické a numerické průběhy ve shodě.

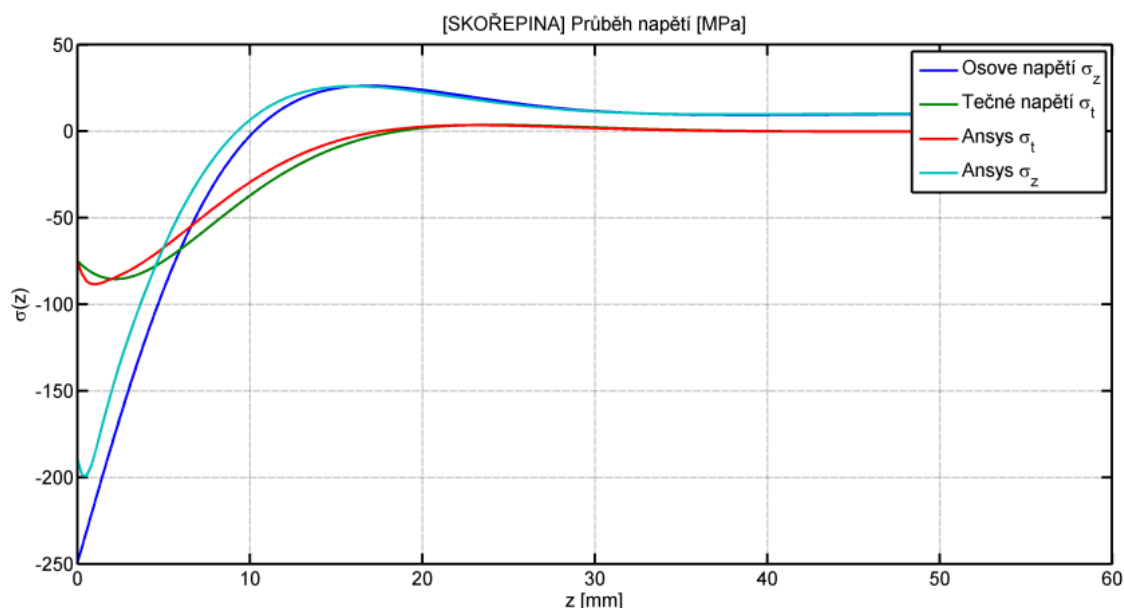


Obr. 44 : Analytické řešení - průběh momentů skořepiny

Rozdíl průběhů napětí nám tedy způsobují momenty. Jelikož tečný moment je lineárně závislý na osovém momentu, je logické, že změna osového momentu způsobí i změnu tečného momentu. To opět ukazuje na Saint-Venanta, jelikož máme spojení skořepiny a stěno-desky realizováno pouze pomocí liniového momentu, který působí na jednom poloměru stěno-desky, potažmo v $z = 0$ střednicového poloměru skořepiny.

Další vliv na rozdíl má to, že analytické teorie jsou odvozeny pro tenkostěnná tělesa, což neodpovídá naší skutečnosti, navíc skořepina má třetinovou tloušťku oproti stěno-desce.

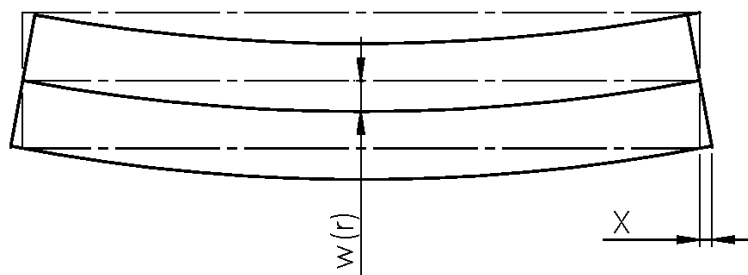
Když jsme provedli zkušební výpočet typově stejného tělesa o tloušťce desky a skořepiny 2 mm, zatíženého tlakem 1 MPa, analyticky a numericky, získané průběhy vypadaly následovně:



Obr. 45 : Napětí na zkušební skořepině a stěno-desce malé tloušťky.

Jak je vidět, rozdíl je výrazně menší, než v našem případě, i když co do absolutních hodnot se jedná stále o významná čísla. Naštěstí můžeme vidět, že analytický přístup je v tomto případě konzervativnější, než jsou skutečné hodnoty napětí a ne opačně.

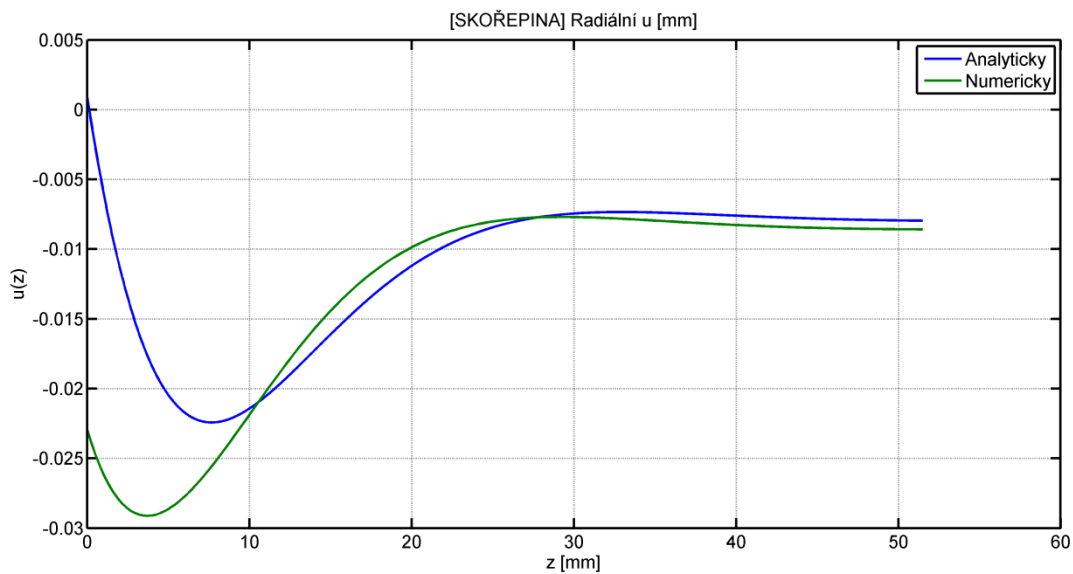
Předpoklad tenkostěnných těles v sobě zahrnuje vliv na Obr. 46 – již jen vlivem průhybu desky při zatížení (tlakem na horní stranu), se deska zároveň nepatrně deformuje i v radiálním směru, to ale v analytickém řešení nebereme v úvahu – uvažujeme „malé deformace“, jenže na tento dolní spodní roh je napojena skořepina.



Obr. 46 : Radiální deformace desky

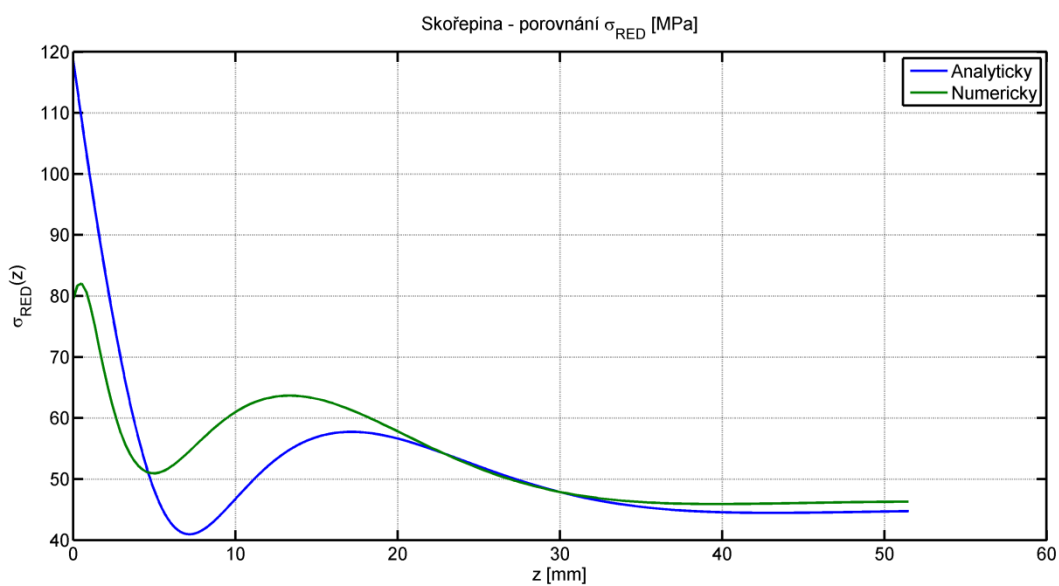
Tudíž v MKP řešení má průběh radiálního posuvu skořepiny už v $z = 0$ nějakou hodnotu. V analytickém řešení má průběh posuvu skořepiny v $z = 0$ přibližně $u = 0$, jelikož přímo na skořepinu (stejně jako na stěnu) v radiálním směru působí pouze styková liniová síla T_1 a ta je malá.

Porovnáme tedy průběh radiálního posuvu skořepiny:



Obr. 47 : Posuv skořepiny u

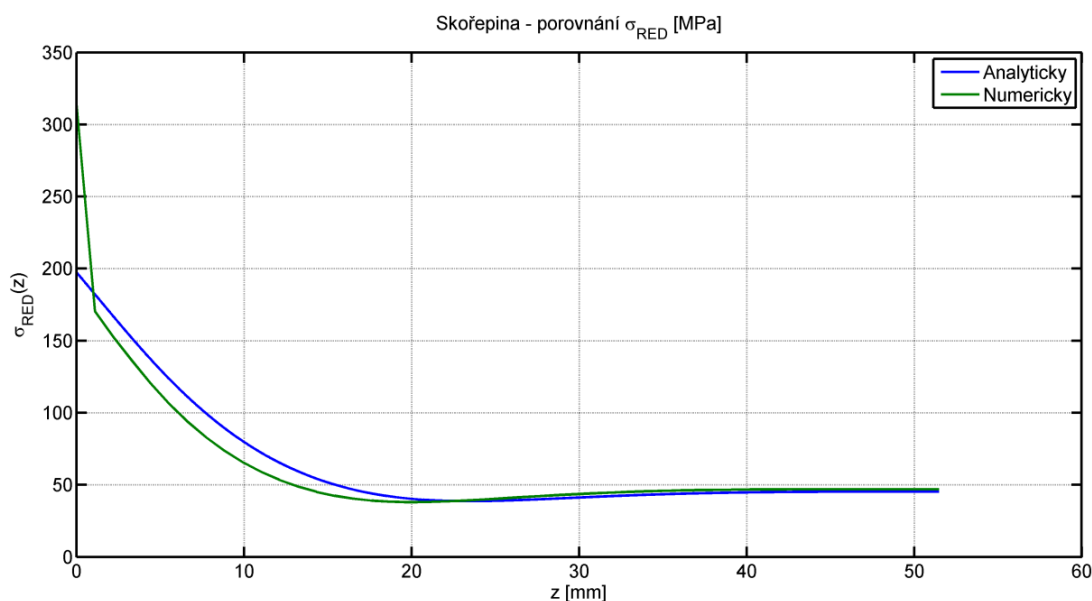
Jak je vidět, numerický průběh je posunutý, což způsobuje mj. výše vysvětlený jev. Pokud tedy shrneme porovnání do jednoho grafu redukovaného napětí dle HMM, dostaneme následující průběh.



Obr. 48 : Redukované napětí na vnější straně skořepiny

Analytický průběh zde nabývá vyšších hodnot než skutečný průběh, spočítaný v MKP, v dostatečné vzdálenosti od spojení s deskou jsou průběhy ve shodě.

Porovnáme-li ještě vnitřní stranu skořepiny, dostaneme výrazně lepší výsledky.

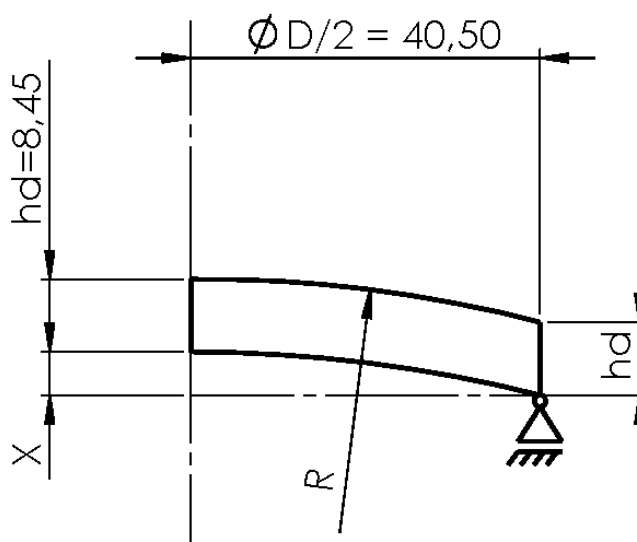


Obr. 49 : Porovnání napětí na vnitřní straně skořepiny

V bodě $z = 0$ na vnitřní straně skořepiny je koncentrátor napětí, což způsobuje prudký nárůst napětí v tomto místě u MKP průběhu, jinak jsou průběhy téměř ve shodě.

4.4 Vliv zakřivení dna na D-N stav

V této kapitole odbočíme od porovnávání analytických a numerických přístupů k řešení D-N stavu dna pístu, ale podíváme se na vliv zakřivení dna pístu. Řešit budeme pouze pomocí MKP.



Obr. 50 : Model dna pístu - zakřivené dno

Dno pístu tedy budeme modelovat jako podepřenou desku, o parametrech jako má náš píst – tzn. tloušťka desky $h_d = 8.45 \text{ mm}$ a vnější průměr pístu $\varnothing D = 81 \text{ mm}$.

Budeme však postupně zvyšovat hodnotu kóty X , spojnice mezi středem pístu a krajem pístu jsou části kružnice, které mají středy na ose rotace dna pístu.

Hodnotu kóty X budeme postupně zvyšovat od hodnoty 0.1 mm až do hodnoty posunutí $X = h_d$.

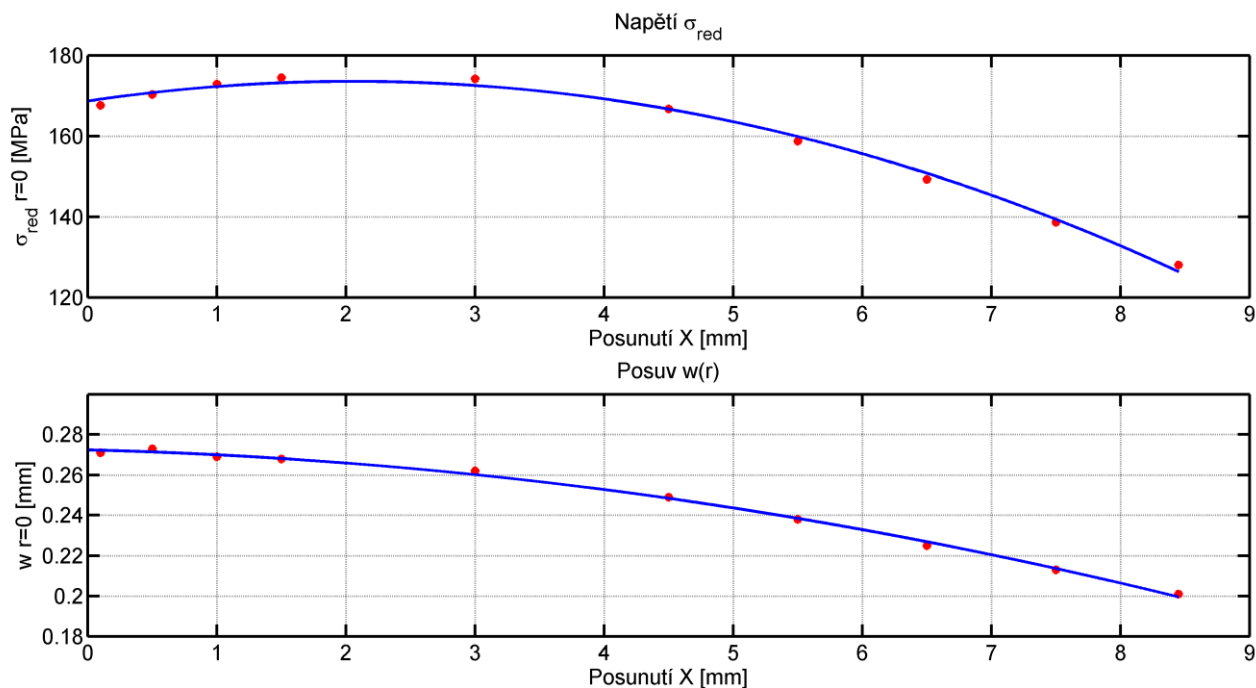
Horní strana pístu bude opět zatížena tlakem $p = 6 \text{ MPa}$. Budeme sledovat průhyb a redukované napětí v $r = 0$ a $r = R_{MAX} = 40,5 \text{ mm}$. Hodnoty zaznamenáme do tabulky a vyneseme do grafu.

