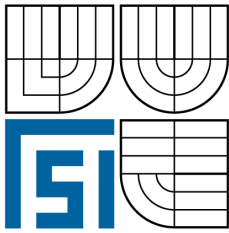


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF MATHEMATICS

## GAUSSOVSKÉ FILTRY S ROTUJÍCÍM JÁDREM

GAUSSIAN FILTERS WITH ROTATING KERNEL

DIPLOMOVÁ PRÁCE  
DIPLOMA THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

TOMÁŠ VINTR

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

prof. RNDr. MILOSLAV DRUCKMÜLLER, CSc.

BRNO 2010



## **Abstrakt**

Tato práce má za cíl vytvořit teorii gaussovských 1D filtrů s rotující maskou, díky které bychom měli být schopni naprogramovat algoritmus pro snížení šumu a zvýraznění struktury paprsků v digitálním obraze sluneční koróny.

## **Summary**

The objective of this thesis is to create Gaussian 1D filters with rotating kernel theory which enables to program algorithm for noise reduction and beam structure highlighting in a digital picture of the solar corona.

## **Klíčová slova**

rotující jádro, rotující maska, gaussovský filtr, analýza digitálního obrazu, sluneční koróna

## **Keywords**

rotating kernel, gaussian filter, digital image processing, solar corona

VINTR, T. *Gaussovské filtry s rotujícím jádrem*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2010. 31 s. Vedoucí diplomové práce prof. RNDr. Miloslav Druckmüller, CSc.



Prohlašuji, že jsem diplomovou práci *Gaussovske filtry s rotujícím jádrem* vypracoval samostatně pod vedením prof. RNDr. Miloslava Druckmüllera, CSc. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Tomáš Vintř



Děkuji svému školiteli prof. RNDr. Miloslavu Druckmüllerovi, CSc. za zajímavé zadání diplomové práce a poskytnutí fotografií sluneční koróny.

Tomáš Vintř



# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Základní pojmy</b>	<b>4</b>
2.1	Konvoluce . . . . .	4
2.2	Gaussovský filtr . . . . .	5
2.3	Rotující maska . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Aproximace úsečky v digitálním obraze</b>	<b>10</b>
3.1	Úvaha . . . . .	10
3.2	Úsečka v rovině s pixely . . . . .	10
3.3	Referenční báze . . . . .	15
3.4	Převedení referenční úsečky do matice . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Prohledávání okolí pixelu</b>	<b>20</b>
4.1	Množiny masek . . . . .	20
4.2	Hledání úsečky v obraze . . . . .	21
4.3	1D filtr s rotujícím jádrem . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Implementace na počítači</b>	<b>26</b>
5.1	Popis zdrojového kódu . . . . .	26
5.2	Rozprava o užitých parametrech vzhledem k časové náročnosti výpočtu . . . . .	30
<b>6</b>	<b>Testování programu na obraze sluneční koróny</b>	<b>37</b>
<b>7</b>	<b>Závěr</b>	<b>42</b>
	<b>Literatura</b>	<b>43</b>

# Kapitola 1

## Úvod

Již od nepaměti lidé vzhlíželi k obloze a hledali vztahy mezi hvězdami, které jsou z naší planety krásně vidět, a událostmi na Zemi. I my dnes vzhlížíme k obloze a věříme, že studiem nebeské bání získáme informace o naší minulosti i budoucnosti.

Nejbližší hvězdou naší planetě je Slunce. Jeho hlubší studium se tudíž jeví velmi příhodným. Jedním z úkazů, kdy můžeme poměrně snadno spatřit žhavé okolí Slunce a vyhnout se difrakčním jevům, je tzv. zatmění Slunce.

Pracovníci naší školy využili tohoto úkazu, aby nafotili sluneční korónu. Jde o jasné zářící okolí Slunce tvořené žhavými plyny unikajícími z fotosféry Slunce. Plyny jsou ionizovány, a proto se jejich výrony ohýbají v magnetickém poli Slunce podél tzv. magnetických siločar. Většina hmoty Slunce je tvořena vodíkem, jehož rozpadem vznikají samostatné protony a elektrony. Světlo, které pak při zatmění vidíme, jsou fotony odražené od těchto částic. Vzhledem k nepoměrné velikosti elektronu a protonu je zřejmé, že naprostá většina fotonů se odrazí od elektronů a ne od protonů. Světlé pruhy, které v okolí Slunce vidíme, jsou tedy elektrony pohybující se podél siločar.

Fyzikální model popisuje poměrně přesně magnetické pole Slunce na jeho povrchu, ale jeho přesnost se významně snižuje se vzdáleností od Slunce. Matematický přístup k analýze fotografií sluneční koróny nám pomůže lépe rozeznat nepatrné detaily a může vést k ověření fyzikálních modelů a lepšímu porozumění chování Slunce. Jednou z těchto metod se zabývá i tato diplomová práce.

Metoda, kterou zde popíšeme, má za cíl potlačení šumu v obrazu sluneční koróny, aniž dojde k zahlazení hran struktury světlých a tmavých paprsků znázorňujících tvar elektronových výronů, potažmo siločar, a zviditelnění těchto paprsků ve vzdálenosti od Slunce, kde jsou rozdíly jasů světlých a tmavých paprsků již velmi malé a hranice přechodů díky velké míře šumu těžko rozeznatelné.

Je tedy nutné vytvořit adaptivní filtr, který se přizpůsobí lokální struktuře obrazu,

neboli bude potlačovat šum v rámci oblastí, které budou respektovat tvar struktury. Vzhledem k tomu, že struktura je tvořena křivkami, jako vhodný tvar takovýchto oblastí se jeví úsečka.

Práce obsahuje sedm kapitol. První kapitolu tvoří úvod. Druhá, třetí a čtvrtá kapitola jsou teoretické. Ve druhé kapitole se seznámíme se základními pojmy jako konvoluce, gaussovská maska či rotující jádro. Ve třetí kapitole si nadefinujeme úsečku v digitálním obraze a základní masku touto úsečkou generovanou. Čtvrtá kapitola se zabývá hledáním úsečky v obraze a generováním konvolučních masek a na jejím konci si pak nadefinujeme 1D filtr s rotujícím jádrem.

Pátá kapitola popisuje zdrojový kód vytvořený na základě teorie a pojednává o vhodnosti výběru parametrů. Šestá kapitola pak obsahuje čtyři filtrované obrazy a srovnává jednotlivé filtry. Poslední, sedmá kapitola, je závěr.

# Kapitola 2

## Základní pojmy

„Dejte mi dostatečně dlouhou tyč a pevný bod a pohnu světem.“

*Strojařská variace na známé téma.*

### 2.1. Konvoluce

POZNÁMKA 2.1.1. Digitální fotografie je diskretní zobrazení jasů obrazu, které můžeme matematicky popsat jako matici, jejíž každý prvek vyjadřuje jas nějakého okolí příslušného bodu obrazu. Budeme předpokládat, že tato okolí jsou vzájemně disjunktní, čtvercová a že vzdálenost mezi přilehlými okoly se limitně blíží k nule. Pro zpracování digitálního obrazu budeme používat dvourozměrnou diskretní konvoluci.

DEFINICE 2.1.1 *Lineární konvoluce je binární operátor definovaný pro funkce  $f$  a  $h$  na množině  $\mathbf{M}$  v bodě  $\mathbf{x}$  vztahem*

$$(f * h)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{M}} f(\mathbf{x} - \mathbf{u})h(\mathbf{u})d\mathbf{u}.$$

DEFINICE 2.1.2 *Odvozením z lineární konvoluce lze dvourozměrnou diskretní konvoluci vyjádřit vzorcem:*

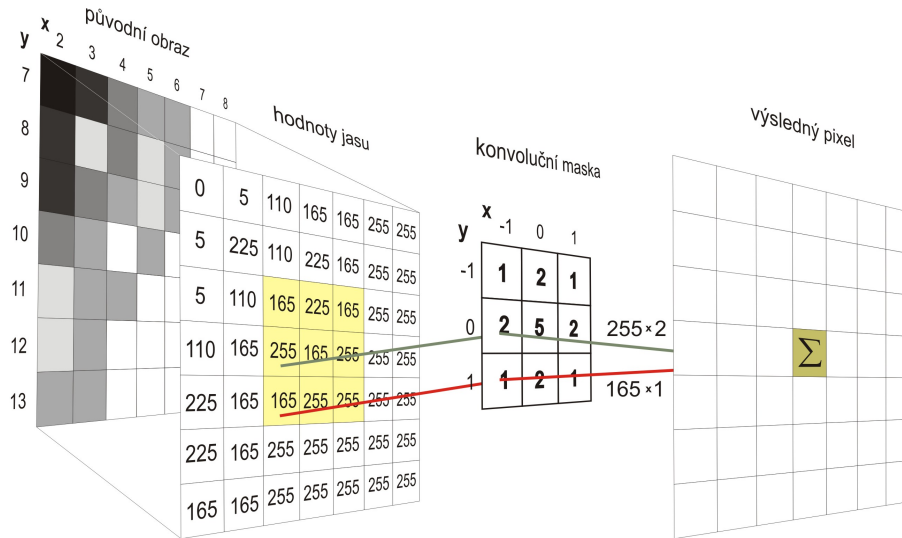
$$v(x, y) = f(x, y) * h(x, y) = \sum_{i=-k}^k \sum_{j=-k}^k f(x - i, y - j)h(i, j).$$

DEFINICE 2.1.3 *Zápis  $A_{\alpha_1 \times \alpha_2} = (a_{i,j}) = (f(i, j))$  říká, že  $A$  je matice typu  $\alpha_1 \times \alpha_2$ , její prvky jsou  $a_{i,j} = f(i, j)$ , kde  $i = 1, \dots, \alpha_1$  a  $j = 1, \dots, \alpha_2$ , a  $f(i, j)$  je funkce proměnných  $i$  a  $j$ .*

DEFINICE 2.1.4 Mějme čtvercovou matici  $Q_{(2r+1) \times (2r+1)} = (q_{k,l})$ , kde  $r \in \mathbf{N}$  a matici  $O_{o_1 \times o_2} = (o_{i,j})$ , kde  $o_1, o_2 \gg 2r + 1$ , potom

$$v(i_0, j_0) = f(i_0, j_0) * Q(i_0, j_0) = \sum_{k=1}^{2r+1} \sum_{l=1}^{2r+1} f(i_0 - r - 1 + k, j_0 - r - 1 + l) q_{k,l},$$

je 2D diskretní konvoluce realizovaná v bodě  $o_{i_0, j_0}$  původního obrazu  $O$  konvoluční maskou  $Q$ .  $f(i_0, j_0)$  reprezentuje původní a  $v(i_0, j_0)$  výslednou hodnotu jasu v obraze  $O$ .



Obrázek 2.1: Dvourozměrná diskretní konvoluce

## 2.2. Gaussovský filtr

DEFINICE 2.2.1 Bod  $o$  souřadnicích  $x = x_0$  a  $y = y_0$ ,  $x_0 \in \mathbf{R}$  a  $y_0 \in \mathbf{R}$  budeme znčit  $[x_0, y_0]$ , kde  $[x_0, y_0] \in \mathbf{R}^2$ .

DEFINICE 2.2.2 2D Gaussovským filtrem budeme nazývat 2D diskretní konvoluci, kde hodnoty prvků konvoluční masky jsou určeny diskretní aproximací Gaussovy funkce

$$G_2(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2 + (y-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

kde  $[\mu, \mu]$  je střední hodnota a  $\sigma^2$  je rozptyl.

POZNÁMKA 2.2.1. Gaussovský filtr vede k potlačení skokových změn jasové funkce. Tento filtr je velmi účinný pro potlačování náhodného šumu, ale způsobuje také rozmazání hran. Více o Gaussovském a jiných lineárních filtrech lze nalézt například v [3].

DEFINICE 2.2.3 Normální rozdělení  $N(\mu, \sigma^2)$  je specifikováno hustotou pravděpodobnosti

$$f_g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

kde  $\mu$  je střední hodnota a  $\sigma^2$  je rozptyl.

VĚTA 2.2.1 Mějme funkce  $G_2(x, y)$ ,  $f_g(x)$  a  $f_g(y)$  a body  $x_0 \in \mathbf{R}_1$  a  $y_0 \in \mathbf{R}_2$ . Potom  $G_2(x_0, y_0) = f_g(x_0)f_g(y_0)$ .

DŮKAZ:

$$G_2(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x_0-\mu)^2+(y_0-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_0-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y_0-\mu)^2}{2\sigma^2}} = f_g(x_0)f_g(y_0).$$

DEFINICE 2.2.4 Binomické rozdělení  $Bi(n, p)$ , je specifikováno pravděpodobnostní funkcí

$$\begin{aligned} P(x) &= \binom{n}{k} (p)^k (1-p)^{n-k} \quad \text{pro } k = 0, \dots, n \\ P(x) &= 0 \quad \text{jinak.} \end{aligned}$$

LEMMA 2.2.1 Nechť  $p$  je pevné dané číslo,  $0 < p < 1$ . Rozdělení  $Bi(n, p)$  konverguje pro  $n \rightarrow \infty$  k rozdělení  $N(np, np(1-p))$ . Aproximace binomického rozdělení normálním rozdělením je vhodná, jestliže  $np(1-p) > 9$ .

POZNÁMKA 2.2.2. Toto tvrzení lze nalézt v [6] jako Moivreovu-Laplaceovu větu. Důkaz této věty lze nalézt např. v [1].

VĚTA 2.2.2 Maximum funkce  $f(p) = p(1-p)$  kde  $0 < p < 1$  je v  $p = 0,5$ .

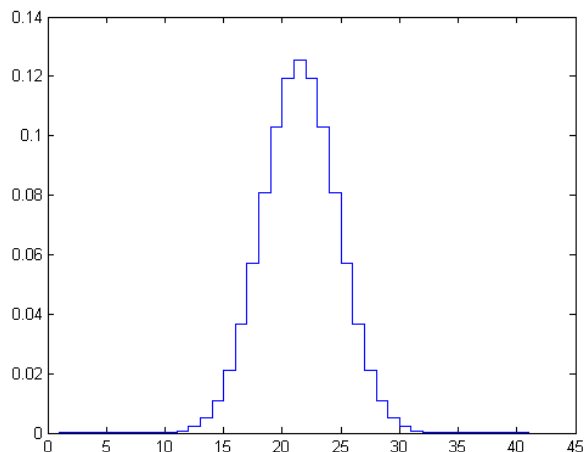
DŮKAZ: Derivaci funkce  $f$  položíme rovnu nule:  $f'(p) = -2p+1 = 0$ , odtud  $p = 0,5$ . Pro  $\epsilon > 0$  dostatečně malé platí  $(0,5+\epsilon)(1-(0,5+\epsilon)) = (0,5-\epsilon)(1-(0,5-\epsilon)) < 0,5(1-0,5)$ . Výsledek splňuje podmínku  $0 < p < 1$ .

VĚTA 2.2.3 Hodnoty pravděpodobnostní funkce rozdělení  $Bi(n, p)$  kde  $p = 0,5$  jsou  $P(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \binom{n}{k}$ , kde  $k = 0, \dots, n$ .

DŮKAZ: Získáme dosazením do definice.

POZNÁMKA 2.2.3. Snadno odvodíme, že podmínka  $np(1-p) > 9$ , kde  $p = 0,5$ , je splněna pro  $n > 36$ .

VĚTA 2.2.4  $\int_{\mu-3\sigma}^{\mu+3\sigma} f_g(x)dx = \int_{\mu-3\sigma}^{\mu+3\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx > 0,997$ , kde  $x, \sigma, \mu \in \mathbf{R}$ .



Obrázek 2.2: Binomické rozdělení pro  $p=0,5$  a  $n=40$

DŮKAZ: V důkazu budeme vycházet z teorie pravděpodobnosti.  $P(\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma) = F(\mu + 3\sigma) - F(\mu - 3\sigma) = \Phi\left(\frac{\mu + 3\sigma - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - 3\sigma - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(3) - \Phi(-3) = \Phi(3) - (1 - \Phi(3)) = 2\Phi(3) - 1 \doteq 0.9973$ , kde  $\Phi(u)$  je hodnota distribuční funkce normovaného normálního rozdělení v bodě  $u$ .

POZNÁMKA 2.2.4. Od vzdálenosti  $3\sigma$  od střední hodnoty jsou funkční hodnoty této funkce z hlediska výpočtu konvoluce zanedbatelné.

DEFINICE 2.2.5  $()^*$  je unární operátor, který číslu  $a \in \mathbf{R}$  přiřadí nejbližší celé číslo, které je v absolutní hodnotě větší nebo rovno  $|a|$ .

