VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
LETECKÝ ÚSTAV

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF AEROSPACE ENGINEERING

PŘEHLED A VÝVOJ CFD METOD

OVEVIEW AND EVOLUTION OF CFD METHODS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR´S THESIS

AUTOR PRÁCE — VÍT VODIČKA
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE — ING. PETR DOUPNÍK
SUPERVISOR

BRNO 2011

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student: Vít Vodička

který/která studuje v bakalářském studijním programu

obor: Strojní inženýrství (2301R016)

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Přehled a vývoj CFD metod

v anglickém jazyce:

Overview and evolution of CFD methods

Stručná charakteristika problematiky úkolu:
Pojednání o CFD metodách, jejich vývoj v historickém kontextu, popis specifik a celkové zhodnocení.

Cíle bakalářské práce:

Uveďte obecně požadavky, kladené na CFD metody. Dále zmapujte v historickém přehledu vývoj CFD metod. Popište soudobé CFD metody a nastiňte možný vývoj v této oblasti. V závěru vše celkově zhodnoťte.

Seznam odborné literatury:
[1] ANDERSON.J.D.: Computational Fluid Dynamics - The Basics with Applications, McGraw-Hill,Inc., 1995 ISBN 0-07-001685-2

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Petr Doupník

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2010/2011.

V Brně, dne 26.11.2010

L.S.

prof. Ing. Antonín Píštěk, CSc. Ředitel ústavu	prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc. Děkan fakulty

Abstrakt

Bakalářská práce je zaměřena na zmapování a charakteristiku CFD metod v jejich historickém kontextu. Porovná přednosti a nevýhody jednotlivých typů a zmíní oblasti, ve kterých byly dané metody využity.

Summary

The bachelor thesis is focused on mapping and characterization of CFD methods in their historical context. It compares advantages and disadvantages of different types and mention the areas in which have been used these methods.

Klíčová slova

CFD, Navier – Stokesovi rovnice, parciální diferenciální rovnice, výpočetní síť, diskretizace, turbulence

Keywords

CFD, Navier-Stokes equations, partial differential equations, computational grid, discretization, turbulence

VODIČKA, V. *Přehled a vývoj CFD metod.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2011. 34 s.

Prohlášení

Prohlašuji, že tato práce je mým autorským dílem, které jsem vypracoval samostaně. Všechny prameny, ze kterých jsem čerpal, v práci cituji s uvedením odkazu na konkrétní zdroj.

OBSAH

1. ÚVOD 4

2. OBECNÉ INFORMACE 4

2.1 Co je CFD 4
2.2 Určující rovnice 4
2.3 Princip výpočtu 5
Diskretizace 5
Výpočtové metody 5

3. VYBRANÉ MILNÍKY V DYNAMICE TEKUTIN 6

3.1 Starověk 6
3.2 Období do 18 století 6
3.3 Období 18 a19 století 7

4. VÝPOČETNÍ METODY 8

4.1 Metoda konečných diferencí (MKD) – 1910 8
Explicitní metoda 9
Implicitní metoda 9
Crank-Nicolsonova metoda 10
4.2 Metoda konečných prvků (MKP) - 1943 11
Zobecněná MKP 11
Hp- MKP 11
Bezsíťové metody 11
4.3 Panel method – 1952 12

5. NÁRODNÍ LABORATOŘ V LOS ALAMOS 13

5.1 Particle in cell (PIC) - 1955 14
5.2 Marker and cell method (MAC) - 1965 15
5.3 Fluid in cell (FLIC) – 1966 16

6. IMPERIAL COLLEGE 17

6.1 Unified theory - 1964 18
6.2 Metoda konečných objemů (MKO) -1968 19
Optimalizace 21
6.3 Spektrální metoda – 1969 21
Popularizace CFD 21

7. MODELOVÁNÍ TURBULENCÍ 22

7.1 Kolmogorův model - 1941 23
7.2 Large eddy simulation (LES) – 1963 24
7.3 K – e model - 1967 25
7.4 Probability density function (PDF) -1969 26
7.5 Přímá numerická simulace (DNS) 26

8. SHRNUTÍ 27

9. ZÁVĚR 27

10. SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY 28

11. POUŽITÉ VIZUALIZACE 30

12. POUŽITÉ ROVNICE 31

1. Úvod

Cílem této práce je chronologicky zmapovat různé druhy analyzování a následného řešení jevů spojených s tekutinami.
Pokusí se objasnit, co všechno termín CFD zahrnuje a vysvětlí strukturu řešení obecného problému.
Porovná vývoj způsobů výpočtů proudění od nejjednodušších potenciálních rovnic přes praktičtější Eulerovi vztahy až po Navier-Stokesovi rovnice umožňující pospat téměř libovolné proudění.
Konec práce se bude zabývat turbulentním modelováním sloužícímu ke zjednodušení výpočtů a zároveň snížením jeho náročnosti.

2. Obecné informace

2.1 Co je CFD

Výpočtová dynamika tekutin je věda předpovídající pohyb proudění, přenos hmoty a tepla, chemické reakce a s nimi spojené jevy, řešením odpovídajících matematických rovnic prostřednictvím vhodných výpočtových procesů.

2.2 Určující rovnice

Existuje velké množství rovnic proudění o různé přesnosti a náročnosti. Stav výpočetní techniky nám vždy neumožňuje řešit problém nejpřesnější metodou. Právě proto byly v kontextu jejího vývoje populární různé výpočetní rovnice.
Základním kamenem popisujících vztahů jsou potenciální rovnice.
Proudění popisují pomocí gradientu funkce rychlostního potenciálu φ. Její nejjednodušší tvz. linearizovaná forma má tvar:

$$(1 - M_{\infty}^2)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

Rovnice 2.1: Potenciální rovnice [1]
M_∞ - Machovo číslo nerozrušeného proudu

Tyto rovnice byly nejčastějším výpočtovým prostředkem až do 70. let 20. století.
Vystřídaly je vztahy známé jako Eulerovi rovnice, které shrnují zákony zachování energie, hmotnosti a hybnosti do soustavy 5 rovnic ve tvaru:

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} = 0$$

Rovnice 2.2: Eulerova rovnice [2]
f_x, f_y, f_z - vektory proudových toků jednotlivými směry

Tento systém se používal v 80. a 90. letech.
Na vrcholu z pohledu přesnosti jsou pak Navier – Stokesovi rovnice, zahrnující do svého výpočtu většinu vnějších i vnitřních vlivů.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\nabla u = -\frac{1}{\rho}\nabla p + v\nabla^2 u + f$$

Rovnice 2.3: Navier-Stokesova rovnice [3]
u - vektor rychlosti, ∇- gradient, v- kinematická viskozita, f - součet objemových sil

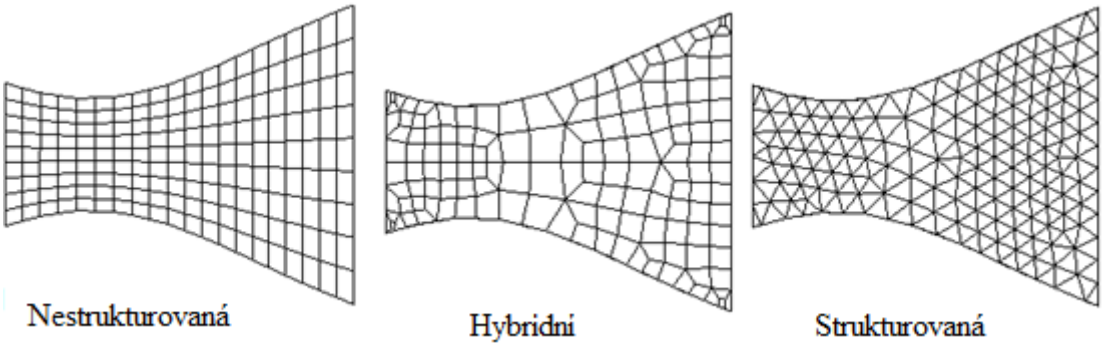
Tyto vztahy se staly nejpopulárnějšími rovnicemi v dnešní době.

2.3 Princip výpočtu

Rovnice jsou záměrně uvedeny v diferenciálním tvaru, neboť je málokdy možné jejich algebraické řešení. Proto je nutné výpočtové prostředí upravit matematickým procesem označovaným jako diskretizace.

Diskretizace

Ve spojité ploše respektive prostoru určíme systém uzlových bodů, ve kterých budeme řešit předcházející rovnice.
Hustota bodů bývá přímo úměrná rychlosti změny zkoumaných veličin v daném okolí. Jejich spojením dostáváme síť definovanou tvarem - trojúhelníková, hexagonální, čtyřstěnná a zároveň typem strukturovaná, hybridní, nestrukturovaná, zónová.



Obr. 2-1: Diskretizační mřížky [2]

Diskretizace se nemusí týkat pouze výpočtového prostoru ale také samotného obtékaného tělesa. Každá výpočtová metoda má individuální nároky na stavbu mřížky, které jsou následně alfou a omegou celého výpočtu, neboť se od nich odvíjí jak jeho náročnost, tak i přesnost výsledků. [2]

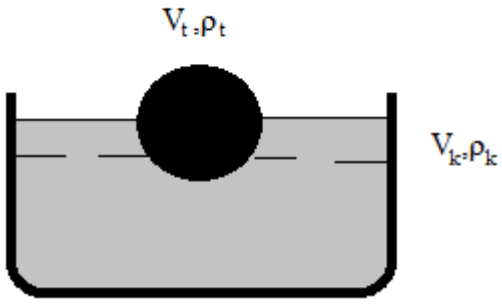
Výpočtové metody

Samotná výpočtová metoda se pak definuje nejen používanými rovnicemi nebo požadavky na výpočtovou síť, ale také například způsobem implementace okrajových podmínek nebo předáváním informací mezi ohraničujícími body.

