



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

# POROVNÁNÍ PŘÍSTUPŮ K POSOUZENÍ MEZNÍHO STAVU VZPĚRNÉ STABILITY RŮZNĚ DLOUHÝCH A ULOŽENÝCH PRUTŮ

COMPARISON OF APPROACHES TO THE ASSESSMENT OF BUCKLING OF VARIOUSLY LONG AND  
SUPPORTED COLUMNS

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

### AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Klára Ostratická

### VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. František Šebek,  
Ph.D.

BRNO 2024

# Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Studentka:	<b>Klára Ostratická</b>
Studijní program:	Základy strojního inženýrství
Studijní obor:	Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce:	<b>doc. Ing. František Šebek, Ph.D.</b>
Akademický rok:	2023/24

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## **Porovnání přístupů k posouzení mezního stavu vzpěrné stability různě dlouhých a uložených prutů**

### **Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

Vzpěr se týká mnoha částí konstrukcí ve strojírenství. Jejich hodnocení je důležité s ohledem na předcházení katastrofickým scénářům, ke kterým může po zhroucení konstrukce dojít. Navíc se v praxi lze často setkat se situacemi, které není možné jednoznačně klasifikovat dle základních případů vzpěru.

### **Cíle bakalářské práce:**

1. Rešerše v oblasti pružného i nepružného vzpěru.
2. Analytické výpočty vzpěru pro vybrané případy a srovnání s numerickým řešením.
3. Výběr a posouzení nestandardních případů vzpěru.

**Seznam doporučené literatury:**

BOLEK, R. Porovnání analytického a numerického řešení vzpěrné stability profilu z hliníkové slitiny. Brno, 2022. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce Tomáš Návrat.

FISCHER, J. Posouzení rizika ztráty vzpěrné stability prutu s nepřesnostmi geometrie a zatížení. Brno, 2018. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky.

GERE, J. M. a B. J. GOODNO. Mechanics of Materials. 8th Ed. Stamford: Cengage Learning, 2013. ISBN 978-1-111-57774-2.

HIBBELER, R. C. Mechanics of Materials. 10th Ed. Boston: Pearson, 2017. ISBN 978-0-134-31965-0.

JANÍČEK, P., ONDRÁČEK, E., VRBKA, J. a J. BURŠA. Mechanika těles: Pružnost a pevnost I. 3. přeprac. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2004. ISBN 80-214-2592-X.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2023/24

V Brně, dne

L. S.

---

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jiří Hlinka, Ph.D.  
děkan fakulty

## ABSTRAKT

Bakalářská práce se zabývá posouzením mezního stavu vzpěrné stability. Jsou zde popsány rozdíly pružného a nepružného vzpěru a vlivy na kritickou sílu. Podrobněji je popsán vliv materiálu, uložení a délky prutu. Při vzpěru se mění charakter deformace, stlačovaný prut se v určitém bodě začne ohýbat. Tento bod se nazývá bod bifurkace a hranicí je velikost kritické síly. Výpočet kritické síly vzpěrné stability je pro vybrané příklady proveden analyticky, pomocí Eulerovy a Johnsonovy metody. Výsledky jsou numericky ověřeny metodou konečných prvků v programu Ansys. Výsledky pro lineární vzpěr jsou shodné. Numericky jsou také počítány příklady nelineárního vzpěru. Je zjišťován rozdíl kritické síly pro kontaktní plochy bez tření a se třetím. Určení kritické síly může zabránit zborcení celé konstrukce, což předejde katastrofickým následkům.

## KLÍČOVÁ SLOVA

Kritická síla, metoda konečných prvků, nepružný vzpěr, pružný vzpěr, uložení prutu, vzpěrná stabilita

## ABSTRACT

The bachelor's thesis deals with assessment of the buckling stability. The differences between elastic and inelastic buckling and effects on the critical force are described. The effect of material, supports and length of the column is described in more detail. During buckling, the character of deformation changes, the compressed column starts to bend at a definite point. This point is called bifurcation point and the limit is amount of critical force. The calculation of critical buckling force is carried out analytically for selected examples using the Euler and Johnson methods. The results are numerically checked by the finite element method in Ansys. The results for linear buckling are identical. Examples of nonlinear buckling are also calculated numerically. The difference is found in critical force for contact surfaces without friction and with friction. Defining the critical force can prevent the collapse of the entire structure, thus avoiding catastrophic incidents.

## KEYWORDS

Critical load, finite element method, inelastic buckling, elastic buckling, column support, buckling

## BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

OSTRATICKÁ, Klára. *Porovnání přístupů k posouzení mezního stavu vzpěrné stability různě dlouhých a uložených prutů* [online]. Brno, 2024 [cit. 2024-05-03]. Dostupné z: <https://www.vut.cz/studenti/zav-prace/detail/153986>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce doc. Ing. František Šebek, Ph.D.

## PROHLÁŠENÍ AUTORA O PŮVODNOSTI PRÁCE

Prohlašuji, že bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně, pod odborným vedením doc. Ing. Františka Šebka, Ph.D. Současně prohlašuji, že všechny zdroje obrazových a textových informací, ze kterých jsem čerpala, jsou řádně citovány v seznamu použitých zdrojů.

## PODĚKOVÁNÍ

Na tomto místě bych chtěla poděkovat panu doc. Ing. Františkovi Šebkovi, Ph.D., za čas a ochotu, kterou mi poskytl během psaní mé bakalářské práce. Také bych chtěla poděkovat za podporu rodině a blízkým.

## OBSAH

<b>1</b>	<b>ÚVOD</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>MEZNÍ STAV VZPĚRNÉ STABILITY</b>	<b>11</b>
2.1	Základní formulace	11
2.2	Kritická síla	12
2.3	Vliv odchylek na kritickou sílu	15
2.3.1	Vliv reálného materiálu	16
2.3.2	Vliv uložení prutu	17
2.3.3	Vliv délky prutu	19
2.4	Oblast pružného vzpěru	20
2.4.1	Eulerovo řešení	20
2.4.2	Vzorec sečen	23
2.5	Oblast nepružného vzpěru	24
2.5.1	Tetmajerovo řešení	24
2.5.2	Johnsonovo řešení	25
2.5.3	Teorie tečného modulu a Shanleyova teorie	26
<b>3</b>	<b>VÝPOČET KRITICKÉ SÍLY PRO VYBRANÉ PŘÍPADY</b>	<b>27</b>
3.1	První příklad – rotační a rotačně posuvná vazba	27
3.1.1	Analytické řešení	27
3.1.2	Numerické řešení	28
3.2	Druhý příklad – vetknutí	31
3.2.1	Analytické řešení	31
3.2.2	Numerické řešení	32
<b>4</b>	<b>NESTANDARDNÍ PŘÍPADY VZPĚRU</b>	<b>34</b>
4.1	Třetí příklad – vetknutí a deska zatěžující prut	34
4.2	Čtvrtý příklad – Johnsonova metoda	41
<b>5</b>	<b>ZÁVĚR</b>	<b>44</b>
<b>6</b>	<b>SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ</b>	<b>45</b>

# 1 ÚVOD

Mezní stav vzpěrné stability je nutné ověřit u spousty konstrukcí nejen ve strojírenství. Jedná se o tlakové zatížení, při kterém může prut vyhnout, a tím se změní charakter deformace, tedy stlačovaný prut se začne ohýbat. Důležitým rozhraním pro tuto změnu deformace je bod rozdělení rovnováhy, který nazýváme bifurkace. Jedná se o místo, kdy je dosaženo kritického zatížení konstrukce, a to způsobí vznik nové vychýlené geometrie. Je dobré na vzpěr nezapomínat ani při navrhování. Můžeme sice vycházet z řady předpokladů, které jsou uvedeny v části druhé kapitoly zabývající se popisem kritické síly, ale v reálném světě tyto předpoklady nejsou vždy splněny. Ovšem včasné rozpoznání vzpěru může mnohdy předcházet nebezpečnému zhroucení celé konstrukce.

Konečnou velikost kritické síly může ovlivnit několik faktorů. V druhé kapitole práce je podrobněji popsán vliv reálného materiálu, uložení prutu a jeho délky. Konkrétně vliv délky prutu je hlavní parametr pro určení oblasti pružného a nepružného vzpěru. Každou z těchto oblastí zastupují metody, jak určit hodnotu kritické síly. Asi nejznámější metoda pro odvození kritické síly vzpěrné stability je Eulerovo řešení, nicméně tato metoda se týká pouze pružného vzpěru.

Právě pomocí Eulerovy metody jsou analyticky vypočteny vybrané příklady týkající se pružného vzpěru, které popisují výpočet kritické síly pro rozdílné uložení prutů. Jelikož je každé uložení ovlivněno charakteristickou rovnicí, má tento faktor na konečnou hodnotu kritické síly velký vliv. Pro příklad týkající se nepružného vzpěru je analytický výpočet proveden pomocí Johnsonovy metody.

Pro ověření správnosti analytického výpočtu pružného vzpěru je provedeno numerické řešení založené na Metodě Konečných Prvků (MKP) v programu Ansys. Tomuto tématu je věnována poslední část bakalářské práce, kde jsou srovnány výsledky obou způsobů výpočtů příkladu lineárního vzpěru. Ale také jsou zde posouzeny příklady týkající se nelineárního vzpěru, který se liší kontaktními plochami bez tření a se třením.

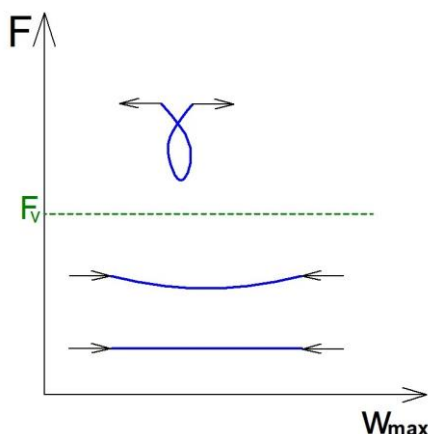
## 2 MEZNÍ STAV VZPĚRNÉ STABILITY

Následující kapitola stručně popisuje problematiku mezního stavu vzpěrné stability. Jeho základní formulaci a obecný výpočet kritické síly. Dále zde budou zmíněny druhy vlivů na vzpěr a vysvětlení pružného a nepružného vzpěru.

### 2.1 Základní formulace

„Mezní stav vzpěrné stability je takový stav soustavy, při jehož dosažení se mění charakter podstatné deformace“ [2]. Jde o stav, kdy se stlačování změní v ohyb.

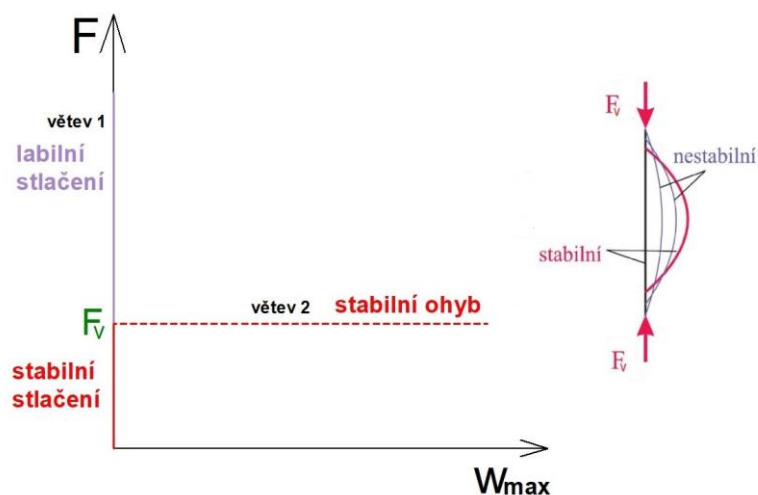
Budeme-li uvažovat štíhlou tyč, přičemž její poměr  $d/l$  je malý, kdy  $d$  značí průměr prutu a  $l$  jeho délku. Na tuto tyč budeme působit základním namáháním, tlakem, zjistíme, že příčné průřezy se pouze přibližují. Při zatěžování stále rostoucí silou však v určitém okamžiku můžeme pozorovat viditelné prohýbání tyče [1]. Po překročení určité kritické síly  $F_v$  dojde k rychlému nárustu průhybu až do maximální hodnoty, po dalším zatěžování na prutu vznikne smyčka a průhyb se začne zmenšovat [2]. Tuto závislost můžeme vidět na obr. 1.1, kde  $F$  značí sílu a  $w_{max}$  maximální průhyb.



Obr. 1.1 Závislost deformace na tlakovém zatížení

Smyčka se vytváří jen do určité doby, pak nastane lom nebo vznikne velká plastická deformace. Tato deformace je při zatěžování stále jednoznačná a staticky rovnovážná, ovšem změna nastává v charakteru deformace [1].

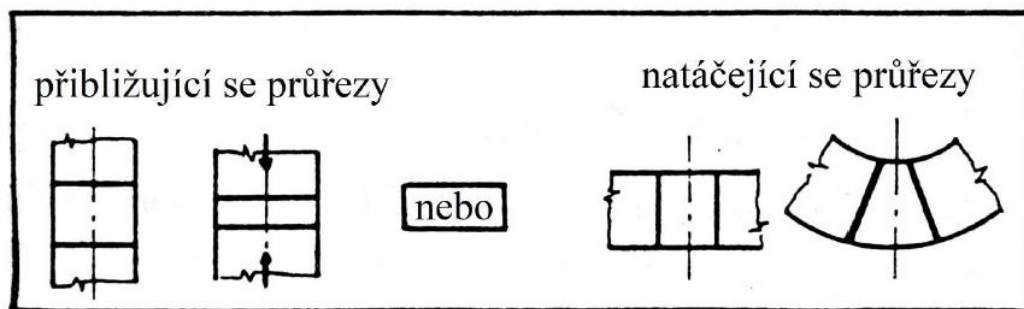
Mezní stav vzpěrné stability můžeme charakterizovat jako rozhraní dvou fází. V první fázi, před dosažením kritického zatížení, je podstatné stlačování střednice a průhyb nepodstatný. Zachovává se přímá geometrie a stabilní stlačování se mění na labilní. Zatímco v druhé fázi, při dosažení kritického zatížení, je tomu opačně, průhyb je podstatný a stlačování střednice nikoliv. Při této fázi vznikne nová vychýlená geometrie, jedná se o stabilní ohýbání. Tyto dvě fáze nazýváme rozdělení rovnováhy, a bod, kdy k tomu dojde, nazýváme bifurkace [3, 2]. Toto chování můžeme vidět na obr. 1.2.



