VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

VÝPOČTY A APLIKACE ZLOMKOVÉHO KALKULU

CALCULATIONS AND APPLICATIONS OF FRACTIONAL CALCULUS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE — MICHAELA ZEMČÍKOVÁ
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE — doc. RNDr. JAN ČERMÁK, CSc.
SUPERVISOR

BRNO 2011

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky
Akademický rok: 2010/2011

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Michaela Zemčíková

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Výpočty a aplikace zlomkového kalkulu

v anglickém jazyce:

Calculations and applications of fractional calculus

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Problematika zlomkového kalkulu, tedy derivací a integrálů neceločíselných řádů, patří mezi zajímavé partie matematické analýzy, a to jak z výpočetního, tak i aplikačního hlediska. V této souvislosti jsou významné i diferenciální rovnice, které zahrnují neceločíselné derivace neznámé funkce, tzv. zlomkové diferenciální rovnice.

Cíle bakalářské práce:

Cílem práce by mělo být uvedení přehledu základních pojmů, definic a vlastností zlomkového kalkulu, se zaměřením na výpočty neceločíselných derivací a integrálů vybraných funkcí. Předpokládá se také uvedení a diskuse vybrané aplikace, jejíž matematický model lze popsat pomocí zlomkové diferenciální rovnice.

Seznam odborné literatury:

1. Podlubný, I.: Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, California, 1999.
2. Oldham, K.B., Spanier, J.: The Fractional Calculus, Academic Press, San Diego, California, 1999.

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jan Čermák, CSc.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2010/2011.

V Brně, dne 19.11.2010

L.S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.	prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.
Ředitel ústavu	Děkan fakulty

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá výpočty a aplikacemi zlomkového kalkulu. Jejím cílem je uvedení některých základních pojmů, definic a vlastností zlomkového kalkulu, které budou použity k výpočtům zlomkových integrálů a derivací vybraných elementárních funkcí se zaměřením na mocninné funkce. V další části se práce bude zabývat zlomkovou difúzní rovnicí, která popisuje tzv. subdifúzní procesy. Její výsledek bude porovnán s klasickou difúzí.

Abstract

This bachelor's thesis deals with the calculations and applications of fractional calculus. The aim of this thesis is to mention some basic fundamentals, definitions and properties of fractional calculus, that will be used for calculations of fractional integrals and derivations of selected elementary functions focus on power functions. In next part thesis will be concerned with fractional diffusion equation, which describes subdiffusive processes. Its result will be compared with the standard diffusion.

klíčová slova

Zlomkový kalkulus, zlomková difúzní rovnice

key words

Fractional calculus, fractional diffusion equation

bibliografická citace

ZEMČÍKOVÁ, M. *Výpočty a aplikace zlomkového kalkulu*, Brno, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2011 (31 stran). Vedoucí bakalářské práce doc. RNDr. JAN ČERMÁK, CSc.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Výpočty a aplikace zlomkového kalkulu* vypracovala samostatně pod vedením doc. RNDr. Jana Čermáka, CSc. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Michaela Zemčíková

Děkuji svému školiteli doc. RNDr. Janu Čermákovi, CSc. za odborné vedení mé bakalářské práce, cenné rady a připomínky. Dále bych chtěla poděkovat Ing. Tomáši Kiselovi za mnohé rady týkající se zlomkové difúzní rovnice.

Michaela Zemčíková

Obsah

1 Úvod

Zlomkový počet (nebo-li Fractional Calculus v anglické literatuře) je oblast matematické analýzy zabývající se integrací a derivací libovolných řádů. Zejména zkoumá možnost a podmínky použití reálných a komplexních čísel jakožto řádů derivací, resp. integrálů.

V této práci je uveden přehled některých základních pojmů, definic a vlastností zlomkového kalkulu. Hlavní částí je výpočet neceločíselných derivací a integrálů vybraných elementárních funkcí se zaměřením na mocninné funkce. Na závěr bude uvedena a diskutována vybraná aplikace, jejíž matematický model lze popsat pomocí zlomkové diferenciální rovnice, tedy diferenciální rovnice obsahující derivaci či derivace neceločíselných řádů.

Nyní zmíníme několik poznámek ke struktuře této práce. Po krátkém úvodu do problematiky bude v druhé kapitole uveden historický přehled matematických mezníků důležitých v oblasti vzniku a vývoje zlomkového kalkulu. V následující kapitole budou definovány některé z vyšších funkcí, které budou v dalším použity. Jmenovitě jsou to Gamma funkce, Beta funkce, Chybová funkce společně se svou doplňkovou funkcí, dále Mittag-Lefflerova funkce a Fresnelovy integrály. Na základě tohoto přehledu funkcí můžeme ve čtvrté kapitole přesně zavést Riemann-Liouvilleovy definice pro výpočet zlomkových derivací a integrálů, které budeme aplikovat při konkrétních výpočtech. Pátá kapitola bude věnována základním vlastnostem zlomkového kalkulu. Obsahem další kapitoly, tedy šesté, budou výpočty zlomkových integrálů a derivací vybraných elementárních funkcí. Zmíněnými funkcemi jsou funkce exponenciální, goniometrické a logaritmické, podrobněji se zaměříme na mocninné funkce. Nakonec budeme řešit obecný matematický model difúzní rovnice, jakožto zlomkovou diferenciální rovnici, doplněný o řešení konkrétní počáteční okrajové úlohy.

2 Vznik zlomkového kalkulu

Jak už název napovídá, nejprve se matematici zabývali myšlenkou, zda lze při derivaci řádu n nahradit přirozené n zlomkem. Později ale byla tato otázka zobecněna na náhradu n libovolným reálným (či dokonce komplexním) číslem.

Většina autorů při zmínce o vzniku zlomkového kalkulu cituje z korespondence francouzského matematika Guillaume Franois Antoina, Marquise de l'Hôpital německému filozofovi, vědci a matematikovi Gottfriedu Wilhelmu von Leibniz. Dopis byl napsán 30. září 1695 a věnoval se označení n-té derivace lineární funkce $f(x) = x$, které Leibniz použil ve tvaru $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}x$. Tímto zápisem vyzval l'Hospitala k otázce, jaký by byl výsledek, kdyby $n = \frac{1}{2}$? S vidinou do budoucnosti Leibniz odpovídá: „Thus it follows that $\mathrm{d}^{\frac{1}{2}}x$ will be equal to $x\sqrt{\frac{\mathrm{d}x}{x}}$. This is an apparent paradox from which, one day, useful consequences will be drawn.“

Následně se tato otázka dostala k mnoha významným matematikům, kteří se jí začali zabývat. V roce 1730 to byl švýcarský matematik a fyzik Leonhard Paul Euler. Odvozením pravidla pro exponenty diferenciálních operátorů přirozeného řádu nepřímo přispěl také Joseph-Louis Lagrange, comte de l'Empire

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\, y = \frac{\mathrm{d}^{m+n}}{\mathrm{d}x^{m+n}}\, y, \qquad \text{kde } y = f(x).$$

V roce 1819 se o derivaci libovolného řádu objevila zmínka i v textu Sylvestra Franois Lacroix, ve kterém snadno rozvinul n-tou derivaci funkce $y = x^m$, kde $m \in \mathbb{N}$, do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^n x^m}{\mathrm{d}x^n} = \frac{m!}{(m-n)!}\, x^{m-n}, \qquad m \geq n.$$

Použitím Legendreova symbolu pro zobecnění faktoriálu - gamma funkce (viz odstavec 3.1) dostal

$$\frac{\mathrm{d}^n x^m}{\mathrm{d}x^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}\, x^{m-n}.$$