PŘÍKLAD 2.2.1.  $(\pi)^* = 4$ ,  $(-\pi)^* = -4$ ,  $(-3)^* = -3$ .

VĚTA 2.2.5 Posloupnost  $\{g(k)\}_1^{2r+1}$ ,  $g(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \binom{n}{k!(n-k)!}$ , kde  $r \geq 9$ ,  $r \in \mathbf{N}$  je pevně zvolené číslo,

$$n = \begin{cases} \left(\left(\frac{2r+1}{3}\right)^2 - 2\right)^* & \text{pro } \left(\frac{2r+1}{3}\right)^2 \text{ sudé} \\ \left(\left(\frac{2r+1}{3}\right)^2 - 1\right)^* & \text{pro } \left(\frac{2r+1}{3}\right)^2 \text{ liché} \end{cases},$$

$k \in \mathbf{N} \cap \left\langle \frac{n}{2} - r; \frac{n}{2} + r \right\rangle$ , je vhodným odhadem funkčních hodnot funkce  $f_g$ , kde  $\mu = \frac{n}{2}$  a  $\sigma^2 = \frac{n}{4}$ .

DŮKAZ:  $n \geq \left(\left(\frac{2r+1}{3}\right)^2 - 2\right)^* \geq \left(\left(\frac{19}{3}\right)^2 - 2\right)^* = \left(\frac{361}{9} - 2\right)^* = 39 > 36$ , tedy je splněna podmínka  $np(1-p) > 9$ .

$6\sqrt{\frac{n}{4}} \leq 6\sqrt{\frac{\left(\left(\frac{2r+1}{3}\right)^2 - 1\right)^*}{4}} < 3\sqrt{\left(\frac{2r+1}{3}\right)^2} = 2r + 1$ , takže jde o odhad funkčních hodnot funkce  $f_g$  ve vzdálenosti větší, než  $3\sigma$  od střední hodnoty  $\mu$ .

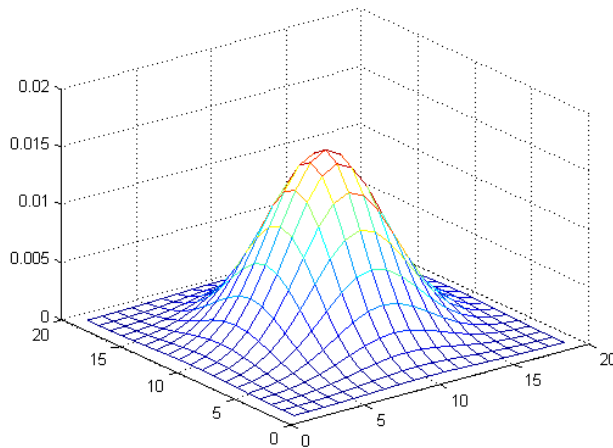
DŮSLEDEK 2.2.1. Matice  $\Gamma_{(2r+1) \times (2r+1)} = (\gamma_{i,j}) = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \left(\frac{n!}{i!(n-i)!}\right) \left(\frac{n!}{j!(n-j)!}\right)\right)$ , kde

$$n = \begin{cases} \left(\left(\frac{2r+1}{3}\right)^2\right)^* & \text{pro } \left(\left(\frac{2r+1}{3}\right)^2\right)^* \text{ sudé} \\ \left(\left(\frac{2r+1}{3}\right)^2 + 1\right)^* & \text{pro } \left(\left(\frac{2r+1}{3}\right)^2\right)^* \text{ liché,} \end{cases}$$

$i, j \in \mathbf{N} \cap \left\langle \frac{n}{2} - r; \frac{n}{2} + r \right\rangle$ ,  $r \in \mathbf{N}$  pevně zvolené, je pro  $r \geq 9$ ,  $r \in \mathbf{N}$  vhodným odhadem funkčních hodnot 2D gaussovské funkce.

DEFINICE 2.2.6 Mějme matici  $\Gamma_{(2r+1) \times (2r+1)} = (\gamma_{k,l})$  z důsledku 2.2.1. Matici  $G_{(2r+1) \times (2r+1)} = (g_{k,l}) = \left(\frac{\gamma_{k,l}}{\sum \sum \gamma_{k,l}}\right)$  budeme v dalším textu označovat jako 2D gaussovskou konvoluční masku.

POZNÁMKA 2.2.5. Součet prvků matice  $G$  je roven jedné.



Obrázek 2.3: 2D gaussovská konvoluční maska pro  $r=9$  ( $n=40$ )

## 2.3. Rotující maska

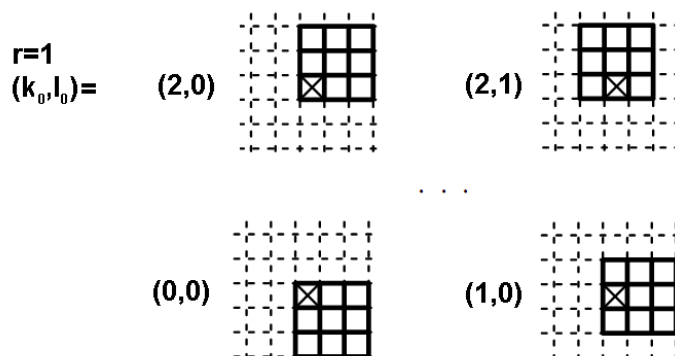
Rotující maska je speciální typ konvoluční masky, kdy poloha masky vůči relevantnímu pixelu není pevně dána, ale je vybrána na základě nějakého kritéria, které se vztahuje k hodnotám jasu okolních pixelů.

POZNÁMKA 2.3.1. V kapitole 2.1. jsme si nadefinovali diskrétní konvoluci v bodě  $o_{i_0, j_0}$  jako funkci  $v(i_0, j_0) = f(i_0, j_0) * Q(i_0, j_0) = \sum_{k=1}^{2r+1} \sum_{l=1}^{2r+1} f(i_0 - r - 1 + k, j_0 - r - 1 + l) q_{k,l}$ .

DEFINICE 2.3.1 Mějme čtvercovou matici  $Q_{(2r+1) \times (2r+1)} = (q_{k,l})$ , kde  $r \in \mathbf{N}$ , a matici  $O_{o_1 \times o_2} = (o_{i,j})$ , kde  $o_1, o_2 \gg 2r + 1$ , potom funkce

$$v_{k_0, l_0}(i_0, j_0) = f(i_0, j_0) * Q_{k_0, l_0}(i_0, j_0) = \sum_{k=1}^{2r+1} \sum_{l=1}^{2r+1} f(i_0 - k_0 - 1 + k, j_0 - l_0 - 1 + l) q_{k,l},$$

kde  $k_0, l_0 \in \mathbf{N} \cap \langle 0; 2r \rangle$  realizují výběr polohy konvoluční masky vůči bodu  $(i_0, j_0)$ , vyjadřuje diskrétní konvoluci s rotujícím jádrem  $Q$  v bodě  $o_{i_0, j_0}$  původního obrazu  $O$ .  $f(i_0, j_0)$  reprezentuje původní a  $v_{k_0, l_0}(i_0, j_0)$  výslednou hodnotu jasu v obraze  $O$ .



Obrázek 2.4: Rotující masky

POZNÁMKA 2.3.2. O rotujících maskách se můžeme dočíst například v [4] nebo v [5].

# Kapitola 3

## Aproximace úsečky v digitálním obraze

„Nepotřebuji týt z toho, co objevili jiní.“

strýc František

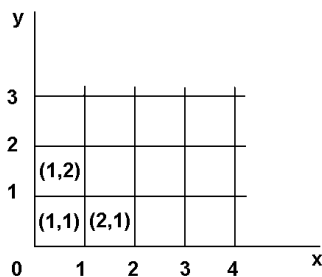
### 3.1. Úvaha

Dívejme se na konvoluční masku 1D filtru jako na matici generovanou nějakou úsečkou tak, že prvky matice odpovídající pixelům, kterými položená úsečka prochází, mají nenulovou hodnotu a ostatní mají hodnotu nula. Tuto úsečku můžeme zadefinovat její délkou a úhlem, který svírá s nějakou pevně zadefinovanou osou. Následně zobrazíme takovouto úsečku do obrázku, vyhodnotíme, kterými pixely prochází, a vygenerujeme jednu z možných konvolučních masek. Posouváním a rotováním úsečky kolem pevně zvoleného bodu vygenerujeme množinu konvolučních masek vztahujících se k danému pixelu.

### 3.2. Úsečka v rovině s pixely

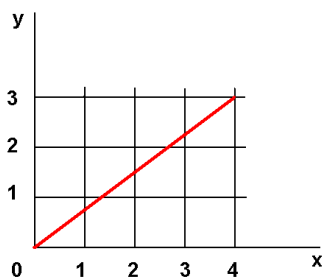
**DEFINICE 3.2.1** *Mějme rovinu  $\mathbf{R}^2$  a na ní nadefinovanu kartézskou soustavu souřadnic. Do této roviny zobrazíme 2 třídy přímek, jedny rovnoběžné s osou  $x$  a druhé s osou  $y$ , tak, aby v každé třídě existovala právě jedna přímka procházející počátkem a aby vzdálenost sousedních přímek jedné třídy byla 1. Vznikne tak čtvercová síť se čtverci o délce strany 1.*

**DEFINICE 3.2.2** *Oblasti ohraničené přímkami  $x = \chi$ ,  $x = \chi - 1$ ,  $y = \epsilon$ ,  $y = \epsilon - 1$ , kde  $\chi, \epsilon \in \mathbf{Z}$  budeme říkat pixel  $(\chi, \epsilon)$ . Pro tyto oblasti dále platí, že bod  $[x_0, y_0] \in \mathbf{R}^2$  leží v pixelu  $(\chi, \epsilon) = ((x_0)^*, (y_0)^*)$ .*



Obrázek 3.1: Pixely v prvním kvadrantu kartézské roviny

**PŘÍKLAD 3.2.1.** Mějme úsečku délky  $r = 5$  s počátečním bodem v počátku soustavy souřadnic svírající úhel  $\alpha = \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$  s osou  $x$ . Úsečka začíná v pravém horním rohu pixelu  $(0, 0)$ , končí v pravém horním rohu pixelu  $(3, 4)$ , a prochází pixely  $(1, 1)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(3, 2)$ ,  $(3, 3)$  a  $(4, 3)$ .



Obrázek 3.2: Úsečka  $r = 5$ ,  $\alpha = \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$

**POZNÁMKA 3.2.1.** Jak je vidět na obrázku 3.2, úsečka neprochází stejnou měrou všemi pixely.

**DEFINICE 3.2.3** Mějme úsečku  $u_{r,\alpha}$  zadanou délkou  $r$  a úhlem  $\alpha$  tak, že  $u_{r,\alpha} : x = tr \cos \alpha$ ,  $y = tr \sin \alpha$ ,  $t \in (0; 1)$ ,  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ,  $r \in \mathbf{N}$ . Mějme parametr  $k \in \mathbf{N}$ . Potom bázi  $\mathbf{A}_{k,r,\alpha} = \left\{ \left( \frac{1}{kr \sin \alpha}, 0 \right), \left( 0, \frac{1}{kr \cos \alpha} \right) \right\}$  budeme nazývat bázi generovanou úsečkou  $u_{r,\alpha}$  a parametrem  $k$ .

**POZNÁMKA 3.2.2.** V dalším textu bude vždy platit, že  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ,  $r \in \mathbf{N}$  a  $k \in \mathbf{N}$ .

**VĚTA 3.2.1** Zobrazení  $\mathbf{A}_{k,r,\alpha} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  s konstantami  $k, r, \alpha$  dané předpisem

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{kr \sin \alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{kr \cos \alpha} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_0}{kr \sin \alpha} \\ \frac{b_0}{kr \cos \alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{0,A} \\ b_{0,A} \end{bmatrix},$$

je bijektivní.

DŮKAZ: Nejprve sporem dokážeme, že toto zobrazení je injektivní. Mějme dva body  $[a_1, b_1], [a_2, b_2] \in \mathbf{R}^2$ ,  $[a_1, b_1] \neq [a_2, b_2]$  a předpokládejme, že mají stejný obraz. Potom

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{1}{kr \sin \alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{kr \cos \alpha} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{1,A} \\ b_{1,A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{2,A} \\ b_{2,A} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{kr \sin \alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{kr \cos \alpha} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}, \\ &\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

což je spor.

Nyní dokážeme, že zobrazení je surjektivní. Mějme bod  $[a_{3,A}, b_{3,A}] \in \mathbf{R}^2$ .

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{1}{kr \sin \alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{kr \cos \alpha} \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_{3,A} \\ b_{3,A} \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} kr \sin \alpha & 0 \\ 0 & kr \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_{3,A} \\ b_{3,A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{3,A} kr \sin \alpha \\ b_{3,A} kr \cos \alpha \end{bmatrix}, \\ &\begin{bmatrix} a_{3,A} kr \sin \alpha \\ b_{3,A} kr \cos \alpha \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^2. \end{aligned}$$

Tím je bijekce dokázána.

**DEFINICE 3.2.4** Mějme prostor  $\mathbf{R}^2$  s bází  $\mathbf{A}_{k,r,\alpha}$ , na kterém nadefinujeme pixely. Těmto pixelům budeme říkat subpixely.

**POZNÁMKA 3.2.3.** Pixely jsou speciálním případem subpixelů, kdy  $\mathbf{A}_{k,r,\alpha} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ .

**VĚTA 3.2.2** Úsečka  $u_{r,\alpha}$  prochází v bázi  $\mathbf{A}_{k,r,\alpha}$  subpixely  $(\chi, \epsilon)$ , kde  $\chi = \epsilon$ .

DŮKAZ:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{kr \sin \alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{kr \cos \alpha} \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} tr \cos \alpha \\ tr \sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} kr \sin \alpha & 0 \\ 0 & kr \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{bmatrix} tr \cos \alpha \\ tr \sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} tkr^2 \cos \alpha \sin \alpha \\ tkr^2 \sin \alpha \cos \alpha \end{bmatrix},$$

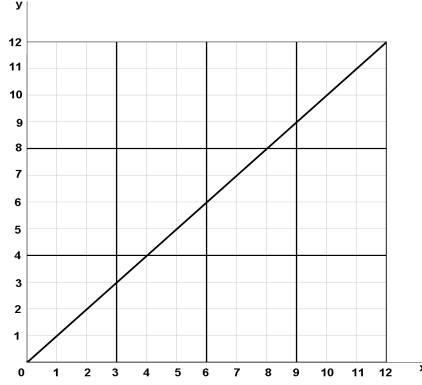
$$(tkr^2 \cos \alpha \sin \alpha)^* = (tkr^2 \sin \alpha \cos \alpha)^*.$$

**PŘÍKLAD 3.2.2.** Zobrazení úsečky  $u_{r,\alpha}$ ,  $r = 5$ ,  $\alpha = \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$ , v bázi

$$\mathbf{A}_{1,r,\alpha} = \left\{ \left( \frac{1}{r \sin \alpha}, 0 \right), \left( 0, \frac{1}{r \cos \alpha} \right) \right\} = \left\{ \left( \frac{1}{3}, 0 \right), \left( 0, \frac{1}{4} \right) \right\}.$$

Toto zobrazení vidíme na obrázku 3.3.

**VĚTA 3.2.3** Mějme úsečku  $u_{r,\alpha}$ ,  $r \geq 1$ . Jestliže existuje takové  $k \in \mathbf{N}$ , že  $kr \sin \alpha \in \mathbf{Z}$  a zároveň  $kr \cos \alpha \in \mathbf{Z}$ , potom každý subpixel prostoru  $\mathbf{R}^2$  s bází  $\mathbf{A}_{k,r,\alpha}$  náleží právě do jednoho pixelu zobrazeného do této báze.



Obrázek 3.3: Zobrazení úsečky  $u_{5, \arctan(\frac{3}{4})}$  v bázi:  $\{(\frac{1}{3}, 0), (0, \frac{1}{4})\}$ .

DŮKAZ: Vezměme libovolný bod libovolného pixelu  $[x_\chi, y_\epsilon] \in (\chi, \epsilon)$  a zobrazme jej do báze  $\mathbf{A}_{k,r,\alpha}$ :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{kr \sin \alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{kr \cos \alpha} \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_\chi \\ y_\epsilon \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} kr \sin \alpha & 0 \\ 0 & kr \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_\chi \\ y_\epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\chi kr \sin \alpha \\ y_\epsilon kr \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Vidíme, že  $(x_\chi)^* kr \sin \alpha \in \mathbf{Z}$  a  $(y_\epsilon)^* kr \cos \alpha \in \mathbf{Z}$ .