Obr. 1.2 Závislost průhybu na zatížení u ideálního volného prutu

Toto chování není náhodné, v prohýbání způsobeném tlakovým zatížením namáhaného prutu je zákonitost, ale ta může způsobit rozpor. Dosud jsme pracovali s tvrzením, kdy nedochází k prohýbání prutu, ale reálná teorie ukazuje, že při tlakovém namáhání se prut prohýbá. Pro praktické řešení můžeme závěrem říct, že rozpor vycházející z tvrzení o přibližování příčných průřezů je nepoužitelný. Pro vytvoření fungující teorie musíme brát v úvahu prohýbání jako její základ, je tedy nutné uvolňovat prvek v prohnutém stavu [1].

Obecně o uvolňování prvku platí, že by se měl uvolňovat v deformovaném stavu, tedy příčné průřezy se přibližují a prohýbají. Pro naši úroveň rozlišení lze tento přístup k přiblížení příčných průřezů v prohnutém stavu považovat za nepodstatný. Základní teorie tlakového namáhání definuje předpoklady příčných průřezů jako přibližující se nebo se natáčející [2].



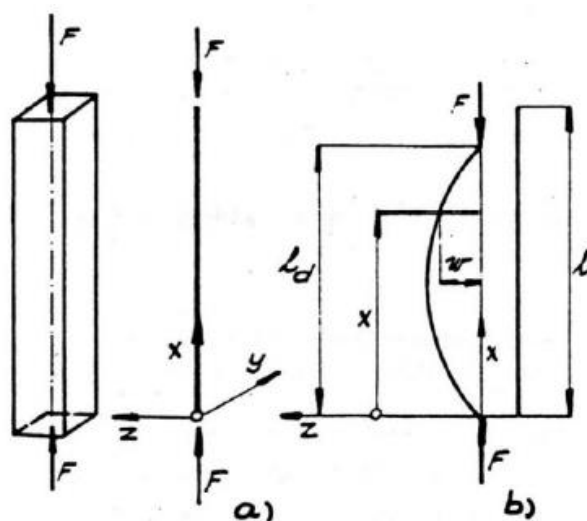
Obr 1.3 Předpoklad příčných průřezů [2]

## 2.2 Kritická síla

Při navrhování prutu musíme myslet na určité požadavky (pevnost, průhyb a stabilitu). Pokud dlouhý a štíhlý prut vystavíme dostatečně velkému tlakovému zatížení, způsobí boční nebo příčné vybočení prutu. A právě toto kritické zatížení může způsobit náhlé a dramatické porušení konstrukce a je nutné na něj při navrhování nezapomínat [5].

U volného prutu namáhaného na tlak, při posuzování mezního stavu vzpěrné stability, uvažujeme tyto předpoklady:

- v nezatíženém stavu je střednice prutu ideálně přímá – je to proto, aby už od začátku nedocházelo k ohybu,
- prut je prizmatický a nešroubový,
- tlustostěnný průřez prutu (všechny rozměry příčného průřezu musí být řádově stejně velké),
- prut je zatížen dvěma rovnovážnými osamělými silami  $F$ , tyto síly působí v těžištích čel prutu a nositelky jsou totožné se střednicí prutu v nezatíženém stavu,
- materiál prutu je homogenní, izotropní, lineárně pružný a dokonale pevný,
- v průběhu celého zatěžování platí prutové předpoklady prostého namáhání prutů [2].



Obr. 1.4 Ideální tlakové namáhání ideálního prutu [2]

Aby bylo možné definovat statické podmínky, jak už bylo řečeno, je nutné uvolňovat prvek prutu v prohnutém stavu. Tím se v příčných průřezích kvůli zakřivení střednice v prohnutém stavu vyskytuje nejen normálová síla  $N$  a ohybový moment  $M_0$ , ale také posouvající síla  $T$ . Tak vzniká kombinované namáhání prutu na tlak, ohyb a smyk, což vede ke komplikovanému řešení. Avšak při předpokladu dlouhého a štíhlého prutu se stávají síly  $N$  a  $T$  nepodstatnými z hlediska řešení ohybu, proto jediným zbylým a podstatným parametrem při ohýbání, který uvažujeme, je  $M_0$ . Ovšem při pouhém stlačování prutu by nevznikl ani  $M_0$  a ani  $T$ , platilo by tedy, že  $N = F$ . Tato rovnováha je pouze teoretická (labilní) a v praxi nemůže při překročení určitého zatížení nastat [1].

To je důvod, proč předpokládáme homogenost, prizmaticčnost a nešroubovitost, stejně jako předpokládáme, že průhybová křivka bude rovinná křivka. Jak můžeme vidět na obr. 1.4, tak podle zvoleného souřadnicového systému ohyb nastane v rovině  $zx$  a průhyb střednice označíme písmenem  $w$ . Můžeme tedy napsat, že ohybový moment při deformaci v místě  $x$  je definován jako [1]:

$$M_o(x) = Fw, \text{ kde } w = w(x) \quad (1)$$

Prut je namáhán na ohyb kolem hlavní osy  $y$ , počítáme proto s minimálním kvadratickým momentem  $J_y$  a vzhledem k předpokladům (b, c, f), platí diferenciální rovnice průhybové čáry, ta má po dosazení  $M_o$  z (1) tvar [2]:

$$\frac{w''}{(1 + w'^2)^{3/2}} = -\frac{Fw}{EJ_y} \quad (2)$$

Jedná se o nelineární diferenciální rovnici druhého řádu průhybové čáry  $w(x)$ . Obecné řešení této diferenciální rovnice obsahuje dvě integrační konstanty  $C_1, C_2$  a má tedy tvar [2]:

$$w = w(x, F, C_1, C_2) \quad (3)$$

Aby bylo možné určit tyto konstanty, je potřeba napsat okrajové podmínky, ty mají tvar podle obr. 1.4 [2]:

$$x = 0 \quad w = 0, \quad x = l_d \quad w = 0 \quad (4)$$

Protože předpokládáme prostý ohyb, tak se délka střednice nemění a platí vztah pro určení redukované délky  $l_d$  [2]:

$$l = \int_0^{l_d} \sqrt{1 + w'^2} \, dx \quad (5)$$

Řešením této diferenciální rovnice (1) s okrajovými podmínkami (4) a při délce střednice (5) je příliš obtížné dosáhnout výsledku, v uzavřeném tvaru dokonce nemožné. Tak Lagrange zjednodušil řešení tohoto problému na  $l \doteq l_d$ . Kvůli složitému řešení je uveden výsledek pouze na obr. 1.2, kde je nakreslena závislost maximálního průhybu  $w_{max}$  na zatěžující síle  $F$ . Zde si také můžeme všimnout, že existuje síla  $F_v$ , kterou nazýváme kritickou silou. Tato síla určuje hodnotu, kterou můžeme ideální prut namáhat na tlak, aniž by došlo k prohýbání. Proto je tato hodnota pro praxi velmi důležitá [2].

Kritická síla  $F_v$  vymezuje následující oblasti (převzato z [1, 2]):

$F < F_v$  prut se pouze stlačuje,

$F > F_v$  prut se buď jen stlačuje, pak je v labilní rovnováze, nebo se jen ohýbá a to pak je v rovnováze stabilní, viz obr. 1.2,

$F = F_v$  zde se stabilní stlačování mění na labilní, takže stabilním namáháním se stává ohyb. Jedná se o bod rozdvojené rovnováhy, jak bylo již řečeno tzv. bifurkace.

Lze si všimnout, že při  $F > F_v$  může prut zůstat přímý, ale je v labilní rovnováze. To znamená, že např. při náhodném krátkodobém zatížení, které neleží přímo v ose prutu nebo odchylka od ideálu či nehomogenita materiálu způsobí, že po uvolnění zatížení zůstane prut stále v prohnutém stavu. V praxi labilní rovnováha nenastane [1, 2].

Velikosti kritické síly  $F_v$  určíme z diferenciální rovnice (2) s okrajovými podmínkami (4). Kvůli složitosti je pro praktické výpočty řešení této rovnice nevhodné. Ovšem pokud potřebujeme kromě  $F_v$  zjistit i průhybovou čáru pro  $F > F_v$ , potom má smysl řešit tuto diferenciální rovnici. Ale jestli nás zajímá jen  $F_v$  a ostatní chování nikoliv, můžeme řešení zjednodušit. A to tak, že uvažujeme pouze malé průhyby, tedy řešíme deformaci jen v bezprostřední blízkosti po překročení síly  $F_v$ . Toto řešení se nazývá Eulerovo a více se mu bude věnovat další část kapitoly o pružném vzpěru [1, 2].

## 2.3 Vliv odchylek na kritickou sílu

Tato část kapitoly se zabývá různými vlivy působícími na kritickou sílu vzpěru. Jako první budou stručně popsány ostatní vlivy, které nejsou zahrnuty pro výpočty příkladů v této práci, poté více podrobněji bude popsán vliv uložení prutu a délky prutu.

Předpokládáme ideální prut zatížený dvěma silami na dané nositelce. Tyto síly jsou staticky rovnovážné, mají tedy stejnou velikost, ale opačnou orientaci. Dále platí prutové předpoklady prostého namáhání prutů, i když odchylky jsou tak malé, že nijak významně neovlivní prutové předpoklady [2].

- Vliv proměnnosti průřezu a modulu pružnosti:

Při analýze prutu s proměnným příčným průřezem po délce platí vztahy pro prostý ohyb. To platí, pokud je průřez málo proměnný nebo odstupňovaný. Výpočet vede na lineární diferenciální rovnici druhého řádu s proměnnými koeficienty, což znamená, že řešení je možné pouze ve speciálních případech a kritickou sílu  $F_v$  určujeme numerickými metodami. Stejně závěry platí i pro proměnnost modulu pružnosti  $E$ . Pokud se prut odlišuje jen těmito dvěma vlivy, které nemají dopad na změnu polohy hlavních os podél střednice, pak lze říct, že bod rozdělení rovnováhy existuje [2].

- Vliv proměnnosti normálové síly:

Při zatížení prutu tlakovou silou pouze na čelech je normálová síla  $N$  podél přímé střednice konstantní. Pokud je prut zatížen více osamělými silami nebo líniovým zatížením  $q(x)$  vázaným ke střednici, pak se silové účinky v prohnutém stavu změny na soustavu rovnoběžných sil. Pro tento druh vlivu existuje bod rozdělení rovnováhy a kritická síla  $F_v$  závisí na rozložení vnějších sil. Výpočet kritické síly je obecně numericky náročný kvůli nelinearitě rovnic [2].

- Vliv šroubovitosti prutu:

Vliv šroubovitosti prutu způsobuje, že průhybová čára je prostorová křivka a v deformovaném stavu působí navíc ještě  $M_k$  v příčných průřezích. Rozdvojení rovnováhy nastává pouze, pokud platí  $F = F_V$ , přičemž  $F_V$  závisí na obou hlavních centrálních kvadratických momentech příčného průřezu [2].

- Vliv zakřivení střednice a působení mimo těžiště:

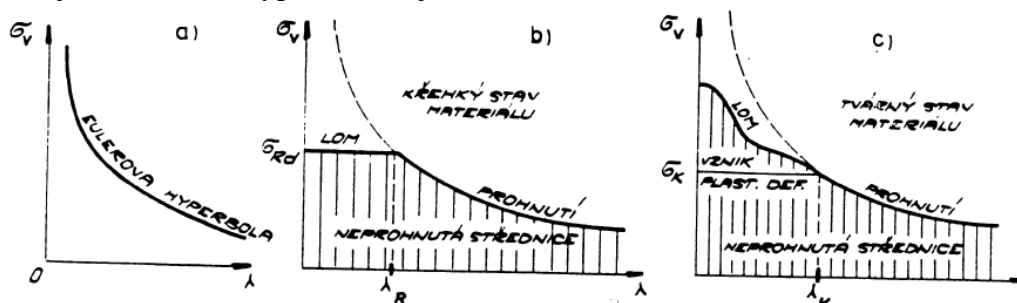
Zakřivení střednice prutu může být způsobeno výrobními nedokonalostmi nebo nehomogenitou materiálu, což znamená, že předpoklad o přímosti střednice u skutečného prutu nemůže být nikdy úplně splněn. Rozložení tlakové síly  $F$  závisí na více faktorech, a výsledná síla nemusí procházet těžištěm čel. Pokud se střednice zakříví na začátku působení síly a vzniknou počáteční průhyby, nositelka sil  $F$  se posune o excentricitu  $e$  proti spojnici těžišť čel. Tento posun nositelky i zakřivení nastane v rovině hlavních centrálních os [2].

Díky předpokladu malých odchylek zůstávají prutové předpoklady prosté pružnosti a pevnosti splněny. Zatížení posunutě o excentricitu tak můžeme nahradit centrickým zatížením a silovými dvojicemi. Kritická síla  $F_V$  představuje mezní sílu vzpěrné stability. Pokud jsou počáteční zakřivení prutu a excentricita zatížení dostatečně malá, průhyb se stává významným a rozdvojení rovnováhy nenastane. Tento druh vlivu způsobuje, že prut se začne prohýbat již od počátku, čímž nedochází k rozdvojení rovnováhy [2].

