



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

UMOCŇOVÁNÍ OBECNÝCH ALGEBRAICKÝCH SYSTÉMŮ

EXPONENTIATION OF GENERAL ALGEBRAIC SYSTEMS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

David Kamenský

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.

BRNO 2024

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky
Student: **David Kamenský**
Studijní program: Matematické inženýrství
Studijní obor: bez specializace
Vedoucí práce: **prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.**
Akademický rok: 2023/24

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Umocňování obecných algebraických systémů

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Úkol se skládá z těchto dvou částí:

1. Popsat chování binární operace umocňování n -árních monorelačních systémů s důrazem na dostatečné podmínky pro to, aby tato operace splňovala první exponenciální zákon.
2. Získané poznatky pak přenést (zúžit) na parciální algebry, hyperalgebry a algebry (s jednou operací) chápané jako speciální monorelační systémy.

Cíle bakalářské práce:

Popsat vlastnosti operace umocňování obecných algebraických systémů (relačních systémů, parciálních algeber, hyperalgeber a algeber), zejména prodiskutovat nutné podmínky pro platnost prvního exponenciálního zákona.

Seznam doporučené literatury:

KULIK, B.; FRIDMAN, A. N-ary relations for Logical Analysis of Data and Knowledge. IGI Global, Hershey, PA, 2017.

PROCHÁZKA, L. a kol. Algebra. Academia, Praha 1990.

ŠLAPAL, J. Diagonality and powers of general algebraic systems. East-West J. of Mathematics 6(2004), 1-14.

ŠLAPAL, J. Metody diskrétní matematiky. Akad. nakl. CERM, Brno, 2021.

ŠLAPAL, J. Základy obecné algebry. Akad. nakl. CERM, Brno, 2022.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2023/24

V Brně, dne

L. S.

doc. Mgr. Petr Vašík, Ph.D.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jiří Hlinka, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

V této bakalářské práci se zabýváme umocňováním obecných algebraických systémů a věnujeme zvláštní pozornost prvnímu exponenciálnímu zákonu. Konkrétně formulujeme dostačující podmínky pro jeho platnost pro relační systémy, parciální algebry, hyperalgebry a obecné algebry. Dále pak zkoumáme strukturu diagonálních a mediálových relačních systémů a ke studovaným pojmům uvádíme řadu demonstrativních příkladů.

Summary

In this bachelor thesis, we study the powers of general algebraic systems and pay special attention to the first exponential law. In particular, we formulate sufficient requirements for it to apply in relational systems, partial algebras, hyperalgebras and general algebras. We then investigate the structure of diagonal and medial relational systems and give several illustrative examples for the concepts studied.

Klíčová slova

Umocňování algebraických systémů, První exponenciální zákon, Relační systémy, Parciální algebry, Hyperalgebry, Obecné algebry, Diagonální systémy, Mediálové systémy

Keywords

Powers of algebraic systems, First exponential law, Relational systems, Partial algebras, Hyperalgebras, General algebras, Diagonal systems, Medial systems

KAMENSKÝ, D. *Umocňování obecných algebraických systémů*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2024. 21 s. Vedoucí práce prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc..

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Umocňování obecných algebraických systémů* vypracoval samostatně pod vedením prof. RNDr. Josefa Šlapala, CSc., s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

David Kamenský

Rád bych poděkoval vedoucímu mojí bakalářské práce prof. RNDr. Josefovi Šlapalovi, CSc. za jeho podporu při psaní bakalářské práce, za množství času, které se mnou věnoval jejímu vylepšování, za jeho odborné vedení a cenné rady, které výrazně přispěly k jejímu dokončení. Dále bych chtěl poděkovat Mgr. Veronice Jílkové z poradenského centra Alfons za korekturu mojí práce.

David Kamenský

Obsah

Úvod	2
1 Relační systémy	3
2 Parciální algebry	8
3 Hyperalgebry	11
4 Algebry	15
Závěr	20
Literatura	21

Úvod

V mojí bakalářské práci se budu zabývat umocňováním algebraických systémů se zaměřením na první exponenciální zákon. Podobné problematice se věnoval již G. Birkhoff, který se omezil na uspořádané množiny [1]. Pro libovolnou dvojici uspořádaných množin $\mathbf{G} = (G, \leq)$ a $\mathbf{H} = (H, \leq)$ definoval *přímou mocninu* $\mathbf{G}^{\mathbf{H}} = (F, \leq)$, kde F je množina všech izotonních zobrazení z H do G a pro všechna izotonní zobrazení $f, g \in F$ platí $f \leq g$ právě tehdy, když $f(y) \leq g(y)$ pro všechna $y \in H$. Takto definované umocňování splňuje první exponenciální zákon

$$(\mathbf{G}^{\mathbf{H}})^{\mathbf{K}} \cong \mathbf{G}^{\mathbf{H} \times \mathbf{K}},$$

kde symbol \cong značí izomorfismus.

Dále se této problematice věnoval V. Novák, který zobecnil Birkhoffovu definici na množiny s více relacemi obecně různých arit. Konkrétně pro relační systémy $\mathbf{G} = (G, \{C_i; i \in I\})$ a $\mathbf{H} = (H, \{D_i; i \in I\})$ téhož typu $(w_i)_{i \in I}$ definoval mocninu $\mathbf{G}^{\mathbf{H}} = (K, \{E_i; i \in I\})$, kde K je množina všech homomorfismů z H do G a pro všechna $i \in I$ a $f_1, \dots, f_{n_i} \in K$ platí $(f_1, \dots, f_{n_i}) \in E_i \iff (f_1(x), \dots, f_{n_i}(x)) \in C_i$ pro všechna $x \in G$. Pro takto definované umocňování zjistil, že první exponenciální zákon pro ně není obecně splněn [5], a našel jisté postačující podmínky pro to, aby byl zákon splněn.

Problematice umocňování relačních systémů se poté věnoval intenzivně J. Šlapal [9, 13], který dále zobecnil výsledky Nováka a společně s Novotným zavedli další druhy umocňování relačních systémů [6]. Šlapal se také zabýval umocňováním algeber, parciálních algeber a hyperalgeber [11, 12] a věnoval se problematice z pohledu teorie kategorií [10].

V této bakalářské práci shrnu některé důležité výsledky o umocňování algebraických systémů a podmínkách pro platnost prvního exponenciálního zákona. K těmto výsledkům posléze přidám vlastní výsledky ve tvaru několika tvrzení a demonstračních příkladů a vše opatřím důkazy.

1. Relační systémy

Nechť $n \in \mathbb{N}$, kde \mathbb{N} je množina všech přirozených (tj. nezáporných celých) čísel. Pak n -árním relačním systémem rozumíme dvojici $\mathbf{G} = (G, p)$, kde G je množina a $p \subseteq G^n$ je n -ární relace na G . Množina G se pak nazývá *nosná množina* relačního systému \mathbf{G} . V tomto textu budeme občas značit nosnou množinu relačního systému \mathbf{G} jako $|\mathbf{G}|$.

Pojmem *homomorfismus* z n -árního relačního systému $\mathbf{H} = (H, q)$ do n -árního relačního systému $\mathbf{G} = (G, p)$ rozumíme zobrazení $f : H \rightarrow G$ takové, že pro všechny n -tice $(y_1, \dots, y_n) \in H^n$ platí: $(y_1, \dots, y_n) \in q \Rightarrow (f(y_1), \dots, f(y_n)) \in p$. O daném homomorfismu $f : H \rightarrow G$ řekneme, že se jedná o *izomorfismus*, když je f zároveň bijekcí (tj. pro všechna $y \in G$ existuje $x \in H$ tak, že $f(x) = y$ a pro všechny dvojice $x_1, x_2 \in H$ platí $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$) a jeho inverzní zobrazení $f^{-1} : G \rightarrow H$ je také homomorfismus. Tedy izomorfismus je bijekce $f : H \rightarrow G$ taková, že pro libovolné prvky $y_1, \dots, y_n \in H$ platí $(y_1, \dots, y_n) \in q \iff (f(y_1), \dots, f(y_n)) \in p$. Existuje-li izomorfismus z n -árního relačního systému \mathbf{H} do n -árního relačního systému \mathbf{G} , pak řekneme, že \mathbf{H} a \mathbf{G} jsou *izomorfní*, a píšeme $\mathbf{H} \cong \mathbf{G}$. Dále budeme značit množinu všech homomorfismů z relačního systému \mathbf{H} do relačního systému \mathbf{G} jako $\text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G})$.

n -ární relace $p \subseteq G^n$ i n -ární relační systém (G, p) se nazývají *reflexivní*, jestliže pro všechna $x \in G$ platí $(x, \dots, x) \in p$. O n -árním relačním systému $\mathbf{G} = (G, p)$ řekneme, že je to *relační podsystém* n -árního relačního systému $\mathbf{H} = (H, q)$, jestliže $G \subseteq H$ a pro všechny prvky $x_1, \dots, x_n \in G$ platí $(x_1, \dots, x_n) \in p \iff (x_1, \dots, x_n) \in q$. Relační systém \mathbf{G} je pak jednoznačně určen svojí nosnou množinou G . Často tedy hovoříme o relačním podsystému G namísto o relačním podsystému \mathbf{G} .

Přímým součinem souboru n -árních relačních systémů $\mathbf{G}_i = (G_i, p_i)$, $i \in I$, rozumíme n -ární relační systém $\prod_{i \in I} \mathbf{G}_i = (\prod_{i \in I} G_i, q)$, kde pro všechna zobrazení $f_1, \dots, f_n \in \prod_{i \in I} G_i$ platí $(f_1, \dots, f_n) \in q$ právě tehdy, když pro všechna $i \in I$ platí $(f_1(i), \dots, f_n(i)) \in p_i$. Relační systém $\prod_{i \in I} \mathbf{G}_i$, kde $G_i = G$ pro všechna $i \in I$, budeme značit jako \mathbf{G}^I . Připomeňme, že kartézský součin $\prod_{i \in I} \mathbf{G}_i$ množin G_i , $i \in I$, je definován vztahem $\prod_{i \in I} \mathbf{G}_i = \{f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i; f(i) \in G_i \text{ pro každé } i \in I\}$. Pro konečný případ, tj. $I = 1, \dots, m$, si prvky množiny $\prod_{i \in I} G_i$ můžeme představit jako uspořádané m -tice. Pak lze relaci q chápat tak, že dané uspořádané m -tice jsou v relaci q právě tehdy, když jsou jejich i -té prvky v relaci p_i pro všechna $i \in \{1, \dots, m\}$. Pak můžeme namísto značení $\prod_{i \in I} \mathbf{G}_i$ použít $\mathbf{G}_1 \times \dots \times \mathbf{G}_m$.

Definice 1.1. Necht $\mathbf{G} = (G, p)$, $\mathbf{H} = (H, q)$ jsou n -ární relační systémy. Pak se n -ární relační systém $\mathbf{G}^{\mathbf{H}} = (\text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G}), r)$ nazývá *mocninou* \mathbf{G} a \mathbf{H} , jestliže pro libovolné homomorfismy $f_1, \dots, f_n \in \text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G})$ platí $(f_1, \dots, f_n) \in r$ právě tehdy, když je pro každé $y_1, \dots, y_n \in H$ splněna implikace $(y_1, \dots, y_n) \in q \Rightarrow (f_1(y_1), \dots, f_n(y_n)) \in p$.

Všimněme si, že tato definice je odlišná od definic přímých mocniny z [1, 5] zmíněných v úvodu. Takto definovaná mocnina je studována např. v [6] pod názvem *strukturální mocnina*.

Poznámka 1.2. Uvažujme relační systémy zmíněné v Definici 1.1. Nosná množina mocniny $\mathbf{G}^{\mathbf{H}}$ je pak $|\mathbf{G}^{\mathbf{H}}| = \text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G})$. Vezměme si nyní libovolné $f \in \text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G})$. Podle definice homomorfismu pro všechna $(y_1, \dots, y_n) \in q$ platí $(f(y_1), \dots, f(y_n)) \in p$, a tedy $(f, \dots, f) \in r$. Z toho plyne, že relace r je vždy reflexivní.

Definice 1.3. Necht $\mathbf{G} = (G, p)$, $\mathbf{H} = (H, q)$ jsou n -ární relační systémy. Pak řekneme, že mocnina $\mathbf{G}^{\mathbf{H}} = (\text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G}), r)$ má *bodovou strukturu*, jestliže pro libovolné homomorfismy $f_1, \dots, f_n \in \text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G})$ platí $(f_1, \dots, f_n) \in r$ právě tehdy, když pro každé $y \in H$ platí $(f_1(y), \dots, f_n(y)) \in p$.