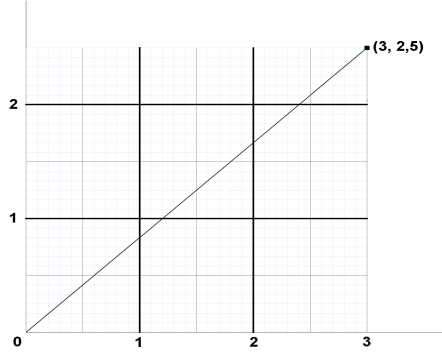
**VĚTA 3.2.4** *Pixel zobrazený do prostoru  $\mathbf{R}^2$  s bází  $\mathbf{A}_{k,r,\alpha}$ , kde  $kr \sin \alpha \in \mathbf{Z}$  a zároveň  $kr \cos \alpha \in \mathbf{Z}$ , je sjednocením konečného počtu subpixelů.*

DŮKAZ: Využijeme důkazu předešlé věty. Víme, že libovolný bod libovolného pixelu  $[x_\chi, y_\epsilon] \in (\chi, \epsilon)$  se zobrazí do bodu  $[x_\chi kr \sin \alpha, y_\epsilon kr \cos \alpha]$ , kde  $x_\chi \in (\chi - 1, \chi)$  a  $y_\epsilon \in (\epsilon - 1, \epsilon)$ . Vzhledem k podmínkám  $kr \sin \alpha \in \mathbf{Z}$  a  $kr \cos \alpha \in \mathbf{Z}$ , je takto zobrazený pixel sjednocením  $k^2 r^2 \sin \alpha \cos \alpha$  subpixelů.

**PŘÍKLAD 3.2.3.** Zobrazení úsečky  $u_{r,\alpha}$  takovou, že  $r \cos \alpha = 3$  a  $r \sin \alpha = 2,5$  v bázi  $\mathbf{A}_{4,r,\alpha} = \{(\frac{1}{10}, 0), (0, \frac{1}{12})\}$ . Takové zobrazení vidíme na obrázku 3.4.

**VĚTA 3.2.5** *Jestliže pro úsečku  $u_{r,\alpha}$  existuje takové zobrazení  $\mathbf{A}_{k,r,\alpha}$ , že  $kr \sin \alpha \in \mathbf{Z}$  a zároveň  $kr \cos \alpha \in \mathbf{Z}$ , lze tuto úsečku bez počátečního a koncového bodu rozdělit na  $\left\lfloor \frac{k}{\det \mathbf{A}_{k,r,\alpha}} \right\rfloor$  disjunktních podmnožin stejné délky tak, že každá taková podmnožina je zároveň podmnožinou nějakého pixelu a součet jejich délek je roven  $r$ .*

DŮKAZ: Podle věty 3.2.2 úsečka  $u_{r,\alpha}$  prochází v bázi  $\mathbf{A}_{k,r,\alpha}$  subpixely  $(\chi, \epsilon)$ , kde  $\chi = \epsilon$ . Z definice jsou subpixely disjunktní. Podle vět 3.2.1 a 3.2.3 je každý subpixel zobrazený v bázi  $\{(1, 0), (0, 1)\}$  podmnožinou právě jednoho pixelu.



Obrázek 3.4: Zobrazení úsečky s koncovým bodem  $[3, \frac{5}{2}]$

Nyní dokážeme, že úsečka bez počátečního a koncového bodu prochází právě  $\left\lfloor \frac{k}{\det \mathbf{A}_{k,r,\alpha}} \right\rfloor$  subpixely.

Podle věty 3.2.1 prochází buď subpixely  $(1, 1), (2, 2), \dots, (kr^2 \cos \alpha \sin \alpha, kr^2 \sin \alpha \cos \alpha)$ , nebo  $(0, 0), (-1, -1), \dots, (-kr^2 \cos \alpha \sin \alpha + 1, -kr^2 \sin \alpha \cos \alpha + 1)$ .

Prochází tedy  $\lfloor kr^2 \sin \alpha \cos \alpha \rfloor$  subpixely.  $\left\lfloor \frac{k}{\det \mathbf{A}_{k,r,\alpha}} \right\rfloor = \lfloor kr^2 \sin \alpha \cos \alpha \rfloor$ .

Všechny podmnožiny úsečky, včetně počátečního bodu  $[0, 0]$  a koncového bodu jsou ohraničené a disjunktní. Označme bod  $[0, 0]$  jako  $u_0$ , koncový bod jako  $u_n$  a ostatní podmnožiny symboly  $u_i, i = 1 \dots, kr^2 \sin \alpha \cos \alpha$ . Potom

$$u_{r,\alpha} = \left( \bigcup_{i=1}^{kr^2 \sin \alpha \cos \alpha} a_i \right) \cup a_0 \cup a_n, \quad meas u_{r,\alpha} - meas a_0 - meas a_n = \sum meas a_i,$$

$$meas a_0 = 0 \quad meas a_n = 0.$$

**VĚTA 3.2.6** *Jestliže  $kr \sin \alpha \in \mathbf{Z}$  a zároveň  $kr \cos \alpha \in \mathbf{Z}$ ,  $k \in \mathbf{N}$ ,  $r \in \mathbf{N}$ , potom existují takové dvě čísla  $k_s, k_c \in \mathbf{N}$ , pro které platí  $k_s r \sin \alpha \in \mathbf{Z}$ ,  $k_c r \cos \alpha \in \mathbf{Z}$  a  $k = k_s k_c$ .*

**DŮKAZ:**  $k \sin \alpha \in \mathbf{Z}$ ,  $k \cos \alpha \in \mathbf{Z} \Rightarrow \sin \alpha \in \mathbf{Q}$ ,  $\cos \alpha \in \mathbf{Q} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{m_1}{n_1}$ ,  $\cos \alpha = \frac{m_2}{n_2}$ ,  $m_1, m_2 \in \mathbf{Z}$ ,  $n_1, n_2 \in \mathbf{N} \Rightarrow k = n_1 n_2$ .

**POZNÁMKA 3.2.4.** Obecně nelze nalézt takové  $k \in \mathbf{N}$ , aby platilo, že  $kr \sin \alpha \in \mathbf{Z}$  a zároveň  $kr \cos \alpha \in \mathbf{Z}$ . Z pohledu numerického výpočtu tedy musíme nalézt  $k$  takové, aby počet subpixelů, které přesahují přes hranice pixelů, ovlivňoval výpočet pouze zanedbatelně.

### 3.3. Referenční báze

**DEFINICE 3.3.1** Mějme úsečku  $u_{r,\alpha}$ , parametr  $k \in \mathbf{N}$  a bázi generovanou touto úsečkou  $\mathbf{A}_{k,r,\alpha} = \left\{ \left( \frac{1}{kr \sin \alpha}, 0 \right), \left( 0, \frac{1}{kr \cos \alpha} \right) \right\}$ . Bázi  $\mathbf{A}_{k,r,\alpha}^* = \left\{ \left( \frac{1}{r(k \sin \alpha)^*}, 0 \right), \left( 0, \frac{1}{r(k \cos \alpha)^*} \right) \right\}$  budeme nazývat referenční báze.

**POZNÁMKA 3.3.1.** Pixelům v referenční bázi budeme také říkat subpixely.

**DEFINICE 3.3.2** Množinu  $v_{r,\alpha,c} \in \mathbf{R}^2$  v bázi  $\mathbf{A}_{k,r,\alpha}^*$  definovanou předpisem  $v_{r,\alpha} : x = tr^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| - c$ ,  $y = tr^2 |(k_2 \cos \alpha \sin \alpha)^*| - c$ , kde  $t \in (0; 1)$  a  $c \in \langle 0; r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| \rangle \cap \mathbf{Z}$  je pevně zvolené číslo, budeme nazývat referenční úsečkou s posunutím  $c$ .

**VĚTA 3.3.1** Referenční úsečka prochází subpixely  $(1 - c, 1 - c), (2 - c, 2 - c), \dots, (r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| - c, r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| - c)$ .

**DŮKAZ:** Vychází z definice referenční úsečky a subpixelu. Pro libovolný bod úsečky platí  $[x_l, y_l] = [tr^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| - c, tr^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| - c] \in ((tr^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| - c)^*, (tr^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| - c)^*)$ .

**PŘÍKLAD 3.3.1.** Zobrazme referenční úsečku  $v_{r,\alpha,c}$ , kde  $r = 5$ ,  $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ ,  $c = 550$  v referenční bázi  $\mathbf{A}_{k,r,\alpha}^*$ , kde  $k = 100$ .

**POZNÁMKA 3.3.2.** Je zjevné, že existují takové dva parametry  $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$ , že  $tr^2 |(k \cos \alpha_1 \sin \alpha_1)^*| = tr^2 |(k \cos \alpha_2 \sin \alpha_2)^*|$ .

**VĚTA 3.3.2** Jestliže  $|\alpha_1 - \alpha_2| < \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{kr^2}$ , potom  $tr^2 |(k \cos \alpha_1 \sin \alpha_1)^*| = tr^2 |(k \cos \alpha_2 \sin \alpha_2)^*|$ .

**DŮKAZ:** Zjevně pro  $a \neq b$ ,  $r^2(ka)^* = r^2(kb)^*$ ,  $a, b \in \mathbf{R}$ , platí, že  $r^2|a - b| < \frac{1}{k}$ .

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že  $\alpha_1 > \alpha_2$ ,  $\alpha_1 - \alpha_2 = \Delta > 0$ .

$$\begin{aligned} |\cos \alpha_1 \sin \alpha_1 - \cos \alpha_2 \sin \alpha_2| &= \frac{1}{2} |\sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_2| = |\cos(\alpha_1 + \alpha_2) \sin(\alpha_1 - \alpha_2)| = \\ &= |\cos(2\alpha_2 - \Delta) \sin \Delta| = |\cos(2\alpha_2) \cos \Delta \sin \Delta - \sin(2\alpha_2) \sin \Delta \sin \Delta| < \\ &\cos \Delta \sin \Delta + \sin \Delta \sin \Delta. \end{aligned}$$

Položme  $\cos \Delta \geq \sin \Delta$ , potom  $\cos \Delta \sin \Delta + \sin \Delta \sin \Delta \leq 2 \cos \Delta \sin \Delta = \sin 2\Delta$ .

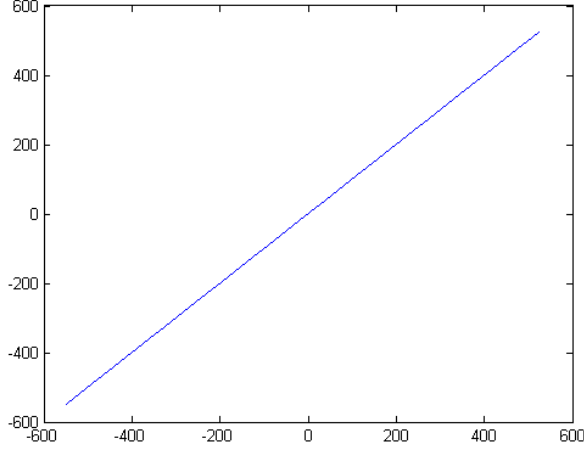
$$r^2 \sin 2\Delta < \frac{1}{k},$$

$$\Delta < \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{kr^2}.$$

Zjistíme, pro jaká  $k$  platí  $\cos\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{kr^2}\right) \geq \sin\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{kr^2}\right)$ .

$\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{kr^2} \leq \frac{\pi}{6}$ , což platí pro všechna  $k \in \mathbf{N}$  při  $r \geq 9$ .

**POZNÁMKA 3.3.3.** Vzhledem k tomu, že  $r(k \sin \alpha)^* \in \mathbf{Z}$  a  $r(k \cos \alpha)^* \in \mathbf{Z}$ , Platí v referenční bázi věty 3.2.3, 3.2.4 a 3.2.5.



Obrázek 3.5: Zobrazení referenční úsečky

### 3.4. Převedení referenční úsečky do matice

DEFINICE 3.4.1 Mějme referenční bázi  $\mathbf{A}_{k,r,\alpha}^*$ . Potom zobrazení  $\mathbf{D}_{k,r,\alpha}^{**} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$  dané předpisem

$$\left( \left( \begin{array}{cc} \frac{1}{r(k \sin \alpha)^*} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r(k \cos \alpha)^*} \end{array} \right) \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} r + 0, 5 \\ r + 0, 5 \end{pmatrix} \right)^* = \begin{bmatrix} \left( \frac{a_0}{r(k \sin \alpha)^*} + r + 0, 5 \right)^* \\ \left( \frac{b_0}{r(k \cos \alpha)^*} + r + 0, 5 \right)^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{0,D} \\ b_{0,D} \end{bmatrix},$$

budeme nazývat diskretizační zobrazení.

DEFINICE 3.4.2 Množinu bodů  $[x, y] \in \mathbf{Z}^2$  v bázi  $\{(1, 0)(0, 1)\}$ , pro které platí  $x \in (0; 2r + 1)$  a  $y \in (0; 2r + 1)$  budeme značit  $\mathbf{B}_r$ .

VĚTA 3.4.1 Pro každý bod  $[x, y] \in v_{r,\alpha,c}$  platí, že  $\mathbf{D}_{k,r,\alpha}^{**}(x, y) \in \mathbf{B}_r$ .

DŮKAZ: Vezměme bod  $[-r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| + \xi, -r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| + \xi]$ , kde  $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$  a  $\xi > 0$ , dostatečně malé.

$$\begin{aligned} & \left( \left( \begin{array}{cc} \frac{1}{r(k \sin \alpha)^*} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r(k \cos \alpha)^*} \end{array} \right) \begin{bmatrix} -r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| + \xi \\ -r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| + \xi \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} r + 0, 5 \\ r + 0, 5 \end{pmatrix} \right)^* = \\ & = \begin{bmatrix} \left( \frac{-r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| + \xi}{r(k \sin \alpha)^*} + r + 0, 5 \right)^* \\ \left( \frac{-r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| + \xi}{r(k \cos \alpha)^*} + r + 0, 5 \right)^* \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{-r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| + \xi}{r(k \sin \alpha)^*} + r + 0, 5 \right)^* > (-r + r + 0, 5)^* = (0, 5)^* = 1, \\ & \left( \frac{-r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| + \xi}{r(k \cos \alpha)^*} + r + 0, 5 \right)^* > (-r + r + 0, 5)^* = (0, 5)^* = 1, \\ & [1, 1] \in \mathbf{B}_r. \end{aligned}$$

Vezměme tentýž bod  $[-r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| + \xi, -r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| + \xi]$ , ale  $\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$  a opět  $\xi > 0$ , dostatečně malé.

$$\begin{aligned} & \left( \left( \begin{array}{cc} \frac{1}{r(k \sin \alpha)^*} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r(k \cos \alpha)^*} \end{array} \right) \left[ \begin{array}{c} -r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| + \xi \\ -r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| + \xi \end{array} \right] + \left( \begin{array}{c} r + 0, 5 \\ r + 0, 5 \end{array} \right) \right)^* = \\ & = \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{-r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| + \xi}{r(k \sin \alpha)^*} + r + 0, 5 \right)^* \\ \left( \frac{-r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| + \xi}{r(k \cos \alpha)^*} + r + 0, 5 \right)^* \end{array} \right], \\ & \left( \frac{-r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| + \xi}{r(k \sin \alpha)^*} + r + 0, 5 \right)^* > (-r + r + 0, 5)^* = (0, 5)^* = 1, \\ & \left( \frac{-r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| + \xi}{r(k \cos \alpha)^*} + r + 0, 5 \right)^* < (r + r + 0, 5)^* = (2r + 0, 5)^* = 2r + 1, \\ & [1, 2r + 1] \in \mathbf{B}_r. \end{aligned}$$

Vezměme bod  $[r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| - \xi, r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| - \xi]$ , kde  $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$  a  $\xi > 0$ , dostatečně malé.

$$\begin{aligned} & \left( \left( \begin{array}{cc} \frac{1}{r(k \sin \alpha)^*} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r(k \cos \alpha)^*} \end{array} \right) \left[ \begin{array}{c} r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| - \xi \\ r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| - \xi \end{array} \right] + \left( \begin{array}{c} r + 0, 5 \\ r + 0, 5 \end{array} \right) \right)^* = \\ & = \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| - \xi}{r(k \sin \alpha)^*} + r + 0, 5 \right)^* \\ \left( \frac{r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| - \xi}{r(k \cos \alpha)^*} + r + 0, 5 \right)^* \end{array} \right], \\ & \left( \frac{r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| - \xi}{r(k \sin \alpha)^*} + r + 0, 5 \right)^* < (r + r + 0, 5)^* = (2r + 0, 5)^* = 2r + 1, \\ & \left( \frac{r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| - \xi}{r(k \cos \alpha)^*} + r + 0, 5 \right)^* < (r + r + 0, 5)^* = (2r + 0, 5)^* = 2r + 1, \\ & [1, 1] \in \mathbf{B}_r. \end{aligned}$$

Znovu vezměme bod  $[r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| - \xi, r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| - \xi]$ , ale  $\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$  a  $\xi > 0$ , dostatečně malé.

$$\begin{aligned} & \left( \left( \begin{array}{cc} \frac{1}{r(k \sin \alpha)^*} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r(k \cos \alpha)^*} \end{array} \right) \left[ \begin{array}{c} r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| - \xi \\ r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| - \xi \end{array} \right] + \left( \begin{array}{c} r + 0, 5 \\ r + 0, 5 \end{array} \right) \right)^* = \\ & = \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| - \xi}{r(k \sin \alpha)^*} + r + 0, 5 \right)^* \\ \left( \frac{r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| - \xi}{r(k \cos \alpha)^*} + r + 0, 5 \right)^* \end{array} \right], \end{aligned}$$

$$\left( \frac{r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| - \xi}{r(k \sin \alpha)^*} + r + 0, 5 \right)^* < (r + r + 0, 5)^* = (2r + 0, 5)^* = 2r + 1,$$

$$\left( \frac{r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| - \xi}{r(k \cos \alpha)^*} + r + 0, 5 \right)^* > (-r + r + 0, 5)^* = (0, 5)^* = 1,$$

$$[2r + 1, 1] \in \mathbf{B}_r.$$

VĚTA 3.4.2 Pro každou referenční úsečku  $v_{r,\alpha,c}$  platí, že existuje bod  $[x_0, y_0] \in v_{r,\alpha,c}$  takový, že  $\mathbf{D}_{k,r,\alpha}^{**}(x_0, y_0) = [r + 1, r + 1]$ .

