



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

## ODVOZENÍ A APLIKACE ANALYTICKÉHO POSTUPU NÁVRHU BICÍ PRUŽINY PALNÉ ZBRANĚ

DERIVING AND APPLICATION OF ANALYTICAL DESIGN OF HAMMERSPRING IN FIREARMS

### BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

### AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Radek Vobejda

### VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Martin Slažanský

BRNO 2017



## Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	<b>Radek Vobejda</b>
Studijní program:	Strojírenství
Studijní obor:	Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce:	<b>Ing. Martin Slažanský</b>
Akademický rok:	2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č. 111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

### **Odvození a aplikace analytického postupu návrhu bicí pružiny palné zbraně**

#### **Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

Palné zbraně využívají k iniciaci náboje bicí pružinu, která musí na úderník tlačit dostatečně velkou silou, aby spolehlivě došlo k výstřelu. Návrh bicí pružiny podléhá navíc požadavkům montážním i ekonomickým. Ve spolupráci s Českou Zbrojovkou, s.r.o. bude mít student za úkol vytvořit postup návrhu bicí pružiny, který bude sloužit jako příručka pro konstruktéry. Pomocí vytvořeného návrhu poté upraví zadanou bicí pružinu pro určitou zbraň.

#### **Cíle bakalářské práce:**

- 1) Provést rešerši v oblasti použití a návrhu tlačných šroubových válcových pružin, především v bicích mechanismech palných zbraní.
- 2) Odvodit obecný analytický postup návrhu tlačné šroubovitě válcové pružiny a posoudit možnosti jeho zjednodušení.
- 3) Aplikovat navržený postup na zadanou bicí pružinu palné zbraně a provést její úpravu dle zadaných kritérií.
- 5) Diskutovat výsledky a omezení navrženého postupu návrhu.

#### **Seznam literatury:**

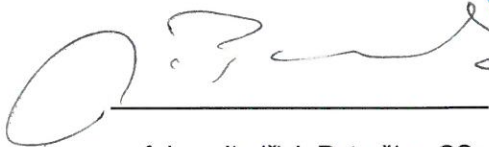
Janiček P., Ondráček E., Vrbka J., Burša J.: Pružnost a pevnost I. 3. ed. Brno: Akademické nakladatelství CERM; 2004.

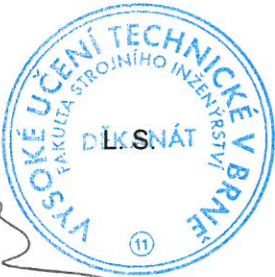
Janiček P., Ondráček E., Vrbka J., Burša J., Mechanika těles: Pružnost a pevnost II. 4. ed. Brno: Akademické nakladatelství CERM; 2006.

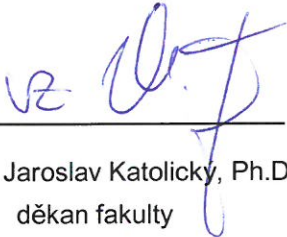
Shigley J. E., Mischke Ch. R., Budynas R. G.: Konstruování strojních součástí. Překlad 7. vydání (McGraw Hill 2004), 2008, 1300 s.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17.

V Brně, dne 26. 9. 2016

  
\_\_\_\_\_  
prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
ředitel ústavu



  
\_\_\_\_\_  
doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## **Abstrakt**

Práce se zabývá odvozením analytických vztahů pro výpočet tlačné šroubovitě válcové pružiny a posouzením možnosti použití zjednodušujících vztahů. V práci je uveden analytický výpočet tlačné pružiny podle teorie slabě zakřivených prutů doplněný výpočty pomocí metody konečných prvků. Práce pojednává o dvou bicích pružinách palné zbraně, které nebyly schopny plnit svou funkci. Na základě odvozených vztahů byl vytvořen postup návrhu konkrétní pružiny, která by měla být schopna splnit provozní podmínky.

## **Klíčová slova**

Pružina, prut, drát, deformace, zatížení, palná zbraň

## **Abstract**

The thesis deals with inference of analytic relations for calculation of pressure helical coil spring and considers usage possibilities of simplified relations. In the thesis there is introduced analytic computation of slightly curved rod theory completed by finite element method calculations. The thesis describes two springs of firearm, which weren't able to achieve required functionality. After this there was created a plan of concept particular spring on the base of derivated relations, which should be able to meet operative conditions.

## **Key words**

Spring, rod, wire, deformation, load, firearm

## **Bibliografická citace**

VOBEJDA, R. *Odvození a aplikace analytického postupu návrhu bicí pružiny palné zbraně*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 69 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Martin Slažanský.

## Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně, pod vedením vedoucího bakalářské práce Ing. Martina Slažanského a s použitím uvedené literatury a zdrojů. V Brně, dne

26. května 2016

.....  
Radek Vobejda

## Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b> .....	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Úvod do zbraňové problematiky</b> .....	<b>12</b>
<b>3</b>	<b>Pružina z technického hlediska</b> .....	<b>15</b>
3.1	Tlačné šroubovitě válcové pružiny .....	15
<b>4</b>	<b>Pružina z hlediska pružnosti a pevnosti</b> .....	<b>19</b>
4.1	Prutové charakteristiky .....	19
4.1.1	Geometrické charakteristiky .....	19
4.1.2	Vazbové charakteristiky .....	20
4.1.3	Deformační charakteristiky .....	20
4.1.4	Napjatostní charakteristiky .....	21
4.2	Kombinované namáhání a mezní stav pružnosti .....	22
4.2.1	Podmínka plasticity $\max \tau$ (Trescova, Guestova) .....	23
4.2.2	Podmínka plasticity $HMH$ .....	24
4.2.3	Porovnání podmínek plasticity .....	25
4.3	Mezní stav únavové pevnosti .....	25
4.4	Rozdělení prutů dle křivosti střednice .....	26
4.5	Teorie zakřivených prutů .....	27
4.5.1	Rozdělení zakřivených prutů .....	28
4.5.2	Rozdíl v napětí .....	28
<b>5</b>	<b>Odvození analytických výpočtových vztahů</b> .....	<b>29</b>
5.1	Analytický výpočet tlačné šroubovitě pružiny .....	29
5.1.1	Určení $VVÚ$ .....	30
5.1.2	Napětí v pružině .....	31
5.1.3	Výpočet tuhosti pružiny při uvažování všech složek $VVÚ$ .....	32
5.1.4	Výpočet tuhosti pružiny při použití zjednodušujících kritérií .....	33
5.1.5	Výpočet rozkroucení pružiny .....	35
5.1.6	Porovnání redukovaných napětí u pružiny .....	37
5.2	Porovnání odvozených vztahů se vztahy v Konstruování strojních součástí ...	40
<b>6</b>	<b>Výpočet šroubovitě tlačné pružiny pomocí MKP</b> .....	<b>42</b>

6.1	Výpočtový model založený na prutové teorii.....	42
6.2	Výpočtové modely vytvořené pomocí objemových prvků.....	45
6.2.1	Výpočtový model založený na prvcích SOLID186 a SOLID187.....	46
6.2.2	Výpočtový model vytvořený s využitím funkce RBE3 .....	47
6.3	Omezení modelů.....	49
<b>7</b>	<b>Aplikace výpočtových modelů .....</b>	<b>50</b>
7.1	Řešení pružiny, u které dochází k trvalé deformaci .....	51
7.1.1	Řešení pomocí odvozených analytických vztahů.....	52
7.1.2	Výpočet pomocí vztahů v literatuře Konstruování strojních součástí.....	53
7.1.3	Řešení pomocí MKP modelů .....	54
7.1.4	Zobecnění výsledků.....	57
7.2	Řešení pružiny s velkou tuhostí.....	58
<b>8</b>	<b>Návrh tlačné pružiny .....</b>	<b>60</b>
8.1	Návrh při využití odvozených analytických vztahů .....	60
8.1.1	Návrh konkrétní tlačné pružiny.....	61
8.1.2	Diskuze výsledků při využití daného postupu.....	63
<b>9</b>	<b>Závěr .....</b>	<b>64</b>
	<b>Seznam obrázků .....</b>	<b>66</b>
	<b>Seznam použitých zdrojů.....</b>	<b>67</b>
	<b>Seznam použitých veličin.....</b>	<b>68</b>

# 1 Úvod

V palných zbraních slouží k inicializaci náboje bicí pružina, která musí být správně navržena, aby docházelo k zaručenému zažehnutí náboje, a tím i k výstřelu. Bicí pružiny podléhají jak ekonomickým, tak montážním požadavkům. Montážními požadavky se rozumí, že pružina nemůže zabírat v mechanismu zbraně libovolně velké místo, ale její rozměry jsou konstrukčně omezeny. V neposlední řadě je také nutné, aby tato pružina umožňovala snadné natažení kohoutu palné zbraně, a tím i její pohodlné užívání.

Při nesprávném návrhu bicí pružiny může dojít po několika výstřelech k nežádoucí trvalé deformaci bicí pružiny.

Bicí pružiny jsou nejčastěji šroubovité válcové tlačné pružiny, které jsou celkově nejhojněji používaným typem pružin ve strojní praxi.

Cílem této bakalářské práce je určit postup analytického výpočtu válcové šroubovité tlačné pružiny a diskutovat možnosti zjednodušení výpočtu. Dalším krokem je aplikace vytvořených výpočtových modelů na konkrétní bicí pružinu palné zbraně a její úprava dle zadaných kritérií.

Tato práce byla vypracována ve spolupráci s Českou Zbrojovkou, s.r.o., která řeší problém s bicí pružinou, kdy po několika výstřelech ze zbraně dojde k nežádoucí trvalé deformaci pružiny. Výpočtové modely budou aplikovány na danou pružinu k zjištění příčiny její deformace a k následnému návrhu nové pružiny.

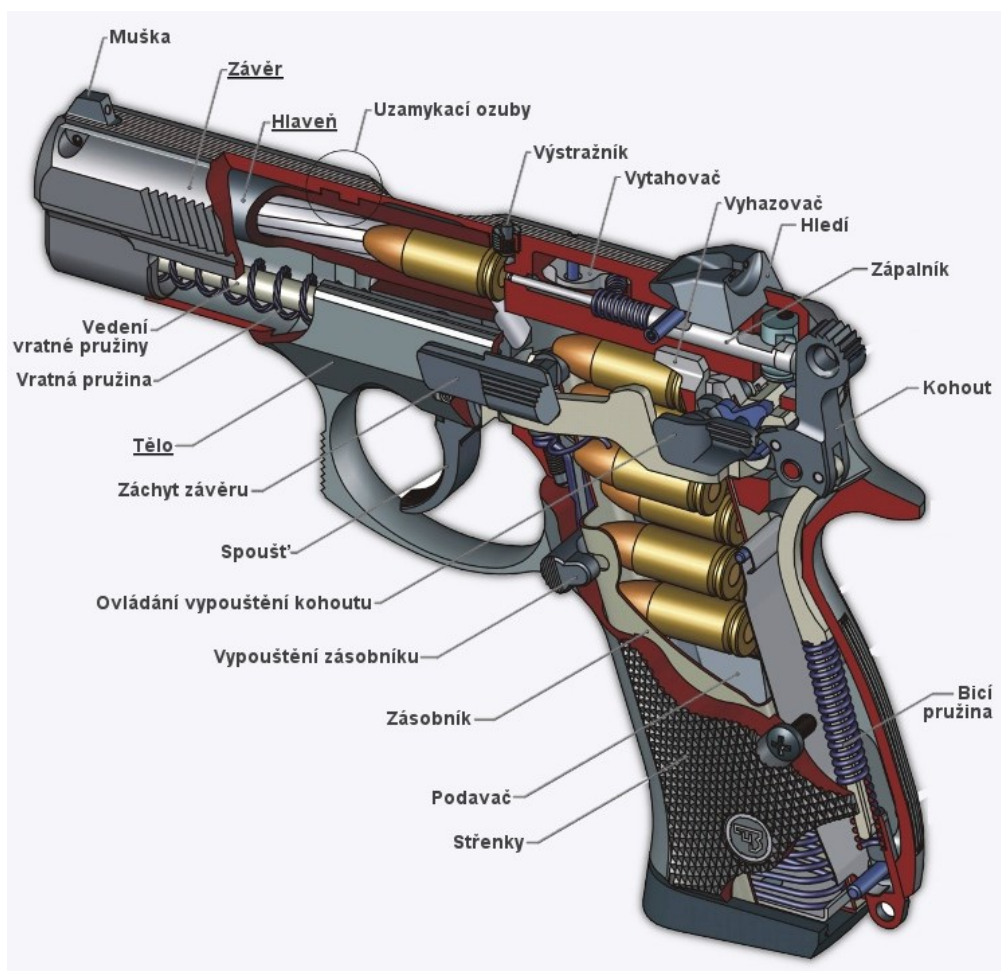
## 2 Úvod do zbraňové problematiky

Tato kapitola pojednává o střelných zbraních, jejich rozdělení a základních součástech zbraní, byla vypracována dle literatury [1]. Palná zbraň je střelná zbraň, u které je její funkce odvozena od okamžitého uvolnění chemické energie, neboť při výstřelu dochází ke vznícení střelného prachu, který je umístěn v samotném náboji, tím je náboji udělena energie, která náboji udělí rychlost a následně náboj opouští hlaveň.

Rozdělení palných zbraní:

### a) Krátká kulová zbraň - pistole

Jedná se o nejrozšířenější druh palné zbraně. Jde o samonabíjecí zbraň. Opakované nabití se děje energie od předchozího výstřelu, kdy dojde k provedení funkčního cyklu zbraně a nabití nového náboje ze zásobníku do komory. K iniciaci dalšího výstřelu je nutné opět stisknout spoušť, tudíž se nejedná o zbraň automatickou. Pistole zde bude uvedena podrobněji, přičemž ostatní typy zbraní jsou konstrukčně podobné, co se týče jednotlivých součástí.



Obr. 2.1 Částečný řez pistolí, převzato z [1].

- *Tělo - Jedná se o základní část palné zbraně, nese spoušťové i část bicího ústrojí, jsou v něm drážky pro vedení závěru a rukojeť slouží zároveň jako zásobníková šachta.*
- *Závěr - Slouží zejména pro uzamčení komory při výstřelu, dále také jako hmatník pro natažení závěru (tj. zasunutí náboje do nábojové komory respektive vytažení z nábojové komory, natažení bicího mechanismu, opětovné uzamčení); nese další důležité součástky jako např. úderník či mířidla.*
- *Hlaveň - Vede střelu než opustí zbraň, za pomoci drážek jí uděluje rotaci (čímž zvyšuje přesnost); v zadní části hlavně se nachází nábojová komora – v ní je náboj těsně před výstřelem.*
- *Muška a hledí - Slouží k zamíření zbraně, přímka spojující hledí, mušku a záměrný bod na cíli se nazývá záměrná.*
- *Uzamykací ozuby - Starají se o to, aby byl při výstřelu závěr uzamknut s hlavní v jeden pevný celek (tzv. uzamčený systém závěru).*
- *Výstražník - Signalizuje přítomnost náboje v nábojové komoře.*
- *Vytahovač - Při pohybu závěru vzad vytahuje drápkem za drážku nábojnici nebo náboj z nábojové komory.*
- *Vyhazovač - Těsně před zadní úvratí závěru narazí vytahovačem tažená nábojnice či náboj na vyhazovač, který ji/ho vyhodí ze zbraně ven.*
- *Kohout - Po stisknutí spouště dopadá kohout na zápalník, který dále naráží na zápalku náboje a odpaluje ho.*
- *Bicí pružina - Udržuje kohout odpružený. Má přímý vliv na odpálení náboje.*
- *Střenky - Poskytují lepší úchop.*
- *Zásobník - Zásobuje zbraň náboji.*
- *Podavač - Odpružená součástka v zásobníku, která tlačí náboje vzhůru k závěru; po odpálení posledního náboje tlačí podavač na záchyt závěru a způsobí tak, že po poslední ráně zůstane závěr v zadní (otevřené) poloze.*
- *Vypouštěč zásobníku - Vysouvá zásobník ze zbraně.*
- *Vypouštění kohoutu - Pomocí něho lze bezpečně spustit již natažený kohout, i v případě že náboj se již nachází v nábojové komoře.*
- *Záchyt závěru - Posunutím do horní polohy je možné zajistit závěr.*

- Vratná pružina - *Tlačí závěr do přední (klidové) polohy, působí opačným směrem oproti zpětnému rázu při výstřelu, je omotána kolem tyčky vedení vratné pružiny.*

b) Krátká kulová zbraň - revolver

Jedná se o vícerannou zbraň, přičemž konstrukce všech revolverů je velmi podobná. K přípravě dalšího náboje k výstřelu a natažení bicího ústrojí zde dochází ne automaticky, ale pomocí promáčknutí spouště, případně natažením samotného kohoutu. Jednotlivé náboje jsou umístěny v otočném válci. Tyto zbraně mají oproti předchozímu typu menší počet nábojů v zásobníku.

c) Dlouhá kulová zbraň - malorážka, puška

Jedná se o dlouhou palnou zbraň, přičemž dlouhá palná zbraň dle zákona o zbraních znamená, že délka hlavně je delší než 300 mm, případně celková délka zbraně je větší než 600 mm. Princip zbraně je stejný jako v přechodících případech.

d) Dlouhá broková zbraň - brokovnice

Jedná se o zbraň, která má brokové hlavní, nejčastěji dvě. Do brokových hlavní jsou umístěny náboje. K nabíjení dochází sklopením brokových hlavní a umístění nábojů, které obsahují broky, odtud je odvozen název brokovnice. Brokovnice může mít buď hlavní umístěné nad sebou (kozlice) nebo vedle sebe (dvojka).

e) Dlouhá kulová samočinná zbraň - útočná puška, samopal

Jedná se o palnou zbraň, která umožňuje plně automatickou střelbu případně střelbu jednotlivými ranami. Závěrový mechanismus je stejně jako u pistole poháněn plyny od spalování střelného prachu od předchozího výstřelu.

V palných zbraních se používají pružiny k různým účelům. Bicí pružina je nedílnou součástí každé zbraně. Bicí pružina u zbraní udržuje odpružený kohout. Po stlačení pružiny a následném stisknutí spouště dochází k uvolnění mechanické energie z pružiny, kohout dopadá na zápalník, který narazí na zápalku náboje, a tím dochází vlivem zažehnutí zápalky náboje k jeho odpálení. K tomu, aby pružina umožňovala snadné natažení kohoutu a zároveň byla schopna kohoutu a tím i zápalníku dodat dostatečnou energii, aby došlo k zažehnutí zápalky, musí být pružina správně navržena.

Dále se v palných zbraních nachází vratná pružina, která tlačí závěr do klidové (přední) polohy. Tato pružina je omotána kolem tyčky vedení vratné pružiny, neboť by u ní mohlo snadno dojít k vybočení. Kromě vratné pružiny se ve zbraních vyskytují i pružiny spouště, západky, pojistky a jiné.

### 3 Pružina z technického hlediska

Následující kapitola, zabývající se technickým hlediskem pružin jako strojních součástí byla, vypracována na základě literatury podle zdroje [2].

Pružiny patří mezi strojní součásti, ve kterých vlivem elastické deformace materiálu, dochází k akumulaci mechanické energie. K tomu, aby pružina měla značnou schopnost elastické deformace, je potřeba vyrábět pružiny z materiálů o vysoké poddajnosti.

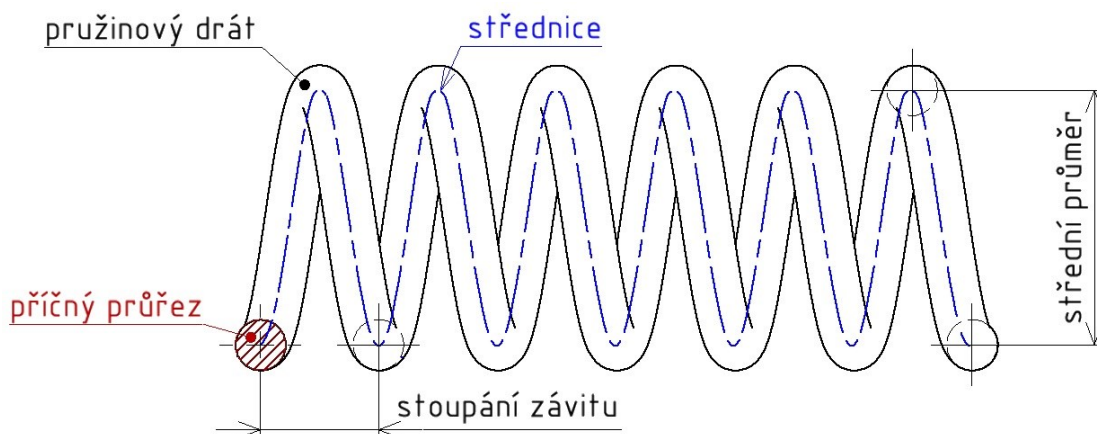
Pružiny jsou strojní součásti, které pracují při proměnném zatížení a vysokých napětí. Každá pružina je definována svou tuhostí, která závisí především na užitém materiálu. Tuhost pružiny je konstantní pouze u pružin s lineární charakteristikou nebo v lineární oblasti nelineární charakteristiky. U nelineárních pružin je proměnlivá.

Kromě akumulace mechanické energie mohou pružiny sloužit také k vyvození předepsané velikosti síly nebo momentu, k tlumení otřesů, rázů nebo kmitání nebo k pružnému spojení dvou či více součástí. Pružiny, umožňující pohlcovat nebo vyvozovat předepsané síly, jsou nejčastěji tlačné nebo tažné. K vyvozování nebo pohlcování kroticích momentů se používají pružiny zkrutné. Typickou ukázkou pružin používaných k tlumení rázů jsou pružiny pérování, které jsou součástí tlumičů u automobilů.

Vzhledem k zaměření bakalářské práce se zaměříme na tlačné šroubovitě válcové pružiny.

#### 3.1 Tlačné šroubovitě válcové pružiny

Jedná se o pružiny, u kterých střednice drátu vytváří šroubovici s konstantním nebo proměnným úhlem stoupání. Podstatné je, že v obou případech je průměr pružiny po celé délce pružiny konstantní (tj. neměnný), viz obr. 3.1.



Obr. 3.1 Popis tlačné šroubovitě válcové pružiny.

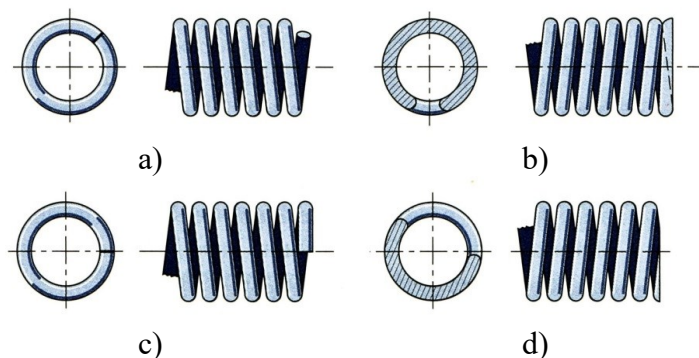
Válcová šroubovitá pružina je nejhojněji využívaný druh pružiny. Tyto pružiny jsou vyráběny ve čtyřech základních provedeních, které se liší počtem závěrných a obrobených závitů a způsobem, kterým je provedena opěrná plocha, viz obr. 3.2.

Závěrné závity pružiny jsou ty závity pružiny, které vytvářejí oporu činným závitům při stlačování pružiny, při kterém dochází k její deformaci. Tyto závity jsou souosé s činnými závity a od činných závitů se liší tím, že úhel stoupání činných závitů se na rozdíl od závěrných v průběhu zatěžování mění vlivem stlačení, případně roztažení pružiny.

Deformací pružiny se myslí funkční deformace<sup>1</sup>, nikoliv deformace porušující, která by způsobovala trvalou deformaci, a tím i znehodnocení pružiny. Obrobenými závity se rozumí krajní závity pružiny, které jsou zbroušeny do roviny kolmé k ose pružiny. Zbroušení se provádí z toho důvodu, aby pružina lépe dosedala na opěrné plochy.