3. Vybrané milníky v dynamice tekutin

3.1 Starověk

Počátky řešení problémů mechaniky tekutin, především kapalin, nalézáme, jako u většiny dnešních věd, již v období antického světa, především Římské říše. Na tehdejší dobu rozvinutá kanalizační a vodovodní síť konfrontovala stavitele s řadou problémů, týkajících se právě mechaniky tekutin.
O nezpochybnitelný posun se zasloužil Archimédés ze Syrakus, který obohatil tehdejší svět nejen o tzv. Archimedův šroub[1], ale především o způsob výpočtu hustoty látek. [4]



Obr. 3-1: Vizualizace Archimedova zákona

$$\frac{V_k}{V_t} = \frac{\rho_t}{\rho_k}$$

Rovnice 3.1: Archimédův zákon [5]
V_k – objem vytlačené kapaliny, ρ_k – hustota kapaliny, V_t - objem tělesa, ρ_t – hustota tělesa

3.2 Období do 18 století

Po úpadku říší se vývoj na dlouhou dobu zastavil a k jeho znovuzrození došlo až ke konci 15. stol. Výraznou postavou tehdejší doby byl Leonardo da Vinci. Své zkušenosti získané při stavbě přístavů a kanálů shrnul v díle *Del moto e misura dell'acqua*.
Jedním z největších myslitelů vůbec byl i jeho o cca 200 let mladší kolega Isac Newton. Přínosem tohoto muže byl především 2. pohybový zákon setrvačnosti, dále pak zákon viskozity pro Newtonské tekutiny a vztah mezi délkou a rychlostí vlny kapaliny. Poznatky shrnul v knize *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica.* [4]

Obr. 3-2: Vizualizace 2. Newtonova pohybového zákona

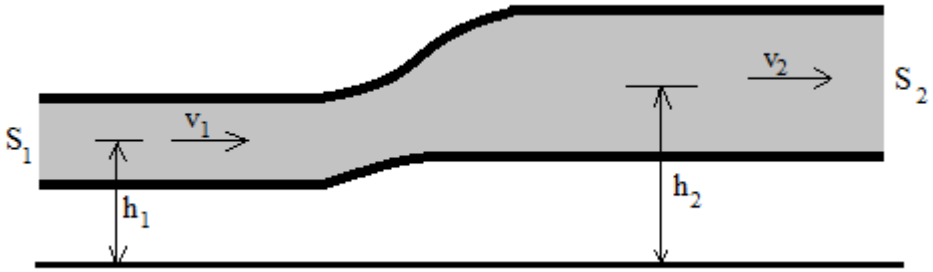
$$F = \frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt} = ma$$

Rovnice 3.2: Zákon setrvačnosti [5]
F – působící síla, p – hybnost, t – čas, m – hmotnost, a - zrychlení

[1] šnekový mechanismus pro čerpání vody

3.3 Období 18 a19 století

Období objevení mnoha hydrodynamických rovnic. Daniel Bernoulli roku 1738 ve svém rozsáhlém díle *Hydrodynamique* zveřejnil rovnici popisující proudění ideální tekutiny[2]. V podstatě se jedná o formu zákona zachování mechanické energie.



Obr. 3-3: Proudění v trubici

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 + \rho g h_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 + \rho g h_2$$

Rovnice 3.3: Bernoulliho rovnice [6]
ρ – hustota, v – rychlost, p – tlak, h - výška

Jeho vrstevník Leohnard Euler vytvořil na základě 2. Newtonova pohybového zákona systém parciální diferenciálních rovnic (PDE), které se dnes označují jako Eulerovy rovnice. Ve svých výpočtech však stále nebral v potaz viskozitu kapalin.
Tu doplnili až Francouz Claude Luis Marie Henri Navier a Ir George Gabriel Stokes, kteří v letech 1827 a 1845 odvodili rovnice viskózního proudění nezávsile na sobě. Navier-Stokesovi formule jsou základním kamenem dnešní CFD.
Tyto rovnice byly pro praktické výpočty příliš složité, a proto je Angličan Osborne Reynolds zjednodušil do tvaru dnes označovaného zkratkou RANS[3].
Reynoldosovo jméno nese i číslo popisující vtah mezi třecí a setrvačnou silou, které nám umožňuje určit, o jaký typ proudění se jedná. [4]

$$Re = \frac{LV}{v}$$

Rovnice 3.4: Výpočet Reynoldsova čísla [4]
L – charakteristický rozměr prostředí, V – rychlost tělesa, v – viskozita

Vědci už mají základní nástroje k popsání proudění, problém však nastává při řešení rovnic, neboť analyticky lze rovnice řešit pouze pro několik triviálních případů.

[2] nestlačitelná, bez tření
[3] Reynolds averaged Navier-Stoke equations

4. Výpočetní metody

4.1 Metoda konečných diferencí (MKD) – 1910

Na počátku 20. století publikoval F. L. Richardson jeden z nejstarších způsobů řešení parciálních diferenciálních rovnic, považovaný za první výpočetní metodu CFD. [4]
Vychází z principu konzervativního tvaru diferenciálních výpočetních rovnic. Ze známých okrajových podmínek počítáme postupně další body mřížky tak, že nahradíme diferenciální rovnice přibližně ekvivalentním diferenčním kvocientem:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Rovnice 4.1: Diferenční kvocient [7]

f´(a) – derivace funkční hodnoty v bodě a, f(a) – funkční hodnota v bodě a, h – délka kroku

Krok h bývá často nahrazován časovou změnou. Tomuto tvaru se říká dopředná diference.
Stejný tvar lze získat vyjádřením derivace v Taylorově polynomu:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + ..$$

Rovnice 4.2: Vyjádření derivace Taylorovým polynomem

Vyjádříme funkční hodnotu derivace:

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{R(a)}{h}$$

Rovnice 4.3: Funkční hodnota derivace

R(a) nám určuje chybu měření, kterou do výpočtu nezahrnujeme. Tuto nerovnost označujeme jako chybu diskretizační. Celková nepřesnost výpočtu je pak součtem právě této odchylky a zaokrouhlovací chyby.
Diskretizace spočívá v rozdělení prostoru do podoby mřížky kontrolních bodů definované indexy *i, j, k,* které určují pořadí ve směru jednotlivých os *x, y, z*. Ve složitějších mřížkách se používá pouze jedno pořadové číslo. Čas se nejčastěji označuje indexem *n*.
Existuje několik metod výpočtu dalších členů, ukázky si uvedeme v 1D síti. [7]

Explicitní metoda

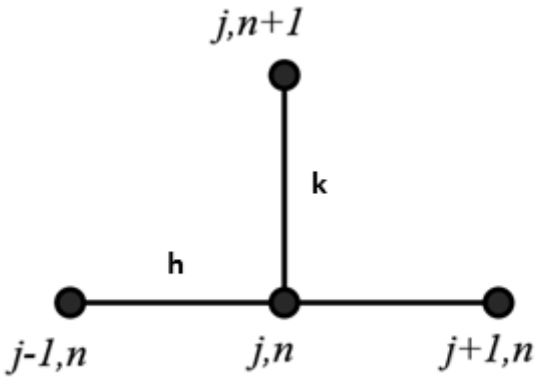
Nejběžnější metoda využívající dopřednou diferenci a zároveň centrální diferenci druhého řádu.

$$u_j^{n+1} = (1 - 2\left(\frac{k}{h^2}\right))u_j^n + \frac{k}{h^2}u_{j-1}^n + \frac{k}{h^2}u_{j+1}^n$$

Rovnice 4.4: Explicitní metoda

u – zkoumaná veličina, k – časový krok, h – délka kroku

Vztah k/h^2 se nahrazuje koeficientem *r*, který empiricky tlačíme do intervalu (0;0.5), chceme-li, aby byla metoda byla konvergentní a numericky stabilní.



Obr. 4-1: Vizualizace explicitní metody [7]

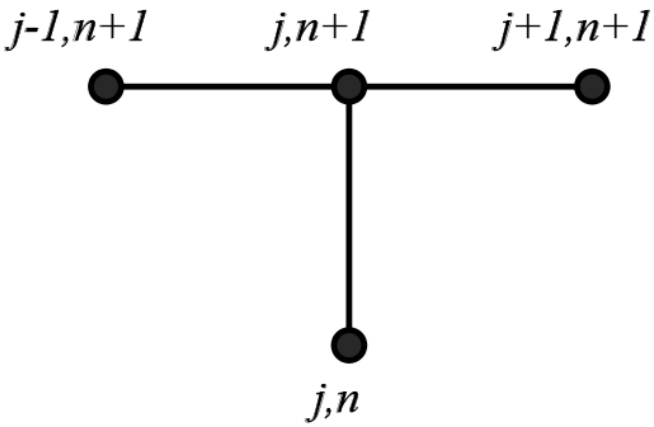
Implicitní metoda

Metoda využívající zpětnou diferenci a zároveň centrální diferenci druhého řádu.

$$u_j^n = \left(1 + 2\left(\frac{k}{h^2}\right)\right)u_j^{n+1} - \frac{k}{h^2}u_{j-1}^{n+1} - \frac{k}{h^2}u_{j+1}^{n-1}$$

Rovnice 4.5: Implicitní metoda

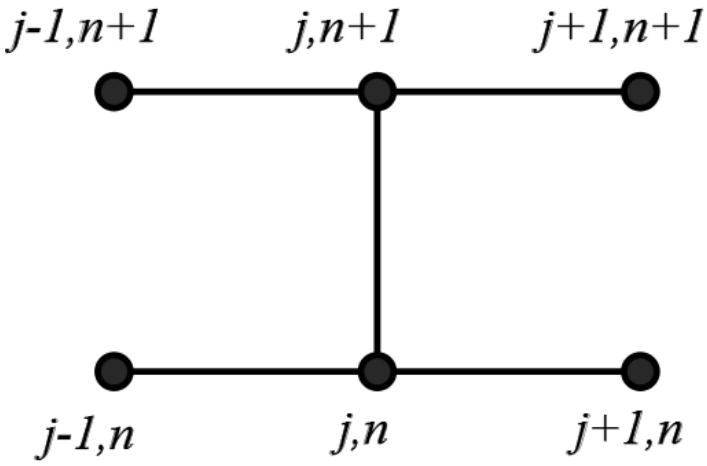
Na rozdíl od explicitní metody, je tato vždy konvergentní a numericky stabilní, na druhou strunu je početně náročnější. Tento nedostatek lze kompenzovat využitím velkých časových odstupů jednotlivých kroků.