DŮKAZ: Každá referenční úsečka  $v_{r,\alpha,c}$  prochází v bázi  $\mathbf{A}_{k,r,\alpha}^*$  bodem  $[0 - \xi, 0 - \xi]$  nebo  $[0 + \xi, 0 + \xi]$ , kde  $\frac{\xi}{r(k \sin \alpha)^*}, \frac{\xi}{r(k \cos \alpha)^*} \in (0, \frac{1}{2})$ .

$$\left( \left( \begin{array}{cc} \frac{1}{r(k \sin \alpha)^*} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r(k \cos \alpha)^*} \end{array} \right) \begin{bmatrix} 0 \pm \xi \\ 0 \pm \xi \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} r + 0, 5 \\ r + 0, 5 \end{pmatrix} \right)^* = \begin{bmatrix} r + 1 \\ r + 1 \end{bmatrix}.$$

DEFINICE 3.4.3 Mějme referenční bázi  $\mathbf{A}_{k,r,\alpha}^*$  a posloupnost bodů  $\{[1 - c, 1 - c], [2 - c, 2 - c], \dots, [r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| - c, r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| - c]\}$ . Posloupnosti bodů  $\{\mathbf{D}_{k,r,\alpha}^{**}(1 - c, 1 - c), \dots, \mathbf{D}_{k,r,\alpha}^{**}(r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| - c, r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*| - c)\}$  budeme říkat určující posloupnost referenční úsečky  $v_{r,\alpha,c}$ .

DEFINICE 3.4.4 Mějme určující posloupnost referenční úsečky  $v_{r,\alpha,c}$ . Matici

$$\mathbf{B}_{(2r+1) \times (2r+1)} = (b_{ij}) = \left( \frac{q(i, j)}{r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*|} \right),$$

kde  $q(i, j)$  je funkce, která udává počet prvků určující posloupnosti takových, že  $\mathbf{D}_{k,r,\alpha}^{**}(x, y) = [i, j]$ , budeme říkat základní maska referenční úsečky  $v_{r,\alpha,c}$ .

VĚTA 3.4.3 Součet prvků základní masky referenční úsečky  $v_{r,\alpha,c}$   $\mathbf{B}_{(2r+1) \times (2r+1)}$  je roven jedné.

DŮKAZ: Součet všech  $q(i, j)$  je roven počtu prvků určující posloupnosti.

$$\sum_{i=1}^{2r+1} \sum_{j=1}^{2r+1} q(i, j) = r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*|, \quad \sum_{n=1}^{r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*|} \left( \frac{1}{r^2 |(k \cos \alpha \sin \alpha)^*|} \right) = 1.$$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0,13953	0,1693	0	0	0
0	0	0	0	0,088372	0,22791	0,088372	0	0	0	0
0	0	0	0,14698	0,13953	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Obrázek 3.6: Základní maska referenční úsečky  $v_{5, \frac{2\pi}{3}, 550}$  pro  $k = 100$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0,11545	0,081818	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0,15	0,23182	0,013636	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0,21818	0,17727	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,011818	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Obrázek 3.7: Základní maska referenční úsečky  $v_{5, \frac{\pi}{3}, 0}$  pro  $k = 100$

# Kapitola 4

## Prohledávání okolí pixelu

„Rozkaz zněl jasně: zlikvidovat muže s koženou brašnou . . .“

legendární esenbák

### 4.1. Množiny masek

DEFINICE 4.1.1 Množinu takových  $x_i$ , která splňují podmínku  $x_i Ra$ , pro  $i = 1 \dots n$ , resp. množinu všech  $x_i$  pro všechna definovaná  $i$ , budeme značit  $\{x_i, x_i Ra\}_i^n$ , resp.  $\{x_i\}_i$ .

DEFINICE 4.1.2 Mějme množinu referenčních úseček  $\{v_{r,\alpha,c}\}_{r,\alpha,c}$ , kde  $r \in \mathbf{N}$ ,  $r \geq 9$ ,  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$  a  $c \in \langle 0; r^2 | (k \cos \alpha \sin \alpha)^* | \rangle \cap \mathbf{Z}$  a množinu parametrů  $\{k\}$ ,  $k \in \mathbf{N}$ . Množině matic  $\{\mathbf{B}_{(2r+1) \times (2r+1)} = (b_{i,j})\}_{r,\alpha,c,k}$  budeme říkat množina základních masek a jednotlivé prvky této množiny budeme značit  $\mathbf{B}(r, \alpha, c, k)$ .

DEFINICE 4.1.3 Mějme množinu základních masek  $\{\mathbf{B}_{(2r+1) \times (2r+1)} = (b_{i,j})\}_{r,\alpha,c,k}$  a 2D gaussovskou konvoluční masku  $\mathbf{G}_{(2r+1) \times (2r+1)} = (g_{i,j})$ . Množině matic  $\{\mathbf{M}_{(2r+1) \times (2r+1)} = (\frac{g_{ij} b_{ij}}{\sum \sum g_{ij} b_{ij}})\}_{r,\alpha,c,k}$  budeme říkat množina 1D gaussovských masek a jednotlivé prvky této množiny budeme značit  $\mathbf{M}(r, \alpha, c, k)$ .

POZNÁMKA 4.1.1. Součet prvků jednotlivých matic  $\mathbf{B}(r, \alpha, c, k)$  i  $\mathbf{M}(r, \alpha, c, k)$  je roven jedné.

DEFINICE 4.1.4 Mějme matici  $\mathbf{B}(r, \alpha, c, k) = (b_{i,j})$ . Matici  $\mathbf{\Psi}(r, \alpha, c, k) = (\psi_{i,j})$ , kde  $\psi_{i,j} = 1$  pro  $b_{i,j} <> 0$  a  $\psi_{i,j} = 0$  jinak, budeme říkat jedničková matice.

DEFINICE 4.1.5 Matici  $\mathbf{0}_{(2r+1) \times (2r+1)} = (0)$  budeme říkat nulová matice.

## 4.2. Hledání úsečky v obraze

### Měkké minimum

DEFINICE 4.2.1 *Obraz  $\mathbf{O}$  je matice  $\mathbf{O} = (o_{i,j})$ , jejíž prvky se nazývají pixely  $(o_i, o_j)$ , jejichž hodnota vyjadřuje jas jednotlivých obrazových bodů.*

VĚTA 4.2.1 *Mějme obraz  $\mathbf{O}$  s hodnotou jasu v každém pixelu 0. Do tohoto obrazu zobrazme úsečku délky  $r$  pixelů, která prochází středem pixelu  $(o_{i_0}, o_{j_0})$  ležícího alespoň  $r + 1$  pixelů od kraje obrazu  $\mathbf{O}$  pod úhlem  $\alpha$ . Požadujeme, aby tato úsečka předala obrazu  $\mathbf{O}$  celkový součet hodnot jasu  $a$ , který bude rozložen v jednotlivých pixelech v poměru odpovídajícímu délce části úsečky, která jimi prochází. Zvolme střed kartézské soustavy ve středu pixelu  $(o_{i_0}, o_{j_0})$ , nalezneme hodnotu  $c$  při zvoleném parametru  $k$  a sestrojme matici  $\mathbf{B}(r, \alpha, c, k) = (b_{m,n})$ . Potom*

$$\frac{o_{i_0, j_0}}{b_{r+1, r+1}} \doteq a,$$

kde rozdíl  $\frac{o_{i_0, j_0}}{b_{r+1, r+1}} - a$  je odchylka vzniklá při zaokrouhlování hodnot  $b_{m,n}$  operátorem  $()^*$ .

DŮKAZ: Z definice základní masky referenční úsečky víme, že bod  $[0, 0]$  referenční úsečky je zobrazen do středu pomyslného pixelu  $(r + 1, r + 1)$ . Hodnota  $b_{r+1, r+1} = \frac{1}{q_Q}$ , kde  $q_Q \in \mathbf{Q}^+$ , vyjadřuje část úsečky procházející příslušným pixelem zaokrouhlenou dle výběru parametru  $k$ . Hodnota jasu pixelu  $(o_{i_0}, o_{j_0})$  je  $o_{i_0, j_0} = \frac{a}{q_R}$ , kde  $q_R \in \mathbf{R}^+$  a  $q_Q \doteq q_R$ .

POZNÁMKA 4.2.1. Pokud chápeme parametr  $c$  jako funkci parametru  $k$  takovou, že změna parametru  $k$  vede ke změně parametru  $c$  ve smyslu vhodnosti výběru tohoto parametru, můžeme říci, že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{o_{i_0, j_0}}{b_{r+1, r+1}} - a = 0.$$

DŮKAZ: Víme, že zobrazení  $\mathbf{A}_{k, r, \alpha}$  je bijektivní (věta 3.2.1), posunutí o konstantu z  $\mathbf{R}$  do  $\mathbf{R}$  je také bijektivní a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r^2 (k \cos \alpha \sin \alpha)^* - r^2 k \cos \alpha \sin \alpha = 0.$$

DŮSLEDEK 4.2.1. Mějme předpoklady z věty 4.2.1. a nulovou matici  $\mathbf{0}_{(2r+1) \times (2r+1)}$ , pak v obraze  $\mathbf{O}$  existuje podmnožina jejích prvků takových, že tvoří matici  $\mathbf{\Theta}_{(2r+1) \times (2r+1)} = (o_{i_0+p, j_0+q})$ ,  $p = -r, \dots, +r$ ,  $q = -r, \dots, +r$ , a platí

$$\mathbf{\Theta}_{(2r+1) \times (2r+1)} - \frac{o_{i_0, j_0}}{b_{r+1, r+1}} \mathbf{B}(r, \alpha, c, k) \doteq \mathbf{0}_{(2r+1) \times (2r+1)}.$$

VĚTA 4.2.2 Mějme množinu  $\Omega_n$  všech matic typu  $n \times n$  pro pevně zvolené  $n$ . Mějme dvě matice  $\mathbf{X}_{n \times n} = (x_{ij})$  a  $\mathbf{Y}_{n \times n} = (y_{ij})$ ,  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \Omega_n$ ,  $x_{ij}, y_{ij} \in \mathbf{R}$ . Mějme zobrazení  $\omega_n : \Omega_n^2 \rightarrow \langle 0; \infty \rangle$  takové, že  $\omega_n(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_{ij} - y_{ij}|$ . Potom  $(\Omega_n, \omega_n)$  je metrický prostor.

DŮKAZ:

axiom totožnosti:

Pro každé  $a, b \in \mathbf{R}$  platí  $|a - b| = \max \{a - b; b - a\} = 0 \Leftrightarrow a = b$

$\Rightarrow \omega_n(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_{ij} - y_{ij}| = 0 \Leftrightarrow \forall i, j = 1 \dots n : x_{ij} = y_{ij} \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{Y}$ .

axiom symetrie:

Pro každé  $a, b \in \mathbf{R}$  platí  $|a - b| = \max \{a - b; b - a\} = \max \{b - a; a - b\} = |b - a|$

$\Rightarrow \omega_n(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_{ij} - y_{ij}| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |y_{ij} - x_{ij}| = \omega_n(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ .

trojúhelníková nerovnost:

$\omega_n(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \omega_n(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_{ij} - y_{ij}| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |y_{ij} - z_{ij}| =$   
 $= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (|x_{ij} - y_{ij}| + |y_{ij} - z_{ij}|) \geq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_{ij} - z_{ij}| = \omega_n(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$ .

DŮSLEDEK 4.2.2. Za předpokladu vlastnosti parametru  $c$  z poznámky 4.2.1. a při předpokladech z důsledku 4.2.1., kdy pro zjednodušení uijeme označení  $\Theta_{(2r+1) \times (2r+1)} = (\theta_{m,n})$ , platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{2r+1} \sum_{n=1}^{2r+1} \left| \theta_{m,n} - \frac{o_{i_0, j_0}}{b_{r+1, r+1}} b_{m,n} \right| = 0.$$

POZNÁMKA 4.2.2. Přestože  $\theta_{m,n} = \frac{\theta_{r+1, r+1}}{b_{r+1, r+1}} b_{m,n}$  pro  $k$  blízcí se k nekonečnu a vhodné zvolenému  $c$ , jednotlivé hodnoty  $b_{m,n}$ , resp.  $\theta_{m,n}$ , se vzájemně liší.

DEFINICE 4.2.2 Veličinu

$$s^{r, \alpha, c, k} = \sum_{m=1}^{2r+1} \sum_{n=1}^{2r+1} \left| \theta_{m,n} - \frac{o_{i_0, j_0}}{b_{r+1, r+1}} b_{m,n} \right| b_{m,n}$$

budeme nazývat taxikářský rozptyl ve váženém tvaru hodnot matice  $\Theta_{(2r+1) \times (2r+1)}$  a základní masky  $\mathbf{B}(r, \alpha, c, k)$ .

POZNÁMKA 4.2.3. Přívlástek taxikářský jsem zvolil s ohledem na podobnost užití metriky se součtovou metrikou, které se říká taxikářská metrika.

POZNÁMKA 4.2.4. Užitím vah  $b_{m,n}$  se vynulují případné nežádoucí hodnoty jasu v pixelech, kterými úsečka neprochází.

DEFINICE 4.2.3 Mějme množinu základních masek  $\{\mathbf{B}(r, \alpha, c, k) = (b_{m,n})\}_{r, \alpha, c, k}$ , prvek  $o_{i_0, j_0}$  matice obrazu  $\mathbf{O}$  a množinu matic  $\{\Theta_{(2r+1) \times (2r+1)} = (\theta_{m,n}), \theta_{r+1, r+1} = o_{i_0, j_0}\}_r$ .

Potom matici  $\mathbf{B}(r_0, \alpha_0, c_0, k_0) = (b_{m,n})$ , pro kterou platí

$$s^{r_0, \alpha_0, c_0, k_0} = \min \left\{ s^{r, \alpha, c, k} = \sum_{m=1}^{2r+1} \sum_{n=1}^{2r+1} \left| \theta_{m,n} - \frac{o_{i_0, j_0}}{b_{r+1, r+1}} b_{m,n} \right| b_{m,n} \right\}_{r, \alpha, c, k}$$

pro každé  $r, \alpha, c, k$  odpovídající definici, budeme říkat měkké minimum množiny základních masek v bodě  $o_{i_0, j_0}$  a budeme jí značit  $\mathbf{B}_M$ .

## Tvrdé minimum

VĚTA 4.2.3 Zachovejme předpoklady věty 4.2.1. Mějme navíc část matice obrazu

$\Theta_{(2r+1) \times (2r+1)} = (\theta_{m,n})$ , pro kterou platí  $\theta_{r+1, r+1} = o_{i_0, j_0}$ . Pak pro každé  $b_{m,n} \neq 0$  platí

$$\frac{\theta_{m,n}}{b_{m,n}} \doteq a,$$

kde rozdíl  $\frac{\theta_{m,n}}{b_{m,n}} - a$  je odchylka vzniklá při zaokrouhlování hodnot  $b_{m,n}$  operátorem  $()^*$ .