Obecně u šroubových tlačných pružin rozlišujeme čtyři základní provedení zakončení (znázorněna na obr 3.2):

- a) **Otevřené neobrobené:** Pružinový drát má tvar šroubovice, která není nikterak porušena. Tím je myšleno, že žádné závity nejsou nikterak přihnuty ani obrobené.
- b) **Uzavřené neobrobené:** Koncový závit pružiny je přihnuty k závitů předchozímu natolik, že má nulový úhel stoupání a vytváří tak dosed pružiny, tudíž v ukončení dochází k porušení šroubovice. Takto přihnuty závit může být pouze jeden, nebo jich může být více.
- c) **Otevřené obrobené:** Pružinový drát je stejně jako u předchozího způsobu ukončení pružiny ve tvaru šroubovice, která není nikterak porušena, s tím rozdílem, že koncový závit je obroben (nejčastěji zbroušen) do roviny kolmé k ose pružiny.
- d) **Uzavřené obrobené:** Koncový závit je opět přihnuty k předchozímu, ale navíc je ještě obroben (zbroušen) do roviny kolmé k ose pružiny<sup>2</sup>, čímž dochází k vytvoření větší opěrné plochy pružiny. Toto zakončení se používá, pokud je u pružiny požadovaný rovnoměrný přenos zatížení mezi opěrnými plochami pružiny a dotýkajícími se součástmi.



Obr. 3.2 Typy zakončení, převzato z [2],

a) *Otevřené neobrobené*, b) *Uzavřené neobrobené*, c) *Uzavřené obrobené*, d) *Otevřené obrobené*.

<sup>1</sup> Funkční deformací je myšlena taková míra deformace, na kterou byla pružina zkonstruována (dimenzována).

<sup>2</sup> Obrobení se provádí z toho důvodu, že i při přihnutí závěrných závitů nejsme schopni dosáhnout toho, aby přihnuty závit byl dokonale kolmý k ose pružiny.

Celkový počet závitů je dán součtem činných a závěrných závitů. Zpravidla to nemusí být celé číslo, ale zaokrouhluje se minimálně na polovinu závitu.

U pružin se zpravidla provádí předpnutí, což je proces při výrobě pružin, popřípadě jejich montáži, který spočívá v tom, že se pružina vyrobí zpravidla o 10 až 30 % delší, než je zapotřebí, a následně se zatíží napětím nebo deformací, které způsobí stlačení na délku, ve které je překročena mez kluzu materiálu 1,1-1,3krát. Tímto procesem pružina získá po odlehčení díky trvalé deformaci požadovanou délku v nezátíženém stavu. Tuto délku označujeme jako volnou délku pružiny. Při dodržení správného rozpětí napětí dojde v pružině ke vzniku zbytkového napětí, které má opačný smysl než napětí vznikající během provozního zatěžování pružiny, čímž dochází ke zvýšení únosnosti pružiny.

Předpnutí se používá zejména u pružin, které slouží k akumulaci mechanické energie. Pokud by bylo napětí při předpětí menší než minimální, pružina by se nezkrátila na požadovanou délku. Naopak při zatížení příliš velkým napětím by v pružině mohlo dojít ke vzniku makroplastických deformací. Tyto deformace by měly za následek nepřijatelnou deformaci, která by způsobila provozní nefunkčnost pružiny.

Pružiny během zatěžování mohou také vybočit. K vybočení dochází v důsledku ztráty deformační stability<sup>3</sup>. Tato deformace mnohdy způsobuje vznik funkčně nepřijatelných deformací, tudíž se je musíme snažit nějakým způsobem omezit. Jistou ochranou vůči vybočení je použití vodícího trnu nebo tyčky, které způsobí, že pružina je schopna vybočit pouze do určité míry dané vůlí mezi pružinou a vodícím trnem.

Výroba mechanických pružin z patentovaného drátu kruhového průřezu z nelegované oceli, které se používají jako bicí pružiny a jsou proto předmětem této práce, se řídí normou ČSN EN 10270-1. Tato norma stanovuje na základě druhu zatěžování pružiny (statické nebo kvazistatické<sup>4</sup> - S, dynamické - D) a velikosti meze pevnosti drátu (nízká- L, střední- M, vysoká- H) třídy drátů označované jako SL, SM, SH, DM, DH. Pro každou třídu drátů je přesně definovaný materiál s přesně definovaným chemickým složením. Oblasti použití jednotlivých tříd drátů jsou vyjmenovány níže:

- **SL** - Tlačné, tažné nebo zkrutné pružiny, které jsou převážně vystaveny nízkému statickému zatížení.
- **SM** - Tlačné, tažné nebo zkrutné pružiny, které jsou vystaveny střednímu statickému nebo ojedinělému dynamickému zatížení.
- **DM** - Tlačné, tažné nebo zkrutné pružiny, které jsou vystaveny střednímu dynamickému zatížení. Ostatní pružiny, které jsou vystaveny vysokému ohybovému namáhání.
- **SH** - Tlačné, tažné nebo zkrutné pružiny, které jsou vystaveny vysokému statickému nebo nízkému dynamickému zatížení.
- **DH** - Tlačné, tažné zkrutné a ostatní pružiny, které jsou vystaveny vysokému statickému nebo střednímu dynamickému zatížení.

---

<sup>3</sup> Ztráta stability je proces, při kterém se výchozí geometrická konfigurace stává nestabilní a stabilní konfigurací se stává jiná geometrická konfigurace.

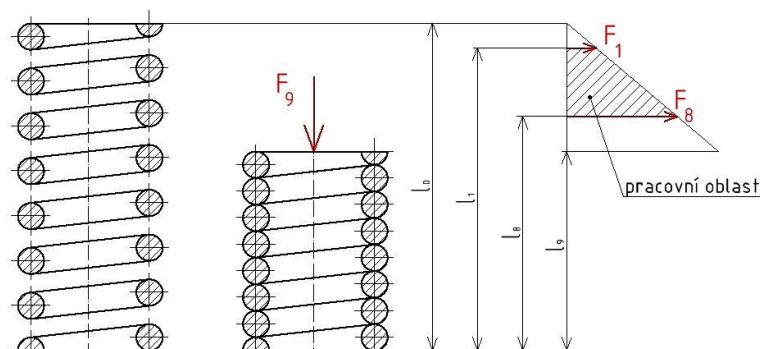
<sup>4</sup> Kvazistatické zatížení znamená zahrnutí dynamických složek do statických hodnot nebo použití ekvivalentních dynamických součinitelů ke statickým zatížením.

Tato norma je pro výrobce pružin v České republice závazná. Dále tato norma udává způsob dodávání pružin, typy povlaků (ph- fosfátový, Cu- měděný, Z-zinkový, ZA- zinek/hliníkový), konečné úpravy povrchu, metody zkoušení pružin<sup>5</sup> a podobně. V normě je taktéž uvedena tabulka *Mechanické vlastnosti a požadavky na kvalitu pro druhy drátu SL, SM, DM, SH a DH* udávající přípustné mezní úchytky, pevnost drátu v tahu, minimální počet krutů při zkoušce krutem apod. v závislosti na jmenovitém rozměru pružinového drátu a třídě drátu. Konkrétním příkladem označení pružinového drátu je například *Pružinový drát ČSN EN 10270-1-SM-2,50ph*. Toto označení popisuje pružinový drát podle normy ČSN EN 10270-1, třídy SM se jmenovitým průměrem drátu 2,5 mm, jehož povrch je fosfátován.

Při zatěžování tlačné šroubovitě válcové pružiny je drát pružiny, ze kterého je pružina vyrobena, dominantně namáhán krutem. Z tohoto důvodu se u pružinových drátů provádí zkouška krutem. Zkouška jednoduchým krutem<sup>6</sup> dle normy ČSN EN 10270-1: *Při zkoušce jednoduchým krutem musí být zkušební těleso upnuto do zařízení takovým způsobem, že jeho podélná osa je zároveň osou upínacích hlav a zkušební těleso během zkoušky v poloze setrvává. Jedna upínací hlava se musí otáčet, pokud možno stále stejnou rychlostí otáčení, dokud se zkušební těleso nezlomí. Rychlost otáčení je stanovena v EN 10218-1 (jako funkce průměru drátu). Je počítán počet ukončených otáček otočení upínací hlavy. Volná délka mezi sevřením musí být jednotně  $100 \times d$  ( $d$  = jmenovitý průměr drátu) s maximem po 300 mm.*

U pružin obecně rozlišujeme základní označení délek pružiny podle míry stlačení a tomu odpovídající zátěžné síly, které toto stlačení způsobily:

- $l_0$  = Délka pružiny v nezatíženém stavu (výrobní délka pružiny).
- $l_1$  = Délka pružiny v předepjatém stavu, tj. stálé minimální stlačení pružiny.
- $l_8$  = Délka pružiny při maximálním zatížení, které může během provozu nastat.
- $l_9$  = Délka pružiny při dosednutí<sup>7</sup> všech závitů na sebe.
- $F_1$  = Minimální pracovní síla (síla předpětí) způsobující stlačení pružiny na délku  $l_1$ .
- $F_8$  = Maximální pracovní síla způsobující stlačení pružiny na délku  $l_8$ .
- $F_9$  = Zatěžující síla, která způsobí dosednutí závitů na sebe.



Obr. 3.3 Znárodnění délek pružiny a tomu odpovídajících sil.

<sup>5</sup> Mezi zkoušky pružinových drátů patří zkouška navíjením kolem trnu, zkouška jednoduchým krutem a zkouška jednoduchým ohybem, případně další zkoušky.

<sup>6</sup> Krut je dominantní způsob namáhání pružinového drátu u pružiny s malým úhlem stoupání.

<sup>7</sup> Při dosednutí závitů na sebe dochází ke skokovému nárůstu síly, tento problém se dá odstranit použitím jiného typu pružiny (např. kónická pružina).

## 4 Pružina z hlediska pružnosti a pevnosti

Následující kapitola má posloužit k základnímu seznámení s pružností a pevností. Tato kapitola byla vypracována podle [3].

Pružnost a pevnost se obecně zabývá řešením problémů, které jsou spojeny s napjatostí, deformací a porušováním strojních součástí. V dřívějších dobách jsme byli schopni určovat deformaci a napjatost pouze u těles jednoduchých geometrických tvarů a to ještě při použití silných předpokladů o napjatosti a deformaci, které byly formulovány pouze na základě výsledků mnohých experimentů. Tyto předpoklady sice umožňovaly řešení napjatosti a deformace na jisté rozlišovací úrovni, ale jejich obecnější využití bylo velmi omezené. V pozdějších dobách, díky širšímu nasazení počítačové techniky (tj. v posledních 40 -ti letech), jsme již schopni pro lineární úlohy určovat napjatost a deformaci i těles složitějších geometrických tvarů.

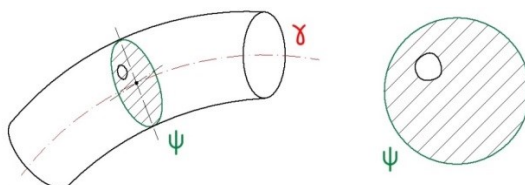
Strojní součásti jsou často tvarově složitá tělesa a jen málokdy mají jednoduchý geometrický tvar (hranol, kvádr, kužel, apod.). Pro výpočet vinuté tlačné pružiny nám jako modelové těleso přesto postačí prut, který je v pružnosti a pevnosti považován za speciální těleso.

### 4.1 Prutové charakteristiky

Prut jakožto teoretický model reálného tělesa je v pružnosti a pevnosti nejjednodušším možným tělesem, které je charakterizováno nejen svým geometrickým tvarem, ale také souborem předpokladů o jeho deformaci a napjatosti. Soubor těchto předpokladů obecně označujeme jako prutové charakteristiky, které jsou podrobně popsány v následujících podkapitolách.

#### 4.1.1 Geometrické charakteristiky

- Prut je jednoznačně určen střednicí  $\gamma$ , která vytváří rovinnou či prostorovou<sup>8</sup> křivku, a v každém bodě střednice příčným průřezem<sup>9</sup>  $\psi$ , který obsahuje všechny body tělesa, jež leží v normálové rovině, tj. rovině kolmé na střednici prutu  $\gamma$ .
- Příčný průřez je spojitou, jedno nebo vícenásobně souvislou oblastí, jež je kolmá na střednici, ohraničená obrysem a charakterizovaná průřezovými charakteristikami, kterými jsou například lineární (k osám  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) a kvadratické momenty (osové, deviační, polární), průřezové moduly ( $W_O$ ,  $W_K$ ), apod.
- Střednice je spojitou, po částech hladkou křivkou, která má konečnou délku.
- Délka střednice je podstatně větší než rozměry příčného průřezu  $\psi$ .
- Střednice je spojnici geometrických těžišť příčných průřezů.



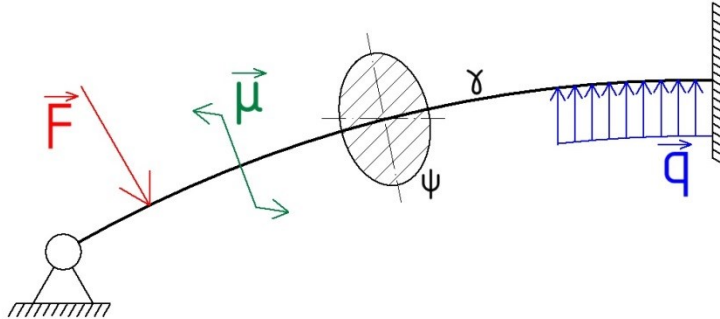
Obr. 4.1 Znárodnění střednice  $\gamma$  a příčného průřezu  $\psi$ .

<sup>8</sup> Prostorovou křivkou je i šroubovice, kterou vytváří střednice tlačné šroubovitě válcové pružiny.

<sup>9</sup> U pružin je příčným průřezem nejčastěji kruhový průřez.

### 4.1.2 Vazbové charakteristiky

- Vazby omezují pouze posuvy a úhly natočení střednice.
- Zatížení působí na střednici, přičemž zatížením mohou být síly, silové dvojice nebo rozložené silové (liniové) zatížení.



Obr. 4.2 Zatížený prut se střednicí  $\gamma$  a příčným průřezem  $\psi$ .

### 4.1.3 Deformační charakteristiky

- Střednice prutu  $\gamma$  zůstává v průběhu deformace, která je vyvolána zatěžováním, spojitou po částech hladkou křivkou.
- Příčné průřezy zůstávají v průběhu zatěžování příčnými průřezy, tzn.: příčné průřezy si v průběhu zatěžování zachovávají rovinnost a kolmost k deformované střednici a vůči sobě se mohou v průběhu deformace posouvat či natáčet, což závisí na charakteru zatěžování:
  - Vzájemně se přibližují a deformují při zatížení tlakovou silou. Deformací je myšleno zvětšení průřezu při přiblížení průřezů vlivem tlakové síly, viz obrázek níže.



Obr. 4.3 Zatížení tlakovou silou.

- Vzájemně se oddalují a deformují při zatížení tahovou silou. Deformací je při zatížení tahovou silou zmenšení příčného průřezu, jak je patrné na obrázku níže.



Obr. 4.4 Zatížení tahovou silou.

- Natačejí se kolem osy ležící v příčném průřezu  $\psi$  a deformují při ohybu. Při deformaci u ohybu dochází ke změně tvaru příčného průřezu, jak je znázorněno na obrázku níže.



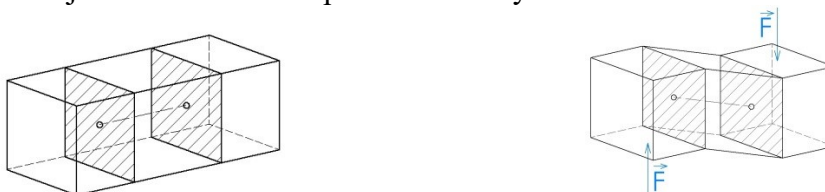
Obr. 4.5 Zatížení ohybovým momentem.

- Natačejí se kolem osy kolmé k příčnému průřezu  $\psi$  a nedeformují se při krutu<sup>10</sup>. Při krutu nedochází k deformaci příčného, ale pouze jeho natočení kolem střednice.



Obr. 4.6 Namáhání kruticím momentem.

- Posouvají se bez deformace při zatížení smykovou silou<sup>11</sup>.



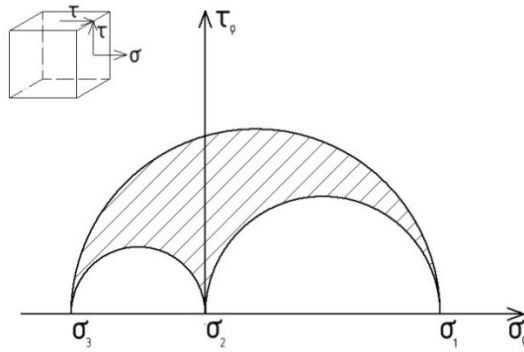
Obr. 4.7 Zatížení posouvající silou.

#### 4.1.4 Napjatostní charakteristiky

- Napjatost v libovolném bodě prutu je vždy určena normálovým napětím  $\sigma$  a smykovým napětím  $\tau$  v příčném řezu vedeném tímto bodem, přičemž při zatěžování prutu dochází v prutu ke vzniku zvláštního typu napjatosti, kterou označujeme jako prutovou napjatost. Příčným řezem vedeným daným bodem je řez kolmý na osu střednice.

<sup>10</sup> Krut je dominantní zatížení u pružiny, která má malý úhel stoupání.

<sup>11</sup> Při smyku je posuv rovin vždy doprovázen vytočením rovin vůči sobě.



Obr. 4.8 Znáznornění prutové napjatosti v Mohrově rovině a na elementární krychli.

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad [\text{MPa}] \quad (4.1)$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad [\text{MPa}] \quad (4.2)$$

- Rovnice (4.1) a (4.2) vyjadřují, jak lze určit maximální a minimální normálové napětí a maximální smykové napětí. Nejčastěji používanými jednotkami při určování napětí jsou ve strojírenství MPa, které jsou definované jako  $\frac{N}{mm^2}$ .

Při řešení problémů pomocí teorie prutů je nutné se zabývat použitelností dané teorie, tj. zda v průběhu zatěžování jsou splněny prutové předpoklady, tzn., zda danou teorií můžeme použít k řešení problému.

## 4.2 Kombinované namáhání a mezní stav pružnosti

Následující podkapitola byla vypracována s použitím další literatury [4] a [5], která konkrétněji pojednává o dané problematice.

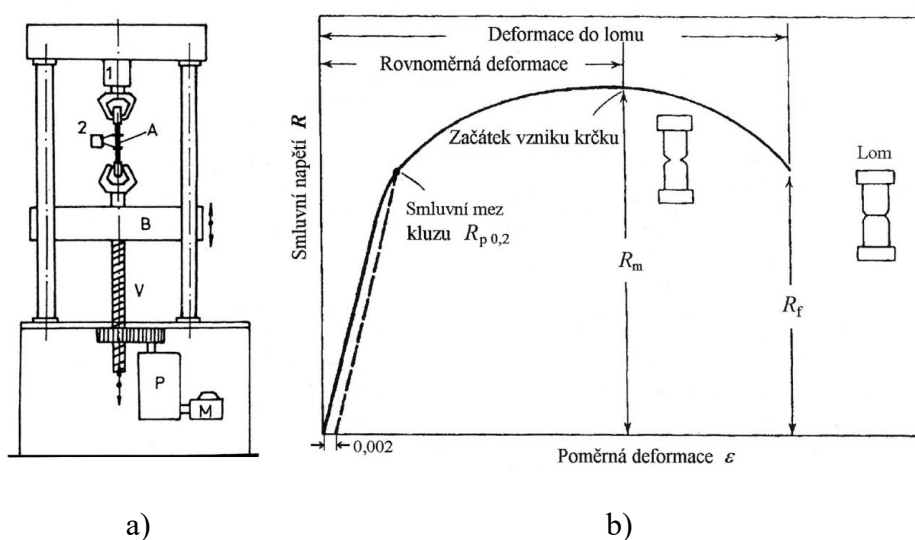
Jak již bylo zmíněno, prutová napjatost je charakterizována normálovým napětím  $\sigma$  a smykovým napětím  $\tau$  v řezu, který je součástí příčného průřezu  $\psi$ . Z napětí, která působí v příčném průřezu, jsme schopni hodnotit bezpečnost vůči meznímu stavu pružnosti (dále MSP) dané součásti. K posouzení, zda dojde k MSP, musíme v dané součásti najít nebezpečný řez<sup>12</sup> a v nebezpečném řezu musíme určit nebezpečná místa<sup>13</sup>. K posuzování MSP u prutů, které jsou namáhané kombinovaným namáháním (tj. kombinací tahu, tlaku, smyku, ohybu a krutu), používáme dvě základní podmínky plasticity, kterými jsou podmínka plasticity podle teorie maximálních smykových napětí označovaná  $\max\tau$  a podmínka plasticity podle teorie měrné energie napjatosti změny tvaru (HMH). Pomocí těchto teorií jsme schopni určit redukované napětí, díky kterému jsme následně schopni posoudit bezpečnost vůči MSP. Redukované napětí  $\sigma_{RED}$  je napětí fiktivní jednoosé tahové napjatosti, přiřazené obecné napjatosti tak, že bezpečnost vůči vyšetřovanému meznímu stavu je stejná.

Mezní stav pružnosti obecně nastává, jestliže v materiálu dochází ke vzniku první makroplastické deformace. Na rozdíl od elastické deformace je plastická

<sup>12</sup> Řez v místě vrubu, který způsobuje koncentraci napětí, případně v místě s největším zatížením.

<sup>13</sup> Nebezpečná místa jsou místa v nebezpečném řezu, ve kterých dochází k superpozici (skládání) napětí.

deformace porušující deformací, tzn., způsobuje nevratné poškození součásti. Dokud se pohybujeme v elastické oblasti materiálu, deformace nejsou trvalé a při odtížení se daná součást vrátí do původního stavu. Vzhledem k tomu, že plastická deformace je porušující, je také nechtěná a nebezpečná. MSP nastává v případě, že v průběhu zatěžování dosáhne napětí  $\sigma_{red}$  hodnoty napětí  $\sigma_k$  ( $R_e$ ), které je materiálovou charakteristikou a označuje se jako mez kluzu. Mez kluzu  $\sigma_k$  se získává z tahových zkoušek materiálu, které se provádějí na zkušebních vzorcích<sup>14</sup> tak, že do zkušebního stroje upneme vzorek a zatěžujeme ho tahovou silou. Pokud dojde k dosažení meze kluzu materiálu, při odtížení materiálu již nedochází k návratu do původního strukturálního stavu, jako tomu je v oblasti elastické deformace. V případě dalšího zatěžování a dosažení meze pevnosti  $\sigma_{Pt}$  ( $R_m$ ) dochází k tvorbě krčku a následnému lomu součásti.



Obr. 4.9 a) Schéma univerzálního zkušebního stroje, převzato z [4].  
b) Smluvní diagram napětí-deformace, převzato z [4].

#### 4.2.1 Podmínka plasticity $\max\tau$ (Trescova, Guestova)

K vypracování tohoto textu byl kromě zdroje [3] navíc použit zdroj [2], ve kterém je daná problematika popsána důkladněji.

Podmínka plasticity  $\max\tau$ , jinak také podmínka plasticity podle teorie maximálních smykových napětí, říká, že: *Plastická deformace v libovolném bodě tělesa vznikne tehdy, jestliže maximální smykové napětí v tomto bodě je rovno nebo větší, než je maximální smykové napětí v okamžiku vzniku prvních plastických deformací ve zkušebním tělese ze stejného materiálu při zkoušce tahem.* Nebo ji můžeme definovat jako: Mezní stav pružnosti při monotónním zatěžování materiálu v základním strukturálním<sup>15</sup> stavu nastane právě tehdy, když maximální smykové napětí dosáhne mezní hodnoty  $\tau_{MK}$ , které je materiálovou charakteristikou. Podmínku plasticity (4.5) dostaneme z porovnání vztahů pro jednoosou (4.3) a obecnou napjatost (4.4):

<sup>14</sup> Jako zkušební vzorky se používají tyče kruhového průřezu, které jsou důkladně broušeny a leštěny, aby se zbavily všech vrypů a škrábanců, které by mohly sloužit jako koncentrátoři napětí.