Obr. 4-2: Implicitní metoda [7]

Crank-Nicolsonova metoda

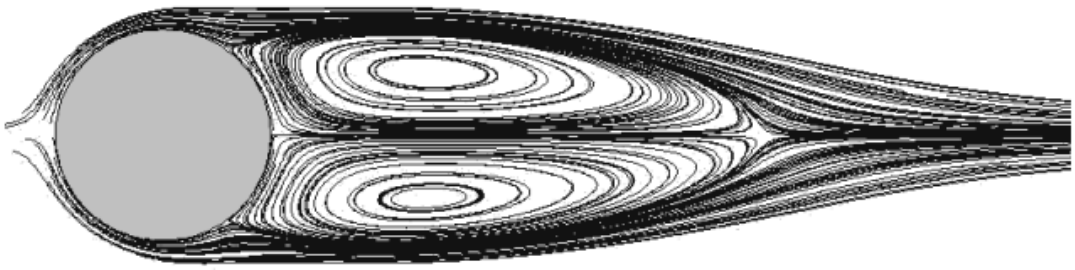
Kombinuje obě předchozí metody. Využívá diferenci v čase *n+1/2* a opět centrální diferenci druhého řádu. Metoda je vždy konvergentní a numericky stabilní. Velikost odchylky roste v závislosti na vzdálenosti bodu od okraje, a proto je nutné použít časově jemnou mřížku.



Obr. 4-3: Crank – Nicolsonova metoda [7]

Obecně je metoda konečných diferencí vhodná pro řešení spojené s teplotním přenosem. Mezi její nevýhody oproti ostatním metodám patří především obtížná implementace okrajových podmínek a také nutnost vysokofrekvenční časové sítě. [7]

První praktickými aplikacemi metody konečných diferencí byly výpočty proudění kolem válce. Prvenství je připisováno A. Thomovi za simulaci z roku 1933.
Ještě před přesunem řešení mechaniky tekutin do softwarové podoby vytvořil roku 1953 Japonec Kawaguti pomocí mechanické stolní kalkulačky grafickou vizualizaci vzduchu obtékajícího válec. Výpočet prováděl pomocí MKD a jako určující použil Navier – Stokesových rovnice, což dokazují i turbulentní proudy za válcem. Vytvoření toho obrazu mu zabralo 20 hodin práce týdně po dobu 18-ti měsíců. [4]



Obr. 4-4: Kawagutiho vizualizace vzduchu obtékajícího válec [4]

4.2 Metoda konečných prvků (MKP) - 1943

MKP byla vyvinuta jako zdokonalená přeformulovaná metoda konečných diferencí, za účelem výpočtu napěťových charakteristik mechanických součástí, k čemuž se mimo jiné používá dodnes. O její popularizaci se koncem 60. let postaral bývalý student a v té době zaměstnanec VUT Miloš Zlámal. [8]
V CFD se objevila až v 70. letech.
Diskretizace problému probíhá v podstatě stejně jako u MKD.
Nejedná se o plnohodnotnou metodu ale pouze o prostředek výpočtu parciálních diferenciálních rovnic. Řešení probíhá nejčastěji v převedení PDE do přibližně odpovídajícího systému obyčejných diferenciálních rovnic, které pak vypočteme standartními numerickými metodami.
V oblasti fluidní mechaniky se využívá pro viskózní proudění a jeho vlivy na povrch výrobku, naopak metoda není vhodná pro výpočty turbulentních simulací.
Existuje několik specializovaných typů. [9]

Zobecněná MKP

Rozdělíme prostor na vhodné oblasti, pro které z dostupných hodnot sestavíme zvlášť rovnice, což nám zaručí poměrně dobrý odhad řešení daného místa. Po té spojíme pomocí reverzního principu *rozdělení jednotky* **Partition of unity** dohromady.
Metoda se osvědčila především v malých mřížkách se složitými okrajovými podmínkami. [9]

Hp- MKP

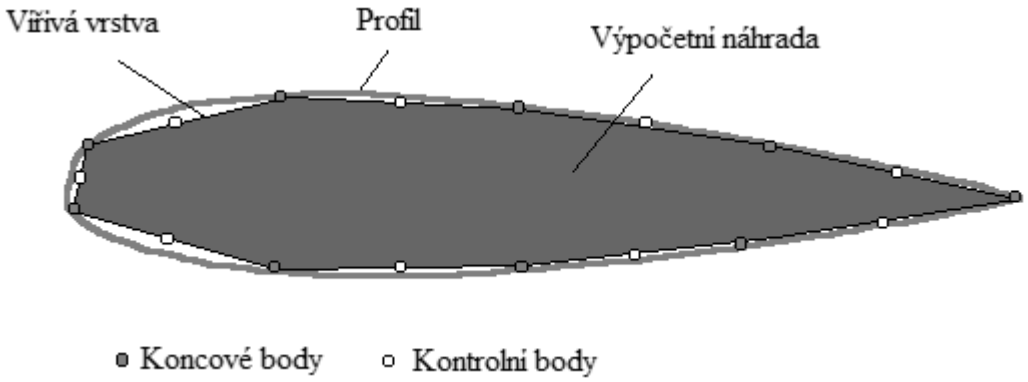
Průkopníkem jedné z prvních typů MKP byl další Čech Ivo Babuška, který objevil, exponenciální konvergenční zrychlení při správné kombinaci kroků h a stupně polynomu p popisujících elementární uzel. Tento způsob dosahuje výsledků mnohem rychleji než ostatní a má oproti nim i rovnoměrnější rozdělení chyby, na druhou stranu je náročnější na CPU, analýzu problému a jeho převodu do počítačové podoby. Kvůli tomu nalézáme hp-MKP jako výpočetní řešič v CFD pouze zřídka. [10]

Bezsíťové metody

Na rozdíl od ostatních metod, uvažuje pro výpočty pouze geometrii tělesa a ne jeho mřížku. Pohyb částice předpovídá čistě z Lagrangeovského nebo Eulerovského principu. Metoda je zajímává především z pohledu CFD, protože Zprostředkovává řešení tavení respektive tuhnutí látky. [11]

4.3 Panel method – 1952

Z pohledu aviatika velmi důležitá metoda řešení potenciálního nestlačitelného proudění.
Používala se téměř výhradně k vyjádření obtékání profilu křídla vzduchem. Problém byl komplikovaný především z hlediska určení chování hraničních a přechodových hladin nacházejících se blízko povrchu křídla. Metoda to řeší diskretizací profilu na přímé části tzv. panely, na kterých jsou umístěny vířivé vrstvy o tloušťce γ, které mají aproximovat právě hraniční hladiny.



Obr. 4-5: Diskretizace křídla panelovou metodou [12]

Každý panel je definován dvěma koncovými a jedním kontrolním bodem, kde aplikujeme okrajové podmínky. Řešíme potenciální pohybové rovnice, které superpozicí skládáme s efekty vířivé vrstvy, čímž vzniká proudová funkce popisující výsledný tok. Výpočty lze dosáhnout algebraicky a není třeba PDE řešiče typu MKD.

Metoda byla dlouhou dobu požívána pro výpočty nízko rychlostních proudění ať už vzduchu kolem křídel, nebo kapalin okolo lodí a ponorek. Dnes se používá především jako ukázka začínajícím studentům, neboť absence viskozity a stlačitelnosti tekutiny ji dělá pro naši dobu nedostatečně přesnou. [12]

5. Národní laboratoř v Los Alamos

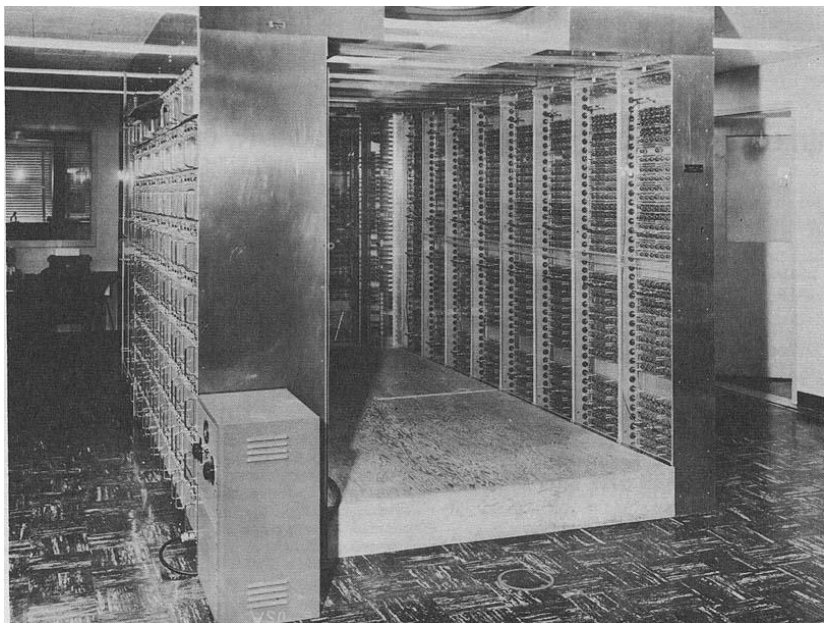
Během 2. světové války bylo zřízeno výzkumné centrum SITE Y12 v odlehlé oblasti Nové Mexiko u města Los Alamos.

Obr. 5-1: Poloha laboratoře Los Alamos

Původně vznikla ke sjednocení vědců zapojených do projektu Manhattan, který měl za cíl vytvoření štěpné atomové zbraně. Po konci války výzkum pokračoval cestou vývoje vodíkové bomby. Také kolem tohoto projektu se v laboratoři vystřídalo mnoho vědeckých špiček své doby, včetně několika laureátů Nobelovy ceny, kteří zkoumali pochody spojené s fúzní reakcí bomby. Jedním z těchto jevů bylo pozorování vícesložkových materiálů, které se za vysokého tlaku chovají tekutě. Právě skupina vědců, zabývajících se tímto problémem, položila základy vědy později nazvané computational fluid dynamics, zkráceně CFD, česky výpočtová dynamika tekutin.