### 2.3.1 Vliv reálného materiálu

Do této chvíle jsme předpokládali prut z homogenního izotropního lineárního elastického materiálu s nekonečnou pevností, nyní u skutečného materiálu může mezní stav vzpěrné stability přecházet na mezní stav pružnosti nebo mezní stav křehké pevnosti. Pro mezní stav pružnosti mluvíme o materiálech v houževnatém stavu, kdežto pro mezní stav křehké pevnosti se jedná o materiály v křehkém stavu. Aby byl možný výpočet napětí od kritické síly, zavedeme tzv. štíhlost prutu  $\lambda$ . Ta definuje, o který mezní stav se jedná. Při vyhodnocování je prvotní ten mezní stav, který nastane první [2].

Závislost tlakového napětí  $\sigma_v$  v bodě rozdvojení rovnováhy a štíhlosti prutu  $\lambda$  je vyšší hyperbolou označovanou, jako Eulerova hyperbola, ta je znázorněna na obr. 1.5 a) [2].



Obr. 1.5 Graf vlivu reálného materiálu pro ocel [2]

Vzorec pro výpočet štíhlosti prutu a napětí v bodě rozdvojení rovnováhy  $\sigma_v$  [2]:

$$\lambda = \frac{l}{\sqrt{J}}, \quad \sigma_v = \frac{F_v}{S} = \frac{\alpha_v^2 EJ}{Sl^2} = \frac{\alpha_v^2 E}{\lambda^2} \quad (6)$$

Pro vybočení prutu ideálně křehkého materiálu musí být splněna podmínka:

$$\sigma_{Rd} > \sigma_v = \frac{\alpha_v^2 E}{\lambda^2} \Rightarrow \lambda > \alpha_v \sqrt{\frac{E}{\sigma_{Rd}}} = \lambda_R \quad (7)$$

Kde  $\sigma_{Rd}$  je mez pevnosti materiálu v tlaku a  $\lambda_R$  odpovídá kritické štíhlosti, která vymezuje, zda dojde k meznímu stavu vzpěrné stability nebo meznímu stavu křehké pevnosti při  $\lambda < \lambda_R$ . Při nárůstu síly až po překročení  $\sigma_{Rd}$  nastane dříve porušení soudržnosti prutu křehkým lomem než vybočení, to můžeme vidět na obr. 1.5 b) [2].

Pro materiál v houževnatém stavu dojde k vybočení při podmínce:

$$\sigma_k > \sigma_v = \frac{\alpha_v^2 E}{\lambda^2} \Rightarrow \lambda > \alpha_v \sqrt{\frac{E}{\sigma_k}} = \lambda_k \quad (8)$$

Kde  $\sigma_k$  označuje mez kluzu a  $\lambda_k$  odpovídá kritické štíhlosti, ta stejně jako u křehkého materiálu určuje, o který mezní stav se jedná. Pro  $\lambda < \lambda_k$  nastává dříve mezní stav pružnosti než mezní stav vzpěrné stability. Při řešení je podstatné určit, jestli připouštíme vznik plastických deformací nebo nikoliv, pokud ano, získání hodnoty  $F_v$  je mnohem komplikovanější [2].

### 2.3.2 Vliv uložení prutu

Prut nemusí být zatížený pouze tlakovou silou v ose prutu, ale může být i vázán k základnímu tělesu. V této kapitole budou vysvětlena čtyři charakteristická uložení prutu, budou seřazena od působení nejmenší kritické síly potřebné ke vzpěru až po největší:

- a) prut vetknutý na jedné straně,
- b) prut na jedné straně uložený rotační vazbou a na druhé rotačně-posuvnou (toto uložení odpovídá volnému prutu),
- c) prut na jedné straně vetknutý a na druhé straně uložený rotačně-posuvnou vazbou,
- d) prut vetknutý na obou stranách.

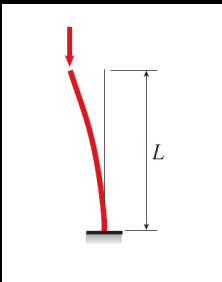
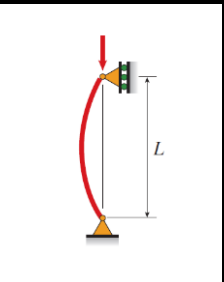
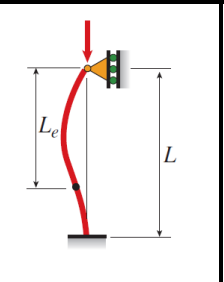
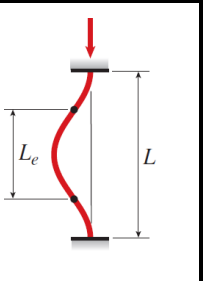
Všechna tato uložení můžeme vidět na obr. 1.6.

Obecný postup řešení pro všechny typy uložení je stejný (převzato z [2]):

- Odhadneme průhyb střednice podle typu vazeb a jejich vazbových podmínek.

- Úplné uvolnění prutu – v tomto kroku vazby nahradíme příslušnými reakcemi a napíšeme vazbové podmínky.
- Vyjádříme použitelné podmínky statické rovnováhy a ohybový moment.
- Dále napíšeme rovnici průhybové čáry pro malé průhyby a určíme okrajové podmínky. Vazbové podmínky závisí na uložení koncových bodů prutu tak, aby prut jako celek zůstal nepohyblivý.
- Vyřešíme rovnici.

Uložení prutu je popsáno charakteristickou rovnicí, jejímž řešením dostaneme nejmenší nenulový kořen, veličinu značíme  $\alpha_v$ . Výpočet této veličiny je možný jen ve zvláštních případech, obecně je lepší použít numerické metody. Je zřejmé, že uložení prutu má na velikost kritická síly velký vliv [2].

a)	b)	c)	d)
			
$\alpha_v = \frac{\pi}{2}$	$\alpha_v = \pi$	$\alpha_v = \pi\sqrt{2}$	$\alpha_v = 2\pi$
$K = 2$	$K = 1$	$K = 0.7$	$K = 0.5$

Obr.1.6 Způsoby uložení prutu [4]

Pruty jsou zatíženy stejnou silou  $F$ , působící v těžišti na konci prutu, příčný průřez prutů uvažujeme stejný. Také předpokládáme, že všechny pruty mají stejnou délku  $l$  a jsou vyrobeny ze stejného materiálu, který se řídí Hookovým zákonem. Jediná hodnota, která bude mít v tomto případě vliv na kritickou sílu je  $\alpha_v$  [4].

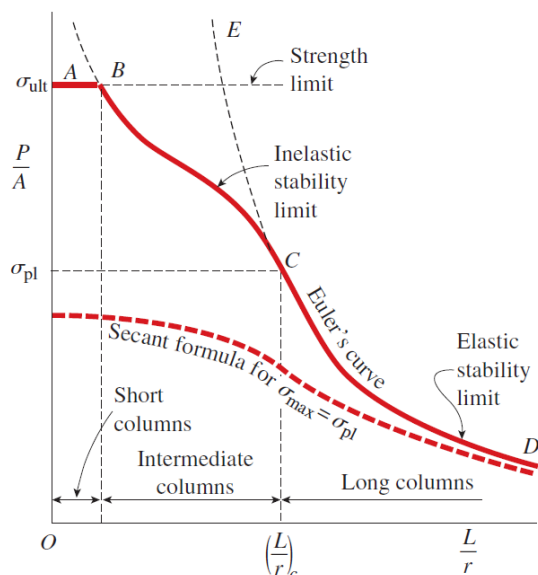
Velikost kritického zatížení je v případě b) čtyřikrát větší než u základního uložení a). V případě d) potřebujeme dokonce až šestnáctkrát větší sílu, aby došlo k vybočení a ztrátě vzpěrné stability, než pro a) [4].

Stejně jako se pro jednotlivá uložení mění hodnota  $\alpha_v$ , tak i každý způsob uložení má svou efektivní neboli redukovanou délku  $l_e$ . Tato délka představuje vzdálenost mezi inflexními body, tzv. body nulového momentu. Mnoho konstrukčních předpisů místo efektivní délky používají bezrozměrný součinitel efektivní délky  $K$ :

$$l_e = KL \quad (9)$$

### 2.3.3 Vliv délky prutu

Délka prutu má zásadní vliv na vzpěrnou stabilitu. Obecně platí, že čím delší je prut, tím je více náchylný k vybočení v důsledku vnějších zatížení. To znamená, že s rostoucí délkou prutu se zvyšuje riziko nedostatečné vzpěrné stability zejména při tlakovém zatížení nebo při aplikaci bočních sil [4]. Zobrazení tohoto vlivu můžeme vidět v diagramu kritického napětí a štíhlosti prutu na obr.1.3.



Obr. 1.7 Diagram vlivu délky prutu

Jak můžeme vidět na obr. 1.7, oblast pružného vzpěru, mezi body CD, se vztahuje buď na malé, nebo velké délky prutu. Z Eulerovy křivky vyplývá, že pro vybočení dlouhých prutů s velkou štíhlostí stačí nízká hodnota napětí. Jedná se o nestabilitu prutu jako celku, nikoliv o porušení samotného materiálu, proto tento stav nelze zlepšit použitím materiálu s vyšší pevností. Napětí lze zvýšit pouze snížením štíhlosti prutu nebo výměnou materiálu za materiál s vyšším modulem pružnosti  $E$ . Pokud budeme mluvit o krátkém prutu, na úseku AB, k selhání dojde v důsledku překročení meze pevnosti a porušení materiálu, v tomto případě se nejedná o vzpěr. Můžeme tedy definovat kritické napětí jako napětí při porušení materiálu. Mez pevnosti je mnohem vyšší než mez úměrnosti, protože představuje mezní napětí v tlaku [4].

Úsek BC definuje oblast nepružného vzpěru, jedná se o rozmezí středních délek a také středních štíhlostních poměrů. Příliš malých, aby se jimi zabývala pružná stabilita a příliš velkých pro řízení předpoklady pevnostní stability. To znamená, že maximální napětí jsou při vzpěru nad mezí úměrnosti, a proto dochází k vybočení prutu [4].

Obě tyto oblasti budou více popsány v následující části.

## 2.4 Oblast pružného vzpěru

Jak již bylo zmíněno, pružný vzpěr se určuje buď pro velmi malé nebo velké délky prutu. Dlouhé pruty se stanou nestabilními, když tlakové napětí zůstane pružné. Porucha, ke které dojde, označujeme jako pružná nestabilita. Zatímco u krátkých prutů k nestabilitě nedochází, materiál se jednoduše prohne nebo se poruší [5]. Zde budou popsány některé metody pro určení kritické síly v oblasti pružného vzpěru.

### 2.4.1 Eulerovo řešení

Jedním z nejznámějších a dnes nejpoužívanějších řešení je Eulerovo. Toto řešení je pojmenované po švýcarském matematikovi Leonhardovi Eulerovi, který se tímto problémem zabýval v roce 1757. Jako první se zabýval řešením vzpěrné stability a odvodil rovnici pro kritickou sílu. Tento vztah byl odvozen pro dlouhý prut, který je zatížený osově a soustředně. Další předpoklad, co musíme uvažovat, je pružný stav materiálu (napětí je nižší než mez kluzu) [3].

Řešení bylo odvozeno z diferenciální rovnice průhybové čáry pro malé deformace (průhyby), tedy neuvažujeme nelineární člen, a proto nelze řešení použít pro řešení stabilního ohybu, ale pouze pro stanovení kritické síly [5].

Pokud tedy zanedbáme člen diferenciální rovnice (2)  $w'^2$  vzhledem k 1, tzn.  $w'^2 \ll 1$ , zjednoduší se rovnice na tvar [2]:

$$w'' + \frac{F}{EJ}w = 0 \quad (10)$$

Protože pro malé deformace platí  $l \doteq l_d$ , můžeme vyjádřit okrajové podmínky [2]:

$$x = 0 \quad w = 0, \quad x = l \quad w = 0 \quad (11)$$

Pro zjednodušení je průhyb popsán lineární homogenní diferenciální rovnicí druhého řádu s konstantními koeficienty, značíme [2]:

$$p^2 = \frac{F}{EJ} \quad (12)$$

Pak můžeme diferenciální rovnici (10) přepsat do tvaru [2]:

$$w'' + p^2w = 0. \quad (13)$$

a potom je obecným řešením [2]:

$$w = C_1 \sin px + C_2 \cos px. \quad (14)$$

Jak už je zvykem, integrační konstanty pak určíme z okrajových podmínek (11), dosazením do obecného řešení dostaneme [1]:

$$0 = C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 \Rightarrow C_2 = 0, \quad (15)$$

$$0 = C_1 \sin pl + C_2 \cos pl \Rightarrow C_1 \sin pl = 0. \quad (16)$$

Kvůli splnění okrajové podmínky (11) za  $p$  ze vztahu (12) a dosadíme do rovnice (16) potom dostaneme [1]:

$$C_1 \sin pl = 0 \Rightarrow C_1 \sin \left( \sqrt{\frac{F}{EJ}} l \right) = 0. \quad (17)$$

Podmínka (17) může být splněna pro 3 případy [2]:

- a)  $C_1 = 0, \sin pl \neq 0$ , pak  $w = 0$  přičemž argument u funkce  $\sin \left( \sqrt{F/EJ} \cdot l \right)$  může být libovolný. To znamená, že při působení libovolné síly prut zůstává přímý.
- b)  $C_1 \neq 0, \sin pl = 0$ , pak  $C_1 \neq 0 \wedge \sin px \neq 0$  pro  $x \neq l$ . Nastává průhyb prutu, ale jen pokud je splněno:

$$\sin pl = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{F}{EJ}} l = 0, \pi, 2\pi, \dots$$

Protože jsou pro prut veličiny  $E, J, l$  dané, musí také platit:

$$F = \frac{(k\pi)^2 EJ}{l^2}, \quad \text{pro } k = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

Pro  $k = 0$  je  $F = 0 \Rightarrow$  prut je nezatížený, tedy se nemůže deformovat (vyplývá to z axiomu o deformaci). A proto platí  $w = 0$  [2].

