



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

OPTIMALIZACE INVESTIC

THE OPTIMIZATION OF INVESTMENT

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

DANIEL BUJNOVSKÝ

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

RNDr. POPELA PAVEL, Ph.D.

BRNO 2020

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky
Student: **Daniel Bujnovský**
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Matematické inženýrství
Vedoucí práce: **RNDr. Pavel Popela, Ph.D.**
Akademický rok: 2019/20

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Optimalizace investic

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Student využije své znalosti z oblasti teorie pravděpodobnosti, matematické statistiky, matematické analýzy a lineární algebry, prohloubí si znalosti z oblasti matematicko–ekonomických optimalizačních modelů a nastuduje vybrané modely matematického programování, které bude aplikovat v oblasti optimální alokace finančních zdrojů z hlediska maximální návratnosti investic pro zvolenou aplikační oblast. Vytvořené modely bude implementovat v modelovacím jazyce a bude realizovat testovací výpočty pro reálná data. Předpokládá se účast konzultantů specialistů: Dr. Ing. M. Pavlase a Dr. Ing. R. Šompláka.

Cíle bakalářské práce:

1. Osvojení a prohloubení znalostí matematického programování a vybraných matematicko–ekonomických a finančních modelů.
2. Vytvoření matematických modelů vybraných problémů optimální alokace zdrojů.
3. Studium jejich teoretických vlastností a jejich transformací.
4. Výběr efektivních algoritmů řešení.
5. Implementace modelů, propojení s datovou základnou a realizace výpočetních experimentů.

Seznam doporučené literatury:

ANDĚL, Jiří. Statistické metody. Vyd. 4. Praha: Matfyzpress. 2007. ISBN 978-80-7378-003-6.

KLAPKA, Jindřich, DVOŘÁK, Jiří a POPELA, Pavel. Metody operačního výzkumu. Vyd. 2. Brno: VUTIUM, 2001. ISBN 80-214-1839-7.

NASH, Stephen and SOFER, Ariela. Linear and nonlinear programming. McGraw-Hill, 1995. ISBN 978-0-89871-661-0.

WALLACE, Stein W. and KING, Alan. Modeling with Stochastic Programming. Springer Verlag, 2012. ISBN 978-0-387-87816-4.

WILLIAMS, H. Paul. Model building in mathematical programming. 5th ed. Hoboken, N.J.: John Wiley & Sons. 2013. ISBN 978-1-118-44333-0.

GAMS Modelling Language Manuals, GAMS, 2015.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2019/20

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato práce se zaměřuje na popis dvou optimalizačních modelů - síťového a Markowitzova portfolio modelu, jejich vzájemné propojení a aplikaci na dopravní problémy. Cílem praktické části je popis těchto problémů přiblížit co nejvíce reálným situacím a zároveň hledat jejich efektivní řešení. Vše je doprovázeno ukázkami na reálných datech z kapitálových trhů, případně vlastních modelových datech. Teoretické úvahy a postupy jsou následně implementovány v programovacím jazyce Matlab. Všechny výsledky jsou pak náležitě vysvětleny v souvislosti s oběma modely. Součástí práce je také seznámení s příslušnou ekonomickou a statistickou teorií, jejíž pochopení je pro popis práce nezbytné.

Summary

This work is focused on description of two models of mathematical programming - the network model and the Markowitz portfolio model, their connection and application in transportation problems. The goal of the practical section is to approach the description of these problems to the real situations and look for their efficient solutions at the same time. All of that is accompanied by examples on real data from capital market or own model data. The theoretical considerations and thoughts are implemented in programming language Matlab. All results are explained in context to both models. The thesis also includes the introduction to economical and statistical theory which is necessary to understand the problem.

Klíčová slova

Optimalizace, teorie portfolia, riziko, Markowitzův model, efektivní hranice, diverzifikace, síťový model, graf, náhodná proměnná, Matlab.

Keywords

Optimization, portfolio theory, risk, Markowitz model, efficient frontier, diversification, network model, graph, random variable, Matlab.

BUJNOVSKÝ, D. *Optimalizace investic*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2020. 51 s. Vedoucí bakalářské práce RNDr. Pavel Popela, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Optimalizace investic* vypracoval samostatně pod vedením RNDr. Pavla Popely, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu použité literatury.

Daniel Bujnovský

Velké poděkování patří mému vedoucímu RNDr. Pavlu Popelovi, Ph.D. za odborné vedení mé bakalářské práce, ochotu pomoci v kteroukoliv dobu a za jakékoliv situace, dodávání motivace v náročných chvílích, a především také ušití tématu bakalářské práce mně téměř na míru.

Daniel Bujnovský

Obsah

1	Úvod	2
2	Základní pojmy ze statistiky	3
2.1	Náhodná veličina	3
2.2	Náhodný vektor	4
2.3	Náhodný výběr	6
2.4	Normální rozdělení pravděpodobnosti	7
2.5	Bodové odhady parametrů normálního rozdělení	7
3	Moderní teorie portfolia	8
3.1	Aktivum jako náhodná proměnná	9
3.1.1	Očekávaná návratnost	9
3.1.2	Riziko	10
3.2	Portfolio jako náhodný vektor	10
3.2.1	Očekávaná návratnost portfolia	11
3.2.2	Riziko portfolia	12
3.3	Korelace	13
3.4	Diverzifikace	13
3.5	Efektivní hranice	17
4	Optimalizace portfolia	19
4.1	Základní pojmy z optimalizace	19
4.2	Druhy optimalizačních úloh	20
4.3	Formulace Markowitzovy úlohy	21
4.4	Lagrangeova funkce	22
4.5	Aplikace na historických datech	23
4.6	Implementace v Matlabu	24
5	Síťový model	27
5.1	Teorie grafů	27
5.2	Formulace úlohy	27
5.2.1	Aplikace modelu na velká data	29
6	Síťové úlohy vykazující volatilitu v čase	31
6.1	Očekávané ceny a jejich volatilita	31
6.2	Minimalizace rizika nákladů	32
6.2.1	Využití historických dat	36
6.2.2	Implementace v Matlabu	39
6.2.3	Aplikace modelu na velká data	41
6.3	Nevyvážená síťová úloha z hlediska poptávek a nabídek	42
7	Závěr	48
8	Seznam příloh	51

1. Úvod

První část bakalářské práce tvoří statistická část, která je zaměřena na uvedení základních pojmů jako náhodná veličina či statistický soubor a dalších pojmů s touto problematikou spojených.

Následující část 3 je věnována moderní teorii portfolia, jejíž průkopníkem byl Harry Markowitz [7]. Součástí kapitoly 3 je rovněž vysvětlení některých základních finančních pojmů jako například aktivum, návratnost či riziko, které se prolínají napříč celou prací. Podrobně rozebereme princip diverzifikace, který je s teorií úzce spojen, a termínem efektivní hranice se plynule přesuneme ke kapitole 4 zabývající se již samotnou optimalizací portfolia.

V té rovněž uvedeme nejzákladnější definice spojené s optimalizací. Nadefinujeme Markowitzovu úlohu, jejíž cílem je nalezení optimálního rozložení bohatství mezi aktiva, do nichž investujeme. K jejímu vyřešení využijeme Lagrangeovu funkci a celý model ilustrujeme na reálných datech z indexu S&P500.

Kapitolou 5 postupně přejdeme k problematice síťových úloh v jejichž souvislosti také zavedeme termín graf.

Oba modely nakonec propojíme v 6.1 na základě myšlenky, že obdobně jako akcie vykazují v čase výkyvy cen, tak náklady na převoz po síťových hranách mohou rovněž kolísat a má tedy cenu uvažovat o riziku, že skutečné náklady spojené s přepravou se budou lišit od očekávaných.

Praktickou část zakončíme sekcí 6.3, jenž je postavena na otázce, zda investice do navýšení kapacit uzlů mohou mít příznivý vliv na riziko a náklady, které jsou popsány v první půlce.

2. Základní pojmy ze statistiky

Tato kapitola obsahuje definice základních statistických pojmů, které v práci budeme využívat, viz zdroje [1] a [2].

Při popisu reálných dějů se snažíme těmto dějům přiřazovat číselné hodnoty. V naší práci takovým dějem bude např. návratnost akcie v čase. Výsledek pokusu (nalezení hodnoty návratnosti) jsme tedy schopni ohodnotit číslem, které však před jeho provedením neznáme. Proměnné, které přiřazují výsledkům takovýchto pokusů námi sledovanou hodnotu, se nazývají náhodné veličiny viz [2].

2.1. Náhodná veličina

Definice 2.1. Necht \mathbb{R} je reálná přímka a β systém jejích borelovských podmnožin. Dále necht Ω je prostor elementárních jevů ω (tedy všech možných výsledků pokusu), A je nějaká σ -algebra podmnožin prostoru Ω (tyto podmnožiny nazýváme náhodné jevy) a P je pravděpodobnostní míra na základě které se podmnožinám z A připisuje určitá pravděpodobnost. Je-li $\xi(\omega)$ měřitelná funkce z pravděpodobnostního prostoru (Ω, A, P) do (\mathbb{R}, β) , pak se $\xi(\omega)$ nazývá *náhodná veličina* a značí se stručně ξ [1].

Definice 2.2. Oborem hodnot náhodné veličiny ξ označíme množinu

$$\Xi = \{\xi^* \in \mathbb{R}; \xi^* = \xi(\omega), \omega \in \Omega\},$$

kteřou nazveme *základní soubor* [1].

Definice 2.3. Číslo $\xi^* = \xi(\omega), \omega \in \Omega$ budeme nazývat realizací náhodné veličiny ξ . Značením ξ^s pak rozumíme s -tou realizaci náhodné veličiny ξ [2].

Definice 2.4. Reálnou funkci $F: (-\infty, \infty) \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ definovanou předpisem

$$F(t) = P(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < t\})$$

nazýváme distribuční funkce náhodné veličiny ξ [2].

Vlastnosti:

$F(t)$ je neklesající; $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$; $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$; $0 \leq F(t) \leq 1 \quad \forall t \in (-\infty, \infty)$

Definice 2.5. Řekneme, že náhodná veličina ξ je diskrétní (má diskrétní rozdělení pravděpodobnosti) je-li její obor hodnot nejvýše spočetná množina, tj. nabývá spočetně mnoha hodnot t_1, t_2, \dots tak, že

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(\xi = t_i) = 1,$$

kde $P(\xi = t_i)$ značí $P(\{\omega : \xi(\omega) = t_i\})$ [2].

Definice 2.6. Pravděpodobnostní funkce diskrétní náhodné veličiny ξ je funkce $p : (-\infty, \infty) \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ dána předpisem

$$p(t) = P(\xi = t).$$

2.2. NÁHODNÝ VEKTOR

Definice 2.7. Řekneme, že náhodná veličina ξ je spojitá (má spojitě rozdělení pravděpodobnosti), je-li její distribuční funkce $F(t)$ spojitá [2].

Definice 2.8. Jako hustotu rozdělení pravděpodobnosti spojitě náhodné veličiny ξ nazveme nezápornou funkci $f : (-\infty, \infty) \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$ takovou, že

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(u) du$$

viz [2].

Vlastnosti:

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1$; $f(t) = F'(t)$ je-li F diferencovatelná; $P(\xi = t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Dále si uvedeme některé číselné charakteristiky náhodných veličin.

Definice 2.9. Střední hodnotou náhodné veličiny ξ budeme nazývat číslo

$$E(\xi) = \sum_{t \in Z} tp(t),$$

je-li ξ diskrétní a

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t) dt,$$

je-li ξ spojitá [2].

Navíc musí být splněn předpoklad, že příslušná řada, respektive integrál, absolutně konverguje. Tuto charakteristiku řadíme mezi charakteristiky polohy [2].

Vlastnosti:

$E(a\xi + b) = aE(\xi) + b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$; $E(\sum_{i=1}^n \xi_i) = \sum_{i=1}^n E(\xi_i)$

Definice 2.10. Rozptylem náhodné veličiny ξ nazýváme reálné číslo

$$\text{var}(\xi) = E([\xi - E\xi]^2).$$

Z něj dále stanovujeme směrodatnou odchylku jako reálné číslo $\sigma(\xi) = \sqrt{\text{var}(\xi)}$ [2].

Vlastnosti:

$\text{var}(\xi) \geq 0$; $\text{var}(a) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$; $\text{var}(a\xi + b) = a^2 \text{var}(\xi) \quad \forall a \in \mathbb{R}$

2.2. Náhodný vektor

Definice uvedené výše se dají zobecnit z pojmu jednorozměrné náhodné veličiny na pojem n -rozměrného náhodného vektoru.

Definice 2.11. Mějme na pravděpodobnostním prostoru (Ω, A, P) dány náhodné veličiny ξ_1, \dots, ξ_n . Pak vektor $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)'$ nazveme náhodným vektorem. Obor hodnot náhodného vektoru označíme Ξ , jeho realizaci, tj. $\boldsymbol{\xi}(\omega), \omega \in \Omega$, označíme jako $\boldsymbol{\xi}^*$, popřípadě po složkách $(\xi_1^*, \dots, \xi_n^*)^\top$. Značením $\boldsymbol{\xi}^s$ pak máme na mysli s -tou realizaci náhodného vektoru $\boldsymbol{\xi}$ [1].

Definice 2.12. Reálnou funkci $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ definovanou předpisem

$$F(\mathbf{t}) = F(t_1, \dots, t_n) = P(\xi_1 < t_1, \dots, \xi_n < t_n) = P(\boldsymbol{\xi} < \mathbf{t})$$

nazýváme sdružená distribuční funkce náhodného vektoru $\boldsymbol{\xi}$ [2].

Definice 2.13. Řekneme, že náhodný vektor $\boldsymbol{\xi}$ je diskrétní (má diskrétní rozdělení pravděpodobnosti), je-li jeho oborem hodnot nejvýše spočetná množina Ξ viz 2.2

Definice 2.14. Řekneme, že náhodný vektor $\boldsymbol{\xi}$ je spojitý (má spojitě rozdělení pravděpodobnosti), jestliže existuje nezáporná funkce $f(t_1, \dots, t_n)$ taková, že

$$F(t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{t_1} \cdots \int_{-\infty}^{t_n} f(u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n.$$

Funkci $f(t_1, \dots, t_n)$ nazveme sdruženou hustotou náhodného vektoru $\boldsymbol{\xi}$.

Vlastnosti sdružené hustoty pravděpodobnosti, respektive sdružené distribuční funkce, jsou analogické jako u náhodné veličiny [2].

Obdobně jako u náhodné veličiny ξ uvedeme rovněž základní charakteristiky náhodného vektoru $\boldsymbol{\xi}$.

Definice 2.15. Existují-li střední hodnoty $E(\xi_1), \dots, E(\xi_n)$, pak střední hodnotou náhodného vektoru rozumíme vektor $E(\boldsymbol{\xi}) = (E(\xi_1), \dots, E(\xi_n))$ [1].

Definice 2.16. Nechť $\boldsymbol{\xi}$ je náhodný vektor a existují konečné momenty $E(\xi_k^2) < \infty$, pak reálné číslo

$$\text{cov}(\xi_i, \xi_j) = E([\xi_i - E(\xi_i)] \cdot [\xi_j - E(\xi_j)])$$

nazveme kovariancí náhodných veličin ξ_i a ξ_j [1].

Definice 2.17. Variační matice náhodného vektoru $\boldsymbol{\xi}$ je matice tvaru

$$\text{var}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} \text{cov}(\xi_1, \xi_1) & \dots & \text{cov}(\xi_1, \xi_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(\xi_n, \xi_1) & \dots & \text{cov}(\xi_n, \xi_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{var}(\xi_1) & \dots & \text{cov}(\xi_1, \xi_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(\xi_n, \xi_1) & \dots & \text{var}(\xi_n) \end{pmatrix}.$$

Vlastnosti:

Matice $\text{var}(\boldsymbol{\xi})$ je symetrická a pozitivně definitní.

$$\text{cov}(\xi_i, \xi_j) = E(\xi_i, \xi_j) - [E(\xi_i) \cdot E(\xi_j)]$$

$$\text{var}(\mathbf{a} + \mathbf{B}\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{B}\text{var}(\boldsymbol{\xi})\mathbf{B}^\top \text{ pro libovolný vektor } \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \text{ a matici } \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

$$\text{cov}(\xi_i, \xi_i) = \text{var}(\xi_i)$$

Jsou-li náhodné veličiny ξ_i, ξ_j nezávislé, pak $\text{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$ [2].

2.3. Náhodný výběr

Během práce se budeme dostávat do situace, kdy budeme určitý jev modelovat pomocí náhodné veličiny. O tomto jevu budeme předpokládat, že je z určitého rozdělení, jehož charakteristiky však nebudeme znát. Distribuční funkce tohoto rozdělení tedy bude funkce $F(t, v)$ s neznámým reálným parametrem v . Cílem statistiky je mimo jiné hledání charakteristických parametrů rozdělení pravděpodobnosti pozorované veličiny. Toho docílíme měřením/pozorováním tohoto děje [2].

Definice 2.18. Opakujeme-li s -krát nezávisle pokus, jehož výsledkem je hodnota náhodné veličiny ξ s distribuční funkcí $F(t, v)$, získáváme posloupnost náhodných veličin $\xi^{[1]}, \dots, \xi^{[s]}$, kterou můžeme zapsat jako vektor $\xi^{\square} = (\xi^{[1]}, \dots, \xi^{[s]})$ [9]. Složky tohoto vektoru jsou tedy nezávislé náhodné veličiny $\xi^{[i]}$ se stejnou distribuční funkcí, jako má pozorovaná náhodná veličina ξ . Tento vektor pak nazveme náhodným výběrem z ξ (respektive z jejího rozdělení pravděpodobnosti) rozsahu S [2].