Spojení nejmodernějšího výpočetního vybavení, počítače MANIAC, se skupinou T-3 pod vedením Francise H. Harlowa, považovaného za otce vědy, časem vyústilo ve velké množství modelů a metod. [13] [14]

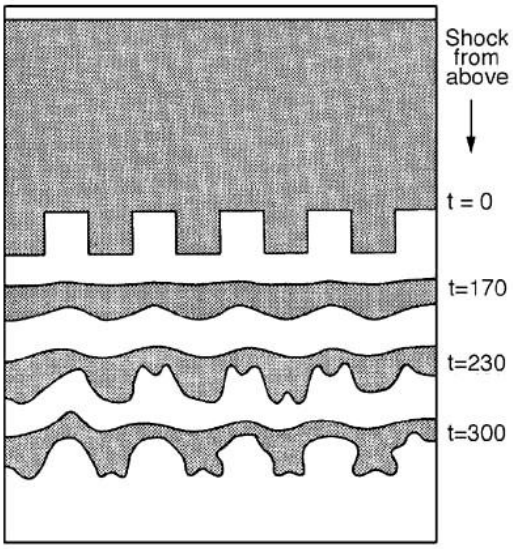
Důležitý je také fakt, že první metody vznikaly v době, kdy ještě neexistoval žádný programovací jazyk, a proto musel každý fluidní výzkumník zároveň dokonale rozumět výpočetním pochodům počítačů. Toto vyřešil až programovací jazyk Fortan, který se používal od konce 50. let téměř celé půl století.



Obr. 5-2: Výpočetní místnost MANIAC

5.1 Particle in cell (PIC) - 1955

Způsob výpočtu proudění stlačitelných pevných nebo tekutých látek, případně jejich směsí.
Od druhu hmoty se odvíjí i způsob diskretizace. Ta má formu buď množiny kontrolních bodů (pouze pevné látky) nebo mřížky s kontrolními body (tekuté látky a směsi).
Je zřejmé, že řešit rovnici pro každou částici zvlášť by bylo, uvážíme-li jejich počet, výpočtově náročné proto se určovaly tzv. super částice – např. množina elektronů.



Obr. 5-3: Vizualizace PIC výpočtu [15]

Metoda byla vytvořena za účelem simulací plazmy-energická směs iontů a elektronů od čehož se odvíjí i její určující rovnice. Nástrojem pro výpočet pohybu látky se stala Lorentzova rovnice.

$$m\frac{dv}{dt} = q(E + v \times B)$$

Rovnice 5.1: Lorentzova rovnice

q – náboj, E – intenzita el. pole, B – indukce magnetického pole, r - poloměr vodiče, v -rychlost

Výpočet probíhá v implicitní (Leapfrog method) a explicitní (Boris scheme) části. Zatímco implicitní výpočty rychlostí pracují s obnovenými hodnotami, explicitní používají předešlé.

$$\frac{v_{k+\frac{1}{2}} - v_{k+\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{q}{m}(E_k + \frac{v_{k+\frac{1}{2}} - v_{k+\frac{1}{2}}}{2} \times B_k)$$

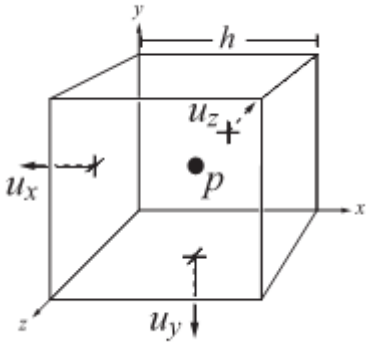
Rovnice 5.2: Implicitní vyjádření Lorentzovy rovnice [16]

Těmito úpravami dostaneme množství rovnic, které lze bez úprav algebraicky vyřešit.
Pro určení magnetického a elektrického pole se využívají Maxwellovy rovnice. Jedná se o systém parciálních diferenciálních rovnic, a proto se samotné řešení zprostředkovávalo nejčastěji metodou konečných diferencí nebo metodou konečných prvků [17].
PIC byla úspěšně použita například při studii tzv. hydromagnetik - elektricky vodivých tekutin. V dnešní době slouží k lepšímu pochopení procesů v tokamacích[4].

[4] zařízení uskutečňující jadernou fúzi.

5.2 Marker and cell method (MAC) - 1965

Skupina T3 se po PIC metodě stačitelných tekutin začíná orientovat na výzkum těch nestlačitelných, především kapalin.
Metoda se liší od předešlých hlavně principem rozdělení prostoru a umístění proměnných.
Diskretizace oblasti spočívá v jejím rozdělení na kubickou mřížku, kde každá buňka má definovaný tlak ve svém středu. Na rozdíl od předchozích metod jsou vektory rychlosti umístěny v těžišti menší z odpovídajících stran, např. u_x ve stěně kolmé na osu x.

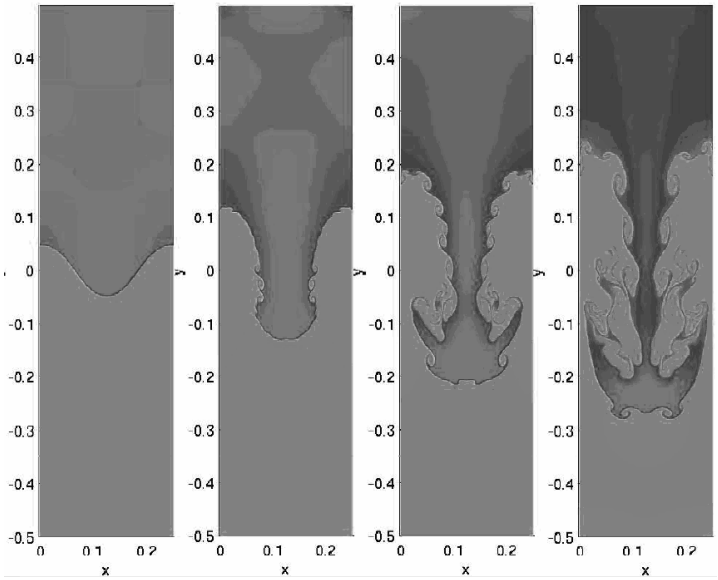


Obr. 5-4: Diskretizace MAC metody [18]

Na první pohled se může zdát obměna oproti PIC zanedbatelná, avšak jednoduchý příklad prokáže nápaditost diskretizace. Představme si jednoosé proudění orientované ve směru *x*. Porovnáme rychlosti vstupu a výstupu tekutiny z buňky. Vyjde-li vstupní rychlost větší než výstupní jediné co musíme udělat je zvýšit tlak v buňce, což způsobí pumpový efekt a vyrovná rychlosti. [18]
Zpočátku metoda sloužila pro simulace jednosložkových experimentů.

Obr. 5-5: Vizualizace padající hráze (MAC) [15]

Zanedlouho vědci zjistili, že není žádný problém simulovat vzájemnou interakci dvou tekutin a předpověděli chování tzv. Rayleigh – Taylorovi nestability. Mějme dvě různé kapaliny odlišných hustot – např. voda a olej. Těžší kapalinu umístíme na lehčí a vložíme do tíhového pole Země, načež se těžší kapalina se začne pohybovat směrem ke dnu nádoby. Vzniká nestabilita proudění označovaná jako Rayleigh – Taylorovi prsty, která způsobuje relativní pohyb těžší kapaliny vzhůru. [19]

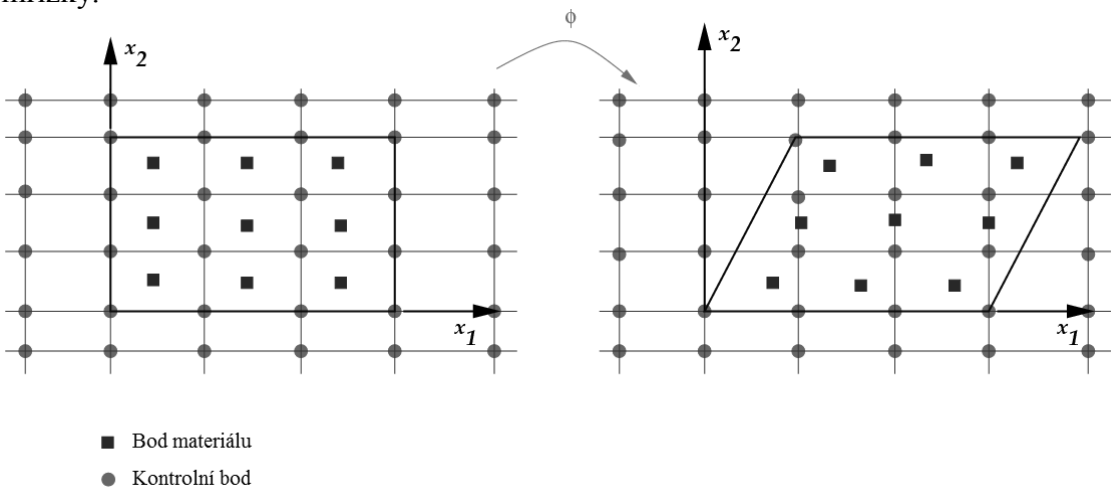


Obr. 5-6: Rayleigh – Taylorovi prsty (MAC) [19]

Na přelomu 60. a 70. let se stala nástrojem výpočtů povrchového napětí.
Díky své univerzálnosti zůstala metoda hlavním typem řešení nestlačitelných tekutin. Největší obměnou prošla na konci 90. let, kdy byla stacionární mřížka nahrazena dynamickou, která v čase odstraňuje nepotřebné buňky a vytváří nové.

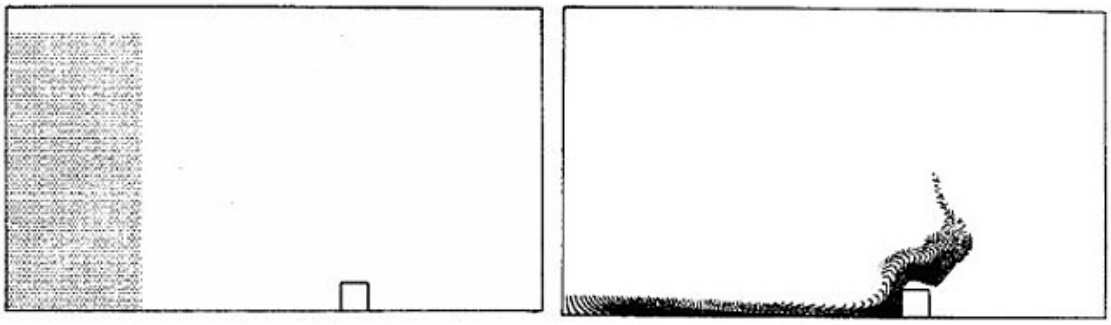
5.3 Fluid in cell (FLIC) – 1966

Metoda vznikla jako hardwarově méně náročný nástupce PIC metody.
Jedná se o způsob výpočtu diskretizující stlačitelné proudění pomocí Eulerovi mřížky, která na rozdíl od klasické Lagrangeové nefixovala body tělesa s kontrolní body mřížky.