Parametry analýzy budou stejné jako v předchozích případech, bude se jednat o 2D osově symetrickou analýzu, s velikostí elementu typu PLANE183 0,5 mm s testem velikosti sítě pro každou geometrii.

Tabulka 1 : Hodnoty napětí a posunutí pro různá zakřivení dna

$X[\text{mm}]$	$R[\text{mm}]$	$r = 0$: $\sigma_{RED}[\text{MPa}]$	$r = 0$: $w[\text{mm}]$	$r = R_{max}$: $\sigma_{RED}[\text{MPa}]$	Poznámka
0,1	8201	167,65	0,271	64,54	<i>Téměř rovné dno</i>
0,5	1641	170,33	0,273	60,85	
1,0	820	172,87	0,269	56,04	
1,5	547,5	174,50	0,268	51,07	
3,0	275	174,20	0,262	35,74	
4,5	184,5	166,70	0,249	20,99	<i>Začíná se významněji projevovat vliv zakřivení</i>
5,5	152	158,78	0,238	12,05	
6,5	129	149,22	0,225	4,98	
7,5	113	138,63	0,213	5,77	
8,45	101	128,08	0,201	11,45	<i>Maximální uvažované posunutí X</i>

Když vykreslíme průběhy napětí a posuv uprostřed desky na poloměru $r = 0 \text{ mm}$ pomocí aproximace polynomem 2. stupně ze zjištěných diskrétních hodnot, dostaneme následující průběhy.



Obr. 51 : Průběh napětí a posuvu různě zakřivené podepřené desky

Se zvyšujícím se zakřivením dna pístu (menší poloměr kulové plochy a větší hodnota posuvu X) tedy klesá průhyb desky a snižuje se maximální napětí.

To je způsobeno smyslem VVÚ, teorie platné pro kruhovou desku přestávají platit a těleso se začíná chovat spíše jako polo-kulová skořepina, u které je rozložení napětí vlivem geometrie jiné. Konkrétním analytickým výpočtem pro takový typ tělesa se v této práci zabývat nebudeme.

Zakřivení dna pístu se u spalovacích motorů vyskytuje poměrně často, důvody jsou různé, buďto je cílem zvýšit kompresní poměr motoru výměnou pístu u stávajícího motoru za píst, se zakřiveným dnem.

Další důvod může být u dvoudobých motorů, kde se zakřivení dna provádí kvůli lepšímu proudění plynů sacími/přepouštěcími a výfukovými kanály.

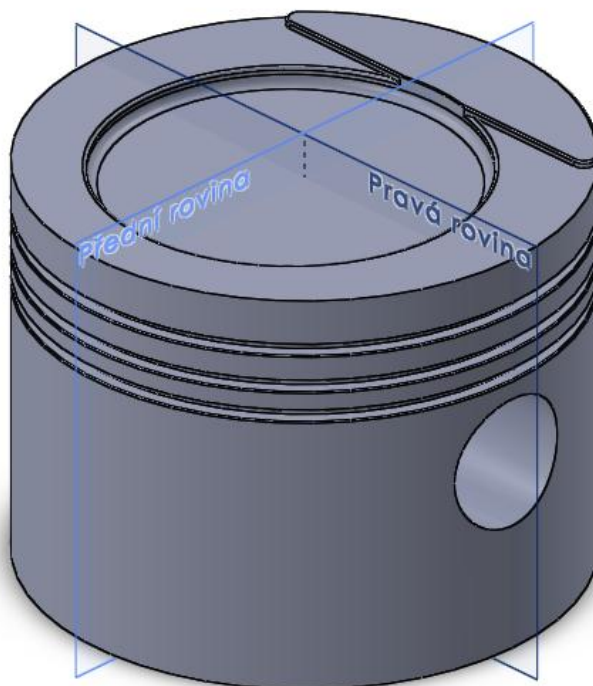
Cílem této kapitoly bylo ukázat, že ač se tato změna děje z různých důvodů, na D-N stav dna pístu má ryze pozitivní vliv. Napětí i deformace při stejném průměru pístu, stejném využití materiálu a stejném zatížení klesají.

4.5 Numerický 3D Model – GOLF1

Nyní budeme k řešení používat výhradně prostorové modely.

V první verzi – *GOLF1* se bude jednat o složené těleso z analýzy 4.3 s tím rozdílem, že v 3D modelu vytvoříme vedení pístního čepu, budou zde tím pádem jiné okrajové podmínky, dále zavedeme zaoblení na přechodu mezi pláštěm a dnem pístu a mezi vedením čepu a pláštěm.

V dalších analýzách budeme 3D model postupně přibližovat skutečnému pístu a budeme sledovat změny v D-N stavu po jednotlivých úpravách.



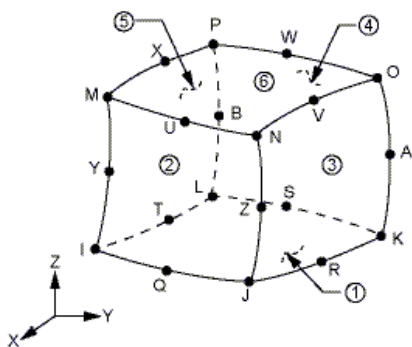
Obr. 52: Roviny 3D modelu

V každé analýze budeme sledovat napětí dle HMH a průhyb na horní straně dna pístu. V každé 3D analýze budou zobrazena redukovaná napětí ve dvou na sebe kolmých řezech (*pravá* a *přední* rovina na Obr. 52: Roviny 3D modelu, přední rovina = rovina pístního čepu). Dále pak budeme zobrazovat napětí a radiální posuv vnější strany pláště, vyhodnocený v rovině pístního čepu.

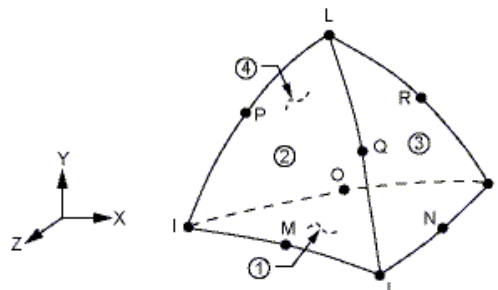
Jako základní element sítě použijeme SOLID186 – *hexahedral*, což je kvadratický, prostorový prvek s 20 uzly. V systému ANSYS použijeme automatickou metodu tvorby sítě „Hex dominant“, což nám vytvoří většinu prvků tohoto typu. Místa v geometrii, kde by *hexa* elementy nebyly vhodné, se vyplní typem SOLID187 - *tetrahedral*, což je rovněž kvadratický prvek, nicméně má poloviční počet uzlů.

Výsledkem sítě naší geometrie bylo při velikosti elementu 2 mm 38789 elementů a 137069 uzlů (z toho 32847 elementů typu SOLID186), test sítě byl úspěšný, při zmenšení velikosti elementu na 1 mm se výsledné hodnoty nezměnily o více než 3 %.

Hexahedral oproti *tetrahedralu* má řadu výhod, hlavní spočívá v počtu uzlů na jeden element - ke zhruba stejné přesnosti výpočtu potřebuje třetinu uzlů než *tetrahedral*. U *tetrahedralu* je větší pravděpodobnost singulární matice tuhosti prvku, čímž dochází k větším chybám ve výsledcích a horší konvergenci sítě. Jelikož oba typy elementů – SOLID186 i SOLID187 jsou kvadratické, není jejich porovnání úplně přímočaré jako u lineárních verzí těchto elementů.



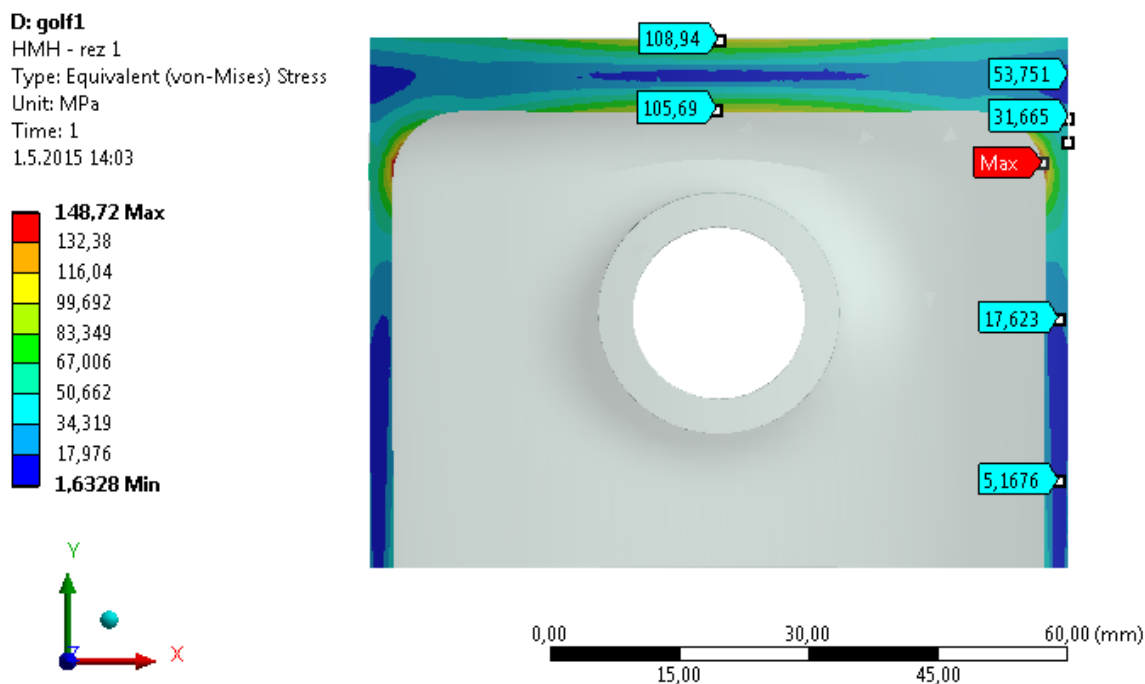
Obr. 53 : SOLID186



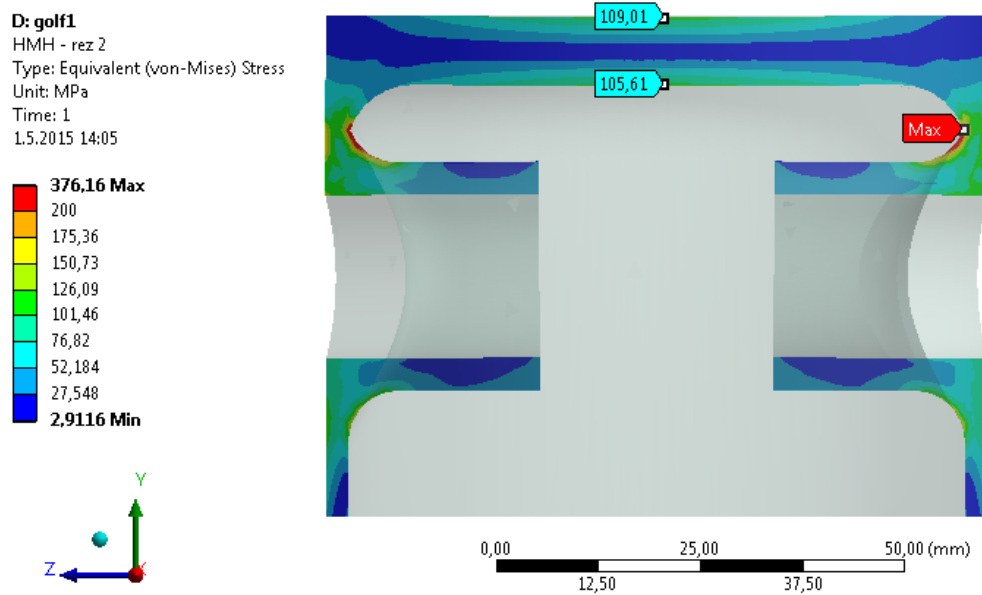
Obr. 54: SOLID187 element

Při D-N analýze modelu GOLF1 jsme tedy zvolili okrajové podmínky: tlak 6 MPa na dno pístu a posuv na vnitřních plochách vedení pístu = 0 pomocí vazby „Remote displacement“.

Výsledná napjatost zobrazená na dvou kolmých svislých řezech:



Obr. 55 : GOLF1 – řez v přední rovině

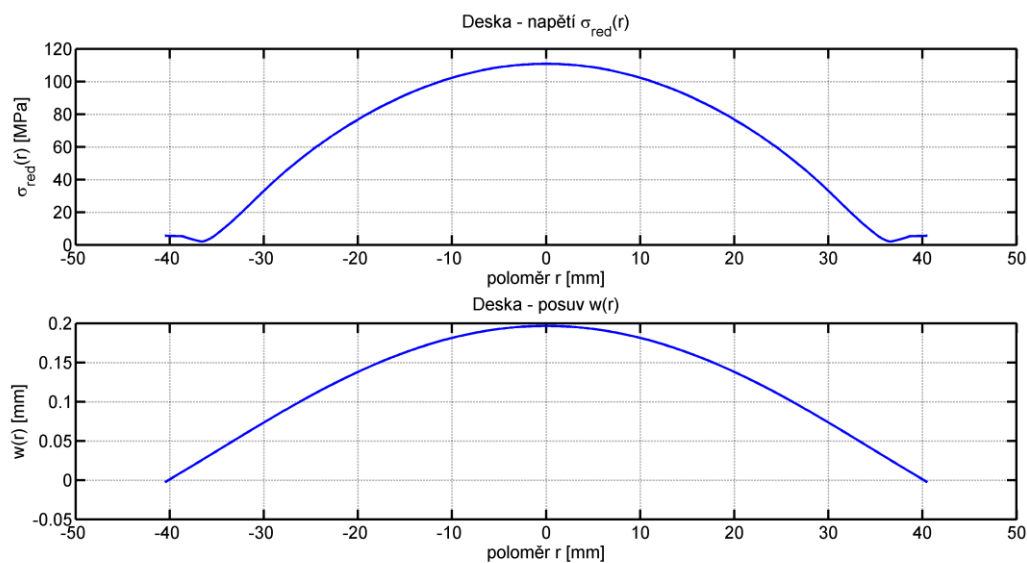


Obr. 56 : GOLF1 - řez v pravé rovině

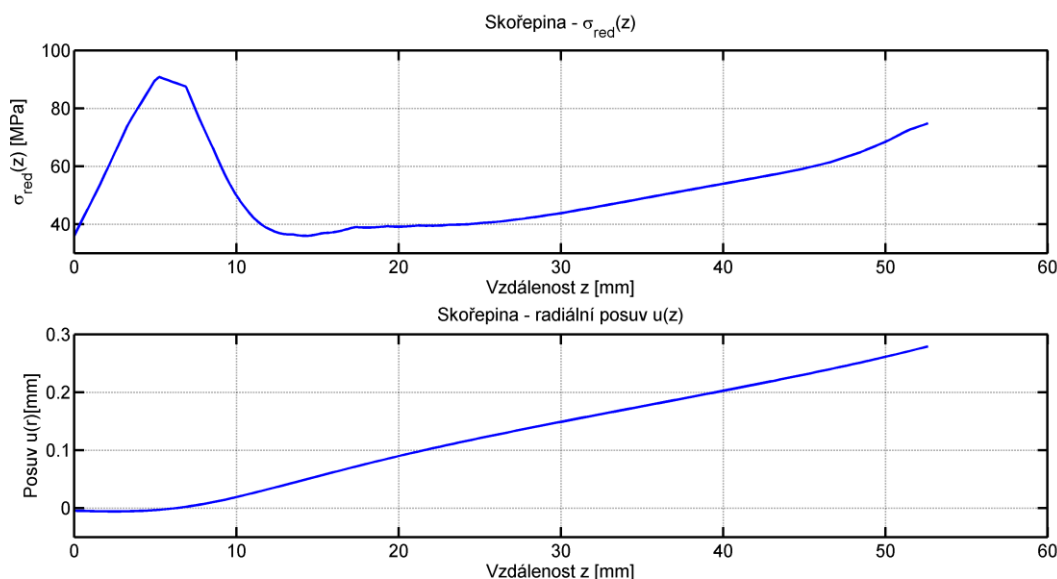
Jak je vidět, napětí ve středu dna ještě klesla oproti složenému tělesu. To je způsobeno jinými vazbami. Napjatost a deformace v pístu již nejsou čistě rotačně symetrické. Další vliv na pokles napětí na dně má zaoblení mezi pláštěm a dnem – zvětšila se tím styková plocha skořepiny a desky.