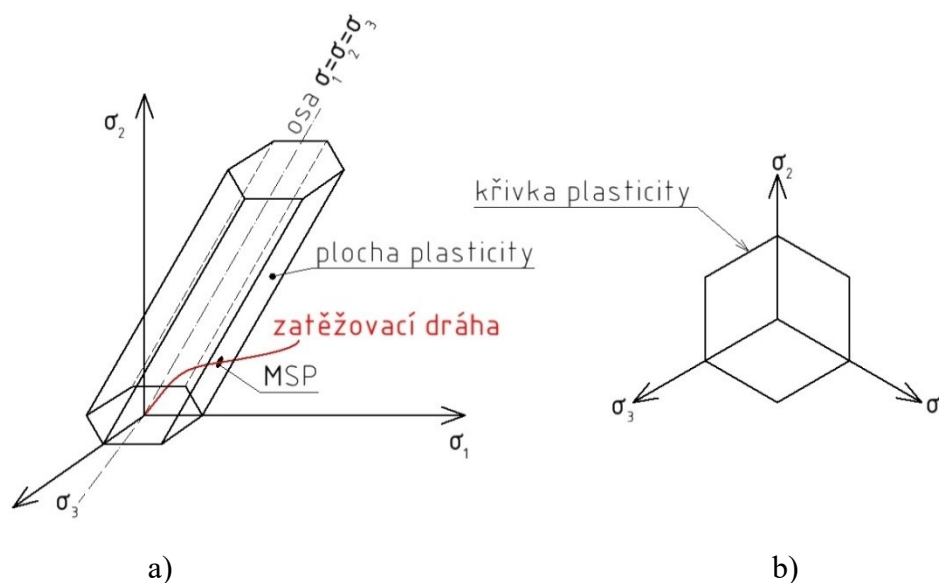
<sup>15</sup> Stav materiálu bez trhlin a zbytkových napětí.

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_k}{2} \quad [\text{MPa}] \quad (4.3)$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad [\text{MPa}] \quad (4.4)$$

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad [\text{MPa}] \quad (4.5)$$

Napětí označená  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  jsou hlavní napětí, pro která platí:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Napětí  $\sigma_1$  označujeme jako maximální hlavní napětí a napětí  $\sigma_3$  jako minimální hlavní napětí, přičemž hlavní napětí je normálové napětí v takové rovině, ve které jsou smyková napětí nulová.



Obr. 4.10 a) Znáznornění podmínky  $\max \tau$  v Haighově prostoru, b) Oktaedrické roviny.

#### 4.2.2 Podmínka plasticity HMM

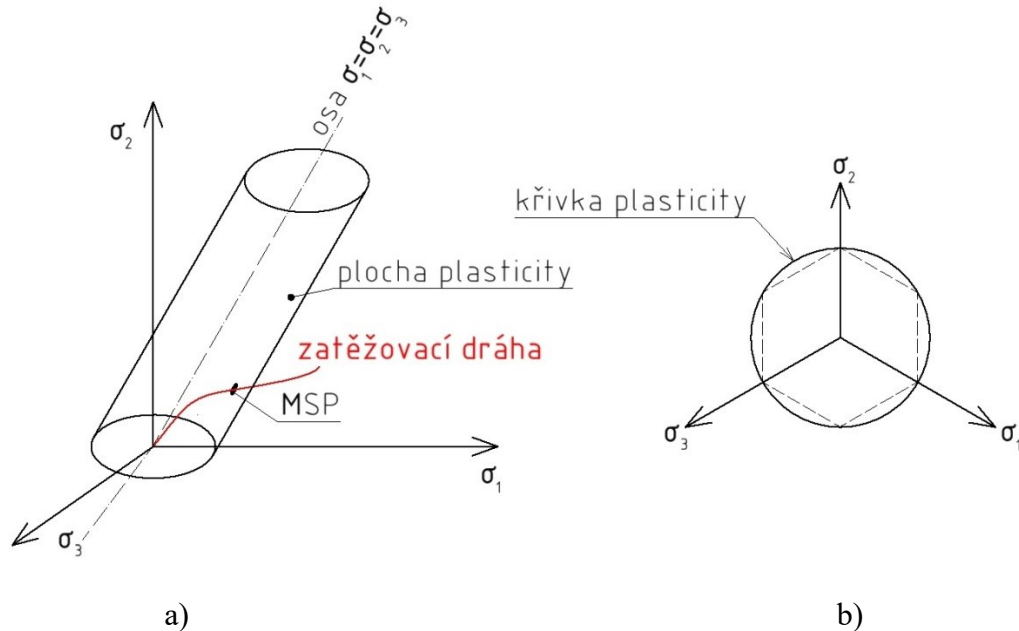
Tento text byl vypracován dle stejných zdrojů jako text pojednávající o podmínce plasticity  $\max \tau$ .

Podmínka plasticity HMM říká: *Plastická deformace v libovolném bodě tělesa nastává, když objemová hustota deformační energie změny tvaru (tj. měrná energie napjatosti změny tvaru) v tomto bodě je rovna nebo větší, než je objemová hustota deformační energie změny tvaru v okamžiku vzniku prvních plastických deformací ve zkušebním tělese ze stejného materiálu při tahové nebo tlakové zkoušce.* Jinak řečeno, podle podmínky plasticity HMM mezní stav pružnosti při monotónním zatěžování součásti, která se nachází v základním strukturním stavu, nastane tehdy, pokud oktaedrické napětí dosáhne mezní hodnoty  $\tau_{OK}$ , které je materiálovou charakteristikou. Opět z porovnání vztahů pro jednoosou (4.6) a obecnou (4.7) napjatost dostáváme podmínku plasticity (4.8) ve tvaru:

$$\tau_{OK} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \sigma_k \quad [\text{MPa}] \quad (4.6)$$

$$\tau_{OK} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \quad [\text{MPa}] \quad (4.7)$$

$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \quad [\text{MPa}] \quad (4.8)$$



Obr. 4.11 a) Znáornění podmínky HMH v Haighově prostoru, b) Oktaedrické rovině.

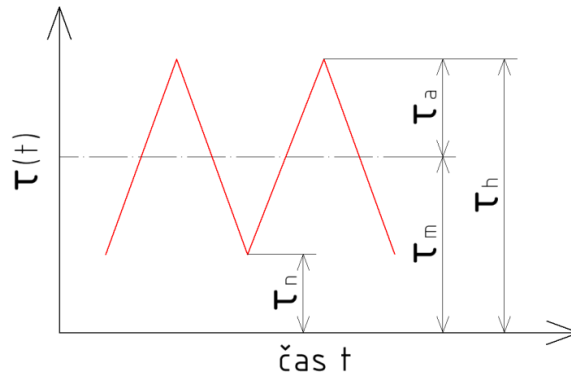
### 4.2.3 Porovnání podmínek plasticity

Podmínka plasticity HMH je vhodná k zjišťování příčin porušení strojních součástí, zatímco podmínka plasticity  $\max\tau$  se používá spíše k navrhování konstrukcí, neboť je konzervativnější.

### 4.3 Mezní stav únavové pevnosti

Cílem této práce je výpočet a návrh bicí pružiny palné zbraně. Proto je nezbytné uvést základní problematiku týkající se únavového porušování.

Posouzení mezního stavu únavy nebude v této práci uvedeno z toho důvodu, že přesahuje znalosti získané během základního bakalářského studia, neboť v případě bicí pružiny se jedná o nízkocyklovou únavu a zároveň se jedná o pulzující cyklus, jelikož je pružina montována s předpětím. Při uvažování pouze smykových napětí v pružině, což lze při malém úhlu stoupání a velkém poměru vinutí, vypadá průběh napětí v čase dle obr. 4.12.



Obr. 4.12 Časový průběh smykového napětí u tlačné šroubovitě pružiny.

- $\tau_n$  = Dolní napětí cyklu
- $\tau_h$  = Horní napětí cyklu.
- $\tau_m$  = Střední napětí.
- $\tau_a$  = Amplituda napětí.

K únavovému porušování dochází v důsledku časově proměnné napjatosti, resp. deformace, která je způsobena časově proměnným zatížením tělesa. Příčinou únavového poškození je nevratná plastická deformace, která končí vznikem únavového lomu. Jelikož plastická deformace je nevratná, má poškození při cyklické napjatosti kumulativní charakter, což vyjadřuje skutečnost, že k poškození přispívá každý cyklus. Poškození, které způsobí jeden zátěžný cyklus, může být zanedbatelné, ale posloupnost zátěžových cyklů vede k lomu materiálu. Tato vlastnost je charakteristická pro únavové poškození a lze ji formou věty vyjádřit následovně:

*Únava materiálu je proces porušování soudržnosti materiálu časově proměnnou napjatostí jako důsledek kumulace poškození střídavou pružně plastickou deformací.*

Působení cyklické napjatosti se projevuje dvěma způsoby, kterými jsou změna mechanických a jiných fyzikálních vlastností a porušování soudržnosti materiálu (tzn. vznikem trhlin a jejich postupných šířením až do lomu).

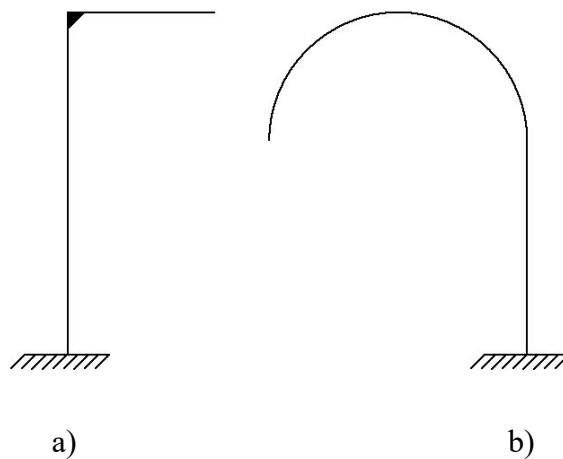
#### 4.4 Rozdělení prutů dle křivosti střednice

Jelikož střednice prutu může mít různý tvar, rozlišujeme pruty na pruty přímé, jejichž střednicí je přímka, a pruty křivé, jejichž střednicí tvoří obecná křivka.

Střednice přímých prutů je hladká spojitá přímka. Křivé pruty rozdělujeme na pruty rovinné, nebo prostorové, to záleží na tom, zda je střednice 2D nebo 3D křivkou. Obecně bychom mohli křivé pruty rozdělit na zakřivené a zalomené pruty. Zakřivené pruty jsou pruty, u kterých je střednice spojitá a hladká křivka. Prut je prizmatický a příčný průřez má alespoň jednu osu symetrie. Při zatěžování dochází vždy ke vzniku kombinovaného namáhání, přičemž u většiny analytických řešení uvažujeme pouze účinek ohybového momentu, neboť ten má dominantní účinek a napětí vyvolaná od ostatních silových účinků mají téměř zanedbatelnou velikost. Příčné průřezy se

v průběhu zatěžování otáčejí kolem osy ležící v příčném průřezu. Prvek uvolňujeme v nedeformovaném stavu.

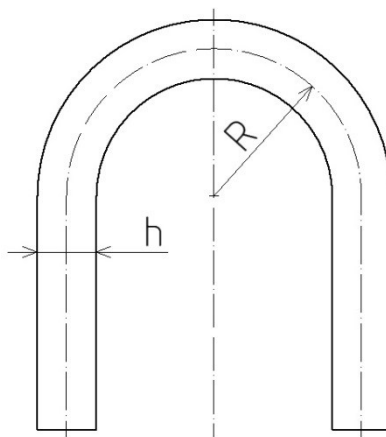
Zalomené pruty jsou tělesa charakteru prutu, jehož střednice je spojitou, ale po částech hladkou křivkou. Tyto části jsou buď přímé, nebo zakřivené. V zalomení prutů nejsou splněny prutové charakteristiky a dominantně dochází k porušení rovinnosti příčných průřezů. Z tohoto důvodu můžeme řešit pouze takové pruty, u nichž součet délek zlomy ovlivněné střednice je podstatně menší, než je celá délka střednice, a zároveň jsme schopni řešit pouze části, které jsou dostatečně vzdálené od zalomení prutu.



Obr. 4.13 a) Zalomený prut, b) Zakřivený prut.

#### 4.5 Teorie zakřivených prutů

U zakřivených prutů záleží na míře zakřivení střednice prutu. Z tohoto hlediska rozlišujeme pruty na slabě a silně zakřivené, přičemž velikost zakřivení posuzujeme pomocí poměru  $R/h$ , kde  $R$  vyjadřuje poloměr křivosti prutu a  $h$  vyjadřuje charakteristický rozměr příčného průřezu.



Obr. 4.14 Zakřivený prut s charakteristickými rozměry.

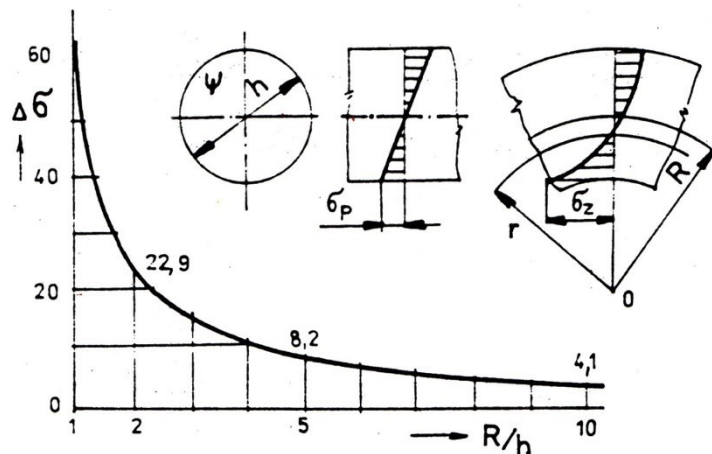
#### 4.5.1 Rozdělení zakřivených prutů

- **Slabě zakřivené pruty:** Z důvodu, že k výpočtům je možné použít vztahy pro přímé prizmatické pruty, je analytický výpočet jednoduchý. Jako slabě zakřivené pruty můžeme řešit pruty pouze do poměru  $R/h \gg 1$ . Relativně přípustné chyby v napětí se dopustíme konkrétně pro poměr  $R/h \geq 5$ .
- **Silně zakřivené pruty:** Analytický výpočet je podstatně složitější než u slabě zakřivených prutů. Napětí má v příčném průřezu jiný průběh, což je způsobeno konkrétně v případě rovinného ohybu, který působí v rovině totožné s rovinou prutu, tím, že během ohybu sice dochází k zachování rovinnosti příčného průřezu, ale rovněž dochází k posunutí neutrální osy<sup>16</sup> směrem ke středu křivosti prutu v důsledku toho, že při natočení příčného průřezu kolem této neutrální osy se prodloužení vnitřního a vnějšího vlákna prutu vztahuje při výpočtu přetvoření k různým délkám na vnitřním a vnějším obvodu zakřiveného prutu, což vyvolává asymetrii přetvoření a tím i asymetrii napětí, přičemž toto napětí má hyperbolický průběh, zatímco u slabě zakřivených prutů je tento průběh prakticky lineární. Jako silně zakřivené pruty označujeme pruty s poměrem  $R/h < 5$ . Nejčastěji se řeší metodou MKP (metoda konečných prvků) pomocí výpočetní techniky (např.: program ANSYS, Abaqus).

#### 4.5.2 Rozdíl v napětí

Na následujícím grafu je uveden procentuální rozdíl napětí při použití vztahů pro zakřivené pruty ( $\sigma_Z$ ) a pomocí vztahů pro přímé pruty ( $\sigma_P$ ) v závislosti na poměru  $R/h$ , který získáme z rovnice (3.9). Ze závislosti je patrné, že použití vztahů pro přímé pruty u prutu silně zakřiveného by způsobilo podstatný rozdíl v napětí.

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma_Z - \sigma_P}{\sigma_Z} \cdot 100 \quad [\%] \quad (4.9)$$



Obr. 4.15 Závislost  $\Delta\sigma$  v procentech na poměru  $R/h$ , převzato z [3].

<sup>16</sup> Neutrální osa je osa, na které jsou napětí a deformace nulové.

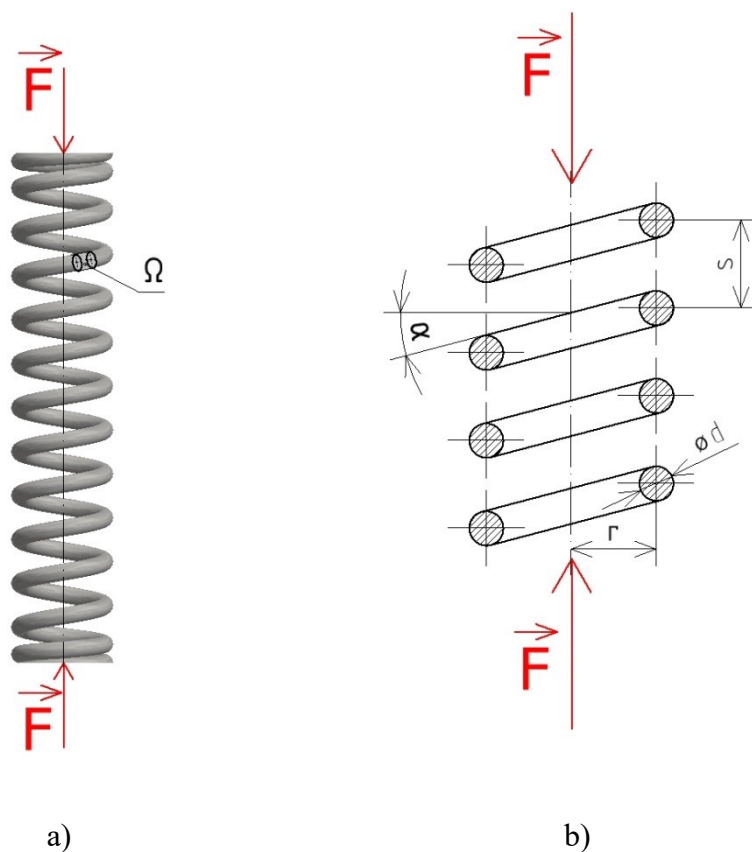
## 5 Odvození analytických výpočtových vztahů

Následující kapitola, zabývající se analytickým výpočtem šroubovitě tlačné válcové pružiny, byla vypracována za pomoci zdrojů [3], [5] a [6]. V těchto zdrojích jsou uvedeny výpočty různých příkladů týkajících se napjatosti a deformace a současně je v nich popsána teorie nezbytná k pochopení dané problematiky.

### 5.1 Analytický výpočet tlačné šroubovitě pružiny

K analytickému výpočtu tlačné pružiny budeme vycházet z teorie slabě zakřivených prutů, to znamená, že poměr  $R/h \gg 1$ , přičemž tomu tak u většiny šroubovitých válcových pružin je i v praxi.

Válcová pružina je zadána průměrem drátu  $\phi d$ , středním poloměrem vinutí  $r$ , počtem závitů  $N$  a úhlem stoupání závitu  $\alpha$ , případně vzdáleností sousedních závitů  $s$  (stoupání jednoho závitu)  $s$ , viz obrázek níže.

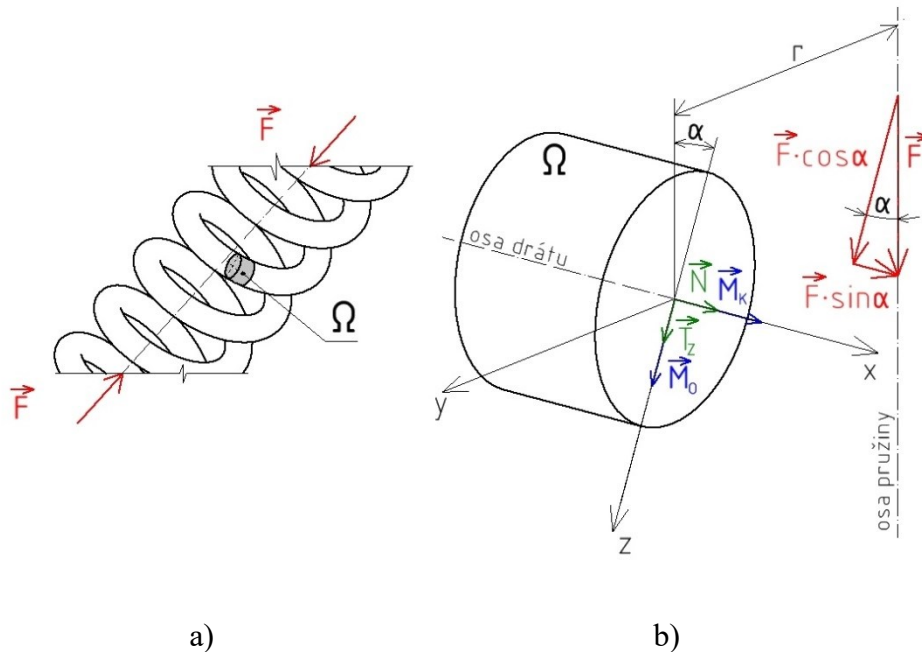


Obr. 5.1 a) Znárodnění pružiny, b) Znárodnění pružiny v řezu.

Výpočet bude odvozen pro libovolně velké zatížení. Při výpočtu je zanedbáno ukončení pružiny (otevřená, nebo uzavřená), ve kterém je ovšem náchylnost k porušení menší.

V první řadě si uvolníme z pružiny prvek  $\Omega$  řezem kolmým k ose drátu. Na tomto uvolněném prvku určíme výsledné vnitřní účinky<sup>17</sup> (dále VVÚ). U pružiny budeme předpokládat, že známe všechny potřebné materiálové charakteristiky (mez kluzu  $Re$ , Poissonův poměr  $\mu$ , apod.). Dále budeme předpokládat malé deformace, z čehož vyplývá, že změna veličin  $r$ ,  $d$  a  $\alpha$  bude v průběhu zatěžování nepodstatná.

### 5.1.1 Určení VVÚ



Obr. 5.2 a) Znáznornění prvku  $\Omega$  v prutu, b) Znáznornění VVÚ a rozložení síly do osy pružiny.

Je patrné, že se jedná o staticky určitou úlohu<sup>18</sup>:  $s = \mu - \nu = 6 - 6 = 0$ . Určení jednotlivých složek VVÚ je triviální záležitostí, přičemž při určování jednotlivých složek vycházíme ze znalosti toho, že síla, která jde ve směru totožném s danou složkou VVÚ, je záporná a síla, která má opačný směr než daná složka VVÚ, má znaménko kladné. Dále neuvažujeme nulové složky VVÚ, což znamená, že daný způsob namáhání v prvku nenastává. V tomto případě jsou nulovými složkami ohybový moment v ose y ( $M_y$ ) a posouvající síla ve směru osy y ( $T_y$ ). Z této úvahy dostáváme tyto vztahy pro jednotlivé VVÚ:

$$\sum F_x = 0: N = -F \cdot \sin \alpha \quad [\text{N}] \quad (5.1)$$

$$\sum F_z = 0: T_z = -F \cdot \cos \alpha \quad [\text{N}] \quad (5.2)$$

$$\sum M_x = 0: M_k = F \cdot r \cdot \cos \alpha \quad [\text{N} \cdot \text{mm}] \quad (5.3)$$

<sup>17</sup> Výsledné vnitřní účinky v příčném průřezu uvádějí uvolněný prvek do statické rovnováhy. Je nutné je určovat

při každé změně zatížení působící na zkoumané těleso, případně při změně tvaru střednice.

<sup>18</sup> Statickou určitost posuzujeme na základě počtu neznámých parametrů  $\mu$  a počtu použitelných rovnic  $\nu$ . Počet neznámých parametrů je roven součtu počtu neznámých sil a momentů.

$$\sum M_z = 0: M_o = -F \cdot r \cdot \sin \alpha \quad [\text{N}\cdot\text{mm}] \quad (5.4)$$

Z VVÚ je patrné, že pružina je namáhána kombinací tlaku, ohybu, krutu a smyku. Od jednotlivých složek VVÚ vznikají v příčném průřezu normálová a smyková napětí, jejichž hodnoty určíme dosazením<sup>19</sup> do vztahů pro výpočet napětí pro jednotlivé způsoby namáhání.