DŮKAZ: Postupujeme obdobně jako v důkazu věty 4.2.1.

DŮSLEDEK 4.2.3. Při splnění předpokladů věty 4.2.3 platí pro každé  $m_1, n_1$  a  $m_2, n_2$  takové, že  $b_{m_1, n_1} > 0$  a  $b_{m_2, n_2} > 0$ , vztah  $\frac{\theta_{m_1, n_1}}{b_{m_1, n_1}} - \frac{\theta_{m_2, n_2}}{b_{m_2, n_2}} \doteq 0$ .

DEFINICE 4.2.4 Mějme matici  $\mathbf{B}(r, \alpha, c, k) = (b_{m,n})$  a matici  $\Theta_{(2r+1) \times (2r+1)} = (\theta_{m,n})$ , která je částí matice obrazu  $\mathbf{O}$ . Vytvořme libovolně seřazenou množinu podílů hodnot obou matic na identických pozicích s podmínkou nenulovosti jmenovatele a označme je pro zjednodušení  $\phi_h$ , tedy

$$\left\{ \phi_h = \frac{\theta_{m,n}}{b_{m,n}}, b_{m,n} \neq 0 \right\}_{h=1}^z,$$

kde  $z$  je počet nenulových prvků matice  $\mathbf{B}(r, \alpha, c, k)$ . Matici  $\mathbf{B}_{z \times z}^\Theta(r, \alpha, c, k) = (b_{e,f}^\Theta) = (\phi_e - \phi_f)$ , kde  $e = 1 \dots z$  a  $f = 1 \dots z$ , budeme říkat rozdílová matice základní masky  $\mathbf{B}(r, \alpha, c, k)$  a matice  $\Theta_{(2r+1) \times (2r+1)}$ .

POZNÁMKA 4.2.5. Je zřejmé, že platí  $\omega_z(\mathbf{B}_{z \times z}^\Theta(r, \alpha, c, k), \mathbf{0}_{z \times z}) \doteq 0$ .

DEFINICE 4.2.5 Veličinu

$$s^{r, \alpha, c, k} = \frac{1}{z^2 - z} \sum_{e=1}^z \sum_{f=1}^z |b_{e,f}^\Theta - 0|,$$

kde hodnota  $z^2 - z$  vyjadřuje počet prvků matice  $\mathbf{B}_{z \times z}^\Theta(r, \alpha, c, k)$  bez prvků na hlavní diagonále, budeme nazývat taxikářský rozptyl v základním tvaru hodnot matice  $\mathbf{B}_{z \times z}^\Theta(r, \alpha, c, k)$  a nulové matice  $\mathbf{0}_{z \times z}$ .

POZNÁMKA 4.2.6. Prvky matice  $\mathbf{B}_{z \times z}^\Theta(r, \alpha, c, k)$  na hlavní diagonále jsou vždy rovny nule.

DEFINICE 4.2.6 Mějme množinu základních masek  $\{\mathbf{B}(r, \alpha, c, k) = (b_{m,n})\}_{r,\alpha,c,k}$ , prvek  $o_{i_0,j_0}$  matice obrazu  $\mathbf{O}$ , množinu matic  $\{\Theta_{(2r+1) \times (2r+1)} = (\theta_{m,n}), \theta_{r+1,r+1} = o_{i_0,j_0}\}_r$  a množinu nulových matic  $\{\mathbf{0}_{z \times z}\}_z$ . Vytvořme množinu rozdílových matic  $\{\mathbf{B}_{z \times z}^\Theta(r, \alpha, c, k) = (b_{e,f}^\Theta)\}_{r,\alpha,c,k}$ .

Matici  $\mathbf{B}(r_0, \alpha_0, c_0, k_0)$ , pro jejíž rozdílovou maticí platí

$$s^{r_0, \alpha_0, c_0, k_0} = \min \left\{ s^{r, \alpha, c, k} = \frac{1}{z^2 - z} \sum_{e=1}^z \sum_{f=1}^z |b_{e,f}^\Theta - 0| \right\}$$

pro každé  $r, \alpha, c, k$  odpovídající definici, budeme říkat tvrdé minimum množiny základních masek v bodě  $o_{i_0,j_0}$  a budeme jí značit  $\mathbf{B}_T$ .

POZNÁMKA 4.2.7. Hlavní rozdíl mezi měkkým a tvrdým minimem spočívá především v tom, že u měkkého minima je podobnost matic řešena s velkým důrazem na hodnotu jasů pixelu  $o_{i_0,j_0}$ .

### 4.3. 1D filtr s rotujícím jádrem

DEFINICE 4.3.1 Mějme prvek  $o_{i_0,j_0}$  matice obrazu  $\mathbf{O}$  a tvrdé, resp. měkké, minimum množiny základních masek.

Maticí  $\mathbf{B}_T$ , resp.  $\mathbf{B}_M$ , nahradíme matici  $\mathbf{Q}$  v definici 2.1.3, čímž získáme předpis

$$v(i_0, j_0) = o_{i_0,j_0} * B(i_0, j_0) = \sum_{p=1}^{2r+1} \sum_{q=1}^{2r+1} o_{(i_0-r-1+p, j_0-r-1+q)} b_{p,q}.$$

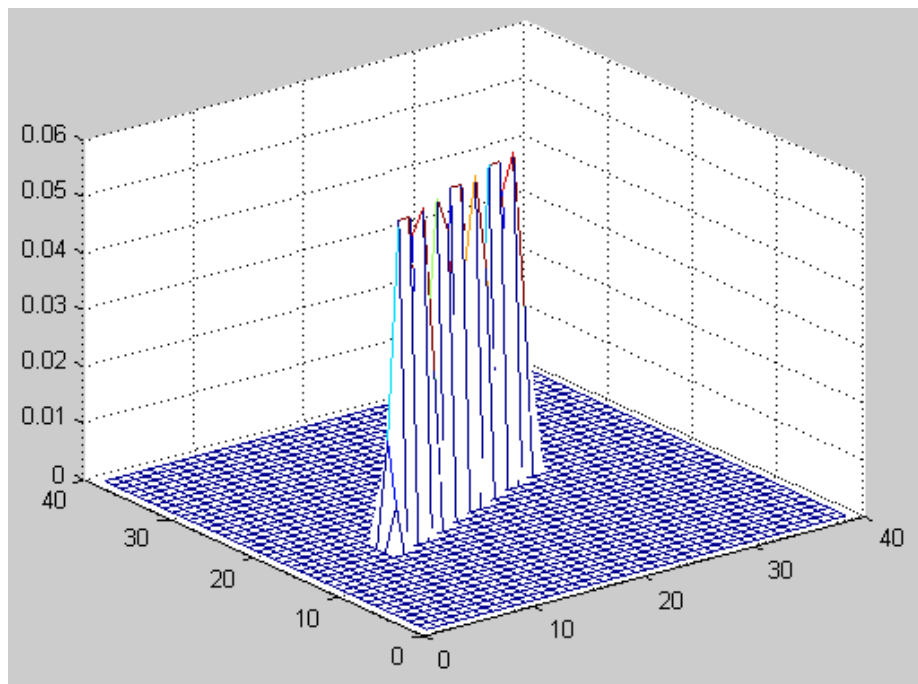
Filtr používající tuto konvoluci budeme nazývat 1D průměrový filtr s rotujícím jádrem.

DEFINICE 4.3.2 Mějme prvek  $o_{i_0,j_0}$  matice obrazu  $\mathbf{O}$  a tvrdé, resp. měkké, minimum množiny základních masek.

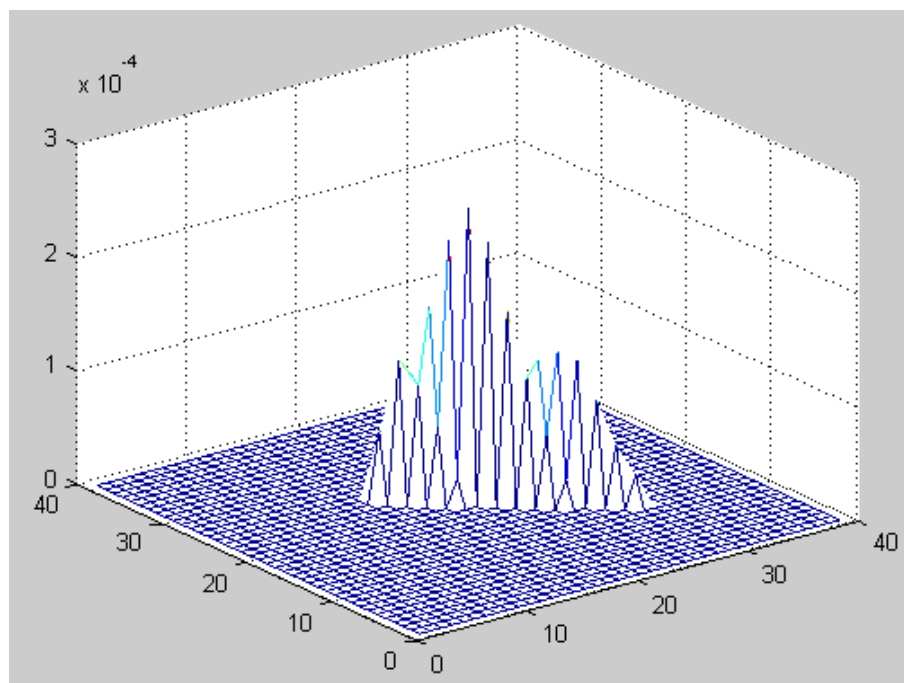
1D gaussovskou maskou  $\mathbf{M}(r, \alpha, c, k)$ , jejíž parametry  $r, \alpha, c, k$  odpovídají parametrům  $\mathbf{B}_T$ , resp.  $\mathbf{B}_M$ , nahradíme matici  $\mathbf{Q}$  v definici 2.1.3, čímž získáme předpis

$$v(i_0, j_0) = o_{i_0,j_0} * M(i_0, j_0) = \sum_{p=1}^{2r+1} \sum_{q=1}^{2r+1} o_{(i_0-r-1+p, j_0-r-1+q)} m_{p,q}.$$

Filtr používající tuto konvoluci budeme nazývat 1D gaussovský filtr s rotujícím jádrem.



Obrázek 4.1: Frekvenční charakteristika 1D průměrového filtru při  $r = 19, \alpha = \frac{3\pi}{8}, c = 20000, k = 500$ .



Obrázek 4.2: Frekvenční charakteristika 1D gaussovského filtru při  $r = 19, \alpha = 2,27, c = 30000, k = 500$ .

# Kapitola 5

## Implementace na počítači

„Dosti tlachů!“

*Pontifex, král Palestry*

### 5.1. Popis zdrojového kódu

Filtrování obrazu je realizováno funkcí `filtr`, která dále volá další čtyři funkce: `gauss`, `ref_us`, `vypocet_mm` a `vypocet_tm`. Při tvorbě této funkce jsem si kladl za cíl pouze funkčnost odpovídající výše popsané teorii. Při jejím používání se předpokládá detailní znalost teorie i funkčnosti, funkce sama o sobě nekontroluje vstupy.

#### Funkce `filtr`

Funkce `filtr` má 5 vstupů, `r`, `q_alfa`, `q_c`, `q_k`, `O`, a žádný výstup, pouze ukládá filtrovaný obraz do souboru `VYSTUP.mat`. Vstup `r` určuje velikost konvoluční masky, jeho hodnota musí být větší než 9 (viz. Důsledek 2.2.1). Vstup `q_alfa` určuje množství úhlových kroků. Z důvodu dalších operací musí být jeho hodnota dělitelná čtyřmi. Vstup `q_c` je hodnota o 1 menší než počet posuvných kroků v rámci jednoho úhlového kroku. Vstup `q_k` je odmocnina z počtu subpixelů v jednom pixelu, jejíž velikost ovlivňuje velikost zaokrouhlovací chyby ve funkci `ref_us`. Vstup `O` je matice obrazu. U tohoto vstupu se předpokládá, že má 3 barevné složky (testováno na formátu `.png` s bitovou hloubkou 24).

Nejprve se vytvoří matice `gaus` pomocí funkce `gauss`, která je 2D gaussovskou konvoluční maskou podle definice 2.2.6, následně se alokuje paměť pro ostatní matice, se kterými funkce `filtr` pracuje. Ve dvou krocích se vytvoří matice `B` základních masek odpovídajících definici 4.1.2. V prvním kroku se vytvoří základní masky pro úhly v rozmezí 0 až  $\frac{\pi}{4}$  pomocí funkce `ref_us`, ve druhém kroku se pak tyto masky odrotují a nakopírují do rozmezí  $\frac{\pi}{4}$  až  $\pi$ . Následně se vytvoří matice `M` 1D gaussovských masek odpovídajících

```

function filtr(r,q_alfa,q_c,q_k,o)
gaus=gauss(r);
B=zeros(2*r+1,2*r+1,q_alfa*(q_c+1));
M=zeros(2*r+1,2*r+1,q_alfa*(q_c+1));
PSI=zeros(2*r+1,2*r+1,q_alfa*(q_c+1));
B_brr=zeros(2*r+1,2*r+1,q_alfa*(q_c+1));
B_nnz=zeros(1,1,q_alfa*(q_c+1));
counter=0;
for i=1:q_alfa/4
    alfa=(i*pi/q_alfa)-(pi/(2*q_alfa));
    c=0;
    for j=1:q_c+1
        counter=counter+1;
        B(:,:,counter)=ref_us(r,c,alfa,q_k);
        c=c+abs((r^2)*ceil(q_k*sin(alfa)*cos(alfa)))/q_c;
    end
end
for k=1:counter
    B(:,:,counter+k)=B(:,:,counter-k+1).';
    B(:,:,2*counter+k)=rot90(B(:,:,k));
    B(:,:,3*counter+k)=flipud(B(:,:,counter-k+1));
end
counter=0;
for i=1:q_alfa
    for j=1:q_c+1
        counter=counter+1;
        M(:,:,counter)=(B(:,:,counter).*gaus)/sum(sum(B(:,:,counter).*gaus));
        PSI(:,:,counter)=ceil(B(:,:,counter));
        B_brr(:,:,counter)=B(:,:,counter)/B(r+1,r+1,counter);
        B_nnz(1,1,counter)=nnz(B(:,:,counter));
    end
end
end
[SMER_Bm_1,NOVA_Bm_1,NOVA_Mm_1]=vypocet_mm(0,1,B,M,PSI,r,B_brr,B_nnz);
[SMER_Bm_2,NOVA_Bm_2,NOVA_Mm_2]=vypocet_mm(0,2,B,M,PSI,r,B_brr,B_nnz);
[SMER_Bm_3,NOVA_Bm_3,NOVA_Mm_3]=vypocet_mm(0,3,B,M,PSI,r,B_brr,B_nnz);
[SMER_Bt_1,NOVA_Bt_1,NOVA_Mt_1]=vypocet_tm(0,1,B,M,PSI,r,B_brr,B_nnz);
[SMER_Bt_2,NOVA_Bt_2,NOVA_Mt_2]=vypocet_tm(0,2,B,M,PSI,r,B_brr,B_nnz);
[SMER_Bt_3,NOVA_Bt_3,NOVA_Mt_3]=vypocet_tm(0,3,B,M,PSI,r,B_brr,B_nnz);
O_Bm=uint8(cat(3,NOVA_Bm_1,NOVA_Bm_2,NOVA_Bm_3));
O_Mm=uint8(cat(3,NOVA_Mm_1,NOVA_Mm_2,NOVA_Mm_3));
O_Bt=uint8(cat(3,NOVA_Bt_1,NOVA_Bt_2,NOVA_Bt_3));
O_Mt=uint8(cat(3,NOVA_Mt_1,NOVA_Mt_2,NOVA_Mt_3));
save VYSTUP O_Bm O_Mm O_Bt O_Mt

```

Obrázek 5.1: Zdrojový kód funkce filtr

definici 4.1.3, matice PSI matic z definice 4.1.4, matice poměrů prvků jednotlivých základních masek a prostředních hodnot těchto masek B\_brr a matice B\_nnz určující počet nenulových hodnot v každé základní masce.

Po té, co jsou všechny potřebné matice vytvořeny, se třikrát volá funkce vypocet\_mm a třikrát vypocet\_tm, vždy pro každou barvu obrazu O. Jejich výstupem jsou filtrované obrazy vzniklé na základě algoritmů popsaných v sekcích 4.2. a 4.3.. Filtrované obrazy jednotlivých barev se spojí do obrazů O\_Bm, O\_Mm, O\_Bt a O\_Mt, kdy B za podtržítkem znamená filtrováno 1D průměrovým filtrem (Definice 4.3.1), M znamená filtrováno 1D gaussovským filtrem (Definice 4.3.2), m znamená, že výběr konvoluční masky byl realizován na základě měkkého minima (Definice 4.2.3), a t znamená, že výběr konvoluční masky byl realizován na základě tvrdého minima (Definice 4.2.6). Všechny 4 filtrované

obrazy jsou následně uloženy.