Kritická místa nyní ale nejsou na dně pístu. Na Obr. 56 je vidět místo s maximálním napětím $\sigma_{RED} = 342 \text{ MPa}$. V tomto místě se stýká zaoblení pláště-vedení pístního čepu a zaoblení dno pístu-plášť, je zde tedy umělý koncentrátor napětí. Ve skutečném pístu je vedení pístního čepu řešeno ještě trochu jinak, což si ukážeme na následujících analýzách.

Pro porovnání D-N stavu s analytickými analýzami a ostatními numerickými analýzami si vykreslíme další průběhy napětí a deformace:



Obr. 57 : Průběh napětí a posuvu na dně pístu - model GOLF1



Obr. 58 : D-N stav pláště pístu, rovina řezu rovnoběžná s pístním čepem - GOLF1

Na Obr. 57 vidíme výraznou změnu oproti analytickým modelům v oblasti vazby – napětí je nízké na úseku přibližně $r = 35$ až $r = 40.5$ mm (a ne pouze v jednom bodě řezu), což odpovídá plynulému přechodu na skořepinu (způsoben rovněž zaoblením mezi dnem pístu a pláštěm). Průběh napětí i deformace odpovídá složenému tělesu, případně podepřené desce.

Dále porovnáme napětí na plášti pístu – skořepině. Napětí si zobrazíme na vnější ploše skořepiny od $z = 0$ (místo, kde končí deska a začíná skořepina) do konce skořepiny. Závislost radiálního posuvu vnější plochy skořepiny a redukovaného napětí dle HMM je vykreslena na Obr. 58.

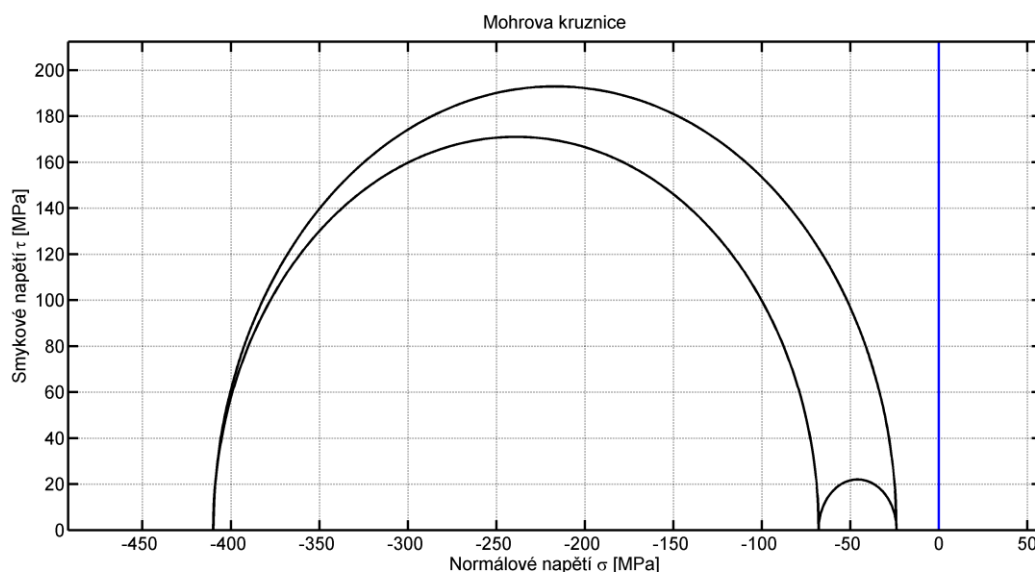
U skořepiny vidíme velký rozdíl, jak v průběhu obou závislostí, tak v hodnotách. Tento rozdíl oproti složenému tělesu je dán tím, že vazba ani zatížení skořepiny již není rotačně symetrické.

4.5.1 Mohrova kružnice – GOLF1

Zaměříme se ještě na místo maximálního redukovaného napětí na Obr. 56. Redukované napětí nám sice kvantitativně vyjádří velikost napětí, nicméně je vždy kladné. Nevíme tedy, jaký charakter má napjatosti v daném místě. Např. z hlediska posouzení chování trhlin nás to ale může zajímat.

Zjistíme tedy velikost hlavních napětí v daném místě, ty jsou následující:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= -27 \text{ MPa} \\ \sigma_2 &= -68 \text{ MPa} \\ \sigma_3 &= -409 \text{ MPa}\end{aligned}$$



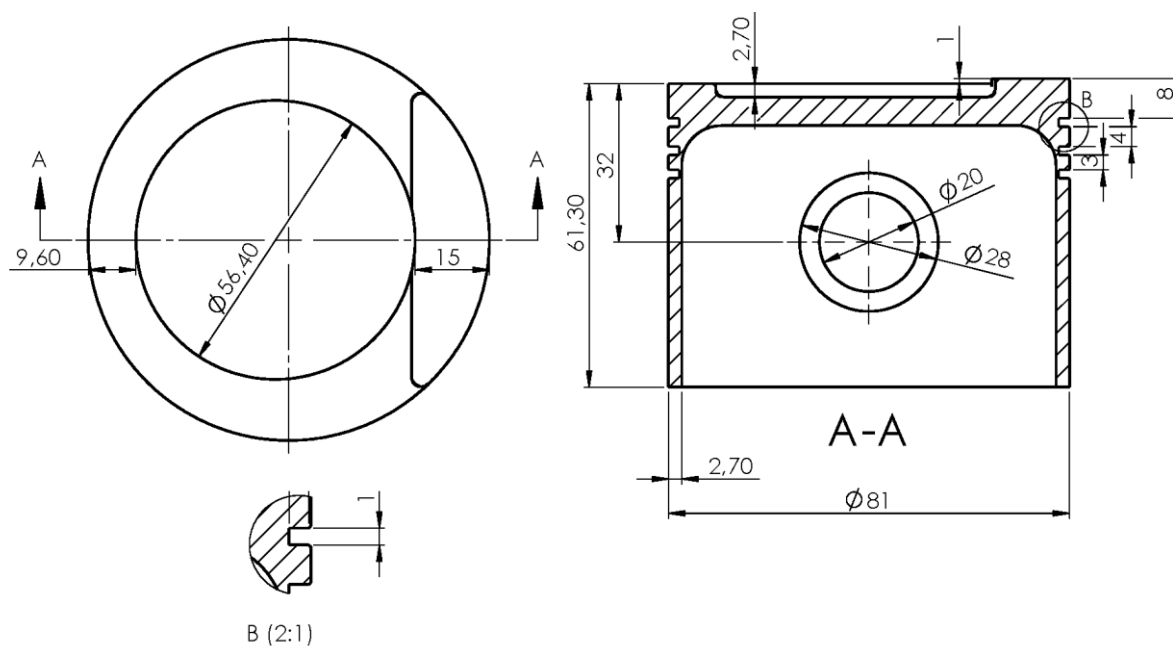
Obr. 59 : Mohrova kružnice - pravá rovina

Obr. 59 nám zobrazuje napjatost v kritickém místě průřezu v pravé rovině (Obr. 56), zde je vidět, že napětí má ryze tlakový charakter. Což je např. pro zmíněné šíření trhliny pozitivní.

Mohrova kružnice nám obecně poskytne užitečné informace o napjatosti. Zároveň dokumentuje naše zamyšlení nad vyhodnocením napětí v úvodu práce. Vždy je dobré tuto zevrubnou analýzu provést.

4.6 Numerický 3D model – GOLF2

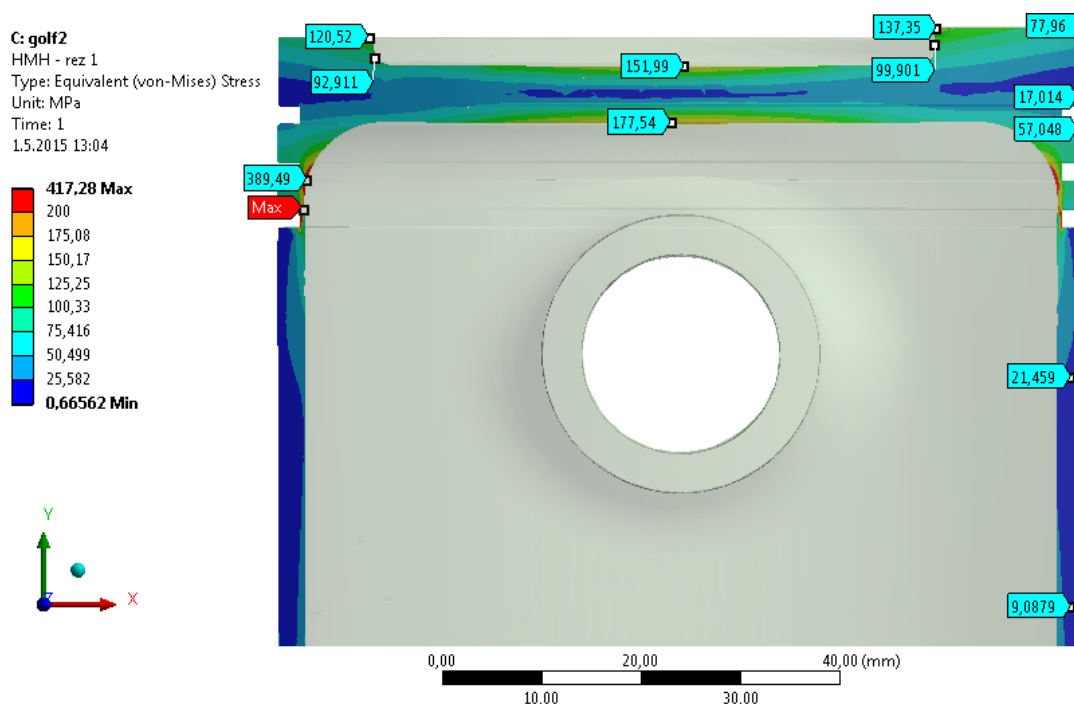
V dalším 3D modelu upravíme dno pístu dle skutečné geometrie – bude zde skoková změna tloušťky a na jedné straně lokální přídavek materiálu. Dále v modelu budou 3 drážky na pístní kroužky. Zbytek modelu zůstane stejný jako GOLF1.



Obr. 60 : GOLF2 - geometrie

Sít' opět necháme vytvořit automatickou „Hex dominant“ metodou. Použité budou opět prvky SOLID186 (*hexa-bedral*) a SOLID187 (*tetra-bedral*). Globální velikost sítě ponecháme na 2 mm, v oblasti kolem drážek pístních kroužků nastavíme velikost sítě 0.4 mm pomocí funkce „Edge sizing“. Dále zjourníme sít' na části vnitřní plochy skořepiny (zaoblení mezi dnem pístu a pláštěm) pomocí „Face sizing“ s velikostí 0.8 mm. Výsledkem je sít' s 293 853 elementy (z toho 230 199 elementů je typu SOLID186). Test sítě byl proveden a při zjournění sítě o 50 % se výsledky nelišily více než o 5 %.

Okrajové podmínky nastavíme obdobně jako v předchozím modelu – zatížení tlakem 6 MPa na všechny plochy dna pístu. Pomocí „Remote displacement“ nastavíme nulový posuv v X, Y, Z na plochách vedení pístního čepu.

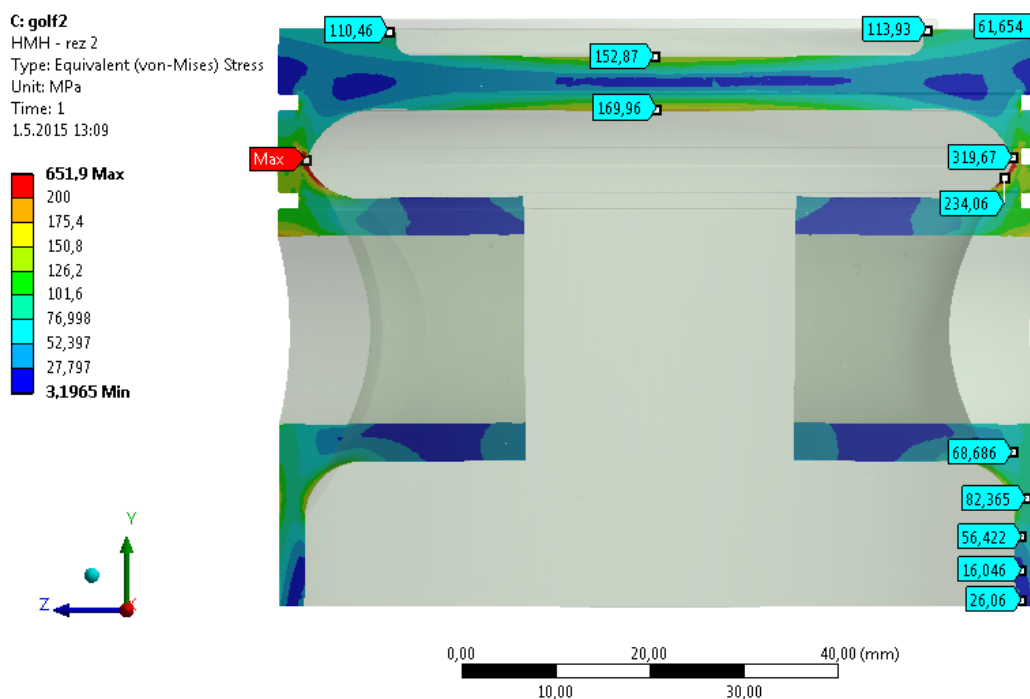


Obr. 61 : GOLF2 - řez v přední rovině

V tomto řezu vidíme především rozdíly na dně pístu. Zajímavé je, že na pravé straně dna pístu, kde je deska větší tloušťky, než na levé straně, je napětí větší. To je způsobeno jednak tím, že je blíže ose rotace pístu a zároveň zde působí větší přídavný ohybový moment od tlaku spalín, které tlačí i na svislou plochu tohoto odsazení (bylo rozebráno v kapitole 3.4).

Napětí na stěně skořepiny se ještě zvětšilo oproti modelu GOLF1, to je způsobeno zase vlivem menší tuhosti skořepiny vlivem drážek pro pístní kroužky a tím vzniklým koncentrátorem napětí.

Celkově vzato, tento model je asi nejhorší možný případ, který v našich analýzách nastane, vlivem drážek na pojistné kroužky došlo k odebrání materiálu na důležitém místě, navíc tyto drážky způsobí určitý vrubový účinek. Odstupňováním dna pístu jsme také odebrali více materiálu, než jsme přidali.