Obr. 5-7: Vizualizace Eulerovi mřížky

Tento způsob částečně snížil výpočtové časy, ale nepodařil najít vhodný kompromis mezi nároky výpočetní techniky a přesností výsledků, že se metoda velmi často potýkala problémy se stabilitou. Následný vývoj počítačů odsunul metodu po několika letech z oblasti zájmu. [13]



Obr. 5-8: Vizualizace vlny překonávající překážku (FLIC) [15]

V polovině 60. let ztrácí Los Alamos CFD monopol a výzkumy se přesouvají i na Starý kontinent, konkrétně Imperial College v Londýně.
Věda byla toho času společností nedoceněná. Výzkumníci objevovali metody výpočtů sloužící několika dalším generacím, ovšem nejen laická veřejnost, ale ani vědecká komunita, nedokázala pochopit potenciál přislibující CFD světu. Zčásti to bylo způsobeno nedostatečnou aplikací na konkrétní problémy a zčásti faktem, že několikatýdenní výpočty měly za výstup pouze nepřehledný černobílý obraz. Právě grafická vizualizace šla ruku v ruce s popularizací metody, neboť bylo možné výsledky srozumitelně prezentovat lidem. [14]

6. Imperial College

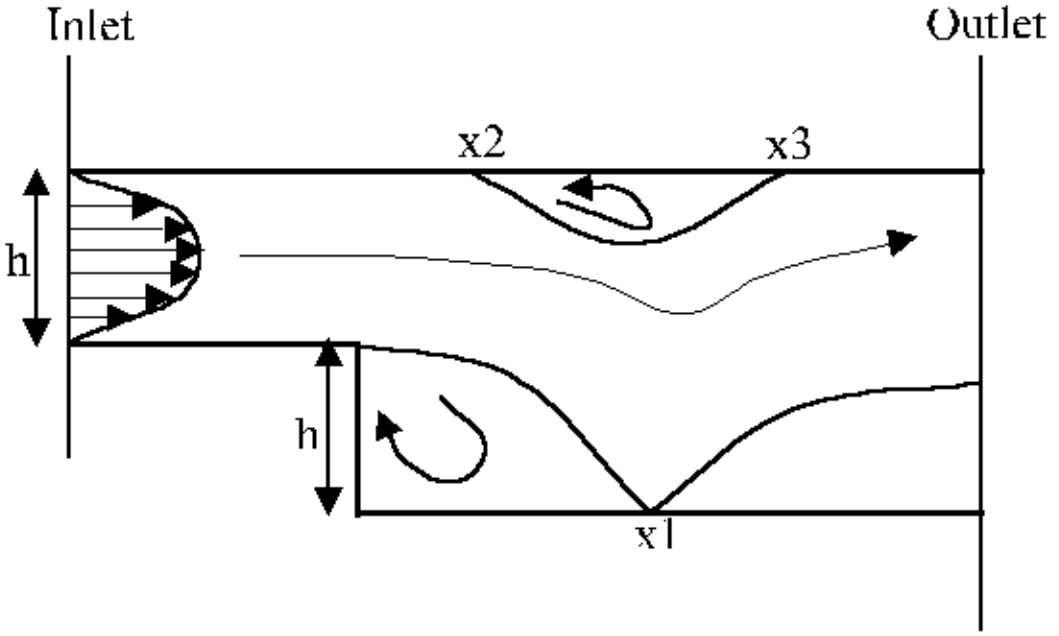
Stejně jako v Novém Mexiku i v Londýně se skupina formovala kolem jednoho vůdčího člověka. Touto osobností byl Brian Spalding.
Vědecké týmy z obou laboratoří se překvapivě nedoplňují ve svém výzkumu, ale pracují nezávisle na sobě. Imperial College požívala k výpočtům zařízení IBM 7094, které bylo na univerzitě dostupné od roku 1962.

Obr. 6-1: Pčítačová místnost IMB7094

Před konkrétními výpočty a metodami v Londýně zprvu vylepšovali teoretické základy vědy.
Splanding debutoval svou teorií obecného přenosu hmoty a tepla, kde zkombinoval koncepty, z do té doby oddělených oblastí hydrodynamiky, proudění tepla a přenosu hmoty.
Jeho studenti Escudier a Nicoll se zasloužili o určení několika důležitých vědeckých konstant, jako byla například Poissonova konstanta κ. [20]

6.1 Unified theory - 1964

Splanding nesouhlasil s tehdejším chápáním turbulentního proudění. V závislosti na Raynoldsově čísle se rozlišovalo laminární, přechodné a turbulentní. Naplněn optimismem z předchozího úspěchu sjednocení konceptů přenosu tepla a hmoty, se snažil podobný způsob uplatnit i zde pod názvem Jednotná teorie.
Poměrně elegantní úpravou dokázal propojit tři vrstvy v jednu kontinuální funkci.
Metoda spočívala v rozdělení látky ne na mřížku, ale na konkrétní profily, vrstvy proudění (2D), které popsal po částech polynomy reprezentující oblast a následně integroval pro určení potřebných koeficientů profilu.
Vědecké mozky té doby zaměstnávala snaha o vytvoření ideálního tvaru křídla, pro tehdejší rychle se rozvíjející letecký průmysl. Splandindg se svým odlišným pohledem na věc, místo hledání tohoto jednoho dokonalého tělesa, přišel s řešením popisující geometrii profilu závislosti na počátečních a okrajových podmínkách konkrétního problému. Toto řešení následně zakomponoval i do své teorie.
Několik let po uveřejnění teorie volá jeden ze studentů Splandingovi s žádostí o pomoc při řešení příkladu zpětného pohybu tekutiny pomocí jeho teorie. Po pár dnech výpočtů jsou vědci nuceni přiznat, že Jednotná teorie nepopisuje oddělená proudění, jako jsou například zpětné proudy v turbulenci.

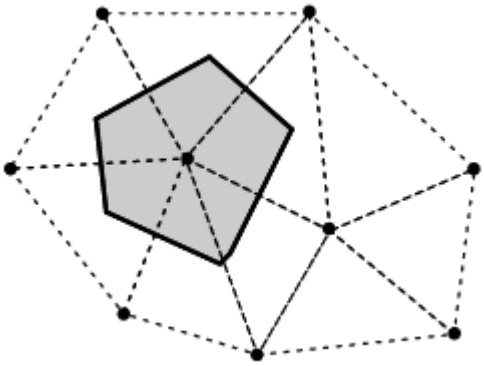


Obr. 6-2: Schéma zpětného proudění

Následovalo několik neúspěšných pokusů zakomponování zpětného proudění do teorie, po kterých se Splanding musel rozloučit s mnohaletým výzkumem. [20]

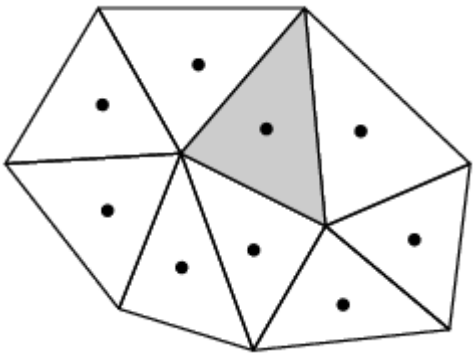
6.2 Metoda konečných objemů (MKO) -1968

Brian se snažil vnímat MKD spíše jako fyzikální než matematický pohled na problém. Brzo pochopil, že hlavním parametrem pro výpočet nejsou proměnné popisující jednotlivý uzel, ale jejich přesuny respektive změny. Přirovnal mřížku k soustavě nádrží – kontrolních bodů – spojených navzájem trubicemi. Zdánlivě nepatrný detail, skrývá hned několik výhod. Nejdůležitějším faktem je, že nevypočítává přenos látky z vektoru rychlosti, ale z toho kolik jí prochází trubicemi, což vědcům rozvázalo ruce například ve volbě Raynoldsova čísla. Nezanedbatelnou výhodou je také přehled v mřížce, kdy můžeme pohyb tekutiny určit ze zaplnění jednotlivých buněk. [20]



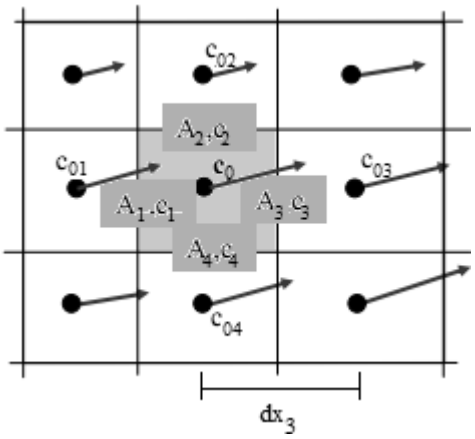
Obr. 6-3: Buněčně středěná mřížka [4]

Zanedlouho vypozoroval, že pro lepší vizualizaci a pochopení problému je vhodné umístit kontrolní bod do vrcholů obrazce kontrolního objemu.



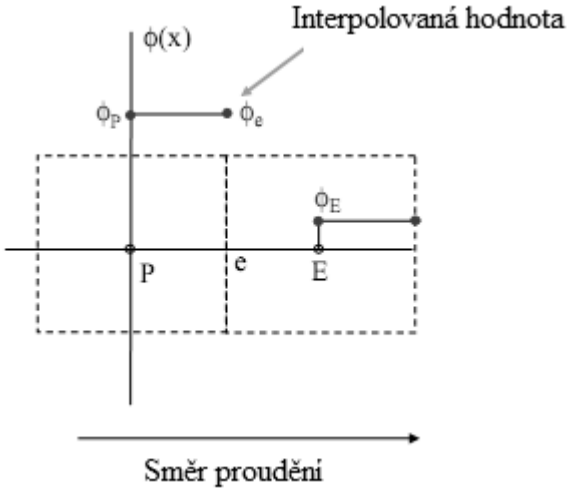
Obr. 6-4: Vrcholově středěná mřížka [4]

Přenos informací probíhá přes stěny a vypočítá se jako suma integrálů přes jednotlivé zdi.



Obr. 6-5: Vizualizace diskretizace [4]

Znázornění rovnice ve výpočtové mřížce. Vztah obsahuje toky pozorované veličiny stěnou buňky o obsahu *A*. Jejich velikosti určíme interpolací z hodnoty středu. Splandidng používal takzvané *protivětrné* schéma, kdy hodnota ve zdi buňky je stejná jako hodnota středu spodní buňky ve směru proudění [4].