Praktický postup pak spočívá v tom, že získáme obecně S měření ξ^s (tedy konkrétních hodnot) daného děje popsaného náhodnou proměnnou ξ , ty zapíšeme jako vektor (ξ^1, \dots, ξ^S) . Tento vektor je realizací náhodného výběru a budeme jej nazývat statistickým souborem rozsahu S . O nezávislosti náhodných veličin je možné se dočíst více v [2].

Definice 2.19. Zavedeme funkci náhodného výběru $T(\xi^{[1]}, \dots, \xi^{[s]})$ kterou nazveme výběrovou charakteristikou, nebo-li statistikou. Její realizace $t = T(\xi^1, \dots, \xi^S)$ (nazývaná též empirická charakteristika) je pak pozorovanou hodnotou této statistiky [2].

Pozn.: O konkrétních příkladech výběrových charakteristik je možno se dočíst více v [2], pro naše potřeby a jednoduchost systému značení si vystačíme pouze s uvedením některých v práci využitých empirických charakteristik, zejména výběrového průměru, výběrového rozptylu a výběrové kovariance.

Statistiku T , respektive její realizaci t , se snažíme volit tak, aby nabývala hodnoty blízkých neznámému parametru v . Potom ji můžeme nazvat odhadem tohoto parametru [2].

Nechť $(\xi^{[1]}, \dots, \xi^{[s]})$ je 2-rozměrný náhodný výběr a ξ^1, \dots, ξ^s jeho realizace, pak definujeme následující empirické charakteristiky

$$\bar{\xi} = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \xi^s, \quad (2.1)$$

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{S-1} \sum_{s=1}^S (\xi^s - \bar{\xi})^2, \quad (2.2)$$

$$\hat{s} = \sqrt{\hat{s}^2}, \quad (2.3)$$

kde (2.1) nazýváme realizací výběrového průměru, (2.2) realizací výběrového rozptylu a (2.3) realizací výběrové směrodatné odchylky. Obecně pak empirické charakteristiky nazýváme bodovými odhady.

Definice 2.20. Necht $\begin{pmatrix} \xi_1^{[1]} \\ \xi_2^{[1]} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \xi_1^{[s]} \\ \xi_2^{[s]} \end{pmatrix}$ je náhodný výběr z $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$, pak charakteristiku

$$q_{12} = \frac{1}{S-1} \sum_{i=1}^s (\xi_1^i - \bar{\xi}_1)(\xi_2^i - \bar{\xi}_2)$$

nazveme realizací výběrové kovariance.

Pozn.: Více informací o odhadech je možné nalézt v [1].

2.4. Normální rozdělení pravděpodobnosti

Zápisem $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ rozumíme, že náhodná proměnná ξ je z normálního rozdělení o parametrech μ a σ^2 . Hustota tohoto rozdělení je popsána funkcí

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, t \in (-\infty, \infty).$$

Číselné charakteristiky tohoto rozdělení jsou $E(\xi) = \mu$ a $\text{var}(\xi) = \sigma^2$.

Transformací náhodné veličiny ξ s normálním rozdělením $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ na náhodnou veličinu

$$U = \frac{\xi - \mu}{\sigma}$$

dostaneme náhodnou veličinu s normovaným normálním rozdělením $N(0, 1)$ s distribuční funkcí $\Phi(\mu)$ [2].

Obdobně zápisem $\boldsymbol{\xi} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ rozumíme, že náhodný vektor $\boldsymbol{\xi}$ je z n -rozměrného normálního rozdělení s parametry $\boldsymbol{\mu}$ a $\boldsymbol{\Sigma}$.

2.5. Bodové odhady parametrů normálního rozdělení

Necht náhodná veličina ξ je z normálního rozdělení, tedy $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ a vektor $\boldsymbol{\xi}^{\square} = (\xi^{[1]}, \dots, \xi^{[s]})$ je náhodným výběrem z ξ , pak realizace výběrového průměru $\bar{\xi}$ je bodovým odhadem střední hodnoty μ a realizace výběrového rozptylu \hat{s}^2 je bodovým odhadem rozptylu σ^2 .

Obdobně necht náhodný vektor $\boldsymbol{\xi}$ je z n -rozměrného normálního rozdělení, tedy

$\boldsymbol{\xi} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ a $\begin{pmatrix} \xi_1^{[1]} \\ \vdots \\ \xi_n^{[1]} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \xi_1^{[s]} \\ \vdots \\ \xi_n^{[s]} \end{pmatrix}$ je náhodný výběr z $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$, pak realizace výběrového

průměru $\bar{\boldsymbol{\xi}}$ se složkami $\bar{\xi}_j$ je bodovým odhadem parametru $\boldsymbol{\mu}$ a bodovým odhadem variační matice $\boldsymbol{\Sigma}$, která má tvar viz 2.17, je matice

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \hat{s}_1^2 & \dots & q_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & \dots & \hat{s}_n^2 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Pozn.: Z [2] plyne, že se navíc jedná o nejlepší nestranné odhady.

3. Moderní teorie portfolia

V úvodním textu si teoreticky představíme základní myšlenku moderní teorie portfolia. Definujeme rovněž některé základní finanční termíny, které budeme v průběhu práce používat.

Termín *investice* je v ekonomii definován jako záměrné obětování určitého množství peněžních prostředků za účelem získání vyšší (ač nejisté) budoucí hodnoty. Realizujeme ji nákupem různých druhů investičních aktiv [4].

Aktivum chápeme jako jakýkoliv hmotný objekt (např. pozemek, nemovitost) plnící funkci uchovatele hodnoty či nehmotný nárok mající ekonomickou hodnotu. Ta svému vlastníkovi přináší výnos (cenné papíry) [3].

Cenný papír je nástrojem investice na kapitálovém trhu. Typickým příkladem jsou akcie, dluhopisy apod. Má podobu dohody mezi kupujícím a prodávajícím a funguje jako doklad o majetku, respektive dluhu.[6]

Jedním z nejnámějších druhů nehmotných aktiv jsou *akcie*. Jedná se o obchodovatelný cenný papír, s nímž jsou spojena práva akcionáře jako společníka podílet se mimo jiné na zisku společnosti. *Cenou akcie* pak rozumíme její skutečnou tržní hodnotu, za kterou se obchoduje na kapitálovém trhu [5].

Investujeme-li do většího množství aktiv najednou (cenné papíry, nemovitosti apod.), vytváříme soubor investic, který nazýváme *portfolio*. Taková forma investování si dává za cíl snížení rizika oproti riziku, jenž bychom podstupovali při investování do jediného titulu [5].

Pro tento přístup investování používáme také termín *diverzifikace* [6], který rozebereme podrobněji v 3.4.

Skladbu investičního portfolia tvoří dvě samostatné fáze - *analýza cenných papírů* a *analýza portfolia*.

Analýza cenných papírů je především problematikou makro a mikroekonomie, proto se jí nebudeme podrobně zabývat. Poznamenejme pouze, že na základě různých analýz (fundamentální, technická) se hledají takové cenné papíry, které jsou vzhledem k tržní hodnotě (tedy hodnotě za které jsou na trhu obchodované) podhodnocené a mají tedy potenciál nárůstu hodnoty v budoucnu. Výsledkem této fáze je množina aktiv, která jsou považována za vhodnou do našeho portfolia a jsou vstupem do druhé fáze - analýzy portfolia, kterou se budeme zabývat v celé následující kapitole.

Budeme vycházet z moderní teorie portfolia, která byla poprvé popsána Harry Markowitzem v roce 1952. Jeho publikace [7] pak bude jedním ze zdrojů hlavních myšlenek. Vyzdvihneme především následující dvě.

- chce-li investor dosahovat vysokých očekávaných výnosů, musí rovněž podstoupit vyšší riziko, nebo naopak nechce-li příliš riskovat, musí se spokojit s nižším očekávaným výnosem;
- při skladbě portfolia je potřeba pohlížet na vývoj jednotlivých aktiv (myšleno jejich očekávaných návratností) nikoliv odděleně, ale ve vztahu k ostatním.

3.1. Aktivum jako náhodná proměnná

V celé kapitole 3.1. vycházím z [6] a [7].

Od investice očekáváme budoucí *výnos* (nebo také *zisk*), ať už formou *dividend* (např. u akcií), těmi se dále zabývat nebudeme, nebo zvýšením hodnoty drženého aktiva po určitém časovém horizontu.

Snížení hodnoty drženého aktiva pak vnímáme jako ztrátu, nebo ztrátovou investici. *Návratnosti* pak myslíme obecně změnu hodnoty aktiva (ať už kladnou v případě zisku, či zápornou v případě ztráty). Zisk a ztrátu (obecně tedy návratnost) budeme chápat jako relativní hodnoty vyjádřené v procentech - pro takový případ se pak používají termíny jako *výnosová míra*, *míra návratnosti* apod [5].

Hodnota míry návratnosti, jakou aktivum bude vykazovat v budoucím čase t , je z pohledu investora zásadní informací při výběru aktiv do investičního portfolia. Jedná se o veličinu, kterou v reálné praxi ovlivňuje nespočet faktorů, tudíž ji nejsme nikdy schopni přesně vyčíslit.

Existuje řada matematicko-ekonomických modelů, jež se snaží predikovat hodnotu v čase t , takové predikce však vždy podléhají značné míře nejistoty. Má tedy smysl uvažovat o návratnosti aktiva jako o náhodné proměnné 2.1, kterou označíme $d(\xi)$, kde symbolem d označujeme návratnost a symbolem ξ dáváme najevo, že se jedná o náhodnou proměnnou.

3.1.1. Očekávaná návratnost

Popišme si nyní blíže návratnost aktiva jakožto náhodnou veličinu. Obvykle investor v analýze portfolia uvažuje obecně n investičních příležitostí, proto i my budeme návratnost chápat jako n -rozměrný náhodný vektor $\mathbf{d}(\xi)$ viz 2.11.

Předpokládejme, že vektor $\mathbf{d}(\xi)$ je z n -rozměrného normálního rozdělení, tedy $\mathbf{d}(\xi) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ s neznámými teoretickými parametry $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\Sigma}$, kde $\boldsymbol{\mu}$ je vektor středních hodnot náhodného vektoru $\mathbf{d}(\xi)$ viz 2.15 a $\boldsymbol{\Sigma}$ je jeho variační matice viz 2.17.

Nyní je potřeba určit neznámý parametr $\boldsymbol{\mu}$, který reprezentuje vektor teoretické návratnosti vektoru $\mathbf{d}(\xi)$. Ten určíme statisticky ze získaných historických hodnot (jako bodové odhady viz 2.5.)

Pro konkrétní popis se zaměříme právě na akciový trh, protože v této oblasti existují snadno dohledatelná historická data o tržní hodnotě každé akcie. Bylo by možné zavést novou náhodnou veličinu $\gamma_j(\xi)$, kterou bychom modelovali vývoj ceny j -té akcie. Historická data bychom pak chápali jako realizace této náhodné proměnné viz 3.2, které bychom vzhledem k systému značení v kapitole 2 označili jako $\gamma_j^t(\xi)$, kde j je j -tá akcie a horní index t označuje měření. Protože se však nejedná již o náhodnou proměnnou, zjednodušíme značení pouze na γ_j^t .

Jak již bylo zmíněno v úvodu kapitoly, nezajímají nás naměřené hodnoty cen akcií, nýbrž naměřené hodnoty jejich návratností (přesněji míra návratnosti), tedy realizace

3.2. PORTFOLIO JAKO NÁHODNÝ VEKTOR

náhodné veličiny $d_j(\xi)$, které označíme jako d_j^s . Pro přepočítání z ceny j -té akcie na její návratnost (vyjádřenou procentuálně) pak platí elementární vzorec

$$d_j^t = \frac{\gamma_j^t - \gamma_j^{t-1}}{\gamma_j^{t-1}} \times 100, \quad (3.1)$$

kde d_j^t je návratnost j -té akcie, γ_j^t je její cena v čase t a γ_j^{t-1} je její cena v čase předchozího měření.

Pro popis problematiky si vystačíme s údajem o návratnosti na konci každého obchodovacího dne (pozn. den kdy je otevřena burza). Čas zde tedy budeme chápat jako diskrétní veličinu a přeznačíme ji jako s , kde $s = 1 \dots S$. Jako $d_j^s(\xi)$ tedy označíme realizaci návratnosti j -té akcie v s -tý den, dále jen d_j^s . Množina všech realizací \mathbf{d}^s pak tvoří statistický soubor Z délky S viz 2.18.

Nakonec tedy hledaný parametr $\boldsymbol{\mu}$ určíme pomocí výběrového průměru $\bar{\mathbf{d}}$ viz 2.3 statistického souboru Z , který je nejlepším bodovým odhadem tohoto parametru, viz poznámka v 2.5.

Tento bodový odhad budeme dále nazývat *očekávanou návratností* vektoru aktiv.

3.1.2. Riziko

Metod, kterými se odhaduje budoucí hodnota akcií, existuje celá řada. Zdůrazněme slovo odhaduje, nikdy totiž nemůžeme její budoucí cenu (hodnotu) určit přesně s naprostou jistotou (např. kvůli neočekávaným událostem na trhu). Šanci, že se hodnota aktiva (respektive její návratnost) bude lišit od námi vypočítané (nebo jakkoliv jinak určené) hodnoty, je pak chápána jako *riziko* viz [12]. Poznamenejme, že výše uvedené se týká obecně většiny trhů, nikoliv pouze toho akciového. K matematickému popisu rizika budeme využívat statistických nástrojů jako směrodatná odchylka a rozptyl viz 2.10.

Připomeňme, že pro vektor $\mathbf{d}(\boldsymbol{\xi})$ platí, že $\mathbf{d}(\boldsymbol{\xi}) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Parametrem reprezentujícím ono riziko je kovarianční matice $\boldsymbol{\Sigma}$ tohoto rozdělení, jejíž tvar jsme uvedli v 2.17.

Připomeňme také, že tato matice kromě rozptylů $\text{var}(d_j(\boldsymbol{\xi}))$ složek vektoru $\mathbf{d}(\boldsymbol{\xi})$, které reprezentují teoretické riziko j -tého aktiva, obsahuje rovněž složky cov_{ij} což jsou náhodné veličiny popisující teoretickou kovarianci i -té a j -té složky vektoru \mathbf{d} viz 2.16.

Tyto teoretické hodnoty opět určíme pomocí bodových odhadů. Těmi jsou výběrový rozptyl \hat{s}_j^2 viz 2.3 a výběrová kovariance q_{ij} viz 2.20.

Pro parametr $\boldsymbol{\Sigma}$ pak bude bodovým odhadem matice \mathbf{Q} viz 2.4 jejíž složky jsou právě výše uvedené bodové odhady \hat{s}_j^2 a q_{ij} .

Matici \mathbf{Q} budeme odteď nazývat *očekávaným rizikem* vektoru aktiv.

3.2. Portfolio jako náhodný vektor

V celé kapitole 3.2. vycházím z [6] a [7].

V úvodní části jsme uvedli, že portfolio je vlastně souborem aktiv, do kterých investujeme. Protože aktiva popisujeme pomocí náhodných proměnných, má rovněž smysl mluvit

o portfoliu těchto aktiv jako o náhodné vektoru 2.2.

Při skladbě investičního portfolia pracuje investor s určitým bohatstvím (kapitálem), které je ochoten do aktiv investovat. Toto bohatství označme jako vektor $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, kde složky y_j značí kapitál investovaný do j -té investiční příležitosti. Vektor \mathbf{y} uvažujeme takový, že $\sum_{j=1}^n y_j = 1$. Složky vektoru \mathbf{y} tedy nevyjadřují přesnou hodnotu investovaných prostředků, nýbrž procentuální množství celého kapitálu, přesněji tedy váhy, jakou budou investice v portfoliu mít.

Určení tohoto vektoru, jak se dále dozvíme, bude hlavním úkolem pro vyřešení optimalizační úlohy.

3.2.1. Očekávaná návratnost portfolia

Výnos portfolia se jistě odvíjí od výnosu kombinace aktiv v něm zahrnutých. Protože jsme aktivum modelovali jako náhodnou veličinou $d(\xi)$, popíšeme portfolio rovněž pomocí náhodné veličiny ζ , jakožto funkce náhodného vektoru $\mathbf{d}(\xi)$. O náhodných veličinách jakožto funkcích náhodného vektoru je možno se dočíst více v [1].

Teoretický výnos portfolia pak odpovídá lineární kombinaci teoretických výnosů aktiv, kde koeficienty lineární kombinace jsou námi zainvestované prostředky y_j , tedy

$$\zeta = \mathbf{d}^\top(\xi)\mathbf{y}.$$

Úkolem optimalizace portfolia je maximalizace jeho výnosu. Není možné maximalizovat náhodnou veličinu ζ , můžeme však maximalizovat některou její číselnou charakteristiku, v tomto případě střední hodnotu $E(\zeta)$ viz 2.9, matematicky zapsáno

$$\min E(\zeta) = E(\mathbf{d}^\top(\xi)\mathbf{x}).$$

S využitím sumačního zápisu máme tedy

$$\min E(\zeta) = E\left(\sum_{j=1}^n d_j(\xi)y_j\right).$$

Na základě vlastností náhodné veličiny uvedených v 2.9 můžeme střední hodnotu veličiny ζ vyjádřit jako

$$E(\zeta) = \sum_{j=1}^n E(d_j(\xi)y_j)$$

$$E(\zeta) = \sum_{j=1}^n E(d_j(\xi))y_j.$$

Protože jsme uvedli, že náhodný vektor $\mathbf{d}(\xi)$ je z rozdělení s parametrem $\boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{d}(\xi))$, můžeme rovnici upravit do tvaru

$$E(\zeta) = \sum_{j=1}^n \mu_j y_j$$

$$E(\zeta) = \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{y}.$$

3.2. PORTFOLIO JAKO NÁHODNÝ VEKTOR

Účelovou funkci naší optimalizační úlohy s náhodným vektorem návratností aktiv $\mathbf{d}(\boldsymbol{\xi})$ vyjádříme jako $\max z$, kde

$$z = \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{y}, \quad (3.2)$$

kde z je střední hodnota náhodné veličiny ζ , $z = E(\zeta)$. O této funkci z prohlásíme, že popisuje výnos portfolia. Účelová funkce z však zatím není úplná, neboť nezohledňuje možné riziko.