Poprvé zlomkové operace použil v roce 1823 norský matematik Niels Henrik Abel k řešení integrální rovnice popisující problém tautochrony (tj. problém určení tvaru křivky takové, že doba sestupu hmotného bodu po této křivce vlivem gravitace není závislá na počáteční poloze na křivce) ve tvaru

$$k = \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} f(t)\mathrm{d}t,$$

kde neznámou je funkce $f(x)$ a k je předem daná konstanta. Úpravami získal výraz

$$\frac{\mathrm{d}^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{d}x^{\frac{1}{2}}} k = \sqrt{\pi} f(x).$$

Vypočtením derivace řádu $\frac{1}{2}$ konstanty k je určena hledaná funkce $f(x)$. Tento Abelův poznatek, tedy že zlomková derivace konstanty není vždy rovna nule, je velmi důležitý v oblasti zlomkového kalkulu. Asi po deseti letech se objevily práce Josepha Liouvillea. Vztah

$$D^\nu f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, a_n^\nu\, \mathrm{e}^{a_n x}$$

je znám jako Liouvilleova první formule pro zlomkovou derivaci, kde ν je libovolné reálné číslo. Nevýhodou tohoto vztahu je jeho omezené použití, protože se funkce $f(x)$ předpokládá ve tvaru nekonečné řady, tj.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, \mathrm{e}^{a_n x}, \qquad \mathrm{Re}\,(a_n) > 0,$$

kde symbolem $\mathrm{Re}(a_n)$ rozumíme reálnou část komplexního čísla a_n. Liouville však formuloval druhou definici ve tvaru

$$D^\nu x^{-a} = \frac{(-1)^\nu \, \Gamma(a+\nu)}{\Gamma(a)} \, x^{-a-\nu}, \qquad a > 0.$$

Tato definice je ale opět použitelná jen pro některé funkce, speciálně tvaru x^{-a}.

Georg Friedrich Bernhard Riemann hledal zobecnění Taylorovy řady a odvodil

$$D^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t) \mathrm{d}t + \psi(x),$$

kde $\psi(x)$ je doplňková funkce. Původ Riemann-Liouvilleovy definice zlomkového integrálu, tedy

$$D_0^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} f(t) \mathrm{d}t, \qquad \mathrm{Re}\,(\nu) > 0,$$

je v Cauchyho integrální formuli a její n-té derivaci. Tuto definici budeme dále používat.

Na konci 19. století hrál v oblasti zlomkového kalkulu významnou roli Oliver Heaviside, jehož metody se ukázaly jako užitečné pro inženýry v teorii přenosu elektrických proudů v kabelech.

V roce 1974 se konala první mezinárodní konference o zlomkovém kalkulu na univerzitě v New Havenu v Connecticutu. Poté se začaly v časopisech objevovat odborné články a následně i knižní publikace na toto téma.

Zlomkový počet našel uplatnění v mnoha oblastech vědy a inženýrství jako jsou proudění, reologie (studium deformací hmoty), difúzní transport podobný difúzi, elektrické sítě, elektromagnetismus a pravděpodobnost.

Podrobnější informace o celkovém vývoji zlomkového kalkulu lze najít v [3].

3 Vybrané vyšší funkce

Ve výpočtech derivací a integrálů neceločíselných řádů vybraných elementárních funkcí se často vyskytují složité výrazy. Tyto výrazy můžeme pro zjednodušení nahradit některými vyššími funkcemi. V následující kapitole proto uvedeme definice a některé z vlastností dále použitých vyšších funkcí. Zdrojem informací jsou [1] a [4].

3.1 Gamma funkce

Gamma funkce (někdy též nazývaná Eulerův integrál druhého druhu) představuje zobecnění faktoriálu pro obor reálných a dokonce i komplexních čísel. Je definována vztahem

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{z-1} \mathrm{d}t, \qquad \mathrm{Re}(z) > 0. \tag{3.1}$$

I když tento integrál konverguje pouze tehdy, je-li reálná část komplexního čísla z kladná, je možné rozšířit definici i pro libovolné komplexní číslo z, kromě celých záporných čísel včetně nuly, tedy $z \notin \mathbb{Z}_0^-$.

Kromě jiných můžeme použít i definici pomocí limity

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}, \qquad z \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, ...\}.$$

Důležitými vlastnostmi gamma funkce, které v dalším textu využíváme, jsou
1. $\Gamma(z) = (z-1)!, \quad z \in \mathbb{N}$,
2. $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z), \quad z \in \mathbb{R}^+$,
3. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

V tomto textu budeme pod pojmem gama funkce rozumět vztah (3.1).

3.2 Beta funkce

Beta funkce (někdy též nazývaná Eulerův integrál prvního druhu) je definována vztahem

$$B(\nu, \mu) = \int_0^1 x^{\nu-1}(1-x)^{\mu-1} \mathrm{d}x, \qquad \mathrm{Re}(\nu) > 0,\ \mathrm{Re}(\mu) > 0. \tag{3.2}$$

Beta funkci lze vyjádřit také pomocí gamma funkce

$$B(\nu, \mu) = \frac{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\mu)}{\Gamma(\nu+\mu)}. \tag{3.3}$$

Z uvedeného výrazu plyne symetrie vůči záměně ν a μ: $B(\nu, \mu) = B(\mu, \nu)$.

3.3 Error function

Error function, nebo-li chybová funkce, bývá také označována jako Gaussův pravděpodobnostní integrál, protože se vyskytuje v teorii pravděpodobnosti a ve statistice. Je definována vztahem

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Doplňkovou funkcí k error function je

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

3.4 Mittag-Lefflerova funkce

Jednoparametrickou funkci Mittag-Lefflerova typu definujeme vztahem

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \qquad \alpha > 0. \tag{3.6}$$

Používá se také dvouparametrická funkce Mittag-Lefflerova typu definovaná následovně

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \qquad \alpha > 0, \qquad \beta > 0. \tag{3.7}$$

Vztah získáme zobecněním exponenciální funkce vyjádřené ve tvaru nekonečné řady. Funkce byla pojmenována po švédském matematikovi Magnusi Gustafu Mittag-Lefflerovi.

Speciálními volbami parametrů α, příp. β pro dvouparametrické vyjádření, můžeme z funkcí Mittag-Lefflerova typu získat některé ze známých funkcí

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \mathrm{e}^z, \tag{3.8}$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{\mathrm{e}^z - 1}{z}, \tag{3.9}$$

$$E_{\frac{1}{2}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} = \mathrm{e}^{z^2} \operatorname{erfc}(-z), \tag{3.10}$$

$$E_2(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z), \tag{3.11}$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}. \tag{3.12}$$