Pro  $k = 1$  je  $F = F_v = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \neq 0$  (pro každý průřez je  $EJ \neq 0$ ). To znamená, že při působení na prut stálou silou  $F = F_v$  je  $w \neq 0$ . Tento průhyb je ovšem neurčitý, protože podmínka (17) platí pro jakoukoliv hodnotu  $C_1$ . Pokud porovnáme výsledek s obecným řešením na obr. 1.2, uvidíme, že okolí bodu  $F_v$  souhlasí pro velmi malé průhyby. Tečna ke křivce průhybu je totiž v bodě  $F_v$  kolmá na osu  $F$ . To znamená, že z přibližného řešení jsme získali přesnou hodnotu kritické síly  $F_v$ , ale pro ideální a ideálně zatížený prut [1, 2].

Při dalších hodnotách pro  $k > 1$ , bude síla  $F$ , která vyhovuje podmínce (18) vyšší než  $F_v$  ( $F > F_v$ ). To znamená, že by deformační stav byl nestabilní (labilní) a ten v praxi samovolně nenastane [1].

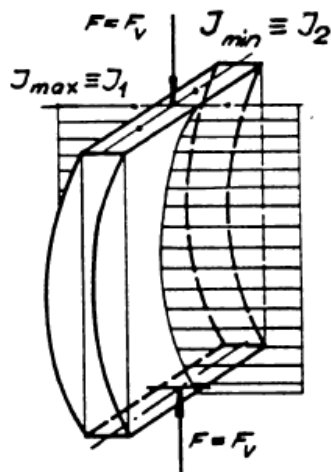
- c)  $C_1 = 0$ ,  $\sin pl = 0$ , potom  $F = F_v$  a současně  $w = 0$ , při této rovnosti sil může zůstat prut také přímý (bod a)) [2].

Závěrem lze říct, že pokud předpokládáme při výpočtu průhybu ideálního prutu malé průhyby ( $w'^2 \ll 1$ ), pak získáme správnou hodnotu kritické síly  $F_v$ , při které vzniká rozdvojení rovnováhy. Neobdržíme ovšem správný popis průhybu pro  $F > F_v$ , tento předpoklad je použitelný pouze pro přesné určení kritické síly  $F_v$  [2].

Průhyb ideálního prutu nastane v rovině, kde platí, že síla  $F_v$  je minimální. V ostatních rovinách, ve kterých by případně mohl nastat, by byl průhyb nestabilní. Ze vztahu (18) víme, že minimální hodnota  $F_v$  nastane tam, kde je minimální kvadratický moment průřezu  $J$ , jedná se o ten menší z hlavních centrálních kvadratických momentů, označený jako  $J_2$ . Takže rovnice pro výpočet kritické síly bude [2]:

$$F_v = \pi^2 \frac{EJ_2}{l^2} \quad (19)$$

Osa  $J_2$  je neutrální osou a ohyb nastane v rovině kolmé k rovině obsahující neutrální osy průřezu (v směru osy  $J_1$ ), kterou je rovina vytvořená hlavními centrálními osami podél střednice prutu, k nimž je  $J_{max}$ . „Stabilní průhyb ideálního prutu namáhaného ideálním tlakem nastane v rovině tvořené hlavními centrálními osami, k nimž je  $J_{max} = J_1$ “ [2].



Obr. 1.8 Znárodnění rovin [2]

## 2.4.2 Vzorec sečen

Eulerův vzorec byl odvozený za předpokladu působení zatížení  $F$  vždy v těžišti příčného průřezu prutu a že prut je dokonale přímý. Vlivem excentricity při zatížení nebo nedokonalosti v konstrukci, není možné toto reálně uvažovat. Ve skutečnosti se prut nikdy náhle neprohne, ale začne se ohýbat už jen při nepatrném působení zatížení. Kvůli tomu by mělo být kritérium pro použití zatížení omezeno buď na stanovený průhyb prutu, nebo tím, že maximální napětí nepřekročí přípustné napětí [5].

Pokud předpokládáme, že se materiál řídí Hookovým zákonem, tedy má pružné chování a vezmeme v úvahu vliv excentricity a nedokonalost konstrukce, dostaneme křivku znázorněnou na obr. 1.7 označenou jako „Secant formula“. Tato křivka je zobrazena pro maximální napětí rovné mezi úměrnosti  $\sigma_{pl}$ . Jak můžeme na obr. 1.7 vidět, průměrné napětí klesá, když se po křivce pohybujeme zleva doprava (klesá zatížení  $F$ ), ale maximální napětí zůstává konstantní [4].

Vnitřní moment pro prut je [5]:

$$M = -F_v(e + w) \quad (20)$$

Diferenciální rovnice průhybové čáry potom je [5]:

$$EJ \frac{d''w}{dx^2} = -F_v(e + w) \quad (21)$$

Obecným řešením rovnice je [5]:

$$w = C_1 \sin \sqrt{\frac{F_v}{EJ}} x + C_2 \cos \sqrt{\frac{F_v}{EJ}} x - e \quad (22)$$

Opět pro výpočet integračních konstant potřebujeme znát okrajové podmínky, které jsou [5]:

$$x = 0 \quad w = 0 \quad C_2 = e, \quad x = l \quad w = 0 \quad (23)$$

Po upravení lze rovnici průhybu zapsat jako [5]:

$$w = e \left[ \tan \left( \sqrt{\frac{F_v}{EJ}} \frac{l}{2} \right) \sin \left( \sqrt{\frac{F_v}{EJ}} x \right) + \cos \left( \sqrt{\frac{F_v}{EJ}} x \right) - 1 \right] \quad (24)$$

## 2.5 Oblast nepružného vzpěru

Pruty střední délky selhávají v důsledku nepružné nestability. To znamená, že tlakové napětí v nich může dosáhnout meze úměrnosti ještě před začátkem vybočení prutu. Pro výpočet tohoto kritického zatížení potřebujeme teorii nepružného vzpěru. Protože je překročena mez úměrnosti, sklon napěťové deformace materiálu je menší než modul pružnosti, proto kritické zatížení pro nepružný vzpěr je vždy menší než Eulerovo zatížení [4, 5]. V této kapitole budou vysvětleny teorie, jak určit nepružný vzpěr.

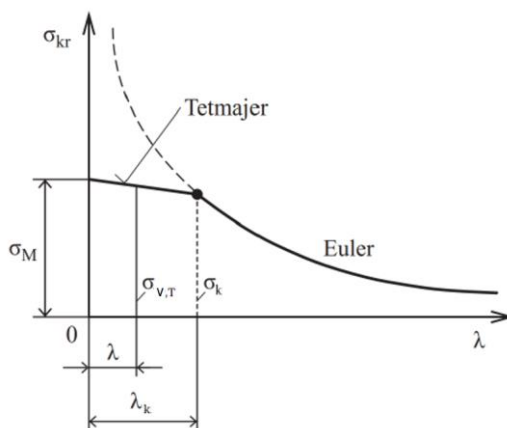
### 2.5.1 Tetmajerovo řešení

V pružně-plastické oblasti je vzpěrná stabilita většinou popisována křivkou získanou experimentálně. Ta se s Eulerovou mezní křivkou střetává ve společném bodě  $[\lambda_{kr}; \sigma_k]$ . V roce 1886 Ludwig von Tetmajer rozšířil Eulerovo řešení, a to tak, že průběh závislosti kritického napětí na štíhlosti prutu nahradil přímkou [3]. Toto řešení můžeme vidět na obr. 1.9, z obrázku je patrné, že přímka nemusí být tečná k Eulerově křivce [7].

Obecná rovnice pro kritické napětí potom bude mít tvar:

$$\sigma_{v,T} = \sigma_M - (\sigma_M - \sigma_k) \frac{\lambda}{\lambda_k} \quad (25)$$

kde  $\sigma_{v,T}$  značí napětí pro mezní stav vzpěrné stability podle Tetmajera,  $\sigma_M$  je mezní napětí,  $\sigma_k$  mez kluzu materiálu [3].



Obr.1.9 Průběh mezních křivek vzpěrné stability podle Eulera a Tetmajera [3]

Tetmajerův výpočet může mít i alternativní tvar. Vlastnosti určitých materiálů byly změřeny individuálně a kritické napětí se potom určí pomocí experimentálně zjištěných hodnot a součinitelů. Další zdroj zase uvádí zobrazenou přímku jinou rovnicí [3]:

$$\sigma_{v,TeX} = N - M\lambda \quad (26)$$

kde  $N$  a  $M$  jsou zvolené konstanty tak, aby co nejlépe odpovídaly vlastnostem pro daný materiál, tyto hodnoty spolu se štíhlostí prutu jsou v některých literaturách uvedené. Stejně jako v případě Johnsonovy paraboly, tato přímka nemusí vždy platit pro velmi krátké sloupy [7].

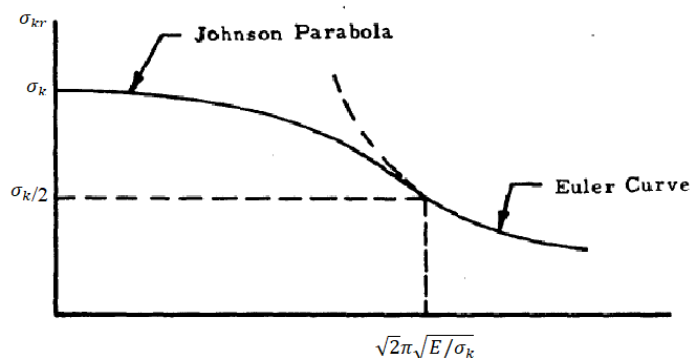
## 2.5.2 Johnsonovo řešení

U prutů, které mají střední délku a štíhlostní poměr je menší než jeho mezní hodnota, tak použití Eulerova řešení není vhodné. Proto byly experimentálně navrženy vztahy vyjadřující závislost kritické síly štíhlosti prutu a materiálových vlastností. Jedním z těchto vztahů je i parabolický Johnsonův vztah [6].

Johnsonova parabola se skládá z Eulerovy křivky, kdy parabola je tečnou k této křivce a potom můžeme psát rovnici pro kritickou sílu [6]:

$$F_v = S \left( \sigma_k - \frac{1}{E} \left( \frac{\sigma_k \lambda}{2\pi} \right)^2 \right) \quad (27)$$

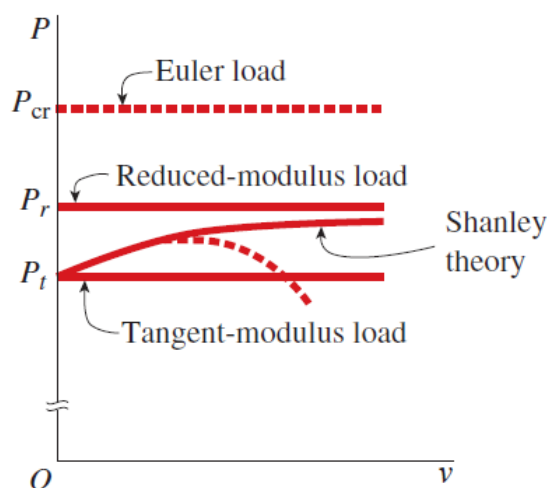
Typická Johnsonova parabola je znázorněna na obr. 2.1 a vyznačené body ukazují místa dotyku spolu s Eulerovou křivkou. Kritická mezní štíhlost, rozlišující střední pruty od dlouhých, je tedy pro Johnsonovu křivku  $\sqrt{2\pi} \sqrt{E/\sigma_k}$ . Hlavní výhodou této křivky je jednoduchost výpočtu a schopnost přizpůsobit se hodnotám v případě, že dochází k závislosti mezi vybočením a ohýbáním [7].



Obr. 2.1 Průběh Johnsonovi paraboly

### 2.5.3 Teorie tečného modulu a Shanleyova teorie

Roku 1946 americký letecký inženýr F. R. Shanley poukázal na logické paradoxy v předchozích uznávaných teoriích. Poukázal na chyby v teorii tangenciálního (tečného) modulu a na teorii redukovaného modulu, protože nezohledňují úplné chování prutu. Není možné, aby u nepružného vzpěru došlo k vybočení prutu podobným způsobem jako u Eulerova vzpěru [4].



Obr. 2.2 Diagram zatížení a průhybu pro teorie pružného a nepružného vzpěru [4]

Ve své teorii uvádí určitý vztah mezi každou hodnotou zatížení a dopovídajícím průhybem, toto chování můžeme vidět na obr. 2.2. Vzpěr začíná při dosažení zatížení tečného modulu a poté dále roste, ale zatížení odpovídající redukovanému modulu nedosáhne, průhyb roste do nekonečné velikosti, až vlivem dalších účinků začne klesat, jak ukazuje křivka s přerušovanou čarou. Maximální zatížení není pro tuto teorii o moc vyšší než pro teorii tečného modulu a kvůli jednoduchosti výpočtu bude uvedena teorie tečného modulu [4].

Výpočet kritického zatížení pro teorii tečného modulu [4]:

$$F_v = \frac{\pi^2 E_t J}{l^2} \quad (28)$$

Rovnice je stejná jako pro Eulerovu teorii (19), s tím rozdílem, že zde uvádíme tečný modul  $E_t$ . Tečný modul se mění s tlakovým napětím, a proto jeho hodnotu získáváme obvykle iteračním postupem. Začneme odhadem  $F_v$ , tato hodnota by měla mít o něco větší zatížení, než má mez úměrnosti prutu, pokud ji známe, můžeme poté určit tečnu pomocí:

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{S} \quad (29)$$

kdy  $F_1$  je první odhad zatížení  $F_v$  a  $S$  je obsah průřezu prutu. Dále pomocí rovnice (28) získáme další hodnotu zatížení  $F_2$ , pokud je velmi blízko  $F_1$ , můžeme ho přijmout. Je však pravděpodobnější, že bude nutné provést další iterace, dokud nenajdeme zatížení v těsné blízkosti předchozího zkušebního zatížení [4].