### 5.1.2 Napětí v pružině

Extrémní napětí v nebezpečných místech příčného průřezu dostaneme dosazením absolutních hodnot složek VVÚ do vztahů pro výpočet napětí od jednotlivých typů namáhání ( $\sigma_N$ - normální napětí vyvolané normálovou silou,  $\sigma_{M_o}$ - normální napětí vyvolané ohybovým momentem,  $\tau_T$ - smykové napětí vyvolané posouvající silou,  $\tau_{M_k}$ - smykové napětí vyvolané krouticím momentem). Dosazujeme pouze absolutní hodnoty VVÚ, neboť nás zajímají pouze velikosti napětí, které v příčném průřezu vznikají. Po dosazení do vztahů pro různé typy namáhání dostáváme:

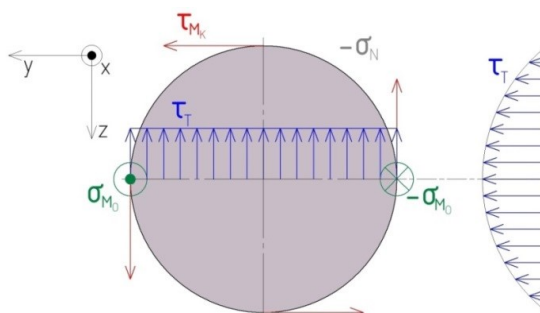
$$\sigma_N = \frac{N}{S} = \frac{4 \cdot F \cdot \sin \alpha}{\pi \cdot d^2} \quad [\text{MPa}] \quad (5.5)$$

$$\sigma_{M_o} = \frac{M_o}{W_o} = \frac{M_o \cdot h_{MAX}}{J_z} = \frac{32 \cdot F \cdot r \cdot \sin \alpha}{\pi \cdot d^3} \quad [\text{MPa}] \quad (5.6)$$

$$\tau_T = \frac{4}{3} \cdot \frac{T}{S} = \frac{16}{3} \cdot \frac{F \cdot \cos \alpha}{\pi \cdot d^2} \quad [\text{MPa}] \quad (5.7)$$

$$\tau_{M_k} = \frac{M_k}{W_k} = \frac{M_k \cdot h_{MAX}}{J_p} = \frac{16 \cdot F \cdot r \cdot \cos \alpha}{\pi \cdot d^3} \quad [\text{MPa}] \quad (5.8)$$

Jak již bylo zmíněno výše, v bodech prutu má napjatost zvláštní charakter a tuto napjatost označujeme jako prutovou. Prutová napjatost je určena jedním normálovým napětím  $\sigma$  a jedním smykovým napětím  $\tau$ . Výsledné normálové napětí  $\sigma$  je dáno superpozicí napětí od ohybového momentu a normálové síly a výsledné smykové napětí  $\tau$  je dáno superpozicí smykového napětí od krouticího momentu a posouvající síly ve vyšetřovaném bodě příčného průřezu. Jednotlivá napětí můžeme zobrazit v příčném průřezu drátu:



Obr. 5.3 Znárodnění napětí v příčném průřezu.

<sup>19</sup> Dosazujeme pouze velikost jednotlivých složek VVÚ, neboť nás zajímá pouze velikost těchto napětí.

Jak je z obrázku 5.3 popisujícího rozložení napětí v příčném průřezu patrné, smykové napětí od krouticího momentu dosahuje maximální hodnoty na obvodu průřezu. Směrem ke středu se hodnota tohoto napětí snižuje a nulové hodnoty dosáhne ve středu průřezu. Smykové napětí od posouvající síly dosahuje maxima na ose, kolmé k ose souřadného systému, v jejímž směru daná posouvající síla působí. Maximální hodnota napětí od ohybového momentu vzniká v bodech příčného průřezu, které jsou nejvíce vzdálené od osy, ve které ohybový moment působí. Posledním napětím je napětí od normálové síly, které je v celém příčném průřezu konstantní.

Pokud chceme posoudit bezpečnost pružiny z hlediska mezního stavu pružnosti a zároveň počítat se všemi složkami napětí, musíme určit redukované napětí. Jak již bylo uvedeno dříve, k určení redukovaného napětí můžeme použít podmínku plasticity HMH nebo podmínku plasticity maximálních smykových napětí  $\max\tau$ . Redukovaná napětí budeme počítat v nebezpečných místech příčného průřezu, kterými jsou místa označená písmeny A, B, C a D. Nejnebezpečnější místo je ovšem v bodě C, neboť zde dochází k superpozici smykového napětí od posouvající síly a od krouticího momentu ve stejném směru (vzájemně se neruší). Stejně tak je to v tomto bodě i s normálovým napětím, kdy normálové napětí od ohybového momentu a od normálové síly jdou ve stejném směru.

▪ **Výpočet redukovaného napětí podle podmínky HMH:**

- Výsledný vztah určující redukované napětí získáme, pokud dosadíme vztah (4.1) do vztahu (4.8), při uvážení, že napětí  $\sigma_2$  je nulové.

$$\sigma_{RED} = \sqrt{(\sigma_{M_o} + \sigma_N)^2 + 3 \cdot (\tau_T + \tau_{M_k})^2} \quad [\text{MPa}] \quad (5.9)$$

▪ **Výpočet redukovaného napětí podle podmínky  $\max\tau$ :**

- Výsledný vztah dostaneme obdobným způsobem, pouze s tím rozdílem, že vztah (4.1) dosadíme do vztahu (4.5).

$$\sigma_{RED} = \sqrt{(\sigma_{M_o} + \sigma_N)^2 + 4 \cdot (\tau_T + \tau_{M_k})^2} \quad [\text{MPa}] \quad (5.10)$$

Následné posouzení vůči meznímu stavu pružnosti provedeme tak, že do vztahu (5.11) pro výpočet bezpečnosti dosadíme redukované napětí určené podle podmínky plasticity, kterou k danému výpočtu chceme použít. U pružiny nedojde k plastické deformaci, pokud je koeficient bezpečnosti ( $k_k$ ) větší než jedna.

$$k_k = \frac{\sigma_k}{\sigma_{RED}} \quad [-] \quad (5.11)$$

### 5.1.3 Výpočet tuhosti pružiny při uvažování všech složek VVÚ

Tuhost pružiny určíme pomocí výpočtu posunutí pružiny ve směru zátěžné (tlačné) síly. K tomuto výpočtu použijeme Maxwell-Mohrovu variantu Castiglianovy věty<sup>20</sup>. K výpočtu posunutí čel pružiny musíme znát celkovou délku pružiny, kterou

<sup>20</sup> Maxwell-Mohrova varianta Castiglianovi věty říká, že derivace energie napjatosti podle příslušné síly (příp. momentu) je rovna deformačnímu posuvu (příp. natočení) ve směru dané síly (příp. momentu).

si ovšem můžeme dopočítat v případě, že známe počet činných závitů (N) pružiny pomocí vztahu:

$$l = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{N}{\cos \alpha} \quad [\text{mm}] \quad (5.12)$$

V případě, že jsme již schopni určit délku pružiny, můžeme vypočítat posunutí pružiny:

$$u = \frac{\delta W}{\delta F} = \int_0^l \left( \frac{M_k}{G \cdot J_p} \cdot \frac{\delta M_k}{\delta F} + \frac{M_0}{E \cdot J_z} \cdot \frac{\delta M_0}{\delta F} + \frac{N}{E \cdot S} \cdot \frac{\delta N}{\delta F} + \beta_y \cdot \frac{T_z}{G \cdot S} \cdot \frac{\delta T_z}{\delta F} \right) dx \quad [\text{mm}] \quad (5.13)$$

$$u = \frac{\delta W}{\delta F} = \int_0^l \left( \frac{F \cdot r^2 \cdot \cos^2 \alpha}{G \cdot J_p} + \frac{F \cdot r^2 \cdot \sin^2 \alpha}{E \cdot J_z} + \frac{F \cdot \sin^2 \alpha}{E \cdot S} + \beta_y \cdot \frac{F \cdot \cos^2 \alpha}{G \cdot S} \right) dx \quad [\text{mm}] \quad (5.14)$$

Po provedení algebraických úprav s využitím konstitutivních<sup>21</sup> vztahů dostáváme konečný tvar:

$$u = \frac{8 \cdot F \cdot r \cdot N}{d^2 \cdot E \cdot \cos \alpha} \cdot \left[ \frac{16 \cdot r^2}{d^2} \cdot (1 + \mu \cdot \cos^2 \alpha) + \sin^2 \alpha + 2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \beta_y \cdot (1 + \mu) \right] \quad (5.15)$$

Z tohoto vztahu jsme schopni zjistit tuhost pružiny, neboť pro výpočet posunutí čel lze rovněž použít fyzikální vztah  $F = k \cdot x$ , kde veličina  $k$  označuje tuhost pružiny,  $F$  je zatěžující síla působící na pružinu a  $x$  určuje posunutí čel pružiny. V našem případě posunutí  $x$  odpovídá deformačnímu posuvu  $u$ . V pružnosti a pevnosti se často setkáváme s tím, že pružina je zadána svou poddajností  $c_p$ , což je převrácená hodnota tuhosti. Porovnáním výsledného vztahu pro posuv čel pružiny, který byl získán pomocí Maxwell-Mohrovy varianty Castiglianovy věty s fyzikální interpretací vzorce pro posuv čel pružiny a současným přeznačením  $x$  za  $u$  získáme tuhost pružiny:

$$k = \frac{F}{u} \rightarrow k = \frac{d^2 \cdot E \cdot \cos \alpha}{8 \cdot r \cdot N \cdot \left[ \frac{16 \cdot r^2}{d^2} (1 + \mu \cdot \cos^2 \alpha) + \sin^2 \alpha + 2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \beta_y \cdot (1 + \mu) \right]} \quad [\text{N/mm}] \quad (5.16)$$

Člen  $\beta_y$  závisí pouze na průřezových charakteristikách příčného průřezu a pro daný kruhový tvar průřezu je konstantou<sup>22</sup>.

#### 5.1.4 Výpočet tuhosti pružiny při použití zjednodušujících kritérií

Při porovnání významnosti jednotlivých složek napětí v nebezpečném bodě příčného průřezu dostaneme následující poměry napětí:

$$\frac{\sigma_N}{\tau_{M_k}} = \frac{4 \cdot F \cdot \sin \alpha \cdot \pi \cdot d^3}{\pi \cdot d^2 \cdot 16 \cdot F \cdot r \cdot \cos \alpha} = \frac{d}{4 \cdot r} \cdot \tan \alpha \quad (5.17)$$

$$\frac{\sigma_{M_0}}{\tau_{M_k}} = \frac{32 \cdot F \cdot r \cdot \sin \alpha \cdot \pi \cdot d^3}{\pi \cdot d^3 \cdot 16 \cdot F \cdot r \cdot \cos \alpha} = 2 \cdot \tan \alpha \quad (5.18)$$

<sup>21</sup> Konstitutivní vztahy udávají závislost mezi napětím a deformací, přičemž  $E$  označuje Youngův modul a  $G$  modul pružnosti ve smyku, který je funkcí Youngova modulu.

<sup>22</sup> Konstanta  $\beta_y$  pro kruhový průřez je rovna  $32/27$ , v případě obdélníkového průřezu je tato hodnota rovna 1,2.

$$\frac{\tau_T}{\tau_{M_k}} = \frac{16}{3} \cdot \frac{F \cdot \cos \alpha \cdot \pi \cdot d^3}{\pi \cdot d^2 \cdot 16 \cdot F \cdot r \cdot \cos \alpha} = \frac{d}{3 \cdot r} \quad (5.19)$$

Z těchto poměrů je patrné, že v případě malého stoupání pružiny můžeme zanedbat normálová napětí, která působí v příčném průřezu. Důvodem, proč při malých úhlech stoupání můžeme zanedbat většinu napětí, je to, že funkce  $\tan \alpha$  se pro velmi malé úhly limitně blíží nule.

V prvním případě budeme uvažovat, že poměr  $d/r$  je poměrně velký, tudíž nemůžeme zanedbat smykové napětí způsobené posouvající silou. V nebezpečném místě průřezu je poté smykové napětí rovno součtu napětí od krouticího momentu a posouvající síly. V tomto případě není vliv posouvající síly zanedbatelný a zahrneme její vliv při výpočtu tuhosti pružiny.

Pokud budeme uvažovat malý úhel stoupání pružiny, jak již bylo dříve zmíněno, tak se funkce kosinus limitně blíží jedné a naopak funkce sinus se limitně blíží nule. Poté můžeme výsledné vnitřní účinky působící v příčném průřezu přepsat do tvaru:

$$\sum F_z = 0: \quad T_z = -F \quad [\text{N}] \quad (5.20)$$

$$\sum M_x = 0: \quad M_k = F \cdot r \quad [\text{N} \cdot \text{mm}] \quad (5.21)$$

Stejným způsobem poté upravíme vztahy pro maximální napětí působící v příčném průřezu, čímž dostáváme:

$$\tau_T = \frac{4}{3} \cdot \frac{T}{S} = \frac{16}{3} \cdot \frac{F}{\pi \cdot d^2} \quad [\text{MPa}] \quad (5.22)$$

$$\tau_{M_k} = \frac{M_k}{W_k} = \frac{M_k \cdot h_{MAX}}{J_p} = \frac{16 \cdot F \cdot r}{\pi \cdot d^3} \quad [\text{MPa}] \quad (5.23)$$

K určení bezpečnosti vůči MSP využijeme rovnici (5.11). Redukovaná napětí v nebezpečném místě příčného průřezu určíme následovně:

- **Redukované napětí podle podmínky HMH:**

$$\sigma_{RED} = \sqrt{3} \cdot (\tau_T + \tau_{M_k}) \quad [\text{MPa}] \quad (5.24)$$

- **Redukované napětí podle podmínky  $\max \tau$ :**

$$\sigma_{RED} = 2 \cdot (\tau_T + \tau_{M_k}) \quad [\text{MPa}] \quad (5.25)$$

Odvození vzorce pro tuhost pružiny provedeme obdobným způsobem, pouze s tím rozdílem, že nyní k určení závislosti mezi působící silou a deformací použijeme Castiglianovu větu. V tomto případě se celková energie napjatosti šroubovitě válcové pružiny skládá ze složky od krouticího momentu a složky od posouvající síly. Celková energie napjatosti je poté:

$$W = \frac{M_k^2 \cdot l}{2 \cdot G \cdot J_p} + \beta_y \cdot \frac{T_z^2 \cdot l}{2 \cdot G \cdot S} \quad [\text{N} \cdot \text{mm}] \quad (5.26)$$

Do rovnice (5.26) dosadíme vztahy (5.20), (5.21), polární kvadratický moment  $J_p$  a obsah průřezu  $S$ . Za délku pružiny  $l = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot N$ . Posunutí pružiny dostaneme parciální derivací energie napjatosti silou  $F$ .

$$W = \frac{32 \cdot F^2 \cdot r^3 \cdot N}{G \cdot d^4} + \beta_y \cdot \frac{4 \cdot F^2 \cdot r \cdot N}{G \cdot d^2} \quad [\text{N} \cdot \text{mm}] \quad (5.27)$$

$$u = \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{64 \cdot F \cdot r^3 \cdot N}{G \cdot d^4} + \beta_y \cdot \frac{8 \cdot F \cdot r \cdot N}{G \cdot d^2} \quad [\text{mm}] \quad (5.28)$$

$$k = \frac{F}{u} \rightarrow k = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot r \cdot N \cdot (8 \cdot r^2 + d^2 \cdot \beta_y)} \quad [\text{N/mm}] \quad (5.29)$$

Pokud pružina dále splňuje, že poloměr vinutí pružiny je výrazně větší než průměr drátu, tzn. že poměr  $d/r$  je malý, poté v případě malých deformací pružiny můžeme veškerá napětí kromě smykového napětí, které vytváří krouticí moment, zanedbat, neboť toto napětí má dominantní efekt. Pokud budou splněny všechny tyto podmínky, pak se nám podstatně zjednoduší výpočet, neboť stačí uvažovat pouze smykové napětí od krouticího momentu. V pružině dochází ke vzniku smykové napjatosti, pro kterou koeficient bezpečnosti určíme opět z rovnice (5.11). Napětí v podle podmínek plasticity:

- **Redukovaného napětí podle podmínky HMM:**

$$\sigma_{RED} = \sqrt{3} \cdot \tau_{M_k} \quad [\text{MPa}] \quad (5.30)$$

- **Redukované napětí podle podmínky max $\tau$ :**

$$\sigma_{RED} = 2 \cdot \tau_{M_k} \quad [\text{MPa}] \quad (5.31)$$

K určení posuvu čel pružiny nyní opět použijeme Maxwell-Mohrovu variantu Castiglianovy věty. V tomto případě, kdy uvažujeme pouze krouticí moment, se nám vztah pro výpočet posunutí čel pružiny značně zjednoduší.

$$u = \frac{\delta W}{\delta F} = \int_0^l \frac{M_k}{G \cdot J_p} \cdot \frac{\delta M_k}{\delta F} dx = \frac{F \cdot r}{G \cdot J_p} \cdot \frac{\delta(F \cdot r)}{\delta F} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot N \quad [\text{mm}] \quad (5.32)$$

$$u = \frac{F \cdot r}{G \cdot J_p} \cdot r \cdot \cos \alpha \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot N = \frac{64 \cdot F \cdot r^3 \cdot N}{G \cdot d^4} \quad [\text{mm}] \quad (5.33)$$

Z daného posunutí jsme opět schopni vyjádřit vztah pro tuhost pružiny, jejíž tvar je nyní ve tvaru:

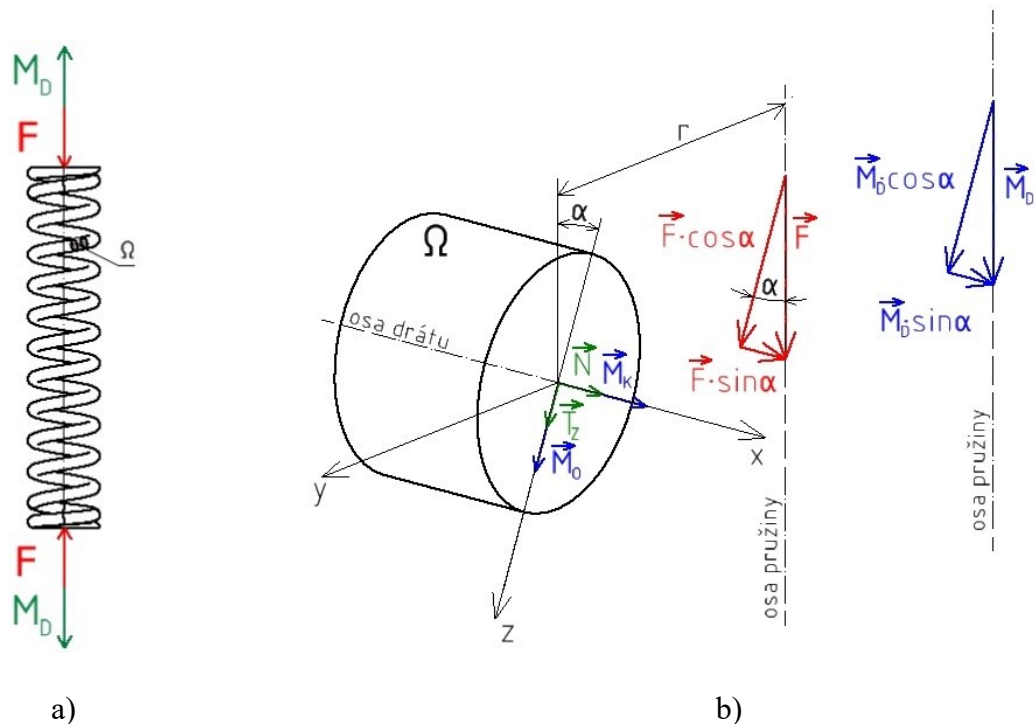
$$k = \frac{F}{u} \rightarrow k = \frac{G \cdot d^4}{64 \cdot r^3 \cdot N} \quad [\text{N/mm}] \quad (5.34)$$

### 5.1.5 Výpočet rozkroucení pružiny

Jak již bylo zmíněno, v průběhu zatěžování tlačné pružiny, kterou je bicí pružina, dochází k jejímu stlačení. Toto stlačení je doprovázeno rozkroucením, v jehož

důsledku se zvětší poloměr vinutí a čela pružiny se vůči sobě pootočí. V případě tažných pružin, které jsou též hojně používané, dochází k natažení a zkroucení.

Při výpočtu rozkroucení pružiny budeme postupovat obdobným způsobem, jako tomu bylo při výpočtech posunutí čel pružiny, tj. s využitím Maxwell-Mohrovy varianty Castiglianovy věty. Při výpočtu rozkroucení pomocí Maxwell-Mohrovy varianty Castiglianovy věty potřebujeme, aby na pružinu působil nějaký moment ve směru osy pružiny, podle kterého bychom mohli derivovat. Z tohoto důvodu musíme zavést doplňkový zátěžný moment  $M_D$ , jehož orientaci zvolíme tak, aby způsoboval rozkroucení pružiny, a jehož velikost je nulová. Tento doplňkový moment je pouze fiktivním momentem.



Obr. 5.4 a) Zavedení momentu  $M_D$ , b) Znáznornění VVÚ se zavedeným  $M_D$ .

K výpočtu musíme znovu vyjádřit VVÚ, neboť vlivem zavedení  $M_D$  dochází ke změně VVÚ. Nyní nám ovšem k výpočtu stačí vyjádřit pouze krouticí a ohybový moment, neboť ostatní složky k výpočtu rozkroucení pružiny nejsou potřebné:

$$\sum M_x = 0: \quad M_k = F \cdot r \cdot \cos \alpha + M_D \cdot \sin \alpha \quad [\text{N}\cdot\text{mm}] \quad (5.35)$$

$$\sum M_z = 0: \quad M_o = -F \cdot r \cdot \sin \alpha + M_D \cdot \cos \alpha \quad [\text{N}\cdot\text{mm}] \quad (5.36)$$

Jak již bylo zmíněno, rozkroucení získáme pomocí Maxwell-Mohrovy varianty Castiglianovy věty derivací energie napjatosti podle doplňkového momentu:

$$\varphi = \frac{\delta W}{\delta M_D} = \int_0^l \left( \frac{M_k}{G \cdot J_p} \cdot \frac{\delta M_k}{\delta M_D} + \frac{M_o}{E \cdot J_z} \cdot \frac{\delta M_o}{\delta M_D} \right) dx \quad [\text{rad}] \quad (5.37)$$

$$\varphi = \frac{\delta W}{\delta M_D} = \int_0^l \left( \frac{F \cdot r \cdot \cos \alpha}{G \cdot J_p} \cdot \sin \alpha - \frac{F \cdot r \cdot \sin \alpha}{E \cdot J_z} \cdot \cos \alpha \right) dx \quad [\text{rad}] \quad (5.38)$$

$$\varphi = \left( \frac{F \cdot r \cdot \cos \alpha}{E \cdot \frac{\pi \cdot d^4}{2 \cdot (\mu + 1) \cdot 32}} \cdot \sin \alpha - \frac{F \cdot r \cdot \sin \alpha}{E \cdot \frac{\pi \cdot d^4}{64}} \cdot \cos \alpha \right) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{N}{\cos \alpha} \quad [\text{rad}] \quad (5.39)$$

$$\varphi = \frac{128 \cdot \mu \cdot F \cdot r^2 \cdot N}{E \cdot d^4} \cdot \sin \alpha \quad [\text{rad}] \quad (5.40)$$

Z výsledného vztahu je patrné, že pro pružiny s malým úhlem stoupáním se opět funkce sinus limitně blíží nule, neboť  $\alpha \rightarrow 0$ , je pootočení čel pružiny velice malé, až nevýznamné.

### 5.1.6 Porovnání redukováných napětí u pružiny

Pro získané vztahy můžeme v programu (Matlab, Excel, apod.) vykreslit, jaké procentuální chyby v napětí se dopustíme při použití zjednodušovacích kritérií. V tomto případě byl použit program Matlab. Při použití zjednodušujících kritérií uvažujeme v prutu smykovou napjatost, pro kterou byla redukováná napětí odvozena v podkapitole 5.1.4 pro konkrétní případy.

V dále uvedených vzorcích jsou pro jednotlivá napětí použita následující značení:

- $\sigma_{RED1}$  - Redukované napětí vznikající v nebezpečném místě příčného průřezu při uvažování **všech napětí a úhlu stoupání pružiny**.
- $\sigma_{RED2}$  - Redukované napětí vznikající v nebezpečném místě příčného průřezu při uvažování **smykového napětí od posouvající síly a krouticího momentu**.
- $\sigma_{RED3}$  - Redukované napětí vznikající v nebezpečném místě příčného průřezu při uvažování **smykového napětí pouze od krouticího momentu**.