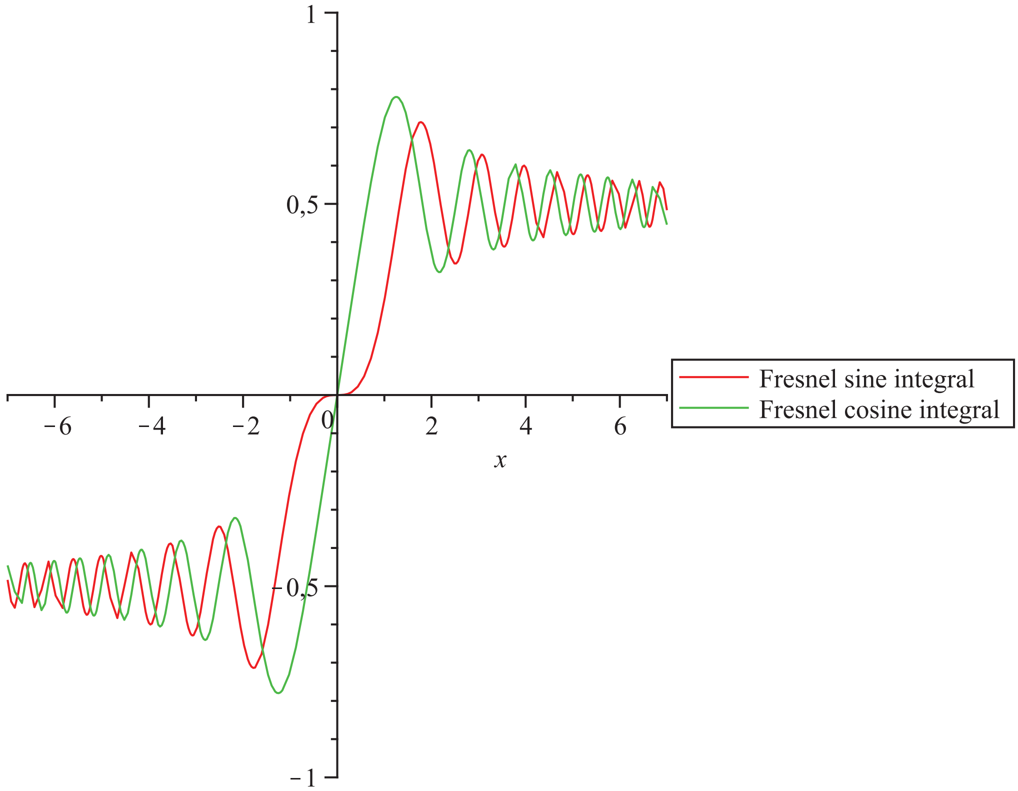
3.5 Fresnelovy integrály

Fresnelovy integrály byly pojmenovány po francouzském fyzikovi Augustinu Jeanu Fresnelovi a jsou důležité zejména v optice. V této práci je dále použijeme pouze ke zjednodušení matematických výrazů a budeme je značit $\mathcal{S}(x)$ a $\mathcal{C}(x)$. Jsou definovány takto

$$\mathcal{S}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin t^2 \, \mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{3.13}$$

$$\mathcal{C}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos t^2 \, \mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{3.14}$$

Na následujícím grafu můžeme vidět průběh Fresnelových integrálů.



4 Základní pojmy

Cílem této kapitoly je zavedení základních pojmů, které jsou nezbytné pro definování předpisu pro výpočet zlomkového integrálu, resp. derivace. Všechny zde použité informace jsou obsahem [1] a [7].

Nejprve zaveďme označení pro n-násobný integrál funkce $f(x)$

$$J_a^n f(x) := \int_a^x \int_a^{x_n} \dots \int_a^{x_2} f(x_1)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\dots\mathrm{d}x_n.$$

Věta 4.1 (Cauchyho formule) *Buď f funkce integrovatelná na intervalu $\langle a, b)$. Pak pro každé přirozené číslo n platí*

$$J_a^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Důkaz. Provedeme indukcí.
Pro $n = 1$ je

$$J_a^1 f(x) = \frac{1}{0!}\int_a^x (x-t)^0 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Předpokládejme, že pro $n-1$, kde $n \geq 2$, platí

$$J_a^{n-1} f(x) = \frac{1}{(n-2)!}\int_a^x (x-t)^{n-2} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Víme, že platí vztah $J_a^{n-1} f(x) = \int_a^x J_a^{n-2} f(t)\,\mathrm{d}t$, přičemž je $J_a^{n-1} f(x)$ jakožto funkce horní meze spojitá na $\langle a, b)$. Protože dále platí $J_a^n f(x) = \int_a^x J_a^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t$ a funkce $J_a^{n-1} f(x)$ je spojitá na $\langle a, b)$, je $J_a^n f(x)$ jakožto funkce horní meze integrálu spojité funkce $J_a^{n-1} f(x)$ primitivní funkcí k $J_a^{n-1} f(x)$ na $\langle a, b)$. Označme

$$F(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Derivací tohoto vztahu dostaneme

$$F'(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (n-1)(x-t)^{n-2} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n-2)!}\int_a^x (x-t)^{n-2} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

tedy

$$F'(x) = J_a^{n-1} f(x)$$

a odtud také F je primitivní funkcí k $J_a^{n-1} f(x)$ na $\langle a, b)$. Funkce $J_a^n f(x)$ a $F(x)$ se na $\langle a, b)$ liší nejvýše o konstantu. Protože

$$J_a^n f(a) = \int_a^a J_a^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t = 0,$$

$$F(a) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^a (a-t)^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t = 0,$$

je tedy $J_a^n f(x) = F(x)$. Odtud

$$J_a^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

$\square$

Následující definice vychází z Cauchyho formule pro opakovanou integraci.

Definice 4.1. (Riemann-Liouvilleova) Buď $f(x)$ funkce integrovatelná na intervalu $I = \langle a, b)$. Pro $x > 0$ a libovolné $\alpha \in \mathbb{R}^+$ definujeme zlomkový integrál řádu α funkce $f(x)$ ve tvaru

$$D_a^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{na } I.$$

Definice 4.2. Buď m přirozené číslo takové, že $m-1 < \alpha \leq m$. Pro $x > 0$ definujme zlomkovou derivaci řádu α funkce $f(x)$ takto

$$D_a^{\alpha} f(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha+1-m}}\,\mathrm{d}t \right] & m-1 < \alpha < m, \\ \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} f(x), & \alpha = m. \end{cases}$$

Existuje řada dalších přístupů, které se navzájem více či méně liší. Pro numerické výpočty se používá Grünwald-Letnikovova definice, která vychází ze známé definice derivace funkce $f(x)$, tedy

$$f^{'}(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}.$$

Zobecnění tohoto vztahu pro $f^{(n)}(x)$, $n \in \mathbb{N}$ a následně i pro derivace neceločíselných řádů můžeme najít v [1]. Významnou roli v oblasti zlomkového kalkulu hraje Caputův přístup, který se od Riemann-Liouvilleova liší záměnou pořadí derivace a integrace v definici zlomkové derivace. Pro $n \in \mathbb{N}$ je tato derivace dána vztahem

$$^{C}D_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - n)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha+1-n}}\,\mathrm{d}t, \quad n-1 < \alpha < n. \tag{4.1}$$

Z hlediska matematické analýzy a výpočtu derivací a integrálů neceločíselných řádů elementárních funkcí je vhodnější použít Riemann-Liouvilleovy definice, tj. definice 4.1 a 4.2, podle kterých budeme v dalším postupovat.

5 Základní vlastnosti

Obsahem této kapitoly je přehled některých základních vlastností zlomkového kalkulu, které budeme využívat v dalších částech této práce. Uvedeme pouze výsledné vztahy. Důkazy a odvození lze najít v [1].

5.1 Linearita

Z definic zlomkových derivací, resp. integrálů můžeme vidět, že jde o kombinaci klasických derivací a integrálů celočíselných řádů, což jsou lineární operace, a odtud plyne linearita zlomkových operací. Pro Riemann-Liouvilleův přístup platí

$$D_a^\alpha \left(\lambda f(x) + \mu g(x)\right) = \lambda D_a^\alpha f(x) + \mu D_a^\alpha g(x),$$

kde α, a, λ, μ jsou reálné konstanty, D_a^α je operátor zlomkové derivace řádu α a $f(x), g(x)$ jsou funkce splňující podmínky pro výpočet těchto derivací. Vlastnost linearity platí i pro další přístupy. Důkaz pro Grünwald-Letnikovův a Riemann-Liouvilleův lze najít v [1].

5.2 Skládání

K vyjádření skládání zlomkových operátorů Riemann-Liouvilleova typu budeme potřebovat následující vlastnosti těchto operátorů:

$$D_a^\alpha \left(D_a^{-\alpha} f(x)\right) = f(x), \quad \alpha > 0,$$

tj. aplikujeme-li zlomkovou derivaci řádu α na zlomkový integrál funkce $f(x)$ téhož řádu zleva, dostaneme původní funkci $f(x)$. Pro opačné pořadí zlomkových operátorů tato vlastnost neplatí.