Obr. 62 : GOLF 2 - řez v pravé rovině

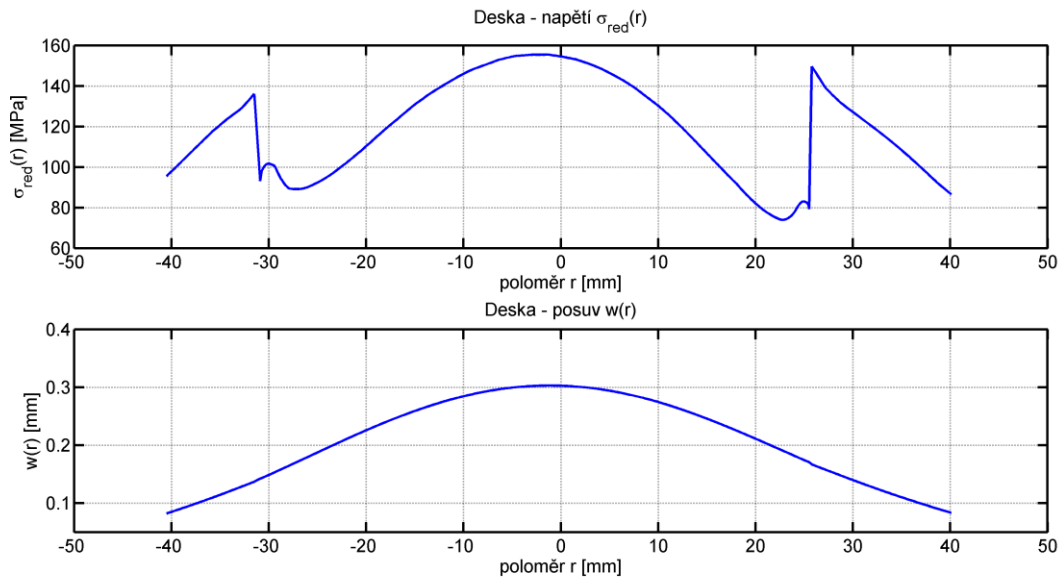
Na tomto řezu je vidět větší oblast, kde je napětí daleko za mezí kluzu (příp. únavy) hliníkových slitin. Budeme tedy muset skořepinu lokálně vyztužit, a právě na tomto modelu – GOLF2 si ukážeme obrovskou výhodu MKP oproti analytickým metodám.

Pokud by se totiž v praxi nějakým způsobem (patrně hodně složitým) podařilo spočítat napětí v místech drážek pro pojistné kroužky analyticky a zjistilo se, že skořepina nevyhovuje pevnostním podmínkám, patrně by se přistoupilo ke globálnímu zvětšení tloušťky skořepiny, neboť se celá úloha analyticky řeší jako rotačně-symetrická.

My ale s MKP můžeme přistoupit ke kroku přidat materiál pouze do oblastí mezi vedením pístního čepu a dna pístu a spočítat změnu D-N stavu. Tímto můžeme tvar pístu optimalizovat, až dosáhneme akceptovatelné hmotnosti a napětí nebude převyšovat (nikde) danou mez.

Lokálním vyztužením tedy ušetříme spoustu materiálu a náš přídavek bude mít daleko větší efekt, než kdybychom zvětšili tloušťku celé skořepiny. K tomuto kroku přistoupíme v dalším modelu – GOLF3, což už bude finální geometrie pístu.

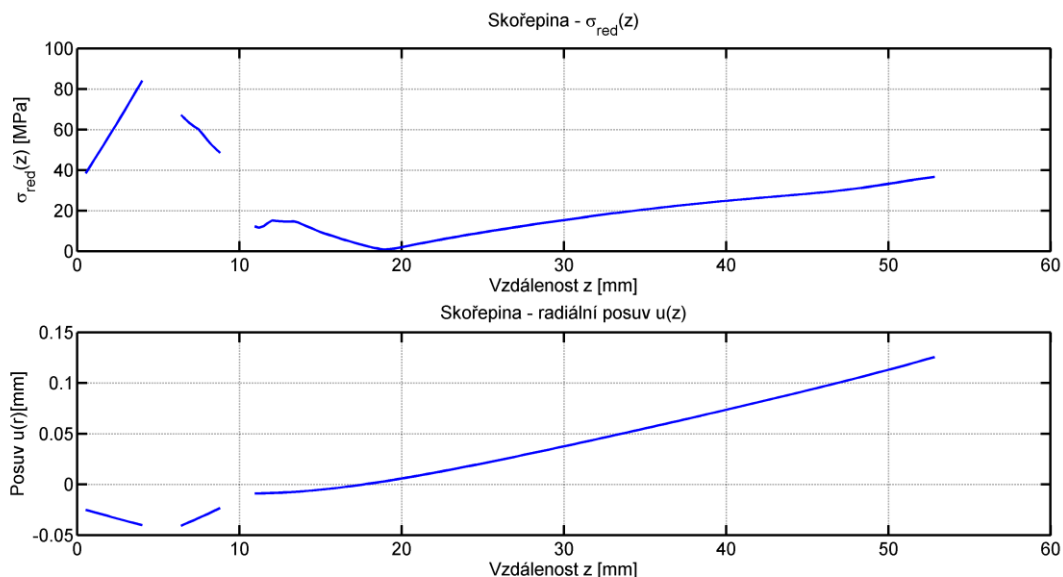
Ještě si zobrazíme průběh napětí a posuvů pro dno pístu – budeme uvažovat vždy horní plochu dané desky a napětí budou v rovině řezu pístního čepu. Zároveň zobrazíme radiální posuv a napětí na vnější ploše skořepiny.



Obr. 63 : Průběh napětí a posuvu na dně pístu - model GOLF2

Na průběhu napětí vidíme výraznou nespojitost na přechodu desek – tento jev je způsoben přidavným ohybovým momentem a skokovou změnou tuhosti desky. Inflexní body na poloměru cca. $r = 23 \text{ mm}$ a $r = -27 \text{ mm}$ jsou způsobeny zaoblením mezi dnem a osazením.

Průběh deformace je spojitý, což odpovídá skutečnosti. Špička napětí je opět uprostřed desky a hodnota napětí se výrazně zvýšila, to je způsobeno zmenšením tloušťky desky a hlavně snížením tuhosti skořepiny.

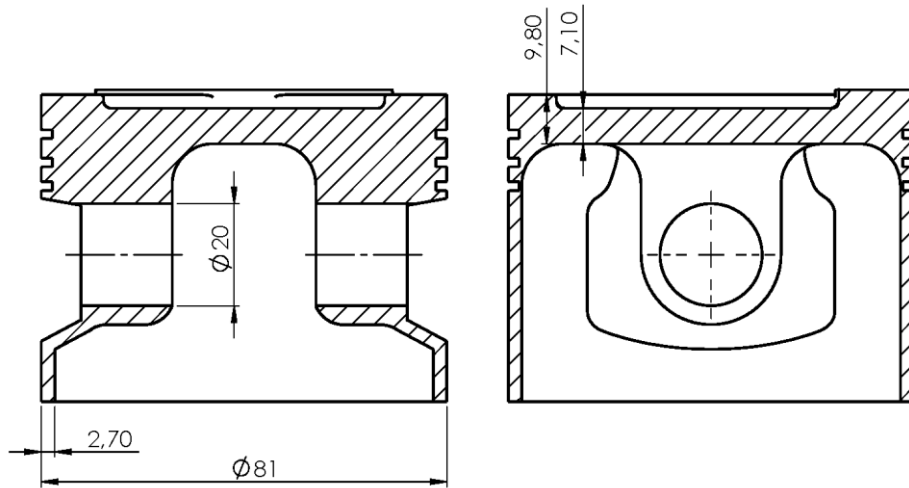


Obr. 64 : D-N stav pláště pístu, rovina řezu rovnoběžná s pístním čepem - GOLF2

Průběhy napětí a posuvu skořepin jsou do jisté míry stejné jako v předchozím případě, kritické místo ale nenastává na vnějším povrchu (jak jsme viděli na předchozích řezech modelu). Mezery v průběhu napětí a posuvu jsou způsobeny drážkami pro těsnicí kroužky (v daných místech na vnějším povrchu není materiál).

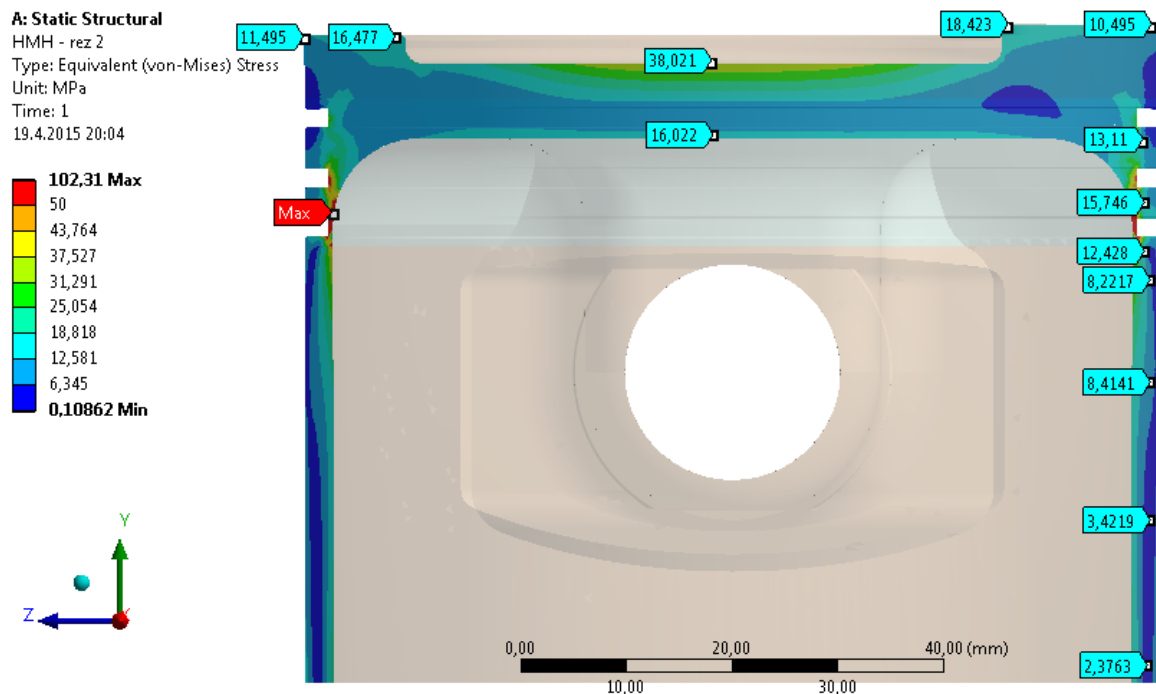
4.7 Numerický 3D model – GOLF3

Nyní přistoupíme k finální analýze – jako podklad geometrie použijeme 3D model pístu bez žádných zjednodušení. Hlavní rozdíl oproti GOLF2 modelu je lokální vyztužení mezi vedením pístního čepu a dnem pístu.

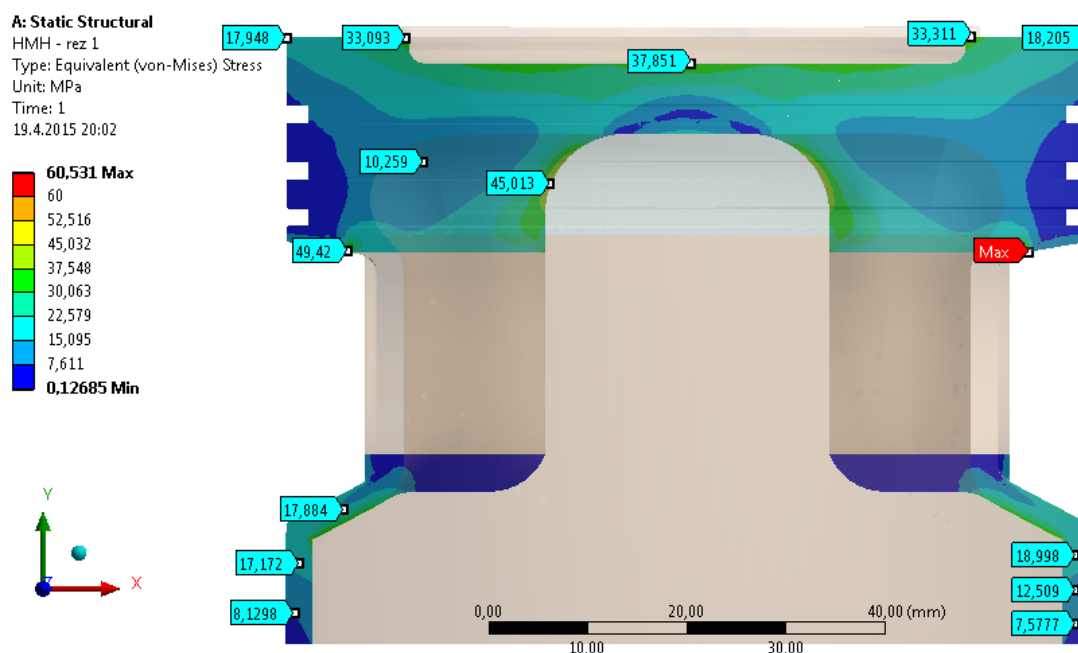


Obr. 65 : GOLF3 - Geometrie

Při generování sítě pro tento model bylo nutné zjemnit síť, nakonec při velikosti elementu 1,25 mm bylo splněno kritérium sítě. Při dalším zjemnění o 50 % se výsledky nelišily o více než 5 %. Celkově jsme dosáhli počtu elementů 196 494, z toho 163 945 typu SOLID186.



Obr. 66 : GOLF3 - řez v přední rovině



Obr. 67 : GOLF 3 - řez v pravé rovině

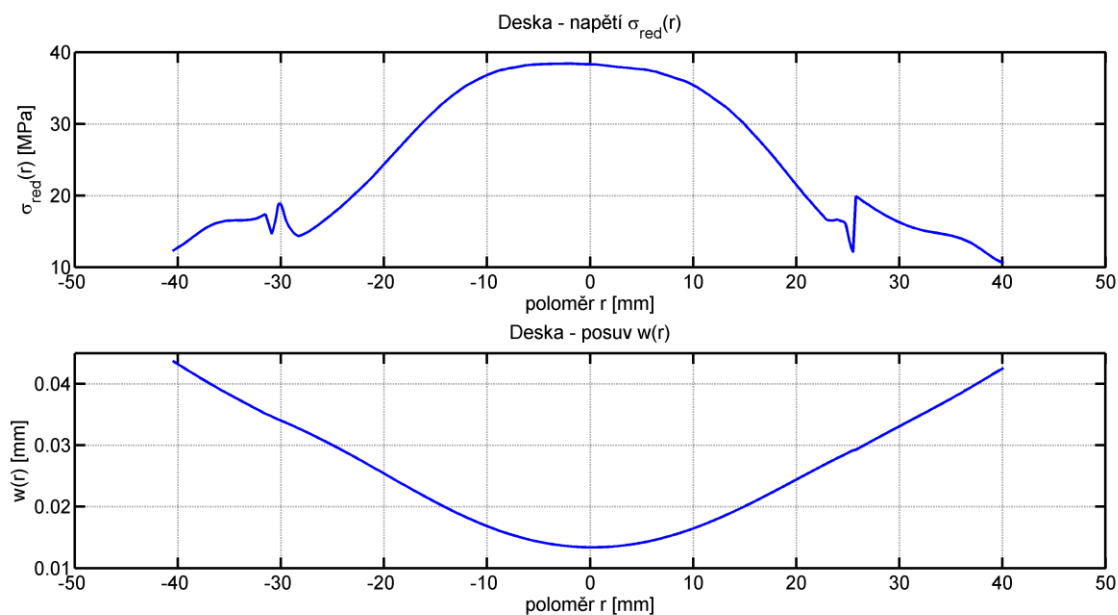
Jak je vidět, napětí všude výrazně poklesla. Maximální napětí na celém modelu je maximální napětí v řezu 1. To je zde vlivem malé tloušťky skořepiny v daném místě – třetí drážka pro pístní (stírací) kroužek.