## Funkce gauss

Funkce gauss generuje 2D gaussovskou masku a má jeden vstup a jeden výstup. Vstupem je hodnota  $r$ , ze které je vypočtena velikost výstupní matice spicka, která odpovídá definici 2.2.6. Algoritmus využívá závěru věty 2.2.5 a důsledku 2.2.1.

```
function spicka=gauss(r)
k=(2*r)+1;
if mod(ceil((k/3)^2),2)==0
    n=ceil(((k/3)^2)-2);
else n=ceil(((k/3)^2)-1);
end
G=zeros(1,n+1);
for i=0:n
    G(i+1)=factorial(n)/((2^n)*(factorial(i)*factorial(n-i)));
end
gaus=G'*G;
spicka=gaus(((n/2)-r+1):((n/2)-r+k),((n/2)-r+1):((n/2)-r+k));
```

Obrázek 5.2: Zdrojový kód funkce gauss

## Funkce ref\_us

Funkce ref\_us vytváří jednotlivé základní konvoluční masky, má 4 vstupy a jeden výstup. Vstup  $r$  určuje velikost základní masky, vstup  $c$  udává posunutí, vstup  $\alpha$  úhel a vstup  $k$  množství subpixelů v jednom pixelu. Výstupem je matice  $A$ , základní konvoluční maska s parametry  $r$ ,  $\alpha$ ,  $c$ ,  $k$ .

Vektory  $x$  a  $y$  lze chápat jako  $x$ -ové a  $y$ -ové souřadnice subpixelů, o nichž hovoří věta 3.3.1. Algoritmus pak prochází všechny tyto subpixely, a  $k$  hodnotám pixelů, do kterých se zobrazí diskretizačním zobrazením z definice 3.4.1, přičte odpovídající část referenční úsečky z definice 3.3.1.

```
function A=ref_us(r,c,alfa,k)
A=zeros(2*r+1,2*r+1);
x=zeros(r^(2)*abs(ceil(k*cos(alfa)*sin(alfa)))+1,1);
y=zeros(r^(2)*abs(ceil(k*cos(alfa)*sin(alfa)))+1,1);
for i=0: r^(2)*abs(ceil(k*cos(alfa)*sin(alfa)))
    x(i+1)=i-c;
    y(i+1)=i-c;
end
for j=0: r^(2)*abs(ceil(k*cos(alfa)*sin(alfa)))
    a=ceil([(1/(r*ceil(k*sin(alfa)))) 0;0 (1/(r*ceil(k*cos(alfa))))]
        * [x(j+1);y(j+1)]+[(r+0.5);(r+0.5)]);
    A(a(1),a(2))=A(a(1),a(2))+1/((r^(2))*abs(ceil(k*cos(alfa)*sin(alfa))));
end
```

Obrázek 5.3: Zdrojový kód funkce ref\_us

## Funkce vypocet\_mm

Funkce `vypocet_mm` realizuje 1D diskretní konvoluci ve všech pixelech obrazu dostatečně vzdálených od okraje, kdy pro výběr konvoluční matice je použito měkké minimum (Definice 4.2.3), má 8 vstupů a 3 výstupy. Všechny vstupy kromě vstupu `z` byly popsány ve funkci `filtr`. Vstup `z` udává, která barva obrazu `O` se bude filtrovat. Výstup `SMER_Bm` je pořadovým číslem konvoluční matice, která byla pro konvoluci v příslušném bodě vybrána. Hodnota 0 vyjadřuje, že v tomto bodě nebyla konvoluce aplikována. Výstup `NOVA_Bm` je filtrovaná matice příslušné barvy obrazu 1D průměrovým filtrem s rotujícím jádrem a výstup `NOVA_Mm` je filtrovaná matice příslušné barvy obrazu 1D gaussovským filtrem s rotujícím jádrem.

Algoritmus prochází jednotlivé pixely obrazu a pro každý vytvoří matici menšenců `CC_CEL` velikostí odpovídající matici menšitelů `B_brr_oij` z důsledku 4.2.1. Následně vytvoří matici `S` taxikářských rozptylů ve váženém tvaru dle definice 4.2.2 a nalezne měkké minimum (Definice 4.2.3). Pokud je minim více než jedno, vybere v pořadí první. Toto minimum použije při konvoluci dle definice 4.3.1, resp. 4.3.2.

```
function [SMER_Bm,NOVA_Bm,NOVA_Mm]=vypocet(O,z,B,M,PSI,r,B_brr,B_nnz)
C=double(O(:,:,z));
[a,b]=size(C);
[c,d,e]=size(B);
CC_CEL=zeros(c,d,e);
NOVA_Bm=C;
NOVA_Mm=C;
SMER_Bm=zeros(a,b);
for i=r+1:a-r
    for j=r+1:b-r
        CC=C(i-r:i+r,j-r:j+r);
        B_brr_oij=C(i,j)*B_brr;
        for k=1:e
            CC_CEL(:,:,k)=CC;
        end
        S=sum(sum((abs(CC_CEL-B_brr_oij)).*B));
        MIN_m=find(S==min(min(S)));
        NOVA_Bm(i,j)=sum(sum(B(:,:,MIN_m(1)).*CC));
        NOVA_Mm(i,j)=sum(sum(M(:,:,MIN_m(1)).*CC));
        SMER_Bm(i,j)=MIN_m(1);
    end
end
end
```

Obrázek 5.4: Zdrojový kód funkce `vypocet_mm`

## Funkce vypocet\_tm

Funkce `vypocet_tm` realizuje 1D diskretní konvoluci ve všech pixelech obrazu dostatečně vzdálených od okraje, kdy pro výběr konvoluční matice je použito měkké minimum (Definice 4.2.6), má 8 vstupů a 3 výstupy. Vstupy jsou identické jako u funkce `vypocet_mm`,

výstupy odpovídají výstupům funkce `vypocet_mm` s tím rozdílem, že poslední písmeno v jejich názvu značí, že výběr byl realizován tvrdým minimem.

Algoritmus prochází jednotlivé pixely obrazu, vytváří matici `B_zz` rozdílových matic podle definice 4.2.4, matici `S` taxikářských rozptylů v základním tvaru podle definice 4.2.5 a nalezne tvrdé minimum (Definice 4.2.6). Vybere v pořadí první minimum a použije jej při konvoluci dle definice 4.3.1, resp. 4.3.2.

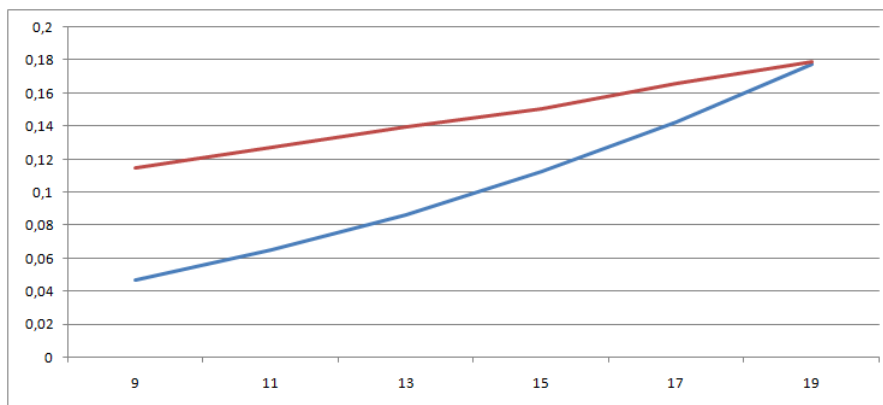
```
function [SMER_Bt,NOVA_Bt,NOVA_Mt]=vypocet_tm(O,z,B,M,PSI,r,B_brr,B_nnz)
C=double(O(:,:,z));
[a,b]=size(C);
[c,d,e]=size(B);
NOVA_Bt=C;
NOVA_Mt=C;
SMER_Bt=zeros(a,b);
OMEGA_Z=zeros(1,e);
for i=r+1:a-r
    for j=r+1:b-r
        CC=C(i-r:i+r,j-r:j+r);
        for q=1:e
            B_pom=B(:,:,q);
            NE_NUL=find(B_pom);
            FI=CC(NE_NUL)./B_pom(NE_NUL);
            B_zz=FI*(ones(size(NE_NUL)))'-ones(size(NE_NUL))*FI';
            S(q)=sum(sum(abs(B_zz)))/(((B_nnz(1,1,q))^2)-B_nnz(1,1,q));
        end
        MIN_t=find(S==min(min(S)));
        NOVA_Bt(i,j)=sum(sum(B(:,:,MIN_t(1)).*CC));
        NOVA_Mt(i,j)=sum(sum(M(:,:,MIN_t(1)).*CC));
        SMER_Bt(i,j)=MIN_t(1);
    end
end
end
```

Obrázek 5.5: Zdrojový kód funkce `vypocet_tm`

## 5.2. Rozprava o užitych parametrech vzhledem k časové náročnosti výpočtu

Parametr `q_k` funkce `filtr`, který se ve funkci `ref_us` jmenuje `k`, ovlivňuje rychlost výpočtu pouze při tvorbě matice `B`. Empiricky lze snadno odvodit, že užitím `n`-krát většího `k` se zvýší časová náročnost tvorby matice `B` přibližně `n`-krát. Důležitým faktorem tvorby matice `B` je skutečnost, že čím větší je úhel `alfa`, tím vyšší parametr `k` je potřeba pro získání hodnot s podobnou zaokrouhlovací chybou. Pro představu, pro úhel  $0,01$  je pro přesnost v řádu desetitisícin potřeba `k` v řádu desítek, pro úhel  $\pi - 0,01$  pak v řádu desítek milionů. Z tohoto důvodu je matice `B` rozdělena na 4 symetrické části. Nejvyšší úhel, kterého lze při výpočtu dosáhnout, je menší než  $\frac{\pi}{8}$ . Přesnost na 4 desetinná místa u úhlů blízkých  $\frac{\pi}{8}$  lze získat při hodnotách `k` v řádu desítek tisíc, na tři desetinná místa pak pro `k` kolem tisíce.

Ostatní parametry ovlivňují rychlost zpracování jednotlivých pixelů. O parametru  $q\_alfa$  a  $q\_c$  lze říci, že užití jeho  $n$ -násobku zvýší čas na zpracování jednoho pixelu  $n$ -krát. Vliv parametru  $r$  je závislý na užitém minimu, jak vidíme na obrázku 5.6, kde byly použity parametry  $q\_alfa=164$ ,  $q\_c=60$  a  $q\_k=300$ . Červená křivka vyjadřuje závislost při použití tvrdého minima, modrá pak při užití měkkého minima.



Obrázek 5.6: Závislost rychlosti zpracování jednoho pixelu na  $r$ .

Posouzení vhodného výběru parametrů  $q\_alfa$  a  $q\_c$  je rozděleno do čtyř částí, podle typu masky a užitého minima. Pro tyto účely byl použit uměle vytvořený obraz (viz. Obrázek 5.7), který byl následně filtrován s užitím parametru  $r=10$ .



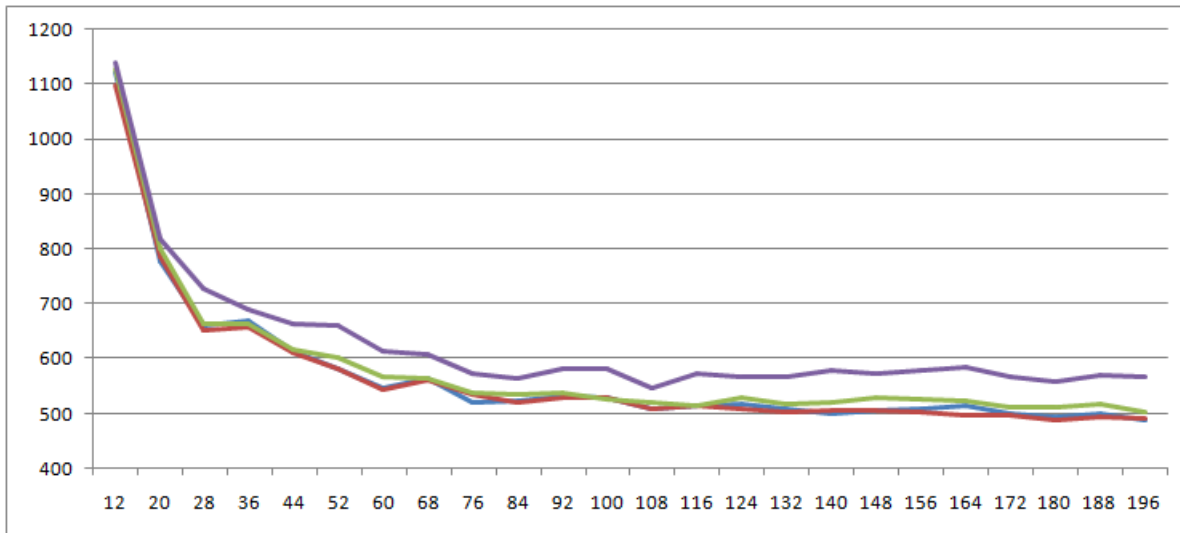
Obrázek 5.7: Obraz pro posouzení parametrů  $q\_alfa$  a  $q\_c$ .

Každá část obsahuje dva grafy. První graf znázorňuje čtyři závislosti změny hodnot jasu obrazu po filtrování na různých parametrech  $q\_alfa$  pro čtyři různé  $q\_c$ . Fialová křivka je pro  $q\_c=10$ , zelná pro  $q\_c=30$ , červená pro  $q\_c=40$  a modrá (referenční) pro  $q\_c=q\_alfa-1$ . Změna hodnot jasu obrazu byla kvantifikována jako euklidovská vzdálenost dvou bodů o souřadnicích odpovídajících hodnotám jasu v jednotlivých pixelech původního a filtrovaného obrazu. Na vodorovné ose jsou vyneseny hodnoty  $q\_alfa$  a na svislé pak hodnoty rozdílu jasů.

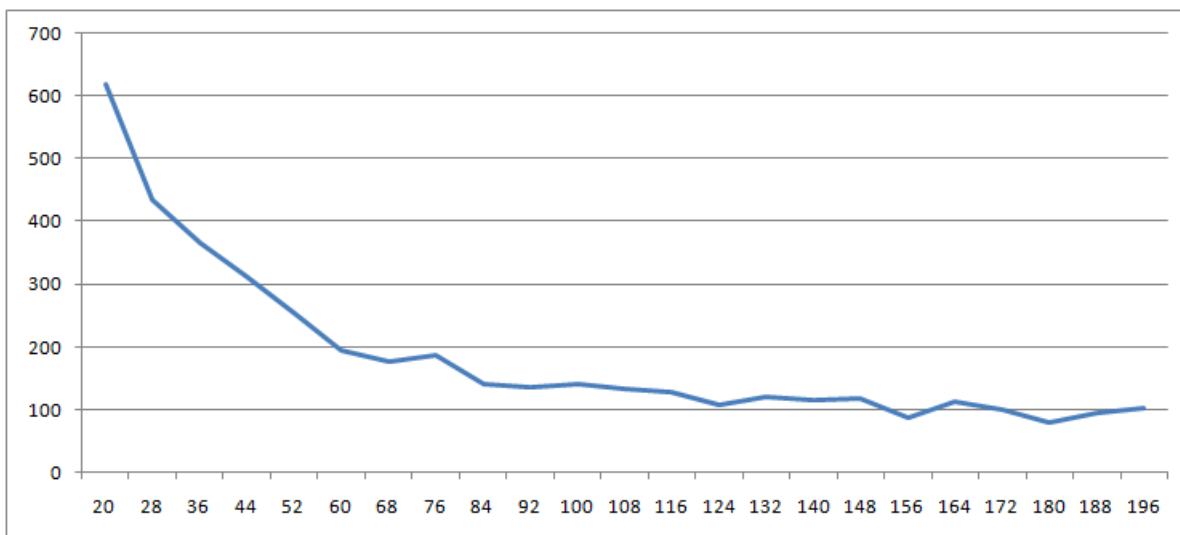
Druhý graf znázorňuje rozdíl hodnot jasu filtrovaných obrazů (kvantifikovaný identickým způsobem jako v předešlém grafu) vždy dvou po sobě jdoucích filtrů, seřazených podle velikosti parametru  $q\_alfa$  při  $q\_c=q\_alfa-1$ . Podobně jako u předešlého grafu, na vodorovné ose jsou vyneseny hodnoty  $q\_alfa$  filtrů s vyšší hodnotou  $q\_alfa$  a na svislé

rozdíly jasů.