Poslední provedenou úpravou bude nahrazení vektoru středních hodnot $\boldsymbol{\mu}$ bodovým odhadem $\bar{\mathbf{d}}$, čímž dostaneme funkci

$$z_R = \bar{\mathbf{d}}^\top \mathbf{y} \quad (3.3)$$

popisující *očekávanou návratnost* portfolia. Index R (*Return*) značí, že účelová funkce popisuje návratnost (očekávanou), to proto, aby nedocházelo k případným kolizím značení s účelovou funkcí popisující očekávané riziko, kterou vytvoříme nyní.

3.2.2. Riziko portfolia

Úkolem optimalizace portfolia je kromě maximalizace očekávaného výnosu rovněž minimalizace očekávaného rizika. Připomeňme, že nelze minimalizovat náhodnou veličinu $\zeta = \mathbf{d}^\top(\boldsymbol{\xi})\mathbf{y}$. K popisu rizika využijeme opět číselnou charakteristiku náhodné proměnné ζ obdobně jako při popisu očekávaného výnosu. Myšlenou charakteristikou je rozptyl $\text{var}(\zeta)$ viz 2.10

Rozptyl veličiny ζ , $\text{var}(\zeta)$ je tedy roven

$$\text{var}(\zeta) = \text{var}(\mathbf{d}^\top(\boldsymbol{\xi})\mathbf{y}),$$

s využitím 2.10

$$\text{var}(\zeta) = \mathbf{y}^\top \text{var}(\mathbf{d}^\top(\boldsymbol{\xi}))\mathbf{y},$$

kde $\text{var}(\mathbf{d}^\top(\boldsymbol{\xi}))$ je variační matice náhodného vektoru $\mathbf{d}^\top(\boldsymbol{\xi})$, kterou jsme označili $\boldsymbol{\Sigma}$.

Účelová funkce z pak při použití stejného značení jako v 3.2 vypadá

$$\min \mathbf{y}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{y}.$$

O takto definované funkci z prohlásíme, že popisuje *riziko* portfolia.

Nakonec nahradíme variační matici $\boldsymbol{\Sigma}$ bodovým odhadem \mathbf{Q} , čímž dostaneme funkci

$$z_V = \mathbf{y}^\top \mathbf{Q} \mathbf{y} \quad (3.4)$$

popisující *očekávané riziko*.

Máme tedy vyjádření pro očekávanou návratnost a očekávané riziko portfolia. S těmito vyjádřeními budeme dále pracovat v kapitole 4.3. Index V (*Variance*) je opět použit k upřesnění značení. Nyní si ještě rozeberme některé již dříve zmíněné pojmy.

3.3. Korelace

V kapitole 2 jsme zavedli pojem kovariance jakožto charakteristiku náhodného vektoru viz 2.16. Nyní tento pojem dále rozvedeme.

„Pomocí kovariance popisuje statistika míru závislosti mezi dvěma náhodnými veličinami. Často se normuje pomocí příslušných směrodatných odchylek a mluví se pak o korelačním koeficientu“. [5] Mějme dvě náhodné proměnné ξ_1, ξ_2 modelující vývoj návratnosti dvou aktiv. Pak korelaci ρ_{12} mezi těmito náhodnými proměnnými ξ_1, ξ_2 vyjádříme jako

$$\rho_{12} = \rho(\xi_1, \xi_2) = \frac{\sigma(\xi_1, \xi_2)}{s(\xi_1)s(\xi_2)} = \frac{E[(\xi_1 - E\xi_1)(\xi_2 - E\xi_2)]}{s(\xi_1)s(\xi_2)} \quad (3.5)$$

Nyní si popíšeme některé vlastnosti korelačního koeficientu, které budeme v práci využívat. Důsledkem provedeného normování se hodnota korelačního koeficientu pohybuje v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.

„Je-li hodnota ρ_{12} blízká 1, pak se míry návratností ξ_1, ξ_2 chovají stejně v tom smyslu, že při růstu jedné z nich roste i druhá a naopak. Je-li koeficient korelace roven 1, pak je tato závislost lineární s kladnou směrnici.“

„Obdobně je-li hodnota ρ_{12} blízká -1 , pak se míry návratností ξ_1, ξ_2 chovají opačně v tom smyslu, že při růstu jedné z nich druhá klesá a naopak. Je-li koeficient korelace roven -1 , pak je tato závislost lineární se zápornou směrnici.“ [5]

Doplňme ještě, že za bodový odhad korelace považujeme číslo

$$r_{ij} = \frac{q_{ij}}{\hat{s}_i \hat{s}_j}, \quad (3.6)$$

kde q je bodový odhad kovariance a \hat{s} bodový odhad směrodatné odchylky.

Korelace mezi aktivy je jedním ze stěžejních ukazatelů při volbě aktiv do portfolia.

3.4. Diverzifikace

Jak jsme již zmínili v úvodu, nejen na akciových trzích, ale obecně platí, že diverzifikace portfolia snižuje jeho volatilitu. „Přesněji se tedy jedná o jev, kdy riziko portfolia je menší než riziko jeho libovolné složky.“ [5] Zatím jsme ale neukázali jak samotné diverzifikace docílit.

Vysvětleme si to na případu portfolia složeného z dvou aktiv A, B . Předpokládejme, že jsme z historických dat pomocí bodových odhadů určili, že aktiva budou mít očekávané návratnosti $\bar{d}_A = 0,11, \bar{d}_B = 0,14$ a očekávaná rizika v řeči směrodatných odchylek $\hat{s}_A = 0,09, \hat{s}_B = 0,16$.

Očekávané riziko portfolia jsme odvodili v 3.4 jako

$$z_V = \mathbf{y}^\top \mathbf{Q} \mathbf{y}.$$

3.4. DIVERZIFIKACE

Tuto rovnici převedeme na sumační tvar, dále pak nahradíme bodový odhad kovariance bodovým odhadem korelace dle 3.6.

$$z_V = \mathbf{y}^T \mathbf{Q} \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n y_i^2 \hat{s}_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1(j \neq i)}^n y_i y_j \hat{s}_i \hat{s}_j r_{ij}.$$

Protože máme pouze dvě aktiva, zjednodušíme tento obecný vzorec přesným vyjádřením sumačních vztahů, abychom mohli jednoduše dosadit známé hodnoty. Využijeme také faktu, že pro 2-rozměrný vektor vah musí platit, že pokud $y_A = y$, pak $y_B = 1 - y$. Nakonec výraz odmocníme, abychom dostali riziko „v řeči“ směrodatné odchylky.

Pozn.: Index funkce pro přesnost přeznačíme z z_V na z_{SD} (standard deviation).

$$z_{SD} = \sqrt{((y^2)\hat{s}_A^2 + (1 - y)^2\hat{s}_B^2 + 2y(1 - y)\hat{s}_A\hat{s}_B r_{AB})}$$

Tento vztah nám tedy popisuje riziko 2-prvkového portfolia v závislosti na přidělení váze y a korelaci ρ_{AB} mezi aktivy A,B. Tvar s vyjádřením korelace jsme zvolili, protože chceme ukázat, jaký vliv na vztah návratnost-riziko mají extrémní případy korelace popsané v předchozí kapitole.

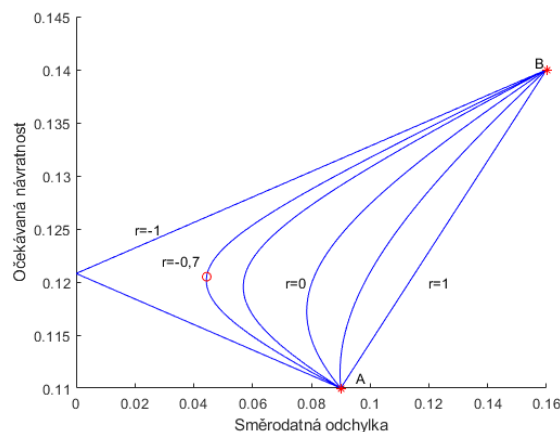
Z 3.2.1 získáme vyjádření účelové funkce pro očekávanou návratnost

$$z_R = \sum_{j=1}^n \bar{d}_j y_j.$$

Opět se zbavíme sumačního zápisu

$$z_R = \bar{d}_A y + \bar{d}_B (1 - y).$$

Diverzifikaci demonstrujeme na následujícím obrázku. V rovině (z_{SD}, z_R) máme pro zvolený korelační koeficient r , $(-1 \leq r \leq 1)$ uvažovaných složek A,B vyobrazen průběh očekávaného zisku a rizika portfolia jako funkci váhy y složky A.



$\bar{d}_A=0.11$; $\bar{d}_B=0.14$; $s_A=0.09$; $s_B=0.16$; $n=1000$;
 $r=[-1 \ -0.7 \ -0.5 \ 0 \ 0.5 \ 1]$;

```

y=linspace(0,1,n);

for j=1:length(r)
for i=1:length(y)
z_R=y(i)*d_A+(1-y(i))*d_B;
z_SD=sqrt((y(i)*y(i)*s_A*s_A)+((1-y(i))*(1-y(i))*s_B*s_B)
+(2*y(i)*(1-y(i))*s_A*s_B*r(j))); %směrodatná odchylka
data(1,i)=z_R;
data(2,i)=z_SD;
end
plot(data(2,:),data(1,:),'-b')
end

```

„Z obrázku je zřejmé, že diverzifikace portfolia je snáze dosažitelná při $\rho \rightarrow -1$, tj. jsou-li jeho složky mezi sebou dostatečně záporně korelované. To má přirozený důvod: jestliže cena prvního aktiva na trhu klesá, pak portfolio zachrání růst ceny druhého aktiva, a naopak.“[5]

Zaměříme se nyní na linii označenou červeným kolečkem. Ta odpovídá průběhu pro bodový odhad korelace $r_{AB} = -0,7$. Bod označený tímto kolečkem je portfolio, ve kterém má aktivum A 65% zastoupení a aktivum B 35% zastoupení. Očekávaná návratnost tohoto portfolia je asi 0,12, tedy vyšší než při investici pouze do portfolia A, ale nižší než by byla, investovali bychom pouze do aktiva B, jehož očekávaná výnosnost byla 0,16.

Důležitým faktem je, že očekávané riziko tohoto portfolia je však podstatně menší, než tomu je u obou aktiv zvlášť. Podíváme-li se, jak vypadá průběh pro $r \rightarrow 1$, můžeme vidět, že k diverzifikaci vůbec nedochází.

„Dobře diverzifikované portfolio by proto mělo mít své podstatné složky záporně korelované.“[5]

Dodejme ještě poznámku k bodu zlomu na linii $r = -1$. Od portfolia odpovídajícího tomuto bodu investor očekává jistý výnos, protože očekávané návratnosti obou aktiv byly kladné a směrodatná odchylka tohoto portfolia je nulová. Tento případ je prakticky nereálný, protože jen obtížně bychom hledali aktiva, která by byla dokonale záporně korelovaná.

Poté co jsme si problém diverzifikace objasnili na konkrétním příkladě, rozebereme si jej znovu ještě obecněji. Vycházet v následující části budu z [18].

Vyjdeme z rovnice popisující teoretický rozptyl portfolia

$$\text{var}(\zeta) = \mathbf{y}^\top \Sigma \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n y_i^2 \text{cov}_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1(j \neq i)}^n y_i y_j \text{cov}_{ij}. \quad (3.7)$$

Obsahuje-li portfolio pouze nekorelovaná aktiva ($\text{cov}_{ij} = 0$), pak platí

$$\text{var}(\zeta) = \mathbf{y}^\top \Sigma \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n y_i^2 \text{cov}_i^2.$$

3.4. DIVERZIFIKACE

Riziko portfolia je tedy (jak se dalo předpokládat) rovno pouze součtu rizik jednotlivých složek. Obsahuje-li však rovněž korelovaná aktiva, mezi která je navíc kapitál rovnoměrně rozložen, tedy $y_i = \frac{1}{n} \forall i \subseteq N$, pak lze rovnici 3.7 zapsat do tvaru

$$\text{var}(\zeta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\text{cov}_i^2}{n} + \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1(j \neq i)}^n \frac{\text{cov}_{ij}}{n(n-1)},$$

kde 1. člen součtu značí průměrný rozptyl aktiv a 2. člen průměrnou kovarianci mezi aktivy

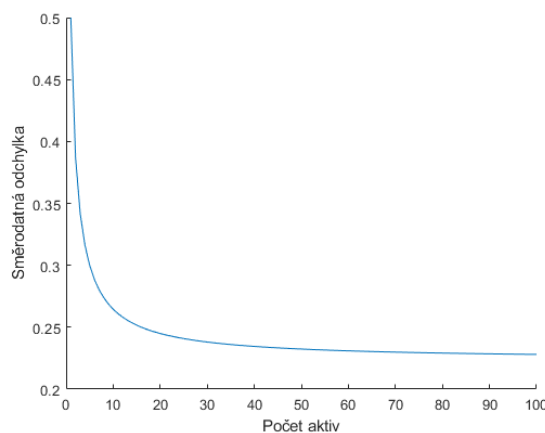
$$\text{var}(\zeta) = \frac{1}{n} \overline{\text{cov}_i^2} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \overline{\text{cov}_{ij}}.$$

Podívejme se co se stane, budeme-li zvyšovat počet aktiv v našem portfoliu.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}(\zeta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \overline{\text{cov}_i^2} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \overline{\text{cov}_{ij}} = \overline{\text{cov}_{ij}}$$

Tento vztah nám říká, že když se bude množství aktiv v našem portfoliu limitně blížit nekonečnu, nebude riziko portfolia vůbec závislé na rizikovosti jednotlivých aktiv. Pochopitelně je třeba tento výsledek brát s jistým nadhledem, protože zde popisujeme v podstatě nereálnou situaci.

Následující obrázek znázorňuje sílu diverzifikace s ohledem na celkové riziko portfolia.



Obrázek 3.1: Závislost rizika na počtu aktiv

Pozn. graf byl vykreslen pro parametry průměrných rozptylů 0, 25 a průměrné kovariance 0, 05.

Z grafu můžeme usoudit, že nemá smysl diverzifikovat do enormně vysokých počtů N , protože dále už riziko klesá velmi pomalu s rostoucím počtem aktiv a reálně by investor prodělal na poplatcích spojených s nákupem tak velkého množství aktiv.

```
[sd_p] = index_variance()
plot(1:m,sd_p)
xlabel('Pocet aktiv')
ylabel('Smerodatná odchylka')
```

```

function [sd_p] = index_variance()
sd=0.5; q=0.05; n=100;
sd_p(1:n)=0;

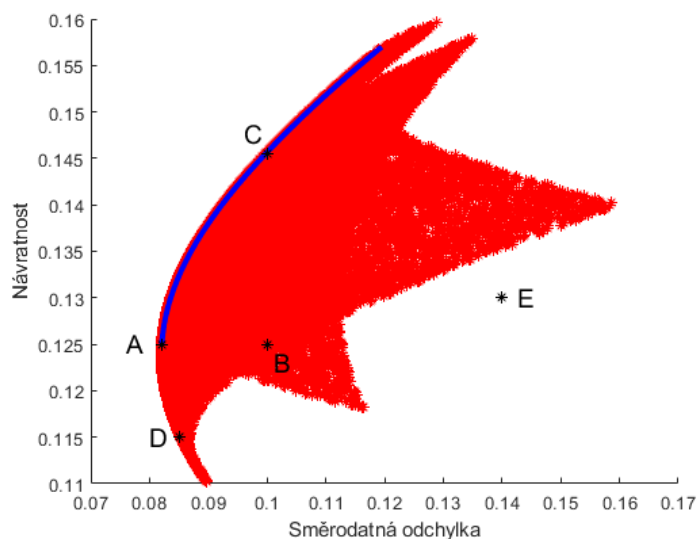
for j=1:n %naplnění varianční matice
Q(1:j,1:j)=q;
for i=1:j
Q(i,i)=sd^2;
end
y(1:j,1)=1/j; %podmínka rovnoměrného rozložení bohatství mezi aktiva
sd_p(j) = sqrt(y'*Q*y); %směrodatná odchylka
end
end

```

3.5. Efektivní hranice

Jsou-li dány nikoliv 2 aktiva, nýbrž obecně N aktiv, pak můžeme v rovině (z_{SD}, z_R) znázorňovat jejich různé kombinace (viz předchozí kapitola v níž jsme znázorňovali kombinace dvou aktiv A, B).

Všechny možné kombinace výchozích aktiv tvoří *přípustnou množinu* nebo také množinu přípustných řešení. Má tzv. "deštníkový tvar", viz obrázek níže, který byl zkonstruován pro tři různá aktiva. Modrá linie se nazývá *efektivní hranice*. Tvoří ji taková množina portfolií, která pro danou úroveň návratnosti vykazují nejmenší riziko, respektive pro danou úroveň rizika vykazují nejvyšší návratnost. Tato portfolia nazýváme *efektivní*.