Dále uvedeme vztah pro skládání n-té celočíselné a zlomkové derivace řádu α, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}_0$, a to v očekávaném tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} D_a^\alpha f(x) = D_a^{\alpha+n} f(x).$$

Nyní se budeme zabývat otázkou skládání zlomkových operátorů Riemann-Liouvilleova typu. Pro skládání dvou zlomkových integrálů platí

$$D_a^{-\alpha} \left(D_a^{-\beta} f(x)\right) = D_a^{-(\alpha+\beta)} f(x), \quad a \in \mathbb{R}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Tento vztah platí i pro opačné pořadí aplikace zlomkových integrálů, tedy zlomkové integrály jsou komutativní.

Další vlastnost popisuje aplikaci zlomkové derivace řádu α na zlomkový integrál řádu β funkce $f(x)$, kde $m-1 < \alpha \leq m$ a $n-1 < \beta \leq n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Platí

$$D_a^\alpha \left(D_a^{-\beta} f(x)\right) = D_a^{\alpha-\beta} f(x), \quad \alpha, \beta \geq 0.$$

Zaměníme-li pořadí zlomkové derivace a integrace, pak dostaneme následující vztah

$$D_a^{-\beta} \left(D_a^\alpha f(x)\right) = D_a^{-\beta+\alpha} f(x) - \sum_{k=1}^{m} D_a^{\alpha-k} f(x) \,|_{x=a} \frac{(x-a)^{\beta-k}}{\Gamma(1+\beta-k)}.$$

Konečně pro skládání dvou zlomkových derivací řádu α a β, kde $m-1 < \alpha \leq m$ a $n-1 < \beta \leq n$, $m, n \in \mathbb{N}$, platí

$$D_a^\alpha \left(D_a^\beta f(x)\right) = D_a^{\alpha+\beta} f(x) - \sum_{k=1}^{n} D_a^{\beta-k} f(x) \,|_{x=a} \frac{(x-a)^{-\alpha-k}}{\Gamma(1-\alpha-k)}.$$

6 Elementární funkce

V následující kapitole se budeme zabývat zlomkovými integrály a derivacemi vybraných elementárních funkcí.

6.1 Neceločíselné integrály

Při výpočtech zlomkových integrálů budeme postupovat podle Riemann-Liouvilleovy definice zlomkového integrálu 4.1. Jako řád integrace zvolíme $\alpha = \frac{1}{2}$ a oblastí dílčí integrace bude interval $\langle 0, b)$, kde $b > 0, b \in \mathbb{R}$.

6.1.1 Mocninné funkce

Nejprve uvažujme mocninnou funkci ve tvaru $f(x) = 1$, tedy polynom stupně nula. Její zlomkový integrál řádu $\alpha = \frac{1}{2}$ je podle definice 4.1

$$\begin{aligned} D_0^{-\frac{1}{2}} f(x) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}t = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left[-\frac{(x-t)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^x = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} (-2) \left(0 - x^{\frac{1}{2}}\right) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Tedy

$$D_0^{-\frac{1}{2}} 1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x}. \tag{6.1}$$

V případě polynomu stupně jedna, např. funkce $f(x) = x$, postupujeme analogicky.

$$D_0^{-\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} t \, \mathrm{d}t,$$

odkud integrací per partes dostaneme

$$\begin{aligned} D_0^{-\frac{1}{2}} f(x) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left[\left[-2t(x-t)^{\frac{1}{2}} \right]_0^x + 2 \int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t \right] = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left[-\frac{(x-t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^x = \\ &= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left(-\frac{2}{3} \right) \left(0 - x^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{4}{3} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Výsledkem je

$$D_0^{-\frac{1}{2}} x = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}. \tag{6.2}$$

Podrobněji se mocninným funkcím budeme věnovat v třetí části této kapitoly.

6.1.2 Exponenciální funkce

Nyní vyhodnotíme zlomkový integrál řádu $\alpha = \frac{1}{2}$ exponenciální funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$.

$$D_0^{-\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^t \mathrm{d}t,$$

přičemž použitím substituce $t = x - u^2$ dostaneme

$$\begin{aligned} D_0^{-\frac{1}{2}} f(x) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_{\sqrt{x}}^{0} (u^2)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{x-u^2} (-2u) \mathrm{d}u = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{x-u^2} \mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{x} \mathrm{e}^{-u^2} \mathrm{d}u = \\ &= \mathrm{e}^x \operatorname{erf}(\sqrt{x}). \end{aligned}$$

Nakonec je tedy

$$D_0^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \operatorname{erf}(\sqrt{x}). \tag{6.3}$$

6.1.3 Goniometrické funkce

Dále uvažujme goniometrickou funkci $f(x) = \sin x$, jejíž integrál řádu $\alpha = \frac{1}{2}$ je dán vztahem

$$D_0^{-\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} \sin t \, \mathrm{d}t.$$

Pomocí substituce $t = x - u^2$ dostaneme

$$D_0^{-\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_{\sqrt{x}}^{0} (u^2)^{-\frac{1}{2}} \sin(x - u^2)(-2u) \, \mathrm{d}u = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\sqrt{x}} \sin(x - u^2) \, \mathrm{d}u.$$

Následně aplikujeme vzorec

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

a pravidlo pro integrál součtu, resp. rozdílu dvou funkcí, a dostáváme

$$\begin{aligned} D_0^{-\frac{1}{2}} f(x) &= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\sqrt{x}} (\sin x \cos u^2 - \cos x \sin u^2) \, \mathrm{d}u = \\ &= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left[\sin x \int_0^{\sqrt{x}} \cos u^2 \, \mathrm{d}u - \cos x \int_0^{\sqrt{x}} \sin u^2 \, \mathrm{d}u \right]. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Použitím definice Fresnelových integrálů (3.13) získáme výsledný vztah

$$D_0^{-\frac{1}{2}} \sin x = \sqrt{2} \left[\sin x \, \mathcal{C}\left(\sqrt{x}\right) - \cos x \, \mathcal{S}\left(\sqrt{x}\right) \right].$$

Analogicky postupujeme při výpočtu integrálu funkce $f(x) = \cos x$ řádu $\alpha = \frac{1}{2}$. Platí

$$D_0^{-\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} \cos t \, \mathrm{d}t,$$

kde použitím substituce $t = x - u^2$ dostaneme

$$D_0^{-\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_{\sqrt{x}}^{0} (u^2)^{-\frac{1}{2}} \cos(x - u^2)(-2u) \, \mathrm{d}u = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\sqrt{x}} \cos(x - u^2) \, \mathrm{d}u.$$

Podle vzorce

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

a pravidla pro integrál součtu dvou funkcí je

$$\begin{aligned} D_0^{-\frac{1}{2}} f(x) &= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\sqrt{x}} (\cos x \cos u^2 + \sin x \sin u^2)\, \mathrm{d}u = \\ &= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left[\cos x \int_0^{\sqrt{x}} \cos u^2\, \mathrm{d}u + \sin x \int_0^{\sqrt{x}} \sin u^2\, \mathrm{d}u \right]. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Použitím definice Fresnelových integrálů (3.13) získáme výsledný vztah

$$D_0^{-\frac{1}{2}} \cos x = \sqrt{2} \left[\cos x\, \mathcal{C}\left(\sqrt{x}\right) + \sin x\, \mathcal{S}\left(\sqrt{x}\right) \right].$$

6.1.4 Logaritmická funkce

V případě funkce $f(x) = \ln x$ nelze integrovat na intervalu $\langle 0, b)$, protože funkce zde není omezená, tedy ani integrovatelná. Proto ji na rozdíl od ostatních funkcí budeme integrovat na intervalu $\langle 1, b)$. Platí tedy

$$D_1^{-\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_1^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} \ln t\, \mathrm{d}t,$$

kde po integraci per partes je zlomkový integrál ve tvaru

$$D_1^{-\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left[\left[-2(x-t)^{\frac{1}{2}} \ln t \right]_1^x + 2 \int_1^x \frac{1}{t} (x-t)^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}t \right] = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_1^x \frac{1}{t} (x-t)^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}t.$$