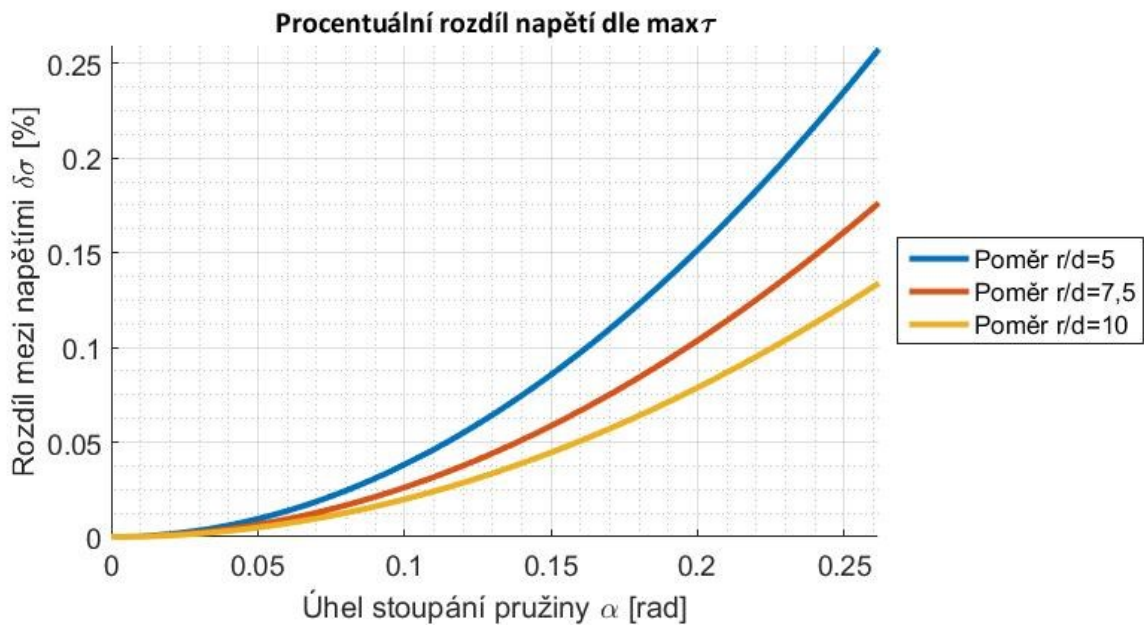
Z dosazování náhodných hodnot lze vypočítat, že rozdíl napětí není závislý na velikosti zátěžné síly, ale závisí pouze na poloměru vinutí pružiny, průměru drátu a úhlu stoupání pružiny. Při tomto zjištění lze konstatovat, že vykreslené rozdíly napětí závisí pouze na poměru  $r/d$  a jsou obecně platné pro tyto poměry. Všechny uvedené procentuální rozdíly jsou zjišťovány pro maximální poměr roven pěti, neboť pouze do tohoto poměru je možné použít vztahy pro přímé pruty při vzniku přijatelné chyby v napětích, viz podkapitola 4.5.2.

Procentuální rozdíl mezi napětími byl určen na základě následujících vztahů. Tyto vztahy popisují poměrnou odchylku mezi vztahy bez použití zjednodušovacích kritérií a při jejich použití.

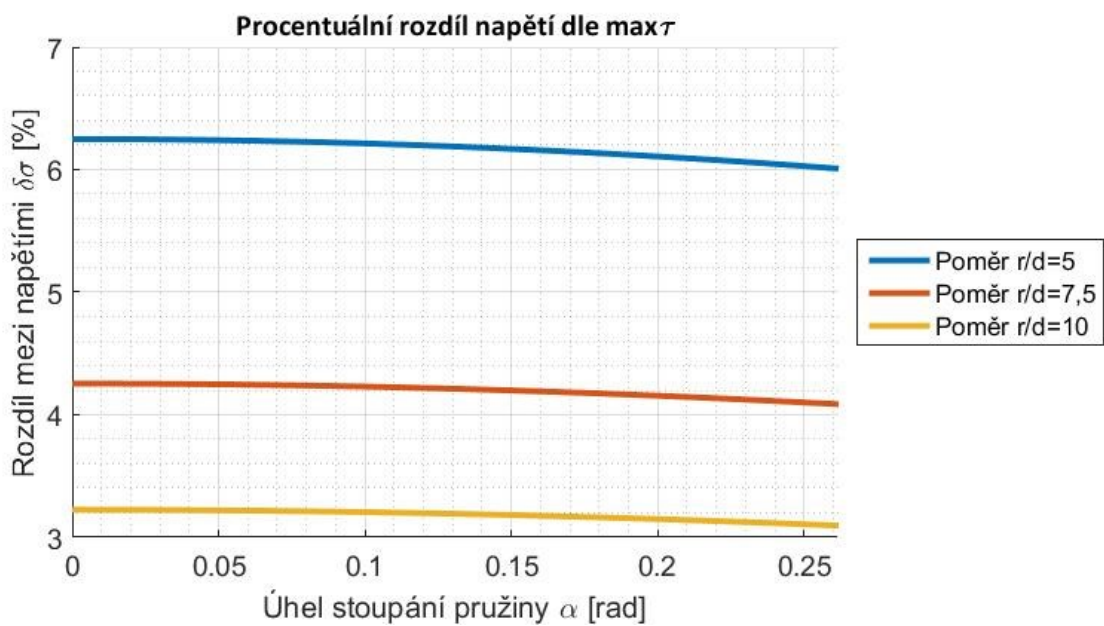
$$\Delta\sigma = \frac{|\sigma_{RED1} - \sigma_{RED2}|}{\sigma_{RED1}} \cdot 100 \quad [\%] \quad (5.41)$$

$$\Delta\sigma = \frac{|\sigma_{RED1} - \sigma_{RED3}|}{\sigma_{RED1}} \cdot 100 \quad [\%] \quad (5.42)$$

Na následujících dvou grafech jsou vykresleny procentuální rozdíly v napětích v závislosti na úhlu stoupání pružiny při použití podmínky plasticity max $\tau$ . Na obr 5.5 je zobrazena závislost dle vztahu 5.41 a na následujícím obrázku dle vztahu 5.42.

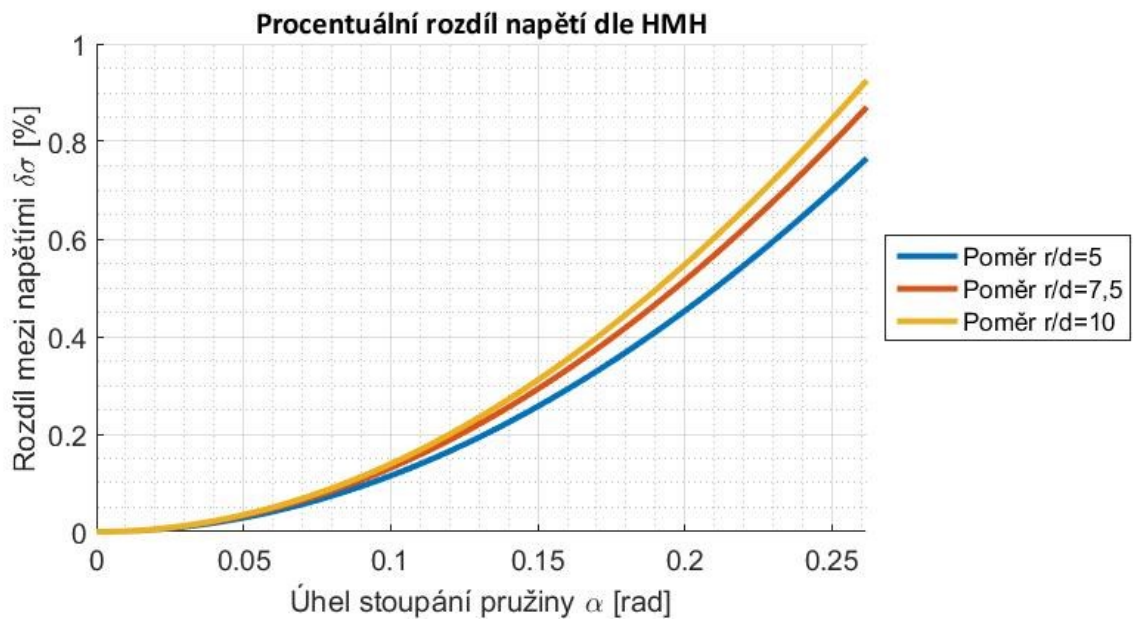


Obr. 5.5 Procentuální rozdíl napětí dle vztahu 5.41.

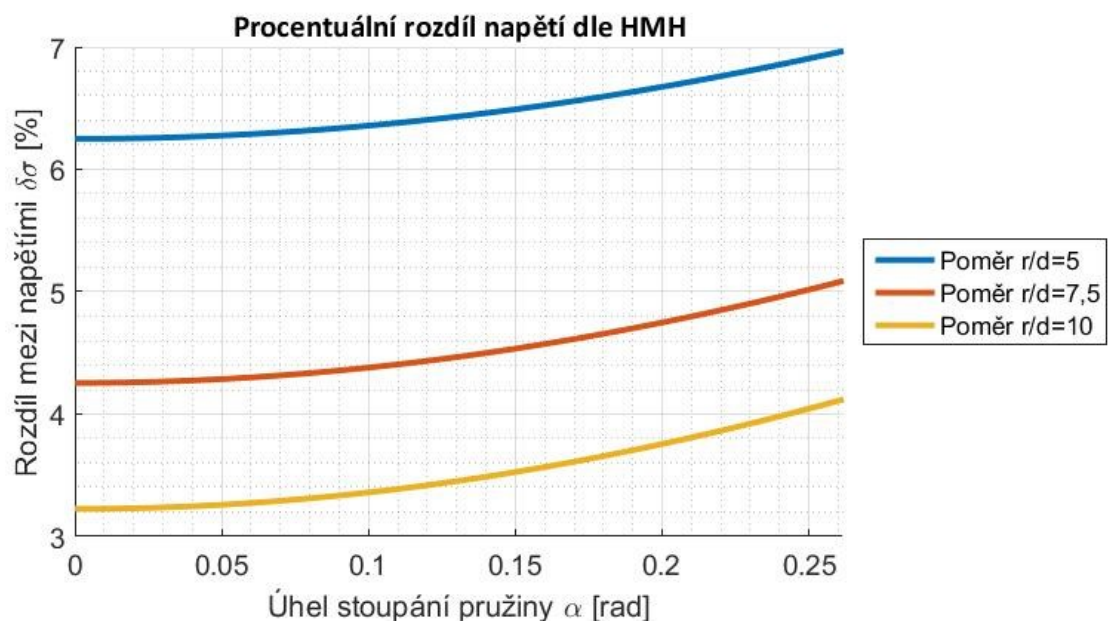


Obr. 5.6 Procentuální rozdíl napětí dle vztahu 5.42.

Stejné závislosti je možné vykreslit i při výpočtu redukovaných napětí pomocí podmínky plasticity HMM. Závislost procentuálního rozdílu napětí na úhlu stoupání je v tomto případě rozdílná. K výpočtům byly použity stejné výpočtové vztahy. Závislosti jsou zobrazeny na následujících dvou obrázcích.



Obr. 5.7 Procentuální rozdíl napětí dle vztahu 5.41.



Obr. 5.8 Procentuální rozdíl napětí dle vztahu 5.42.

Nulový úhel stoupání uvedený v závislostech ve skutečnosti nemůže nastat, ale má zde spíše informativní charakter a zároveň slouží jako kontrola při výpočtech napětí, neboť z odvozených analytických vztahů je patrné, že v případě nulového stoupání pružiny musí být procentuální rozdíl napětí při použití vztahu (5.41) nulový.

Z výsledků je patrné, že při použití podmínky plasticity  $\max \tau$  se obecně dopustíme menší chyby při výpočtu napětí s využitím zjednodušujících kritérií. To je způsobeno tím, že podmínka plasticity  $\max \tau$  dává větší „váhu“ smykovým napětím, které jsou v tomto případě dominantní. Výpočet napětí při uvažování pouze krouticího momentu je možný pouze při velkém poměru  $r/d$ , neboť při menších poměrech není

rozdíl v napětích zanedbatelný. Taktéž je zřejmé, že při použití podmínky plasticity  $\max\tau$  a při použití zjednodušovacích kritérií podle  $\sigma_{RED2}$  dochází k mírnému nadhodnocení velikosti napětí.

Všechny závislosti byly vykresleny pro úhel stoupání pružiny v rozmezí od nuly do patnácti stupňů.

## 5.2 Porovnání odvozených vztahů se vztahy v Konstruování strojních součástí

Následující podkapitola se zabývá porovnáním vztahů uvedených v literatuře [2] s odvozenými vztahy v předchozích kapitolách.

V dané literatuře je použit k výpočtu tlačné šroubovitě pružiny předpoklad, že smykové napětí od posouvající síly je po příčném průřezu rozloženo rovnoměrně (hodnota smluvního smykového napětí), k čemuž ve skutečnosti nedochází. Tento předpoklad vychází z úvahy

o prostém namáhání prutu. Ve skutečnosti má průběh smykového napětí po příčném průřezu parabolický průběh s maximální hodnotou v místě neutrální osy příčného průřezu s nulovými hodnotami ve vrcholech. Parabolický průběh napětí v příčném průřezu vychází ze Žuravského vztahu, který předpokládá, že smyková napětí jsou po šířce rozložena rovnoměrně.

Při porovnání budeme vycházet ze zjednodušujícího kritéria, neboť z porovnání napětí v podkapitole 5.1.6 je patrné, že při výpočtech uvažujících pouze smykové napětí od posouvající síly a krouticího momentu se dopustíme přijatelné chyby v napětích v případě malého stoupání pružiny (tento předpoklad je u většiny tlačných šroubovitých válcových pružin splněn). K porovnání je nutné přeznačit již odvozené vztahy. V literatuře [2] je k výpočtům místo poloměru vinutí pružiny použit střední průměr pružiny, pro který platí:

$$D = 2 \cdot r \quad [\text{mm}] \quad (5.43)$$

Úpravou již odvozených vztahů dostáváme pro jednotlivá smyková napětí:

$$\tau_T = \frac{16}{3} \cdot \frac{F}{\pi \cdot d^2} \quad [\text{MPa}] \quad (5.44)$$

$$\tau_{M_k} = \frac{16 \cdot F \cdot r}{\pi \cdot d^3} = \frac{16 \cdot F \cdot D}{2 \cdot \pi \cdot d^3} = \frac{8 \cdot F \cdot D}{\pi \cdot d^3} \quad [\text{MPa}] \quad (5.45)$$

Maximální smykové napětí v drátu je dáno superpozicí napětí od krouticího momentu a od posouvající síly, čímž dostáváme:

$$\tau = \frac{8 \cdot F \cdot D}{\pi \cdot d^3} + \frac{16}{3} \cdot \frac{F}{\pi \cdot d^2} \quad [\text{MPa}] \quad (5.46)$$

Nyní je možné zavést poměr vinutí pružiny, který vyjadřuje míru zakřivení závitů pružiny:

$$C = \frac{D}{d} \quad [-] \quad (5.47)$$

S využitím poměru vinutí je možné přepsat rovnici pro smyková napětí do tvaru:

$$\tau = \frac{8 \cdot F \cdot D}{\pi \cdot d^3} + \frac{16}{3} \cdot \frac{F}{\pi \cdot d^2} = \left( \frac{6 \cdot C + 4}{6 \cdot C} \right) \cdot \frac{8 \cdot F \cdot D}{\pi \cdot d^3} = K_T \cdot \frac{8 \cdot F \cdot D}{\pi \cdot d^3} \quad [\text{MPa}] \quad (5.48)$$

Tento součinitel zahrnuje do výpočtu vliv posouvající síly a od součinitele uvedeného v již zmiňované literatuře se liší v tom, že při výpočtu nebylo uvažováno rovnoměrné rozložení smykového napětí od posouvající síly.

Náhradou daného součinitele můžeme do výsledků započítat další vlivy zohledňující například vliv zakřivení střednice. Přehled jednotlivých součinitelů:

- $K_T$  - Odvozený součinitel zohledňující vliv posouvající síly.
- $K_S$  - *Součinitel smykového napětí* - Součinitel vyjadřující vliv posouvající síly při použití hodnoty smluvního smykového napětí.
- $K_B$  - *Bergsträsserův součinitel* - Součinitel zohledňující vliv posouvající síly a vliv zakřivení drátu.
- $K_W$  - *Wahlův součinitel* - Součinitel, který taktéž zohledňuje vliv posouvající síly a vliv zakřivení drátu.

Pro jednotlivé součinitele platí následující vztahy, přičemž Bergsträsserův součinitel a Wahlův součinitel se vzájemně liší maximálně o jedno procento, tudíž je k výpočtům výhodnější používat Bergsträsserův součinitel, který je z hlediska výpočtu méně náročný:

$$K_S = \frac{2 \cdot C + 1}{2 \cdot C} \quad [-] \quad (5.49)$$

$$K_B = \frac{4 \cdot C + 2}{4 \cdot C - 3} \quad [-] \quad (5.50)$$

Odvození vztahů k určení napětí při uvažování zakřivení střednice přesahuje schopnosti získané v předmětu Pružnost a pevnost a z tohoto důvodu bude Bergsträsserův součinitel ověřen pomocí metody konečných prvků v pozdější kapitole.

## 6 Výpočet šroubovitě tlačné pružiny pomocí MKP

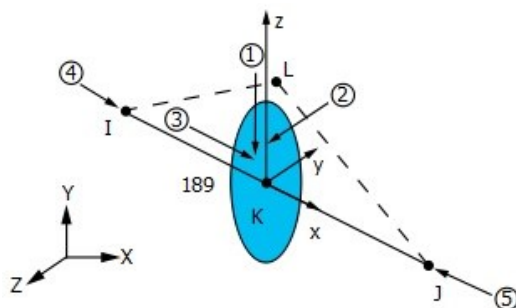
Daná kapitola pojednávající o metodě konečných prvků byla vypracována s využitím literatury [7].

Základy metody konečných prvků lze nalézt v literatuře a nebudou v této práci rozpracovány, neboť to není jejím cílem. Pro numerické řešení tlačné válcové pružiny byl zvolen výpočtový software ANSYS Mechanical APDL 17.2 z důvodu jednodušší tvorby parametrických modelů. Další možností je vytvořit model například v softwaru, jako je Autodesk Inventor. V tomto případě je nutné vlastnit plnou verzi ANSYSU, neboť studentská verze neumožňuje propojení Inventoru s ANSYSEM. Ve všech uvedených modelech byly jako výchozí jednotky použity mm a N. Takto získaná napětí jsou přímo v jednotkách MPa. Kromě modelu tvořeného objemovými prvky, který umožní zohlednit zakřivení střednice drátu pružiny (tj. posoudit velikost napětí, pokud bude poměr poloměru vinutí pružiny a průměru drátu odpovídat silně zakřiveným prutům) byl nejdříve vytvořen prutový model. Tento model byl vytvořen z toho důvodu, neboť bylo nutné nejprve zjistit, jak aplikovat zatížení na tlačnou pružinu.

### 6.1 Výpočtový model založený na prutové teorii

Při tvorbě prutového modelu bylo využito odvozených analytických vztahů, neboť pro zvolené parametry by se měla výsledná napětí v prutu při použití prutového modelu a analytických výpočtů shodovat. Zároveň by v ideálním případě mělo platit, že rozložení napětí jsou po celé délce pružiny stejná.

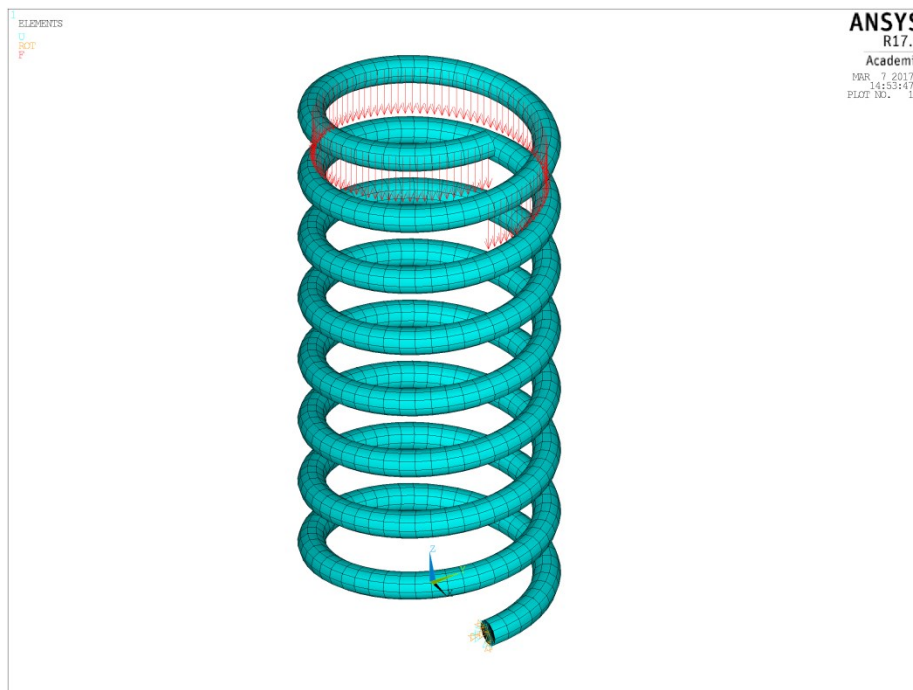
Z toho důvodu, že pružina je v podstatě zakřivený prut, byl použit prostorový prvek BEAM189. Tento prvek je prutovým prvkem a byl použit proto, že na rozdíl od prvku BEAM188 je navíc opatřen jedním uzlem uprostřed, celkově se tedy jedná o tříuzlový prvek. V každém uzlu prvku jsou umožněny všechny rotace (rotace kolem osy  $x$ ,  $y$  a  $z$ ) i posuvy (posuv ve směru osy  $x$ ,  $y$  a  $z$ ), tudíž má prvek celkově v každém uzlu šest stupňů volnosti.



Obr. 6.1 Prutový prvek BEAM 189, převzato z [7].

Zatížení je možné aplikovat různými způsoby. Jako jedna z prvních variant je zesíťovaný model zobrazený na obr. 6.2, u kterého nastal problém, že při vykreslení napětí v pružině docházelo k nerovnoměrnému rozložení napětí v pružinovém drátu z toho důvodu, že zatížení sice bylo diskreditováno na jednotlivé uzly (diskretizací síly na jednotlivé uzly bylo dosaženo nahrazení síly liniovým zatížením), což by mělo odpovídat ekvivalentnímu nahrazení síly v ose pružiny, ale bylo provedeno na závit pružiny se stoupáním, což vyvolávalo dodatečné nežádoucí vnitřní účinky v pružinovém

drátu. Tudiž hlavním problémem bylo zjistit, jak implementovat sílu do osy pružiny, čímž by mělo být dosaženo adekvátních výsledků, co se týče rozložení napětí. Daný vývojový model byl zmíněn z toho důvodu, aby bylo patrné, že hledání ekvivalentního řešení není vždy snadné.



Obr. 6.2 Počáteční model pomocí prvku BEAM189.

V následujících odstavcích bude zmíněn postup při tvorbě konečného modelu pomocí prvku BEAM189. Uvedeno bude, z jakých předpokladů se vychází, jaká byla použita geometrie k tvorbě pružiny a další nezbytné informace.

Parametrický model spočívá v definování geometrie prutu pomocí proměnných, které zadá uživatel podle konkrétních rozměrů pružiny a materiálových charakteristik pružinového drátu. V tomto konkrétním případě jsou jako proměnné parametry zvoleny: poloměr vinutí pružiny, stoupání pružiny, průměr pružinového drátu, Youngův modul pružnosti, počet činných závitů, modul pružnosti ve smyku a velikost zátěžné síly. Místo zadávání modulu pružnosti ve smyku je též možné upravit zadávání na možnost zadání Poissonova poměru. Modul pružnosti ve smyku je zvolen z toho důvodu, že jeho hodnota je pro každý pružinový drát uvedena v normě ČSN EN 10270-1.

V prvním kroku, po nadefinování proměnných, je provedeno nadefinování použitých prvků a materiálových charakteristik, které jsou při tvorbě modelu použity. Jako materiál byl zvolen lineárně izotropní. Danými prvky jsou konkrétně již zmiňovaný BEAM189 a jako druhý prvek je použit prvek MPC184. Parametry prvků je možné měnit pomocí příkazu KEYOPT. Jediným parametrem, který je u prvku BEAM189 nutné změnit, se označuje pořadovým číslem 4. Tento parametr vyjadřuje, jaká VVÚ budou zahrnuta do výpočtu smykových napětí. Výchozím nastavením programu je, že uvažuje pouze smyková napětí od krouticího momentu, ale jak bylo uvedeno v analytických výpočtech, v daném případě není zanedbatelné ani napětí od posouvající síly, tudíž je nutné nastavit, aby program při výpočtu uvažoval i toto napětí. U prvku MPC184 je pomocí KEYOPT nastaven prut označovaný jako „tuhý prut“,

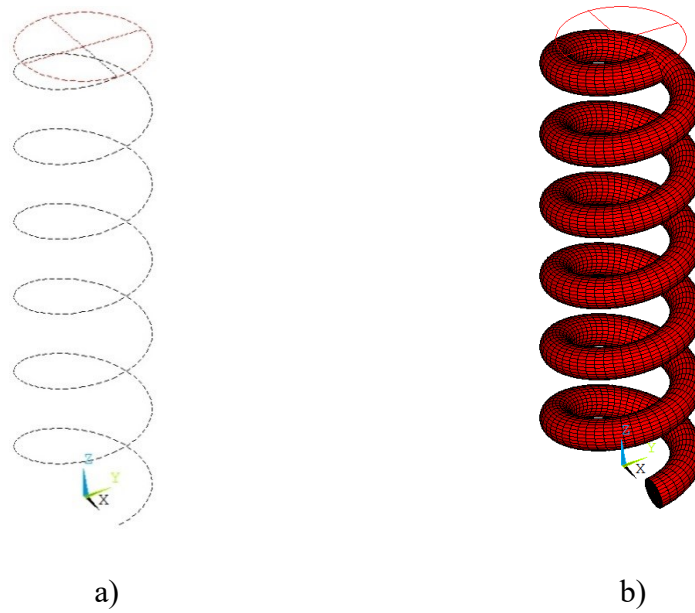
kteřý má pouze dva uzly, ale jelikož je tento prut tuhý a je použit pouze k přenášení síly do střednice prutu, není potřebné mít další uzel uprostřed.