Obrázek 3.2: Efektivní hranice

V obrázku je vyznačeno pět portfolií A,B,C,D,E. Portfolia A,B,C,D jsou přípustná. Tedy kombinací uvažovaných tří aktiv jsem schopen získat portfolia o odpovídajícím očekávaném riziku a očekávané návratnosti. To neplatí o portfoliu E, které nezískám žádnou kombinací vstupních aktiv.

3.5. EFEKTIVNÍ HRANICE

Portfolia A,C jsou efektivní. Obě totiž pro danou úroveň návratnosti vykazují nejnížší možné riziko. Portfolio B je sice přípustné, není však efektivní, protože při dané úrovni rizika je zde portfolio C, které vykazuje vyšší návratnost. Analogicky portfolio A má sice stejnou očekávanou návratnost, ale při podstoupení nižšího rizika.

Nakonec máme portfolio D, které by se mohlo zdát na první pohled jako efektivní, ale není. Má sice pro danou úroveň očekávané návratnosti nejnížší směrodatnou odchylku, ale pro tuto směrodatnou odchylku existují portfolia s vyšší očekávanou návratností.

Platí tedy, že žádnou kombinací aktiv nezískáme portfolio nad efektivní hranicí, zároveň není žádoucí vybírat portfolio pod ní, viz [5].

4. Optimalizace portfolia

Několikrát jsme již narazili na slova jako model, optimalizace, případně účelová funkce, dosud jsme však jejich význam zcela nevysvětlili. Předtím, než se tedy vrhneme na řešení úlohy optimalizace portfolia, bude následovat krátký přehled nejzákladnějších pojmů a definic souvisejících s optimalizací.

4.1. Základní pojmy z optimalizace

Definice 4.1. Necht $S \subset \mathbb{R}^n$ a $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Pak definujeme matematický model optimalizační úlohy následovně:

$$\min_{\mathbf{x}} \{f(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in S\}.$$

V obecné úloze tedy minimalizujeme nějakou funkci $f(\mathbf{x})$ vzhledem k její proměnné \mathbf{x} na množině, která je určena omezujícími podmínkami. Cílem optimalizační úlohy je pak najít tuto hodnotu argumentu funkce (tedy proměnné \mathbf{x}). Z toho důvodu můžeme přeformulovat úlohu na

$$? \in \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} \{f(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in S\}$$

viz [19, 10].

Pozn.: podle potřeby lze minimalizační úlohu přeformulovat na maximalizační.

Definice 4.2. Množinu vektorů \mathbf{x} splňující omezující podmínky např. $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ a $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ charakterizující množinu S nazveme množinou přípustných řešení dané úlohy [20].

Definice 4.3. Řešení $\bar{\mathbf{x}}$ z množiny přípustných řešení nazveme optimálním řešením, pokud $\mathbf{c}^\top \bar{\mathbf{x}} \leq \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$, kde vektory \mathbf{x} jsou vektory přípustných řešení [20].

Definice 4.4. Necht $S \subset \mathbb{R}^n$ a $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ a $O_\varepsilon(\mathbf{x})$ je epsilonové okolí bodu $\mathbf{x} \in S$. Pak definujeme $\mathbf{x}_{\min} \in S$ jako bod *lokálního minima* funkce f na S právě tehdy, když

$$\exists O_\varepsilon(\mathbf{x}_{\min}) : \forall \mathbf{x} \in S \cap O_\varepsilon(\mathbf{x}_{\min}) \setminus \{\mathbf{x}_{\min}\} : f(\mathbf{x}_{\min}) \leq f(\mathbf{x}).$$

viz [19, 8].

Definice 4.5. Necht $S \subset \mathbb{R}^n$ a $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. Pak definujeme $\mathbf{x}_{\min} \in S$ jako bod *globálního minima* funkce f na S právě tehdy, když

$$\forall \mathbf{x} \in S \setminus \{\mathbf{x}_{\min}\} : f(\mathbf{x}_{\min}) \leq f(\mathbf{x}).$$

viz [19, 8].

Jedna z nejdůležitějších vět optimalizace hovořící o existenci globálního minima je *Weierstrassova věta*.

Věta 4.6. (Weierstrass) Necht $S \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná a kompaktní množina a $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce na S , pak matematický model $\min_{\mathbf{x}} \{f(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in S\}$ dosahuje globálního minima [19, 8].

4.2. DRUHY OPTIMALIZAČNÍCH ÚLOH

Definice 4.7. Necht $S \subset \mathbb{R}^n$. Říkáme, že množina S je *konvexní* právě tehdy, když $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S, \forall \lambda \in (0; 1) : \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2 \in S$ [19, 8].

Definice 4.8. Necht $S \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná a konvexní množina a $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. Říkáme, že funkce f je konvexní na S právě tehdy, když $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S, \forall \lambda \in (0; 1) : f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2) \leq \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda) f(\mathbf{x}_2)$ [19, 8].

Věta 4.9. Necht $S \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná a konvexní množina a $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ je konvexní funkce na S . Dále necht $\bar{\mathbf{x}} \in \operatorname{arglocmin}_x \{f(x) | x \in S\}$, pak $\bar{\mathbf{x}} \in \operatorname{argglobmin}_x \{f(x) | \mathbf{x} \in S\}$. [19, 8]

4.2. Druhy optimalizačních úloh

V této podkapitole uvedeme některé druhy optimalizačních úloh ve smyslu typu účelové funkce respektive omezujících podmínek. Uvádět budeme pouze takové typy, které jsme v práci využili [10, 19].

Úlohou *lineárního programování* (zkr. LP) myslíme takovou úlohu, jejíž účelová funkce i všechna omezení mají tvar lineárních funkcí. Jedná se tedy o soustavu lineárních rovnic, kterou lze vhodnými úpravami (doplněním o doplňkové proměnné) převést na soustavu rovnic lineárních a matematický model pak zapsat jako

$$\min_{\mathbf{x}} \{ \mathbf{c}^\top \mathbf{x} | \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \},$$

kde \mathbf{A} je matice soustavy dimenze $m \times n$, \mathbf{b} je vektor pravé strany dimenze m a \mathbf{c} je vektor koeficientů účelové funkce dimenze n .

Dodejme, že úlohy lineárního programování jsou vždy konvexní, hledáme vždy tedy minimum konvexní funkce na konvexní množině. V takovém případě je každé nalezené lokální minimum vždy globálním.

Úlohou *nelineárního programování* (zkr. NLP) myslíme takovou úlohu, jejíž účelová funkce případně některé z omezení obsahují nelineární výrazy. Obecně tuto úlohu můžeme zapsat jako

$$\min_{\mathbf{x}} \{ f(\mathbf{x}) | \mathbf{g}(\mathbf{x}) \circ \mathbf{0}; \mathbf{x} \in S \}, \quad (4.1)$$

kde značením \circ myslíme symboly $=, \geq, \leq$. Nelineární úlohy jsou obecně nekonvexní, mohou být však také konvexní v případě, že množina přípustných řešení (tedy taková, která splňuje všechny omezující podmínky) je konvexní množina a účelová funkce je rovněž konvexní.

Nakonec úlohou *kvadratického programování* (zkr. QP) jakožto druhu nelineární optimalizace myslíme takovou úlohu, která se dá obecně zapsat ve tvaru

$$\min_{\mathbf{x}} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{c}^\top \mathbf{x} | \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}; \mathbf{x} \in S \right\},$$

kde $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ jsou již zmíněné struktury, viz lineární programování a \mathbf{Q} je symetrická matice dimenze $n \times n$.

4.3. Formulace Markowitzovy úlohy

K sestavení účelové funkce Markowitzova modelu využijeme funkce z_R a z_V pro očekávaný výnos a očekávané riziko odvozené v kapitolách 3.2.1 a 3.2.2.

$$\begin{aligned} \max \bar{\mathbf{d}}^\top \mathbf{y} \\ \min \mathbf{y}^\top \mathbf{Q} \mathbf{y} \end{aligned}$$

Nastává zde problém v tom, že máme více kritérií a potřebujeme sloučit minimalizační a maximalizační úlohu do jedné. Převědeme tedy první rovnici na minimalizační vynásobením -1 . Nakonec vytvoříme jednu účelovou funkci z jako vážený průměr předchozím dvou, tedy

$$\min \lambda \mathbf{y}^\top \mathbf{Q} \mathbf{y} - (1 - \lambda) \bar{\mathbf{d}}^\top \mathbf{y}.$$

Koeficient λ je pak parametr z intervalu $[0, 1]$, který se vhodně zvolí.

Následující vyjádření účelové funkce z

$$\min \lambda \mathbf{y}^\top \mathbf{Q} \mathbf{y} - (1 - \lambda) \bar{\mathbf{d}}^\top \mathbf{y}$$

spolu s omezujícími podmínkami

$$\begin{aligned} \mathbf{1}^\top \mathbf{y} &= 1, \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

tvoří zadání Markowitzovy úlohy.

Ukažme si nyní dvě různé modifikace této úlohy. První spočívá v maximalizaci očekávaného výnosu

$$\max \bar{\mathbf{d}}^\top \mathbf{y}$$

za podmínek

$$\mathbf{y}^\top \mathbf{Q} \mathbf{y} \leq q_0 \tag{4.2}$$

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{y} = 1 \tag{4.3}$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \tag{4.4}$$

kde podmínkou 4.3 říkáme, že očekávané riziko musí být menší než předem zvolená konstanta.

Druhou modifikací je pak minimalizace rizika

$$\min \mathbf{y}^\top \mathbf{Q} \mathbf{y}$$

za podmínek

4.4. LAGRANGEOVA FUNKCE

$$\bar{\mathbf{d}}^\top \mathbf{y} \geq d_0 \quad (4.5)$$

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{y} = 1 \quad (4.6)$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \quad (4.7)$$

kde podmínkou 4.6 říkáme, že očekávaný výnos musí být větší nebo roven předem zvolené konstantě.

Poslední modifikaci Markowitzovy úlohy se pokusíme v následující kapitole vyřešit s použitím *Lagrangeovy funkce*.

4.4. Lagrangeova funkce

Připomeňme, že hledáme minimum funkce

$$z = \mathbf{y}^\top \mathbf{Q} \mathbf{y}$$

splňující

$$\mathbf{y}^\top \bar{\mathbf{d}} = d_0$$

$$\mathbf{y}^\top \mathbf{1} = 1.$$

Podmínku $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ během řešení nebudeme uvažovat z důvodů zjednodušení analytického výpočtu. Opomenutí této podmínky má rovněž své ekonomické opodstatnění. Příklad $x_j < 0$ vyjadřuje tzv. *krátký prodej*. Znamená to, že investor může prodat cenný papír, který sám nevlastní [6].

Vytvoříme novou rovnici, do které s využitím *Lagrangeových multiplikátorů* λ_1, λ_2 zahrneme naše lineární podmínky

$$L = \mathbf{y}^\top \mathbf{Q} \mathbf{y} + \lambda_1 [d_0 - \mathbf{y}^\top \bar{\mathbf{d}}] + \lambda_2 [1 - \mathbf{y}^\top \mathbf{1}]$$

Tuto rovnici následně zderivujeme podle proměnných $\mathbf{y}^\top, \lambda_1, \lambda_2$ a položíme rovny 0.

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{Q} \mathbf{y} - \lambda_1 \bar{\mathbf{d}} - \lambda_2 \mathbf{1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = d_0 - \mathbf{y}^\top \bar{\mathbf{d}} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 1 - \mathbf{y}^\top \mathbf{1} = 0.$$

Z první rovnice osamostatníme vektor \mathbf{y}

$$\mathbf{y} = \mathbf{Q}^{-1}(\lambda_1 \bar{\mathbf{d}} + \lambda_2 \mathbf{1}) = \lambda_1 \mathbf{Q}^{-1} \bar{\mathbf{d}} + \lambda_2 \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{1} = 0 \quad (4.8)$$

Tuto rovnici následně vynásobíme postupně vektory $\bar{\mathbf{d}}^\top$ a $\mathbf{1}^\top$.

$$\bar{\mathbf{d}}^\top \mathbf{y} = \lambda_1 \bar{\mathbf{d}}^\top \mathbf{Q}^{-1} \bar{\mathbf{d}} + \lambda_2 \bar{\mathbf{d}}^\top \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{1} = d_0 \quad (4.9)$$

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{y} = \lambda_1 \mathbf{1}^\top \mathbf{Q}^{-1} \bar{\mathbf{d}} + \lambda_2 \mathbf{1}^\top \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{1} = \bar{d} \quad (4.10)$$

Pro potřeby výpočtů provedeme v rovnicích 4.9 4.10 následující substituce:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{d}}^\top \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{1} &= A \\ \bar{\mathbf{d}}^\top \mathbf{Q}^{-1} \bar{\mathbf{d}} &= B \\ \mathbf{1}^\top \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{1} &= C \end{aligned}$$

Z rovnic 4.9 4.10 vyjádříme neznámé λ_1, λ_2

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{Cd_0 - A}{D} \\ \lambda_2 &= \frac{B - Ad_0}{D} \\ D &= BC - A^2. \end{aligned}$$

Vyjádřené lambdy dosadíme do 4.8 a po několika úpravách dostaneme

$$\mathbf{y} = \frac{1}{D}[B\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{1} - A\mathbf{Q}^{-1}\bar{\mathbf{d}}] + \frac{1}{D}[C\mathbf{Q}^{-1}\bar{\mathbf{d}} - A\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{1}]d_0.$$

Získali jsme vyjádření pro optimální vektor vah pro vstupní variační matici \mathbf{Q} a vektor očekávaných návratností $\bar{\mathbf{d}}$.

Postup naznačený v této kapitole byl převzat z [18].

4.5. Aplikace na historických datech

V této části si zkusíme námi vytvořený model aplikovat na reálná data. Využijeme dostupná data o cenách akcií největších amerických firem (index S&P500). Zvolíme si do portfolia tři firmy (Facebook, Coca-Cola, United Airlines Holdings). Na obrázku vpravo můžeme vidět časové řady zachycující vývoj cen těchto akcií v letech 2013-2016. Konkrétní hodnoty cen máme zapsány v souboru Excel, zde uvedu pouze ukázkou, jak tyto údaje (statistický soubor) vypadá. Tyto hodnoty představují realizace γ_j^s náhodného vektoru $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\xi})$, který jsme poprvé zmínili již v kapitole 3.2.1.

Pomocí vzorce 3.1 převedeme hodnoty cen na návratnosti vyjádřené v %. Připomeňme, že pro náhodný vektor \mathbf{d} předpokládáme $\mathbf{d} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ s parametry $\boldsymbol{\mu}$ a $\boldsymbol{\Sigma}$, které nyní nahradíme jejich bodovými odhady. Bodový odhad $\bar{\mathbf{d}}$ parametru $\boldsymbol{\mu}$ určíme pomocí výběrového průměru viz 2.2.

Bodový odhad $\bar{\mathbf{d}}$ příslušný našemu statistickému souboru je tedy s využitím předchozího vzorce roven

$$\bar{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} 0,1666 \\ 0,0122 \\ 0,1342 \end{pmatrix}.$$

4.6. IMPLEMENTACE V MATLABU

s	γ_1^s	γ_2^s	γ_3^s
08.02.2013	28,545	38,77	26,31
09.02.2013	28,26	38,61	26,51
10.02.2013	27,37	37,56	25,89
11.02.2013	27,906	37,21	26,19
	⋮		⋮
27.12.2016	116,92	41,39	73,53
28.12.2016	116,35	41,6	73,28
29.12.2016	115,05	41,46	72,88
30.12.2016	116,86	41,8	72,71



Bodový odhad Σ je matice \mathbf{Q} viz 2.4, která má pro náš statistický soubor hodnotu

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 4,7795 & 0,3509 & 1,2253 \\ 0,3509 & 0,8979 & 0,4797 \\ 1,2253 & 0,4797 & 6,1286 \end{pmatrix}.$$

Připomeňme ještě matematický zápis úlohy. Rovněž připomínám, že podmínka $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ byla vyloučena.

$$\min \mathbf{y}^\top \mathbf{Q} \mathbf{y}$$

$$\bar{\mathbf{d}}^\top \mathbf{y} = d_0$$

$$\mathbf{A} \mathbf{y} = \mathbf{b}$$

Výsledky:

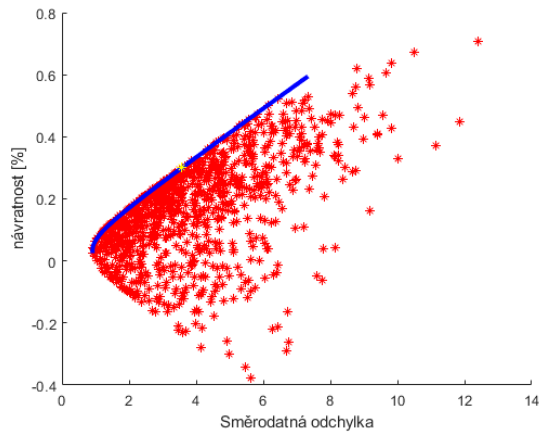
x_1	x_2	x_3	z
1,3205	-1,0082	0,6876	3,57366

Evidentně akcie odpovídající prvku x_2 není do portfolia vhodná, proto u ní využijeme možnosti krátkého prodeje.

Vykresleme si rovněž efektivní hranici pro výše vypsané parametry. Připomeňme, že efektivní hranici chápeme jako množinu optimálních vektorů \mathbf{y} , tedy takových, kterým náleží nejmenší možný rozptyl pro danou úroveň očekávané návratnosti portfolia. Pro námi zadanou hodnotu d_0 optimální portfolio (označeno žlutou hvězdičkou) skutečně leží na efektivní hranici.