Mocnina tedy má bodovou strukturu právě tehdy, když je shodná s přímou mocninou.

Mohlo by se zdát, že definice 1.3 je podobná definici přímého součinu \mathbf{G}^I z úvodního odstavce. Prvky relačního systému \mathbf{G}^H jsou totiž také zobrazeními $f : H \rightarrow G$. Pro lepší transparentnost uvažujme konečnou množinu $H = \{1, \dots, m\}$. Prvky \mathbf{G}^H se v tomto případě běžně reprezentují jako uspořádané m -tice. $f(i)$ pak odpovídá i -tému členu dané m -tice. Když si tedy vezmeme přímý součin $\mathbf{G}^H = (G^H, q)$ a mocninu s bodovou strukturou $\mathbf{G}^{\mathbf{H}} = (\text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G}), r)$, tak skutečně mají r a q stejné definice. Jediné, v čem se definice obou relačních systémů liší, je nosná množina. Pro \mathbf{G}^H jsou v nosné množině všechna zobrazení z H do G , kdežto u $\mathbf{G}^{\mathbf{H}}$ jsou v nosné množině pouze homomorfismy. Z této úvahy plyne následující poznámka.

Poznámka 1.4. Mocnina $\mathbf{G}^{\mathbf{H}}$ má bodovou strukturu právě tehdy, když se jedná o relační podsystem přímého součinu $\mathbf{G}^{|\mathbf{H}|}$.

Věta 1.5. Necht jsou $\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{K}$ n -ární relační systémy. Jestliže jsou \mathbf{H}, \mathbf{K} reflexivní, pak platí

$$(\mathbf{G}^{\mathbf{H}})^{\mathbf{K}} \cong \mathbf{G}^{\mathbf{H} \times \mathbf{K}},$$

a příslušný izomorfismus je dán kanonickým zobrazením $f : (G^H)^K \rightarrow G^{H \times K}$ definovaným následovně: $f(g)(y, z) = g(z)(y)$.

Důkaz. Necht $\mathbf{K} = (K, o)$, $\mathbf{G} = (G, p)$, $\mathbf{H} = (H, q)$, $\mathbf{G}^{\mathbf{H}} = (G^H, r)$, $(\mathbf{G}^{\mathbf{H}})^{\mathbf{K}} = ((G^H)^K, s)$, $\mathbf{H} \times \mathbf{K} = (H \times K, t)$, $\mathbf{G}^{\mathbf{H} \times \mathbf{K}} = (G^{H \times K}, u)$ a necht je $f : (G^H)^K \rightarrow G^{H \times K}$ kanonické zobrazení. Ukažme nejprve, že zobrazení f je dobře definované. Uvažujme libovolný homomorfismus $g \in \text{Hom}(\mathbf{K}, \mathbf{G}^{\mathbf{H}})$. Tedy pro libovolné prvky $z_1, \dots, z_n \in K$ platí $(z_1, \dots, z_n) \in o \Rightarrow (g(z_1), \dots, g(z_n)) \in r$. Podle Definice 1.1 je pravá strana implikace splněna právě tehdy, když je pro všechny prvky $y_1, \dots, y_n \in H$ splněna implikace $(y_1, \dots, y_n) \in q \Rightarrow (g(z_1)(y_1), \dots, g(z_n)(y_n)) \in p$. Celkově tedy musí být pro libovolné prvky $y_1, \dots, y_n \in H$ a všechny prvky $z_1, \dots, z_n \in K$ splněna implikace $(y_1, \dots, y_n) \in q \wedge (z_1, \dots, z_n) \in o \Rightarrow (g(z_1)(y_1), \dots, g(z_n)(y_n)) \in p$. Celá implikace je ekvivalentní tvrzení, že pro všechny dvojice $((y_1, z_1), \dots, (y_n, z_n)) \in H \times K$ je splněno $((y_1, z_1), \dots, (y_n, z_n)) \in t \Rightarrow (f(g)(y_1, z_1), \dots, f(g)(y_n, z_n)) \in p$, tedy $f(g) \in \text{Hom}(\mathbf{H} \times \mathbf{K}, \mathbf{G})$. Tímto jsme ukázali, že f je zobrazení $f : \text{Hom}(\mathbf{K}, \mathbf{G}^{\mathbf{H}}) \rightarrow \text{Hom}(\mathbf{H} \times \mathbf{K}, \mathbf{G})$.

Uvažujme zobrazení $f^{-1} : G^{H \times K} \rightarrow (G^H)^K$ dané vztahem $f^{-1}(h)(z)(y) = h(y, z)$. Pak pro všechna $g \in (G^H)^K$, $h \in G^{H \times K}$, $z \in K$ a $y \in H$ platí $f^{-1}(f(g))(z)(y) = f(g)(y, z) = g(z)(y)$, tj. $f^{-1}(f(g)) = g$, a také platí $f(f^{-1}(h))(y, z) = f^{-1}(h)(z)(y) = h(y, z)$, tj. $f(f^{-1}(h)) = h$. f je tedy bijekce.

Pro libovolnou n -tici $g_1, \dots, g_n \in (G^H)^K$ platí $(g_1, \dots, g_n) \in s$ právě tehdy, když pro všechna $(z_1, \dots, z_n) \in o$ platí $(g_1(z_1), \dots, g_n(z_n)) \in r$. Dále pak $(g_1(z_1), \dots, g_n(z_n)) \in r$ právě tehdy, když pro všechna $(y_1, \dots, y_n) \in q$ platí $(g_1(z_1)(y_1), \dots, g_n(z_n)(y_n)) \in p$. Dohromady pak dostáváme $(g_1, \dots, g_n) \in s$ právě tehdy, když pro všechna $(z_1, \dots, z_n) \in o$ a všechna $(y_1, \dots, y_n) \in q$ platí $(g_1(z_1)(y_1), \dots, g_n(z_n)(y_n)) \in p$. Když pro všechna $i = 1, \dots, n$ přepíšeme $g_i(z_i)(y_i)$ pomocí f na $f(g_i)(y_i, z_i)$, dostáváme $(g_1, \dots, g_n) \in s$ právě tehdy, když pro všechna $((y_1, z_1), \dots, (y_n, z_n)) \in t$ platí $(f(g_1)(y_1, z_1), \dots, f(g_n)(y_n, z_n)) \in p$. Odtud

dostáváme, že $(g_1, \dots, g_n) \in s$ právě tehdy, když $(f(g_1), \dots, f(g_n)) \in u$. Tedy f je izomorfismus. \square

Definice 1.6. n -ární relační systém (G, p) se nazývá *diagonální*, jestliže pro všechny matice (x_{ij}) typu n/n nad G platí implikace

$$\forall i = 1, \dots, n : (x_{i1}, \dots, x_{in}) \in p \wedge \forall j = 1, \dots, n : (x_{1j}, \dots, x_{nj}) \in p \Rightarrow (x_{11}, \dots, x_{nn}) \in p.$$

Vezměme si nyní případ $n = 2$ a porovnejme tranzitivitu s diagonalitou. Necht p je diagonální. Pak pro libovolné $a, b, c \in G$ můžeme sestrojít matici $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, pro kterou platí: jestliže $(a, b) \in p$ a $(b, c) \in p$, pak $(a, c) \in p$. Tedy p je diagonální $\Rightarrow p$ je tranzitivní. Naopak, necht je p tranzitivní. Vezměme si matici $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, kde $a, b, c, d \in G$ jsou libovolné. Pak platí $(a, b) \in p$, $(b, d) \in p \Rightarrow (a, d) \in p$ a také $(a, c) \in p$, $(c, d) \in p \Rightarrow (a, d) \in p$. Tedy p je tranzitivní $\Rightarrow p$ je diagonální. Z předchozího plyne následující poznámka.

Poznámka 1.7. Binární relační systém je diagonální právě tehdy, když je tranzitivní. Diagonalita je tedy zobecněním tranzitivity.

Věta 1.8. Necht \mathbf{G}, \mathbf{H} jsou n -ární relační systémy. Jestli je \mathbf{G} diagonální a \mathbf{H} je reflexivní, pak je mocnina $\mathbf{G}^{\mathbf{H}}$ diagonální a má bodovou strukturu.

Důkaz. Necht $\mathbf{G} = (G, p)$, $\mathbf{H} = (H, q)$ a $\mathbf{G}^{\mathbf{H}} = (\text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G}), r)$. Ukažme nejprve, že $\mathbf{G}^{\mathbf{H}}$ má bodovou strukturu. Zde stačí dokázat, že pro každou n -tici $(f_1, \dots, f_n) \in r$ je splněna tato ekvivalence: pro každé $y \in H$ platí $(f_1(y), \dots, f_n(y)) \in p$ právě tehdy, když pro každé $y_1, \dots, y_n \in H$ je platná implikace $(y_1, \dots, y_n) \in q \Rightarrow (f_1(y_1), \dots, f_n(y_n)) \in p$.

\Leftarrow : Necht pro každé $y_1, \dots, y_n \in H$ je splněna implikace $(y_1, \dots, y_n) \in q \Rightarrow (f_1(y_1), \dots, f_n(y_n)) \in p$. \mathbf{H} je reflexivní, tedy každé $y \in H$ splňuje $(y, \dots, y) \in q$. Pro libovolnou n -tici $(f_1, \dots, f_n) \in r$ tedy platí $(f_1(y), \dots, f_n(y)) \in p$.

\Rightarrow : Necht pro každé $y \in H$ platí $(f_1(y), \dots, f_n(y)) \in p$. Bud $(y_1, \dots, y_n) \in H^n$. Vezměme si matici (x_{ij}) typu n/n nad G takovou, že $x_{ij} = f_i(y_j)$, kde pro $i = 1, \dots, n$ platí $f_i \in \text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G})$. Dále předpokládejme, že pro všechna $y \in H$ platí $(f_1(y), \dots, f_n(y)) \in p$. Z definice homomorfismu dostáváme $(y_1, \dots, y_n) \in q \Rightarrow \forall i = 1, \dots, n : (f_i(y_1), \dots, f_i(y_n)) \in p$. Díky tomu, že \mathbf{G} je diagonální, dostáváme $(y_1, \dots, y_n) \in q \Rightarrow (f_1(y_1), \dots, f_n(y_n)) \in p$.

Nyní ukážeme, že $\mathbf{G}^{\mathbf{H}}$ je diagonální. Vezměme si libovolnou matici (f_{ij}) typu n/n nad $\text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G})$ takovou, že pro všechna $i = 1, \dots, n$ a $j = 1, \dots, n$ platí $(f_{i1}, \dots, f_{in}) \in r$ a $(f_{1j}, \dots, f_{nj}) \in r$. \mathbf{H} je reflexivní, proto pro všechna $y \in H$ platí $(f_{i1}(y), \dots, f_{in}(y)) \in p$ a $(f_{1j}(y), \dots, f_{nj}(y)) \in p$. Z toho, že \mathbf{G} je diagonální, pak pro všechna $y \in H$ plyne $(f_{11}(y), \dots, f_{nn}(y)) \in p$. Nakonec díky tomu, že $\mathbf{G}^{\mathbf{H}}$ má bodovou strukturu, dostáváme $(f_{11}, \dots, f_{nn}) \in r$. \square

Definice 1.9. n -ární relační systém $\mathbf{G} = (G, p)$ se nazývá *mediálový*, jestliže pro libovolnou matici (x_{ij}) typu n/n nad G takovou, že pro všechna $i = 1, \dots, n-1$ je $(x_{i1}, \dots, x_{in}) \in p$ a pro všechna $j = 1, \dots, n-1$ je $(x_{1j}, \dots, x_{nj}) \in p$, platí $(x_{1n}, \dots, x_{nn}) \in p \iff (x_{n1}, \dots, x_{nn}) \in p$.

Pojem mediálový byl zaveden a studován v [3] pro grupoidy. Tento pojem byl poté zobecněn na algebry, hyperalgebry a parciální algebry. Pro účely této práce je tedy příhodné pojem mediálový zobecnit na relační systémy.

Poznámka 1.10. V předchozí definici požadujeme, aby ekvivalence platila pro všechny matice. Musí tedy platit i pro matici transponovanou k dané matici, a tedy lze ekvivalenci u definice nahradit levou či pravou implikací.