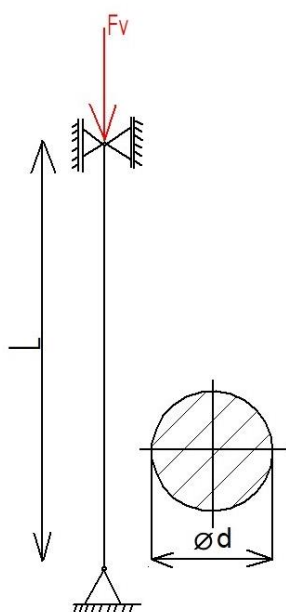
### 3 VÝPOČET KRITICKÉ SÍLY PRO VYBRANÉ PŘÍPADY

V této kapitole bude popsán analytický a numerický výpočet kritické síly, následně bude určena bezpečnost pro mezní stav vzpěrné stability. Analytické příklady budou řešeny pomocí Eulerovy a Johnsonovy metody a numericky pomocí programu Ansys, který pracuje s MKP.

#### 3.1 První příklad – rotační a rotačně posuvná vazba

##### 3.1.1 Analytické řešení

Tento příklad ukazuje jedno z klasických uložení, které je zmíněno v předchozí kapitole. Jedná se o prut na jedné straně uložený rotační vazbou a na druhé straně rotačně-posuvnou.



Obr.2.3 První příklad výpočtu

Materiálem byla zvolena konstrukční ocel 11 600, pro tuto ocel strojnické tabulky uvádí takový interval hodnot pro mez kluzu  $\sigma_k = 295 - 340$  MPa [8], hodnota modulu pružnosti pro konstrukční ocel je přibližně  $E = 210$  GPa. Na obr. 1.6 můžeme vidět, že součinitel pro tento typ uložení se rovná  $\alpha = \pi$ . Další parametry pro výpočet, které byly zvoleny, jsou hodnota délky  $l = 600$  mm, průměru prutu  $d = 20$  mm a zatěžující síly  $F = 30$  kN.

Jako první byl proveden výpočet pro kontrolu vlivu reálného materiálu, jestli opravdu může nastat mezní stav vzpěrné stability. Aby mohl být použit vzorec pro výpočet štíhlosti prutu (6), je nutné znát velikost obsahu příčného průřezu prutu  $S$  a kvadratický moment  $J_2$ . Tyto hodnoty byly spočítány následovně:

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi 20^2}{4} = 314 \text{ mm}^2 \quad (30)$$

$$J_2 = J_y = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi 20^4}{64} = 7854 \text{ mm}^4 \quad (31)$$

Dále byly hodnoty dosazeny do vzorce pro štíhlost prutu (6) a byla vypočítána jeho hodnota:

$$\lambda = \frac{l}{\sqrt{\frac{J_2}{S}}} = \frac{600}{\sqrt{\frac{7854}{314}}} = 120 \quad (32)$$

Prvně byla ověřena podmínka pro materiál v houževnatém stavu a určena velikost kritické štíhlosti podle vzorce (8), velikost meze kluzu byla použita nejmenší možná z intervalu:

$$\lambda_k = \alpha \sqrt{\frac{E}{\sigma_k}} = \pi \sqrt{\frac{210 \cdot 10^3}{295}} = 84 \quad (33)$$

Jelikož bylo splněno  $\lambda > \lambda_k$  můžeme říct, že pro tento prut by mohl nastat mezní stav vzpěrné stability.

Poté co bylo ověřeno, že mezní stav vzpěrné stability může nastat dříve než mezní stav pružnosti, dalším krokem bylo určit velikost kritické síly. K tomu bylo použito odvození pomocí Eulerovy metody pro výpočet kritické síly (19) a po dosazení byla zjištěna tato hodnota:

$$F_v = \alpha^2 \frac{EJ_2}{l^2} = \pi^2 \frac{210 \cdot 10^3 \cdot 7854}{600^2} = 45 \text{ kN} \quad (34)$$

V posledním kroku byla určena hodnota bezpečnosti:

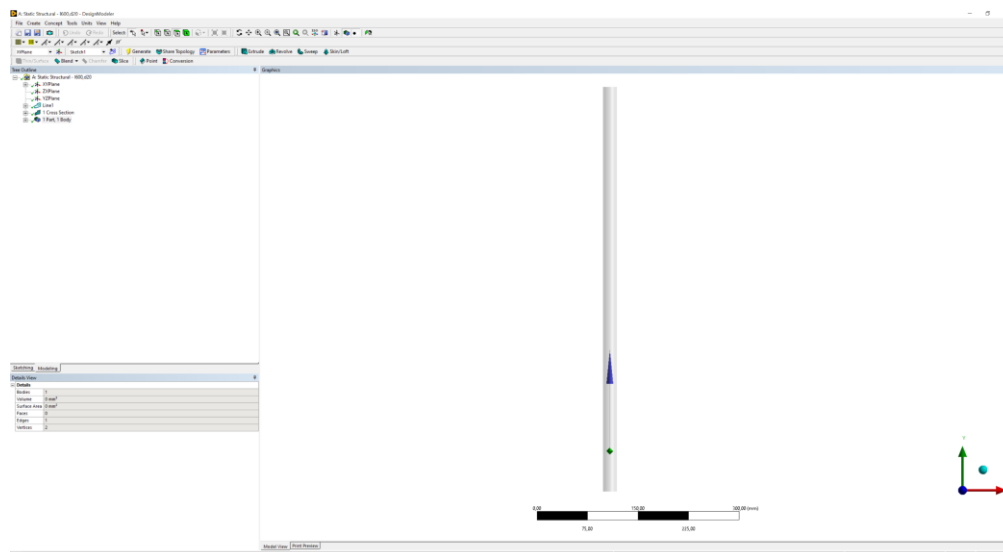
$$k_v = \frac{F_v}{F} = \frac{45}{30} = 1,5 \quad (35)$$

### 3.1.2 Numerické řešení

Pomocí programu Ansys budou nyní ověřeny již spočítané hodnoty pro lineární vzpěr.

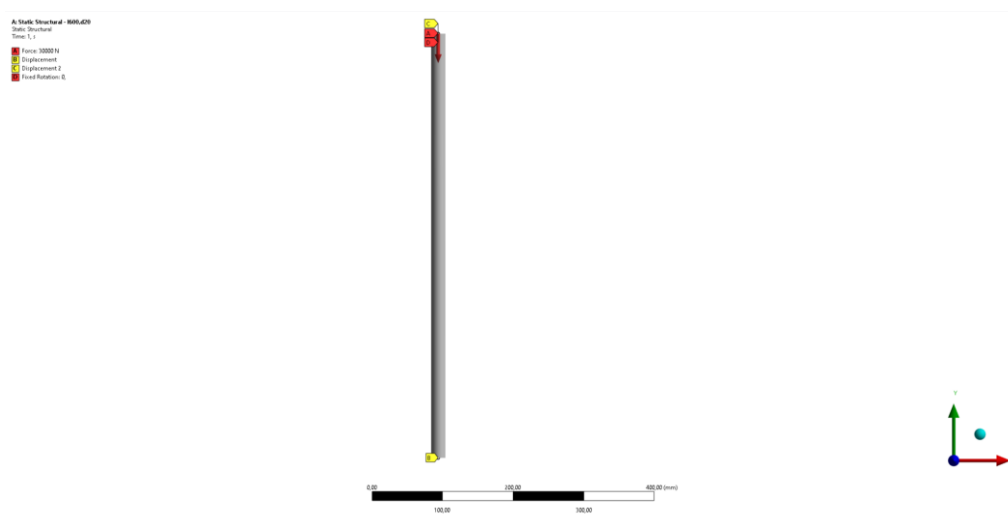
Jako první byla v prostředí Workbench spuštěna analýza Static Structural. Zde v kolonce Engineering data byly nastaveny vlastnosti materiálu, který byl zvolený stejný pro všechny typy příkladů, jak pro analytický, tak numerický výpočet. Hodnoty pro modul pružnosti byly upraveny a byl vytvořen nový materiál, zadány elastické konstanty, takže bude zaručeno lineární chování.

Geometrie byla vytvořena v DesignModeleru a protože se jedná o rovný prut, který je zatěžovaný, mohla být geometrie vytvořena jako střednice, ke které byl přiřazen daný průřez.



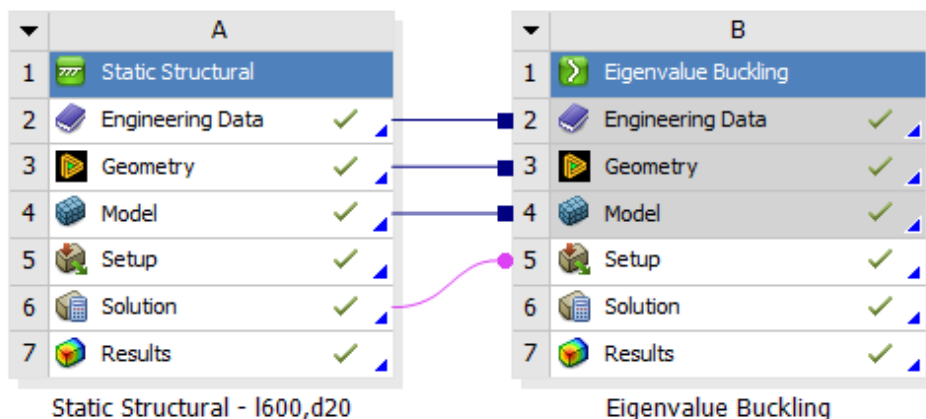
Obr. 2.4 Geometrie prvního pro numerický výpočet

Dalším krokem bylo vytvořit dostatečně jemnou síť, za použití funkce Sizing, konečný počet prvků tvořící síť je 600. Dále byly nastaveny okrajové podmínky analýzy, to bylo provedeno v kolonce Setup. Jako první byla nastavena zatěžující síla 30 kN, působící ve směru záporné osy y. Tuto podmínku můžeme vidět pod písmenem (A) na obr. 2.5. Spodní rotační vazba byla nastavena pomocí volby Displacement (B), kdy byl nastaven nulový posuv ve všech směrech. Horní vazba je rotačně posuvná. Posuvná část byla nastavena opět pomocí funkce Displacement2 (C), kdy jediný dovolený posuv je v ose y, v ostatních osách je nulový. Na poslední rotační část byla použita funkce Fixed Rotation (D), kdy bylo zamezeno rotaci kolem osy y.



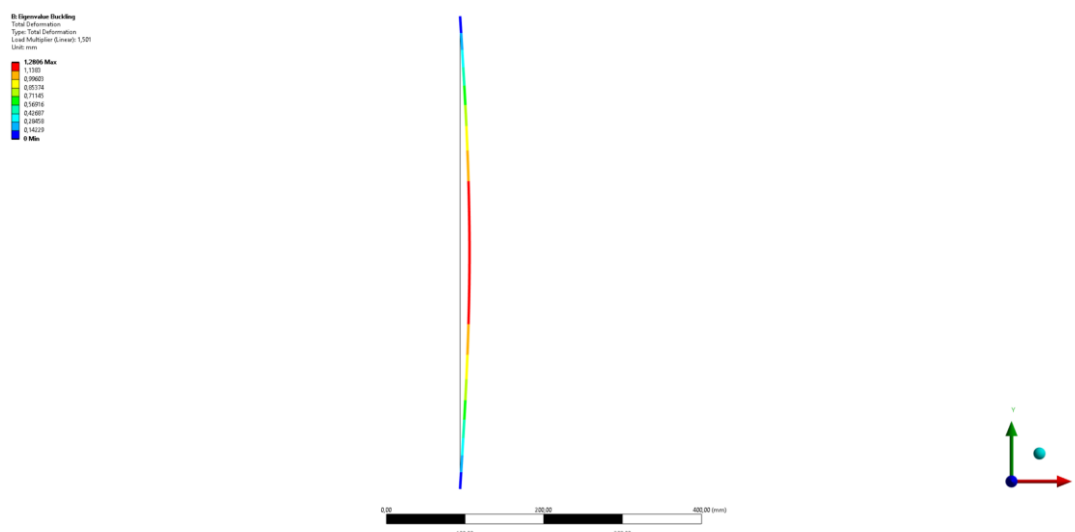
Obr. 2.5 Okrajové podmínky pro první příklad numerického výpočtu

Po nastavení okrajových podmínek byla opět v prostředí Workbench na kolonku Solution navázána další analýza, a to Eigenvalue Buckling.



Obr. 2.6 Nastavení simulace lineárního vzpěru v Ansysu

Po propojení obou analýz už jen stačilo k výpočtu řešení přidat Total Deformation a nechat Ansys vypočítat výsledky.



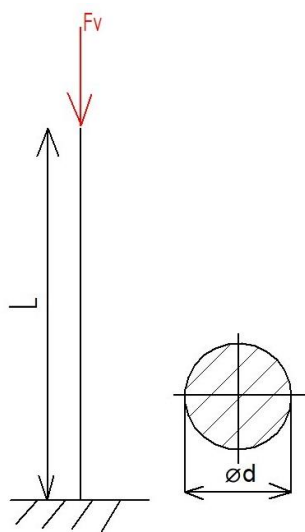
Obr. 2.7 Výsledek řešení prvního příkladu lineárního vzpěru pomocí Ansysu

Hodnota Load Multiplier určuje koeficient, kterým když je vynásobeno zadané počáteční zatížení, dostaneme kritickou sílu vzpěrné stability. Po vynásobení byla získána hodnota 45 kN. Dalo by se tedy říct, že tento koeficient určuje bezpečnost, jejíž hodnota je 1,5. Při srovnání s analytickým výpočtem jsou výsledky obou způsobů výpočtu shodné.

## 3.2 Druhý příklad – vetknutí

### 3.2.1 Analytické řešení

Druhý příklad je ukázkou dalšího klasického uložení. Jedná se o prut, který je dole vetknutý, a proto je hodnota součinitele  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Materiálem je opět konstrukční ocel 11 600, hodnoty meze kluzu a modulu pružnosti jsou tedy stejné,  $\sigma_k = 295 - 340$  MPa,  $E = 210$  GPa. Hodnoty pro tento příklad byly určeny takto, délka  $l = 900$  mm, průměr prutu  $d = 30$  mm a zatěžující síla  $F = 15$  kN.