## 1D průměrový filtr s měkkým minimem

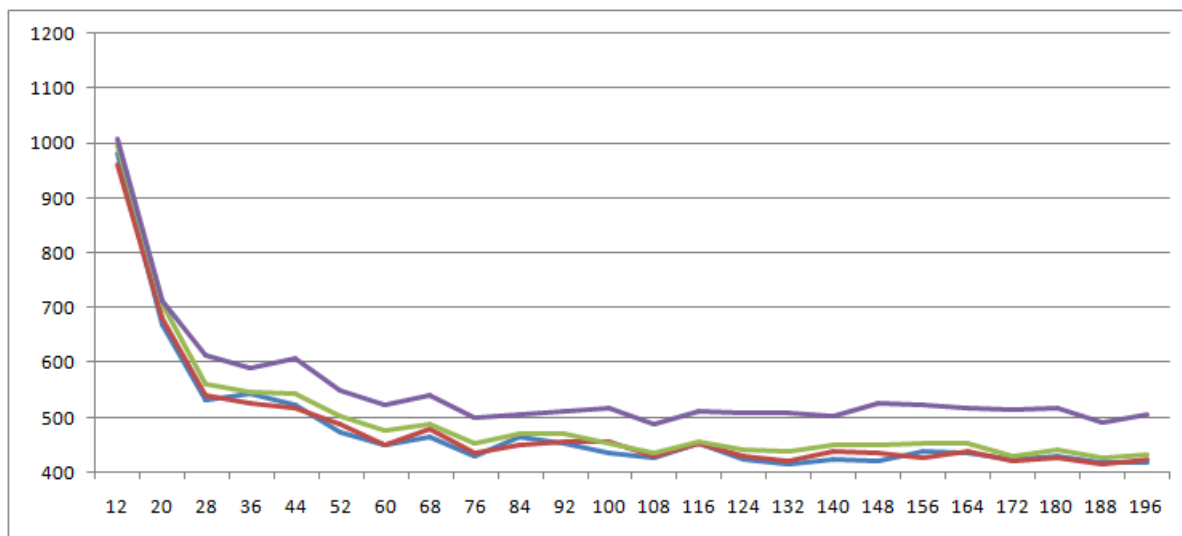


Obrázek 5.8: Bm - závislost změny jasů na parametru  $q_{\alpha}$  a pevně zvolených  $q_c$ .

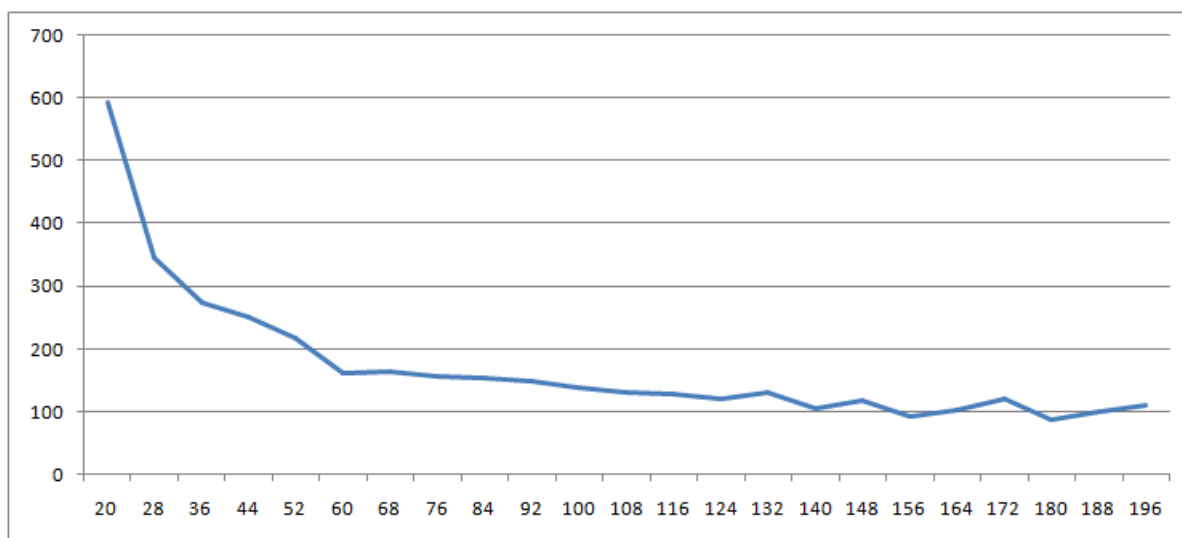


Obrázek 5.9: Bm - rozdíl hodnot jasů filtrovaných obrazů

## 1D gaussovský filtr s měkkým minimem

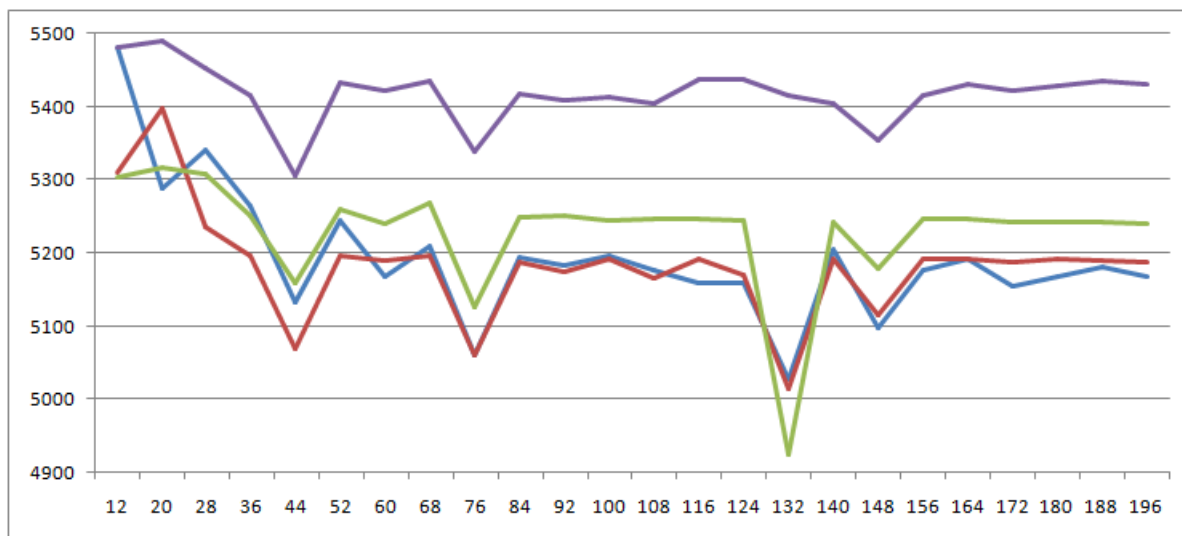


Obrázek 5.10:  $M_m$  - závislost změny jasu na parametru  $q_{\alpha}$  a pevně zvolených  $q_c$ .

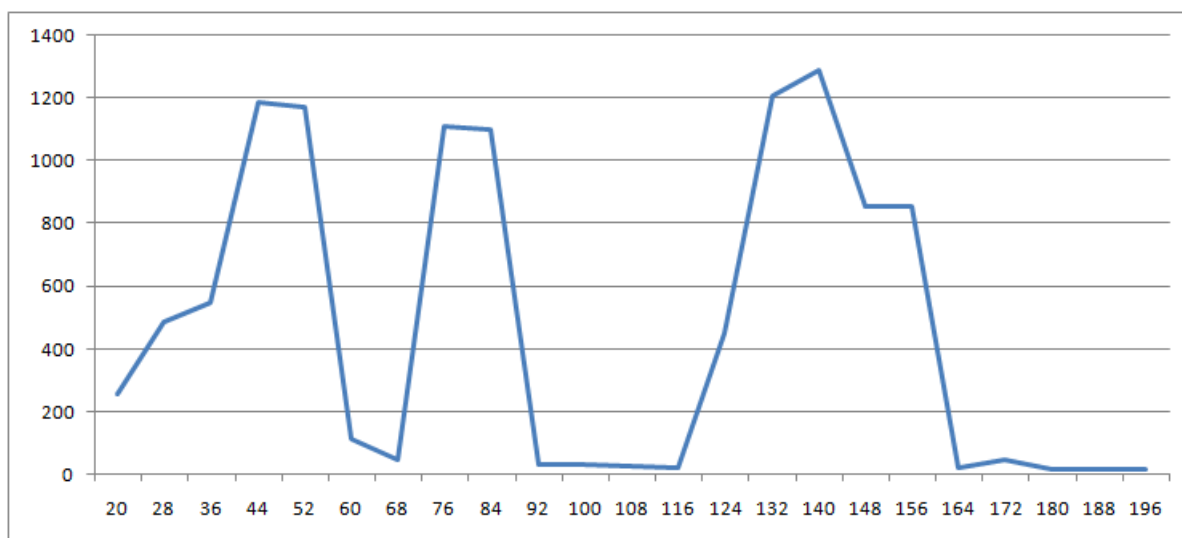


Obrázek 5.11:  $M_m$  - rozdíl hodnot jasu filtrovaných obrazů

## 1D průměrový filtr s tvrdým minimem

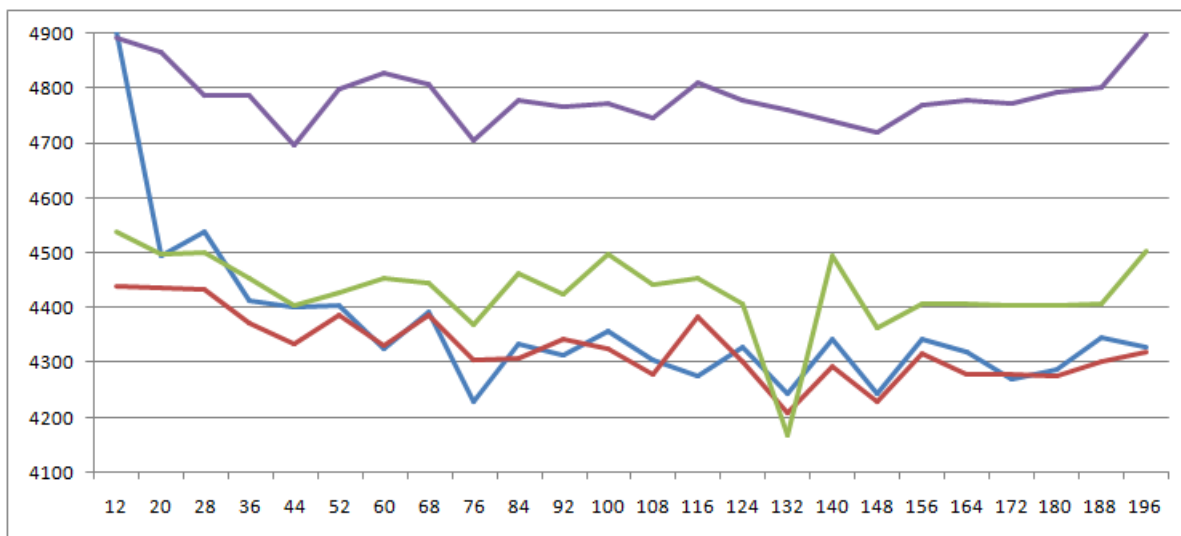


Obrázek 5.12:  $B_t$  - závislost změny jasu na parametru  $q_{\alpha}$  a pevně zvolených  $q_c$ .

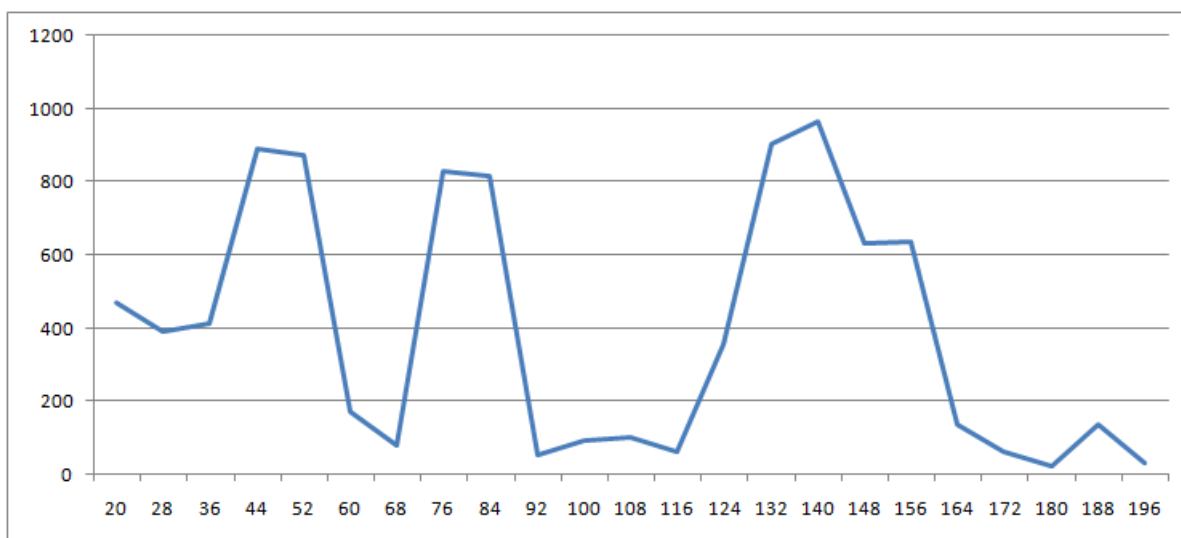


Obrázek 5.13:  $B_t$  - rozdíl hodnot jasu filtrovaných obrazů

## 1D gaussovský filtr s tvrdým minimem



Obrázek 5.14:  $M_t$  - závislost změny jasu na parametru  $q_{\text{alfa}}$  a pevně zvolených  $q_c$ .



Obrázek 5.15:  $M_t$  - rozdíl hodnot jasu filtrovaných obrazů

Výsledky měření ukazují velký rozdíl mezi použitými minimy. Užití tvrdého minima změní hodnoty jasu filtrovaného obrazu daleko více než užití měkkého minima. To se dalo čekat vzhledem k tomu, že použitý obraz (obrázek 5.7) má hodnoty jasu buď 0 nebo 255, neexistují zde žádné šedivé přechody, a tudíž lze předpokládat, že algoritmus tvrdého minima vyhodnotil bílé pixely ležící vedle černých ploch jako odchylku v černé oblasti.

Při použití měkkého minima dochází při postupném zvětšování parametru  $q\_alfa$  k přibližování rozdílu mezi původním obrazem a filtrovaným obrazem k hodnotě 500, resp. 430 (viz. graf na obrázku 5.8, resp. 5.10), přičemž je z následujících grafů (obrázky 5.9 a 5.11) vidět, že jednotlivé filtrované obrazy se od určité výše parametru  $q\_alfa$  liší relativně málo. Lze říci, že změna filtrovaných obrazů od hodnoty parametru  $q\_alfa$  kolem 130 již odráží spíše chyby způsobené zaokrouhlováním. Při postupném zvyšování parametru  $q\_c$  pak lze snadno dojít k závěru, že hodnoty výrazně přes 30 již výstup ve formě filtrovaného obrazu příliš neovlivní.

Jiné chování vidíme na grafech filtrů, u kterých bylo použito tvrdé minimum. Pro parametr  $q\_c$  platí podobný závěr jako při užití měkkého minima. Vidíme zde však výrazné rozkolísání v hodnotě  $q\_alfa$  76 a 132 v grafu na obrázku 5.12 a oscilaci kolem hodnoty 4300 pro  $q\_alfa$  větší než 60 v grafu na obrázku 5.14. Srovnání obrazů filtrovaných 1D průměrovým filtrem při hodnotách  $q\_alfa$  132 a 140 je na obrázku 5.16.



Obrázek 5.16: Bt - srovnání filtrovaných obrazů (zleva: původní,  $q\_alfa=132$ ,  $q\_alfa=140$ )

Na základě tohoto srovnání lze soudit, že u filtru při užití některých úhlů, které vhodně kopírují úhly, pod kterými jsou načrtnuty bílé pruhy, dochází k nalezení bílých oblastí, které odpovídají definici úsečky, což způsobuje skokové změny v jasu příslušných pixelů při porovnávání jednotlivých nastavení. Je tedy zřejmé, že algoritmus s tvrdým minimem je citlivější na množství posuzovaných směrů než algoritmus s měkkým minimem.