Věta 1.11. *Nechť \mathbf{G}, \mathbf{H} jsou n -ární relační systémy. Nechť je \mathbf{G} mediálový a diagonální a nechť je \mathbf{H} reflexivní. Pak je mocnina $\mathbf{G}^{\mathbf{H}}$ mediálový n -ární relační podsystém přímého součinu $\mathbf{G}^{|\mathbf{H}|}$.*

Důkaz. Nechť $\mathbf{G}^{\mathbf{H}} = (\text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G}), r)$, $\mathbf{G}^{|\mathbf{H}|} = (G^H, o)$. Z Věty 1.8 a z Poznámky 1.4 plyne, že $\mathbf{G}^{\mathbf{H}}$ je relačním podsystémem $\mathbf{G}^{|\mathbf{H}|}$.

Dále dokážeme, že $\mathbf{G}^{\mathbf{H}}$ je mediálový. Nechť $\mathbf{G} = (G, p)$. Vezměme si matici (f_{ij}) typu n/n nad $\text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G})$ tak, že pro všechna $i = 1, \dots, n - 1$ je $(f_{i1}, \dots, f_{in}) \in r$ a pro všechna $j = 1, \dots, n - 1$ je $(f_{1j}, \dots, f_{nj}) \in r$. Když nyní do f_{ij} dosadíme libovolné $x \in H$, tak dostaneme matici $(f_{ij}(x))$ nad G , pro kterou platí: pro všechna $i = 1, \dots, n - 1$ je $(f_{i1}(x), \dots, f_{in}(x)) \in p$ a pro všechna $j = 1, \dots, n - 1$ je $(f_{1j}(x), \dots, f_{nj}(x)) \in p$. Díky tomu, že \mathbf{G} je mediálový, musí nutně pro všechna $x \in H$ platit $(f_{1n}(x), \dots, f_{nn}(x)) \in p \iff (f_{n1}(x), \dots, f_{nn}(x)) \in p$. Podle Věty 1.8 má $\mathbf{G}^{\mathbf{H}}$ bodovou strukturu, tedy $(f_{1n}, \dots, f_{nn}) \in r \iff (f_{n1}, \dots, f_{nn}) \in r$. \square

Definice 1.12. O n -árním relačním systému \mathbf{J} řekneme, že je *reflexivní jádro* n -árního relačního systému $\mathbf{G} = (p, G)$, jestliže \mathbf{J} je relační podsystém \mathbf{G} , který pro všechna $x \in G$ splňuje $x \in |\mathbf{J}| \iff (x, \dots, x) \in p$.

Vezměme si množiny H, G, J takové, že $J \subseteq G$. Pak existuje bijekce mezi množinami všech zobrazení $f : H \rightarrow J$ a množinou takových zobrazení $g : H \rightarrow G$, pro která platí $G(H) \subseteq J$. Tato bijekce je dána vztahem $f \mapsto g$, kde $g(x) = f(x)$ pro všechna $x \in H$. V dalším textu nebudeme mezi zobrazeními f a g rozlišovat.

Věta 1.13. *Nechť \mathbf{G}, \mathbf{H} jsou n -ární relační systémy. Jestliže je \mathbf{H} reflexivní, pak je reflexivní jádro \mathbf{J} relačního systému \mathbf{G} nejmenší (z hlediska množinové inkluze) relační podsystém relačního systému \mathbf{G} splňující $\mathbf{J}^{\mathbf{H}} = \mathbf{G}^{\mathbf{H}}$.*

Důkaz. Nechť $\mathbf{G} = (G, p)$, $\mathbf{H} = (H, q)$, $\mathbf{J} = (J, r)$, $\mathbf{G}^{\mathbf{H}} = (\text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G}), s)$ a $\mathbf{J}^{\mathbf{H}} = (\text{Hom}(\mathbf{J}, \mathbf{G}), t)$.

Dokažme nejprve, že je-li \mathbf{J} reflexivní jádro relačního systému \mathbf{G} , tak $\mathbf{J}^{\mathbf{H}} = \mathbf{G}^{\mathbf{H}}$. Vezměme si libovolný prvek f z $\text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{J})$ a libovolné prvky x_1, \dots, x_n z H . Vzhledem k tomu, že $J \subseteq G$, tak nutně pro všechna $i \in 1, \dots, n$ platí $f(x_i) \in J \Rightarrow f(x_i) \in G$ a díky tomu, že \mathbf{J} je relační podsystém \mathbf{G} , tak $(f(x_1), \dots, f(x_n)) \in p \iff (f(x_1), \dots, f(x_n)) \in r$, tedy $|\mathbf{J}^{\mathbf{H}}| \subseteq |\mathbf{G}^{\mathbf{H}}|$. Vezměme si libovolný prvek g z $\text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G})$. Zřejmě pak $g(x) \in G$. Dále díky tomu, že \mathbf{H} je reflexivní, tak $(x, \dots, x) \in q$. Díky tomu, že g je homomorfismus, dostaneme nutně $(g(x), \dots, g(x)) \in p$. A proto $g(x) \in J$ a díky tomu, že \mathbf{J} je relační podsystém \mathbf{G} , tak $(f(x_1), \dots, f(x_n)) \in r \iff (f(x_1), \dots, f(x_n)) \in p$, a tím pádem i $|\mathbf{G}^{\mathbf{H}}| \subseteq |\mathbf{J}^{\mathbf{H}}|$. Celkem tedy $|\mathbf{J}^{\mathbf{H}}| = |\mathbf{G}^{\mathbf{H}}|$. Nyní stačí dokázat, že $s = t$. Z definice $\mathbf{G}^{\mathbf{H}}$ musí pro libovolnou n -tici $(f_1, \dots, f_n) \in s$ platit, že každá n -tice $x_1, \dots, x_n \in H$ splňuje implikaci $(x_1, \dots, x_n) \in q \Rightarrow (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)) \in p$. Vzhledem k tomu, že pro všechna $i = 1, \dots, n$ platí $f_i(x_i) \in J$ a \mathbf{J} je relačním podsystémem relačního systému \mathbf{G} , tak $(f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)) \in p \iff (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)) \in r$. Implikace $(x_1, \dots, x_n) \in q \Rightarrow (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)) \in p$ je tedy splněna právě tehdy, když je splněna implikace $(x_1, \dots, x_n) \in q \Rightarrow (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)) \in r$. Díky tomu z definice platí pro n -tici f_1, \dots, f_n ekvivalence $f_1, \dots, f_n \in s \iff f_1, \dots, f_n \in t$ a tedy $s = t$.

Dokažme nyní, že reflexivní jádro \mathbf{J} je nejmenší n -ární relační systém splňující danou rovnost. Vezměme si n -ární relační systém $\mathbf{I} = (I, u)$, který splňuje $\mathbf{I}^{\mathbf{H}} = \mathbf{G}^{\mathbf{H}}$ a také $I \subseteq J$. Pro každé $y \in J$ existuje takové zobrazení $f_y \in G^H$, že pro všechna $x \in H$ platí $f_y(x) = y$. Díky tomu, že je \mathbf{J} reflexivní a $\mathbf{J}^{\mathbf{H}} = \mathbf{G}^{\mathbf{H}}$, je f_y homomorfismus, tedy $f_y \in |\mathbf{G}^{\mathbf{H}}|$. Protože $|\mathbf{I}^{\mathbf{H}}| = |\mathbf{G}^{\mathbf{H}}|$, musí platit $f_y \in |\mathbf{I}^{\mathbf{H}}|$. Pro každé $y \in J$ tedy musí platit $y \in I$ a tedy $J \subseteq I$. Společně s úvodním předpokladem $I \subseteq J$, musí platit $I = J$. \square

Tato věta je velice užitečná mimo jiné z toho důvodu, že velká část tvrzení o mocnině $\mathbf{G}^{\mathbf{H}}$ v této práci předpokládá, že \mathbf{H} je reflexivní. Díky tomu můžeme snadněji popsat strukturu této mocniny, neboť namísto relačního systému \mathbf{G} stačí uvažovat jeho reflexivní jádro.

2. Parciální algebry

Pod pojmem *n-ární parciální algebra* se běžně chápe dvojice (G, p) , kde G je množina a p je zobrazení $p : U \rightarrow G$, kde $U \subseteq G^n$ [2]. Velmi známým příkladem parciální algebry je binární parciální algebra $(\mathbb{N}, -)$, kde $U = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \geq b\}$.

Alternativně lze však chápat *n-ární parciální algebra* jako $(n+1)$ -ární relační systém $\mathbf{G} = (G, p)$, pro který platí: $(x_1, \dots, x_n, y) \in p \wedge (x_1, \dots, x_n, z) \in p \Rightarrow y = z$. Tento popis je pro naše účely vhodnější, protože při něm můžeme využít věty z 1. kapitoly. Pro dodržení pojmů běžně používaných v teorii parciálních algeber budeme $(n+1)$ -ární relaci p nazývat *n-ární parciální operace*, namísto $(x_1, \dots, x_n, y) \in p$ budeme psát $p(x_1, \dots, x_n) = y$ a budeme používat pojem *idempotentní* namísto reflexivní.

Nechť jsou $\mathbf{G} = (G, p)$, $\mathbf{H} = (H, q)$ *n-ární parciální algebry*. Zobrazení $f : H \rightarrow G$ je pak homomorfismem, jestliže pro všechny $x_1, \dots, x_n, x \in H$ platí $q(x_1, \dots, x_n) = x \Rightarrow p(f(x_1), \dots, f(x_n)) = f(x)$. \mathbf{G} je *parciální podalgebrou* \mathbf{H} , jestliže je jejím relačním podsystémem a pro všechna $x_1, \dots, x_n \in G$ a $y \in H$ platí $q(x_1, \dots, x_n) = y \Rightarrow y \in G$.

Z Definice 1.6 přímo plyne, že *n-ární parciální algebra* (G, p) je *diagonální*, jestliže pro všechny matice (x_{ij}) typu n/n nad G platí implikace: $p(p(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, p(x_{n1}, \dots, x_{nn})) = x \wedge p(p(x_{11}, \dots, x_{n1}), \dots, p(x_{1n}, \dots, x_{nn})) = x \Rightarrow p(x_{11}, \dots, x_{nn}) = x$.

Z Definice 1.9 a Poznámky 1.10 přímo plyne, že *n-ární parciální algebra* (G, p) je *mediálová*, jestliže pro všechny matice (x_{ij}) typu n/n nad G a prvky $x_1, \dots, x_n \in G$ platí následující implikace: $p(p(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, p(x_{n1}, \dots, x_{nn})) = x \wedge \forall j = 1, \dots, n : p(x_{1j}, \dots, x_{nj}) = x_j \Rightarrow p(x_1, \dots, x_n) = x$.

Příklad 2.1. 1) Uvažujme binární relaci r na množině přirozených čísel bez jedničky $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ takovou, že pro všechna $x, y \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ je $r(x, y)$ největší společný dělitel x, y větší než 1 (pro $\text{NSD}(x, y) = 1$ není $r(x, y)$ definované). Relační systém $\mathbf{N}_{\text{NSD}} = (\mathbb{N} \setminus \{1\}, r)$ je pak binární idempotentní parciální algebra.

2) Uvažujme binární relaci s na množině přirozených čísel bez jedničky $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ takovou, že pro všechna $x, y \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ je $s(x, y)$ nejmenší společný dělitel x, y větší než 1 (jestli takový dělitel neexistuje, tak $s(x, y)$ není definované). Relační systém $\mathbf{N}_{\text{min}} = (\mathbb{N} \setminus \{1\}, s)$ je pak binární parciální algebra.

3) Na množině reálných čísel \mathbb{R} uvažujme parciální operaci \max , která dvojici čísel $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ přiřadí to první, pokud se jedná o maximum, tj. $\max(x, y) = x \iff \max\{x, y\} = x$. Relační systém $\mathbf{R} = (\mathbb{R}, \max)$ je pak binární idempotentní parciální algebra.

Věta 2.2. *Nechť jsou \mathbf{G}, \mathbf{H} n-ární parciální algebry. Jestliže je \mathbf{H} idempotentní, pak je mocnina $\mathbf{G}^{\mathbf{H}}$ idempotentní n-ární parciální algebra.*

Důkaz. Nechť $\mathbf{G} = (G, p)$, $\mathbf{G}^{\mathbf{H}} = (\text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G}), r)$, $(f_1, \dots, f_n, f) \in r$, $(f_1, \dots, f_n, f') \in r$. \mathbf{H} je idempotentní, proto musí pro všechna $y \in H$ platit $p(f_1(y), \dots, f_n(y)) = f(y)$ a $p(f_1(y), \dots, f_n(y)) = f'(y)$. Tedy z definice parciální algebry nutně pro všechny $y \in H$ platí $f(y) = f'(y)$ neboli $f = f'$. $\mathbf{G}^{\mathbf{H}}$ je idempotentní podle Poznámky 1.2 \square

Když bychom v předchozí větě nahradili parciální algebra \mathbf{G} jejím idempotentním (tj. reflexivním) jádrem \mathbf{J} , tak by se podle Věty 1.13 mocnina $\mathbf{G}^{\mathbf{H}}$ nezměnila. Díky tomu na prozkoumání vlastností mocniny $\mathbf{G}^{\mathbf{H}}$, kde \mathbf{H} je idempotentní, stačí uvažovat idempotentní jádro parciální algebry \mathbf{G} . Uvažujme nyní parciální algebry z Příkladu 2.1.