Obr. 2.8 Druhý příklad pro analytický výpočet

Při výpočtu byl postup podobný jako u prvního příkladu. Jako první byly zjištěny hodnoty obsahu příčného průřezu a kvadratického momentu:

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi 30^2}{4} = 707 \text{ mm}^2 \quad (36)$$

$$J_2 = J_y = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi 30^4}{64} = 39761 \text{ mm}^4 \quad (37)$$

Tyto hodnoty pak byly dosazeny do vzorce pro výpočet štíhlosti prutu:

$$\lambda = \frac{l}{\sqrt{\frac{J_2}{S}}} = \frac{900}{\sqrt{\frac{39761}{707}}} = 120 \quad (38)$$

Dále byly ověřeny podmínky pro materiál v houževnatém stavu:

$$\lambda_k = \alpha \sqrt{\frac{E}{\sigma_k}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{210 \cdot 10^3}{295}} = 42 \quad (39)$$

Protože platí  $\lambda > \lambda_k$  i u tohoto příkladu může nastat mezní stav vzpěrné stability. Může se tedy pokračovat ve výpočtu kritické síly, pomocí vzorce odvozeného Eulerovou metodou:

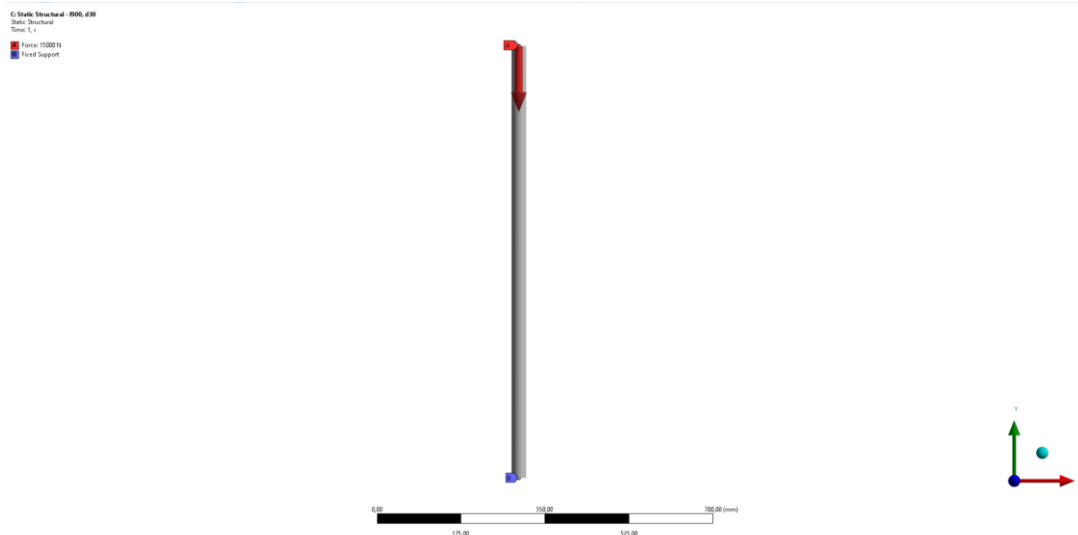
$$F_v = \alpha^2 \frac{E \cdot J_2}{l^2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{210 \cdot 10^3 \cdot 39761}{900^2} = 25 \text{ kN} \quad (40)$$

V posledním kroku je určena hodnota bezpečnosti:

$$k_v = \frac{F_v}{F} = \frac{25}{15} = 1,6 \quad (41)$$

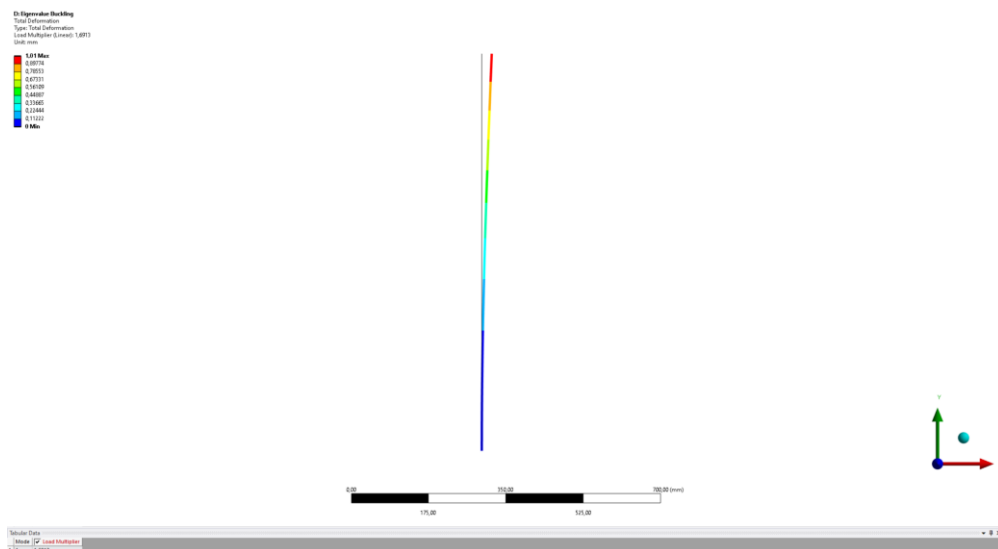
### 3.2.2 Numerické řešení

Postup řešení tohoto příkladu je podobný jako u předchozího příkladu řešeného numericky. Jako první byly nastaveny vlastnosti materiálu, byla vytvořena geometrie a vygenerována síť, konečný počet prvků je 550. Dále byla nastavena počáteční síla (A) o velikosti 15 kN, která působí na horní část prutu, v záporném směru osy y. Další okrajovou podmínkou u tohoto příkladu je vetknutí, to bylo nastaveno pomocí funkce Fixed Support (B).



Obr. 2.9 Okrajové podmínky pro druhý příklad numerického výpočtu

Po provázání s analýzou Eigenvalue Buckling a výpočtu Total Deformation byly ze simulace zjištěny tyto výsledky:



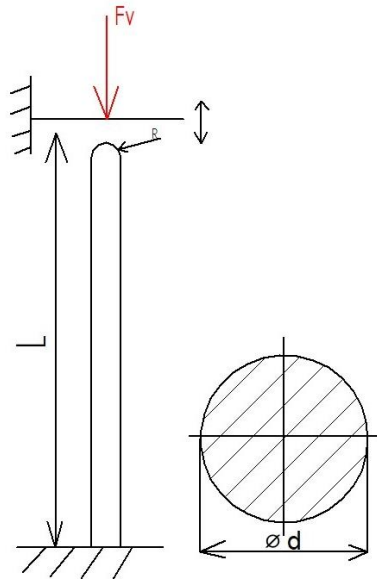
*Obr. 3.1 Výsledek řešení druhého příkladu lineárního vzpěru pomocí Ansysu*

Po vynásobení základního zatížení prutu koeficientem Load Multiplier je hodnota kritické síly 25kN, koeficient bezpečnosti je 1,6. Hodnota kritické síly i bezpečnosti je shodná s analytickým řešením tohoto příkladu.

## 4 NESTANDARDNÍ PŘÍPADY VZPĚRU

### 4.1 Třetí příklad – vetknutí a deska zatěžující prut

Tato část kapitoly pojednává o nestandardních případech vzpěru, které jsou řešeny nelineárně. Tento příklad je numericky řešen pro dvě varianty výpočtu, první varianta bez tření a druhá se třením. V tomto příkladě uvažujeme vetknutý prut, který je zakončen polokoulí. Na tento prut tlačí deska, která s ním není nijak spojena.



Obr. 3.2 Třetí příklad pro analytický výpočet

#### První varianta bez tření

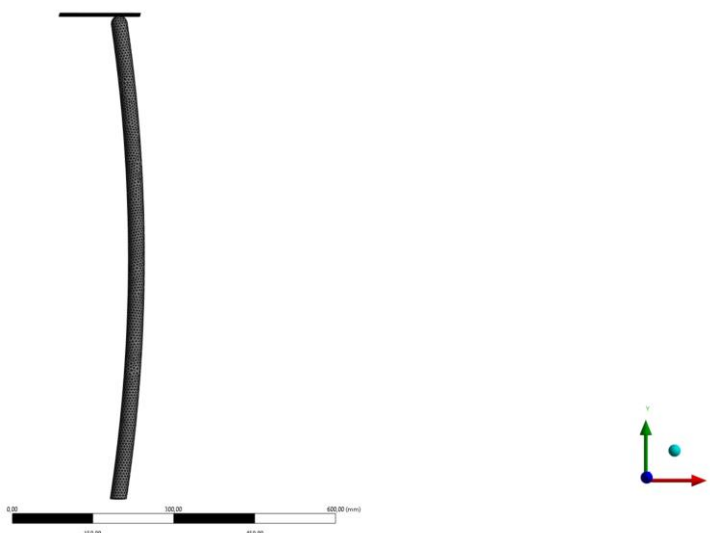
Při nastavování nelineárního výpočtu byl začátek postupu stejný jako u lineárních příkladů, bylo spuštěno prostředí Workbench, zvolena analýza Static Structural a v Engineering data byly nastaveny vlastnosti materiálu.

V tomto případě byla geometrie vytvořena v programu Inventor, uložena jako .stp a poté importována do Workbenche. Aby bylo zajištěno, že ke vzpěru skutečně dojde, byl prut vytvořen již s malou imperfekcí. Po sérii úprav geometrie, hlavně velikosti imperfekce, podle postupných výsledků simulace, je konečná geometrie následující: prut o délce  $l = 900$  mm, průměru  $d = 30$  mm a prohnutí s poloměrem  $R = 3000$  mm. Deska tlačící na prut byla po importu vytvořena ve SpaceClaimu a umístěna těsně nad volný konec prutu.



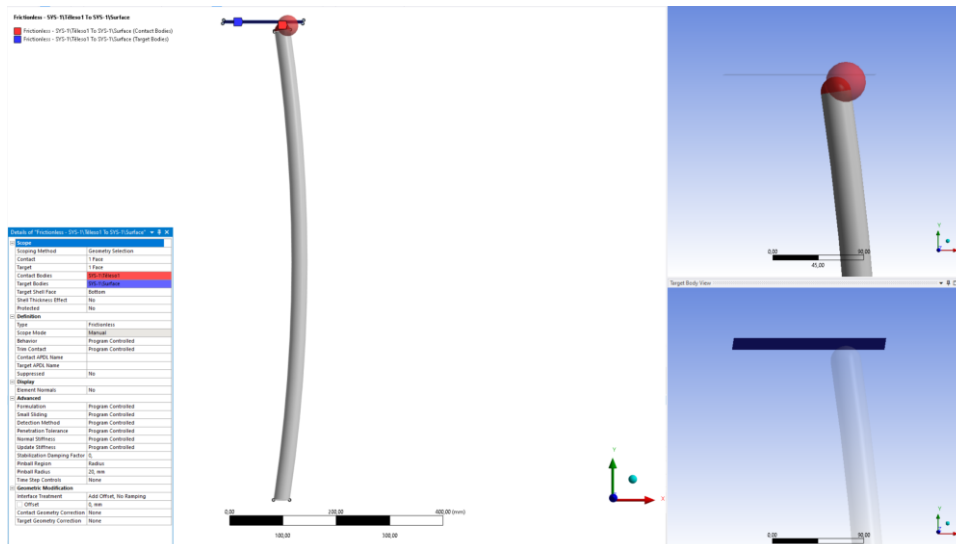
*Obr. 3.3 Konečná geometrie pro výpočet nelineárního vzpěru v SpaceClaimu*

Po vytvoření konečné geometrie bylo dalším krokem upravení již vygenerované sítě, na to byly použity funkce Sizing a Method, kdy konečný počet prvků je 23 442.



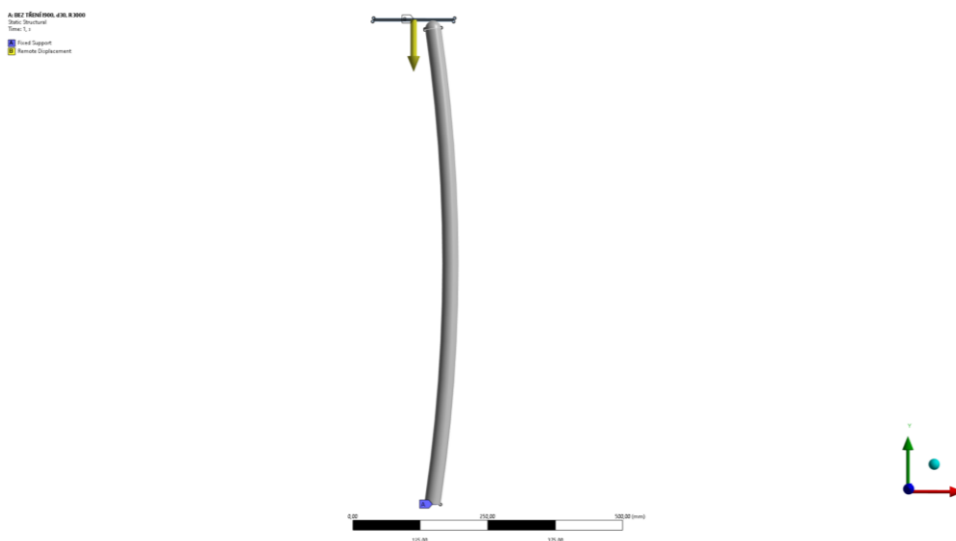
*Obr. 3.4 Nastavení sítě varianty bez tření*

V dalším kroku byly nastaveny kontaktní plochy mezi deskou a polokoulí, kterou je prut zakončený. Protože se jedná o první variantu numerického výpočtu, kontakt byl nastaven bez tření, a to v záložce Connections pomocí volby Frictionless, nastavení můžeme vidět na obr. 3.5.