Tloušťka stěny skořepiny je v tomto místě 0.5 mm. Zda tak malá tloušťka zde má nějaké specifické opodstatnění nebo se jedná o chybu v geometrii modelu, není jasné, nicméně až na toto místo jsou hodnoty napětí výrazně nižší oproti analytickým průběhům, i proti předchozím numerickým analýzám.

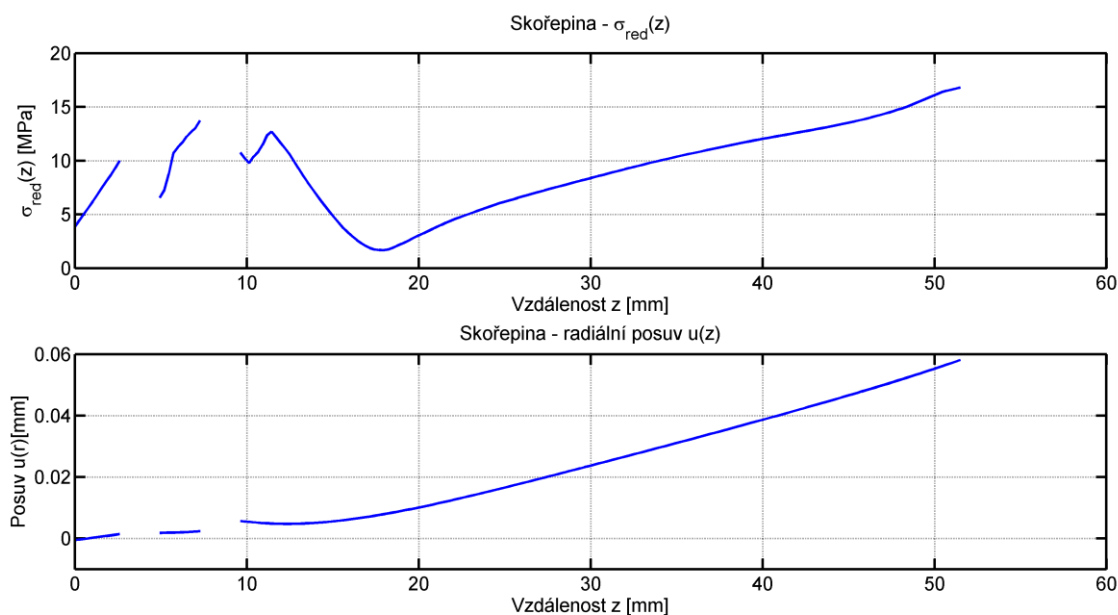
V úvodu práce jsme si řekli, že nebudeme kvantitativně porovnávat výsledky, nicméně pro orientační představu - uvážíme-li, že se jedná o reálný píst zatížený tlakem 6 MPa, který odpovídá spalovacím tlakům v zážehových motorech, a píst je vyroben ze slitiny hliníku, která může mít mez kluzu cca. $Re \approx 200 \text{ MPa}$, pak jsou maximální hodnoty napětí na dně pístu a dalších exponovaných místech při uvážení cyklického zatěžování reálné.

Podstatnou změnou GOLF3 modelu oproti předchozímu modelu je lokální výztuha, nyní těleso nespĺňuje předpoklad rotačně symetrického tělesa, což je důvod dalších výrazných rozdílů s analytickými teoriemi.

Vykreslíme si ještě průběhy napětí a posuvu na horní straně dna a radiálního posuvu a napětí pláště (skořepiny).

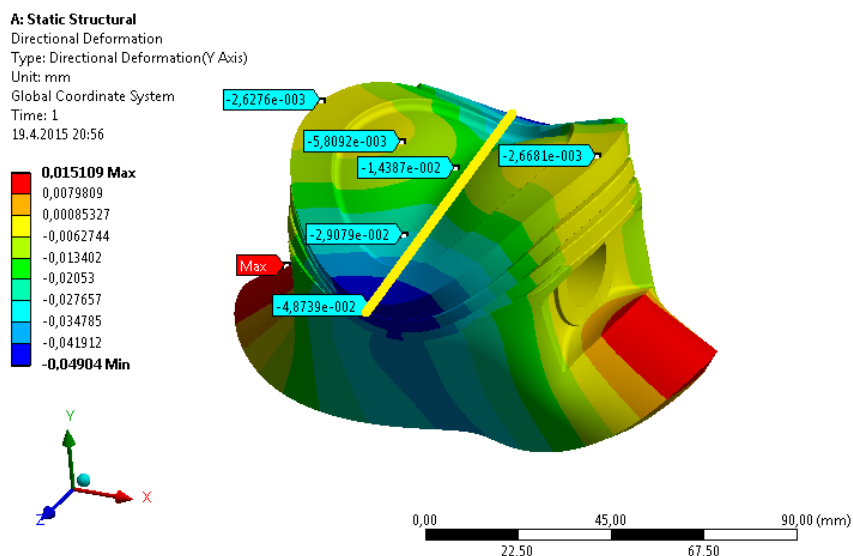


Obr. 68 : Průběh napětí a posuvu na dně pístu - model GOLF3



Obr. 69 D-N stav pláště pístu, rovina řezu rovnoběžná s pístním čepem - GOLF3

Na dně pístu se oproti minulému modelu průběh napětí zmenšil přibližně 4x. Rozdíl oproti analytickému modelu složeného tělesa je přibližně 3 násobný. Zajímavá je změna průběhu posuvu desky (průhybu). Ta je způsobena velkou tuhostí podpory desky v jedné rovině a malou v druhé rovině (v které porovnáváme posuvy) – úloha již není rotačně symetrická. Těleso se pak deformuje následujícím způsobem: (měřítko deformace je $5 \times \text{AUTO SCALE}$ pro názornost):



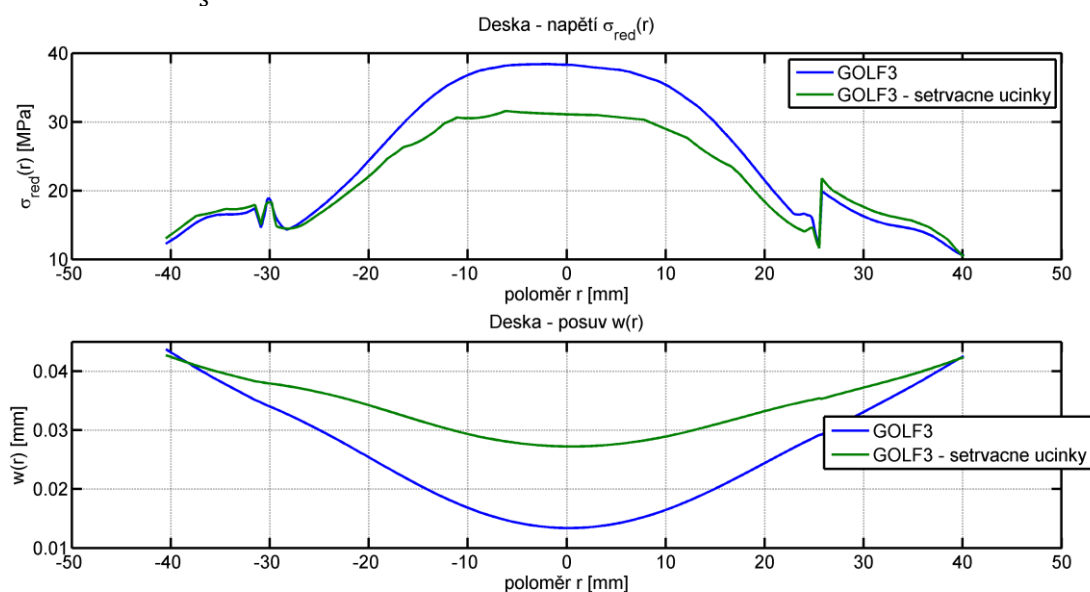
Obr. 70 : Princip deformace 3D modelu GOLF3

Po žluté úsečce vyhodnocujeme průhyb. Skutečný posuv desky je o řád nižší než ve všech předchozích případech. Zde je vidět obrovský přínos lokálního přidání materiálu, který by se bez MKP počítal velmi složitě (pokud by vůbec spočítat šel).

Průběh napětí a posuv skořepiny se už neshoduje ani průběhem ani hodnotami se všemi předchozími analýzami, to je rovněž způsobeno změnou geometrie.

4.7.1 Numerický 3D model – GOLF3 – setrvačné účinky

Doposud jsme ve všech výpočetních modelech – analytických i numerických měli jediné majoritní zatížení tlakem od spalin. Nyní si ukážeme, jaký vliv na D-N stav tělesa mají setrvačné účinky, odvozené v kapitole 2.1.2. Geometrie i síť bude stejná jako v předchozím případě, použijeme 3D model GOLF3. Pouze přidáme další zatížení – typ „Acceleration“, působící v ose pístu, ve směru pohybu (dolů) na celé těleso pístu. Hodnota zrychlení bude dle kap. 2.1.2 $a_{max} = 1.5397 \cdot 10^7 \frac{mm}{s^2}$.



Obr. 71 : Porovnání modelu GOLF3 s/bez setrvačných účinků

Při uvažování setrvačných účinků se napětí ve středu dna pístu snížilo přibližně o 8 MPa. To souhlasí s úvahou na Obr. 6, jelikož setrvačná síla působí proti zatížení tlakem spalín. Naopak deformace uprostřed dna je větší, celková velikost deformace dna (na okraji) se ale nezměnila.

4.7.2 Numerická analýza modelu GOLF4 – kontaktní úloha

Nyní budeme řešit opět model GOLF3, včetně setrvačných účinků, ale nahradíme vazbu „*Remote displacement*“, kterou jsme používali doteď, pomocí skutečného kontaktu mezi vedením pístního čepu v pístu a samotným pístem, který bude z oceli.

Tato úloha je již nelineární, ANSYS ji tedy bude řešit iteračním způsobem. Pro lepší pochopení situace si přiblížíme princip řešení kontaktů v systému ANSYS:

Pokud máme v analýze více než jednu součást a nenadefinujeme kontakty, tělesa budou moci sama sebou volně procházet bez jakýchkoliv interakcí. Musíme tedy nadefinovat kontaktní prvky mezi plochami dvou/více součástí.

Samotný kontakt si můžeme představit jako vložení pružiny o tuhosti k_n mezi uzly kontaktních ploch. Poté je stykový tlak dán jako $p = k_n \cdot x_n$, kde x_n je penetrace kontaktu. V ideálním případě by hodnota penetrace x_n měla být nulová, to by ale hodnota tuhosti musela být nekonečná. Pokud jsou ale hodnoty x_n dostatečně malé, přesnost kontaktního tlaku je dostatečná.

Hodnotu tuhosti k_n nám tedy spočítá ANSYS na základě geometrie a materiálových charakteristik těles (dá se zvolit i ručně, ale ponecháme výchozí nastavení). Příliš velká hodnota tuhosti negativně ovlivňuje konvergenci a naopak malá hodnota tuhosti vede k moc velkým průnikům a nereálným výsledkům.

Samotný výpočet pak probíhá iteračně (výchozí je *Newton-Raphsonova* iterační metoda – metoda tečen). Rovnice kontaktního tlaku je pozměněna na $p = k_n \cdot x_n + \lambda$ (řešení kontaktu pomocí metody rozšířených langrangiánů), hodnota x_n je při každém kroku porovnána s automaticky spočítanou *maximální možnou tolerancí průniku* ε_n . Pokud je $x_n \geq \varepsilon_n$, je zvýšena hodnota λ . V dialogu „*Solver output*“ můžeme sledovat, kolik kontaktních elementů přesahuje při dané iteraci hodnotu ε_n .

Na rozdíl ode všech předchozích úloh nemusíme dojít k řešení (úloha může divergovat), záleží na kvalitě sítě, použitých vazbách, rozlišení, zatížení a nastavení samotného řešiče.

Použijeme tedy model pístu z předchozí kapitoly a vytvoříme sestavu – další součást bude samotný čep, který bude mít jiné materiálové charakteristiky než píst a ojnice (čep je z oceli a většinou bývá dutý kvůli snížení hmotnosti). Čep nebude mít stejný průměr jako je díra vedení pístního čepu v pístu – uděláme zde vůli 0.1 mm. Další část bude ojnice, která bude mít také vůli s pístním čepem 0.1 mm, rozměry ojnice zvolíme a D-N stav ojnice vůbec nebudeme vyhodnocovat.

Pro kontaktní analýzu musíme mít kvalitní síť, přičemž největší důraz je kladen na kontaktní plochy. Ty by měly mít podobnou, rovnoměrnou síť tak, aby na sebe jednotlivé uzly navazovaly.

Jelikož je celá sestava symetrická podle přední roviny, budeme řešit pouze její polovinu s využitím symetrie. Tímto snížíme počet elementů, čili výpočetní čas. Dále rozdělíme těleso pístu na dutý válec vedení pístního čepu a zbytek pístu. Stejným způsobem rozdělíme ojnici – na kroužek v kterém bude kontakt s čepem a zbytek ojnice, jejíž D-N stav nás momentálně nezajímá.

Na samotný čep použijeme metodu sítě *Sweep*, která nám vytvoří pravidelnou síť *hexahedralů* o velikosti elementu 1 mm po celé délce čepu. Na kroužek ojnice použijeme metodu *multizone* se stejným nastavením velikosti elementu 1 mm, dále na kroužek ojnice použijeme funkci *inflation*, která v radiálním směru kroužku vytvoří vrstvy elementů, tudíž blízko kontaktu budou elementy menší.

Co se týče vedení čepu, zde nebylo možné vyříznout tvar o geometrii dutého válce, tudíž se nepodařilo použít metody *multizone* ani *sweep*. Zvolíme tedy metodu *hex dominant mesh* s velikostí prvku 1 mm.

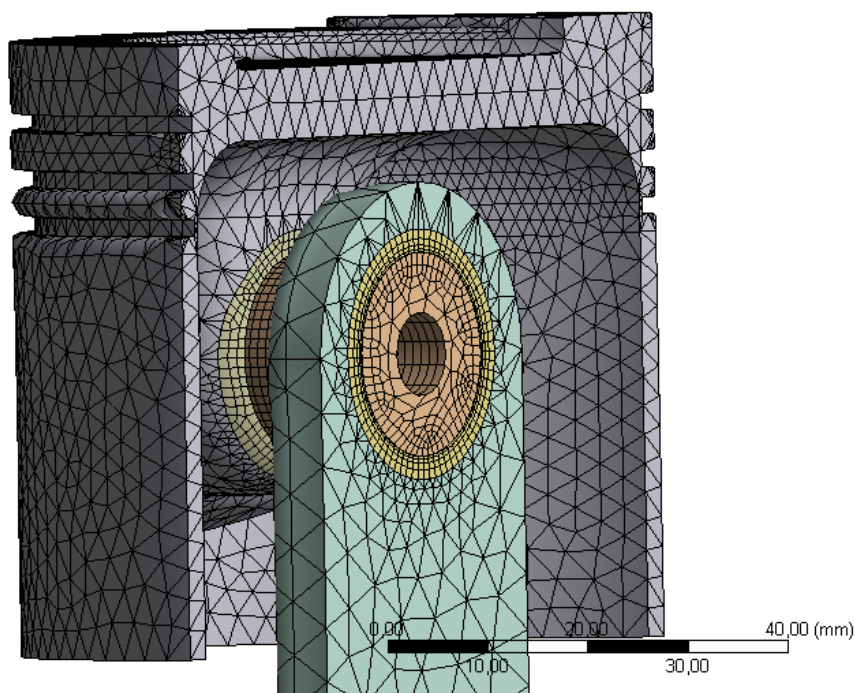
Pomocí těchto nastavení máme zajištěnou kvalitní síť v okolí kontaktů, složenou pouze z *hexahedralů*, což je předpoklad pro správný výpočet a konvergenci celého problému.