Příklad 2.3. Reflexivní jádro parciální algebry \mathbf{N}_{\min} z Příkladu 2.1 je $\mathbf{P} = (\mathbb{P}, i)$, kde \mathbb{P} je množina všech prvočísel a $\forall a, b, c \in \mathbb{P} : i(a, b) = c \iff a = b = c$. $\text{Hom}(\mathbf{N}_{\text{NSD}}, \mathbf{N}_{\min}) = \text{Hom}(\mathbf{N}_{\text{NSD}}, \mathbf{P})$ pak bude obsahovat nekonečně mnoho zobrazení f_p definovaných následovně: $\forall x \in |\mathbf{N}_{\text{NSD}}| : f_p(x) = p$, kde $p \in \mathbb{P}$. Ukažme, že v $\text{Hom}(\mathbf{N}_{\text{NSD}}, \mathbf{P})$ nebudou žádná jiná zobrazení. Předpokládejme, že existují $f \in \text{Hom}(\mathbf{N}_{\text{NSD}}, \mathbf{P})$ a $x, y \in |\mathbf{N}_{\text{NSD}}|$ taková, že $f(x) \neq f(y)$. Pro $x \cdot y$ pak platí, že $\text{NSD}(x \cdot y, x) = x$ a $\text{NSD}(x \cdot y, y) = y$, a tedy $r(x \cdot y, x) = x$ a $r(x \cdot y, y) = y$. K tomu, aby bylo f homomorfismus, tak by muselo platit $i(f(x \cdot y), f(x)) = f(x)$ a $i(f(x \cdot y), f(y)) = f(y)$, tj. $f(x) = f(x \cdot y) = f(y)$. Dostáváme spor, a tedy žádná další zobrazení nepatří do $\text{Hom}(\mathbf{N}_{\text{NSD}}, \mathbf{P}) = \text{Hom}(\mathbf{N}_{\text{NSD}}, \mathbf{N}_{\min})$. Máme tedy mocninu $\mathbf{N}_{\min}^{\mathbf{N}_{\text{NSD}}} = (\text{Hom}(\mathbf{N}_{\text{NSD}}, \mathbf{N}_{\min}), j)$, kde parciální operace j je definována pro všechna $f, g, h \in \text{Hom}(\mathbf{N}_{\text{NSD}}, \mathbf{N}_{\min})$ následovně: $j(f, g) = h \iff f = g = h$.

Mocnina $\mathbf{N}_{\min}^{\mathbf{N}_{\min}} = (\text{Hom}(\mathbf{N}_{\min}, \mathbf{N}_{\min}), m)$ není parciální algebrou. Můžeme totiž vzít např. homomorfismus f_2 , kde pro všechna $x \in |\mathbf{N}_{\min}|$ platí $f_2(x) = 2$ a homomorfismus f'_2 , kde pro všechna prvočísla $p \in \mathbb{P}$ platí $f'_2(p) = 2$ a pro všechna složená čísla $y \in |\mathbf{N}_{\min}| \setminus \mathbb{P}$ platí $f'_2(y) = 2 \cdot y$. Pro všechna $a, b, c \in |\mathbf{N}_{\min}|$ pak platí $s(a, b) = c \Rightarrow s(f_2(a), f_2(b)) = f_2(c)$, neboť $s(2, 2) = 2$. Zároveň pro všechna $a, b, c \in |\mathbf{N}_{\min}|$ platí $s(a, b) = c \Rightarrow s(f_2(a), f_2(b)) = f'_2(c)$, protože $s(a, b) = c \Rightarrow c \in \mathbb{P}$, tedy $(f_2, f_2, f_2) \in m$ i $(f_2, f_2, f'_2) \in m$.

Věta 2.4. *Nechť jsou $\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{K}$ n -ární parciální algebry. Jestliže jsou \mathbf{H}, \mathbf{K} idempotentní, pak jsou $(\mathbf{G}^{\mathbf{H}})^{\mathbf{K}}$ a $\mathbf{G}^{\mathbf{H} \times \mathbf{K}}$ n -ární parciální algebry a platí*

$$(\mathbf{G}^{\mathbf{H}})^{\mathbf{K}} \cong \mathbf{G}^{\mathbf{H} \times \mathbf{K}}$$

Důkaz. Díky tomu, že jsou \mathbf{H}, \mathbf{K} idempotentní parciální algebry, tak $\mathbf{H} \times \mathbf{K}$ je také idempotentní parciální algebra. Dále podle Věty 2.2 jsou $(\mathbf{G}^{\mathbf{H}})^{\mathbf{K}}$ a $\mathbf{G}^{\mathbf{H} \times \mathbf{K}}$ parciální algebry. Podle Věty 1.5 pak existuje izomorfismus mezi $(\mathbf{G}^{\mathbf{H}})^{\mathbf{K}}$ a $\mathbf{G}^{\mathbf{H} \times \mathbf{K}}$. \square

Příklad 2.5. Parciální algebra $\mathbf{R} = (\mathbb{R}, \max)$ z Příkladu 2.1 je diagonální, protože pro to, aby byla splněna podmínka implikace, musí pro matici $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nad \mathbb{R} platit $a \geq b$, $c \geq d$, $a \geq c$, $b \geq d$, tedy a je maximálním prvkem této matice. Pak $\max(\max(a, b), \max(c, d)) = \max(\max(a, c), \max(b, d)) = \max(a, d) = a$. Naopak $\mathbf{N}_{\text{NSD}} = (\mathbb{N} \setminus \{1\}, r)$ ani $\mathbf{N}_{\min} = (\mathbb{N} \setminus \{1\}, s)$ nejsou diagonální. Například pro matici $\begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ platí v případě \mathbf{N}_{NSD} , že $r(r(12, 3), r(3, 6)) = 3$ a $r(r(12, 3), r(3, 6)) = 3$, ale $r(12, 6) = 6$. V případě \mathbf{N}_{\min} pak platí $s(s(12, 3), s(3, 6)) = 3$ a $s(s(12, 3), s(3, 6)) = 3$, ale $s(12, 6) = 2$.

Z Věty 1.8 přímo plyne:

Věta 2.6. *Nechť \mathbf{G}, \mathbf{H} jsou n -ární parciální algebry. Jestli je \mathbf{G} diagonální a \mathbf{H} je idempotentní, pak je mocnina $\mathbf{G}^{\mathbf{H}}$ diagonální a má bodovou strukturu.*

Příklad 2.7. Parciální algebra $\mathbf{R} = (\mathbb{R}, \max)$ z Příkladu 2.1 je mediálová ze stejného důvodu, proč je diagonální. Parciální algebra $\mathbf{N}_{\text{NSD}} = (\mathbb{N} \setminus \{1\}, r)$ je mediálová, protože pro libovolnou matici $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ platí $\text{NSD}(\text{NSD}(a, b), \text{NSD}(c, d)) = \text{NSD}(a, b, c, d) = \text{NSD}(\text{NSD}(a, c), \text{NSD}(b, d))$, a tedy pokud jsou všechny operace definovány, tj. pokud $\text{NSD}(a, b, c, d) > 1$, tak $r(r(a, b), r(c, d)) = r(r(a, c), r(b, d))$. Naopak $\mathbf{N}_{\min} = (\mathbb{N} \setminus \{1\}, s)$ není mediálová. Například pro matici $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ platí $s(s(6, 3), s(6, 3)) = s(3, 3) = 3$, zatímco $s(6, 6) = 2$, $s(3, 3) = 3$ ale neplatí $s(2, 3) = 3$ ($s(2, 3)$ není definované).

Věta 2.8. *Nechť \mathbf{G}, \mathbf{H} jsou n -ární parciální algebry a necht' je \mathbf{G} mediálová. Pak existuje parciální podalgebra \mathbf{K} přímého součinu $\mathbf{G}^{|\mathbf{H}|}$, jejíž nosná množina je $\text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G})$.*

Důkaz. Necht' $\mathbf{G} = (G, p)$, $\mathbf{H} = (H, q)$, $\mathbf{G}^{|\mathbf{H}|} = (G^H, r)$. Vezměme si takovou n -tici $(f_1, \dots, f_n) \in (\text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G}))^n$, že $r(f_1, \dots, f_n) = f$, a n -tici $(y_1, \dots, y_n) \in H^n$ takovou, že $q(y_1, \dots, y_n) = y$. Nyní vytvoříme matici (x_{ij}) typu n/n nad G tak, že pro všechna $i = 1, \dots, n$ a $j = 1, \dots, n$ platí $x_{ij} = f_i(y_j)$. Pro všechna $i = 1, \dots, n$ je $f_i \in \text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G})$, tedy $p(f_i(y_1), \dots, f_i(y_n)) = f_i(q(y_1, \dots, y_n)) = f_i(y)$. Dále z definice $\mathbf{G}^{|\mathbf{H}|}$ přímo plyne pro všechna $j = 1, \dots, n$, že $p(f_1(y_j), \dots, f_n(y_j)) = r(f_1, \dots, f_n)(y_j) = f(y_j)$ a také $p(f_1(y), \dots, f_n(y)) = f(y)$. \mathbf{G} je mediálová a tedy také $p(f(y_1), \dots, f(y_n)) = f(y)$. Tento výsledek lze přepsat jako $p(f(y_1), \dots, f(y_n)) = f(q(y_1, \dots, y_n))$. Tedy f je homomorfismus a díky tomu je $\text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G})$ uzavřená vzhledem k parciální operaci r . \square

Věta 2.9. *Nechť \mathbf{G}, \mathbf{H} jsou n -ární parciální algebry. Necht' je \mathbf{G} mediálová a diagonální a necht' je \mathbf{H} idempotentní. Pak je mocnina $\mathbf{G}^{\mathbf{H}}$ mediálová n -ární parciální podalgebra přímého součinu $\mathbf{G}^{|\mathbf{H}|}$.*

Důkaz. Necht' $\mathbf{G}^{\mathbf{H}} = (\text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G}), r)$, $\mathbf{G}^{|\mathbf{H}|} = (G^H, o)$. Podle Věty 2.6 a Poznámky 1.4 je $\mathbf{G}^{\mathbf{H}}$ relačním podsystémem $\mathbf{G}^{|\mathbf{H}|}$. Díky Větě 2.8 je dále zaručeno, že pro všechna $f_1, \dots, f_n \in \text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G})$ a $f \in G^H$ takové, že $o(f_1, \dots, f_n) = f$, platí $f \in \text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G})$. Podle Věty 1.11 je $\mathbf{G}^{\mathbf{H}}$ také mediálová. \square

3. Hyperalgebry

Pod pojmem n -ární hyperalgebra se běžně chápe dvojice (G, p) , kde G je množina a p je n -ární hyperoperace na G , tj. zobrazení $p : G^n \rightarrow \mathcal{P}(G) \setminus \emptyset$, kde $\mathcal{P}(G)$ je potenční množina množiny G [12]. Například řešení kvadratické rovnice nad \mathbb{C} by se dalo považovat za ternární hyperoperaci nad \mathbb{C} , která každé trojici koeficientů $a, b, c \in \mathbb{C}$ přiřazuje všechna řešení rovnice $ax^2 + bx + c = 0$.