4.6. Implementace v Matlabu

Tato podkapitola obsahuje ukázky kódů v Matlabu, které byly použity k vytvoření modelu a vyřešení Markowitzovy úlohy. Při verifikaci vybraných výsledků byl rovněž využit



Obrázek 4.2: Efektivní hranice

GAMS [14].

Vstupní parametry:

```
hold on;
data = xlsread('sap500data.xlsx','A1:C983');
returns = price2ret(data,[],'Periodic')*100;

d=mean(returns); %vektor očekávaných návratností
Q=cov(returns); %bodový odhad varianční matice
d = d'; i=1;
d0=[0.3]; %očekávaný výnos portfolia
```

Volání funkce k nalezení optimálního vektoru y .

```
[y,z_SD] = markowitz(d,Q,d0,i)
plot(z_SD,d0,'y*')

function [y] = markowitz(d,Q,d0,i) %algoritmus dle kapitoly 4.4.
vc=inv(Q);
vec_ones(1:size(d),1)=1;
A=vec_ones'*vc*d;
B=d'*vc*d;
C=vec_ones'*vc*vec_ones;
D=B*C-(A*A);
lam1 = (C*d0(i)-A)/D;
lam2 = (B-A*d0(i))/D;
wts = lam1*vc*d + lam2*vc*vec_ones;
g=((1/D)*(B*vc*vec_ones-A*vc*d));
h=((1/D)*(C*vc*d-A*vc*vec_ones));
y=g+h*d0(i);
z_SD=sqrt(y'*Q*y) %směrodatná odchylka
end
```

Vykreslení části množiny přípustných řešení.

4.6. IMPLEMENTACE V MATLABU

```
[z_SD,z_R] = portfolio_map(Q,d);
plot(z_SD,z_R,'r*')

function [z_SD,z_R] = portfolio_map(Q,d)
n=1000; %počet náhodně vygenerovaných portfolií
rnd = normrnd(0,1,[(size(d,1)-1) n]); %náhodnost je z normálního rozdělení
one=ones(1,n);
y(size(d,1),n) = 0;
y(1,1:n)=one;

for j=2:size(d,1) %generování náhodných vektorů y
y(j,1:n)=rnd(j-1,1:n);
y(1,1:n)=y(1,1:n)-y(j,1:n);
end

z_R = d'*y;
z_SD=zeros(1,n);
for j=1:n
yy=y';
z_SD(j)=sqrt(yy(j,:)*Q*y(:,j));
end
end
```

Vykreslení efektivní hranice

```
[z_SD,z_R] = efficient_frontier(d,Q,d0,i);
plot(z_SD',z_R,'b','LineWidth',3);

function [z_SD,z_R] = efficient_frontier(d,Q,d0,i)
y_ave = 0.025:0.01:0.6;
z_R = y_ave';
z_SD = zeros(1,size(z_R,1));
for i=1:size(z_R)
y = markowitz(d,Q,z_R,i);
z_SD(i)=sqrt(y'*Q*y);
end
end
```

5. Síťový model

Druhý model, kterým se v práci zabývám, je tzv. síťová úloha, [11, 15, 16]. K ní nejdříve uvedeme několik základních definic z teorie grafů [15, 16]. Následně pak naformulujeme samotnou úlohu a rovněž ji pro elementární modelová data vyřešíme.

5.1. Teorie grafů

Grafem zde narozdíl od klasické matematiky rozumíme algebraickou strukturu, která slouží k popisu vztahů mezi objekty. Objekty jsou pak znázorňovány pomocí vrcholů. Každé dva vrcholy, mezi kterými je nějaký vztah, jsou pak propojené hranami.

Definice 5.1. Graf G je uspořádaná dvojice $G = (V, E)$, kde V je neprázdná množina vrcholů a E je množina hran. Hrana je pak množinou některých dvouprvkových podmnožin V [22].

Definice 5.2. Orientovaným grafem rozumíme uspořádanou dvojici $G = (V, E)$, kde V je množina vrcholů a $E \subseteq V \times V$ množina orientovaných hran. Hrana pak již není dvouprvkovou podmnožinou, nýbrž uspořádanou dvojicí [22].

Definice 5.3. Graf H nazveme podgrafem grafu G , jestliže $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G)$. Zkráceně tedy $H \subseteq G$ [22].

Definice 5.4. Síť nazveme čtveřicí $S = (G, z, s, w)$, kde G je orientovaný graf. Vrcholy $z \in V(G)$, $s \in V(G)$ budeme nazývat zdroj a stok v síti S . Funkce $w : E(G) \rightarrow R^+$ je kladné ohodnocení hran, které každé hraně přiřadí tzv. kapacitu hrany [22].

Definice 5.5. Funkci $f : E(G) \rightarrow R_0^+$ nazveme tokem v síti $S = (G, z, s, w)$ [22].

5.2. Formulace úlohy

Struktura síťové úlohy je definována s pomocí orientovaného grafu.

Vrcholy grafu, které reprezentují města, mají přiřazené určité množství zboží b_j , $j = 1, \dots, m$. Některá města toto zboží poptávají (těm přiřazujeme zápornou hodnotu b), jiná zase nabízejí (těm naopak hodnotu kladnou b). Některá fungují pouze jako přepravní, tedy $b_j = 0$ pro daný přepravní vrchol j . Budeme uvažovat rovněž zjednodušující předpoklad, že suma poptávek je rovna sumě nabídek (tzv. vyvážená úloha).

Hrany tohoto grafu, které propojují jeho vrcholy, reprezentují cesty potažmo přepravní spojení mezi městy. Každé hraně i je přiděleno číslo c_i , $i = 1, \dots, n$ reprezentující náklady na převoz jednotkového množství zboží po této hraně.

Toto množství zboží převáženo po hraně i , značíme x_i a nazýváme jej rovněž tokem hranou i . Každé hraně je pak přidělena hodnota lb (*lower bound*), která značí dolní mez možného toku příslušnou hranou. Horní mez toku bychom označili jako ub , tu ale v práci uvažovat nebudeme. Problém síťové úlohy z hlediska optimalizace je nalezení takového podgrafu, resp. vektoru toků x_i , aby náklady na přepravu v rámci celé sítě byly minimální.

Síťová úloha je úlohou lineární optimalizace, můžeme ji tedy zapsat jako

$$\min \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$$

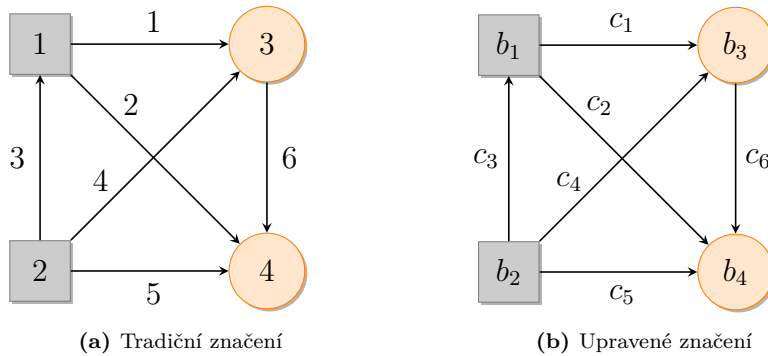
5.2. FORMULACE ÚLOHY

při splnění podmínek

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (5.1)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \quad (5.2)$$

Uvažujme síť zobrazenou grafem (a). Tato síť obsahuje čtyři uzly dle tradičního značení pojmenované jako 1, 2, 3, 4. Uzly jsou spojené 6 hranami rovněž pojmenovanými 1, 2 atd. Uzlům jsou přiděleny kapacity (šedé čtverce) respektive poptávky (oranžové kruhy) b_i . Síť tedy neobsahuje žádný přepravní uzel. Všem hranám jsou přiděleny ceny c_i určující náklady na převoz jednotkového množství. Orientaci a popis situací si usnadníme tak, že budeme uzly a hrany označovat podle jejich příslušných charakteristických hodnot, tedy uzel 1 jako uzel b_1 , hranu 1 jako hranu c_1 . Tohoto značení viz obrázek (b) se budeme dále držet.



Systém hran propojující vrcholy je zaznamenán tzv. incidenční maticí \mathbf{A} . Ta obsahuje pouze čísla 1, -1 , 0 podle toho, jaký vztah má hrana c_i k příslušnému uzlu b_j . Zobražíme ji následující tabulkou. Např. prvek tabulky $a_{b_1 c_1} = 1$, protože hrana c_1 vystupuje z uzlu b_1 . Prvek $a_{b_3 c_3} = 0$, protože hrana c_3 nemá s uzlem b_3 žádný vztah.

\mathbf{A}	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6
b_1	1	1	-1	0	0	0
b_2	0	0	1	1	1	0
b_3	-1	0	0	-1	0	1
b_4	0	-1	0	0	-1	-1

Obrázek 5.2: Incidenční matice

Vektor \mathbf{b} zvolím takový, aby naše úloha byla vyvážená, tedy suma poptávek je rovna sumě nabídek ($|b_1 + b_2| = |b_3 + b_4|$). Ve vektoru \mathbf{c} zvolíme některé ceny jako nulové, tedy převoz po této hraně nás nic nestojí. Kapacity hran budou zdola ohraničené 0 dle podmínky 5.2 a shora neohraničené.

Vstupní data:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ -100 \\ -100 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{lb} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

K řešení této úlohy použijí funkci *linprog* v programovacím jazyce Matlab.

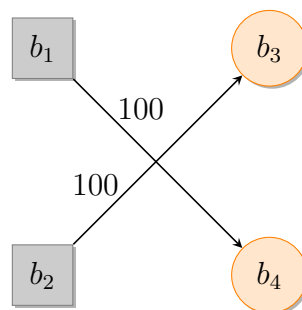
```
c=[1;0;1;0;1;1]; %účelová funkce
A=[1 1 -1 0 0 0;0 0 1 1 1 0;-1 0 0 -1 0 1;0 -1 0 0 -1 -1]; %incidenční matice
b=[100;100;-100;-100]; %vektor nabídek/poptávek
lb=[0;0;0;0;0;0]; %vektor dolních mezí
ub=[]; %vektor horních mezí
```

```
[x,fval] = linprog(c,[],[],A,b,lb,ub)
%výstupem je optimální vektor toků x a hodnota minimálních nákladů fval
```

Výsledky:

Kromě optimálního vektoru toků \mathbf{x} uvedeme ve výstupní tabulce také hodnotu účelové funkce z , tedy celkové náklady. Optimální vektor \mathbf{x} znázorníme také graficky v rámci síťového grafu.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z
0	100	0	100	0	0	0



Vyhodnocení:

Zcela očekávaně jsou jako optimální řešení vyhodnoceny toky skrze hrany c_2 a c_4 , neboť náklady na převoz po těchto hranách byly nulové. Z toho plyne, že i celkové náklady jsou nulové a účelová funkce nabývá pro tento vektor \mathbf{x} svého minima.

Pozn.: K řešení síťových úloh se také využívá modifikace simplexové metody nazývaná síťová simplexová metoda. Ta využívá řídkosti incidenční matice. O síťové simplexové metodě je možné se dočíst více v [17].

5.2.1. Aplikace modelu na velká data

Předchozí příklad jsme volili triviálně, abychom na něm názorně vysvětlili princip modelu. V této části pro úplnost práce ilustruji pomocí programovacího jazyka Matlab aplikova-

5.2. FORMULACE ÚLOHY

telnost modelu na rozsáhlejší úlohu.

Sít, na které budeme data aplikovat, má následující incidenční matici.

```
A=[1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
-1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 -1 -1 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 -1 0 0 -1 0 0 -1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 -1 0 0 -1 0 0 -1 0 0 0 1 1 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 -1 0 0 -1 0 0 -1 0 0 0 0 1 1 0 0;
0 0 0 0 0 0 -1 0 0 -1 0 0 -1 0 0 0 0 1 1 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 -1 0 -1 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 -1 0 -1];
```

Následují vstupní data a volání funkce.

```
f=[133.7198;133.9199;84.3710;118.9622;12.6449;41.5825;160.0983;66.9631;116.3780;
175.4064;55.5546;52.0358;75.3640;122.0528;89.7618;51.1097;21.3527;81.4869;
88.9427]; %účelová funkce
b=[500;300;0;0;0;0;0;0;0;-250;-550]; %vektor nabídek/poptávek
lb=zeros(19,1); %vektor dolních mezí
ub=[]; %vektor horních mezí

[x,fval] = linprog(f,[],[],A,b,lb,[]);

%VÝSLEDKY
x=[500;0;0;300;500;0;0;300;0;0;0;0;0;250;550;0;0;0;0];
fval=94881;
```

6. Síťové úlohy vykazující volatilitu v čase

V předchozích dvou kapitolách jsme teoreticky i matematicky rozebrali princip síťové úlohy viz 5 a Markowitzova portfolio modelu viz 4. V této kapitole se pokusíme ilustrovat několik modelových příkladů, jak propojit tyto principy dohromady, konkrétně tedy využijeme vlastnosti Markowitzova modelu, ve kterém jsme pracovali s náhodností (kolísavostí, volatilitou), k zobecnění a zefektivnění síťové úlohy.

6.1. Očekávané ceny a jejich volatilita

Hlavní myšlenka síťové úlohy je minimalizace nákladů spojených s přepravou po hranách s příslušným vektorem cen $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^\top$. Tento vektor není náhodný, nýbrž pevně daný, předpokládáme tím tedy, že ceny hran c_i budou neměnné v čase, a tudíž i náklady příslušné optimálnímu vektoru \mathbf{x} budou odpovídat skutečným nákladům. To je samozřejmě velmi zkrslující předpoklad, který neodpovídá reálným situacím. Pokusíme se tedy tento nedostatek odstranit.

Uvažujme vektor \mathbf{c} takový, že jeho složky c_i vykazují proměnlivost v čase t obdobně jako návratnosti aktiv $d_j(\xi)$ v teorii portfolia. Prakticky to můžeme chápat tak, že na cenu přepravy mohou mít vliv náhodné události jako počasí, změna ceny pohonných hmot, opravy komunikací a další příklady, se kterými se setkáváme v běžném životě.

Protože je vektor \mathbf{c} náhodný, budeme jej zapisovat nám již známým značením $\mathbf{c}(\xi)$, kde ξ je náhodná proměnná. Zůstává také v platnosti předpoklad o normálním rozdělení vektoru $\mathbf{c}(\xi)$ s teoretickými parametry $\boldsymbol{\mu}$ a $\boldsymbol{\Sigma}$ tedy střední hodnotou a kovarianční maticí.

V předchozí kapitole jsme náklady na dopravu v síti vyjádřili funkcí $z = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ proměnné \mathbf{x} , kterou jsme minimalizovali při splnění podmínek viz 5.1. Nyní jsme v situaci, kterou můžeme popsat vztahem

$$\zeta = \mathbf{c}^\top(\xi)\mathbf{x}, \quad (6.1)$$

kde ζ je náhodná veličina popisující teoretické náklady sítě, kterou, jak již víme, nemůžeme přímo minimalizovat za účelem nalezení optimálního vektoru \mathbf{x} , podrobnosti nalezneme např. v [12]. Pokusíme se tedy minimalizovat střední hodnotu $E(\zeta)$, tedy číselnou charakteristiku náhodné veličiny ζ , kterou můžeme nazvat *očekávanými náklady* na transport v síti, obdobně jako jsme v 3.2.1 zavedli pojem *očekávaná návratnost portfolia*. Jedná se tedy o náklady, které předpokládáme, nicméně reálně mohou být zcela jiné.

Nyní následují úpravy vztahu

$$E(\zeta) = E(\mathbf{c}^\top(\xi)\mathbf{x})$$

ekvivalentní s úpravami v 3.2.1, proto rovnou napíšeme výsledný vztah účelové funkce z .

$$z = \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{x}, \quad (6.2)$$

6.2. MINIMALIZACE RIZIKA NÁKLADŮ

kde z je střední hodnota náhodné veličiny ζ popisující očekávané náklady a $\boldsymbol{\mu}$ je vektor teoretických středních hodnot cen $\mathbf{c}(\boldsymbol{\xi})$. Spolu s podmínkami

$$\begin{aligned}\mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}\end{aligned}$$

a nahrazením $\boldsymbol{\mu}$ jeho bodovým odhadem $\bar{\mathbf{c}}$ pak dostáváme modifikovanou síťovou úlohu. Tu nyní doplníme o volatilitu, tedy riziko, že reálné náklady budou odlišné od očekávaných. Riziko změny nákladů z budeme měřit obdobně jako u Markowitzova modelu pomocí rozptylu var. Rozptyl veličiny ζ , $\text{var}(\zeta)$ je tedy roven

$$\text{var}(\zeta) = \text{var}(\mathbf{c}^\top(\boldsymbol{\xi})\mathbf{x})$$

S použitím ekvivalentních úprav jako v 3.2.2 dostáváme vyjádření teoretické volatility nákladů sítě

$$z = \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{x}$$

Parametry $\boldsymbol{\mu}$ a $\boldsymbol{\Sigma}$ nahradíme bodovými odhady $\bar{\mathbf{c}}$ a \mathbf{Q} , ke kterým použijeme naměřená reálná data. Tato data budou realizacemi náhodného vektoru $\mathbf{c}(\boldsymbol{\xi})$, budeme je značit $c_i^s(\boldsymbol{\xi})$, kde $s = 1 \dots S$ je časový okamžik, ve kterém jsme změřili cenu i -té hrany.