Použitím substituce $t = x - u^2$ dostaneme

$$\begin{aligned} D_1^{-\frac{1}{2}} f(x) &= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_{\sqrt{x-1}}^0 \frac{1}{x-u^2} (u^2)^{\frac{1}{2}} (-2u)\, \mathrm{d}u = \\ &= \frac{4}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\sqrt{x-1}} \left(-1 + \frac{x}{x-u^2} \right) \mathrm{d}u = \\ &= \frac{4}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\sqrt{x-1}} \left(-1 + \frac{x}{(\sqrt{x}-u)(\sqrt{x}+u)} \right) \mathrm{d}u = \\ &= \frac{4}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\sqrt{x-1}} \left(-1 - \frac{\frac{\sqrt{x}}{2}}{u-\sqrt{x}} + \frac{\frac{\sqrt{x}}{2}}{u+\sqrt{x}} \right) \mathrm{d}u = \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left[-\sqrt{x-1} - \frac{\sqrt{x}}{2} \ln|\sqrt{x-1}-\sqrt{x}| + \frac{\sqrt{x}}{2} \ln|\sqrt{x-1}+\sqrt{x}| \right] = \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left[-\sqrt{x-1} + \frac{x}{2} \ln \frac{|\sqrt{x-1}+\sqrt{x}|}{|\sqrt{x-1}-\sqrt{x}|} \right]. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Konečným výsledkem je

$$D_1^{-\frac{1}{2}} \ln x = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left[-\sqrt{x-1} + \frac{x}{2} \ln \frac{|\sqrt{x-1}+\sqrt{x}|}{|\sqrt{x-1}-\sqrt{x}|} \right].$$

6.2 Neceločíselné derivace

6.2.1 Mocninné funkce

Nejprve se budeme zabývat derivací řádu $\alpha = \frac{1}{2}$ mocninné funkce $f(x) = 1$. Vztah je podle definice 4.2 tvaru

$$D_0^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}t\right].$$

Aplikací první derivace na vztah (6.1) dostaneme

$$D_0^{\frac{1}{2}} 1 = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}.$$

Tento polynom můžeme také chápat jako konstantní funkci, jejíž celočíselná derivace je vždy rovna nule. Jak můžeme vidět, tak v případě poloviční derivace to neplatí. Je to způsobeno definičním vztahem 4.2. V případě použití Caputovy definice, tedy vztahu (4.1), by poloviční derivace konstanty vyšla opět nula jako důsledek obráceného pořadí derivace a integrace.

Jako další mocninnou funkci zvolíme $f(x) = x$, tedy polynom stupně jedna.

$$D_0^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^x \frac{t}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}t\right].$$

Nyní stačí pouze zderivovat zlomkový integrál (6.2) vyhodnocený v předchozí podkapitole a máme výsledek zlomkové derivace funkce $f(x) = x$ ve tvaru

$$D_0^{\frac{1}{2}} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x}.$$

6.2.2 Exponenciální funkce

Další část je věnována výpočtu zlomkové derivace řádu $\alpha = \frac{1}{2}$ exponenciální funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$. Podle Riemann-Liouvilleovy definice budeme řešit vztah

$$D_0^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}t\right].$$

Tento opět vyhodnotíme pomocí dílčího zlomkového integrálu dané funkce, tedy vztahu (6.3), a jeho následné derivace takto

$$D_0^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x \mathrm{erf}(\sqrt{x}) = \mathrm{e}^x \mathrm{erf}(\sqrt{x}) + \mathrm{e}^x \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \mathrm{e}^x \mathrm{erf}(\sqrt{x}) + \frac{1}{\sqrt{\pi x}}.$$

Nakonec je tedy

$$D_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \mathrm{erf}(\sqrt{x}) + \frac{1}{\sqrt{\pi x}}.$$

6.2.3 Goniometrické funkce

Nyní uvažujme goniometrickou funkci $f(x) = \sin x$. Její zlomková derivace řádu $\alpha = \frac{1}{2}$ je určena následovně

$$D_0^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^x \frac{\sin t}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}t\right].$$

Tento výraz se opět od zlomkového integrálu funkce sinus liší pouze o derivaci. Pro zjednodušení výpočtu však použijeme jen dílčí výsledek integrace, tedy vztah (6.4), který budeme derivovat. Tj.

$$\begin{aligned}
D_0^{\frac{1}{2}} f(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left[\sin x\int_0^{\sqrt{x}} \cos u^2\,\mathrm{d}u - \cos x\int_0^{\sqrt{x}} \sin u^2\,\mathrm{d}u\right] = \\
&= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left[\cos x\int_0^{\sqrt{x}} \cos u^2\,\mathrm{d}u + \sin x\cos x\frac{1}{2\sqrt{x}} + \right. \\
&\quad \left. + \sin x\int_0^{\sqrt{x}} \sin u^2\,\mathrm{d}u - \cos x\sin x\frac{1}{2\sqrt{x}}\right] = \\
&= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left[\cos x\int_0^{\sqrt{x}} \cos u^2\,\mathrm{d}u + \sin x\int_0^{\sqrt{x}} \sin u^2\,\mathrm{d}u\right].
\end{aligned}$$

Použitím definice Fresnelových integrálů (3.13) dostaneme výsledný vztah

$$D_0^{\frac{1}{2}} \sin x = \sqrt{2}\left[\cos x\,\mathcal{C}\left(\sqrt{x}\right) + \sin x\,\mathcal{S}\left(\sqrt{x}\right)\right].$$

Další námi vybranou goniometrickou funkcí je $f(x) = \cos x$, která má zlomkovou derivaci ve tvaru

$$D_0^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^x \frac{\cos t}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}t\right].$$

Budeme postupovat analogicky jako u funkce sinus, tedy použijeme dílčího výpočtu zlomkového integrálu funkce kosinus daného vztahem (6.5), který pouze zderivujeme.

$$\begin{aligned}
D_0^{\frac{1}{2}} f(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left[\cos x\int_0^{\sqrt{x}} \cos u^2\,\mathrm{d}u + \sin x\int_0^{\sqrt{x}} \sin u^2\,\mathrm{d}u\right] = \\
&= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left[-\sin x\int_0^{\sqrt{x}} \cos u^2\,\mathrm{d}u + \cos^2 x\frac{1}{2\sqrt{x}} + \right. \\
&\quad \left. + \cos x\int_0^{\sqrt{x}} \sin u^2\,\mathrm{d}u + \sin^2 x\frac{1}{2\sqrt{x}}\right] = \\
&= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left[\cos x\int_0^{\sqrt{x}} \sin u^2\,\mathrm{d}u - \sin x\int_0^{\sqrt{x}} \cos u^2\,\mathrm{d}u\right].
\end{aligned}$$

Po úpravě a použití definice Fresnelových integrálů (3.13) dostaneme výsledný vztah

$$D_0^{\frac{1}{2}} \cos x = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} + \sqrt{2}\left[\cos x\, \mathcal{S}\left(\sqrt{x}\right) - \sin x\, \mathcal{C}\left(\sqrt{x}\right)\right].$$

6.2.4 Logaritmická funkce

Ze stejného důvodu jako u integrace funkce $f(x) = \ln x$ musíme při výpočtu zlomkové derivace uvažovat interval $\langle 1, b)$. Platí

$$D_1^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_1^x \frac{\ln t}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}t\right].$$

Opět vidíme shodu mezi zlomkovým integrálem a derivací, které v dalším využijeme. Po úpravě aplikujeme na vztah (6.6) derivaci

$$\begin{aligned} D_1^{\frac{1}{2}} f(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{4}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\sqrt{x-1}} \left(-1 + \frac{x}{x-u^2}\right) \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{4}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left[\int_0^{\sqrt{x-1}} \frac{u^2}{x-u^2}\,\mathrm{d}u\right] = \\ &= \frac{4}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x-1}{x-x+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{x-1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x-1}. \end{aligned}$$

Výsledkem zlomkové derivace je

$$D_1^{\frac{1}{2}} \ln x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x-1}.$$

6.3 Některá zobecnění a doplňující komentáře

Jak již bylo dříve uvedeno, nyní se podrobněji zaměříme na mocninné funkce, zejména proto, že si lze snadno představit jejich průběh a také chování po derivaci a integraci. Obsahem této práce jsou zlomkové derivace a integrály, proto se zabývejme derivací, resp. integrací libovolného řádu mocninné funkce.