Na zbytek pístu použijeme automatickou tvorbu sítě pomocí *tetrahedralů* – *SOLID187* s velikostí prvku 2 mm. *Tetrahedra*ly zde použijeme z důvodu lepšího spojení sítí obou částí pístu a obou částí ojnice. Na tělo ojnice použijeme také automatickou tvorbu sítě *tetrahedralů* s velikostí elementu

4 mm, jelikož D-N stav ojnice nás příliš nezajímá.

Kontakty mezi PÍST-ČEP a ČEP-OJNICE zvolíme jako *frictional* se součinitelem tření 0.2, v možnostech kontaktu musíme zvolit možnost „*adjust to touch*“, jelikož součásti nejsou v počátečním kontaktu (vlivem modelování vŕle).

Jako metodu řešení kontaktu volíme „*augmented lagrangian*“ (metoda rozšířených langrangianů, výše popsaná). Dále nastavíme samotný řešič, aby v prvotní iteraci začínal na substep = 4. Tím řešič prvně řeší případ, kdy jsou všechna zatížení čtvrtinová, jakmile tento případ zkonvertuje, přidá zatížení a opět iteruje tak dlouho, dokud zatížení nekonverguje a takhle až do plného zatížení, kdy dostaneme řešení úlohy.

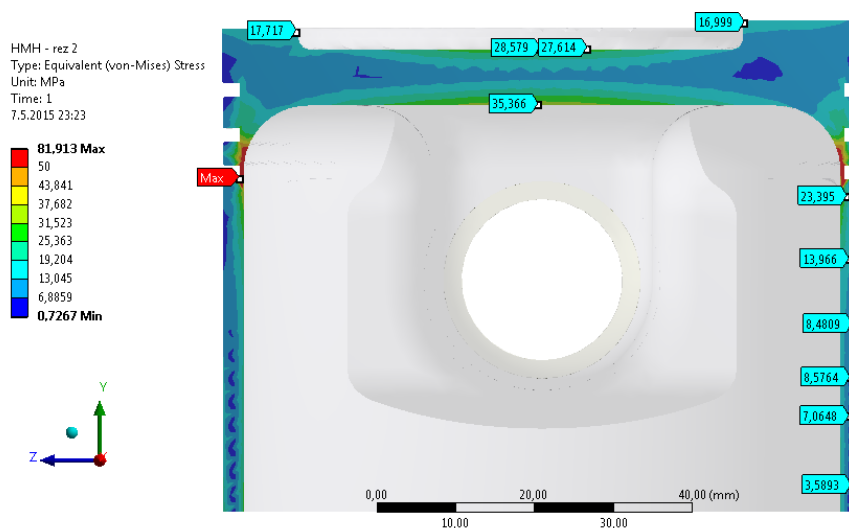


Obr. 72 : Síť sestavy GOLF4

Na spodní díru ojnice – v tomto místě by ojnice byla spojena s klikovým čepem, dáme OP „Fixed support“. Dále aplikujeme zatížení – tlak a zrychlení, stejně jako v předchozím případě *GOLF 3DS*.

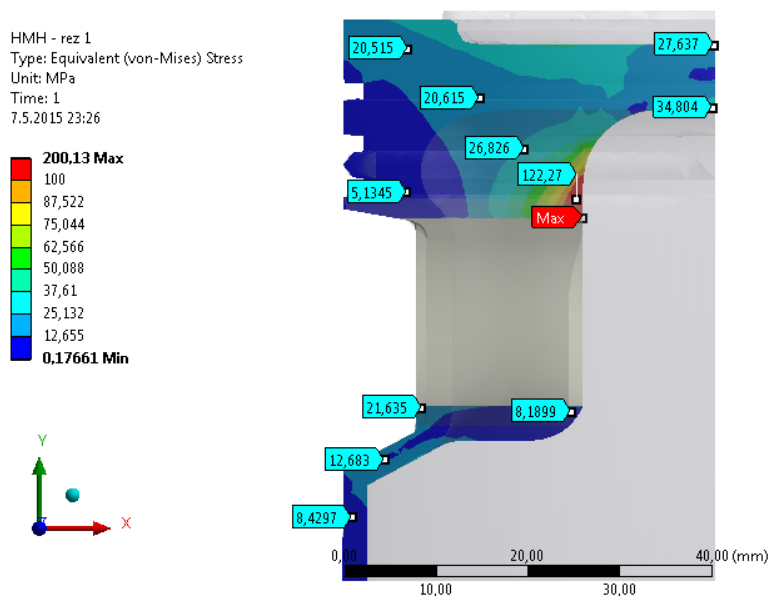
Celkový počet elementů této sestavy je 131 763 elementů s 233 498 uzly. Nyní v analýze kromě prvků typu SOLID186 a SOLID187 vznikly prvky CONTA174 a TARGE170, což jsou právě prvky reprezentující kontakty.

Po 13 iteracích celá úloha konvergovala.



Obr. 73: GOLF4 - řez v přední rovině

Jak vidíme na Obr. 73, v této rovině se nic zásadního nezměnilo, napětí na dně trochu poklesla a kritické místo je opět v oblasti poslední drážky na těsnící kroužek.



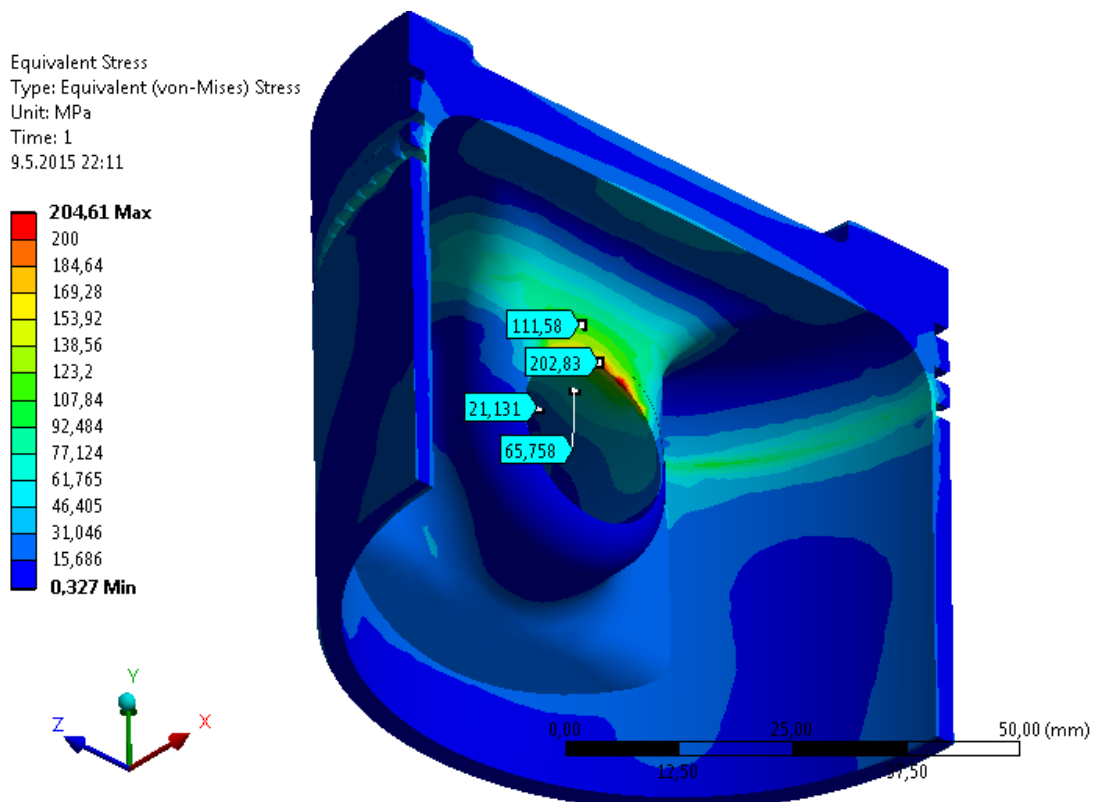
Obr. 74 : GOLF 4 - řez v pravé rovině

Na řezu v rovině pístního čepu už je situace zajímavější. Extrém napětí je na hraně vedení pístního čepu, což je způsobeno tím, že v modelu zde není žádné sražení, čili je zde opět koncentrátor napětí (někdy označováno jako hranový koncentrátor, nebo tzv. hranový efekt). Vzhledem k tomu, že píst je odlitek a díra pro čep je funkční plocha, která se po odlití vrtá/vystružuje, tak zde skutečně zaoblení/zkosení není, jelikož by bylo pravděpodobně složité jej vyrobit.

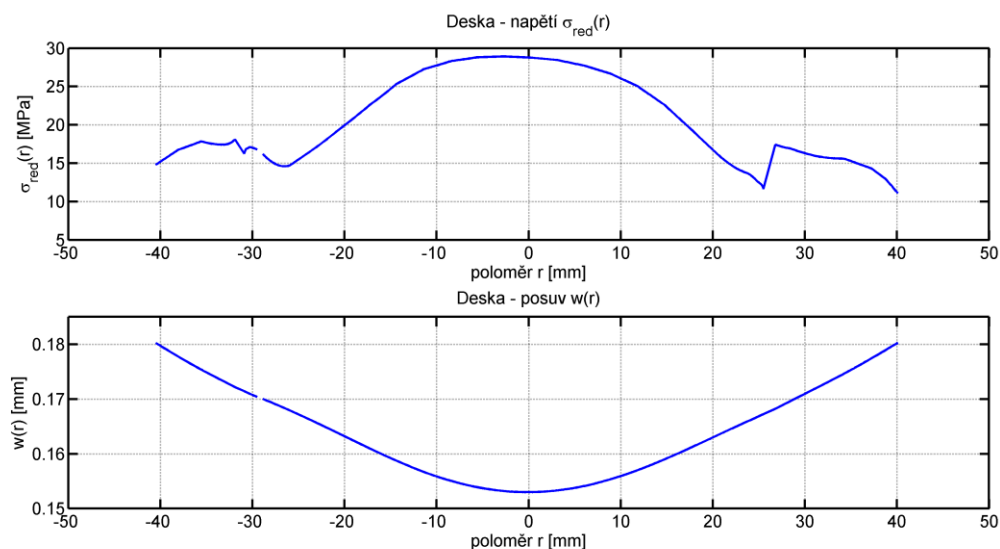
Nicméně je vidět, že největší napětí se koncentruje směrem k ose symetrie pístu – je tomu tak, protože pístní čep se pod tlakem pístu prohýbá a největší kontaktní plocha PÍST-ČEP je na kraji vedení, jelikož pístní čep má největší průhyb uprostřed.

Do této analýzy jsme nahrazovali samotný kontakt pomocí okrajové podmínky REMOTE DISPLACEMENT = 0 na celé ploše, to je v pořádku, pokud chceme posuzovat napětí např. na dně pístu, nicméně pro posouzení napětí přímo ve vedení pístního čepu nebo v jeho bezprostředním okolí musíme uvažovat i deformaci čepu a tím pádem rapidní zmenšení kontaktní plochy.

Mohli bychom také v předchozích analýzách zaměnit vazbu posuvu za vazbu „*Compression only support*“. Ta umí simulovat čep, nicméně ani tato vazba neuvažuje změnu kontaktní plochy po délce čepu, umí pouze vyjádřit, že součásti nejsou v kontaktu po celém obvodu díry.

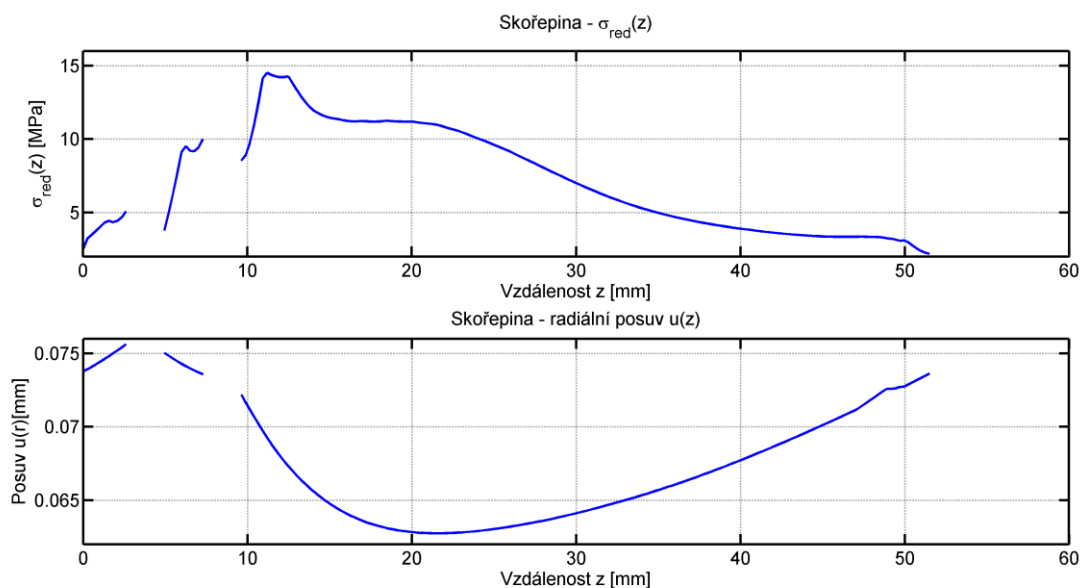


Obr. 75 : Kontaktní plocha PÍST-ČEP



Obr. 76 : Průběh napětí a posuvu na dně pístu - model GOLF4

Jak je vidět na Obr. 76, napětí při kontaktním problému kleslo přibližně o 14 % oproti předchozímu případu, kdy jsme použili stejnou geometrii, ale jiné OP. Naproti tomu se rapidně zvětšil posuv desky – nikoliv průběh, ale hodnota na okraji desky, která je nyní závislá na deformaci pístního čepu a není nulová (což byl předchozí případ).



Obr. 77 : D-N stav pláště pístu, rovina řezu rovnoběžná s pístním čepem – GOLF4

Průběhy napětí a deformací jsou na skořepině podobné jako v předchozím případě, liniová síla skořepiny je nyní ale zachycena pístním čepem, tudíž napětí klesá a na konci skořepiny je nulové. Průběhy ani hodnoty opět naprosto nesedí s analytickým řešením složeného tělesa.

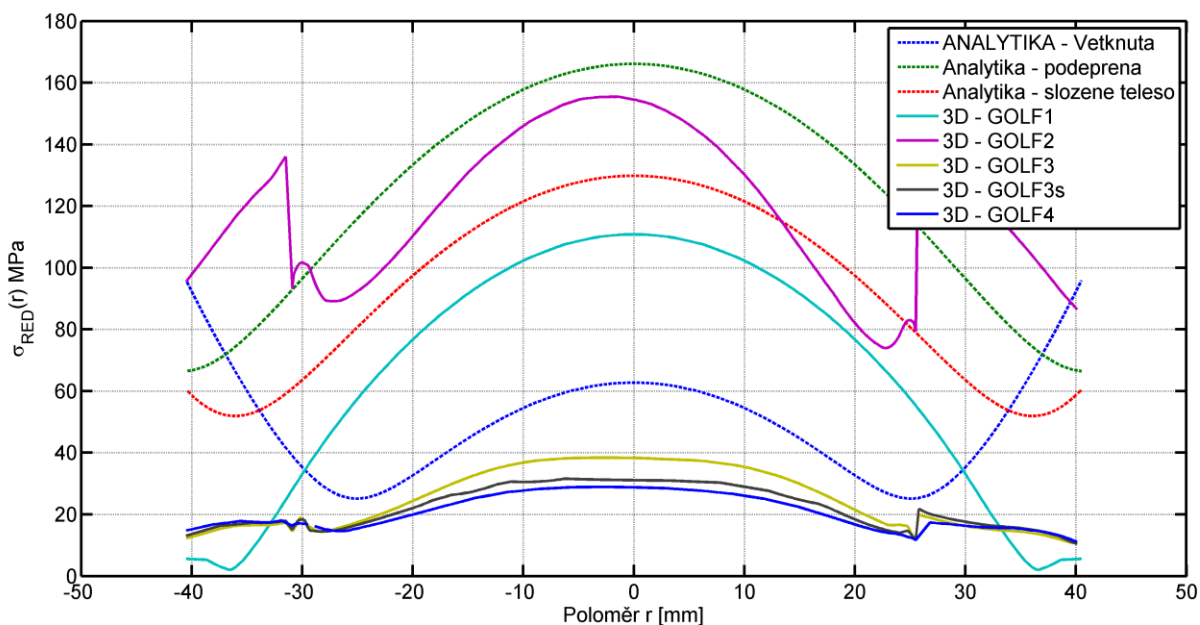
Z kontaktní analýzy tedy můžeme vyvodit, že tuhost čepu a ojnice má výrazný vliv na napjatost jak dna, tak celého pístu. My jsme si zvolili rozměry ojnice a pístního čepu, tudíž kvantitativně nejsou napětí relevantní. Lze však z výše uvedených výsledků odhadnout vliv tuhosti čepu, šířky ojnice, vůle čepu a dalších parametrů na D-N stav pístu.