V následujícím kroku byla vytvořena samotná tvorba geometrie prutu. Při tvorbě geometrie se modeluje samotná střednice pružiny. Následující tvorba geometrie je použita i při tvorbě objemového modelu, pouze s jistou modifikací. Střednici pružiny lze snadno vytvořit pomocí cylindrického souřadnicového systému, ve kterém vytvoříme keypointy pomocí souřadnic, kterými jsou poloměr, úhel a souřadnice v ose z, jež jsou následně navzájem pospojovány. Jednotlivé keypointy jsou vůči sobě posunuty o devadesát stupňů a jejich souřadnice v ose z je postupně navyšována o čtvrtinu stoupání závitu. To znamená, že souřadnice v ose z prvního keypointu je nulová, souřadnice druhého je rovna čtvrtině stoupání pružiny a souřadnice ve směru osy z každého dalšího vytvořeného keypointu je o čtvrtinu stoupání pružiny vyšší. Tímto způsobem stačí vytvořit pouze jeden činný závit, který se následně zkopíruje tolikrát, jaký je počet zadaných činných závitů. Po zkopírování jednotlivých závitů je možné závity spojit do jednoho celistvého závitu pomocí příkazu LCOMB. K aplikaci zatížení je na poslední činný závit navázána geometrie skládající se z kružnice a bodu, který se nachází uprostřed dané kružnice a zároveň v ose pružiny. Celková geometrie je následně pospojována pomocí příkazu LGLUE, který způsobí, že celá geometrie je „posleповána“ dohromady. Geometrie modelu viz obr. 6.3 a).

Po vytvoření geometrie střednice byl vytvořen příčný průřez. V ANSYSU jsou již předdefinované určité příčné průřezy, přičemž byl zvolen kruhový příčný průřez. U tohoto průřezu se volí poloměr a jeho dělení.

K vygenerování sítě konečných prvků stačí použít příkaz LMESH. Konkrétně v tomto případě je nejdříve pomocí příkazu LSEL vybrána střednice tvořící činné závity, které je přiřazen prvek BEAM189, a následně je daná střednice zesíťována. Následně je pomocí příkazu LSEL invertován výběr, čímž dojde k vytvoření geometrie vytvořené pro aplikaci zatížení.

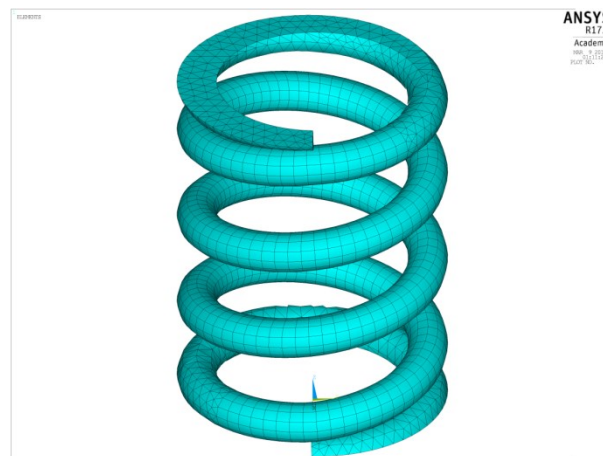
Před spuštěním řešení je nutné definovat okrajové podmínky. V tomto případě byla již do zmiňovaného vytvořeného keypointu vytvořeného v ose pružiny aplikována síla. Zatížení silou slouží k porovnání výsledků, pokud zadáme určitou sílu, která nám vyšla z analytického řešení. Další možností je diskreditovat zátěžnou sílu na jednotlivé uzly po obvodu vytvořeného závitu sloužícího k přenášení zatížení, to odpovídá statické ekvivalenci zátěžné síly v ose pružiny. Výsledky obdržené diskreditací síly na jednotlivé uzly dosáhneme stejných výsledků. Pokud aplikujeme zátěžnou sílu, stačí k zjištění napětí zadat pouze jeden činný závit, neboť samotné napětí nezávisí na počtu činných závitů, ale pouze na velikosti zátěžné síly. V případě, že chceme definovat stlačení pružiny, je nutné aplikovat okrajovou podmínku jako posuv ve směru osy z, přičemž toto stlačení je definováno na celý obvod vytvořeného konečného závitu, tímto způsobem dosáhneme požadovaných výsledků. V případě zadávání velikosti stlačení pružiny je výpočetní čas o něco delší, neboť zasíťování např. dvaceti závitů trvá déle než pouze jednoho závitu. Na druhém konci pružiny je aplikováno vetknutí, které zamezuje všem posuvům a natočením. Zesíťovaný model s aplikovanými okrajovými podmínkami je na obr. 6.3 b).



Obr. 6.3 a) Geometrie modelu, b) Zesíťovaný model.

## 6.2 Výpočtové modely vytvořené pomocí objemových prvků

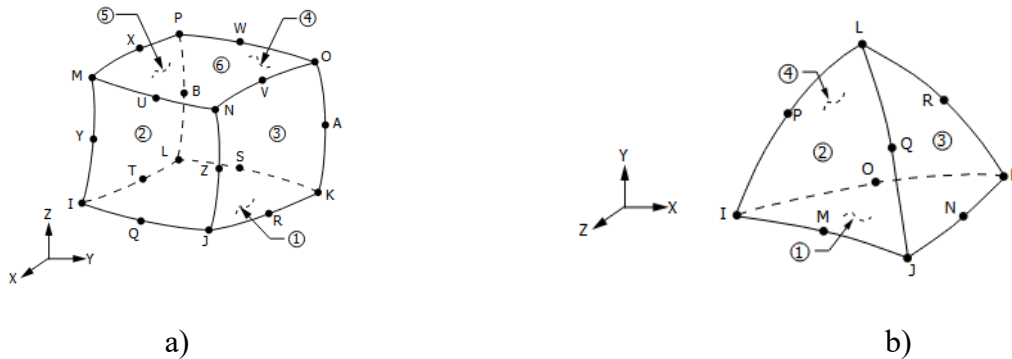
Na základě prutového modelu byly vytvořeny dva modely založené na objemových prvcích, u kterých byla snaha aplikovat zatížení taktéž do osy pružiny. Výsledné modely vznikly po mnohačetných experimentech, neboť největší potíže nastávaly při tvorbě zakončení pružiny. Oba uvedené modely jsou stejně jako prutový model parametrické se stejnými vstupními parametry. Před vytvořením modelů, které jsou uvedeny v následujících podkapitolách, byla snaha vytvořit model, jenž by přesně odpovídal geometrii tlačné šroubovitě pružiny s uzavřeným obrobeným zakončením. V pozdější etapě byl tento model zavržen z toho důvodu, že při malém poloměru vinutí pružiny a velkém stoupání pružiny docházelo k nemožnosti potažení průřezu po střednici v místě přechodu činného závitů na závěrný. Tento model je zobrazen na obr. 6.4.



Obr. 6.4 Zavržený model pružiny.

### 6.2.1 Výpočtový model založený na prvcích SOLID186 a SOLID187

Při tvorbě daného výpočtového modelu jsou použity dva rozdílné objemové prvky. Prvním prvkem je SOLID186, což je dvacetiužlový prvek ve tvaru hexaedru. Jako druhý objemový prvek byl použit SOLID187, který je na rozdíl od SOLID186 desetiúžlový prvek ve tvaru tetraedru. Pro oba prvky platí, že každý uzel prvku disponuje třemi stupni volnosti, konkrétně jsou to posuvy ve směru osy x, y a z.



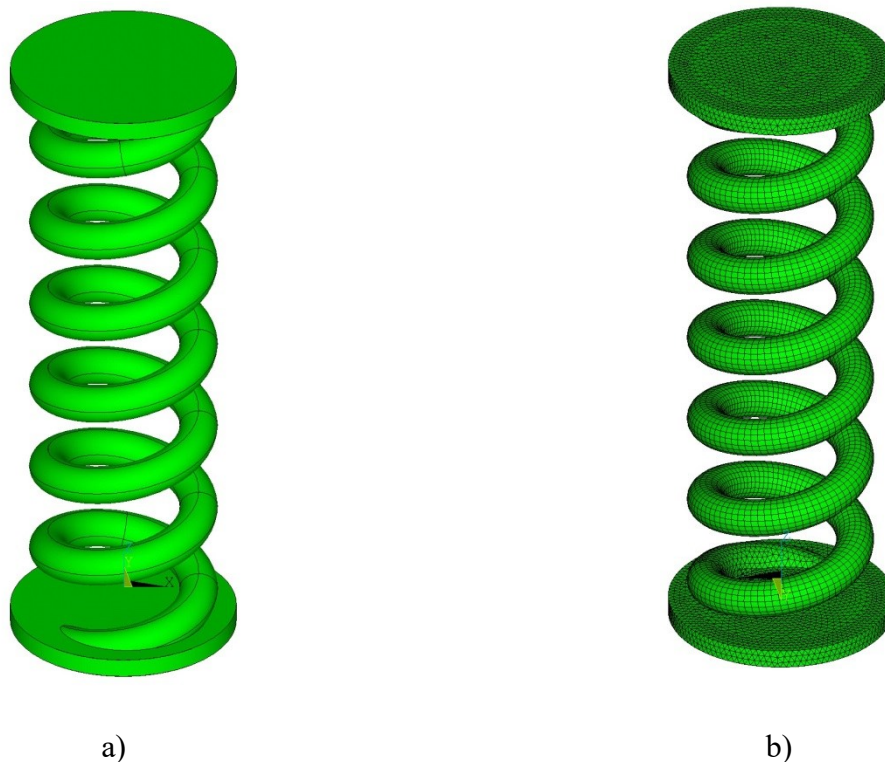
Obr. 6.5 a) Objemový prvek SOLID 186, b) Objemový prvek SOLID187, převzato z [7].

Následující popis geometrie modelu bude částečně zjednodušen z toho důvodu, že model je vytvořen takovým způsobem, aby bylo možno při vykreslení napětí zobrazit pouze činné závity a přesný popis tvorby by byl zbytečný, z toho důvodu budou uvedeny pouze základní principy, které byly při tvorbě využity. Tvorba geometrie vychází z prutového modelu, kdy střednice je tvořena stejným způsobem, tj. s využitím cylindrického souřadnicového systému a tvorbou keypointů, které jsou následně pospojovány. Trojrozměrný model je vytvořen pomocí vytvoření kruhového průřezu na počátku střednice, který je následně pomocí příkazu VDRAG potažen po vytvoření střednice. Kromě činných závitů je na každém konci pružiny vytvořen jeden závit navíc, který je následně rozdělen rovinou kolmou k ose pružiny, jež je k tomuto účelu v obou případech vytvořena. Tímto způsobem jsou závity rozděleny na dvě části a nechtěná část je smazána. V místech rozdělení daných závitů jsou vytvořena válcová zakončení, která jsou následně pomocí příkazů VGLUE spojena s ponechanými částmi závitů. Příkaz VGLUE je použit pouze na tyto části, neboť na celý model ho není možné aplikovat. Při pokusech aplikovat příkaz VGLUE na celý model dochází k spadnutí programu. K možnosti umístění osamělé síly do osy pružiny je na horním válcovém zakončení vytvořen „hard point“. Následným krokem je pospojování modelu pomocí keypointů příkazem NUMMRG. Geometrie modelu je zobrazena na obr. 6.6 a).

Síť konečných prvků je definována pomocí příkazu ESIZE, kterým je možné nastavit velikost prvku. Zesíťování činných závitů je provedeno pomocí prvku SOLID186 s využitím příkazu VSWEEP. V tomto případě nám příkaz ESIZE definuje velikost prvku v průřezu drátu a pomocí příkazu VSWEEP dojde k zesíťování celého objemu. Na zesíťování vytvořených zakončení je použit prvek SOLID187, přičemž velikost prvku je použita stejná, jako tomu bylo při síťování činných závitů. Síť konečných prvků je vytvořena pomocí „free“ sítě.

Při definování okrajových podmínek je cílem definovat okrajové podmínky, které by byly formálně stejné jako u prutového modelu. Při definování vetknutí v tomto případě jsou ovšem zamezeny pouze tři stupně volnosti, které byly zmíněny výše, neboť rotace u objemového prvku netvoří žádné stupně volnosti. Na spodní ploše vytvořeného

válce je aplikováno vetknutí na celou plochu. V druhém zakončení je aplikována zátěžná síla do předem vytvořeného pevného bodu. Obdobným způsobem jako u prutového modelu je možné definovat stlačení pružiny, přičemž toto stlačení je nutné aplikovat na celou plochu horního válce. Zesíťovaný model je zobrazen na obrázku níže.



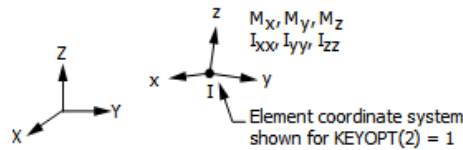
Obr. 6.6 a) Geometrie modelu, b) Zesíťovaný model.

Je důležité zdůraznit, že tento model je svou geometrií v podstatě shodný s tlačnou šroubovitou pružinou s uzavřenými obrobenými závity, neboť závěrný závit vytváří smyčku, která se v podstatě nedeformuje. Daný model odpovídá případu, pokud bychom část závěrného závitu nahradili válcem. Válec je vytvořen takovým způsobem, že se dotýká prvního činného závitu, stejně jako je tomu u skutečného zakončení pružiny. Na obr. 6.6 je znázorněna pružina se třemi činnými závity.

### 6.2.2 Výpočtový model vytvořený s využitím funkce RBE3

Důvodem tvorby druhého modelu pomocí objemových prvků byla snaha přiblížit se ještě více zatížení, které bylo aplikováno na prutový model. V konečném důsledku je tvorba daného modelu poněkud jednodušší než předešlého, přičemž vstupní parametry jsou opět stejné jako u přechozích modelů.

K tvorbě daného modelu je použit pouze jeden objemový prvek, kterým je SOLID 186. Kromě tohoto objemového prvku je navíc použit bodový prvek MASS21 s šesti stupni volnosti, přičemž počet stupňů volnosti je možné upravit pomocí KEYOPTu.

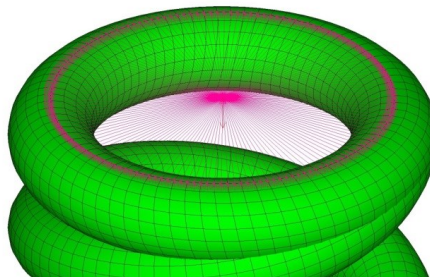


Obr. 6.7 Bodový prvek MASS21, převzato z [7].

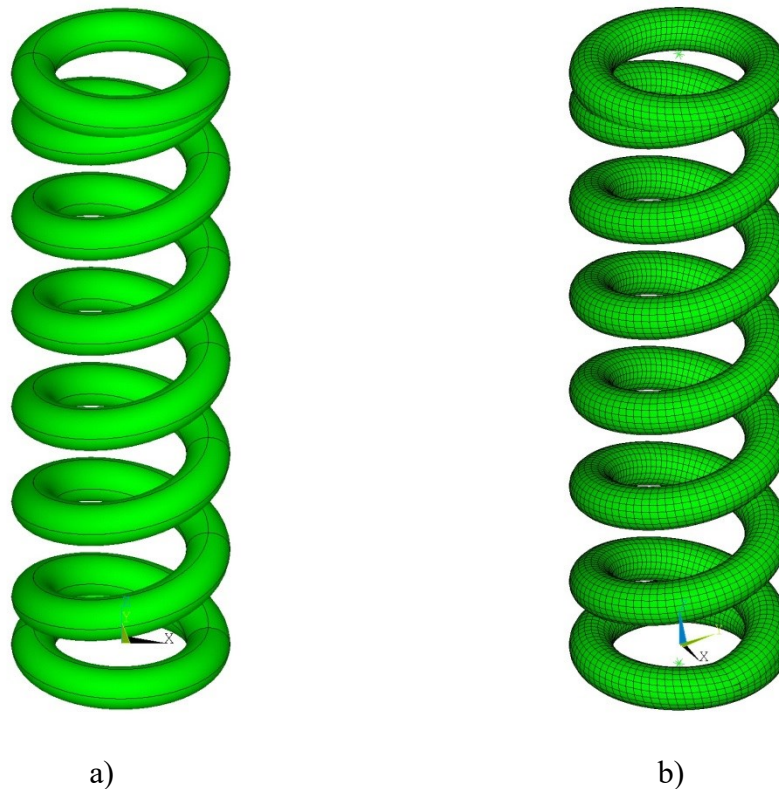
Při tvorbě geometrie je nejdříve vytvořen uzavřený prstenec. Toho je docíleno tvorbou keypointů v cylindrickém souřadnicovém systému, přičemž všechny keypointy mají stejnou souřadnici v ose z. Tento průřez je nutné vytvořit ze dvou částí. Při tvorbě je uvažováno budoucí napojení činných závitů, tudíž průřez potažený po vytvořené střednici je již nakloněný o úhel, který zajistí, že při potažení po střednici tvořící činné závity bude průřez k této střednici kolmý. Následně je pomocí obdobného způsobu jako u prutového modelu vytvořena střednice jednoho činného závitu, po které je již vytvořený průřez potažen. Tento závit je následně zkopírován v počtu činných závitů pomocí příkazu VGEN, u kterého se definuje počet zkopírování a souřadnice o kterou má být kopie posunuta. V tomto případě je danou souřadnicí stoupání pružiny. Na konec postačí zkopírovat i uzavřený prstenec pomocí stejného příkazu, pouze s tím rozdílem, že je vytvořena pouze jedna kopie a posunutí kopie je rovno součinu počtu činných závitů a stoupání pružiny. Tímto způsobem vzniknou jednotlivé části samotné pružiny, které jsou opět spojeny příkazem NUMMRG. V posledním kroku jsou vytvořeny keypointy v ose pružiny.

Síť konečných prvků je opět definována pomocí příkazu ESIZE. Všechny objemy jsou u tohoto modelu zesíťovány pomocí příkazu VSWEEP. Výjimkou jsou výše zmiňované keypointy. V těchto keypointech jsou pomocí příkazu KMESH vygenerovány uzly a bodové prvky.

Definice okrajových podmínek je v tomto případě o něco složitější. V případě definování zátěžné síly je postup následovný. Nejdříve je pomocí souřadnic vybrán uzel, který vznikl ve vytvořeném keypointu po zesíťování, jemuž je přiřazen název, v tomto případě je tento uzel pojmenovaný jako MASTER. Poté jsou pomocí příkazu NSEL vybrány „slave nodes“, což lze volně přeložit jako podřízené uzly. Následně je použita samotná funkce RBE3, jejíž princip spočívá v tom, že sílu, která je aplikována do vybraného uzlu (uzel uložený pod názvem MASTER), přerozdělí na podřízené uzly. Stejný princip je aplikován i na opačném konci pružiny pouze s tím rozdílem, že ve vybraném uzlu je definováno vetknutí. V případě definování stlačení pružiny je posuv ve směru osy z definován na celý obvod horního zátěžného závitu.



Obr. 6.8 Zatížení vytvořeného zakončení.



Obr. 6.9 a) Geometrie modelu, b) Zesíťovaný model.

Citlivostní analýza je následně provedena pro každý konkrétní posuzovaný případ. K provedení citlivostní analýzy je možno využít cyklus, který mění počet prvků, dokud není dosažen požadovaný rozdíl v napětích. V daném případě je použita podmínka, kdy se cyklus ukončí, pokud procentuální rozdíl v sousedních hodnotách napětí je roven jedné setině procenta.

### 6.3 Omezení modelů

Omezení všech vytvořených modelů spočívá v tom, že pružina není řešena pomocí kontaktních ploch, tudíž nelze řešit případy, kdy dojde k dosednutí závitů pružiny na sebe. Tudíž je na uživateli posoudit, zda při zadání požadovaných okrajových podmínek není definováno stlačení, které by způsobilo dosednutí závitů na sebe. Ve strojní praxi by ovšem k těmto případům nemělo docházet. Velikost stlačení, které způsobí dosednutí závitů na sebe, je možné určit z následujícího vztahu.

$$l_m = l_0 - (n_t - a) \cdot d \quad [\text{mm}] \quad (6.1)$$

Kde  $n_t$  označuje celkový počet závitů,  $d$  průměr pružinového drátu a konstanta  $a$  závisí na typu zakončení závitu. Konkrétní případy jsou uvedeny v literatuře [1].

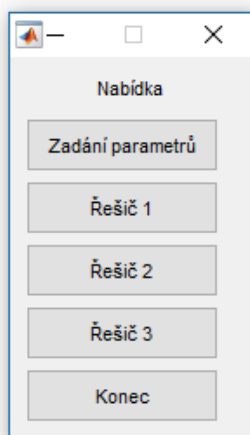
## 7 Aplikace výpočtových modelů

Předmětem zkoumání této práce jsou dvě bicí pružiny palné zbraně. U první pružiny bylo zjištěno, že po jednom výstřelu dochází k trvalé deformaci bicí pružiny. Z tohoto důvodu byla navržena druhá bicí pružina, u které již k trvalé deformaci nedochází, ale její tuhost je příliš velká, což má za následek nekomfortní zacházení se zbraní. Důvodem vzniku trvalé deformace u první pružiny je pravděpodobně vznik většího napětí v pružinovém drátu, než je přípustné napětí, to znamená, že dojde k překročení meze kluzu pružinového drátu. Z tohoto důvodu vypočteme pro danou pružinu koeficient bezpečnosti vůči meznímu stavu pružnosti.

Při výpočtech budou uvedeny pouze výsledné hodnoty redukovaných napětí a koeficienty bezpečnosti vůči MSP, neboť se jedná pouze o dosazování hodnot do předem odvozených vzorců. K tomuto zrychlenému výpočtu byly výpočtové vztahy uvedené v kapitole 6 zadány do výpočetního systému Matlab.

Program je vytvořený tak, že se zadají materiálové charakteristiky a rozměry pružiny. Následně zadavatel vybere podmínku plasticity, podle které proběhne výpočet. Do výpočtů bylo přidáno posouzení procentuálního rozdílu napětí při použití vztahů, které uvažují všechna napětí a při použití zjednodušujících kritérií. Posouzení, jaký výpočet použít, je zvoleno tak, že pokud je poměr vinutí pružiny a průměru drátu menší než pět, je automaticky doporučen výpočet pomocí MKP. V případě poměru většího je na základě procentuálních rozdílů o velikosti pět procent (tuto hodnotu lze volit) doporučen řešič. Pokud je rozdíl napětí při použití vztahů, které počítají s úhlem stoupání a zohledňují všechna napětí pouze o pět procent, vyšší než při použití vztahů, které počítají pouze se smykovými napětími od posouvající síly a krouticího momentu (viz. podkapitola 5.1.4), poté je při zanedbání chyby v redukovaném napětí doporučen druhý řešič. Třetí řešič je doporučen pouze ve specifických případech.

Nastavenou podmínkou je procentuální rozdíl opět pět procent, ale v tomto případě již v porovnání se vztahy, které počítají pouze se smykovými napětími od posouvající síly a krouticího momentu. Tento řešič počítá pouze se smykovým napětím od krouticího momentu. Dané podmínky pouze navrhnou, jaký výpočet je možno použít při akceptování dané chyby. Volba řešiče závisí pouze na zadavateli.



Obr. 7.1 Nabídka programu.