6.2. Minimalizace rizika nákladů

V modelovém příkladu se budu držet úvahy, že není důležité dosáhnout co možná nejmenších očekávaných nákladů, protože takové náklady mohou být velice nepravděpodobné. Spokojíme se s tím, že budou dostatečně malé, tedy že nepřesáhnou určitou horní mez očekávaných nákladů c_0 , avšak budou vykazovat minimální rozptyl, tedy riziko, že reálné náklady budou velmi odlišné, bude nejmenší možné.

Hledejme tedy vektor toků \mathbf{x} takový, abychom minimalizovali rozptyl očekávaných nákladů sítě za podmínky, že budou dodržena poptávková a kapacitní omezení a celkové náklady nepřevýší mez c_0 .

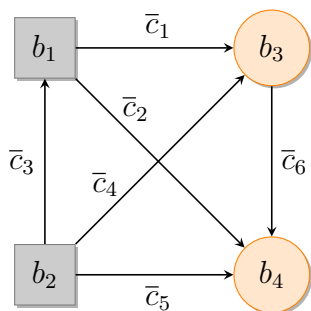
Matematický zápis:

$$\begin{aligned}\min \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x} \\ \bar{\mathbf{c}}^\top \mathbf{x} &\leq c_0 \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Úlohu budeme demonstrovat na síti 5.1b zvolené již v kapitole 5.2, abychom mohli plynule na tuto kapitolu navázat.

Hodnoty cen \bar{c}_i zvolíme pro začátek kvůli jednoduššímu popisu modelu přímo, nikoliv tedy z historických dat. To stejné platí pro bodový odhad rozptylu, tedy matici \mathbf{Q} . Připomeneme si rovněž incidenční matici \mathbf{A} dané sítě.

6. SÍŤOVÉ ÚLOHY VYKAZUJÍCÍ VOLATILITU V ČASE



(a) Síť

A	\bar{c}_1	\bar{c}_2	\bar{c}_3	\bar{c}_4	\bar{c}_5	\bar{c}_6
b_1	1	1	-1	0	0	0
b_2	0	0	1	1	1	0
b_3	-1	0	0	-1	0	1
b_4	0	-1	0	0	-1	-1

(b) Incidenční matice

Variační matici \mathbf{Q} zvolíme pro začátek jako jednotkovou, tedy všechny hrany \bar{c}_i uvažujeme nekorelované a všechny rozptyly jsou rovny 1. Vektory \mathbf{b} a $\bar{\mathbf{c}}$ pak zvolíme stejné jako v modelové síťové úloze, abychom mohli porovnat rozdíly. Konstantu c_0 záměrně dovolíme dostatečně vysokou.

Vstupní data:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ -100 \\ -100 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c_0 = 1000$$

Výsledky:

Kromě optimálního vektoru toků \mathbf{x} uvedeme ve výstupní tabulce také hodnotu účelové funkce z (tedy rozptyl očekávaných nákladů sítě) a samotné očekávané náklady $\bar{\mathbf{c}}^\top \mathbf{x}$ pro kontrolu, zda nepřekročily náklady povolené c_0 . Optimální vektor \mathbf{x} znázorníme opět také graficky v rámci síťového grafu.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	náklady $\bar{\mathbf{c}}^\top \mathbf{x}$
50	50	0	50	50	0	10000	100

Vyhodnocení:

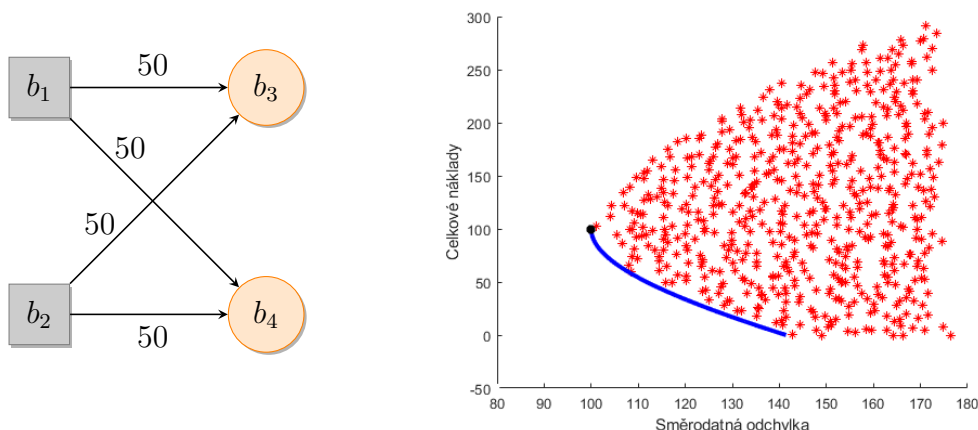
Po bližším prozkoumání zjistíme, že naše podmínky splňuje více vektorů \mathbf{x} , např. $\mathbf{x} = (0, 100, 0, 100, 0, 0)$, který byl vyhodnocen jako optimální vektor klasické síťové úlohy. Snadným dosazením do účelové funkce bychom však zjistili, že její hodnota pro tento vektor \mathbf{x} je dvojnásobná (tedy $z = 20000$). Očekávané náklady jsou sice nulové, protože nenulové prvky tohoto vektoru \mathbf{x} odpovídají hranám $\bar{c}_2, \bar{c}_4 = 0$, nicméně riziko, že reálné náklady budou jiné (v tomto případě tedy nenulové) je však značné (dvojnásobné). Protože naším cílem nebylo minimalizovat očekávané náklady, nýbrž riziko jejich změny, výsledky jsou správné. Zobrazíme si je níže s využitím grafu sítě, ve kterém ponecháme pouze nenulové hodnoty x_i .

Abychom využili teorii popsanou v kapitole o optimalizaci portfolia 4, můžeme říct, že v jistém smyslu byl vektor $\mathbf{x} = (50, 50, 0, 50, 50, 0)$, který obsahuje více nenulových prvků, diverzifikovanější než $\mathbf{x} = (0, 100, 0, 100, 0, 0)$ viz kapitola 3.4, ze které víme, že

6.2. MINIMALIZACE RIZIKA NÁKLADŮ

s vyšším počtem aktiv v portfoliu jeho volatilita klesá (v našem případě tedy volatilita očekávaných nákladů sítě klesla vlivem většího počtu využitých hran).

Ukázali jsme tedy, že podmínky modelu 6.2 splňuje více vektorů \mathbf{x} , protože však pouze jeden minimalizoval rozptyl pro danou úroveň maximálních nákladů c_0 , můžeme jej chápat jako efektivní. Dále budeme-li pro různé hodnoty c_0 hledat optimální vektory \mathbf{x} a příslušné hodnoty rozptylu a nákladů zanášet do grafu, zkonstruujeme množinu efektivních řešení, kterou jsme v 3.5 nazvali efektivní hranicí. Tuto hranici (označenou modře) si nyní zobrazíme spolu s množinou přípustných řešení (označeno červenými značkami) a optimálním řešením pro vstupní hodnotu $c_0 = 1000$ (černá značka).



Pozn.: V grafu na ose x nenajdeme odpovídající hodnoty rozptylů, nýbrž hodnoty odpovídajících směrodatných odchylek (tedy odmocnin z rozptylů) proto, aby si odpovídala měřítko os.

Ke grafu ještě dodejme, že oblast přípustných řešení je jistě omezená. Existuje tedy maximum očekávaných nákladů a maximum rozptylu, které nelze v naší úloze pro daná vstupní data přesáhnout. Tyto meze bychom našli vyřešením optimalizačních úloh $\max \bar{\mathbf{c}}^\top \mathbf{x}$ respektive $\max \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}$. Těmito úlohami se dopodrobna zabývat nebudeme. Pouze pro tento konkrétní případ však pro představu zmíněné meze uvedeme. $(\bar{\mathbf{c}}^\top \mathbf{x})_{\max} = 400$ a $(\mathbf{x}^\top \Sigma \mathbf{x})_{\max} = 60000$. Obrázek tedy znázorňuje pouze část oblasti přípustných řešení.

Pozn.: Hodnoty mezí byly nalezeny s využitím optimalizační knihovny Gurobi a software Julia.

```

m = Model(with_optimizer(Gurobi.Optimizer, NonConvex=2; Presolve=0,
    OutputFlag=0))

A=[1 1 -1 0 0 0;0 0 1 1 1 0;-1 0 0 -1 0 1;0 -1 0 0 -1 -1];
b=[100;100;-100;-100];
q0=[100000000]

Q=[1 0 0 0 0 0;0 1 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0;0 0 0 1 0 0;0 0 0 0 1 0;0 0 0 0 0 1];
c=[1;0;1;0;1;1]

@variable(m,0 <= x[1:size(A,2)] <= 1000)

```

6. SÍŤOVÉ ÚLOHY VYKAZUJÍCÍ VOLATILITU V ČASE

```
@objective(m, Min, c'*x)

@constraint(m, A*x.==b)
@constraint(m, x'*Q*x <= q0[1])

status=optimize!(m)
```

Sledujme, jak se model zachová, zvýšíme-li cenu hrany \bar{c}_1 na $\bar{c}_1 = 2$.

Výsledky:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	náklady
33,3	66,6	0	66,6	33,3	0	10000	150

Vyhodnocení:

Hodnota nákladů se podle očekávání zvýšila. Pokud bychom chtěli, aby zůstaly na předchozí hodnotě 100, dosáhli bychom toho při podstoupení vyššího rizika, viz tabulka.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	náklady
33,3	66,6	0	66,6	33,3	0	11111	100

Vysvětlení opět souvisí s diverzifikací, neboť hodnoty složek x_i již nejsou rovnoměrně rozloženy.

Nyní se podívejme na případ, kdy budou všechny hrany kladně korelované. To znamená, že případné zvýšení ceny \bar{c}_i s velkou pravděpodobností způsobí zvýšení cen ostatních hran.

Vstupní data:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c_0 = 1000$$

Výsledky:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	náklady
50	50	0	50	50	0	25000	100

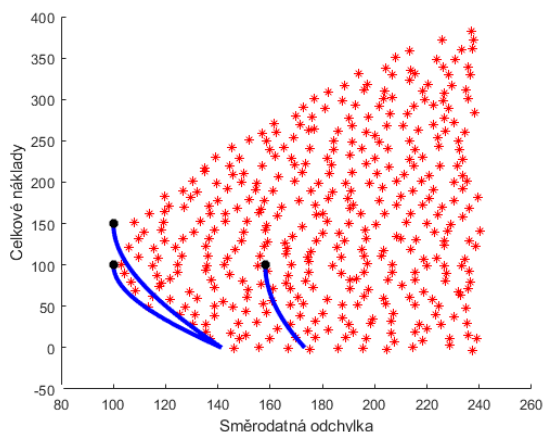
Vyhodnocení:

Hodnota nákladů je stejná jako v prvním případě, protože jsme vrátili vektor \bar{c}_1 na původní hodnotu. Velmi se však zvýšila hodnota rozptylu optimálního \mathbf{x} , neboť všechny hrany jsou kladně pozitivně korelované. Opět zde odkazují na kapitolu 3.4 o optimalizaci

6.2. MINIMALIZACE RIZIKA NÁKLADŮ

portfolia, ve které jsme uvedli, že je vhodné zařazovat do portfolia záporně korelovaná aktiva za účelem snížení volatility.

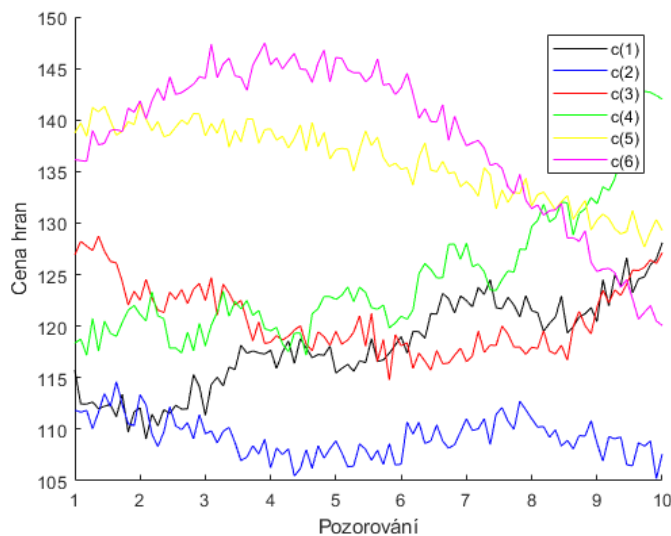
Na závěr ještě doplníme obrázek ukazující rozdíly mezi efektivní hranicí předchozích tří případů. Efektivní hranice úlohy s dvojnásobnou cenou \bar{c}_1 je strmější, tedy náklady narůstají rychleji se snižující se směrodatnou odchylkou. Efektivní hranice úlohy s kladně korelovanými hranami je posunuta ve směru osy x, tedy do oblasti s vyššími směrodatnou odchylkou. Černě jsou vyznačena odpovídající optimální řešení. Červeně pak ilustrační oblast přípustných řešení.



6.2.1. Využití historických dat

Předchozí ukázky jsme uváděli na elementárních datech kvůli jednoduššímu popisu. V této části si pro stejný model nasimulujeme reálná data. Na obrázku vpravo můžeme vidět časové řady zachycující vývoj cen hran sítě v blíže neurčeném čase. Z těchto řad si vytáhneme sto měření, nebo-li realizací c_i^s náhodného vektoru $\mathbf{c}(\boldsymbol{\xi})$. Například realizací náhodné proměnné c_2 ve třetím měření, nebo-li v čase $s = 3$ rozumíme číslo $c_2^3 = 111,818$.

s	c_1^s	c_2^s
1.	115,743	111,837
2.	112,454	111,663
3.	112,452	111,818
4.	112,635	110,045
	⋮	⋮
97.	124,778	108,352
98.	125,963	108,855
99.	126,478	105,213
100.	128,108	107,583



6. SÍŤOVÉ ÚLOHY VYKAZUJÍCÍ VOLATILITU V ČASE

Při zpracování bodových odhadů jsem nezohledňoval případné trendy tak, jak je u Markowitzova modelu obvyklé, které by mohly být předmětem dalšího zkoumání.

Funkce vykreslené v předchozím obrázku.

```

n=100; x=linspace(1,10,n);

y1=@(x) 1.5*x+100+2*sin(2*x)-cos(3*x)/5;
c_1=y1(x)+normrnd(10,1,[1 n]);

y2=@(x) -0.2*x+100 + 2*sin(x)-cos(3*x)/6;
c_2=y2(x)+normrnd(10,1,[1 n]);

y3=@(x) -3*x+120 + 2*sin(x/4-3)-cos(3*x)+exp(x/3);
c_3=y3(x)+normrnd(10,1,[1 n]);

y4=@(x) (2*sin(4*x)+exp(x/3)+10*exp(-x/10)+100);
c_4=y4(x)+normrnd(10,1,[1 n]);

y5=@(x) 10*sin(x/5-5)+120;
c_5=y5(x)+normrnd(10,1,[1 n]);

y5=@(x) 10*sin(x/5-5)+120;
Y5=y5(x)+normrnd(10,1,[1 n]);

y6=@(x) 16*sin(3*x/8)+120;
c_6=y6(x)+normrnd(10,1,[1 n]);

```

Bodové odhady $\bar{\mathbf{c}}$ a \mathbf{Q} příslušné našemu statistickému souboru jsou s využitím vzorce 2.2 resp. 3.3 rovny

$$\bar{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} 118, 18 \\ 109, 26 \\ 120, 78 \\ 124, 79 \\ 135, 88 \\ 138, 21 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 19.67 & -2.70 & -4.48 & 21.95 & -13.95 & -21.99 \\ -2.70 & 3.64 & 1.68 & -2.51 & 1.10 & -0.82 \\ -4.48 & 1.68 & 11.41 & 1.75 & 1.85 & -7.23 \\ 21.95 & -2.51 & 1.74 & 40.42 & -20.18 & -42.41 \\ -13.95 & 1.10 & 1.85 & -20.18 & 13.50 & 23.02 \\ -21.99 & -0.82 & -7.23 & -42.41 & 23.02 & 57.06 \end{pmatrix}$$

Pro úplnost doplníme vektor

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ -100 \\ -100 \end{pmatrix}$$

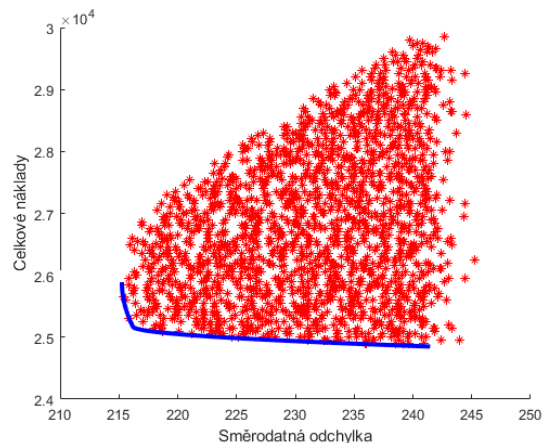
a připomeňme matematický zápis úlohy.

$$\min \mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x}$$

6.2. MINIMALIZACE RIZIKA NÁKLADŮ

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{c}}^T \mathbf{x} &\leq c_0 \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}\end{aligned}$$

Vykresleme si nejdříve efektivní hranici pro výše vypsané parametry. Připomeňme, že efektivní hranici chápeme jako množinu optimálních vektorů \mathbf{x} , tedy takových, kterým náleží nejmenší možný rozptyl pro danou úroveň nákladů.