5 Porovnání jednotlivých přístupů

Nyní máme zpracovány všechny analýzy, vytyčené v cílech práce a porovnáme je mezi sebou. V prvních podkapitolách numerických analýz jsme zjistili, že numerické analýzy vyložené modelových případů (vetknutá/podepřená deska nebo složené těleso stěno-deska + skořepina) se shodují s přesností jednotek procent. V této kapitole tedy porovnáme napětí a deformace dna pístu jednotlivých 3D modelů a analytických modelů (numerické 2D analýzy porovnávat dále nebudeme).

Napětí a deformace skořepiny jsou porovnány pro případ složeného tělesa v kapitole 4.3. Dále pro 3D modely jsou průběhy napětí a deformace po celé délce skořepiny vždy uvedeny. Ty jsou oproti analytickému přístupu natolik rozdílné, že nemá smysl je zde dále porovnávat.

Při porovnání napětí na dně pístu pro jednotlivé výpočetní modely tedy dostáváme:



Obr. 78 : Porovnání napětí na horní straně dna pístu

Na Obr. 78 vidíme tři analytické průběhy. Jak je vidět, podepřená deska nám dává extrémně vysoká napětí, která se ve skutečnosti nikde nevyskytují.

Naopak vetknutá deska má nereálný průběh napětí – na okraji desky nikdy nebude situace jako ve skutečném vetknutí. Navíc vetknutá deska naopak dává nízká napětí, což je ještě horší, jelikož už nejsme na konzervativní straně.

Složené těleso má jednak správný průběh a hodnoty jsou mezi vetknutou a podepřenou deskou.

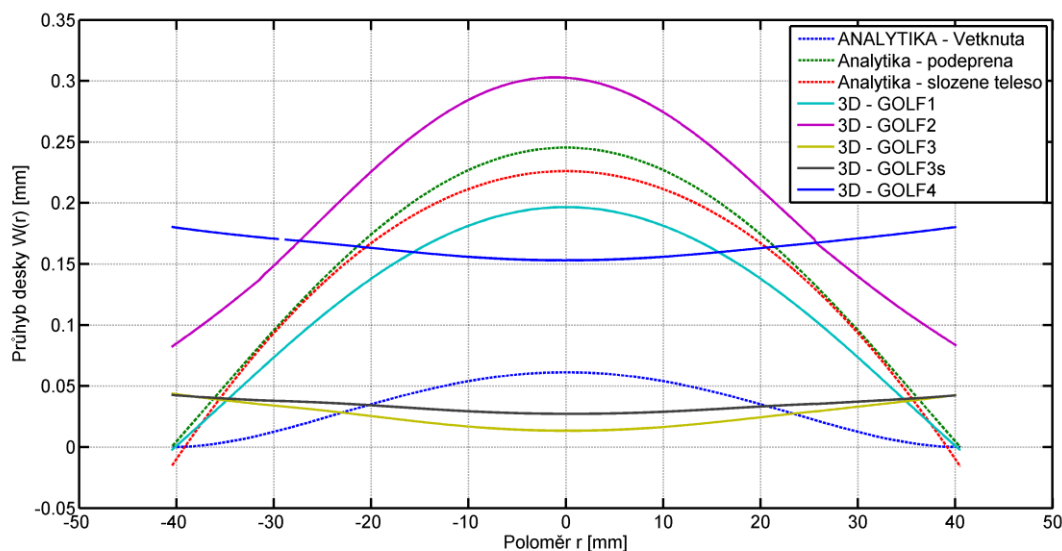
Důležitá věc, kterou můžeme vidět na Obr. 78 – u 3D modelu GOLF1, je změna oproti analytickému modelu složeného tělesa pouze -18 %. A to u GOLF1 3D modelu došlo k prvnímu výraznému zásahu do symetrie (píst již má vedení čepu), přičemž s výpočetním modelem složeného tělesa získáme vyšší napětí, tudíž jsme na konzervativní straně.

Tento píst (GOLF1) sice ještě nemá drážky na těsnící kroužky, nicméně jinak je to již geometrie, kterou by mohl mít skutečný píst. Je proto pozitivní, že model složeného tělesa se liší relativně málo.

Další 3D model – GOLF2 již má drážky pro těsnící kroužky a odstupňované dno, což je zásah do tuhosti. Napětí jsou zde výrazně vyšší, rozdíl oproti analytickému modelu složeného tělesa je +22 %, přičemž s modelem složeného tělesa již nejsme na konzervativní straně.

Další 3D modely – GOLF3, GOLF3s (se setrvačnými účinky) a GOLF4 (kontaktní úloha) mají průběh napětí výrazně nižší – to je způsobeno dalším výrazným zásahem do symetrie a to vyztužením mezi dnem pístu a vedením pístního čepu. Není úplně správné porovnávat tyto tři modely s analytickým modelem složeného tělesa (nebo jiným), jelikož analytické přístupy jsou odvozené pro rotační symetrii, tyto modely mají do rotační symetrie daleko. Nicméně na porovnání je názorně vidět výhoda MKP – přidáním těchto dvou výtuh jsme na dně pístu snížili napětí o 64 % (oproti modelu GOLF2), můžeme si dovolit nechat tenkou skořepinu, která by jinak musela být řádově tlustší, abychom se dostali na podobné D-N stavy.

Porovnáme-li deformace dna pístu, dostaneme následující průběhy:



Obr. 79 : Porovnání osového posuvu horní strany dna pístu.

Začneme opět analytickými průběhy – vetknutá deska má sice hodnoty průhybů v oblasti finálních 3D modelů, nicméně to je pouhá náhoda, jelikož 3D model GOLF3 a výše již nejsou symetrické. Pro adekvátní porovnání bychom měli průběh vetknuté desky porovnat s modelem GOLF1 příp. GOLF2 a zde je vidět, že rozdíl je veliký. Vetknutá deska nám nikdy nedá reálné posuvy, jelikož vazba na okraji dna pístu nikdy nebude tak tuhá, aby připomínala vetknutí a zamezila natočení desky v tomto poloměru.

Na rozdíl od napětí jsou posuvy podepřené desky a složeného tělesa podobné, to je způsobeno tím, že jelikož skořepina složeného tělesa (plášť pístu) má oproti desce nižší tuhost, chová se složené těleso spíše jako podepřená deska (více jsme tento stav rozebírali v kapitole 3.3). Také je z grafu zřejmé, že posuv složeného tělesa (potažmo podepřené desky) není tolik rozdílný oproti 3D modelu GOLF1, což je pozitivní, stejně jako tomu bylo u průběhů napětí – rozdíl je zde opět okolo 20 %.

Další 3D model – GOLF2 má, stejně jako u napětí, výrazně vyšší hodnoty posuvu – to je způsobeno drážkami pro pístní kroužky a odstupňovaným dnem, tím celý píst ztratí tuhost a napětí/posuvy se posunou do vyšších hodnot.

U dalších modelů GOLF3 a GOLF3s se průběh změnil z konkávního na konvexní, to je způsobeno zásahem do symetrie a píst se již nedeformuje dle osové symetrie – deformace pístu je v těchto případech naznačena na Obr. 70. Hodnoty deformace jsou v těchto případech výrazně nižší, což je způsobeno výztuhami.

Poslední 3D model má téměř stejný průběh deformace horní strany dna pístu jako modely GOLF3 a GOLF3S, pouze je celý průběh posunut. To je způsobeno tím, že už počáteční deformace na okraji desky je přibližně 0.15 mm. To je způsobeno kontaktem s čepem a tím, že čep se neopírá po celé ploše vedení pístu.

5.1 Diskuze k výsledkům

Na porovnání výsledků v předchozí kapitole vidíme, že u námi zkoumaného pístu motoru *GOLF MK1 1.8 GTI 8V* analytické teorie selhaly.

Selhaly ale především proto, že píst a pravděpodobně všechny dnešní písty mají daleko k osově symetrickému tělesu. 3D model GOLF1/GOLF2, který má geometrii jednoduchého pístu, které se používaly v automobilech v období po druhé světové válce, má podobný průběh jako analytický model složeného tělesa. V kritickém místě – ve středu pístu je rozdíl 20 % jak v napětí, tak v deformacích.

Další důvod nepoužitelnosti analytických teorií v praxi je fakt, že nejsme schopni vypočítat s dostatečnou přesností napětí/deformace v místech přechodů, lokálních tvarových změn, koncentrátoru napětí (např. drážky pro těsnící kroužky). A to jsou místa, která jsou často kritická a napětí zde mohou ve skutečnosti značně přesahovat analyticky vypočítané hodnoty.

Velká výhoda MKP spočívá v tom, že můžeme provést lokální výztuhy (lokálně přidat materiál na exponovaná místa) – viz model GOLF3. Tím snížíme napětí a v konečném důsledku rapidně snížíme hmotnost pístu – pokud bychom se při návrhu pístu omezili na geometrii modelu GOLF2, musela by být skořepina (plášť pístu) výrazně tlustší, abychom dosáhli přijatelných hodnot napětí a deformací.

Co se týče analytických teorií pro praktický výpočet tloušťky dna pístu (např. pro autory závěrečných prací na ÚADI, zabývající se konstrukčním návrhem spalovacího motoru), při omezení se na základní tvar pístu, který je na úrovni modelu GOLF2, můžeme říci, že výpočetní model složeného tělesa nám poskytuje přijatelné hodnoty a průběhy D-N stavu pístu. Jelikož se ale nejedná o úplně triviální výpočet (kapitola 3.3), je i v tomto případě na zvažování použití MKP. Další výpočetní modely jako podepřená nebo vetknutá deska jsou nevhodné.

Z výsledků D-N stavů jednotlivých modelů můžeme rovněž formulovat, že kritické místo dna pístu je v jeho ose rotační symetrie, nikoliv na okraji, jak ukazuje výpočetní model vetknuté desky, který se ukázal jako nejméně vypovídající.

Další kritická místa na pístu mohou být v místech koncentrátoru napětí a k jejich určení je třeba použít MKP. Rovněž se ukázalo, že napětí na vnější stěně skořepiny (pláště pístu) nejsou ve skutečnosti tak vysoká, jak vyplývá z analytické teorie složeného tělesa – především z důvodu, že skořepina není podepřena na svém konci, ale ve vedení pístním čepem.

Dále jsme zjistili, že zakřivení dna z konstrukčních důvodů má na D-N stav pozitivní vliv.

5.2 Další možné studie na téma MKP analýzy pístu

- Vliv teplotního zatížení na deformaci pístu
- Optimalizace tvaru
- Modelování válce pístu a pístních kroužků a vzájemných interakcí s pístem
- Modální analýza pístu

Také by bylo zajímavé porovnat různé další geometrie pístu, jelikož píst s plochým dnem se v dnešních motorech téměř nevyskytuje, z hlediska D-N stavu a také vlivu na výkon motoru, případně lepší průběh spalování a změny v proudění plynů u dvoudobých motorů.

6 Závěr

V první části práce jsem řešil D-N analýzu pomocí analytického přístupu. Vypočítal jsem pomocí různých výpočtových modelů redukované napětí na horní straně dna pístu dle energetické hypotézy HMM a jeho posuv ve směru osy symetrie (průhyb desky). Použité výpočtové modely byly: vetknutá, podepřená deska a složené těleso ze stěno-desky a skořepiny.

Dále jsem se v analytické části věnoval rozdílu při rozděleném dnu pístu na dvě desky (jelikož skutečné dno pístu nemá konstantní tloušťku) a nahrazením dna pístu jednou deskou o střední tloušťce. Zjistil jsem, že nahrazení dna pístu jednou deskou o střední tloušťce je pro náš účel dostačující a není nutné dno dělit na dvě desky s různými tloušťkami, jelikož vliv na výsledné napětí je minimální.

V druhé polovině práce jsem se zabýval numerickým řešením D-N stavu pomocí MKP v prostředí ANSYS Workbench 14.5. Porovnal jsem ve 2D simulacích rozdíly D-N stavu analytických modelů řešených analytickým a numerickým přístupem. Zde jsem došel k závěru, že analytické výpočty modelových případů při splnění všech nutných předpokladů souhlasí s numerickým řešením s odchylkou v jednotkách procent.

Další fáze MKP analýz byla již s pomocí 3D modelů, které se v různé míře podobaly skutečnému pístu. Poslední model GOLF4 je reálná geometrie zvoleného pístu (*GOLF MK1 1.8 GTI 8V*) včetně analýzy kontaktu s pístním čepem a vlivu této nelinearity na jeho D-N stav. Výsledky 3D modelů, které se blížily reálnému pístu, se výrazně neshodují s analytickými výpočty, především z důvodu nesplnění předpokladu rotační symetrie, koncentrátorů napětí a dalších vlivů, které není možné v rámci analytického výpočtu postihnout.

Nejlepší analytický výpočetní model, který se dá použít na tvarově jednoduché písty je model složeného tělesa. Výpočetní modely vetknutá a podepřená deska dávají irelevantní výsledky. V praxi je nutno součástí jako je píst spalovacího motoru řešit pomocí MKP. Jelikož i model složeného tělesa nám poskytne relevantní výsledky pouze v oblasti dna pístu a nikde jinde.

Číselné porovnání výsledků včetně vysvětlení rozdílů je pak uvedeno v kapitole 5.1.