## 7.1 Řešení pružiny, u které dochází k trvalé deformaci

Z příložených výkresů můžeme zjistit rozměry dané pružiny. Z uvedeného materiálu ve výkresové dokumentaci lze v normě ČSN EN 10270-1 zjistit pro daný průměr a typ (SL, SM, SH,...) drátu mez pevnosti. Podle výkresové dokumentace je pružina vyrobena z pružinového drátu, který je vystaven vysokému statickému nebo střednímu dynamickému zatížení. Všechny potřebné rozměry a materiálové charakteristiky zapíšeme do následující tabulky:

Rozměr	Označení	Velikost	Jednotka
Průměr drátu pružiny	$d$	1,2	mm
Stoupání pružiny	$s$	3,01	mm
Poloměr vinutí	$r$	2,4	mm
Výrobní délka	$l_0$	74	mm
Délka v předepjatém stavu	$l_1$	55	mm
Délka při maximálním zatížení	$l_3$	46	mm
Počet činných závitů	$N$	24	-
Materiálová charakteristika	Označení	Velikost	Jednotka
Yongův modul	$E$	$2,06 \cdot 10^5$	MPa
Modul pružnosti ve smyku	$G$	$81,5 \cdot 10^3$	MPa
Maximální mez pevnosti	$\sigma_{Pt}$	2170	MPa

Tab. 7.1 Vstupní parametry pro výpočet.

K využití již odvozených stavů je zapotřebí určit úhel stoupání pružiny, mez kluzu materiálu a Poissonův poměr. Úhel stoupání lze získat rozvinutím jednoho závitu šroubovice, čímž dostáváme:

$$\alpha = \operatorname{atan}\left(\frac{s}{2 \cdot \pi \cdot r}\right) \doteq 11^\circ 17' 18'' \quad (7.1)$$

Poissonův poměr určíme z konstitutivního vztahu mezi Youngovým modulem a modulem pružnosti ve smyku:

$$\mu = \frac{E - 2 \cdot G}{2 \cdot G} \doteq 0,264 \quad (7.2)$$

Pro určení meze kluzu ve smyku  $\sigma_k$  budeme vycházet ze znalosti, že mez kluzu můžeme určit na základě vztahu:

$$R_e = (0,6 - 0,75) \cdot \sigma_{Pt} \quad (7.3)$$

$$R_e = (0,6 - 0,75) \cdot 2170 = (1302 - 1627,5) \text{ MPa} \quad (7.4)$$

Jelikož známe všechny potřebné veličiny, můžeme přistoupit k samotnému výpočtu. První věcí, kterou musíme posoudit, je míra zakřivení prutu. Pokud dáme do

oměru poloměr vinutí pružiny a průměr drátu pružiny, což odpovídá poměru  $R/h$ , v tomto případě u tlačné šroubovitě pružiny  $r/d$ , dostáváme poměr  $r/d = 2$  z čehož vyplývá, že se jedná o silně zakřivený prut. Tento konkrétní problém budeme řešit jako vzorový, tudíž k výpočtům použijeme jak analytické vztahy, tak výsledky získané z výpočetního systému ANSYS. V případě analytických vztahů použijeme pouze vztahy uvažující všechna napětí, neboť se takto dopustíme nejmenší chyby. Dále výsledky porovnáme s využitím vztahů uvedených v literatuře [1], konkrétně při využití součinitele, který by měl zohledňovat vliv zakřivení drátu. V tomto konkrétním případě bude řešení s využitím analytických vztahů rozepsáno a vytvořený program bude použit k řešení dalších problémů.

### 7.1.1 Řešení pomocí odvozených analytických vztahů

Jelikož známe velikost stlačení pružiny, vyjádříme ze vztahu (5.15) velikost síly jako funkci stlačení pružiny. Největší síla, a tím i největší napětí bude vznikat při stlačení pružiny na délku  $l_8$ . Velikost stlačení pružiny je rovna rozdílu výrobní délky a délky při maximálním stlačení. Při použití uvedených vztahů dostáváme:

$$u = l_0 - l_8 = 28 \text{ mm} \quad (7.5)$$

$$F = \frac{u \cdot d^2 \cdot E \cdot \cos \alpha}{8 \cdot r \cdot N \cdot \left[ \frac{16 \cdot r^2}{d^2} (1 + \mu \cdot \cos^2 \alpha) + \sin^2 \alpha + 2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \beta_y \cdot (1 + \mu) \right]} \quad (7.6)$$

$$F = \frac{28 \cdot 1,2^2 \cdot 2,06 \cdot 10^5 \cdot \cos 11^\circ 17' 18''}{8 \cdot 2,4 \cdot 24 \cdot \left[ \frac{16 \cdot 2,4^2}{1,2^2} (1 + 0,264 \cdot \cos^2 11^\circ 17' 18'') + \sin^2 11^\circ 17' 18'' + 2 \cdot \cos^2 11^\circ 17' 18'' \cdot \frac{32}{27} (1 + 0,264) \right]} \quad (7.7)$$

$$F \equiv F_8 \doteq 212,57 \text{ N} \quad (7.8)$$

Jelikož nyní známe velikost maximální pracovní síly, můžeme podle vztahů (5.5) až (5.8) zjistit velikosti napětí působící v příčném průřezu pružiny.

$$\sigma_N = \frac{N}{S} = \frac{4 \cdot F \cdot \sin \alpha}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 212,57 \cdot \sin 11^\circ 17' 18''}{\pi \cdot 1,2^2} \doteq 36,79 \text{ MPa} \quad (7.9)$$

$$\sigma_{M_0} = \frac{M_0}{W_0} = \frac{32 \cdot F \cdot r \cdot \sin \alpha}{\pi \cdot d^3} = \frac{32 \cdot 212,57 \cdot 2,4 \cdot \sin 11^\circ 17' 18''}{\pi \cdot 1,2^3} \doteq 588,66 \text{ MPa} \quad (7.10)$$

$$\tau_T = \frac{4}{3} \cdot \frac{T}{S} = \frac{16}{3} \cdot \frac{F \cdot \cos \alpha}{\pi \cdot d^2} = \frac{16}{3} \cdot \frac{212,57 \cdot \cos 11^\circ 17' 18''}{\pi \cdot 1,2^2} \doteq 245,76 \text{ MPa} \quad (7.11)$$

$$\tau_{M_k} = \frac{M_k}{W_k} = \frac{16 \cdot F \cdot r \cdot \cos \alpha}{\pi \cdot d^3} = \frac{16 \cdot 212,57 \cdot 2,4 \cdot \cos 11^\circ 17' 18''}{\pi \cdot 1,2^3} \doteq 1474,54 \text{ MPa} \quad (7.12)$$

Z jednotlivých složek napětí můžeme určit redukovaná napětí podle podmínky plasticity  $\max \tau$  (7.13) a podle HMH (7.15).

$$\sigma_{RED} = \sqrt{(\sigma_{M_0} + \sigma_N)^2 + 4 \cdot (\tau_T + \tau_{M_k})^2} \quad (7.13)$$

$$\sigma_{RED} = \sqrt{(588,66 + 36,79)^2 + 4 \cdot (245,76 + 1474,54)^2} \doteq 3496,99 \text{ MPa} \quad (7.14)$$

$$\sigma_{RED} = \sqrt{(\sigma_{M_o} + \sigma_N)^2 + 3 \cdot (\tau_T + \tau_{M_k})^2} \quad (7.15)$$

$$\sigma_{RED} = \sqrt{(588,66 + 36,79)^2 + 3 \cdot (245,76 + 1474,54)^2} \doteq 3044,58 \text{ MPa} \quad (7.16)$$

Na základě výpočtu redukovaných napětí můžeme určit bezpečnosti vůči MSP podle jednotlivých podmínek plasticity. K výpočtům použijeme horní hodnotu meze kluzu určenou dle vztahu (7.4).

$$k_{k_{\max\tau}} = \frac{\sigma_k}{\sigma_{RED}} = \frac{1627,5}{3496,99} = 0,465 \quad (7.17)$$

$$k_{k_{\text{HMH}}} = \frac{\sigma_k}{\sigma_{RED}} = \frac{1627,5}{3044,58} = 0,535 \quad (7.18)$$

Z výsledků je patrné, že i při využití vztahů pro přímé pruty při poměru  $r/d = 2$  je v obou případech koeficient bezpečnosti vůči MSP menší než jedna, tudíž je zřejmé, že pružina nemůže vydržet více než jeden výstřel z palné zbraně.

### 7.1.2 Výpočet pomocí vztahů v literatuře Konstruování strojních součástí

Jak už bylo zmíněno, k výpočtu využijeme Bergsträsserův součinitel, který by měl zohledňovat vliv zakřivení střednice. Postup výpočtu bude obdobný, přičemž velikost síly odpovídající stlačenému stavu pružiny určíme následovně.

$$F \doteq \frac{u \cdot d^4 \cdot G}{8 \cdot D^3 \cdot N} = \frac{u \cdot d^4 \cdot G}{8 \cdot (2 \cdot r)^3 \cdot N} = \frac{28 \cdot 1,2^4 \cdot 81,5 \cdot 10^3}{8 \cdot (2 \cdot 2,4)^3 \cdot 24} = 222,85 \text{ N} \quad (7.19)$$

Poměr vinutí pro dané parametry určíme dle vztahu (5.47).

$$C = \frac{D}{d} = \frac{2 \cdot r}{d} = \frac{2 \cdot 2,4}{1,2} = 4 \quad (7.20)$$

Z výše vypočtených hodnot je možné určit smykové napětí působící v pružinovém drátu.

$$\tau = K_B \cdot \frac{8 \cdot F \cdot D}{\pi \cdot d^3} = \frac{4 \cdot C + 2}{4 \cdot C - 3} \cdot \frac{8 \cdot F \cdot 2 \cdot r}{\pi \cdot d^3} = \frac{4 \cdot 4 + 2}{4 \cdot 4 - 3} \cdot \frac{8 \cdot 222,85 \cdot 2 \cdot 2,4}{\pi \cdot 1,2^3} = 2182,62 \text{ MPa} \quad (7.21)$$

Bezpečnost vůči MSP při použití podmínky plasticity HMH je následně rovna.

$$k_{k_{\text{HMH}}} = \frac{\sigma_k}{\sqrt{3} \cdot \tau} = \frac{1627,5}{\sqrt{3} \cdot 2182,62} = 0,431 \quad (7.22)$$

Z vypočítaného koeficientu bezpečnosti vůči MSP je zřejmé, že i při využití vztahů dle literatury [1] dojde k překročení meze kluzu pružinového drátu. Dále koeficient bezpečnosti při použití podmínky plasticity HMH vychází menší než při využití analytických vztahů, tudíž je nutné dojít k závěru, že tento vztah jistým

způsobem zohledňuje vliv zakřivení střednice. Tyto výsledky budou ještě porovnány s řešením pomocí MKP.

### 7.1.3 Řešení pomocí MKP modelů

Jak již bylo zmíněno, vytvořené modely jsou parametrické, tudíž nám stačí zadat parametry uvedené v tab. 7.1. K výpočtu zde bude uveden i model pracující s prutovými prvky. K výpočtu pomocí objemového modelu bude využit model využívající funkci RBE3. Bylo zjištěno, že napětí získaná z objemových modelů mají procentuální odchylku v napětích přibližně půl procenta, což lze pokládat za zanedbatelnou chybu. K rozdílným hodnotám v napětích dochází nejspíše z důvodu jiné diskretizace sítě a z toho důvodu, že okrajové podmínky nejsou zcela shodné. Model pracující s funkcí RBE3 byl vybrán proto, že výpočetní čas je podstatně kratší a více se svou geometrií blíží k vytvořenému prutovému modelu.

Jako první budou uvedeny výsledky pomocí prutového modelu. K řešení je potřebné nejdříve provést citlivostní analýzu<sup>23</sup>. K získání výsledků budeme na pružinu aplikovat stlačení. Při provedení citlivostní analýzy je potřebné cyklus spustit dvakrát, neboť prut je vytvořen tak, že počet dílků v příčném průřezu není shodný s počtem dílku na jeden činný závit, přičemž nezáleží, v jakém pořadí tyto cykly spustíme, neboť řešení konverguje ke stejným výsledkům. To znamená, že nejdříve provedeme citlivostní analýzu pro dělení příčného průřezu, poté výslednou hodnotu zadáme a provedeme následně citlivostní analýzu pro počet prvků na jeden činný závit. K posuzování procentuálního rozdílu napětí byla použita podmínka plasticity HMH (von Misses stress). Cyklus se ukončí, pokud procentuální rozdíl hodnoty napětí získané v předchozím řešení (tj. s hodnotou CDIV-1) a současné hodnoty je menší než 0,01%.

Hodnota CDIV [-]	Napětí dle HMH [MPa]	Výpočetní čas [s]
5	2971,354	5
6	2962,834	12
7	2957,892	19
8	2954,882	23
9	2951,645	30
10	2949,814	41
11	2948,790	43
12	2947,485	85
13	2946,686	78
14	2946,961	95
Hodnota EDIV [-]	Napětí dle HMH [MPa]	Výpočetní čas [s]
51	2946,069	123
52	2946,096	93

Tab. 7.2 Citlivostní analýza pro prutový model.

Na základě provedené citlivostní analýzy byly zvoleny parametry zvýrazněné v tab. 7.2. Jak je z tabulky patrné, při využití řešení pomocí ANSYSu dostaneme

<sup>23</sup> Citlivostní analýza neboli též konvergence sítě spočívá ve změně velikosti prvků a sledování požadované veličiny, dokud výsledky se výrazně nemění.

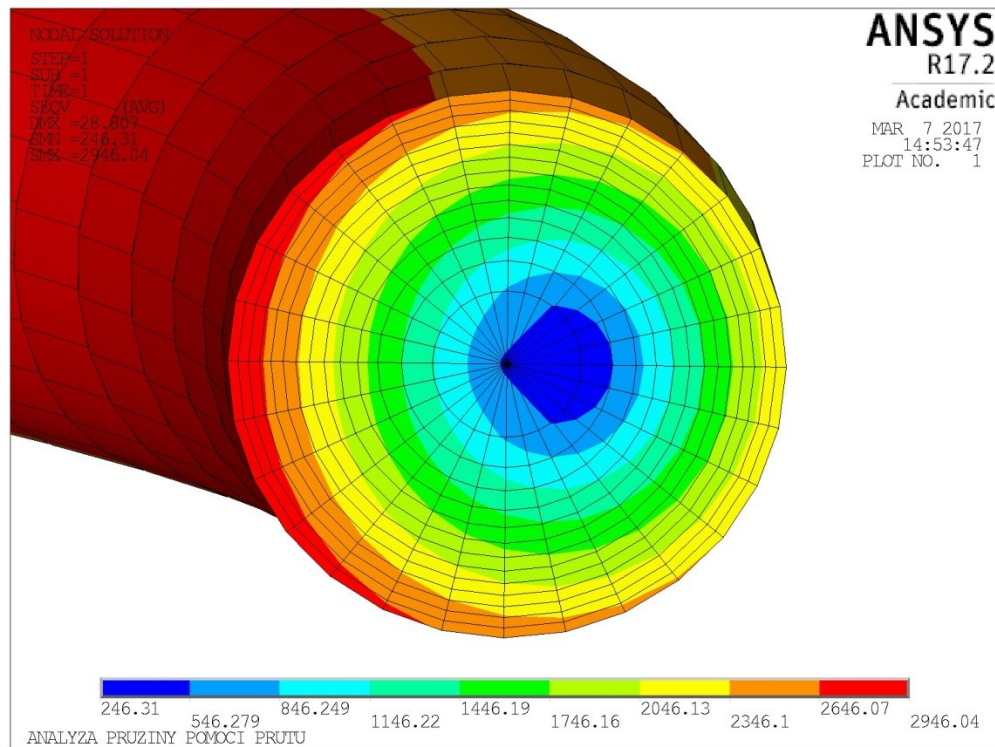
rozdílné hodnoty redukovaného napětí než při využití analytických vztahů. Tento rozdíl je způsoben tím, že prvek BEAM189 uvažuje rovnoměrné rozložení smykových napětí od posouvající síly po celém průřezu, zatímco v odvozených vztazích je předpokládán parabolický průběh napětí.

K ověření výsledků porovnáme normálová napětí vzniklá v příčném průřezu, neboť ta by měla být shodná. K porovnání použijeme velikosti napětí získaná dle vztahu (7.9) a (7.10), přičemž napětí vznikající na vnitřní straně pružinového drátu určíme dle rovnice (7.23) a napětí vzniklá na vnější straně pružinového drátu dle rovnice (7.24).

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_o} = 36,79 + 588,66 = 625,45 \text{ MPa} \quad (7.23)$$

$$\sigma = -\sigma_N + \sigma_{M_o} = -36,79 + 588,66 = 551,87 \text{ MPa} \quad (7.24)$$

Získaná napětí se částečně liší, neboť pro napětí pomocí ANSYSu dostáváme napětí na vnitřní straně pružinového drátu 625,784 MPa a pro napětí na vnější straně 552,163 MPa. Tento rozdíl nejspíše vzniká v důsledku nepřesné definice okrajových podmínek, případně z důvodu hrubé sítě. I tak lze tyto rozdíly označit za zanedbatelné.



Obr. 7.2 Rozložení napětí v příčném průřezu dle podmínky plasticity HMM.

Z obr. 7.2 je patrné, že největší napětí skutečně vzniká na vnitřní straně pružinového drátu, což odpovídá analytickému řešení.

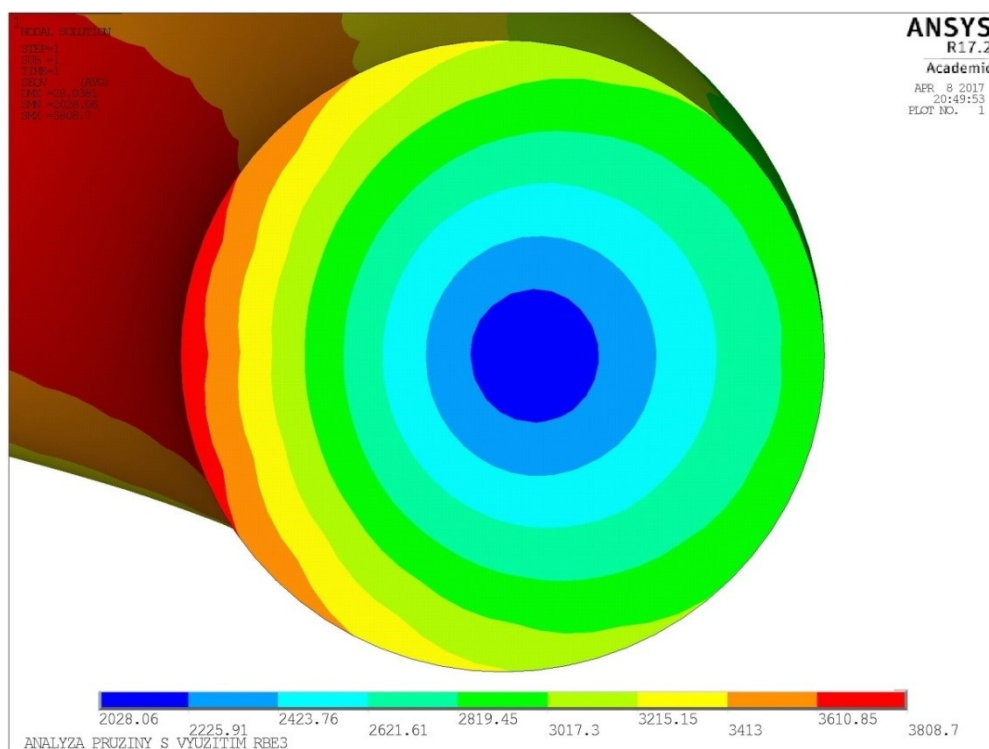
Jak již bylo zmíněno, druhým modelem k porovnání napětí je objemový model pracující s funkcí RBE3. Vstupní parametry zadáme stejné jako u prutového modelu a následně je nutné opět provést citlivostní analýzu. Citlivostní analýza pracuje na stejném principu jako u prutového modelu s tím rozdílem že definujeme velikost prvku v příčném průřezu a počet prvků ve směru sweepu. Bylo opět zjištěno, že nezáleží,

v jakém pořadí citlivostní analýzu spustíme, neboť řešení konverguje ke stejným výsledkům. Jako porovnávací hodnota napětí byla opět zvolena podmínka plasticity HMH. Cyklus se opět ukončí po dosažení procentuálního rozdílu v napětích 0,01%.

Hodnota ESIZE [mm]	Napětí dle HMH [MPa]	Výpočetní čas [s]
0,40	3811,885	1413
0,35	3799,486	1529
0,30	3809,062	2152
0,25	3809,062	2119
Hodnota DIV [-]	Napětí dle HMH [MPa]	Výpočetní čas [s]
50	3789,251	1634
51	3808,578	2878
52	3808,703	2364

Tab. 7.3 Citlivostní analýza pro objemový model.

Na základě provedené citlivostní analýzy byly zvoleny parametry zvýrazněné v tab. 7.3. Z obr. 7.3 je opět patrné, že největší napětí vzniká na vnitřní straně pružinového drátu, ale rozložení napětí v příčném průřezu se mírně liší oproti prutovému modelu.



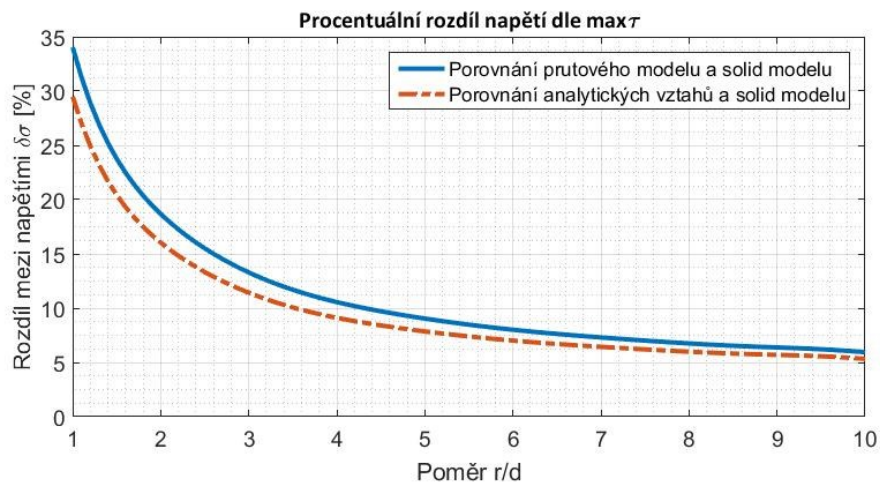
Obr. 7.3 Rozložení napětí v příčném průřezu dle podmínky plasticity HMH u solid modelu.

Při využití výsledků získaných pomocí metody konečných prvků dostáváme bezpečnost vůči MSP danou rovnicí (7.25).

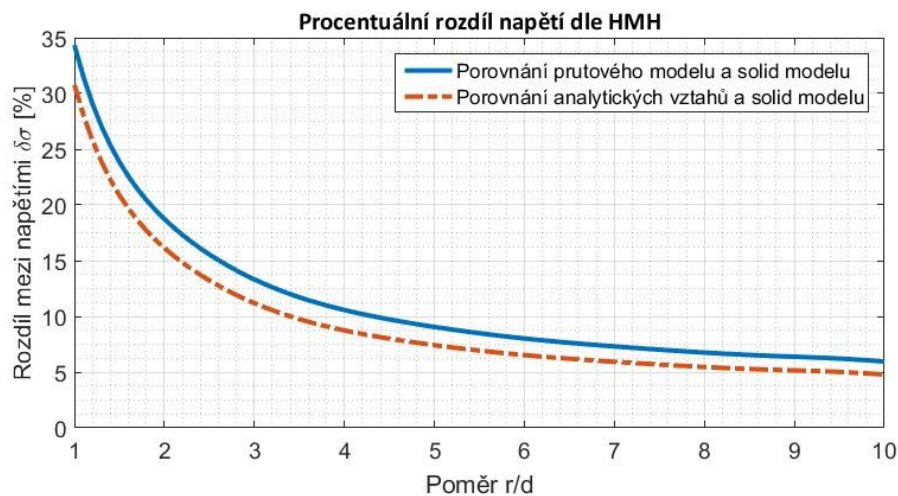
$$k_{k_{\text{HMH}}} = \frac{\sigma_k}{\sigma_{\text{MKP}}} = \frac{1627,5}{3808,7} = 0,427 \quad (7.25)$$

#### 7.1.4 Zobecnění výsledků

Pro tento konkrétní případ provedeme zjištění závislosti rozdílu napětí podle teorie slabě a silně zakřivených prutů dle vzorce (4.9). Tento rozdíl v napětích závisí na úhlu stoupání pružiny a na poměru  $r/d$ , jak již bylo zmíněno výše. Daná závislost bude provedena pro konstantní úhel stoupání pružiny vypočtený dle rovnice (7.1) při změně poměru  $r/d$  od  $\{1; 10\}$  a velikost síly podle vztahu (7.8). Tento stav odpovídá případu, pokud bychom znali velikost zátěžné síly, která bude na pružinu působit v případě maximálního pracovního stlačení pružiny. Závislost při porovnání prutového modelu a solid modelu je společně se závislostí při napětích vypočtených pomocí odvozených analytických vztahů a pomocí solid modelu při použití podmínky plasticity  $\max \tau$  zobrazena na obr. 7.4. Stejná závislost dle podmínky plasticity HMH je na obr. 7.5.