Uvažujme mocninnou funkci ve tvaru $f(x) = (x-a)^\nu$, kde $\nu > -1$, $a \in \mathbb{R}$, a řádem derivace, resp. integrace bude $\alpha > 0$. Vyjdeme z Riemann-Liouvilleovy definice neceločíselné derivace řádu α funkce $f(x)$

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(D_a^{-(n-\alpha)} f(x)\right), \quad n-1 < \alpha \le n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6.7}$$

K výpočtu derivace mocninné funkce $f(x) = (x-a)^\nu$ budeme potřebovat nejprve její integrál řádu α. Tedy

$$D_a^{-\alpha}(x-a)^\nu = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^\nu \mathrm{d}t,$$

kde předpoklad $\nu > -1$ je nutnou podmínkou integrovatelnosti. Použitím substituce $t = a + \xi(x-a)$ a beta funkce, viz definice 3.2, dostaneme

$$\begin{aligned} D_a^{-\alpha}(x-a)^\nu &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a-\xi(x-a))^{\alpha-1} \left(a+\xi(x-a)-a\right)^\nu (x-a)\, \mathrm{d}\xi = \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\nu}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\xi)^{\alpha-1}\xi^\nu \mathrm{d}\xi = \frac{(x-a)^{\alpha+\nu}}{\Gamma(\alpha)} B(\nu+1,\alpha) = \\ &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1+\alpha)}(x-a)^{\alpha+\nu}, \quad \nu > -1. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Nyní využijeme odvozený vztah pro integrál (6.8) a také vztah (6.7), čímž dostáváme

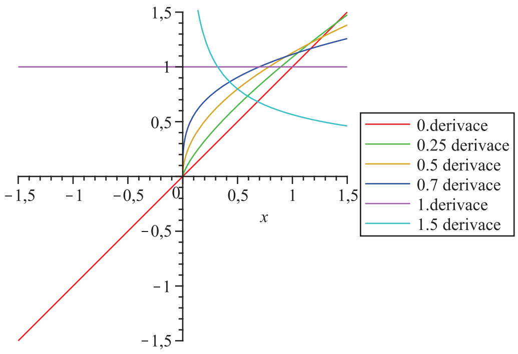
$$\begin{aligned} D_a^\alpha(x-a)^\nu &= \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(D_a^{-(n-\alpha)}(x-a)^\nu\right) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1+n-\alpha)}(x-a)^{n-\alpha+\nu} = \\ &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-\alpha)}(x-a)^{\nu-\alpha}, \quad \nu > -1,\ \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Dokázali jsme, že vztah

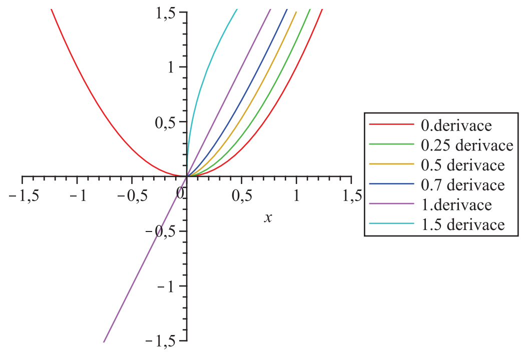
$$\frac{\mathrm{d}^n (x-a)^m}{\mathrm{d}x^n} = \frac{m!}{(m-n)!}(x-a)^{m-n}$$

pro derivaci funkce $f(x) = (x-a)^m$ řádu n, kde $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ lze pro libovolný řád derivace převést do tvaru (6.9). Odvozené zobecnění pro mocninné funkce lze najít v [1].

Pro lepší názornost můžeme srovnat některé zlomkové derivace mocninných funkcí, konkrétně $f(x) = x$ a $f(x) = x^2$, na následujících grafech.

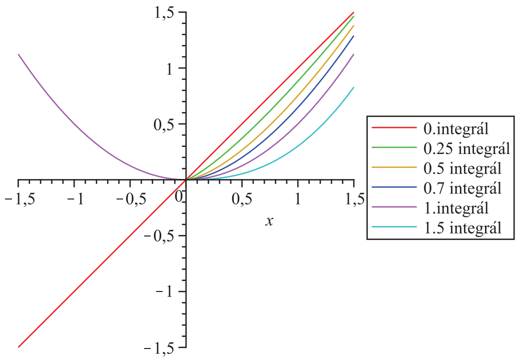


Graf 1: Derivace $f(x) = x$.

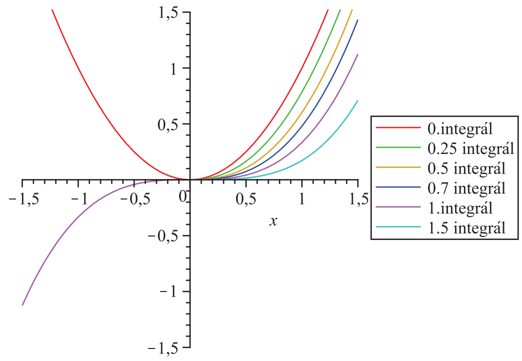


Graf 2: Derivace $f(x) = x^2$.

Na dalších dvou grafech můžeme vidět chování některých zlomkových integrálů stejných mocninných funkcí.



Graf 3: Integrál $f(x) = x$.



Graf 4: Integrál $f(x) = x^2$.

Pro opakovanou derivaci přirozeného řádu n funkcí sinus, kosinus a exponenciální funkce platí následující vztahy

$$\frac{\mathrm{d}^n \sin x}{\mathrm{d}x^n} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \tag{6.10}$$

$$\frac{\mathrm{d}^n \cos x}{\mathrm{d}x^n} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \tag{6.11}$$

$$\frac{\mathrm{d}^n \mathrm{e}^{ax}}{\mathrm{d}x^n} = a^n \mathrm{e}^{ax}, \qquad a > 0. \tag{6.12}$$

Analogicky jako u mocninné funkce lze "intuitivně" předpokládat, že pouhou záměnou $\alpha \in \mathbb{R}$ za $n \in \mathbb{N}$ dostaneme opět platné vztahy. Toto tvrzení se v námi vypočtených zlomkových derivacích nepotvrdilo. Je to dáno dolní mezí dílčí integrace. Kdybychom jako dolní meze volili meze daným způsobem "přirozené" pro výše zmíněné elementární funkce, pak bychom obdrželi očekávaný výsledek.

7 Aplikace - zlomková difúzní rovnice

Jednou z nejvýznamnějších oblastí, kde nachází zlomkový kalkulus bohaté uplatnění, je modelování transportních procesů příbuzných difúzi. V této kapitole se budeme věnovat rovnici, která je úspěšně využívána pro popis tzv. subdifúzních procesů, ke kterým dochází např. v porézních strukturách, polymerických materiálech či při přenosu náboje v amorfních polovodičích, viz [1], [6].