Obr. 6-6: Vizualizace interpolace hodnot [4]

Uvedeme si konkrétní příklad pro pozorovanou proměnou *c*. Za předpokladu nestlačitelné tekutiny, kontrolní buňky v čase nemění svůj objem, zapíšeme přenosovou rovnici ve tvaru:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(u_i c) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(D\frac{\partial c}{\partial x_i}\right) + S$$

časová změna veličiny — *přenos veličiny stěnou rychlostí u* — *difuze veličiny* — *zdrojový člen*

Rovnice 6.1: Obecná pohybová rovnice MKO [4]
D – difuzní keoficient, S – zdrojové činitele

Uvažujeme – li zvenčí časově neovlněnou veličinu, pak dosazením do rovnice dostaneme výraz:

$$\sum_{i=1}^{4} A_i u_i c_i = \sum_{i=1}^{4} \frac{DA_i(c_{0i} - c_0)}{\partial x_i} + S_p$$

Rovnice 6.2: Zjednodušená pohybová rovnice MKO

Tuto rovnici můžeme vyjádřit jako závislost velikosti výchozí středové veličiny c_0 na velikostech okolních buňek c_{0i} , čímž dostáváme požadované hodnoty výpočtu. [4]

Optimalizace

Pro lepší stabilitu výpočtu proměnné *c* výsledek optimalizujeme:

$$c_{použitá} = c_{předchozí} + U(c_{vypočtená} - c_{předchozí})$$

Rovnice 6.3: Optimalizační rovnice

Koeficient *U* nazýváme optimalizační faktor, jehož velikost nejčastěji volíme U<1, což sice sníží rychlost konvergence, ale na druhou stranu zvýší stabilitu a přesnost řešení.

Za poslední dekády bylo vyvinuto několik způsobů interpolací hodnot stěn buňky, rozmanité druhy diskretizačních sítí nebo složité algoritmy výpočtu. Metoda konečných objemů se díky své stabilitě a efektivitě stává hlavním pomocníkem při řešení a dnes na jejím principu pracuje zhruba 80% všech CFD softwarů. [4]

6.3 Spektrální metoda – 1969

Jedná se o efektivní způsob řešení PDE, která pomocí Fourierovy transformace převede rovnice do tvaru Fourierovy řady, čímž ji přibližně aproximuje a zároveň sníží počet potřebných operací. Tím se nám zredukuje počet neznámých a řešíme obyčejné diferenciální rovnice.
Na rozdíl od MKP popisuje celý problém zároveň, a proto dostáváme řešení, bez velkých rozdílů sousedících částí tzv. hladké řešení. V 80. letech matematici zkombinovali oba způsoby a vytvořili *spektrální elementární metodu.* [21]

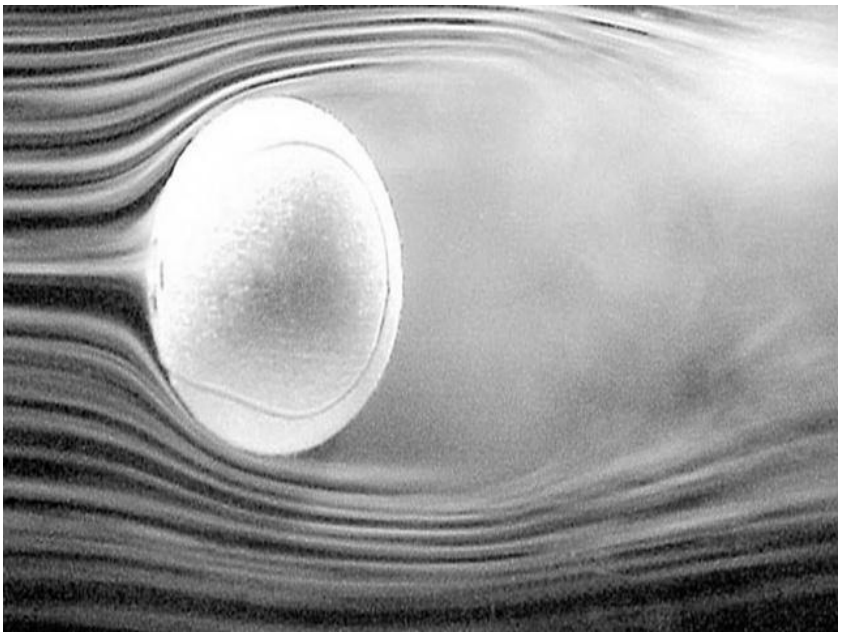
Popularizace CFD

Rok 1969 bývá často označován jako rok zrození CFD. Tento titul nese především proto, že se v tomto období začala počítačová dynamika tekutin poprvé používat jako inženýrský nástroj pro řešení konkrétních výrobků. Zasloužil se o to, mimo jiné, průkopník komerčních programů CHAM (Concentration Heat and Momentum), z dílny Briana Spaldinga, obsahující podrobně propracovanou dokumentaci s manuály.

Právě lepší komunikace s okolním světem byla důvodem „zrodu“ technologie v Londýně, a ne v Los Alamos, kde byli v oblasti výzkumu několik let napřed.
Nejen vědci, ale už i inženýři mají ve svých rukou efektivní výpočtový algoritmus, což jim spolu se stále rychleji se vyvíjející počítačovou technikou zaručuje zajímavé vyhlídky pro budoucí problémy. K úplné spokojenosti jim však ještě chybí univerzální turbulentní model. [20]

7. Modelování turbulencí

Při proudění vazké tekutiny dochází při překročení kritického Reynoldsova čísla ke kolísání jeho hydrodynamických a termodynamických charakteristik, což má za následek vznik nepravidelného obtížně předvídatelného proudění.
Fakt, že se v praxi s čistě laminárním prouděním nikdy nesetkáme, nás nutí k co nejpřesnějšímu popisu proudění turbulentního. Do úvahy jej bereme především při obtékání povrchů nebo míšení proudů. [4]

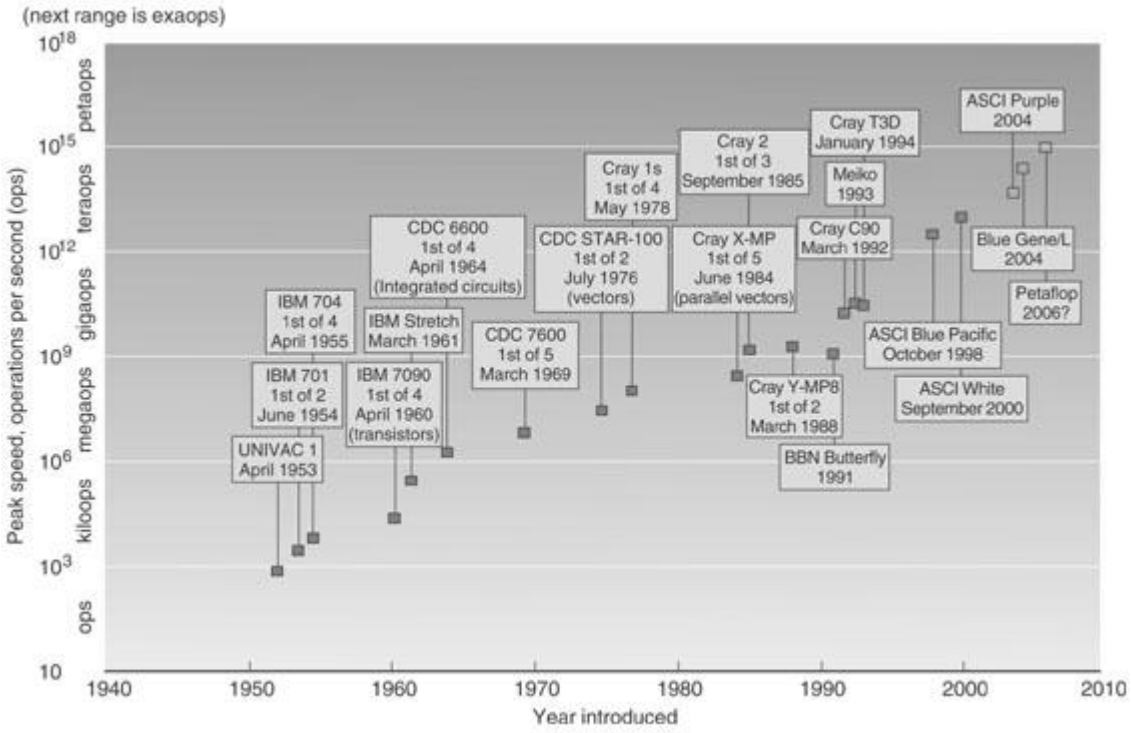


Obr. 7-1: Vizualizace proudnic obtékajících míč

Z numerického pohledu se turbulence projeví ve značném zjemnění výpočtové mřížky a zároveň odpovídající redukci časových kroků. To vytváří nepřekonatelnou bariéru počtu operací potřebných k výpočtu řešení. Tento počet je závislý právě na Reynoldsově čísle.

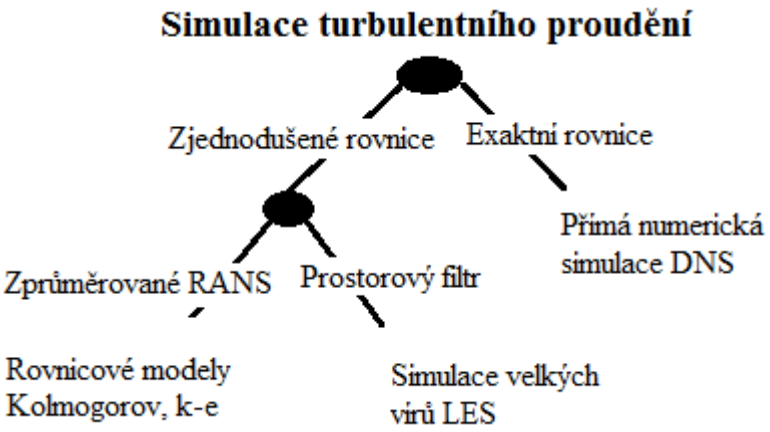
$$Re^{\frac{9}{4}} \dots počet\ bodů\ mřížky$$
$$Re^{\frac{3}{4}} \dots počet\ časových\ kroků$$
$$Re^{\frac{9}{4}} Re^{\frac{3}{4}} = Re^{3} \dots celkový\ počet\ operací$$

Uvědomíme-li si, že Reynoldsovo číslo dopravního letadla se pohybuje někde kolem 10^8, pak by počítač MANIAC musel pracovat 3.8 bilionu let. [22]
Následující graf zachycuje vývoj rychlosti superpočítačů, měřený v počtech operací za vteřinu. Svislá osa je uvedena v logaritmických souřadnicích.