Seznam použitých zdrojů

- [1] JANÍČEK, Přemysl, Emanuel ONDRÁČEK, Jan VBRKA a Jiří Burša. *Mechanika těles: Pružnost a pevnost*, 3. přeprac. vyd. Brno: CERM, 2004, 287 s. ISBN: 80-214-2592-X
- [2] ONDRÁČEK Emanuel, Jan VRBKA, Přemysl JANÍČEK a Jiří BURŠA. *Mechanika těles: Pružnost a pevnost II*, 4. přeprac. Vyd., Brno: CERM, 2006, 260 s. ISBN: 80-214-3260-8
- [3] ONDRÁČEK, Emanuel a Přemysl JANÍČEK. *Výpočtové modely v technické praxi*. Vyd. 1. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1990, 333 s. ISBN 80-030-0458-6.
- [4] BURŠA, Jiří. *Válcová momentová skořepina* [online], Dostupné z: http://www.umt.fme.vutbr.cz/~jbursa/Stud_opory/11-prednaska.pdf
- [5] ŠVEJNOHA, Michal: Podklady k předmětu SM3 – ČVUT, [online], dostupné z: <http://ksm.fsv.cvut.cz/~sejnom/download/sm3.pdf>
- [6] HROMÁDKO, Jan. *Spalovací motory – 4. Přednáška*, [online] Dostupné z: <http://oppa-smad.tf.czu.cz/?q=system/files/5.Př.ppt>
- [7] BRAIN, Marshall. *How Car Engines Work*, [online] Dostupné z: [http:// http://auto.howstuffworks.com/engine2.htm](http://http://auto.howstuffworks.com/engine2.htm)
- [8] ANSYS, Inc., *Ansys 14.5 Help*
- [9] RÉNYI, Alfréd. *Dialogy o matematice*. 1. vyd. Praha: Mladá fronta, 1980, 201, [3] s. [16] s. fot. příl. Kolumbus.
- [10] JANÍČEK, Přemysl. *Systémové pojetí vybraných oborů pro techniky: Hledání souvislostí*. 1. vyd. Brno: Akademické Nakladatelství Cerm, s.r.o., 2007, 1234 s. ISBN 978-80-7204-556-3.
- [11] BUDYNAS, Richard G. *Shigley's mechanical engineering design*. 10th ed. New York: McGraw-Hill Education, c2015, xxi, 1082 s. Series in mechanical engineering (McGraw-Hill). ISBN 978-0-07-339820-4.
- [12] FARLÍK, Alois. *Pružnost a pevnost III. díl: Základy technické plasticity*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1962, 82 s.
- [13] HALAMA, R., ADÁMKOVÁ, L., FOJTÍK, F., FRYDRÝŠEK, K., ŠOFER, M., ROJÍČEK, J., FUSEK, M.: *Pružnost a pevnost*, [online] Dostupné z : http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/pruznost_a_pevnost.pdf
- [14] ŘEZNÍČEK, Jan a Jitka ŘEZNÍČKOVÁ. *Pružnost a pevnost v technické praxi: příklady I*. Vyd. 1. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2005, 65 s. ISBN 80-01-03209-4.
- [15] TIMOSHENKO, S. *Strenght of materials Part 1*. 3rd ed. ISBN 08-827-5420-3.
- [16] TIMOSHENKO, S. *Strenght of materials Part II: advanced theory and problems*. 3rd ed. Malabar: Krieger Publ. Comp., 1976, 572 s. ISBN 08-827-5421-1.
- [17] TIMOSHENKO, S.P. a J.N. GOODIER. *Theory of elasticity*. 3. ed., 17. print. Auckland [u.a.]: McGraw-Hill Internat, 1982. ISBN 9780070858053.
- [18] PETRUŠKA, Jindřich: *MKP v Inženýrských výpočtech*, [online] Dostupné z

- <http://www.umt.fme.vutbr.cz/img/fckeditor/file/opory/RIV/MKP2011.pdf>
- [19] HIGGINS, John: *Obtaining and Optimizing Structural Analysis Convergence*, [online] Dostupné z:
<http://www.ansys.com/staticassets/ansys/conference/confidence/boston/downloads/obtaining-and-optimizing-convergence.pdf>
- [20] IMAOKA, Sheldon : *Contact analysis Tips*, [online] Dostupné z :
http://ansys.net/ansys/tips_sheldon/STI0902_Contact_Tips.pdf
- [21] VLK, František. *Vozidlové spalovací motory*. 1. vyd. Brno: Prof.Ing.František Vlk, DrSc., 2003, 578 s. ISBN 80-238-8756-4
- [22] *Slitiny hliníku*. [online]. [cit. 2014-05-25]. Dostupné z:
<http://u12133.fsid.cvut.cz/podklady/TSL/Slitiny%20Al.pdf>
- [23] Tellers, H. 1928. Über ber die Festigkeit einwandiger kegelter Kolben, VDI-Forsch. Heft 305. *Pozn.: Die Berechnungsverfahren sind genau, aber fur die praktische Verwendung viel zu zeitraubend.*

Seznam použitých zkratek a symbolů

Veličina/Symbol	Jednotka	Popis
h_d	mm	Tloušťka desky
h_s	mm	Tloušťka skořepiny
F_S	N	Setrvačná síla
M_R	$\frac{N \cdot mm}{mm}$	Radiální moment
M_Z	$\frac{N \cdot mm}{mm}$	Osový moment
M_t	$\frac{N \cdot mm}{mm}$	Tečný moment
N_Z	$\frac{N}{mm}$	Osová liniová síla
l_0	mm	Min. délka dlouhé skořepiny
m_{pos}	Kg	Hmotnost posuvných hmot
r_s	mm	Poloměr střednicové plochy skořepiny
σ_{RED}	MPa	Redukované napětí
σ_r	MPa	Radiální napětí
σ_t	MPa	Tečné napětí
σ_z	MPa	Osové napětí
B	$MPa \cdot mm^3$	Ohybová tuhost
D-N		Deformačně-napět'ová
DÚ		Dolní úvrat'
E	GPa	Modul pružnosti
F		Výsledná matice zatížení
FSI		Fakulta strojního inženýrství
HMH		Energetická hypotéza – <i>Huber-von Mises-Hencky</i>
HU		Horní úvrat'
K		Globální matice tuhosti
L	mm	Délka ojnice
MKP		Metoda konečných prvků
OP		Okrajové podmínky

P		Potenciál vnějšího zatížení
PP2		Pružnost a pevnost 2
R	mm	Poloměr desky
S.V.		Saint-Venant
U		Matice deformačních parametrů
VVÚ		Výsledné vnitřní účinky
W	mm	Posuv desky ve směru osy rotace (průhyb)
W		Energie napjatosti
X	mm	Vzdálenost posunutí
Z	mm	Osová vzdálenost skořepiny
<i>M</i>	$\frac{N \cdot mm}{mm}$	Radiální liniová silová dvojice
<i>T</i>	$\frac{N}{mm}$	Radiální liniová síla
<i>a</i>	$\frac{m}{s^2}$	Zrychlení pístu
<i>l</i>	mm	Délka skořepiny
<i>n</i>	s^{-1}	Otáčky
<i>p</i>	MPa	Tlak spalín
<i>u</i>	mm	Radiální posuv
<i>v</i>	$\frac{m^3}{kg}$	Měrný objem
<i>α</i>	°	Natočení klikové hřídele
<i>β</i>	$\frac{1}{mm}$	Součinitel útlumu – parametr <i>β</i>
<i>λ</i>		Klikový poměr
<i>μ</i>		Poissonovo číslo
<i>τ</i>	$\frac{N}{mm}$	Liniová síla
<i>ω</i>	$\frac{rad}{s}$	Úhlová rychlost klikové hřídele
<i>ϑ</i>	Rad	Natočení střednicové plochy desky
Π		Lagrangeův funkcionál

Seznam obrázků

OBR. 1 : SCHÉMA KLIKOVÉHO MECHANISMU	13
OBR. 2 : OTTŮV CYKLUS V P-V DIAGRAMU.....	13
OBR. 3: DŮLEŽITÉ ÚHLY A VZDÁLENOSTI KLIKOVÉHO MECHANISMU	14
OBR. 4 GRAF ZRYCHLENÍ	16
OBR. 5 ROZDĚLENÍ OJNICE	17
OBR. 6 : ZATÍŽENÍ PÍSTU	18
OBR. 7 : GEOMETRIE PÍSTU GOLF.....	19
OBR. 8 : NOSNÍK ZATÍŽENÝ OSAMĚLOU SILOU	20
OBR. 9 : NOSNÍK ZATÍŽENÝ LINIOVÝM ZATÍŽENÍM.....	21
OBR. 10 : DIFERENCIÁLNÍ PŘÍSTUP - DEFORMAČNÍ VARIANTA.....	22
OBR. 11 : EXPERIMENTÁLNÍ HODNOTY REDUKOVANÉHO NAPĚTÍ, PŘI NICHŽ DOŠLO K PLASTICKÉ DEFORMACI [11]	24
OBR. 12 : TVAR PÍSTU - PARNÍ LOKOMOTIVY UVAŽOVANÝ V TELLERSOVĚ VÝPOČTU.....	25
OBR. 13 : PRŮBĚH NAPĚTÍ NA PÍSTU PARNÍ LOKOMOTIVY – TELLERSŮV ANALYTICKÝ VÝPOČET A MKP ŘEŠENÍ	26
OBR. 14 : PRŮBĚH NAPĚTÍ NA PÍSTU PARNÍ LOKOMOTIVY 2 – TELLERSŮV ANALYTICKÝ VÝPOČET A MKP ŘEŠENÍ	26
OBR. 15 : VETKNUTÁ DESKA	27
OBR. 16 : UVOLNĚNÝ PRVEK KRUHOVÉ DESKY – VÝSLEDNÉ VNITŘNÍ ÚČINKY	27
OBR. 17 : ŘEZ DESKOU	28
OBR. 18 : GRAF POSUVU VETKNUTÉ DESKY	29
OBR. 19 : VETKNUTÁ DESKA - NAPĚTÍ	29
OBR. 20 : PODEPŘENÁ DESKA	30
OBR. 21 PRŮBĚH POSUVŮ - PODEPŘENÁ DESKA	31
OBR. 22 : PODEPŘENÁ DESKA - NAPĚTÍ	31
OBR. 23 : DESKA PRO PŘÍPAD MOMENTOVÉ SKOŘEPINY.....	32
OBR. 24 : STĚNA	32
OBR. 25 : UVOLNĚNÝ PRVEK MOMENTOVÉ SKOŘEPINY A SILOVÉ PŮSOBNÍ.....	32
OBR. 26 : PRŮBĚH PRŮHYBU DESKY SLOŽENÉHO TĚLESA	37
OBR. 27 : PRŮBĚH NAPĚTÍ DESKY SLOŽENÉHO TĚLESA.....	37
OBR. 28 : PRŮBĚH POSUVU SKOŘEPINY	38
OBR. 29 : PRŮBĚH NAPĚTÍ SKOŘEPINY.....	38
OBR. 30 DĚLENÁ, VETKNUTÁ DESKA	39
OBR. 31 : OHYBOVÝ MOMENT NA PŘECHODU DESEK.....	39
OBR. 32 : PRŮBĚH NAPĚTÍ DĚLENÉ DESKY	40
OBR. 33 : PLANE183.....	43
OBR. 34 : ROZLOŽENÍ NAPĚTÍ NA ŘEZU DESKY – VETKNUTÁ DESKA	43
OBR. 35 : POROVNÁNÍ NAPĚTÍ NA HORNÍ STRANĚ DESKY.....	44
OBR. 36 : POROVNÁNÍ POSUVU W - VETKNUTÁ DESKA	44
OBR. 37 : ROZLOŽENÍ NAPĚTÍ NA ŘEZU DESKY – PODEPŘENÁ DESKA	45
OBR. 38 POROVNÁNÍ NAPĚTÍ NA HORNÍ STRANĚ DESKY	45
OBR. 39 : POROVNÁNÍ POSUVU - PODEPŘENÁ DESKA	46
OBR. 40 : CELKOVÝ PRŮBĚH NAPĚTÍ SLOŽENÉHO TĚLESA POMOCÍ MKP.	46
OBR. 41 : POROVNÁNÍ NAPĚTÍ NA HORNÍ STRANĚ STĚNO-DESKY SLOŽENÉHO TĚLESA	47
OBR. 42 : POROVNÁNÍ NAPĚTÍ NA VNĚJŠÍ STRANĚ SKOŘEPINY	47
OBR. 43 : POROVNÁNÍ NAPĚTÍ NA VNITŘNÍ STRANĚ SKOŘEPINY	48
OBR. 44 : ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ - PRŮBĚH MOMENTŮ SKOŘEPINY	48
OBR. 45 : NAPĚTÍ NA ZKUŠEBNÍ SKOŘEPINĚ A STĚNO-DESCE MALÉ TLOUŠTKY.	49
OBR. 46 : RADIÁLNÍ DEFORMACE DESKY	49
OBR. 47 : POSUV SKOŘEPINY U.....	50
OBR. 48 : REDUKOVANÉ NAPĚTÍ NA VNĚJŠÍ STRANĚ SKOŘEPINY	50
OBR. 49 : POROVNÁNÍ NAPĚTÍ NA VNITŘNÍ STRANĚ SKOŘEPINY	51
OBR. 50 : MODEL DNA PÍSTU - ZAKŘIVENÉ DNO	51
OBR. 51 : PRŮBĚH NAPĚTÍ A POSUVU RŮZNĚ ZAKŘIVENÉ PODEPŘENÉ DESKY	53
OBR. 52: ROVINY 3D MODELU.....	54
OBR. 53 : SOLID186.....	55

OBR. 54: SOLID187 ELEMENT	55
OBR. 55 : GOLF1 – ŘEZ V PŘEDNÍ ROVINĚ	55
OBR. 56 : GOLF1 - ŘEZ V PRAVÉ ROVINĚ	56
OBR. 57 : PRŮBĚH NAPĚTÍ A POSUVU NA DNĚ PÍSTU - MODEL GOLF1	56
OBR. 58 : D-N STAV PLÁŠTĚ PÍSTU, ROVINA ŘEZU ROVNOBĚŽNÁ S PÍSTNÍM ČEPEM - GOLF1.....	57
OBR. 59 : MOHROVA KRUŽNICE - PRAVÁ ROVINA	58
OBR. 60 : GOLF2 - GEOMETRIE	58
OBR. 61 : GOLF2 - ŘEZ V PŘEDNÍ ROVINĚ	59
OBR. 62 : GOLF 2 - ŘEZ V PRAVÉ ROVINĚ.....	60
OBR. 63 : PRŮBĚH NAPĚTÍ A POSUVU NA DNĚ PÍSTU - MODEL GOLF2	61
OBR. 64 : D-N STAV PLÁŠTĚ PÍSTU, ROVINA ŘEZU ROVNOBĚŽNÁ S PÍSTNÍM ČEPEM - GOLF2.....	61
OBR. 65 : GOLF3 - GEOMETRIE	62
OBR. 66 : GOLF3 - ŘEZ V PŘEDNÍ ROVINĚ	62
OBR. 67 : GOLF 3 - ŘEZ V PRAVÉ ROVINĚ.....	63
OBR. 68 : PRŮBĚH NAPĚTÍ A POSUVU NA DNĚ PÍSTU - MODEL GOLF3	64
OBR. 69 D-N STAV PLÁŠTĚ PÍSTU, ROVINA ŘEZU ROVNOBĚŽNÁ S PÍSTNÍM ČEPEM - GOLF3	64
OBR. 70 : PRINCIP DEFORMACE 3D MODELU GOLF3	65
OBR. 71 : POROVNÁNÍ MODELU GOLF3 S/BEZ SETRVAČNÝCH ÚČINKŮ.....	65
OBR. 72 : SÍŤ SESTAVY GOLF4.....	67
OBR. 73: GOLF4 - ŘEZ V PŘEDNÍ ROVINĚ	68
OBR. 74 : GOLF 4 - ŘEZ V PRAVÉ ROVINĚ.....	68
OBR. 75 : KONTAKTNÍ PLOCHA PÍST-ČEP	69
OBR. 76 : PRŮBĚH NAPĚTÍ A POSUVU NA DNĚ PÍSTU - MODEL GOLF4.....	70
OBR. 77 : D-N STAV PLÁŠTĚ PÍSTU, ROVINA ŘEZU ROVNOBĚŽNÁ S PÍSTNÍM ČEPEM – GOLF4.....	70
OBR. 78 : POROVNÁNÍ NAPĚTÍ NA HORNÍ STRANĚ DNA PÍSTU.....	71
OBR. 79 : POROVNÁNÍ OSOVÉHO POSUVU HORNÍ STRANY DNA PÍSTU.	72

Seznam tabulek

TABULKA 1 : HODNOTY NAPĚTÍ A POSUNUTÍ PRO RŮZNÁ ZAKŘIVENÍ DNA	52
---	----

Seznam příloh

CD: Bakalářská práce, Tomáš Mívalt 152913

- Deformačně napěťová analýza osově symetrického tělesa, řešena analyticky a numericky – dokument Word (.docx)
- Deformačně napěťová analýza osově symetrického tělesa, řešena analyticky a numericky – Portable Document Format (.pdf)
- Skripty Matlab (.m) použité pro analytické výpočty
 - *deska_podepreno.m*
 - *deska_vetknuto.m*
 - *slozene_teleso.m*
 - *delena_deska.m*
- 3D modely – formát Parasolid (.x_t)
 - *GOLF_1.x_t*
 - *GOLF_2.x_t*
 - *GOLF_3.x_t*
 - *GOLF_4.x_t*
- Obrázky použité v práci (grafy, schémata apod.)