Podobně, jak tomu bylo u parciálních algeber, je výhodné n -ární hyperalgebru chápat jako $(n + 1)$ -ární relační systém $\mathbf{G} = (G, p)$, a to takový, že pro všechna $x_1, \dots, x_n \in G$ existuje $y \in G$ tak, že $(x_1, \dots, x_n, y) \in p$. $(n + 1)$ -ární relaci p budeme nazývat n -ární hyperoperace a budeme používat pojem *idempotentní* namísto reflexivní. Na rozdíl od parciálních algeber má však značení $p(x_1, \dots, x_n)$ jiný význam. Pro n -ární hyperalgebru $\mathbf{G} = (G, p)$ pro všechna $x_1, \dots, x_n \in G$ klademe $p(x_1, \dots, x_n) = \{y \in G; (x_1, \dots, x_n, y) \in p\}$. Namísto $(x_1, \dots, x_n, y) \in p$ budeme proto psát $y \in p(x_1, \dots, x_n)$. \mathbf{G} je *podhyperalgebrou* \mathbf{H} , jestliže je jejím relačním podsystémem a pro všechna $x_1, \dots, x_n \in G$ a $y \in H$ platí $y \in q(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow y \in G$. Pokud je některá z množin $A_i, i \in \{1, \dots, n\}$ jednoprvková, řekněme $A_i = \{x_i\}$, tak v zápisu $p(A_1, \dots, A_n)$ píšeme x_i (nikoliv $\{x_i\}$ namísto A_i).

Z Definice 1.6 plyne, že n -ární hyperalgebra (G, p) je *diagonální*, jestliže pro všechny matice (x_{ij}) typu n/n nad G platí implikace: $x \in p(p(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, p(x_{n1}, \dots, x_{nn})) \wedge x \in p(p(x_{11}, \dots, x_{n1}), \dots, p(x_{1n}, \dots, x_{nn})) \Rightarrow x \in p(x_{11}, \dots, x_{nn})$.

Z Definice 1.9 přímo plyne, že n -ární hyperalgebra (G, p) je *mediálová*, jestliže pro všechny matice (x_{ij}) typu n/n nad G a $y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n \in G$ platí následující implikace: $\forall i = 1, \dots, n : y_i \in p(x_{i1}, \dots, x_{in}) \wedge \forall j = 1, \dots, n : z_j \in p(x_{1j}, \dots, x_{nj}) \Rightarrow p(y_1, \dots, y_n) = p(z_1, \dots, z_n)$.

Poznámka 3.1. Ekvivalentně n -ární hyperalgebra (G, p) je mediálová, jestliže pro všechny matice (x_{ij}) typu n/n nad G a všechna $y_1, \dots, y_n \in G$ platí implikace $\forall i = 1, \dots, n : y_i \in p(x_{i1}, \dots, x_{in}) \Rightarrow p(y_1, \dots, y_n) = p(p(x_{11}, \dots, x_{n1}), \dots, p(x_{1n}, \dots, x_{nn}))$. Všechny n -tice splňující podmínky implikace, to znamená, že po aplikaci hyperoperace p dávají stejnou množinu, z čehož plyne $\forall i = 1, \dots, n : y_i \in p(x_{i1}, \dots, x_{in}) \Rightarrow p(y_1, \dots, y_n) = p(p(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, p(x_{n1}, \dots, x_{nn}))$.

Příklad 3.2. 1) Na množině \mathbb{R} reálných čísel uvažujme ternární hyperoperaci i definovanou pro všechna $a, b, c \in \mathbb{R}$ jako $i(a, b, c) = \{a, b, c\}$. Relační systém $\mathbf{I} = (\mathbb{R}, i)$ je pak ternární idempotentní hyperalgebra.

2) Na množině \mathbb{R} reálných čísel uvažujme ternární hyperoperaci r definovanou pro všechna $a, b, c \in \mathbb{R}$ vztahem $r(a, b, c) = \{a \cdot b \cdot c, -a \cdot b \cdot c\}$. Relační systém $\mathbf{M} = (\mathbb{R}, r)$ je pak ternární hyperalgebra.

3) Mějme uspořádanou množinu (U, \leq) s nejmenším prvkem 0 a necht A je množina všech atomů na (U, \leq) . Uvažujme ternární hyperoperaci l definovanou pro všechna $a, b, c \in U$ následovně: $l(a, b, c) = \{x \in A \mid x < a \wedge x < b \wedge x < c\} \cup \{0\}$. Relační systém $\mathbf{U} = (U, l)$ je pak ternární hyperalgebra.

Příklad 3.3. Hyperalgebry $\mathbf{I} = (\mathbb{R}, i)$ ani $\mathbf{M} = (\mathbb{R}, r)$ z Příkladu 3.2 nejsou diagonální.

Například pro matici $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ totiž platí $i(i(1, 2, 3), i(4, 5, 6), i(7, 8, 9)) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = i(i(1, 4, 7), i(2, 5, 8), i(3, 6, 9))$, ale $i(1, 5, 9) = \{1, 5, 9\}$. Dále pro tutéž matici

platí $r(r(1, 2, 3), r(4, 5, 6), r(7, 8, 9)) = \{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9, -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9\} = r(r(1, 4, 7), r(2, 5, 8), r(3, 6, 9))$, ale $r(1, 5, 9) = \{1 \cdot 5 \cdot 9, -1 \cdot 5 \cdot 9\}$. Hyperalgebra $\mathbf{U} = (U, l)$ naopak je diagonální. Pro libovolné $x_1, x_2, x_3 \in U$ totiž platí, že $l(x_1, x_2, x_3) \subseteq A \cup \{0\}$ a pro všechny prvky $y \in A \cup \{0\}$ platí $\{x \in A \mid x < y\} = \emptyset$. Pro libovolnou matici $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ nad U tedy platí, že $l(l(a, b, c), l(d, e, f), l(g, h, i)) = l(l(a, d, g), l(b, e, h), l(c, f, i)) = \{0\}$. Dále pak $\{0\} \subseteq l(a, e, i)$.

Z Věty 1.8 přímo plyne:

Věta 3.4. *Nechť \mathbf{G}, \mathbf{H} jsou n -ární hyperalgebry. Jestli je \mathbf{G} diagonální a \mathbf{H} je idempotentní, pak je mocnina $\mathbf{G}^{\mathbf{H}}$ diagonální relační systém a má bodovou strukturu.*

Příklad 3.5. Mocnina $\mathbf{U}^{\mathbf{I}}$ hyperalgeber $\mathbf{U} = (U, l)$ a $\mathbf{I} = (\mathbb{R}, i)$ z Příkladu 3.2 má jednoprvkovou nosnou množinu, protože \mathbf{U} má idempotentní jádro rovno $\{0\}$. To znamená, že mocnina $\mathbf{U}^{\mathbf{I}}$ je triviálně diagonální a má bodovou strukturu. Mocnina $\mathbf{U}^{\mathbf{I}}$ je také hyperalgebrou, což není Větou 3.4 zaručeno.

Příklad 3.6. Hyperalgebra $\mathbf{I} = (\mathbb{R}, i)$ z Příkladu 3.2 není mediálová. Například pro matici

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ totiž platí $1 \in i(1, 2, 3), 4 \in i(4, 5, 6), 7 \in i(7, 8, 9)$, ale $i(1, 4, 7) = \{1, 4, 7\}$,

kdežto $i(i(1, 2, 3), i(4, 5, 6), i(7, 8, 9)) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Naopak hyperalgebra $\mathbf{M} =$

(\mathbb{R}, r) je mediálová. Pro obecnou matici $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ nad \mathbb{R} totiž pro všechna $y_1 \in r(a,$

$b, c), y_2 \in r(d, e, f), y_3 \in r(g, h, i)$ a $z_1 \in r(a, d, g), z_2 \in r(b, e, h), z_3 \in r(c, f, i)$ platí, že $p(y_1, y_2, y_3) = \{a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h \cdot i, -a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h \cdot i\} = p(z_1, z_2, z_3)$. Hyperalgebra $\mathbf{U} = (U, l)$ je také mediálová, jak bylo ukázáno v Příkladu 3.3.

Lemma 3.7. *Nechť je $\mathbf{G} = (G, p)$ n -ární mediálová hyperalgebra a N je zobrazení z G do potenční množiny $\mathcal{P}(G)$ takové, že pro všechna $x \in G$ platí $N(x) = \{y \in G \mid \exists x_1, \dots, x_n \in G : x \in p(x_1, \dots, x_n) \wedge y \in p(x_1, \dots, x_n)\}$. Pak pro všechna $y_1, \dots, y_n \in G$ platí: $N(y_1) \neq \emptyset, \dots, N(y_n) \neq \emptyset \Rightarrow p(y_1, \dots, y_n) = p(N(y_1), \dots, N(y_n))$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $N(y_1) \neq \emptyset, \dots, N(y_n) \neq \emptyset$. Vezměme libovolné prvky $x_1 \in N(y_1), \dots, x_n \in N(y_n)$, jejichž existence je zaručena naším předpokladem. Sestavme nyní matici (x_{ij}) typu n/n nad G takovou, že pro všechna $i \in 1, \dots, n$ platí: $x_i \in p(x_{i1}, \dots, x_{in}) \wedge y_i \in p(x_{i1}, \dots, x_{in})$. Existence prvků x_{ij} je zaručena díky definici zobrazení N . Vzhledem k tomu, že je hyperalgebra \mathbf{G} mediálová, tak z Poznámky 3.1 plyne $p(x_1, \dots, x_n) = p(p(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, p(x_{n1}, \dots, x_{nn})) = p(y_1, \dots, y_n)$. Volba x_1, \dots, x_n byla libovolná, takže daná rovnost musí platit pro všechna $x_1 \in N(y_1), \dots, x_n \in N(y_n)$, tedy $p(N(y_1), \dots, N(y_n)) = p(y_1, \dots, y_n)$. \square

Poznámka 3.8. *Jestliže $N(y_1) \neq \emptyset, \dots, N(y_n) \neq \emptyset$, pak se výsledek hyperoperace $p(y_1, \dots, y_n)$ nezmění, ani když nahradíme y_i množinou $N(y_i)$ pro libovolnou množinu indexů $i \in 1, \dots, n$. Z definice zobrazení N dále plyne, že $\forall x, y \in G : x \in N(y) \Rightarrow y \in N(y)$, pro všechna $i \in 1, \dots, n$ tedy platí, že: $N(y_i) \neq \emptyset \iff y_i \in N(y_i)$.*

Věta 3.9. *Nechť je $\mathbf{G} = (G, p)$ n -ární mediálová hyperalgebra a N je zobrazení z Lemmatu 3.7. Dále necht' je pro všechna $x \in G$ posloupnost $\{N_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ definovaná následovně: $N_0(x) = N(x)$, $N_{i+1}(x) = \bigcup_{y \in N_i(x)} N(y)$. Pak pro všechna $y_1, \dots, y_n \in G$ platí, že jestliže $N(y_1) \neq \emptyset, \dots, N(y_n) \neq \emptyset$, pak se výsledek hyperoperace $p(y_1, \dots, y_n)$ nezmění, když pro libovolnou množinu indexů $k_1, \dots, k_m \in \{1, \dots, n\}$ nahradíme prvky y_{k_1}, \dots, y_{k_m} množinami $N_{i_1}(y_{k_1}), \dots, N_{i_m}(y_{k_m})$, kde $i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}$ jsou libovolné prvky a $m \leq n$.*

Důkaz. Tvrzení dokážeme matematickou indukcí. Buď $k \in \{1, \dots, n\}$. Podle Poznámky 3.8 máme $p(y_1, \dots, y_k, \dots, y_n) = p(y_1, \dots, N_0(y_k), \dots, y_n)$. Buď $i \in \mathbb{N}$ a necht' $p(y_1, \dots, y_k, \dots, y_n) = p(y_1, \dots, N_i(y_k), \dots, y_n)$. Pak $p(y_1, \dots, y_k, \dots, y_n) = \bigcup_{y \in N_i(y_k)} p(y_1, \dots, y, \dots, y_n) = \bigcup_{y \in N_i(y_k)} p(y_1, \dots, N(y), \dots, y_n) = p(y_1, \dots, \bigcup_{y \in N_i(y_k)} N(y), \dots, y_n) = p(y_1, \dots, N_{i+1}(y_k), \dots, y_n)$. Tedy výsledek hyperoperace $p(y_1, \dots, y_n)$ se nezmění, jestliže nahradíme y_k množinou $N_i(y_k)$ pro libovolné $i \in \mathbb{N}$. Analogicky se ukáže, že tento výsledek se nezmění, pokud pro nějaké $l \in \{1, \dots, n\}, l \neq k$ a $j \in \mathbb{N}$ nahradíme také y_l množinou $N_j(y_l)$ atd. Výsledek hyperoperace $p(y_1, \dots, y_n)$ se tedy nezmění, pokud pro libovolnou množinu indexů $k_1, \dots, k_m \in \{1, \dots, n\}$ nahradíme prvky y_{k_1}, \dots, y_{k_m} množinami $N_{i_1}(y_{k_1}), \dots, N_{i_m}(y_{k_m})$, kde $i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}$ jsou libovolné prvky a $m \leq n$. \square