Zatímco pro klasickou difúzi je charakteristický lineární vztah mezi rozptylem difundujících částic a časem

$$\langle x^2 \rangle \sim t,$$

námi studovaným subdifúzním procesům odpovídá mocninná závislost

$$\langle x^2 \rangle \sim t^\alpha, \quad \alpha \in (0,1\rangle. \tag{7.1}$$

Odtud je zřejmé, že pro velká t je šíření látky při subdifúzních procesech výrazně pomalejší než u klasické difúze. Na základě vztahu (7.1) lze z principů náhodné procházky, viz [6], odvodit, že námi studovaná rovnice je tvaru

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D_{0,t}^{1-\alpha} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad \alpha \in (0,1\rangle, \tag{7.2}$$

kde neznámá funkce $u(x,t)$ představuje koncentraci difundující látky v tekutině a symbolem $D_{0,t}^{1-\alpha}$ rozumíme zlomkovou derivaci řádu $1-\alpha$ podle proměnné t na intervalu $\langle 0,b)$, kde $b > 0, b \in \mathbb{R}$. Vidíme tedy, že rozdíl mezi klasickou difúzní rovnicí a rovnicí (7.2) je pouze v aplikaci operátoru $D_{0,t}^{1-\alpha}$, a že pro volbu $\alpha = 1$ obě rovnice splývají.

Naším cílem v této kapitole je vyřešení počáteční okrajové úlohy

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D_{0,t}^{1-\alpha} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in (0,1), \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{7.3}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,1), \tag{7.4}$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{7.5}$$

$$u_x(1,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+ \tag{7.6}$$

popisující subdifúzní proces v konečné trubici, která má izolované oba konce, viz (7.5) a (7.6). Počáteční rozložení difundující látky je popsáno funkcí $u_0(x)$.

Úlohu budeme řešit klasickou Fourierovou metodou řad, viz [5]. Prvním krokem metody je nalezení všech funkcí $v(x,t)$, které budou splňovat rovnici (7.3) spolu s okrajovými podmínkami (7.5) a (7.6). Tyto funkce budeme hledat ve tvaru se separovanými proměnnými, tedy

$$v(x,t) = X(x)\,T(t). \tag{7.7}$$

Po dosazení do rovnice (7.3) dostáváme

$$X(x)T'(t) = X''(x) D_{0,t}^{1-\alpha} T(t),$$

po separaci proměnných získáme

$$\frac{T'(t)}{D_{0,t}^{1-\alpha} T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Vidíme, že levá strana nezávisí na proměnné x, pravá nezávisí na t. Rovnice však má být splněna pro všechna $x \in (0,1)$ a také pro $t \in \mathbb{R}^+$. Proto musí být obě strany rovny konstantě, kterou označíme $-\lambda$. Dostáváme tedy dvě rovnice

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \tag{7.8}$$

$$\frac{T'(t)}{D_{0,t}^{1-\alpha}T(t)} = -\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{7.9}$$

které řešíme odděleně. Netriviální řešení obyčejné diferenciální rovnice (7.8) předpokládáme ve tvaru

$$X(x) = A\cos\mu x + B\sin\mu x, \qquad -\lambda = \mu^2,$$

kde $A, B \in \mathbb{R}$. Dosazením do okrajových podmínek (7.5) a (7.6) získáme spočetnou množinu řešení

$$X_k(x) = A\cos(k\pi x), \quad k \in \mathbb{Z}^+. \tag{7.10}$$

Po jednoduchých úpravách zlomkové diferenciální rovnice (7.9) dostáváme po aplikaci operátoru zlomkové integrace $D_{0,t}^{\alpha-1}$ vztah

$$D_{0,t}^{\alpha-1}T' + k^2\pi^2\left(T - D_{0,t}^{-\alpha}\,T|_{t=0}\,\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\right) = 0.$$

Vzhledem k (7.4) a (7.7) nabývá $T(0)$ konečné hodnoty, a proto je výraz $D_{0,t}^{-\alpha}\,T|_{t=0}$ roven nule. Obdržíme tak dvoučlennou lineární homogenní zlomkovou diferenciální rovnici s konstantními koeficienty

$$D_{0,t}^{\alpha-1}T' + k^2\pi^2 T = 0,$$

která je řešitelná např. pomocí Laplaceovy transformace, viz [1]. Poznatky potřebné pro detailní řešení zlomkových diferenciálních rovnic přesahují rámec této práce, proto uvedeme přímo řešení

$$T_k(t) = CE_\alpha\left(-k^2\pi^2 t^\alpha\right), \tag{7.11}$$

kde $C \in \mathbb{R}$ a $E_\alpha\left(-k^2\pi^2 t^\alpha\right)$ je Mittag-Lefflerova funkce (3.6). Řešení (7.10) a (7.11) dosadíme do předpisu (7.7) a dostaneme spočetnou množinu funkcí

$$v_k(x,t) = C_k\cos(k\pi x)E_\alpha\left(-k^2\pi^2 t^\alpha\right), \quad k \in \mathbb{Z}^+,$$

které splňují rovnici (7.3) a okrajové podmínky (7.5) a (7.6). Vzhledem k linearitě úlohy platí princip superpozice, tzn. každá lineární kombinace funkcí $v_k(x,t)$ je řešením (7.3), (7.5) a (7.6). Abychom splnili i počáteční podmínku (7.4), musíme zvolit konstanty C_k, tak, aby

$$u(x,0) = u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k\cos(k\pi x).$$

Vztahy pro výpočet koeficientů C_k jsou známy z teorie Fourierových řad, takže řešení počáteční okrajové úlohy (7.3) - (7.6) můžeme zapsat jako

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k\cos(k\pi x)E_\alpha\left(-k^2\pi^2 t^\alpha\right), \qquad C_k = 2\int_0^1 u_0(x)\cos(k\pi x)\mathrm{d}x.$$

V dalším se budeme zabývat konkrétní počáteční okrajovou úlohou, tj. úlohou (7.3) - (7.6), kde $u_0(x) = x(1-x)$ pro $x \in (0,1)$. Celý výpočet provedeme podle výše uvedeného postupu. Tedy řešení bude tvaru

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\pi x) E_\alpha\left(-k^2\pi^2 t^\alpha\right), \quad \text{kde} \quad C_k = 2\int_0^1 x(1-x)\cos(k\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{k^2\pi^2}.$$

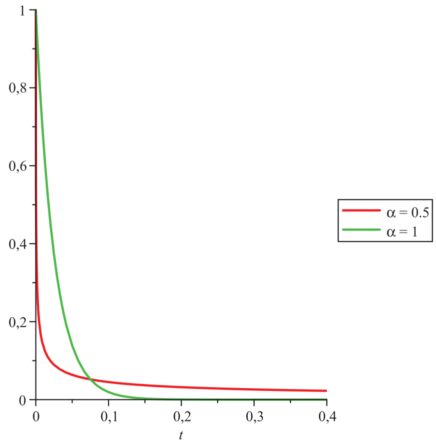
Řešení úlohy je dáno vztahem

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{k^2\pi^2} \cos(2k\pi x)\, E_\alpha\left(-4k^2\pi^2 t^\alpha\right). \tag{7.12}$$

Nyní porovnáme řešení výše uvedené úlohy pro speciální volby $\alpha = \frac{1}{2}$ a $\alpha = 1$ (klasická difúze). Podle (3.8) a (3.10) je