Obr. 7-2: Vývoj operační rychlosti počítačů

Právě z tohoto důvodu bylo turbulentní proudění nahrazováno modely, jejichž úlohou bylo co nejvíce snížit výpočetní náklady za cenu co nejnižší nepřesnosti výsledku.
Pro lepší orientaci a pochopení problému uvádím grafické rozdělení postupů simulace turbulentního proudění. Jednotlivé metody budu představovat chronologicky.



Obr. 7-3: Rozdělení výpočtových metod turbulencí

7.1 Kolmogorův model - 1941

K jednomu z největších pokroků 20. došlo během 2. světové války. Málokdo by čekal, že roku 1941 ruský vědec Andrej Kolmogorov, jehož univerzitní výzkum musel být kvůli německému postupu přesunut z Moskvy na venkov, zveřejní teorii přenosu energie v turbulentním proudění.
Kolmogorov zkoumal závislost mezi velikostí víru a přenosem jeho energie do okolí. Z velikosti turbulence určil tzv. vlnové číslo *k*, pomocí kterého nadále počítal, jak velký vliv bude mít disipující energie na chování proudění.

Na základě výpočtů vytvořil dvourovnicový model, což v praxi znamená dvě doplňující pohybové rovnice reprezentující turbulentní vlastnosti proudění, který je téměř shodný s dnešním. [22]

$$\frac{Db}{Dt} = -bw + \frac{A}{3}\frac{b}{w}\, e + A'' \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{b}{w}\frac{\partial b}{\partial x_j}\right)$$
$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{7}{11}w^2 + A' \sum_i \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{b}{w}\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)$$

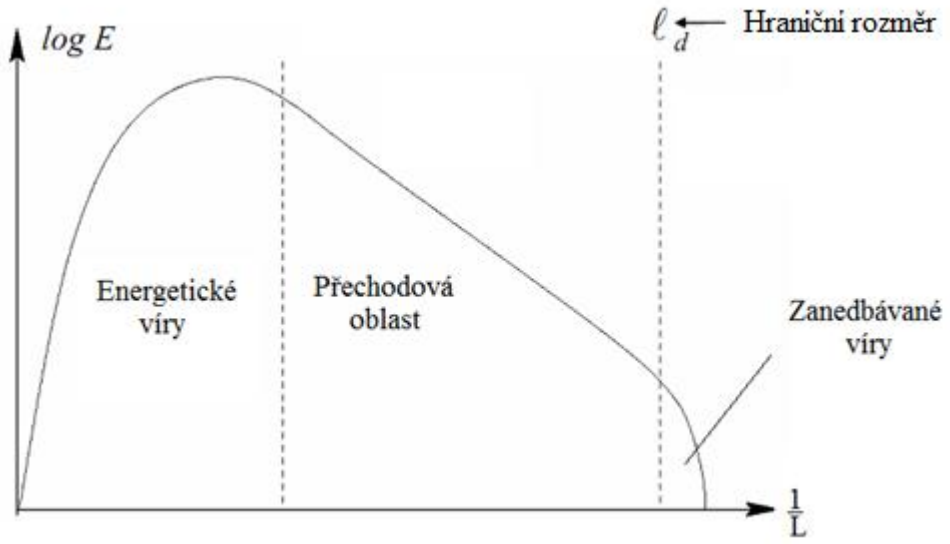
Rovnice 7.1: Koglomorova forma [22]

$$\frac{DK}{Dt} = -Kw - A\frac{K}{w}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + A'' \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{K}{w}\frac{\partial K}{\partial x_j}\right)$$
$$\frac{Dw}{Dt} = -Cw^2 - A\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + A' \sum_i \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{b}{w}\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)$$

Rovnice 7.2: Moderní forma [22]

7.2 Large eddy simulation (LES) – 1963

Meteorolog Joseph Smagorinsky přišel s nápadem, který spočíval ve vytvoření filtru – vztahu rozdělující turbulence na dvě skupiny. Významnější turbulence pak řešil klasicky dosazením do výpočtových rovnic a menší řešil modelem. Podle potřeb volíme buď jemný filtr pro přesná výpočtově náročná řešení, nebo naopak hrubý pro rychlé výpočty.



Obr. 7-4: Grafická závislost energie na velikosti turbulence [4]

Následně řešíme vliv menších buněk na prostředí tzv. sub-grid scales pomocí patřičného modelu. Modelů existuje hned několik a podle dostupných informací je empiricky rozlišujeme na funkční a strukturní. [4]
Funkční modely shrnují efekty turbulence do veličiny nazvané turbulentní viskozita, která následně ovlivňuje energii turbulence disipující do prostředí. [23]

První takovýto model vytvořil Smagorinsky a ve skutečnosti je reprezentován pouze jednou rovnicí ve tvaru:

$$v_t = (C_s \Delta_g)^2 S$$

Rovnice 7.3: Smagorinsky – Lilli model [23]

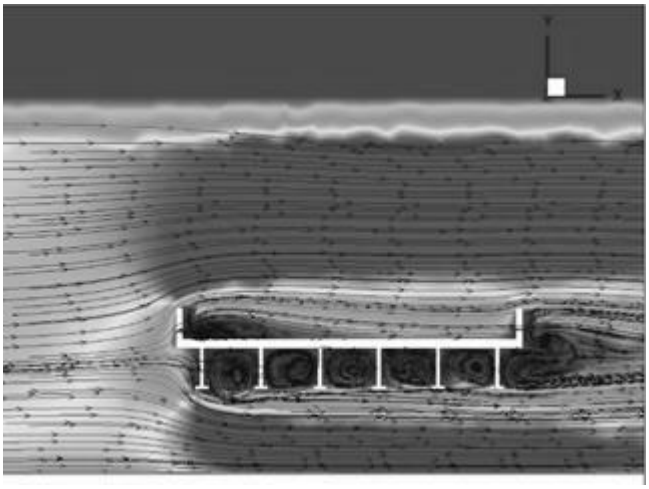
v_t- turbulentní viskozita, C_s- konstanta prostředí, Δ_g- velikost mřížky

7.3 K – ε model - 1967

V Los Alamos vytvořili, mimo jiné, dnes stále populární model turbulentního proudění k – ε model.

Jedná se o dvourovnicový model, založený na RANS rovnicích, kde *k* reprezentuje kinetickou energii turbulence a ε disipující energii. Tyto rovnice nejen číselně upravují hodnoty, ale zároveň obsahují okrajové podmínky určující vzdálenost výpočtových bodů, čímž podstatně mění celou diskretizační mřížku.

Tento způsob je relativně stabilní, spolehlivě konverguje a lze poměrně lehce implementovat do výpočtu. Vyhovuje především pro výpočty plně turbulentního prostředí. [24]

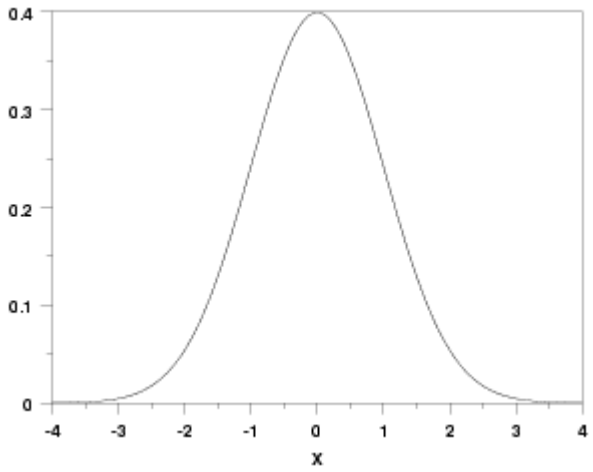


Obr. 7-5: Vizualizace obtékání použitím K- ε modelu vytvořená v programu Fluent

V polovině 60. let nastává stagnace vývoje počítačové techniky. Celých 30 následujících let se bude trvat počítačům, než překročí hranici 10^9 operací za sekundu. Z tříletého období, které stačilo ke zrychlení počítačů na 10-ti násobek, se stává dekáda. To způsobuje mírný útlum i v CFD. [22]

7.4 Probability density function (PDF) -1969

Na konci 60 let vzniká doplňující metoda spočívající v předpovědi rychlosti látky z jejího předchozího pohybu. Sleduje pohyb látky a z něj předpovídá následné chování se spolehlivostí vycházející z pravděpodobnostní funkce.



Obr. 7-6: Pravděpodobnostní funkce normálového rozdělení

Pravděpodobnostní metoda se nejčastěji kombinovala s LES, což vedlo ke vzniku Langevinových rovnic dnes používaných k popisu tzv. Braunova pohybu. [25]

V období 70- 90 let se vědci vytvářeli modely na jedno použití. Vzhledem ke snížení rychlosti vývoje výpočetní techniky, přestávali matematici věřit v praktické uplatnění obecných modelů, neboť jejich použitím dosahovali značně nepřesných výsledků, nepoužitelných ve výrobě. Proto vznikaly konkrétní modelace např. model přechodové vrstvy profilu křídla s koeficienty upřesněnými pro dané podmínky.

Převážně v 80. letech se díky komerčně se rozvíjející CFD softwarové síti do oblasti zájmů dostávají i modely pro nadzvukové rychlosti dopravních letadel, jejichž výstupy jsou stále pouze orientační. [22]

7.5 Přímá numerická simulace (DNS)

DNS je metoda řešící turbulence dosazením do Navier-Stokesových rovnic přímo bez jakéhokoliv modelu. Nedochází k redukci výpočtové mřížky, tudíž výpočty probíhají přes celou škálu velikostí a časů. Jak jsme si již uvedli výpočtová náročnost je rovna Re^3, a proto se používá především pro nižší rychlosti.