Věta 3.10. *Nechť \mathbf{G}, \mathbf{H} jsou n -ární hyperalgebry a necht' je \mathbf{G} mediálová. Pak existuje podhyperalgebra \mathbf{K} přímého součinu $\mathbf{G}^{\mathbf{H}}$, jejíž nosná množina je $\text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G})$.*

Důkaz. Necht' $\mathbf{G} = (G, p)$, $\mathbf{H} = (H, q)$, $\mathbf{G}^{\mathbf{H}} = (G^H, r)$. Vezměme n -tici $(f_1, \dots, f_n) \in (\text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G}))^n$ a n -tici $(y_1, \dots, y_n) \in H^n$. Dále vezměme $y \in H$ takové, že $y \in q(y_1, \dots, y_n)$ a $f \in G^H$ takové, že $f \in r(f_1, \dots, f_n)$. Nyní vytvořme matici (x_{ij}) typu n/n nad G tak, že pro všechna $i = 1, \dots, n$ a $j = 1, \dots, n$ platí $x_{ij} = f_i(y_j)$. Pro všechna $i = 1, \dots, n$ je $f_i \in \text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G})$, tedy pro všechna $i = 1, \dots, n$ platí $f_i(y) \in f_i(q(y_1, \dots, y_n)) \in p(f_i(y_1), \dots, f_i(y_n))$. Dále z definice $\mathbf{G}^{\mathbf{H}}$ přímo plyne pro všechna $j = 1, \dots, n$, že $f(y_j) \in p(f_1(y_j), \dots, f_n(y_j))$ a také $f(y) \in p(f_1(y), \dots, f_n(y))$. \mathbf{G} je mediálová, a tedy $f(y) \in f(q(y_1, \dots, y_n)) \in p(f_1(y), \dots, f_n(y)) = p(f(y_1), \dots, f(y_n))$. Dostáváme tedy $f \in \text{Hom}(H, G)$, tj. hyperoperace r je uzavřená vzhledem k $\text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G})$. \square

Příklad 3.11. Pro ternární hyperalgebry $\mathbf{M} = (\mathbb{R}, r)$ a $\mathbf{I} = (\mathbb{R}, i)$ z Příkladu 3.2 platí, že množina $\text{Hom}(\mathbf{I}, \mathbf{M})$ je tvořena všemi zobrazeními $f : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 1\}$.

Věta 3.12. *Nechť \mathbf{G}, \mathbf{H} jsou n -ární hyperalgebry. Necht' je \mathbf{G} mediálová a diagonální a necht' je \mathbf{H} idempotentní. Pak je mocnina $\mathbf{G}^{\mathbf{H}}$ mediálová n -ární podhyperalgebra přímého součinu $\mathbf{G}^{\mathbf{H}}$.*

Důkaz. Necht' $\mathbf{G}^{\mathbf{H}} = (\text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G}), r)$, $\mathbf{G}^{\mathbf{H}} = (G^H, o)$. Podle Věty 3.4 je $\mathbf{G}^{\mathbf{H}}$ relačním podsystemem $\mathbf{G}^{\mathbf{H}}$. Díky Větě 3.10 je dále zaručeno, že pro všechna $f_1, \dots, f_n \in \text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G})$ a $f \in G^H$ taková, že $f \in o(f_1, \dots, f_n)$ platí $f \in \text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G})$. Podle Věty 1.11 je $\mathbf{G}^{\mathbf{H}}$ také mediálová. \square

Mocnina $\mathbf{G}^{\mathbf{H}}$ z Věty 3.12 je idempotentní a mediálová n -ární hyperalgebra. Z toho důvodu platí tvrzení Věty 3.9 a navíc pro všechna $f \in \text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G})$ platí $N(f) \neq \emptyset$. Dále předpokládejme, že existuje takové $m \in \mathbb{N}$, pro které $N_{m+1}(f) = N_m(f)$ pro všechna $f \in \text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G})$. Díky tomu je možné na $\mathbf{G}^{\mathbf{H}}$ zavést relaci ekvivalence \sim tak, že pro všechna $f, g \in \text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G})$ platí $f \sim g \iff g \in N_m(f)$.

Relace \sim je reflexivní díky tomu, že zjevně $N_k(f) \subseteq N_{k+1}(f)$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$ a $f \in N(f) = N_0(f)$.

To, že je \sim symetrická, můžeme ukázat matematickou indukcí: pro všechna $f, g, q, r \in \text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G})$ platí $g \in N_0(f) \iff f \in N_0(g)$ a jestliže $q \in N_{k+1}(r)$, pak existuje $l \in \text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G})$ takové, že platí $q \in N(l)$ a $l \in N_k(r)$. Zjevně pak $l \in N(q)$ a za splnění indukčního předpokladu $l \in N_k(r) \iff r \in N_k(l)$ také platí $r \in N_k(l)$, tedy $r \in N_{k+1}(q)$. Celkem $q \in N_{k+1}(r) \Rightarrow r \in N_{k+1}(q)$. Opačná implikace se ukáže obdobně.

To, že je \sim tranzitivní, můžeme opět ukázat pomocí matematické indukce. Pro $f, g, q \in \text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G})$ předpokládejme, že $q \in N_m(g)$ a $g \in N_m(f)$. Pak $N(g) \subseteq \bigcup_{y \in N_m(f)} N(y) = N_{m+1}(f)$ a z předpokladu $N_{m+1}(f) = N_m(f)$ dostáváme $N(g) \subseteq N_m(f)$. Za indukčního předpokladu $N_k(g) \subseteq N_m(f)$, kde $k \in \mathbb{N}$, pak $\bigcup_{y \in N_k(g)} N(y) \subseteq \bigcup_{y \in N_m(f)} N(y)$, tedy $N_{k+1}(g) \subseteq N_{m+1}(f)$, a tedy $N_{k+1}(g) \subseteq N_m(f)$. Díky tomuto platí $N_m(g) \subseteq N_m(f)$, a tedy $q \in N_m(f)$. Celkem $q \in N_m(g) \wedge g \in N_m(f) \Rightarrow q \in N_m(f)$.

Jestliže pro všechny prvky $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n \in \text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G})$ platí $\forall i \in 1, \dots, n : f_i \sim g_i$, pak pro všechna $f \in r(f_1, \dots, f_n)$ a $g \in r(g_1, \dots, g_n)$ platí, že $f \sim g$. Ekvivalence \sim se tedy chová jako kongruence. Stejně můžeme sestavit i podobnou ekvivalenci pro všechny mediálové n -ární hyperalgebry, kde každý prvek je jedním z výsledků hyperoperace.

Věta 3.13. *Nechť $\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{K}$ jsou n -ární hyperalgebry. Necht je \mathbf{G} mediálová a diagonální a necht jsou \mathbf{H}, \mathbf{K} idempotentní. Pak jsou mocniny $(\mathbf{G}^{\mathbf{H}})^{\mathbf{K}}$ a $\mathbf{G}^{\mathbf{H} \times \mathbf{K}}$ n -ární hyperalgebry a platí*

$$(\mathbf{G}^{\mathbf{H}})^{\mathbf{K}} \cong \mathbf{G}^{\mathbf{H} \times \mathbf{K}}.$$

Důkaz. Jelikož jsou \mathbf{H}, \mathbf{K} idempotentní hyperalgebry, tak je $\mathbf{H} \times \mathbf{K}$ také idempotentní hyperalgebra. Mocnina $\mathbf{G}^{\mathbf{H}}$ je podle Věty 3.12 mediálová a podle Věty 3.4 je také diagonální. Dále podle Věty 3.12 jsou $(\mathbf{G}^{\mathbf{H}})^{\mathbf{K}}$ a $\mathbf{G}^{\mathbf{H} \times \mathbf{K}}$ hyperalgebry. Podle Věty 1.5 existuje izomorfismus mezi $(\mathbf{G}^{\mathbf{H}})^{\mathbf{K}}$ a $\mathbf{G}^{\mathbf{H} \times \mathbf{K}}$. \square

Věta 3.14. *Nechť $\mathbf{G} = (G, p)$ je n -ární mediálová hyperalgebra. Pak je \mathbf{G} diagonální právě tehdy, když pro každou matici (x_{ij}) typu n/n nad G platí*

$$p(p(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, p(x_{n1}, \dots, x_{nn})) \subseteq p(x_{11}, \dots, x_{nn}).$$

Důkaz. \Rightarrow : Necht je \mathbf{G} n -ární diagonální mediálová hyperalgebra. Vezměme libovolnou matici (x_{ij}) typu n/n nad G . \mathbf{G} je mediálová, a tedy podle Poznámky 3.1 platí $p(p(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, p(x_{n1}, \dots, x_{nn})) = p(p(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, p(x_{1n}, \dots, x_{nn}))$. \mathbf{G} je diagonální, a tedy pro všechna $x \in p(p(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, p(x_{n1}, \dots, x_{nn}))$ platí $x \in p(x_{11}, \dots, x_{nn})$.

\Leftarrow : Necht je \mathbf{G} n -ární mediálová hyperalgebra a necht pro každou matici (x_{ij}) typu n/n nad G platí $p(p(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, p(x_{n1}, \dots, x_{nn})) \subseteq p(x_{11}, \dots, x_{nn})$. Tedy pro všechna $x \in p(p(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, p(x_{n1}, \dots, x_{nn}))$ platí $x \in p(x_{11}, \dots, x_{nn})$. \mathbf{G} je mediálová, a tedy pro každé $x \in p(p(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, p(x_{n1}, \dots, x_{nn}))$ platí $x \in p(p(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, p(x_{1n}, \dots, x_{nn}))$. Díky tomu jsou výrazy $x \in p(p(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, p(x_{n1}, \dots, x_{nn}))$ a $x \in p(p(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, p(x_{1n}, \dots, x_{nn})) \wedge x \in p(p(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, p(x_{1n}, \dots, x_{nn}))$ ekvivalentní. Celkově tedy dostáváme implikaci $x \in p(p(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, p(x_{n1}, \dots, x_{nn})) \wedge x \in p(p(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, p(x_{1n}, \dots, x_{nn})) \Rightarrow x \in p(x_{11}, \dots, x_{nn})$. \square

4. Algebry

Pojmem n -ární algebra rozumíme dvojici $\mathbf{G} = (G, p)$, kde G je nosná množina a $p : G^n \rightarrow G$ je n -ární operace. Podobně jako tomu bylo v předchozích kapitolách, budeme n -ární algebry chápat jako $(n+1)$ -ární relační systémy $\mathbf{G} = (G, p)$, kde $(x_1, \dots, x_n, x) \in p$ právě tehdy, když $p(x_1, \dots, x_n) = x$. $(n+1)$ -ární relační systém je tedy n -ární algebrou právě tehdy, když je zároveň n -ární hyperalgebrou a n -ární parciální algebrou. Velkou část pojmů a vět tedy můžeme převzít z předchozích dvou kapitol. Při značení $p(x_1, \dots, x_n) = x$ je však z pohledu hyperalgeber třeba ztotožnit x a $\{x\}$. Pojmy jako mediálová a diagonální algebra přebíráme opět přímo z relačních systémů.

Tedy n -ární algebra $\mathbf{G} = (G, p)$ je *diagonální*, jestliže pro všechny matice (x_{ij}) typu n/n nad G platí implikace: $p(p(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, p(x_{n1}, \dots, x_{nn})) = p(p(x_{11}, \dots, x_{n1}), \dots, p(x_{1n}, \dots, x_{nn})) = x \Rightarrow p(x_{11}, \dots, x_{nn}) = x$.

Dále n -ární algebra $\mathbf{G} = (G, p)$ je *mediálová*, jestliže pro všechny matice (x_{ij}) typu n/n nad G platí následující: $p(p(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, p(x_{n1}, \dots, x_{nn})) = p(p(x_{11}, \dots, x_{n1}), \dots, p(x_{1n}, \dots, x_{nn}))$.

Poznámka 4.1. Binární algebra $G = (G, \cdot)$ je tedy mediálová, jestliže pro všechny $a, b, c, d \in G$ platí $(ab)(cd) = (ac)(bd)$. Toto je splněno například pro všechny komutativní pologrupy. Neplatí však opačné implikace, tj. mediálová pologrupa nemusí být komutativní (např. (\mathbb{N}, p) , kde pro všechna $x, y \in \mathbb{N}$ je $p(x, y) = x$) a mediálový komutativní grupoid nemusí být asociativní (např. (\mathbb{N}, q) , kde pro všechna $x, y \in \mathbb{N}$ je $q(x, y) = \max\{x, y\} + 1$).