Zobrazená efektivní hranice se oproti předchozím liší v tom, že pro hodnotu směrodatné odchylky zhruba $\hat{s} = 216$ dochází k jejímu zlomu a následně zrychlenému nárůstu rozptylu (tedy účelové funkce) při snižování celkových (očekávaných) nákladů. Důvod si vysvětlíme s pomocí následující tabulky, která zaznamenává posloupnost optimálních vektorů \mathbf{x} , ze které se pozorovaná část efektivní hranice konstruovala. Tabulka je doplněna o hodnoty příslušných směrodatných odchylek a nákladů, aby bylo zřejmé, že se jedná skutečně o pozorovanou oblast.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_5	\hat{s}	náklady
88.2012	11.8983	0.0995	11.7988	88.1017	0.0000	216.164	25179.795
88.1396	11.8668	0.0064	11.8604	88.1332	0.0000	216.189	25169.795
87.6700	12.3300	0	12.3300	87.6700	0.0000	216.2379	25159.795
87.1702	12.8298	0	12.8298	87.1702	0.0000	216.3366	25149.795

Z tabulky je vidět, že s rostoucími náklady se v určitém momentě vynulovala složka x_3 . Zároveň se dle odpovídajících hodnot směrodatné odchylky a nákladů skutečně jedná o zlomový bod. S dále se snižujícími náklady zůstává $x_3 = 0$ a dochází k prudkému růstu směrodatné odchylky. Vysvětlení můžeme podat stejné jako již dříve - snížil se počet nenulových cest, snížila se tedy také diverzifikace naší množiny hran.

Výše uvedené je dobrou ukázkou toho, že snaha o snižování volatility nákladů je smysluplnější než snaha o minimalizaci nákladů samotných. Řešili bychom-li úlohu minimalizace nákladů, zjistili bychom, že pro zadané vstupní parametry je minimální hodnota nákladů $(\bar{\mathbf{c}}^T \mathbf{x})_{\max} = 23405,8$ a odpovídající směrodatná odchylka = 624.81. To je oproti hodnotám uvedených v tabulce pro zlomový bod sice pokles očekávaných nákladů o zhruba 7%, ale nárůst jejich volatility o přibližně 180%, což je takřka malá odměna

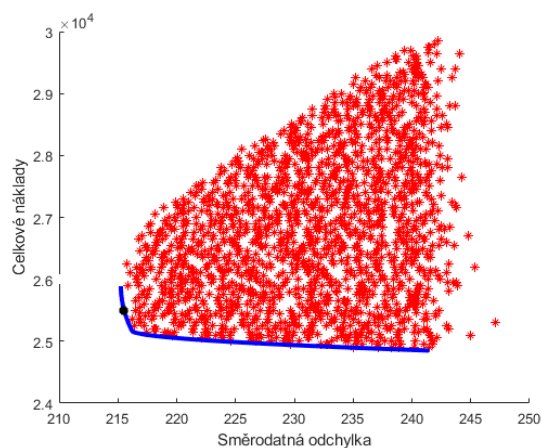
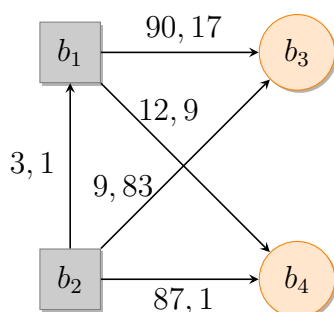
6. SÍŤOVÉ ÚLOHY VYKAZUJÍCÍ VOLATILITU V ČASE

za velké riziko. Rovněž není překvapující, že odpovídající optimální vektor toků je roven $\mathbf{x} = (0, 100, 0, 100, 0, 0)$, toto portfolio hran je tedy opět značně nediverzifikované.

Na závěr pro úplnost úlohy najdeme vektor \mathbf{x} takový, aby celkové náklady nepřevýšily hodnotu $c_0 = 25500$. Optimální vektor toků včetně hodnoty rozptylu a nákladů najdeme v tabulce výsledků. Níže jsou také grafické znázornění příslušné sítě a efektivní hranice s vyznačeným optimálním řešením (černý bod).

Výsledky:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	$\bar{\mathbf{c}}^T \mathbf{x}$
90.1737	12.9073	3.081	9.82627	87.0927	0	46452.23	25500



6.2.2. Implementace v Matlabu

Opět ilustruji ukázky kódů k vytvoření efektivní hranice.

Vstupní data

```

n=100;
Q=[1 0 0 0 0 0;0 1 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0;0 0 0 1 0 0;0 0 0 0 1 0;0 0 0 0 0 1];
c=[1;0;1;0;1;1];
%další parametry, které se objevily v kapitole 6.2, najde čtenář v přílohách
%včetně bodových odhadů z historických dat

f=[0;0;0;0;0;0]; %lineární funkce
A=[1 1 -1 0 0 0;0 0 1 1 1 0;-1 0 0 -1 0 1;0 -1 0 0 -1 -1]; %incidenční matice
b=[100;100;-100;-100]; %vektor nabídek/poptávek
lb=[0;0;0;0;0;0];
ub=[1000;1000;1000;1000;1000;1000];
  
```

Vykresleni_obrazku(Q,f,A,b,c,lb,ub)

6.2. MINIMALIZACE RIZIKA NÁKLADŮ

Vykreslení množiny přípustných řešení. Zde si dovolím několik komentářů, protože se nejedná o úplně triviální problém. Bylo třeba si rozumně zvolit meze této množiny pro konkrétní případy zvlášť tak, abychom v obrázku zachytili pouze onu optimalizačně "zajímavou" oblast. Konkrétně pro případ vstupních dat z časových řad jsme volili následující čísla pevně. 30000 je mnou pevně zvolena maximální hodnota nákladů jejichž odpovídající portfolia se vykreslí. Tomu pak odpovídá hodnota 24849 jakožto dolní hranice vykreslované oblasti. Vypočítána je tak, aby souřadnice x těchto hodnot byly stejné. Tato souřadnice x pak určuje pravou hranici vykreslované oblasti.

```
[pripustna_port] = Nahodna_portfolia(Q,f,A,b,c,lb,ub)
plot(pripustna_port(1,:),pripustna_port(2,:),'*r'); %červené tečky označují
      přípustná portfolia

function [pripustna_port] = Nahodna_portfolia(Q,f,A,b,c,lb,ub)
c0 = 24849.795:50:30000; %meze oblasti přípustných řešení ve smyslu osy y
c0_vec=c0'; %osa y
z_V = zeros(1,size(c0_vec,1)); %osa x, sem zaznamenám hodnoty směrodatné
      odchylky pro body z vektoru
hold on

for i=1:size(c0_vec) %hranice
[x,z_V]=quadprog(2*Q,f,A,b,c',c0_vec(i),lb,ub);
z_SD(i)=sqrt(z_V); %osa x v řeči směrodatné odchylky
end
prava_mez_osy_x=sqrt(x'*Q*x);

%vytvoření množiny přípustných řešení, které budou v obrázku rozvrženy
      rovnoměrně
pripustna_port=0; %do dvourozměrného vektoru nahraji informace o každém
      portfoliu
k=1;
for i=1:(size(c0,2)-2)
vektor_radkovych_hodnot=z_SD(i):1:prava_mez_osy_x;
for j=1:(size(vektor_radkovych_hodnot,2)-1)
pripustna_port(1,k)=vektor_radkovych_hodnot(j);
pripustna_port(2,k)=c0(i);
k=k+1;
end
end

%zde zaručíme, aby se vyobrazená řešení náhodně rozhodila
pocet_bodu=size(pripustna_port,2);
random=normrnd(0,2,[2 pocet_bodu]);
random=abs(random); %nechci aby se řešení posunula za efektivní hranici
pripustna_port=pripustna_port+random;
end
```

Vykreslení efektivní hranice.

```
c0_max=100000000;
[x]=quadprog(2*Q,f,c',c0_max,A,b,lb,ub);
```

6. SÍŤOVÉ ÚLOHY VYKAZUJÍCÍ VOLATILITU V ČASE

```
naklady_min=c'*x %toto číslo určuje hodnotu nákladů odpovídající minimálnímu  
ropztylu , slouží to k určení horní meze efektivní hranice
```

```
c0 = 24849:10:naklady_min; %hranice modré linie ve smyslu osy y  
c0=c0'; %vektor hodnotočekávaných nákladů, tedy osa y  
z_SD = zeros(1,size(c0,1)); %osa x do které budeme nahrávat hodnoty  
směrodatných odchylek  
hold on  
  
for i=1:size(c0)  
[x,z_V]=quadprog(2*Q,f,A,b,c',c0(i),lb,ub);  
z_SD(i)=sqrt(z_V); %osa x v řeči směrodatné odchylky  
end  
plot(z_SD,c0,'b','LineWidth',3);
```

Nalezení jednoho optimálního portfolia.

```
c0=[25500];  
[x,z_V]=quadprog(2*Q,f,c',c0,A,b,lb,ub);  
z_SD=sqrt(z_V);  
plot(z_SD,c'*x,'*k','LineWidth',3);
```

6.2.3. Aplikace modelu na velká data

Na předchozím jednoduchém příkladě jsme názorně vysvětlili princip modelu. Nyní pomocí programovacího jazyka Matlab ukážeme aplikovatelnost modelu na rozsáhlejší data podle úlohy 5.5.1.

```
for i=1:19 %vygenerování náhodných pozorování cen  
hodnoty(i,1:100)=normrnd(150,50,1,100); %100 pozorování pro každou hranu  
end  
hodnoty=hodnoty';  
c=mean(hodnoty); c=c';  
Q=cov(hodnoty);  
f=zeros(19,1); %lineární funkce  
A; čincidenní matice  
b=[500;300;0;0;0;0;0;0;-250;-550]; %vektor nabídek/poptávek  
lb=zeros(19,1); %vektor dolních mezí  
ub=[]; %vektor horních mezí
```

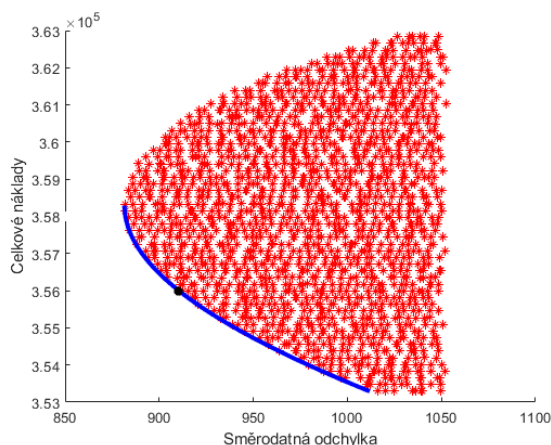
```
[X,z_V]=Vykresleni_obrazku(Q,f,A,b,c',lb,ub)
```

VÝSLEDKY

```
%pro hodnotu c0=356000 jsou nalezeny následující výsledky  
x=[248.3318;251.6682;141.3069;158.6931;0.0000;157.9466;90.3851;137.3171;  
116.8495;138.8085;118.0048;15.6698;25.0185;129.6810;125.6409;55.0269;  
235.4390;65.2920;188.9201]  
z_SD=sqrt(z_V)=910,479
```

6.3. NEVYVÁŽENÁ SÍŤOVÁ ÚLOHA Z HLEDISKA POPTÁVEK A NABÍDEK

Grafická ilustrace efektivního portfolia pro hodnotu $c_0 = 356000$ v kódu Matlabu.



6.3. Nevyvážená síťová úloha z hlediska poptávek a nabídek

Předchozí úloha si kladla za cíl zobecnění původní síťové úlohy o prvek náhody a s ní spojené volatility hranových cen. Pozorovali jsme rovněž vliv korelace jednotlivých hran na celkové očekávané náklady a očekávané riziko. Element náhody a s ním spojeného rizika v následujícím modelu ponecháme, ale pokusíme se o další zobecnění. V předchozích případech jsme vždy uvažovali tzv. vyváženou úlohu, kdy se množství poptávek (nebo také kapacit) rovnalo množství nabídek (nebo-li zdrojů). To je další předpoklad, který neodpovídá zcela reálným situacím. Pro další názorný postup návrhu modelu jsem se inspiroval v [13].

Předpokládejme tedy, že suma poptávek může být odlišná od sumy nabídek. Pak tedy určitě dojde k situaci, kdy buď nevyčerpáme všechny zdroje, nebo nenaplníme poptávané kapacity. Za tyto nedostatky, které můžeme chápat jako nesplnění smluvních podmínek mezi dodavatelem a odběratelem, by si jistě kterýkoliv z nich mohl nárokovat patřičný poplatek. Abychom tyto poplatky popsali, zavedeme pro každý uzel proměnné w^+ a w^- , které budou mít pro oba typy uzlů (zdroj, kapacita) význam dle následujícího přehledu.

- Pro uzel zdrojů, tedy $b_j > 0$
 - proměnná w_j^+ reprezentuje množství nevyčerpaných zdrojů
 - a w_j^- pak hodnotu, o kolik je nutné navýšit zdroje, aby byla poptávka splněna (v praxi musíme tedy např. brát z rezerv).
- Analogicky pak pro uzel kapacit $b_j < 0$
 - proměnná w_j^+ reprezentuje přesáhnutí kapacit (např. svozovna odpadu musí vynaložit náklady na přesun přebytečného množství do jiných kapacit)
 - a w_j^- je nevyužitá kapacita poptávkového uzlu.

6. SÍŤOVÉ ÚLOHY VYKAZUJÍCÍ VOLATILITU V ČASE

Pro tyto proměnné pak budeme uvažovat konstanty g , respektive h jako poplatky za jednotkové množství w_j^+ , respektive w_j^- . Naším cílem je pak náklady spojené s těmito poplatky minimalizovat. Výše uvedené lze popsat následujícími vztahy.

$$z = \mathbf{g}^\top \mathbf{w}^+ - \mathbf{h}^\top \mathbf{w}^- \quad (6.3)$$

za podmínky

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{w}^+ - \mathbf{w}^- = \mathbf{b}. \quad (6.4)$$

Model dále rozšíříme o následující myšlenku. Z dlouhodobého hlediska by jistě mohlo být výhodné zainvestovat jednorázově do navýšení případně snížení kapacit (zaměříme se především na poptávkové kapacity), než platit opakovaně poplatky za jejich přeplnění, či nevyužití. Změnu kapacity libovolného uzlu budeme zaznamenávat proměnnou u , přesněji tedy u_j pro příslušný uzel b_j . Obdobně jako u poplatků w_j^+ , w_j^- nás tyto investice budou něco stát. Cenu jednotkové změny kapacity zahrneme v konstantě d_j .

Abychom mohli ovlivňovat, zda konkrétnímu poptávkovému uzlu b_j umožníme navýšení, případně snížení kapacity, je potřeba vynásobit příslušnou proměnnou u_j multiplikátorem $b_{0j} \in \{1, 0, -1\}$ následujícím způsobem. Poptávkový uzel b_j vynásobíme multiplikátorem

- $b_{0j} = 1$, chceme-li jeho kapacitu navýšit
- $b_{0j} = -1$ chceme-li jeho kapacitu snížit,
- nebo $b_{0j} = 0$ chceme-li, aby se jeho kapacita nezměnila.

O výše uvedené nyní doplníme naše rovnice 6.3, 6.4.

$$z = \mathbf{g}^\top \mathbf{w}^+ - \mathbf{h}^\top \mathbf{w}^- + \mathbf{d}^\top \mathbf{u}$$

za podmínky

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{w}^+ - \mathbf{w}^- - \mathbf{I}_0 \mathbf{u} = \mathbf{b}$$

kde \mathbf{I}_0 je diagonální matice, na jejíž diagonále se nacházejí multiplikátory b_{0j} .

Pro další budování modelu připomeňme rovnice z předchozí kapitoly popisující očekávaný rozptyl nákladů na převoz v síti a podmínku omezení těchto očekávaných nákladů.

$$\begin{aligned} z &= \mathbf{x}^\top \mathbf{Q}\mathbf{x} \\ \mathbf{c}^\top \mathbf{x} &\leq c_0 \end{aligned}$$

Náš model vybudujeme s pomocí těchto rovnic následující myšlenkou. Naší snahou bude minimalizace rozptylu očekávaných nákladů sítě a zároveň minimalizace nákladů spojených s penalizačními poplatky a investicemi do změn kapacit. Zároveň budeme požadovat, aby celkové očekávané náklady za převoz, poplatky a investice nepřevyšovaly určitou horní mez nákladů c_0 .

$$\min z, \text{ kde } z = \lambda \mathbf{x}^\top \mathbf{Q}\mathbf{x} + (1 - \lambda)(\mathbf{g}^\top \mathbf{w}^+ + \mathbf{h}^\top \mathbf{w}^- + \mathbf{d}^\top \mathbf{u}) \quad (6.5)$$

6.3. NEVYVÁŽENÁ SÍŤOVÁ ÚLOHA Z HLEDISKA POPTÁVEK A NABÍDEK

za podmínek

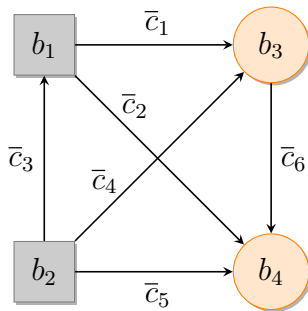
$$\mathbf{Ax} + \mathbf{w}^+ - \mathbf{w}^- + \mathbf{I}_o \mathbf{u} = \mathbf{b} \quad (6.6)$$

$$\bar{\mathbf{c}}^\top \mathbf{x} + \mathbf{g}^\top \mathbf{w}^+ + \mathbf{h}^\top \mathbf{w}^- + \mathbf{d}^\top \mathbf{u} + q = c_0 \quad (6.7)$$

$$\mathbf{x}, \mathbf{w}^+, \mathbf{w}^-, \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, q \geq 0, \quad (6.8)$$

kde q je proměnná popisující volné finanční prostředky pro případ, že očekávané náklady budou menší než horní mez c_0 , a λ je námi volený parametr kterým určíme, jaká veličina je pro nás z hlediska minimalizace podstatnější.