Obr. 3.5 Nastavení kontaktních ploch bez tření

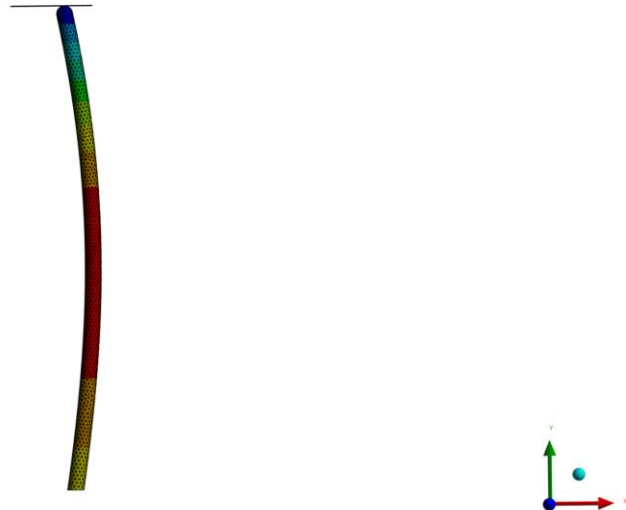
Poté byly nastaveny okrajové podmínky prutu a desky. Na prut byla použita funkce Fixed Support (A), která znázorňuje vetknutí. Pro nastavení desky byla použita funkce Remote Displacement (B), tato vazba umožňuje nastavit funkci Rigid, tedy chování desky jako tuhého tělesa, rotace ve všech směrech je nulová a posuv kromě směru  $y$  je také nulový.



Obr. 3.6 Nastavení okrajových podmínek

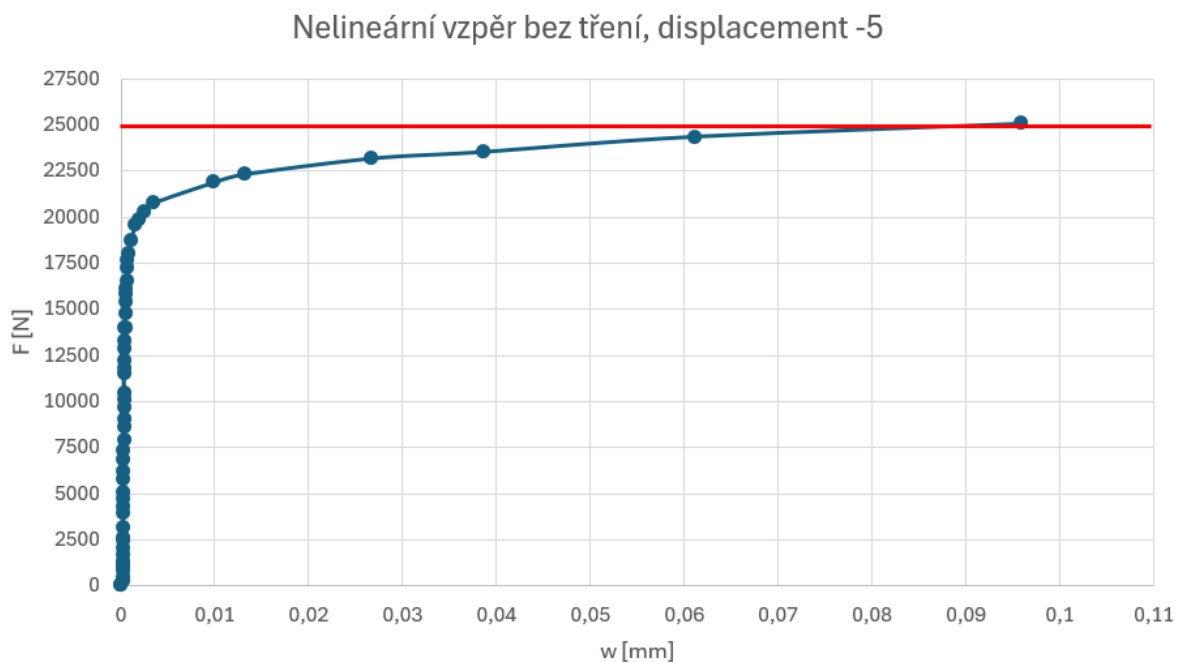
V záložce Solution byla vykreslena Directional Deformation pro směr v ose  $x$  a Force Reaction pro vazbu Fixed Support. V posledním kroku byl v záložce Analysis settings nastaven počet kroků za čas a Large Deflection byla změněna na On, kvůli nelinearitě příkladu. Po sérii úprav a pokusů simulace byl získán následující výsledek.

C:\Copy of BRZ 3\BRZ 3\000\_430\_0.0000  
 Directional Deformation  
 Type: Directional Deformation (X, Axis)  
 Unit: mm  
 Global Coordinate System  
 Time: 1 s



Obr. 3.7 Numerické řešení třetího příkladu nelineárního vzpěru bez tření

Z výsledků simulace byla zjištěna hodnota kritické síly o velikosti přibližně 25 kN. Tohoto výsledku bylo dosaženo pro nastavení stlačení deskou o 5 mm. Všechny hodnoty síly a průhybu jsou vykresleny v grafu pomocí Excelu, graf můžeme vidět na obr. 3.8, kdy červená křivka určuje hodnotu kritické síly.

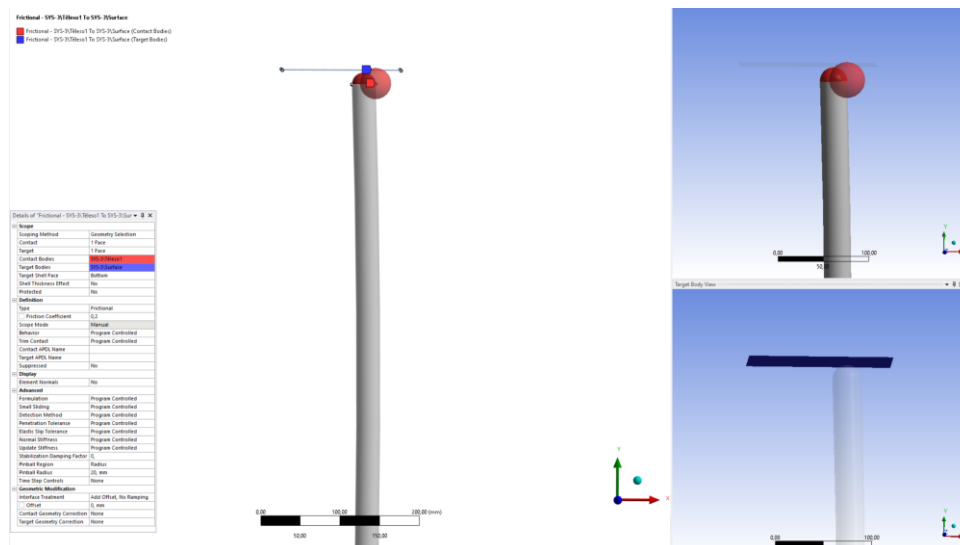


Obr.3.8 Graf nelineárního vzpěru bez tření

### Druhá varianta se třením

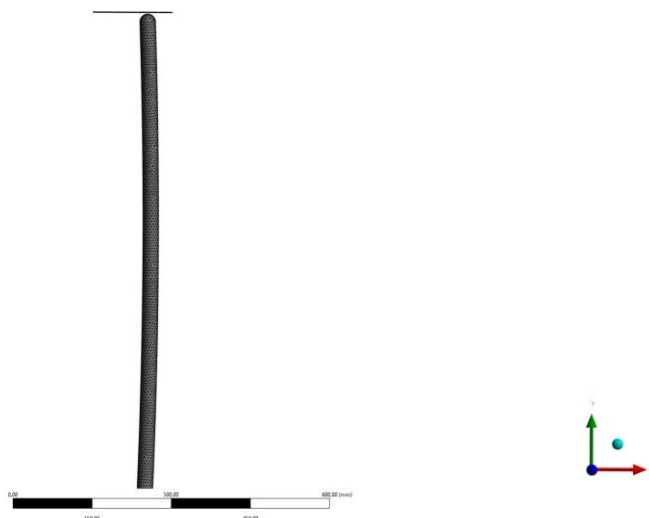
V této variantě příkladu se třením je rozdíl v geometrii. Nastavení počáteční imperfekce prutu je menší než u příkladu bez tření. Postupnými úpravami byly získány tyto hodnoty geometrie prutu, délka  $l = 900$  mm, průměr  $d = 30$  mm a prohnutí a poloměru  $R = 12000$  mm. Geometria byla vytvořena stejně jako v předchozím příkladu bez tření v Inventoru a poté byla importována do prostředí WorkBench.

Rozdíl v nastavení analýzy je v kontaktních plochách, kde byla funkce Frictionless nahrazena kontaktem se třením Frictional o velikosti součinitele smykového tření 0,2. Hodnota třecího součinitele pro třecí plochy ocel na ocel byla určena ze strojnických tabulek [8].



Obr. 3.9 Nastavení kontaktních ploch se třením 1

Vygenerovaná síť byla upravena pomocí funkcí Sizing a Method, kdy konečný počet prvků je 23 148. Okrajové podmínky prutu a desky byly nastaveny stejně jako u varianty bez tření, za použití funkcí Fixed Support a Remote Displacement.



Obr. 4.1 Nastavení sítě varianty se třením 1

Po provedení několika výpočtů a postupných úpravách okrajových podmínek, hlavně stlačování desky, byly získány následující výsledky pro velikost stlačení prutu 200 mm.

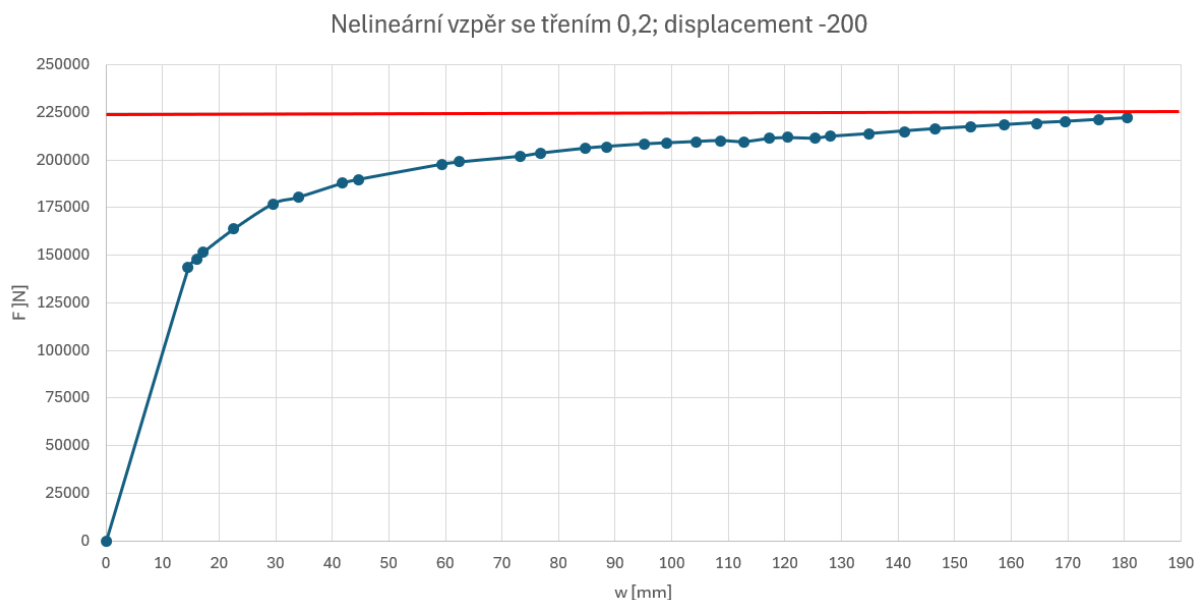
Jak můžeme vidět na obr. 4.2, i přes menší imperfekci, než je u předchozího příkladu bez tření, má tření na velikost kritické síly a průhybu velký vliv. Pro tento případ je hodnota kritické síly přibližně 225 kN.

D:\Static\Structural - R12000\_01.rvt  
 Directional Deformation  
 Type: Directional Deformation(Dir Axis)  
 Unit: mm  
 Global Coordinate System  
 Time: 0.516027  
 208.08 Max  
 195.96  
 175.34  
 142.51  
 117.59  
 95.585  
 40.881  
 42.817  
 16.333  
 0.0314 Min.



Obr. 4.2 Řešení nelineárního vzpěru se třením 1

Závislost síly a průhybu byla vykreslena do následujícího obr. 4.3, kde červená křivka opět značí hodnotu kritické síly.

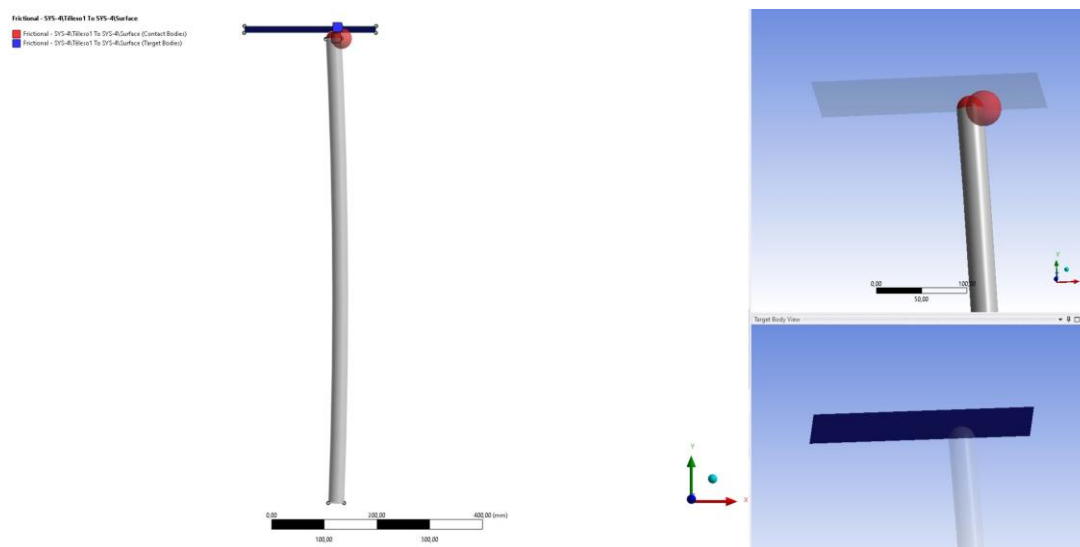


Obr. 4.3 Graf nelineárního vzpěru pro tření 1

Zatímco u těchto příkladů pro nelineární vzpěr geometrie připomíná „luk“, ta následující je trochu odlišná, horní část nekončí přesně nad spodní částí. Při simulaci výpočtu varianty bez tření bylo zjištěno, že ke vzpěru nedochází, když je prut deskou stlačován, postupně po desce klouže, až z desky sjede. Ani postupnou úpravou imperfekce nebyla nalezena taková geometrie, kdy by u varianty bez tření ke vzpěru skutečně došlo. Proto bude pro tento příklad uvedena pouze varianta se třením.