Příklad 4.2. 1) Mějme množinu přirozených čísel se sčítáním $(\mathbb{N}, +)$. Pak $\mathbf{N} = (\mathbb{N}, +)$ je binární algebra.

2) Na množině reálných čísel \mathbb{R} uvažujme binární operaci p definovanou pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ jako $p(a, b) = \frac{a+b}{2}$. Pak $\mathbf{A} = (\mathbb{R}, p)$ je binární idempotentní algebra.

3) Na množině přirozených čísel $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ uvažujme binární operaci l definovanou pro všechna $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tak, že se vezme první číslice z a a poslední z b . Například $c(10, 987654) = 14$. Pak $\mathbf{C} = (\mathbb{N} \setminus \{0\}, l)$ je binární algebra.

Příklad 4.3. Algebry \mathbf{N} a \mathbf{A} z Příkladu 4.2 jsou komutativní pologrupy, takže podle Poznámky 4.1 jsou mediálové. \mathbf{N} ani \mathbf{A} však nejsou diagonální. Například pro matici

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ totiž v \mathbf{N} platí, že $(1+2) + (4+6) = 13$, avšak $1+6 = 7$, a v \mathbf{A} platí $p(p(1, 2), (4, 6)) = p(\frac{3}{2}, 5) = \frac{13}{2}$, avšak $p(1, 6) = \frac{7}{2}$. Algebra $\mathbf{C} = (\mathbb{N} \setminus \{0\}, l)$ je mediálová a diagonální.

Pro libovolnou matici $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ totiž platí, že první číslice prvku $l(l(a, b), l(c, d))$ je stejná jako první číslice a , a jeho druhá číslice je stejná jako poslední číslice d , a stejně pro $l(l(a, c), l(b, d))$ a pro $l(a, d)$.

Z Věty 2.8 a Věty 3.10 přímo plyne následující.

Věta 4.4. Necht \mathbf{G}, \mathbf{H} jsou n -ární algebry a necht je \mathbf{G} mediálová. Pak existuje podalgebra \mathbf{K} přímého součinu $\mathbf{G}^{\mathbf{H}}$, jejíž nosná množina je $\text{Hom}(\mathbf{H}, \mathbf{G})$.

Příklad 4.5. Vezměme si algebry $\mathbf{N} = (\mathbb{N}, +)$, $\mathbf{A} = (\mathbb{R}, p)$, $\mathbf{C} = (\mathbb{N} \setminus \{0\}, l)$ z Příkladu 4.2. $\text{Hom}(\mathbf{N}, \mathbf{A})$ je nekonečná množina. Leží v ní homomorfismy $f_x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, kde $x \in \mathbb{R}$, definované pro všechna $n \in \mathbb{N}$ jako $f_x(n) = x$. Ukažme, že žádné jiné funkce $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ v

$\text{Hom}(\mathbf{N}, \mathbf{A})$ neleží. Na to, aby bylo $f \in \text{Hom}(\mathbf{N}, \mathbf{A})$, tak by pro všechna $a, b \in \mathbb{N}$ muselo platit $\frac{f(a)+f(b)}{2} = f(a+b)$. Matematickou indukcí můžeme ukázat, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $f(n) = f(1)$. Pro $n = 1$ je toto tvrzení splněno triviálně. Pro $n = k$ pak dostáváme $\frac{f(k)+f(1)}{2} = f(k+1)$, což při splnění indukčního předpokladu $f(k) = f(1)$ lze přepsat na $\frac{f(1)+f(1)}{2} = f(k+1)$, tedy $f(k+1) = f(1)$.

Pro $\text{Hom}(\mathbf{N}, \mathbf{C})$ již dostáváme pestřejší strukturu. Patří sem všechny funkce $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$, které pro všechna $a, b \in \mathbb{N}$ dávají taková $f(a), f(b)$, že jejich první a poslední číslice jsou stejné.

Z Věty 2.9 a Věty 3.12 přímo plyne následující.

Věta 4.6. *Nechť \mathbf{G}, \mathbf{H} jsou n -ární algebry. Nechť je \mathbf{G} mediálová a diagonální a nechť je \mathbf{H} idempotentní. Pak je mocnina $\mathbf{G}^{\mathbf{H}}$ mediálová n -ární podalgebra přímého součinu $\mathbf{G}^{\mathbf{H}}$.*

Příklad 4.7. Vezměme si algebry $\mathbf{A} = (\mathbb{R}, p)$, $\mathbf{C} = (\mathbb{N} \setminus \{0\}, l)$ z Příkladu 4.2. Množina $\text{Hom}(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ je pak tvořena pouze zobrazeními $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$, kde pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je $f_n(x) = n$ pro $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ a $9 < n < 100$. To, že pro všechna $f \in \text{Hom}(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ a všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $9 < f(x) < 100$ lze ukázat pomocí Věty 1.13. Dále pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ musí platit $l(f(a), f(2b-a)) = f(b) = l(f(2b-a), f(a))$. Tedy $f(a)$ a $f(b)$ mají stejnou jak první tak i druhou číslici. Díky tomu bude mocnina $\mathbf{C}^{\mathbf{A}} = (\text{Hom}(\mathbf{A}, \mathbf{C}), q)$ izomorfní s idempotentním jádrem algebry \mathbf{A} .

Uvažujme nyní mocninu $\mathbf{A}^{\mathbf{A}} = (\text{Hom}(\mathbf{A}, \mathbf{A}), r)$. Pro libovolný homomorfismus $f \in \text{Hom}(\mathbf{A}, \mathbf{A})$ pak musí pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}$ platit $\frac{f(x)+f(y)}{2} = f(\frac{x+y}{2})$. Mezi tyto homomorfismy patří funkce typu $f(x) = ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Pro dvojici těchto funkcí f, g nemusí existovat funkce $h \in \text{Hom}(\mathbf{A}, \mathbf{A})$ taková, aby $r(f, g) = h$. Například pro $g(x) = x$ a $f(x) = 1$ dostáváme $\frac{x+1}{2} = h(\frac{x+y}{2}) = \frac{h(x)+h(y)}{2}$. Levá strana nezávisí na y , a tedy ani pravá strana nesmí záviset na y , tedy $h(y) = \text{konst.}$, pak ale levá strana závisí na x , kdežto pravá strana je konstantní. Dostáváme tedy spor a homomorfismus h neexistuje. Mocnina $\mathbf{A}^{\mathbf{A}}$ tedy není algebrou. Podle Věty 2.2 je však parciální algebrou. Například pro funkce $f(x) = ax + b, g(x) = ax + c, h(x) = ax + \frac{b+c}{2}$ platí $r(f, g) = h$.

Z Věty 2.4 a Věty 3.13 přímo plyne následující.

Věta 4.8. *Nechť $\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{K}$ jsou n -ární algebry. Nechť je \mathbf{G} mediálová a diagonální a nechť jsou \mathbf{H}, \mathbf{K} idempotentní. Pak jsou mocniny $(\mathbf{G}^{\mathbf{H}})^{\mathbf{K}}$ a $\mathbf{G}^{\mathbf{H} \times \mathbf{K}}$ n -ární algebry a platí*

$$(\mathbf{G}^{\mathbf{H}})^{\mathbf{K}} \cong \mathbf{G}^{\mathbf{H} \times \mathbf{K}}.$$

Lemma 4.9. Nechť $\mathbf{G} = (G, p)$ je n -ární algebra. Jestliže pro libovolnou matici (x_{ij}) typu n/n nad G platí

$$p(p(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, p(x_{n1}, \dots, x_{nn})) = p(x_{11}, \dots, x_{nn}).$$

Pak pro libovolné $x_1, \dots, x_n \in G$ platí

$$\begin{aligned} p(x_1, \dots, x_{n-1}, p(x_1, \dots, x_n)) &= p(x_1, \dots, x_{n-2}, p(x_1, \dots, x_n), x_n) \\ &= \dots = p(p(x_1, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) = p(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Důkaz. Vezměme matici (y_{ij}) typu n/n takovou, že pro všechny $i = 1, \dots, n$ a $j = 1, \dots, n$ platí $y_{ij} = x_j$. Nyní si označme $p(x_1, \dots, x_n)$ jako t . Pak $p(t, \dots, t) = p(p(x_1, \dots, x_n), \dots, p(x_1, \dots, x_n)) = p(p(y_{11}, \dots, y_{1n}), \dots, p(y_{n1}, \dots, y_{nn})) = p(y_{11}, \dots, y_{nn}) = p(x_1, \dots, x_n) = t$.

Zvolme si $k \in \{1, \dots, n\}$ a vezměme si matici (z_{ij}) typu n/n takovou, že pro všechna $i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n$ a $j = 1, \dots, n$ platí $z_{ij} = y_{ij}$ a pro všechna $j = 1, \dots, n$ platí $z_{kj} = t$. Pak $p(x_1, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_n) = p(z_{11}, \dots, z_{nn}) = p(p(z_{11}, \dots, z_{1n}), \dots, p(z_{n1}, \dots, z_{nn})) = p(p(x_1, \dots, x_n), \dots, p(x_1, \dots, x_n), p(t, \dots, t), p(x_1, \dots, x_n), \dots, p(x_1, \dots, x_n)) = p(t, \dots, t) = t$. Tedy pro všechna $k = 1, \dots, n$ platí $p(x_1, \dots, x_{k-1}, p(x_1, \dots, x_n), x_{k+1}, \dots, x_n) = p(x_1, \dots, x_n)$. \square

Věta 4.10. *Nechť $\mathbf{G} = (G, p)$ je n -ární algebra. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.*

- (1) \mathbf{G} je diagonální a mediálová.
- (2) Pro libovolnou matici (x_{ij}) typu n/n nad G platí:

$$p(p(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, p(x_{n1}, \dots, x_{nn})) = p(x_{11}, \dots, p_{nn}).$$

- (3) Pro libovolnou matici (x_{ij}) typu n/n nad G platí:

$$p(p(x_{11}, \dots, x_{1n}), x_{22}, \dots, x_{nn}) = p(x_{11}, p(x_{21}, \dots, x_{2n}), x_{33}, \dots, x_{nn}) = \dots = p(x_{11}, \dots, x_{n-1, n-1}, p(x_{n1}, \dots, x_{nn})) = p(x_{11}, \dots, x_{nn}).$$

Důkaz. (1) \Rightarrow (2): Přímo z Věty 3.14.

(2) \Rightarrow (1): Nechť je splněno tvrzení (2). Vezměme libovolnou matici (x_{ij}) typu n/n nad G a matici (y_{ij}) , kde $y_{ij} = x_{ji}$ pro $i, j = 1, \dots, n$. Při této volbě platí $y_{ii} = x_{ii}$ pro $i = 1, \dots, n$, a tedy také $p(x_{11}, \dots, x_{nn}) = p(y_{11}, \dots, y_{nn})$. Z tvrzení (2) pak vyplývá $p(p(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, p(x_{n1}, \dots, x_{nn})) = p(x_{11}, \dots, x_{nn}) = p(y_{11}, \dots, y_{nn}) = p(p(y_{11}, \dots, y_{1n}), \dots, p(y_{n1}, \dots, y_{nn})) = p(p(x_{11}, \dots, x_{n1}), \dots, p(x_{1n}, \dots, x_{nn}))$. \mathbf{G} je tedy mediálová. Z Věty 3.14 pak dostáváme, že \mathbf{G} je diagonální.

(3) \Rightarrow (2): Nechť je splněno tvrzení (3). Vezměme si libovolnou matici (x_{ij}) typu n/n nad G a pro každé $k = 2, \dots, n$ nechť (y_{ij}^k) je matice typu n/n nad \mathbf{G} taková, že platí $y_{ii}^k = x_{ii}$ pro $i > k$, $y_{ii}^k = p(x_{i1}, \dots, x_{in})$ pro $i < k$, $y_{ij}^k = x_{ij}$ pro $i = k$ a $j = 1, \dots, n$ a ostatní prvky jsou libovolné z G . Podle (3) platí $p(p(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, p(x_{n1}, \dots, x_{nn})) = p(y_{11}^n, \dots, y_{n-1, n-1}^n, p(y_{n1}^n, \dots, y_{nn}^n)) = p(y_{11}^n, \dots, y_{nn}^n) = p(p(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, p(x_{n-1, 1}, \dots, x_{n-1, n}), x_{nn}) = p(y_{11}^{n-1}, \dots, y_{n-2, n-2}^{n-1}, p(y_{n-1, 1}^{n-1}, \dots, y_{n-1, n}^{n-1}), y_{nn}^{n-1}) = p(y_{11}^{n-1}, \dots, y_{nn}^{n-1}) = p(p(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, p(x_{n-2, 1}, \dots, x_{n-2, n}), x_{n-1, n-1}, x_{nn}) = \dots = p(p(x_{11}, \dots, x_{1n}), x_{22}, \dots, x_{nn}) = p(x_{11}, \dots, x_{nn})$.