Koncem 90. let nastává prudké zvýšení výkonu výpočtové techniky a je překonána psychologická hranice 10^{12} operací za sekundu, což posouvá do té doby nepraktickou DNS do oblasti pro inženýry použitelných metod. Nastupující trend je také příslibem dobré perspektivy budoucna, a přestože je dnes stále nejpopulárnější LES, vědci považují přímou numerickou simulaci za hlavní výpočtovou metodu následujících let. [22]

8. Shrnutí

A jak je na tom CFD v roce 2011? Na první pohled se může zdát, že technologie již dosáhla dokonalosti a lze na základě jejích výstupů postavit v nadsázce celé letadlo. Ve skutečnosti má dnes věda relativně malý záběr. Lze jí poměrně přesně vypočítat například zatížení rychlovlaků, na druhou stranu její nepřesnost zabraňuje použití u kontrolních systémů, leteckých trenažerů a jiných aplikací časově náročných na simulace ve větrných tunelech a právě to jsou výzvy do příštích let. [26]

9. Závěr

V práci jsem se pokusil chronologicky shrnout vývoj moderní inženýrské technologie. Převážně v kapitole turbulentní modelování jsem musel dostupné informace hodně zestručnit, neboť se jedná o rozsáhlé téma postačující na samostatnou práci.
Dílo je psané v porovnání s ostatními publikacemi relativně laickou formou z důvodu srozumitelně ho interpretovat i nezasvěceným čtenářům.

10. Seznam použité literatury

[1] Potential flow. *From Wikipedia, the free encyclopedia.* [Online] 4. 2 2011. [Citace: 19. 2 2011.] http://en.wikipedia.org/wiki/Potential_flow.

[2] **Molnár, Vojtech.** Počítačová dynamika tekutín. *CFD Online Slovakia.* [Online] 9. 14 2009. [Citace: 16. 1 2011.] http://www.cfd.sk/cfd-book/.

[3] Navier–Stokes equations. *Wikipedia, the free encyclopedia.* [Online] 3. 1 2011. [Citace: 19. 1 2011.] http://en.wikipedia.org/wiki/Navier%E2%80%93Stokes_equations.

[4] **Bakker, André.** Computational Fluid Dynamics. *Bakker.* [Online] 3. 2 2008. [Citace: 6. 2 2011.] http://www.bakker.org/dartmouth06/engs150/.

[5] Newton's laws of motion. *Wikipedia, the free encyclopedia.* [Online] 3. 2 2011. [Citace: 8. 2 2011.] http://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_laws_of_motion.

[6] Bernoulli's principle. *Wikipedia, the free encyclopedia.* [Online] 4. 2 2011. [Citace: 8. 2 2011.] http://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli%27s_principle.

[7] Finite difference method. *Wikipedia, the free encyclopedia.* [Online] 31. 12 2011. [Citace: 8. 2 2011.] http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Finite_difference_method&action=history.

[8] **Šišma, Pavel.** Miloš Zlámal. *MUNI.* [Online] 7. 2 2008. [Citace: 8. 2 2011.] http://inserv.math.muni.cz/biografie/milos_zlamal.html.

[9] Finite element method. *Wikipedia, the free encyclopedia.* [Online] 8. 3 2011. [Citace: 10. 3 2011.] http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Finite_element_method&action=history.

[10] hp-FEM. *Wikipedia, the free encyclopedia.* [Online] 15. 12 2009. [Citace: 10. 3 2011.] http://en.wikipedia.org/wiki/Hp-FEM.

[11] Meshfree methods. *Wikipedia, the free encyclopedia.* [Online] 9. 3 2011. [Citace: 10. 3 2011.] http://en.wikipedia.org/wiki/Meshfree_methods.

[12] **Sankar, Dr. Lakshmi N.** AE 2020 Spring 2008. *soliton.* [Online] 14. 3 2008. [Citace: 25. 3 2011.] http://www.ae.gatech.edu/~lsankar/AE2020/Panel.Methods.ppt.

[13] **Johnson, Norman L.** The Legacy of Group T-3. *Los Alamos National Laboratory.* [Online] 26. 6 2006. [Citace: 25. 3 2011.] http://www.lanl.gov/orgs/t/t3/history.shtml.

[14] **Tryggvasson, Gretar.** Development of computational fluid dynamics at Los Alamos National Laboratory. [Online] 28. 4 2010. [Citace: 25. 3 2011.] http://www.youtube.com/watch?v=BOpA4Z6xCxY.

[15] The history and notes of Computational Fluid Dynamics (CFD) at Los Alamos National Laboratory. *Computer Graphic Timeline.* [Online] 12. 2 2009. [Citace: 9. 4 2011.] http://www.wizspace.co/cgi/1957%20Computational%20Fluid%20Dynamics%20%28CFD%29.html.

[16] Particle-in-cell. *Wikipedia, the free encyclopedia.* [Online] 3. 4 2011. [Citace: 4. 4 2011.] http://en.wikipedia.org/wiki/Particle-in-cell.

[17] Particle-in-cell. *Wikipedia, the free encyclopedia.* [Online] 3. 4 2011. [Citace: 4. 4 2011.] http://en.wikipedia.org/wiki/Particle-in-cell.

[18] **Cline, David.** Fluid Flow for the Rest of Us. *Computer Graphics.* [Online] 3. 12 2005. [Citace: 4. 24 2011.] http://www.proxyarch.com/util/techpapers/papers/Fluid%20flow%20for%20the%20rest%20of%20us.pdf.

[19] Rayleigh–Taylor instability. *Wikipedia, the free encyclopedia.* [Online] 7. 4 2011. [Citace: 25. 4 2011.] http://en.wikipedia.org/wiki/Rayleigh%E2%80%93Taylor_instability.

[20] **Runchal, Dr. Akshai K.** BRIAN SPALDING: CFD & REALITY. *CHAM.* [Online] 2008. 11 16. [Citace: 28. 4 2011.] www.cham.co.uk/docs/cht-08-012_runchal_final_jun_08.pdf.

[21] Spectral method. *Wikipedia, the free encyclopedia.* [Online] 19. 4 2011. [Citace: 25. 4 2011.] http://en.wikipedia.org/wiki/Spectral_method.

[22] **Gatski, Thomas B.** Modeling and Probing Turbulent Flows with CFD : Thomas B. Gatski, PhD . *youtube.* [Online] 19. 4 2009. [Citace: 26. 4 2011.] http://www.youtube.com/watch?v=5Fc4lA_Tds4&feature=related.

[23] Large eddy simulation. *Wikipedia, the free encyclopedia.* [Online] 4. 4 2011. [Citace: 25. 4 2011.] http://en.wikipedia.org/wiki/Large_eddy_simulation.

[24] K-epsilon models. *CFD Online.* [Online] 4. 11 2009. [Citace: 4. 29 2011.] http://www.cfd-online.com/Wiki/K-epsilon_models.

[25] Probability density function. *Wikipedia, the free encyclopedia.* [Online] 17. 3 2011. [Citace: 29. 4 2011.] http://en.wikipedia.org/wiki/Probability_density_function.

[26] **ANDERSON.J.D.** *Computational Fluid Dynamics - The Basics with Applications.* 1995. ISBN 0-07-001685-2.

11. Použité vizualizace

Obr. 2-1: Diskretizační mřížky (2) 5
Obr. 3-1: Vizualizace Archimedova zákona 6
Obr. 3-2: Vizualizace 2. Newtonova pohybového zákona 6
Obr. 3-3: Proudění v trubici 7
Obr. 4-1: Vizualizace explicitní metody (7) 9
Obr. 4-2: Implicitní metoda (7) 9
Obr. 4-3: Crank – Nicolsonova metoda (7) 10
Obr. 4-4: Kawagutiho vizualizace vzduchu obtékajícího válec (4) 10
Obr. 4-5: Diskretizace křídla panelovou metodou (12) 12
Obr. 5-1: Poloha laboratoře Los Alamos 13
Obr. 5-2: Výpočetní místnost MANIAC 13
Obr. 5-3: Vizualizace PIC výpočtu (15) 14
Obr. 5-4: Diskretizace MAC metody (17) 15
Obr. 5-5: Vizualizace padající hráze (MAC) (15) 15
Obr. 5-6: Rayleigh – Taylorovi prsty (MAC) (18) 16
Obr. 5-7: Vizualizace Eulerovi mřížky 16
Obr. 5-8: Vizualizace vlny překonávající překážku (FLIC) (15) 17
Obr. 6-1: Pčítačová místnost IMB7094 17
Obr. 6-2: Schéma zpětného proudění 18
Obr. 6-3: Buněčně středěná mřížka (4) 19
Obr. 6-4: Vrcholově středěná mřížka (4) 19
Obr. 6-5: Vizualizace diskretizace (4) 20
Obr. 6-6: Vizualizace interpolace hodnot (4) 20
Obr. 7-1: Vizualizace proudnic obtékajících míč 22
Obr. 7-2: Vývoj operační rychlosti počítačů 23
Obr. 7-3: Rozdělení výpočtových metod turbulencí 23
Obr. 7-4: Grafická závislost energie na velikosti turbulence 24
Obr. 7-5: Vizualizace obtékání použitím K- ε modelu vytvořená v programu Fluent 25
Obr. 7-6: Pravděpodobnostní funkce normálového rozdělení 26

12. Použité rovnice

Rovnice 2.1: Potenciální rovnice (1) 4
Rovnice 2.2: Eulerova rovnice (2) 4
Rovnice 2.3: Navier-Stokesova rovnice (3) 5
Rovnice 3.1: Archimédův zákon (5) 6
Rovnice 3.2: Zákon setrvačnosti (5) 6
Rovnice 3.3: Bernoulliho rovnice (6) 7
Rovnice 3.4: Výpočet Reynoldsova čísla (4) 7
Rovnice 4.1: Diferenční kvocient (7) 8
Rovnice 4.2: Vyjádření derivace Taylorovým polynomem 8
Rovnice 4.3: Funkční hodnota derivace 8
Rovnice 4.4: Explicitní metoda 9
Rovnice 4.5: Implicitní metoda 9
Rovnice 5.1: Lorentzova rovnice 14
Rovnice 5.2: Implicitní vyjádření Lorentzovy rovnice (16) 14
Rovnice 6.1: Obecná pohybová rovnice MKO (4) 20
Rovnice 6.2: Zjednodušená pohybová rovnice MKO 21
Rovnice 6.3: Optimalizační rovnice 21
Rovnice 7.1: Koglomorova forma (22) 24
Rovnice 7.2: Moderní forma (22) 24
Rovnice 7.3: Smagorinsky – Lilli model (23) 25