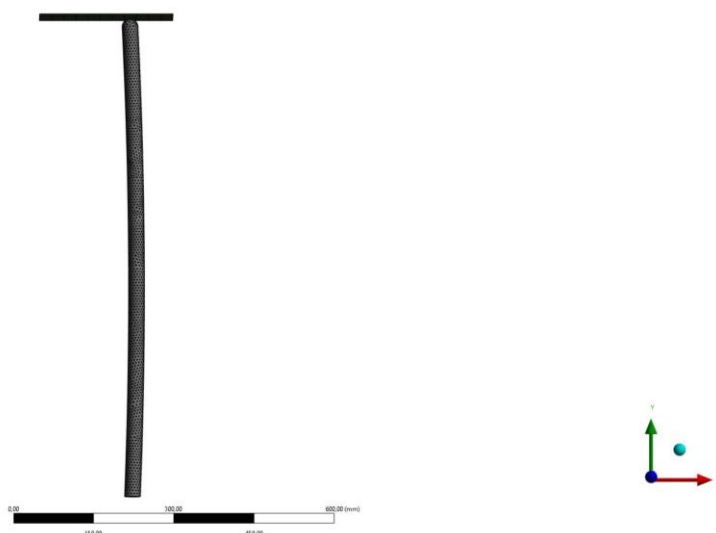
Veškerý postup vytvoření geometrie, nastavení okrajových podmínek a samotné analýzy, byl nastaven stejně jako v předchozím příkladu. Geometrie tohoto příkladu má tyto rozměry, délku  $l = 900$  mm, průměr  $d = 30$  mm a prohnutí s poloměrem  $R = 10\,000$  mm.

Kontaktní plochy se třením byly opět nastaveny v záložce Connections, pomocí funkce Frictional, velikost součinitele smykového tření je 0,2.



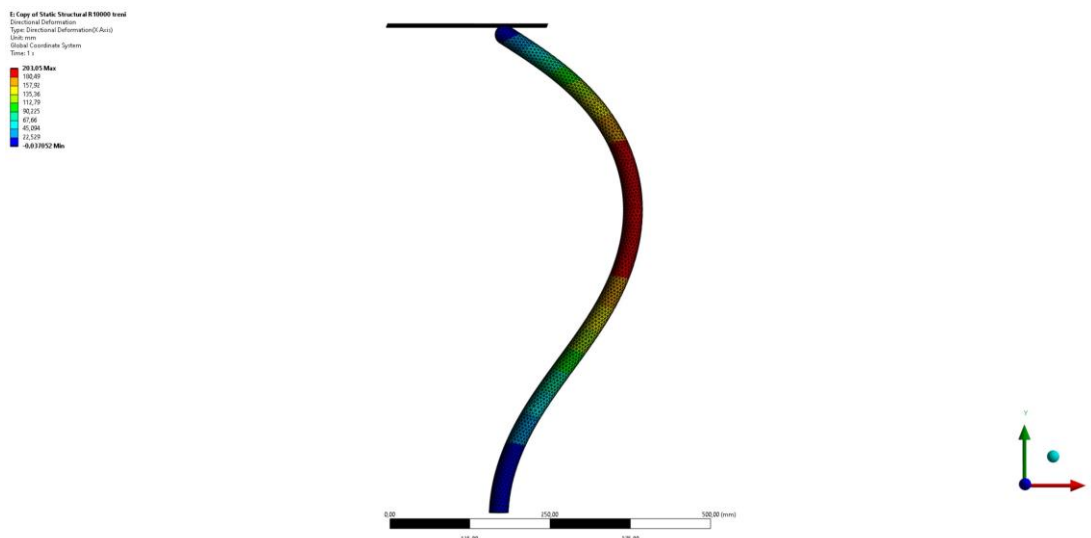
Obr. 4.4 Nastavení kontaktních ploch se třením 2

Síť byla po vygenerování opět upravena použitím funkcí Sizing a Method, konečný počet prvků je 22 914.



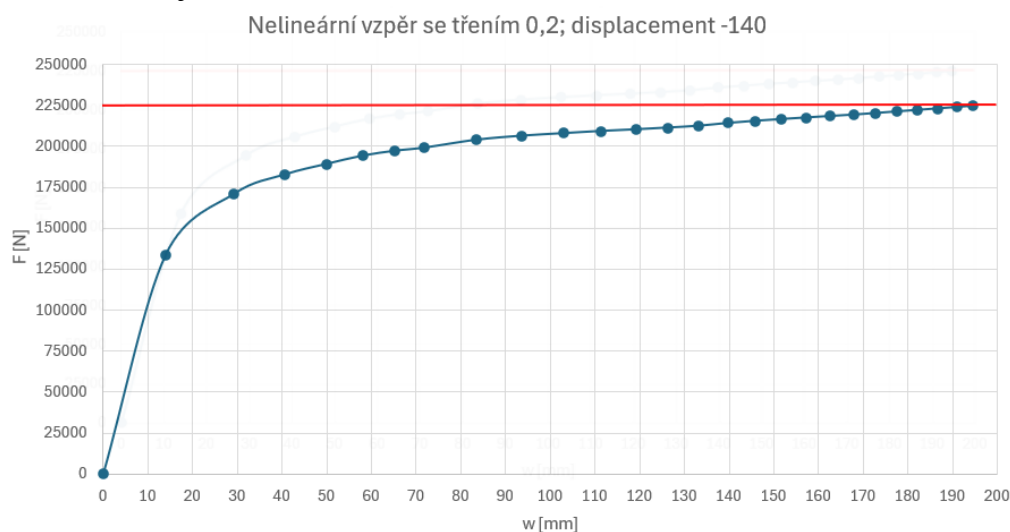
Obr. 4.5 Nastavení sítě pro variantu se třením 2

Konečný výsledek simulace pro tento příklad je pro stlačení prutu o 140 mm. Kdy kritická síla má velikost 225 kN.



Obr. 4.6 Řešení nelineárního vzpěru se třením 2

Výsledek tohoto příkladu je velmi podobný geometrii tvaru „luk“, i když v tomto případě došlo ke vzpěru již při menším stlačení desky. Závislost vypočtených hodnot síly a průhybu je zobrazena v následujícím obr. 4.7.

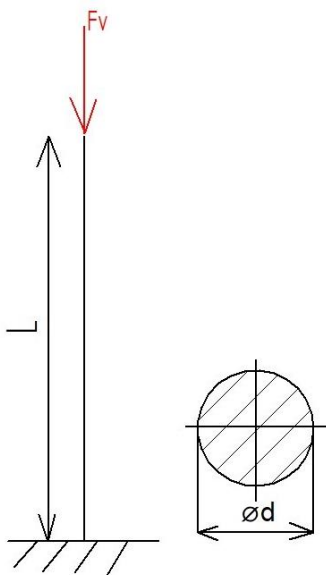


Obr. 4.7 Graf nelineárního vzpěru se třením 2

## 4.2 Čtvrtý příklad – Johnsonova metoda

Čtvrtý příklad znázorňuje analytický výpočet nepružného vzpěru pomocí Johnsonovy metody. Tato metoda je určena pro pruty střední délky z materiálu v houževnatém stavu. Výpočet bude proveden pouze analyticky, nikoliv i numericky, kde by řešení stále odpovídalo Eulerově metodě.

Materiál, z kterého je prut vyroben, stejně jako předchozí příklady, je konstrukční ocel 11 600, s hodnotami vlastností  $\sigma_k = 295 - 340$  MPa a  $E = 210$  GPa o rozměrech, délka  $l = 400$  mm a průměr prutu  $d = 20$  mm, počáteční zatížení má velikost  $F = 50$  kN.



Obr. 4.8 Čtvrtý příklad analytického výpočtu

Jako první byly vypočteny hodnoty obsahu  $S$  a kvadratického momentu  $J_2$ , které jsou stejné jako v rovnicích (30), (31):

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi 20^2}{4} = 314 \text{ mm}^2 \quad (42)$$

$$J_2 = J_y = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi 20^4}{64} = 7854 \text{ mm}^4 \quad (43)$$

Následoval výpočet štíhlosti prutu pomocí dosazení již spočtených hodnot:

$$\lambda = \frac{l}{\sqrt{\frac{J_2}{S}}} = \frac{400}{\sqrt{\frac{7854}{314}}} = 80 \quad (44)$$

Pro ověření, že se jedná o prut střední délky, je nutné ověřit mezní hodnotu štíhlosti, která se vypočítá pomocí tohoto vzorce:

$$\lambda_M = \pi\sqrt{2} \sqrt{\frac{E}{\sigma_k}} = 119 \quad (45)$$

Jelikož je splněno, že  $\lambda < \lambda_M$ , můžeme přejít k výpočtu kritické síly:

$$F_v = S \left[ \sigma_k - \frac{1}{E} \left( \frac{\sigma_k \lambda}{2\pi} \right)^2 \right] = 72 \text{ kN} \quad (46)$$

Hodnota bezpečnosti pro mezní stav vzpěrné stability má potom velikost:

$$k_v = \frac{F_v}{F} = \frac{72}{50} = 1,4 \quad (47)$$

## 5 ZÁVĚR

Podstatou bakalářské práce je vysvětlení a určení kritické síly pro mezní stav vzpěrné stability. V rešeršní části byl prvně vysvětlen mezní stav vzpěrné stability, dále kritická síla a popsány vlivy na určení její velikosti. Podrobněji byl popsán vliv reálného materiálu, uložení a délky prutu. Poté byla definována oblast pružného a nepružného vzpěru spolu s popisem jednotlivých metod pro řešení vzpěru.

Další část byla věnována analytickému výpočtu kritické síly pro vybrané příklady. Jednalo se o příklady se základním uložení. Na výpočty byla aplikována Eulerova metoda řešení, kdy bylo nejprve potřeba určit vliv materiálu a ověřit, že mezní stav vzpěrné stability opravdu nastane. Mezní stav vzpěrné stability nenastává, když je součinitel bezpečnosti vzhledem k meznímu stavu vzpěrné stability větší než jedna. Vypočtená hodnota kritické síly byla následně ověřena i numericky. Veškeré numerické výpočty byly provedeny v programu Ansys, který pracuje na principu MKP. Po simulaci lineárních příkladů a ověření již dříve analyticky vypočtených příkladů byly v obou případech získány stejné výsledky. Poslední, analyticky řešený příklad, se týká nepružného vzpěru řešeného pomocí Johnsovy metody.

Další numerické výpočty se týkaly nelineárního případu vzpěru. Příklad měl dvě varianty výpočtu. První, kdy nebylo uvažováno tření mezi kontaktními plochami a druhý kdy bylo uvažováno tření ploch ocel na ocel, o hodnotě součinitele smykového tření 0,2, který byl určen z tabulek. Při první variantě, bez tření, by ke vzpěru došlo již při velikosti kritické síly 25 kN, při stlačení prutu o 5 mm. Druhá varianta se třením určila hodnotu kritické síly 225 kN. Ke vzpěru došlo při stlačení prutu o 200 mm. V druhé variantě, se třením, byl zahrnutý ještě další příklad s rozdílnou geometrií. Výsledná velikost kritické síly byla 225 kN. Ovšem v tomto případě vzpěr nastal dříve, již při stlačení 140 mm. Po srovnání výsledků obou variant, bylo vidět, že tření má na velikosti kritické síly velký vliv.

## 6 SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] FISCHER, Jiří. *Posouzení rizika ztráty vzpěrné stability prutu s nepřesnostmi geometrie a zatížení*. Brno, 2018. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce Jiří Burša.
- [2] JANÍČEK., Prof. Ing. Přemysl, Prof. Ing. Emanuel ONDRÁČEK, CSC., Prof. RNDr. Ing. Jan VRBKA, DRSC., a Ing. Jiří BRURŠA, PH.D. *Mechanika těles: Pružnosti a pevnost I. 3*. AKADEMICKÉ NAKLADATELSTVÍ CERM, s.r.o. Brno, 2004. ISBN: 80-214-2592-X.
- [3] BOLEK, Robert. *Porovnání analytického a numerického řešení vzpěrné stability profilu z hliníkové slitiny*. Brno, 2022. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce Tomáš Návrat.
- [4] GERE, James M. a Barry J. GOODNO. *Mechanics of Materials*. 8th. Cengage Learning, 2013. ISBN: 978-1-111-57774-2.
- [5] HIBBELER, R.C. *Mechanics of Materials*. 8th. Pearson, 2011. ISBN: 978-0-13-602230-5.
- [6] SHIGLEY, Joseph E., Charles R. MISCHKE a Richard G. BUDYNAS. *Konstruování strojních součástí*. Vysoké učení technické v Brně, 2010. ISBN: 978-80-214-2629-0.
- [7] Gene E. Maddux, F. Joseph Giessler, Leon A. Vorst a Terence Moritz. *Air Force Flight Dynamics Laboratory, Stress analysis manual*. Technology Incorporated Dayton, Ohio, 1969. ISBN: TI-219-69-24.
- [8] LEINVEBER, Jiří a Pavel VÁVRA. *Strojnické tabulky*. 6. Albra, 2017. ISBN 978-80-7361-111-8.