(2) \Rightarrow (3): Nechť je splněno tvrzení (2). Vezměme si libovolné $k \in \{1, \dots, n\}$, libovolnou matici (x_{ij}) typu n/n nad G a matici (y_{ij}) , kde $y_{ij} = x_{ij}$ pro všechna $i, j = 1, \dots, n$ kromě $i = k, j = k$. Za y_{kk} zvolíme $p(x_{k1}, \dots, x_{kn})$. Dále si vezměme $p(x_{11}, \dots, x_{k-1, k-1}, p(x_{k1}, \dots, x_{kn}), x_{k+1, k+1}, \dots, x_{nn}) = p(y_{11}, \dots, y_{nn})$. Podle (2) pak $p(y_{11}, \dots, y_{nn}) = p(p(y_{11}, \dots, y_{1n}), \dots, p(y_{n1}, \dots, y_{nn})) = p(p(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, p(x_{k-1, 1}, \dots, x_{k-1, n}), p(x_{k1}, \dots, x_{k, n-1}, p(x_{k1}, \dots, x_{kn})), p(x_{k+1, 1}, \dots, x_{k+1, n}), p(x_{n1}, \dots, x_{nn}))$. Toto můžeme díky Lemmatu 4.9 přepsat na $p(p(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, p(x_{n1}, \dots, x_{nn}))$, což se podle (2) rovná $p(x_{11}, \dots, x_{nn})$. Celkem tedy pro libovolné $k = 1, \dots, n$ dostáváme $p(x_{11}, \dots, x_{k-1, k-1}, p(x_{k1}, \dots, x_{kk}), x_{k+1, k+1}, \dots, x_{nn}) = p(x_{11}, \dots, x_{nn})$. \square

Uvažujme nyní pouze binární algebry $\mathbf{G} = (G, \cdot)$. Pak lze přepsat tvrzení z Věty 4.10 jako:

- (1) \mathbf{G} je diagonální a mediálová.

(2) $(ab)(cd) = ad$ pro libovolnou matici $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nad G .

(3) $(ab)d = a(cd) = ad$ pro libovolnou matici $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nad G .

Tato tvrzení jsou dále ekvivalentní s (4) $(ab)d = a(bd) = ad$ pro libovolnou matici $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nad G . (3) \Rightarrow (4) lze ukázat tak, že se v (3) zvolí $b = c$. (4) \Rightarrow (3) platí, protože $(ab)d = ad = a(cd)$. Tedy dostáváme:

Věta 4.11. *Nechť $\mathbf{G} = (G, \cdot)$ je binární algebra (tj. grupoid). Pak \mathbf{G} je diagonální a mediálová právě tehdy, když je asociativní (tj. pologrupa) a pro všechny prvky $a, b, c \in G$ platí $abc = ac$.*

Příklad 4.12. Vezměme si algebra $\mathbf{C} = (\mathbb{N} \setminus \{0\}, l)$ z Příkladu 4.2. Jak jsme již ukázali v Příkladu 4.3, \mathbf{C} je mediálový a diagonální grupoid. V souladu s Větou 4.11 skutečně pro všechna $a, b, c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ platí $l(a, l(b, c)) = l(l(a, b), c) = l(a, c)$. Ve všech případech je výsledkem dvoumístné číslo, jehož první číslice je první číslicí a a druhá číslice je poslední číslicí c .

Poznámka 4.13. a) Nechť $\mathbf{G} = (G, \cdot)$ je pologrupa, kde pro všechny prvky $a, b, c \in G$ platí $abc = ac$. Pak pro všechny prvky k splňující $k = xy$ pro nějaké $x, y \in G$ platí $kk = k$, tedy k je v nosné množině idempotentního jádra algebry \mathbf{G} . b) Mediálové idempotentní diagonální n -ární algebry jsou studovány v [7], kde se nazývají jednoduše n -ární diagonální algebry. Ukazuje se, že takové algebry jsou izomorfní s n -árními algebry $(X_1 \times \dots \times X_n, p)$, kde X_1, \dots, X_n jsou množiny a operace p je definována jako $p((x_1^1, \dots, x_n^1), \dots, (x_1^n, \dots, x_n^n)) = p(x_1^1, x_2^2, \dots, x_n^n)$. Mediálové idempotentní diagonální grupoidy se nazývají *rektangulární bandy* [1] (bandem se rozumí idempotentní pologrupa).

Příklad 4.14. Nechť $\mathbb{G} = (G, p)$ je grupoid. Pro množinu $G = \{1, 2, 3\}$ platí, že grupoid \mathbb{G} je mediálový a diagonální a zobrazení $p : G^2 \rightarrow G$ je jedním z následujících operací: tři konstantní zobrazení, dvě projekce a šest binárních operací dané těmito tabulkami a šest

p	1	2	3
1	1	1	1
2	2	2	2
3	2	2	2

p	1	2	3
1	1	1	1
2	3	3	3
3	3	3	3

p	1	2	3
1	1	1	1
2	2	2	2
3	1	1	1

p	1	2	3
1	1	1	1
2	1	1	1
3	3	3	3

p	1	2	3
1	2	2	2
2	2	2	2
3	3	3	3

p	1	2	3
1	3	3	3
2	2	2	2
3	3	3	3

duálních operací (transponovaná tabulka).

Pro množinu $G = \{1, \dots, 12\}$ a operaci $p : G^2 \rightarrow G$ danou následující tabulkou

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	6	4	5	4	5	6	6	6	4	5	4	5
2	7	9	10	9	10	7	7	7	9	10	9	10
3	8	11	12	11	12	8	8	8	11	12	11	12
4	6	4	5	4	5	6	6	6	4	5	4	5
5	6	4	5	4	5	6	6	6	4	5	4	5
6	6	4	5	4	5	6	6	6	4	5	4	5
7	7	9	10	9	10	7	7	7	9	10	9	10
8	8	11	12	11	12	8	8	8	11	12	11	12
9	7	9	10	9	10	7	7	7	9	10	9	10
10	7	9	10	9	10	7	7	7	9	10	9	10
11	8	11	12	11	12	8	8	8	11	12	11	12
12	8	11	12	11	12	8	8	8	11	12	11	12

je grupoid $\mathbf{G} = (G, p)$ mediálový a diagonální.

Jak je z těchto tabulek vidět, celkový počet různých řádků a sloupců v každé tabulce je značně omezen. Toto plyne ze způsobu, jakým lze konečné mediálové diagonální grupoidy generovat, který byl představen v [4]. Každý konečný mediálový diagonální grupoid lze totiž vygenerovat pomocí tabulky, kde v každém poli je právě jeden idempotentní prvek množiny G a libovolný počet neidempotentních prvků s tím, že každý prvek lze použít právě jednou. Výsledek operace $p(x, y)$, $x, y \in G$, je pak idempotentní prvek ve stejném řádku jako x a stejném sloupci jako y . Například tabulka

6 (1)	4	5
7	9 (2)	10
8	11	12 (3)

kde prvky mimo závorku jsou idempotentní a prvky v závorce nejsou idempotentní, generuje zobrazení p pro $G = \{1, \dots, 12\}$ z Příkladu 4.14. Je-li daný mediálový diagonální grupoid také idempotentní, pak generující tabulka bude mít rozměry $a \times b$, kde ab je rovno počtu prvků tohoto grupoidu.

Závěr

V bakalářské práci jsem prozkoumal strukturu mocnin algebraických systémů pro relační systémy a jejich speciální případy, totiž parciální algebry, hyperalgebry a obecné algebry. Pro všechny tyto systémy jsem formuloval dostačující podmínky pro to, aby platil první exponenciální zákon a aby mocniny $\mathbf{G}^{\mathbf{H}}$ tvořily stejný druh algebraického systému jako \mathbf{G} a \mathbf{H} .

Pro formulaci řady tvrzení byly zavedeny pojmy mediálového a diagonálního systému. V rámci práce jsem pak zkoumal i další důsledky těchto pojmů pro různé druhy systémů. Například se ukazuje, že pro řadu mediálových hyperalgeber lze formulovat relaci, která se značně podobá kongruenci. K nalezení a pochopení dalších vlastností mediálových a diagonálních systémů a jejich mocnin jsou užitečné příklady těchto pojmů, které jsem uvedl pro všechny uvažované druhy systémů.

Řada tvrzení o mocnině $\mathbf{G}^{\mathbf{H}}$ požaduje, aby \mathbf{H} bylo reflexivní (idempotentní), proto se především pro jednotlivé příklady ukázal být velmi užitečný pojem reflexivního jádra daného systému. Díky tomu, že stačilo pracovat jen s reflexivním jádrem, se urychlil proces hledání homomorfismů tvořících nosnou množinu studované mocniny, a to především tehdy, když bylo reflexivní jádro nějakým způsobem triviální.

Jedním z možných rozšíření studovaných systémů by bylo uvažovat na dané množině obecně množinu relací s různými aritami a studovat mocniny systémů stejného typu. U takovýchto systémů je potřeba nahradit pojem mediality tzv. zákonem záměny operací. Poté bude zachována řada vlastností mocnin algebraických systémů, které zde byly ukázány [12].

Všechny ze zkoumaných druhů systémů jsou velmi obecné a využívají se v širokém spektru oblastí. Například funkce n proměnných studované v matematické analýze jsou speciální $(n + 1)$ -ární relace. V informatice jsou na pojmu n -árních relací založeny relační databáze. Vyšetřované mocniny samotné nacházejí využití například v logice pro tvorbu modelů, kde relační systémy A, B reprezentují formule, jejich mocniny A^B reprezentují implikace mezi nimi $B \Rightarrow A$ a přímý součin $A \times B$ reprezentuje konjunkci $A \wedge B$. První exponenciální zákon pak reprezentuje ekvivalenci mezi výrazy $C \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ a $(B \wedge C) \Rightarrow A$ (speciální tvar tzv. věty o dedukci).

Literatura

- [1] BIRKHOFF, Garrett. *Generalized arithmetic*. Duke Mathematical Journal. 1942, vol. 9, pp. 283-302.
- [2] BURMEISTER, Peter. *A Model Theoretic Oriented Approach to Partial Algebras*. Berlin: De Gruyter, 1986. ISBN 978-3-11-272086-8
- [3] JEŽEK, Jaroslav; KEPKA, Tomáš. *Medial groupoids*. Rozpravy ČSAV Řada Matematických a Přírodních Věd. 1983, vol. 93, pp. 93.
- [4] KLOUDA, Josef; VANŽUROVÁ, Alena. *On a general construction of diagonal algebras*. Demonstratio Mathematica. 2000, vol. 33, pp. 223-230.
- [5] NOVÁK, Vítězslav. *On a power of relational structures*. Czechoslovak Mathematical Journal. 1985, vol. 35, no. 1, pp. 167-172.
- [6] NOVOTNÝ, Miroslav; ŠLAPAL, Josef. *On powers of relational structures*. Publicationes Mathematicae. 2002, vol. 61, pp. 201-212.
- [7] PŁONKA, Jerzy. *Diagonal algebras*. Fundamenta Mathematicae. 1966, vol. 58, no. 3, pp. 309-322.
- [8] ŠLAPAL, Josef. *Diagonality and powers of general algebraic systems*. East-West Journal of Mathematics. 2004, vol. 6, pp. 1-20.
- [9] ŠLAPAL, Josef. *Direct arithmetic of relational systems*. Publicationes Mathematicae Debrecen. 1991, vol. 38, pp. 39-48.
- [10] ŠLAPAL, Josef. *Exponentiality in categories of partial algebras*. Mathematica Pannonica, 2002, vol. 13, pp. 201–206.
- [11] ŠLAPAL, Josef. *On exponentiation of n -ary algebras*. Acta Mathematica Hungarica. 1994, vol. 63, pp. 313-322.
- [12] ŠLAPAL, Josef. *On exponentiation of universal hyperalgebras*. Algebra Universalis. 2000, vol. 44, pp. 187-193.
- [13] ŠLAPAL, Josef. *On the direct power of relational systems*. Mathematica Slovaca. 1989, vol. 39, no. 3, pp. 251-255.