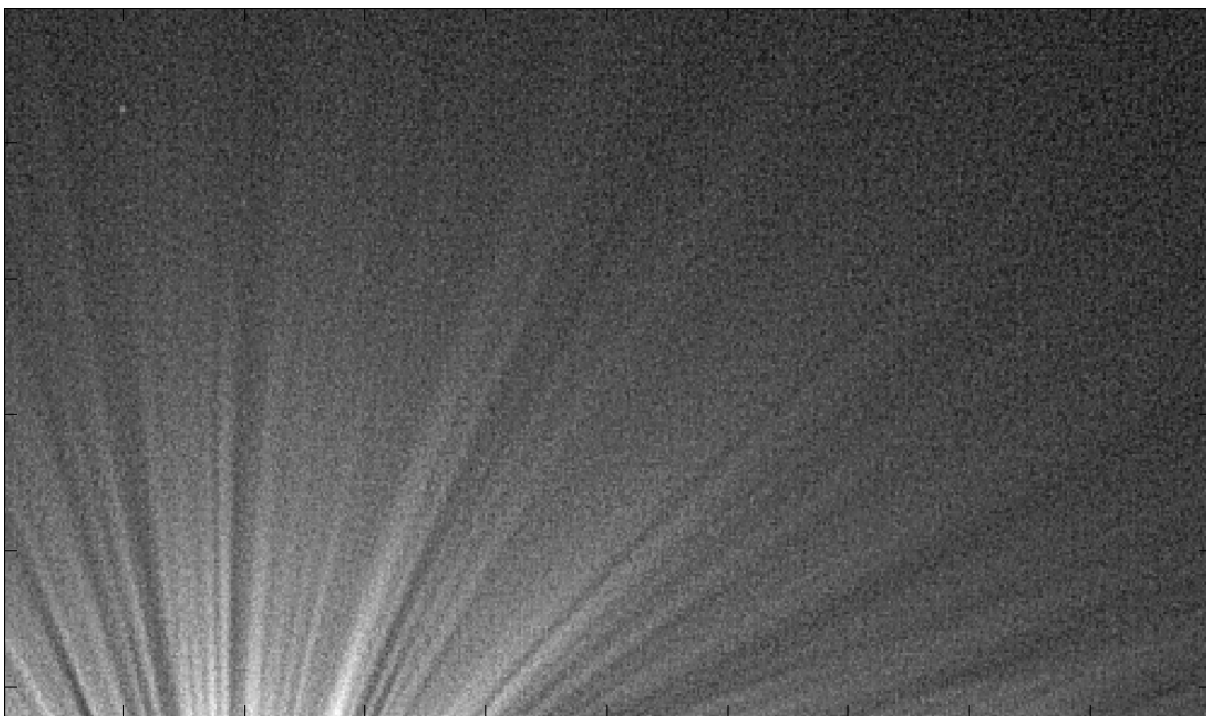
## Kapitola 6

# Testování programu na obraze sluneční koróny

*„Budiž světlo!“*

*neznámý autor*

Testování programu na obraze sluneční koróny bylo provedeno na výřezu obrazu, který lze nalézt na internetových stránkách pana profesora Druckmüllera [12]. Výřez (obrázek 6.1) byl vybrán s ohledem na množství postupně slábnoucích siločar jako obdélník mezi pixely obrazu (120, 761) a (380, 1260).



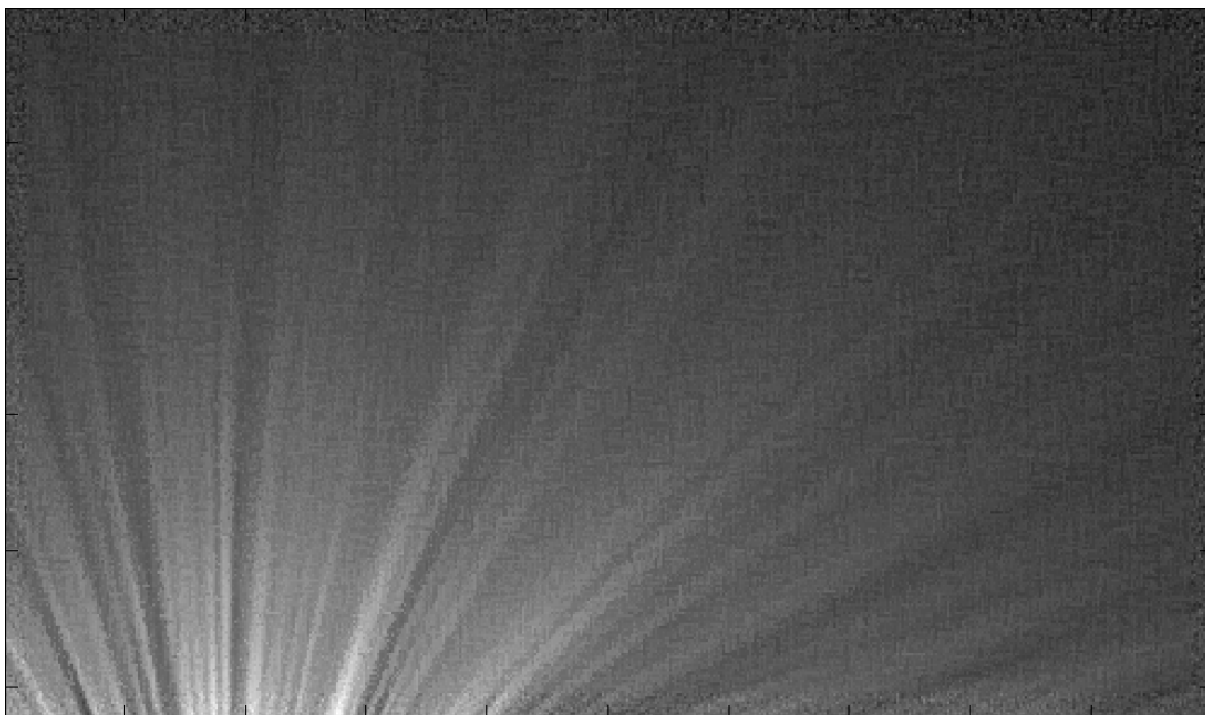
Obrázek 6.1: Výřez obrazu

## 1D průměrový filtr s měkkým minimem

Při filtrování 1D průměrovým filtrem s měkkým minimem byly použity parametry:  $r=9$ ,  $q_{\text{alfa}}=128$ ,  $q_{\text{c}}=32$  a  $q_{\text{k}}=1024$ .

Došlo k potlačení šumu při zachování vizuálního vjemu jednotlivých siločar. Zároveň ale došlo ke snížení kontrastu mezi tmavými a světlými pruhy. Toto snížení kontrastu je nepatrně výraznější než u 1D gaussovského filtru s měkkým minimem. Oproti filtrům, které používaly tvrdé minimum, jsou přechody mezi světlými a tmavými pruhy méně vyhlazené.

V tomto smyslu lze tento filtr považovat za nejméně zdařilý.



Obrázek 6.2: Filtrovaný výřez obrazu

## 1D gaussovský filtr s měkkým minimem

Při filtrování 1D gaussovským filtrem s měkkým minimem byly použity parametry:  $r=9$ ,  $q_{\text{alfa}}=128$ ,  $q_{\text{c}}=32$  a  $q_{\text{k}}=1024$ .

Obdobně jako u 1D průměrového filtru s měkkým minimem došlo k potlačení šumu při zachování vizuálního vjemu jednotlivých siločar, a zároveň ke snížení kontrastu mezi tmavými a světlými pruhy. Toto snížení kontrastu je srovnatelné 1D gaussovským filtrem s tvrdým minimem. Na rozdíl od filtrů, které používaly tvrdé minimum, jsou přechody mezi světlými a tmavými pruhy méně vyhlazené a filtrovaný obraz se zdá být více zašumělý.

Při užití dvojnásobných parametrů  $q_{\text{alfa}}$  a  $q_{\text{c}}$  stejně jako u filtrů užívajících tvrdé minimum došlo ke zhoršení výsledného obrazu.



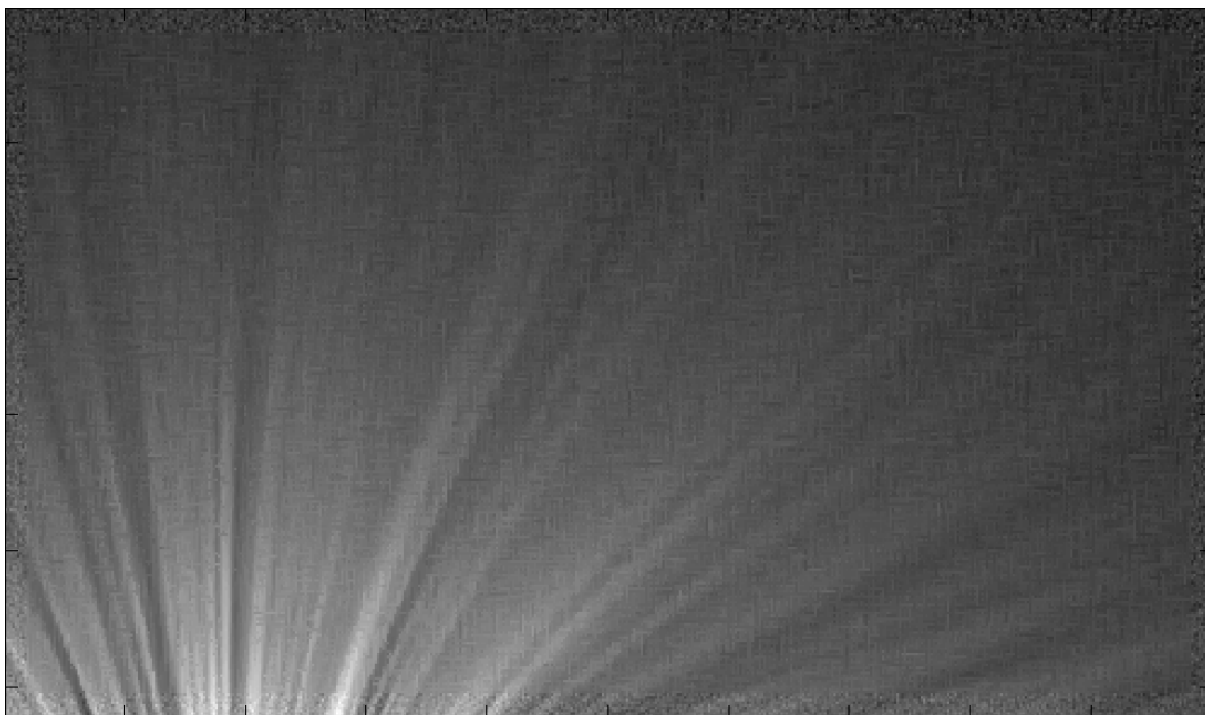
Obrázek 6.3: Filtrovaný výřez obrazu

## 1D průměrový filtr s tvrdým minimem

Při filtrování 1D průměrovým filtrem s tvrdým minimem byly použity parametry:  $r=9$ ,  $q_{\text{alfa}}=256$ ,  $q_{\text{c}}=64$  a  $q_{\text{k}}=1024$ .

Došlo k potlačení šumu při zachování vizuálního vjemu jednotlivých siločar, přechody mezi tmavými a světlými pruhy byly vyhlazeny a snížení kontrastu mezi nimi je hůře rozlišitelné od obrazu filtrovaného 1D gaussovským filtrem s tvrdým minimem, než je tomu mezi 1D gaussovským a průměrovým filtrem s měkkým minimem.

Při použití polovičních parametrů  $q_{\text{alfa}}$  a  $q_{\text{c}}$  jako u filtrů užívajících měkké minimum byl výsledek výrazně horší, světlé a tmavé pruhy se slévaly.



Obrázek 6.4: Filtrovaný výřez obrazu

## 1D gaussovský filtr s tvrdým minimem

Při filtrování 1D gaussovským filtrem s tvrdým minimem byly použity parametry:  $r=9$ ,  $q_{\text{alfa}}=256$ ,  $q_{\text{c}}=64$  a  $q_{\text{k}}=1024$ .

Tento filtr lze považovat za nejzdařilejší, přestože je sporné, zda takto filtrovaný obraz lahodí oku více, než obraz filtrovaný 1D gaussovským filtrem s měkkým minimem, neboť se v oblastech, kde se vyskytuje šum, objevují pravidelnější struktury. Jeho dalším negativem ve srovnání s 1D gaussovským filtrem s měkkým minimem je několikanásobně delší doba výpočtu vzhledem k nutnosti použít větší parametry  $q_{\text{alfa}}$  a  $q_{\text{c}}$ . Na druhou stranu jsou ve světlých pruzích výrazně potlačeny tmavé pixely a naopak.



Obrázek 6.5: Filtrovaný výřez obrazu

# Kapitola 7

## Závěr

Cílem této práce bylo vypracovat teorii 1D gaussovských filtrů s rotujícím jádrem pro zpracování digitálních obrazů, implementovat tento typ filtru na počítači a otestovat jej na obraze sluneční koróny. Aplikováním filtru na obraz sluneční koróny mělo být dosaženo snížení šumu v obraze při zachování struktury světlých a tmavých pruhů, znázorňujících tvar magnetického pole Slunce.

Teorie vytvořená v této práci podává ucelený pohled na tvorbu 1D masek, které jsou odvozeny od 2D masek a interpretace úsečky v matici digitálního obrazu, obsahuje dvě metody pro nalezení struktury podobné úsečce v obraze a pro možnost porovnání definuje kromě 1D gaussovského filtru s rotujícím jádrem také 1D průměrový filtr s rotujícím jádrem. Jako zajímavá možnost dalšího bádání se jeví rozšíření 1D masek o typy odvozené od složitějších rovinných křivek, než je úsečka. Také metody pro nalezení hledané struktury lze rozšířit například o předpoklad, že pozadí úsečky nemá nulovou hodnotu jasu. Úloha může být pak pojata jako hledání struktury s konstantním pozadím. Je zde také možnost hledat strukturu s proměnlivou hodnotou jasu, například pro obraz sluneční koróny může být přínosné hledání úsečky s postupným snižováním jasu z jednoho konce na druhý, nebo použití vah odvozených od gaussovské masky.

Implementace tohoto typu filtru na počítači s sebou nesla významné hardwarové nároky. Filtry byly testovány pouze pro nejmenší přípustné délky  $r$  na obrazech s bitovou hloubkou 24 bitů. V případě optimalizace zdrojového kódu a případného využití grafické karty pro výpočet se otevírá cesta k prozkoumání užití vyšších parametrů a otestování na obrazech s větší bitovou hloubkou.

Otestování algoritmů na obraze sluneční koróny přineslo kýžené výsledky. U všech čtyř filtrů došlo ke snížení šumu při zachování struktury. Mezi užitím gaussovské a průměrové masky byl rozdíl malý, ovšem mezi použitím měkkého a tvrdého minima byl rozdíl zřetelný. Nejlepšího výsledku dosáhl 1D gaussovský filtr s rotujícím jádrem a tvrdým minimem.

# Literatura

- [1] Jiří Anděl: *Matematická statistika*, SNTL/ALFA (1978).
- [2] Miloslav Druckmüller: *Adaptivní numerické metody zpracování obrazů*, (2001).
- [3] <http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/HIPR2/gsmooth.htm>
- [4] <http://cmp.felk.cvut.cz/cmp/courses/33DZOzima2005/slidy/lokalniPredzpracovani.pdf>
- [5] Václav Hlaváč, Miloš Sedláček: *Zpracování signálů a obrazů*, ČVUT (2007)
- [6] Jana Kahounová, Diana Bílková: *Počet pravděpodobnosti*, VŠE (2002)
- [7] Václav Bezvoda, Josef Ježek, Stanislav Saic, Karel Segeth: *Dvojměrná diskrétní Fourierova transformace a její použití 1*, SPN (1988)
- [8] Karel Zaplatílek, Bohuslav Doňar: *Matlab - začínáme se signály*, BEN (2006)
- [9] Miloš Sedláček, Radislav Šmíd: *Matlab v měření*, ČVUT (2007)
- [10] Yim-Kul Lee, William T. Rhodes: *Nonlinear image processing by a rotating kernel transformation*, *Optics Letters*, Vol.15, No.23 (1990)
- [11] Yim-Kul Lee, William T. Rhodes: *Rotating-kernel min-max algorithms for straight-line feature enhancement*, *Applied Optics*, Vol.34, No.2 (1995)
- [12] [http://www.zam.fme.vutbr.cz/~druck/eclipse/Ecl2008m/Tse2008\\_500\\_mo1/0-info.htm](http://www.zam.fme.vutbr.cz/~druck/eclipse/Ecl2008m/Tse2008_500_mo1/0-info.htm)