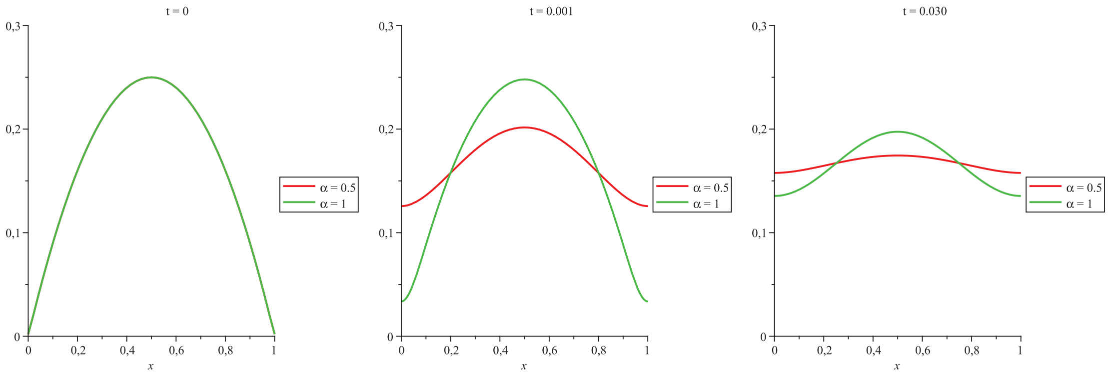
$$\begin{aligned} E_1(-4k^2\pi^2 t) &= \mathrm{e}^{-4k^2\pi^2 t} \\ E_{\frac{1}{2}}(-4k^2\pi^2 t^{\frac{1}{2}}) &= \mathrm{e}^{16k^4\pi^4 t}\,\mathrm{erfc}(4k^2\pi^2 t^{\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Podle (7.12) jsou tyto funkce zodpovědné za rychlost přechodu systému do rovnovážného stavu. Z grafu 5 můžeme pozorovat pomalejší pokles $E_{\frac{1}{2}}(-4\pi^2 t^{\frac{1}{2}})$ vůči $E_1(-4\pi^2 t)$, který potvrzuje asymptotické chování subdifúzních procesů diskutované na počátku kapitoly. V souladu s tímto grafem vidíme, že pro malé hodnoty t se při subdifúzním procesu látka šíří rychleji (viz graf 6), pro velké hodnoty t se však situace obrátí (viz graf 7). Je možné ukázat, že pro $\alpha = 1$ je pokles exponenciání, pro $\alpha < 1$ je mocninný [1].

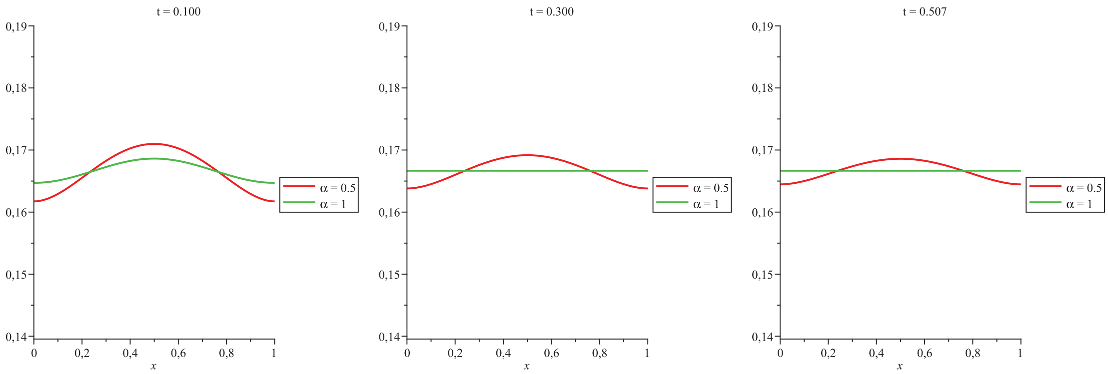


Graf 5: Mittag-Lefflerova funkce $E_\alpha(-4\pi^2 t^\alpha)$.

Na následujících grafech porovnáme obě řešení v závislosti na čase t.



Graf 6: Řešení pro malé t.



Graf 7: Řešení pro velké t.

Oba systémy mají stejný rovnovážný stav, ale systém popisující zlomkovou difúzi $(\alpha = \frac{1}{2})$ se mu blíží mnohem pomaleji.

8 Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo seznámit čtenáře s některými základními pojmy, definicemi a vlastnostmi zlomkového kalkulu. Po úvodních kapitolách jsme se zabývali výpočty neceločíselných derivací a integrálů vybraných elementárních funkcí. Poslední část této práce byla věnována zlomkové difúzní rovnici, ve které se zlomkový kalkulus uplatňuje. Z porovnání výsledků klasické a zlomkové difúze můžeme vidět, že pro malé hodnoty času se látka šíří rychleji při subdifúzním procesu, naopak pro velké hodnoty je situace opačná, tedy soustava popisující klasickou difúzi se dostane do rovnovážného stavu dříve.

Pokračovat v této práci je možné v několika směrech, ve kterých se zlomkový kalkulus v současné době rozvíjí. Jedním ze směrů je teorie tzv. diskrétního zlomkového kalkulu, která pracuje s diskrétními analogiemi pojmů diskutovaných v této práci. Zejména jde o pojem zlomkové diference a zlomkové sumy, které jsou uvažovány na diskrétních množinách různých typů, viz [8], [9]. Dalším směrem je uplatnění zlomkových derivací v teorii diferenciálních rovnic neceločíselných řádů. Budování základů této teorie je teprve v počátcích, mj. i proto, že užití zlomkových derivací v různých významech (viz kap. 4) vede na různé typy zlomkových diferenciálních rovnic.

Literatura

[1] Podlubný, I. *Fractional Differential Equations*. Vol. 198. United States: Academic Press, 1999. ISBN 0-12-558840-2.

[2] Oldham, K.B., Spanier, J. *The Fractional Calculus*, United States: Academic Press, 1999.

[3] Miller, K.S., Ross, B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1993. ISBN 0-471-58884-9.

[4] Oldham, K., Myland, J., Spanier, J. *An Atlas of Functions*, New York: Springer Science - Business Media, 2009. ISBN 978-0-387-48807-3.

[5] Franců, J. *Parciální diferenciální rovnice*. Třetí vydání. Brno: CERM, 2003. ISBN 80-214-2334-X.

[6] Metzler, R., Klafter, J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. *Physics Reports*, [online]. 2000, vol. 339, pp. 5-17. [cit. 2011-03-21]. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157300000703>.

[7] Jaroš, J. *Fractional differential equations and generalized trigonometric functions*. Presentation at Colloquium on Differential and Difference Equations, Brno, 2006.

[8] Čermák, J., Nechvátal, L. On (q, h)-analogue of fractional calculus. *J. Nonlin. Math. Phys.*, 2010, vol. 17, pp. 51-68.

[9] Diaz, R., Osler, J.T. Differences of fractional order. *Math. Comp.*, 1974, vol. 28, pp. 185-202.

[10] URL: <http://fabpedigree.com/james/greatmm.htm> [cit. 2011-05-24].

[11] URL: <http://en.wikipedia.org> [cit. 2011-02-19].

9 Seznam použitých zkratek a symbolů

$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{N}_0$	množina přirozených čísel včetně nuly
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{R}^+$	množina kladných reálných čísel
$\mathbb{Z}^+$	množina kladných celých čísel
$\mathbb{Z}_0^-$	množina záporných celých čísel včetně nuly
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel
J_a^n	n-násobný integrál
$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x)$	n-tá derivace funkce $f(x)$
$f^{(n)}(x)$	n-tá derivace funkce $f(x)$
$\Gamma(z)$	Gamma funkce proměnné z
$B(\nu, \mu)$	Beta funkce proměnných ν, μ
$\mathrm{erf}(x)$	chybová funkce proměnné x
$\mathrm{erfc}(x)$	doplňková funkce k chybové funkci proměnné x
$E_\alpha(z)$	jednoparametrická Mittag-Lefflerova funkce proměnné z
$E_{\alpha,\beta}(z)$	dvouparametrická Mittag-Lefflerova funkce proměnné z
$\mathrm{Re}(z)$	reálná část komplexního čísla z
$\mathcal{S}(x)$	Fresnelův integrál funkce $\sin(x)$
$\mathcal{C}(x)$	Fresnelův integrál funkce $\cos(x)$
$D_a^\alpha f(x)$	Riemann-Liouvilleova zlomková derivace funkce $f(x)$ řádu α
$D_a^{-\alpha} f(x)$	Riemann-Liouvilleův zlomkový integrál funkce $f(x)$ řádu α
$D_{a,t}^{1-\alpha} f(x,t)$	Riemann-Liouvilleova zlomková derivace funkce $f(x,t)$ řádu $1-\alpha$ podle t
$\langle x \rangle$	rozptyl difundující látky
$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)$	parciální derivace funkce $f(x,t)$ podle t