Nyní si chování modelu ilustrujeme na několika konkrétních příkladech. Použijeme k tomu nám již známou síť.



(a) Síť

\mathbf{A}	\bar{c}_1	\bar{c}_2	\bar{c}_3	\bar{c}_4	\bar{c}_5	\bar{c}_6
b_1	1	1	-1	0	0	0
b_2	0	0	1	1	1	0
b_3	-1	0	0	-1	0	1
b_4	0	-1	0	0	-1	-1

(b) Incidenční matice

Poznamenejme, že v průběhu celé kapitoly budeme vektor cen $\bar{\mathbf{c}}$ a kovarianční matici \mathbf{Q} považovat za bodové odhady vycházející z historických dat, která už zde simulovat nebudeme. Rovněž budeme vždy uvažovat parametr $\lambda = 0.7$, tedy přikládáme větší váhu minimalizaci rizika.

Vstupní data:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 300 \\ 300 \\ -700 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} 40 \\ 35 \\ 5 \\ 40 \\ 45 \\ 10 \end{pmatrix} \quad c_0 = 100000$$

Tato úvodní data budou v rámci celé kapitoly neměnná. Záměrně volíme kovarianční matici \mathbf{Q} v tomto jednoduchém tvaru, aby na chování modelu neměly vliv korelace hran, protože by pak bylo náročnější analyzovat vliv poplatků a investic. Koneckonců vliv korelace na riziko byl předmětem předchozí kapitoly. Z vektoru \mathbf{b} je patrné, že uvažujeme nevyváženou úlohu, neboť poptávky převyšují zdroje. Zároveň síť obsahuje jeden uzel, který není ani poptávkový, ani kapacitní. Horní mez očekávaných nákladů volíme dostatečně vysokou, abychom si ponechali manipulační prostor.

Pro začátek se zaměříme na penalizační poplatky za nedodržení uzlových limitů, které záměrně zvolíme velmi nízké. Pouze poplatky za překročení zdrojů navolíme dostatečně

6. SÍŤOVÉ ÚLOHY VYKAZUJÍCÍ VOLATILITU V ČASE

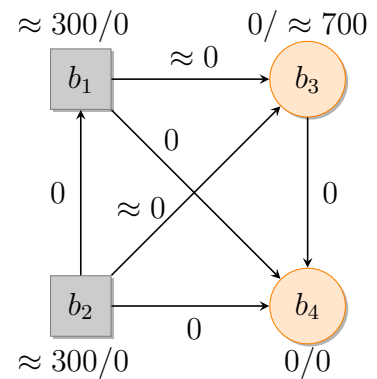
vysoké. Ilustrujeme tím reálnou situaci, kdy je prakticky nemožné sehnat okamžitě zdroje navíc na pokrytí vyšší poptávky. Matici multiplikátorů zvolíme pro začátek nulovou, tedy žádnému uzlu (nabídkovému, či poptávkovému) není dovoleno měnit kapacitu.

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{I}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Výsledky:

V tabulce výsledků uvedeme kromě vektorů \mathbf{x} , \mathbf{w}^+ , \mathbf{w}^- rovněž hodnotu přebytečných finančních prostředků q . Dále pak hodnotu účelové funkce z . Tu navíc uvedeme po složkách, kde očekávané riziko označíme již známým zápisem z_V (*Variance*) a náklady označíme z_C (*Cost*). Zdůrazníme, že tyto náklady nejsou očekávané ale reálné, protože nezahrnují očekávané náklady $\bar{\mathbf{c}}^T \mathbf{x}$) na samotný převoz viz 6.5.

	1	2	3	4	5	6
\mathbf{x}	≈ 0	0	0	≈ 0	0	0
\mathbf{w}^+	≈ 300	≈ 300	0	0		
\mathbf{w}^-	0	0	≈ 700	0		
\mathbf{u}	0	0	0	0		
z	1525,9				q	94790
z_V	≈ 0					
z_C	1521,8					



Vyhodnocení:

V tabulce uvádíme symbol \approx z toho důvodu, že toky x_1 , x_4 byly modelem pro zadaná data vyhodnoceny jako zanedbatelně malé (v řádu desetin až jednotek). Tomu pak odpovídají zanedbatelné změny dalších veličin. S nulovými toky x_i přímo souvisí fakt, že rozptyl této sítě je rovněž (téměř) nulový. Jediné náklady jsou pak spojeny s poplatky za nevyčerpání zdrojů, které odpovídají proměnným w_1^+ a w_2^+ , a poplatek za nesplnění poptávky, který odpovídá proměnné w_3^- . Vidíme také, že hodnota zbylých finančních prostředků q je velmi blízka hodnotě maximálních nákladů c_0 , tedy poplatky nás skutečně stály velmi málo.

Pozn.: Čtenář by se mohl případně domnívat, že by mělo platit $c_0 = q + z_C$. Připomeňme proto, že hodnota z_C určuje náklady pouze za poplatky a investice, nikoliv za samotný převoz, navíc je násobena číslem $1 - \lambda$.

Jistě není příznivým výsledkem, že optimální řešení modelu je, převést sítí nulové množství zboží. Vynutíme tedy převoz tím, že radikálně zvýšíme všechny poplatky spojené s nesplněním poptávky.

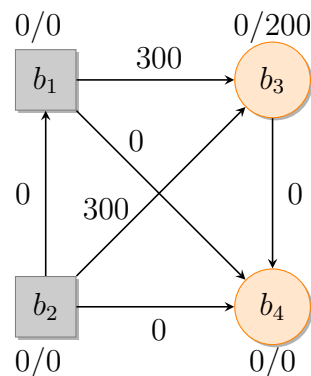
6.3. NEVYVÁŽENÁ SÍŤOVÁ ÚLOHA Z HLEDISKA POPTÁVEK A NABÍDEK

Vstupní data:

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 5000 \\ 5000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix} \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 600 \\ 800 \end{pmatrix}.$$

Výsledky:

	1	2	3	4	5	6
\mathbf{x}	300	0	0	300	0	0
\mathbf{w}^+	0	0	0	0		
\mathbf{w}^-	0	0	200	0		
\mathbf{u}	0	0	0	0		
z	144000				q	16000
z_V	126000					
z_C	18000					



Vyhodnocení:

Zvýšení penalizačních poplatků skutečně způsobilo, že se všechny zdroje přesunuly a naplnily poptávku b_3 . Vidíme také, že většinu hodnoty účelové funkce tvoří rozptyl sítě. Nabízí se tedy otázka, která je pro tuto kapitolu sěžejní. Nedalo by se nějakým způsobem využít zbylé finanční prostředky q k zainvestování takovým způsobem, abychom snížili tento rozptyl? Odpovědi by nám mohly být dosavadní znalosti o diverzifikaci popsané v kapitole 3.4, ze které víme, že s rostoucím množstvím aktiv riziko portfolia klesá.

Obdobně by mohlo platit zde (a v předchozí kapitole k tomu skutečně také došlo), že zahrnutím většího množství aktivních hran (tedy hran, kterými bude procházet nenulový tok x_i) by se mohl rozptyl snížit. Toho můžeme dosáhnout, pokud zainvestujeme do vytvoření kapacity v dosud nevyužitém uzlu b_4 , čímž umožníme transport zboží po hranách c_4, c_5, c_6 , které byly doposud rovněž nevyužity. K tomu bude potřeba určit vektor nákladů na investice \mathbf{d} a pozměnit matici I_0 .

Vstupní data:

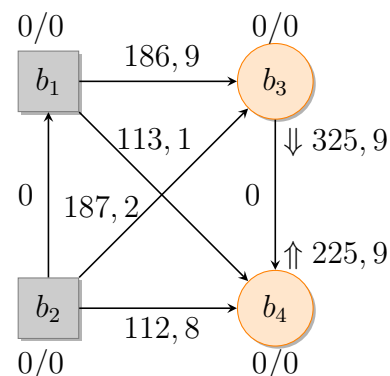
$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 150 \\ 120 \end{pmatrix} \quad I_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplikátorem 1 tedy umožníme navýšit poptávku v uzlu b_4 a multiplikátorem -1 ji umožníme snížit v uzlu b_3 , kde není tak vysoká poptávka potřeba.

6. SÍŤOVÉ ÚLOHY VYKAZUJÍCÍ VOLATILITU V ČASE

Výsledky:

	1	2	3	4	5	6
x	186,9	113,1	0	187,2	112,8	0
w⁺	0	0	0	0		
w⁻	0	0	0	0		
u	0	0	325,9	225,9		
<i>z</i>	89641				<i>q</i>	0
<i>z_V</i>	66840					
<i>z_C</i>	22800					



Vyhodnocení:

Jak jsme doufali, vektor toků \mathbf{x} má nyní po zainvestování do kapacity b_4 čtyři nenulové prvky. Síť jsme tedy diverzifikovali a výsledkem je rozptyl $z_V = 66840$, který je od předchozího rozptylu $z_V = 126000$ téměř poloviční. Pochopitelně se to projevilo na zvýšení nákladů z_C kvůli nákladům za investice, kterými jsme navíc vyčerpali všechny volné finanční prostředky q . Nicméně i přes zvýšené náklady se nám podařilo snížit hodnotu účelové funkce z z předchozích $z = 144000$ na $z = 89641$. Obrovským rozdílem a přínosem naší investice je však fakt, že je pouze jednorázová na rozdíl od poplatků, které bychom byli nuceni platit pravidelně, pokud bychom k vytvoření poptávky v uzlu b_4 nepřistoupili. Ruku v ruce s tím by také bylo spojeno vyšší (v tomto případě téměř dvojnásobné) podstupované riziko, že celkové očekávané náklady viz 6.8 by se velmi lišily od reálných. Doplňme ještě, že došlo rovněž ke snížení poptávky v uzlu b_3 , což plyne z toho, že náklady na toto snížení jsou nižší než poplatek placený za její nenaplnění ($d_3 < h_3 \Rightarrow d_3 u_3 < h_3 w_3^-$).

7. Závěr

Hlavní myšlenkou praktické části (a vlastně celé práce) bylo pozorování vlivu náhody na predikci různých veličin, ať už tedy zisků v případě optimální alokace aktiv v portfoliu, nebo nákladů optimálního rozložení toků v síťové úloze. Ukázali jsme, že snaha modelovat reálný děj na základě omezeného množství historických dat s sebou vždy přináší riziko, že predikce těchto veličin se budou značně lišit od reality. Proto jsme zavedli pojmy jako očekávaná návratnost, respektive očekávané náklady.

V první praktické úloze jsme také ukázali, že má smysl nesnažit se o nalezení minimálních očekávaných nákladů, jako tomu je v případě klasické síťové úlohy, protože v reálné situaci takové náklady mohou být značně nepravděpodobné. Zároveň má cenu do portfolia (potažmo optimálního podgrafu) volit taková aktiva (potažmo hrany), aby byla mezi sebou záporně korelovaná, protože pak dochází k diverzifikaci těchto aktiv a tím i snížení rizika.

Náplní druhé praktické úlohy bylo rozšíření předchozího modelu o penalizační poplatky. Zároveň jsme také ilustrovali způsob, jak se pomocí jednorázové investice těmto poplatkům dlouhodobě vyhnout. Výsledkem pak byla diverzifikace sítě a snížení očekávaného rizika nákladů.

K přiblížení se popisu reálné situace jsme v případě Markowitzovy úlohy využili dostupná data z akciového trhu, v případě síťové úlohy jsme si pak reálná data nahradili vygenerováním dat náhodných. Veškerá pozorování jsme zobrazovali s použitím obrázků efektivních hranic, ke kterým jsme také demonstrovali využití kódů v Matlabu respektive Julii.

Dále se předpokládá využití výsledků práce v projektech “Výpočtové simulace pro efektivní nízkoemisní energetiku“ reg. č.: CZ.02.1.01/0.0/0.0/16_026/0008392 financovaného z OP VVV, Prioritní osy 1: Posilování kapacit pro kvalitní výzkum a 470 Sustainable Process Integration Laboratory SPIL, funded as project No. CZ.02.1.01/0.0/0.0/15 003/0000456, by the Czech Republic Operational Programme Research and Development, Education, Priority 1: Strengthening capacity for quality research, a dale No. CZ.02.1.01/0.0/0.0/16_026/0008413 ”Strategic Partnership for Environmental Technologies and Energy Production.

Literatura

- [1] ANDĚL, Jiří. *Základy matematické statistiky*. 2., opr. vyd. Praha: Matfyzpress, 2007. ISBN 978-80-7378-001-2.
- [2] KARPÍŠEK, Zdeněk. *Matematika IV: statistika a pravděpodobnost*. Vyd. 2., dopl. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2003. ISBN 80-214-2522-9.
- [3] *A dictionary of finance and banking*. 4th ed. Oxford: Oxford University Press, 2008. ISBN 978-0-19-922974-1.
- [4] REJNUŠ, Oldřich. *Finanční trhy*. 4., aktualiz. a rozš. vyd. Praha: Grada Publishing, 2014. Partners. ISBN 978-80-247-3671-6.
- [5] CIPRA, Tomáš. *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou*. Praha: Eko-press, 2005. ISBN 80-86119-91-2.
- [6] DUPAČOVÁ, Jitka, Jan HURT a Josef ŠTĚPÁN. *Stochastic Modeling in Economics and Finance*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. ISBN 1-4020-0840-6.
- [7] MARKOWITZ, Harry. *Portfolio selection: efficient diversification of investments*. 2nd ed. Cambridge, Mass.: B. Blackwell, 1991. ISBN 978-1-55786-108-5.
- [8] POPELA, Pavel. *Optimization I*. Brno, 2017. VUT, učební text
- [9] POPELA, Pavel. *An object-oriented approach to multistage stochastic programming: models and algorithms*. Disertační práce. Univerzita-Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, 1998. Vedoucí práce Jitka Dupačová.
- [10] KLAPKA, Jindřich, Jiří DVOŘÁK a Pavel POPELA. *Metody operačního výzkumu*. Vyd. 2. Brno: VUTIUM, 2001. ISBN 80-214-1839-7.
- [11] NASH, Stephen and SOFER, Ariela. *Linear and nonlinear programming*. McGraw-Hill, 1995. ISBN 978-0-89871-0.
- [12] WALLACE, Stein W. and KING, Alan. *Modeling with Stochastic Programming*. New York: Springer Verlag, 2012. ISBN 978-0-387-87816-4.
- [13] WILLIAMS, H. Paul. *Model Building in Mathematical Programming*. 5th ed. Hoboken, N.J.: John Wiley, 2013. ISBN 978-1-118-44333-0.
- [14] *GAMS Modeling Language Manuals*, GAMS, 2015.
- [15] DEMEL, Jiří. *Grafy a jejich aplikace*. Praha: Academia, 2002. ISBN 80-200-0990-6.
- [16] NEŠETŘIL, Jaroslav. *Teorie grafů*. Praha: SNTL, 1979. ISBN 04-017-79.
- [17] BAZARAA, M.S., John J. JARVIS a Hanif D. SHERALI. *Linear programming and network flows*. 4th ed. Hoboken, N.J.: John Wiley, c2010. ISBN 978-0-470-46272-0.
- [18] [online].[cit. 2019-10-14]. Dostupné z:
<https://srdas.github.io/MLBook/PortfolioOptimization.html>

LITERATURA

- [19] TALPA, Jaroslav. *Modelovací jazyky pro optimalizaci*. Bakalářská práce. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2018. 68 s. Vedoucí RNDr. Pavel Popela, Ph.D.
- [20] ZAMAZAL, Petr. *Hybridní algoritmy v optimalizaci*. Bakalářská práce. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2018. 33 s. Vedoucí RNDr. Pavel Popela, Ph.D.
- [21] AMBROZKOVÁ, Anna. *Optimalizace železniční dopravy odpadů*. Bakalářská práce. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 33 s. Vedoucí Ing. Martin Pavlas, Ph.D.
- [22] KHÝR, Lukáš. *Síťová simplexová metoda*. Bakalářská práce. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2018. 39 s. Vedoucí RNDr. Pavel Popela, Ph.D.

8. Seznam příloh

Veškeré přílohy jsou ve složce prilohy.zip, která obsahuje následující složky a soubory:

1. diverzifikace.m - ukázka diverzifikace na dvou aktivech
2. graf_index_variance.m - graf závislosti rozptylu na počtu aktiv
3. složka markowitz
 - (a) casove_rady_markow.m - vykreslení časových řad
 - (b) optimization_thesis.m - spouštěcí program
 - (c) efficient_frontier.m - nalezení a vykreslení efektivní hranice
 - (d) markowitz.m - algoritmus popsáný v 4.4
 - (e) portfolio_map.m - vykreslení množiny přípustných řešení
 - (f) sap500data.xlsx - zdrojová data
4. sitova_uloha.m - jednoduchá síťová úloha
5. složka model1
 - (a) casove_rady.m - vygenerování vlastních časových řad
 - (b) Vykresleno_obrazku_run.m - spouštěcí program
 - (c) Vykresleni_obrazku.m - kód k vykreslování
 - (d) Nahodna_portfolia.m - generování přípustných portfolií
6. model2.m - funkce quadprog se vstupy k modelu 2
7. julia_min_naklady.jl - funkce pro nalezení minimálních nákladů