Obr. 7.4 Procentuální rozdíl v napětích pro slabě a silně zakřivené pruty dle  $\max \tau$ .

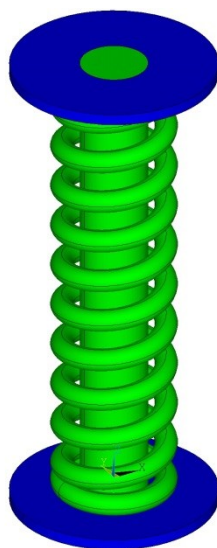


Obr. 7.5 Procentuální rozdíl v napětích pro slabě a silně zakřivené pruty dle HMH.

Jak je z vykreslených závislostí patrné rozdíl v napětích při předepsání stejné zátěžné síly je rozdílný od závislosti uvedené na obr. 4.15. Tento rozdíl je způsoben tím, že závislost byla vykreslena pro případ, kdy na prut nepůsobí kroučící moment, který je u pružiny dominantní.

## 7.2 Řešení pružiny s velkou tuhostí

Postup bude obdobný jako v předchozím případě. Z výkresů je opět možné zjistit parametry pružiny potřebné pro výpočet. Materiálové charakteristiky pružinového drátu jsou opět získány z příslušné technické normy. Tyto hodnoty jsou zapsány v tab. 7.4. U dané pružiny je předepsán průměr vodičího čepu, který bude u výpočtů zanedbán z toho důvodu, že při vytvoření modelu, který by daný problém řešil jako kontaktní úlohu, byla použita výpočetní technika s nedostatečným hardwarem. Vytvořený model je zobrazený na obr. 7.6.



Obr. 7.6 Model cílený k použití při řešení jako kontaktní úloha.

Rozměr	Označení	Velikost	Jednotka
Průměr drátu pružiny	$d$	1	mm
Stoupání pružiny	$s$	2,01	mm
Poloměr vinutí	$r$	2,3	mm
Výrobní délka	$l_0$	66	mm
Délka v předejatém stavu	$l_1$	55	mm
Délka při maximálním zatížení	$l_8$	46	mm
Počet činných závitů	$N$	32	-
Materiálová charakteristika	Označení	Velikost	Jednotka
Yongův modul	$E$	$2,06 \cdot 10^5$	MPa
Modul pružnosti ve smyku	$G$	$81,5 \cdot 10^3$	MPa
Maximální mez pevnosti	$\sigma_{Pt}$	2350	MPa

Tab. 7.4 Vstupní parametry pro výpočet.

K řešení bude použita vytvořená kalkulačka uvedená na začátku kapitoly. Daná kalkulačka při zobrazení výsledků vypíše i tuhost pružiny odpovídající použitým analytickým vztahům. K výpočtům je nutné zadat veličiny uvedené v tab. 7.4.

```

Zadejte poloměr pružiny v mm: 2.8
Zadejte průměr drátu v mm: 1
Zadejte stoupání v mm: 2.01
Zadejte mez pevnosti v MPa: 2350
Zadejte modul pružnosti ve smyku v MPa: 81500
Zadejte modul pružnosti ve tahu v MPa: 206000
Zadejte počet činných závitů: 32
Zadejte délku pružiny v nezatíženém stavu L0: 66
Zadejte délku pružiny v předepjatém stavu L1: 55
Zadejte délku pružiny při maximálním zatížení L8: 46
Zvolte podmínku plasticity
pro maxTau zadejte.....1
pro HMM zadejte.....2
Podmínka plasticity: 1
Použijte řešení pomocí MKP
Výpočet při uvažování všech napětí a úhlu stoupání
Velikost zátěžné síly: 63.291 N
Tuhost pružiny je: 3.165 N/mm
Bezpečnost vůči MSP je podle maxT: 1.040

```

Obr. 7.5 Prostředí vytvořené kalkulačky.

Obdobným způsobem získáme i bezpečnost pomocí podmínky plasticity HMM. Posouzení bezpečnosti vůči MSP bude provedeno i pomocí vytvořeného MKP modelu. Citlivostní analýza je provedena obdobným způsobem jako v předchozím případě. Již vypočtené hodnoty zapíšeme do tab. 7.5.

Analytické vztahy	Označení	Velikost	Jednotka
Podmínka plasticity $\max\tau$	$k_{k_{\max\tau}}$	1,040	-
Podmínka plasticity HMM	$k_{k_{HMM}}$	1,197	-
MKP	Označení	Velikost	Jednotka
Podmínka plasticity $\max\tau$	$k_{k_{\max\tau}}$	0,860	-
Podmínka plasticity HMM	$k_{k_{HMM}}$	0,990	-

Tab. 7.5 Bezpečnost vůči MSP.

## 8 Návrh tlačné pružiny

Cílem této práce je navržení bicí pružiny palné zbraně. Jelikož bicí pružiny musí vydržet takový počet cyklů, který odpovídá nízkocyklické únavě a současně se jedná o pulzující cyklus, je vyšetřování mezního stavu únavy (MSÚ) velmi problematické a přesahuje znalosti získané během základního studia. Z tohoto důvodu budeme při návrhu pružiny vycházet z MSP, přičemž požadovanou bezpečnost budeme volit o něco vyšší, z toho důvodu, že k MSÚ dochází při nižších napětích. Analytický návrh je nutné brát s určitým nadhledem z toho důvodu, že nebyl zjištěn průběh smykového napětí od krouticího momentu dle teorie silně zakřivených prutů, tudíž výsledky při malých poměrech  $r/d$  mohou být nepřesné.

### 8.1 Návrh při využití odvozených analytických vztahů

Při návrhu pružiny budeme vycházet z následujících rovnic, které byly odvozeny v předchozích kapitolách. V případě bicí pružiny je nejvhodnější využít vztahy bez zjednodušujících kritérií, neboť se tak dopustíme nejmenší chyby při výpočtu, ačkoliv ani tak daná chyba není zanedbatelná.

#### – Redukované napětí

Při návrhu pružiny je nutné brát v potaz maximální velikost redukovaného napětí, které vzniká v pružinovém drátě. Pro velikost tohoto napětí dle podmínky plasticity  $\max \tau$  platí vztah (8.1). Velikost tohoto napětí je závislá na velikosti zátěžné síly, úhlu stoupání pružiny, průměru pružinového drátu a poloměru vinutí.

$$\sigma_{RED} = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2} \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha \cdot \left(1 + \frac{8 \cdot r}{d}\right)^2 + 64 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{r}{d}\right)^2} \quad [\text{MPa}] \quad (8.1)$$

#### – Návrhový součinitel

Byl použit k určení délky pružiny při maximálním stlačení.

$$k_n = \frac{l_8}{l_9} \quad [-] \quad (8.2)$$

#### – Tuhost pružiny

Parametry, které lze volit a které zároveň ovlivňují tuhost pružiny, jsou průměr drátu, úhel stoupání pružiny, poloměr vinutí a počet činných závitů.

$$k = \frac{d^2 \cdot E \cdot \cos \alpha}{8 \cdot r \cdot N \cdot \left[ \frac{16 \cdot r^2}{d^2} \cdot (1 + \mu \cdot \cos^2 \alpha) + \sin^2 \alpha + 2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \beta_y \cdot (1 + \mu) \right]} \quad [\text{N/mm}] \quad (8.3)$$

#### – Počet závitů

Při návrhu pružiny je nutné, aby platila podmínka dle vztahu (8.4), která udává závislost mezi celkovým počtem závitů, který závisí na způsobu zakončení pružiny a průměru drátu.

$$l_9 = n_t \cdot d \quad [\text{mm}] \quad (8.4)$$

- Velikost zátěžné síly

Velikost zátěžné síly získáme pomocí vztahu (5.16). Velikost stlačení pro uzavřený obrobený závit je dán vztahem (8.5), přičemž délka  $l_8$  je známa. Dále je nutné pamatovat, že pružina je montována s jistým předpětím, tudíž délka pružiny nesmí být menší než délka při minimálním stlačení.

$$u = l_0 - l_8 = s \cdot N + 2 \cdot d - l_8 = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot N \cdot \tan \alpha + 2 \cdot d - l_8 \quad [\text{mm}] \quad (8.5)$$

Ze vzorce pro redukované napětí je patrné, že napětí bude klesat se zmenšujícím se poměrem  $r/d$  a rostoucím průměrem pružinového drátu. Ovšem je nutné brát v potaz, že dané vztahy byly odvozeny pro přímé pruty, tudíž v případě malého poměru  $r/h$  bude narůstat rozdíl v napětích, neboť v tomto případě mají napětí po příčném průřezu odlišný průběh, jak již bylo zmíněno.

Ze vztahu pro tuhost pružiny je patrné, že tuhost závisí na poměru  $r/d$ , dále na úhlu stoupání pružinového drátu a počtu činných závitů. Experimentálně bylo zjištěno, že tuhost pružiny klesá s rostoucím počtem činných závitů, rostoucím poměrem  $r/d$  a rostoucím úhlem stoupání pružinového drátu. Je nutné vzít ovšem také v potaz, že s počtem činných závitů roste i celková délka pružiny.

### 8.1.1 Návrh konkrétní tlačné pružiny

Po snaze zkombinovat uvedené rovnice byl zvolen analytický postup, který je nejlepší zadat například do programu Mathcad a na základě parametrů, které je možné volit, sledovat požadované parametry pružiny, kterými jsou tuhost pružiny a bezpečnost vůči MSP.

Vstupní parametry pro výpočet pružiny jsou uvedeny v tab. 8.1. Tyto rozměry jsou dány konstrukčním řešením, přičemž vnější a vnitřní průměr pružiny je volen tak, aby se pohyboval v rozmezí hodnot předchozích případů. Vnitřní průměr pružiny je omezen průměrem vodícího čepu. Poissonův poměr je pro daný materiál stejný a bude použit dle vztahu (7.2).

Volené parametry budou průměr pružinového drátu, poloměr vinutí pružinového drátu a návrhový součinitel. Jelikož je volen průměr pružinového drátu, tak pro daný průměr nalezneme v příslušné normě mez pevnosti materiálu.

Cílem výpočtu je dosažení malé tuhosti pružiny a bezpečnosti vůči MSP vyšší. Jelikož jsou pružiny zatěžovány časově proměnnou napjatostí, je nutné, aby výsledná bezpečnost vůči MSP byla vyšší z toho důvodu, že k únavovému poškození dochází při nižších napětích.

Rozměr	Označení	Velikost	Jednotka
Maximální vnější průměr pružiny	$D'$	6	mm
Délka v předepjatém stavu	$l_1$	55	mm
Délka při maximálním zatížení	$l_8$	46	mm
Průměr pružinového drátu	$d$	1	mm
Materiálová charakteristika	Označení	Velikost	Jednotka
Střední hodnota meze pevnosti	$\sigma_{pt}$	2435	MPa
Parametr	Označení	Velikost	Jednotka
Návrhový součinitel	$k_n$	1,2	—

Tab. 8.1 Vstupní parametry pro návrh pružiny.

Poloměr vinutí pružiny získáme z maximálního vnějšího průměru pružiny a průměru pružinového drátu.

$$r = \frac{D'-d}{2} = \frac{6-1}{2} = 2,5 \text{ mm} \quad (8.6)$$

Ze známé délky pružiny při maximálním provozním stlačení pružiny pomocí návrhového součinitele určíme délku pružiny při dosednutí závitů na sebe.

$$l_9 = \frac{l_8}{k_n} = \frac{46}{1,2} = 38, \bar{3} \text{ mm} \quad (8.7)$$

Ze zjištěné délky pružiny při dosednutí závitů na sebe je možné určit počet činných závitů. Počet činných závitů získáme z rovnice (8.4), přičemž pro pružinu s uzavřenými obrobenými závity je  $n_t = N + 2$ .

$$N' = \frac{l_9}{d} - 2 = 36, \bar{3} \quad (8.8)$$

Zvolený počet činných závitů bude  $N = 35$ . V následujícím kroku určíme výrobní délku pružiny. Jelikož pružiny jsou montovány s předpětím, je nutné, aby výrobní délka pružiny byla větší než délka při minimálním stlačení.

$$l_0 = 1,1 \cdot l_1 = 60,5 \text{ mm} \quad (8.9)$$

Ze známé výrobní délky je možné určit rozteč závitů (8.10), ze kterého následně určíme úhel stoupání pružinového drátu (8.11).

$$s = \frac{l_0 - 2 \cdot d}{N} = \frac{60,5 - 2 \cdot 1}{35} = 1,671 \text{ mm} \quad (8.10)$$

$$\alpha = \text{atan} \left( \frac{s}{2 \cdot \pi \cdot r} \right) = \text{atan} \left( \frac{1,671}{2 \cdot \pi \cdot 2,5} \right) = 6,074^\circ \quad (8.11)$$

Z těchto parametrů je možné určit odpovídající tuhost pružiny, dle vztahu (8.3).

$$k = \frac{1^2 \cdot 206000 \cdot \cos 6,074^\circ}{8 \cdot 2,5 \cdot 35 \cdot \left[ \frac{16 \cdot 2,5^2}{1^2} \cdot (1 + 0,264 \cdot \cos^2 6,074^\circ) + \sin^2 \alpha + 2 \cdot \cos^2 6,074^\circ \cdot \frac{32}{24} \cdot (1 + 0,264) \right]} = 2,261 \text{ N/mm} \quad (8.12)$$

Velikost zátěžné síly určíme dle vztahu (8.13).

$$F = k \cdot u = k \cdot (l_0 - l_8) = 2,261 \cdot (60,5 - 46) = 32,779 \text{ N} \quad (8.13)$$

Bezpečnost vůči MSP získáme pomocí vztahu (8.1).

$$k_k = \frac{0,75 \cdot \sigma_{pt}}{\sigma_{red}} = \frac{0,75 \cdot \sigma_{pt}}{\sigma_{RED} = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2} \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha \cdot \left(1 + \frac{8 \cdot r}{d}\right)^2 + 64 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{r}{d}\right)^2}} \quad (8.14)$$

$$k_k = \frac{0,75 \cdot 2350}{\sigma_{RED} = \frac{4 \cdot 32,779}{\pi \cdot 1^2} \cdot \sqrt{\sin^2 6,074^\circ \cdot \left(1 + \frac{8 \cdot 2,5}{1}\right)^2 + 64 \cdot \cos^2 6,074^\circ \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{2,5}{1}\right)^2}} = 1,865 \quad (8.15)$$

Při využití SOLID modelu můžeme při definování stejného stlačení a po provedení citlivostní analýzy pružiny následně zkontrolovat bezpečnost vůči MSP při využití MKP. Tímto způsobem je výsledná bezpečnost podle podmínky plasticity  $\max \tau$  (8.16).

$$k_k = \frac{0,75 \cdot 2350}{1125,07} = 1,57 \quad (8.16)$$

### 8.1.2 Diskuze výsledků při využití daného postupu

Daný postup vychází z odvozených analytických vztahů, kdy při návrhu musí být brány v potaz veličiny, které v daných rovnicích vystupují. Z hlediska tuhosti pružiny je výhodnější volit pružinu s větším počtem činných závitů a větším poměrem  $r/d$ .

Tímto postupem dosáhneme nejlepších výsledků, neboť vzájemná kombinace rovnic je velmi problematická. V tomto konkrétním případě byl použit pružinový drát o průměru, který je shodný s průměrem drátu jako v případě pružiny, u které byla příliš velká tuhost. Zvětšením poloměru vinutí pružinového drátu a současným zmenšením úhlu stoupání pružiny byla snížena tuhost pružiny na přijatelnou hodnotu. Jelikož je pružina kratší, není zátěžná síla tak velká jako v předchozích případech. Zmenšením síly, která způsobí požadované stlačení, klesá i redukované napětí v pružinovém drátu a výsledná bezpečnost je vyšší, což je nezbytné z toho důvodu, že pružina je zatěžována cyklicky.

Nejdříve je určena délka pružiny při dosednutí závitů na sebe pomocí návrhového součinitele, ze které je následně určen počet činných závitů, který je potřeba zaokrouhlit na celé číslo. Výrobní délka pružina je volena jako několikanásobek délky pružiny v předepjatém stavu.

Při využití daného postupu musí mít konstruktér představu, na kterých parametrech zjišťované parametry záleží a jak nejlépe dosáhnout požadovaných výsledků.

Je nutné zdůraznit, že daný postup vychází z teorie slabě zakřivených prutů, neboť analytické vztahy dle teorie silně zakřivených vztahů se nepodařilo odvodit. Jelikož tuhost pružiny taktéž závisí na použité teorii, je nutné ji brát jako orientační. V daném případě bylo cílem dosáhnout nižší tuhosti pružiny při využití vztahů stejných jako v případě pružiny, která měla příliš velkou tuhost a její tuhost snížit.

Výsledky byly následně ověřeny pomocí metody MKP. Tím dosáhneme toho, že můžeme zjistit bezpečnost vůči MSP při zohlednění vlivu zakřivení střednice, ale nejsme schopni určit přesnou tuhost pružiny.

## 9 Závěr

Cílem této práce bylo odvodit analytické vztahy pro výpočet tlačných šroubových válcových pružin. Analytické vztahy byly odvozeny pouze pro slabě zakřivené pruty, které lze použít pouze při větších poměrech vinutí pružiny a průměru pružinového drátu. Pouze v tomto případě je možné rozdíly v napětích považovat za zanedbatelné. V případě teorie silně zakřivených prutů nelze počítat s pružinou jako se slabě zakřiveným prutem, neboť rozdíly v napětích již nejsou zanedbatelné, ale rozdíly jsou v jednotkách procent.

Pružina byla vyšetřována pouze vůči MSP. V případě bicí pružiny se jedná o cyklické zatěžování, které je velmi problematické popsat, neboť výstřel je otázkou sekund a jedná se o nízkocyklickou únavu a pulsující cyklus. Z tohoto důvodu byla při návrhu pružiny volena vyšší bezpečnost vůči meznímu stavu pružnosti, neboť vyšetření bezpečnosti vůči meznímu stavu únavy přesahuje znalosti získané během základního studia,

Na odvozené analytické vztahy byly následně použity zjednodušující kritéria, ze kterých vyplývá, že při malém úhlu stoupání pružiny můžeme zanedbat vliv normálových napětí. Pokud je navíc velký poměr  $r/d$ , je možné zanedbat i složku smykového napětí od posouvající síly a počítat pouze se smykovým napětím, které v příčném průřezu pružinového drátu vytváří krouticí moment. Analytické vztahy při použití zjednodušujících kritérií a bez nich byly vykresleny pomocí programu Matlab, kde byla uvedena závislost v rozdílech napětí pro různé poměry  $r/d$  a v závislosti na úhlu stoupání pružinového drátu. Ze závislosti vyšlo, že procentuální rozdíl v napětích záleží na použité podmínce plasticity.

V případě bicí pružiny se v zadaných problémech jednalo o silně zakřivené pruty s velkým poměrem  $r/d$ . Z tohoto důvodu byly vytvořeny modely pomocí metody konečných prvků. První model je založen na prutových prvcích a byl použit k zjištění, jak přesně aplikovat zatížení na pružinu, které by bylo ekvivalentní analytickým výpočtům. Na základě prutového modelu byl vytvořen model pracující s objemovými prvky, který umožňuje zohlednit vliv zakřivení pružinového drátu. Vytvořený objemový model byl následně použit k vykreslení závislosti procentuální chyby v napětích při využití teorie silně a slabě zakřivených prutů. Model byl taktéž použit ke zjištění bezpečnosti vůči MSP pomocí zjištěných redukovaných napětí.

Po odvození analytických vztahů a vytvoření MKP modelů byly vypočteny zadané problémy. Bylo zjištěno, že v případě první pružiny dochází k překročení meze kluzu materiálu a bicí pružina tak nebyla schopna vydržet ani jeden výstřel, neboť došlo k její trvalé deformaci. U druhé pružiny byla zjištěna její tuhost, neboť problémem byla přílišná tuhost pružiny. Tato tuhost byla odvozena pomocí vztahů pro slabě zakřivené pruty, ale jedná se o nejpřesnější výsledek, kterého se povedlo dosáhnout, tudíž tato tuhost byla brána jako referenční a s využitím stejných vztahů bylo cílem její hodnotu snížit.

Na závěr byla navržena bicí pružina při využití odvozených analytických vztahů bez zjednodušujících kritérií, neboť tak se dopustíme nejmenší chyby, která ovšem i tak není zanedbatelná. Na základě odvozených vzorců byl navrhnut postup výpočtu, pomocí kterého byla navržena pružina, která by měla být schopna splnit požadované podmínky. Její tuhost byla snížena na přijatelnou hodnotu při zachování stejného průměru

pružinového drátu. Bezpečnost vůči meznímu stavu pružnosti byla zvýšena a její hodnota je přijatelná i při výpočtu pomocí MKP, což je hlavním kritériem.

## Seznam obrázků

Obr. 2.1 Částečný řez pistolí, převzato z [1].	12
Obr. 3.1 Popis tlačné šroubovitě válcové pružiny.	15
Obr. 3.2 Typy zakončení, převzato z [2].	16
Obr. 3.3 Znázornění délek pružiny a tomu odpovídajících sil.	18
Obr. 4.1 Znázornění střednice $\gamma$ a příčného průřezu $\psi$ .	19
Obr. 4.2 Zatížený prut se střednicí $\gamma$ a příčným průřezem $\psi$ .	20
Obr. 4.3 Zatížení tlakovou silou.	20
Obr. 4.4 Zatížení tahovou silou.	20
Obr. 4.5 Zatížení ohybovým momentem.	21
Obr. 4.6 Namáhání krouticím momentem.	21
Obr. 4.7 Zatížení posouvající silou.	21
Obr. 4.8 Znázornění prutové napjatosti v Mohrově rovině a na elementární krychli.	22
Obr. 4.9 a) Schéma univerzálního zkušebního stroje, Smluvní diagram napětí-deformace.	23
Obr. 4.10 a) Znázornění podmínky $\max_t$ v Haighově prostoru, b) Oktaedrické rovině.	24
Obr. 4.11 a) Znázornění podmínky $HMH$ v Haighově prostoru, b) Oktaedrické rovině.	25
Obr. 4.12 Časový průběh smykového napětí u tlačné šroubovitě pružiny.	26
Obr. 4.13 a) Zalomený prut, b) Zakřivený prut.	27
Obr. 4.14 Zakřivený prut s charakteristickými rozměry.	27
Obr. 4.15 Závislost $\Delta\sigma$ v procentech na poměru $R/h$ , převzato z [3].	28
Obr. 5.1 a) Znázornění pružiny, b) Znázornění pružiny v řezu.	29
Obr. 5.2 a) Znázornění prvku $\Omega$ v prutu, b) Znázornění $VV\dot{U}$ a rozložení síly do osy pružiny.	30
Obr. 5.3 Znázornění napětí v příčném průřezu.	31
Obr. 5.4 a) Zavedení momentu $M_D$ , b) Znázornění $VV\dot{U}$ se zavedeným $M_D$ .	36
Obr. 5.5 Procentuální rozdíl napětí dle vztahu 5.41.	38
Obr. 5.6 Procentuální rozdíl napětí dle vztahu 5.42.	38
Obr. 5.7 Procentuální rozdíl napětí dle vztahu 5.41.	39
Obr. 5.8 Procentuální rozdíl napětí dle vztahu 5.42.	39
Obr. 6.1 Prutový prvek BEAM 189, převzato z [7].	42
Obr. 6.2 Počáteční model pomocí prvku BEAM189.	43
Obr. 6.3 a) Geometrie modelu, b) Zesíťovaný model s aplikovanými okrajovými podmínkami.	45
Obr. 6.4 Zavržený model pružiny.	45
Obr. 6.5 a) Objemový prvek SOLID 186, b) Objemový prvek SOLID187, převzato z [7].	46
Obr. 6.6 a) Geometrie modelu, b) Zesíťovaný model.	47
Obr. 6.7 Bodový prvek MASS21, převzato z [7].	48
Obr. 6.8 Zatížení vytvořeného zakončení.	48
Obr. 6.9 a) Geometrie modelu, b) Zesíťovaný model.	49
Obr. 7.1 Nabídka programu.	50
Obr. 7.2 Rozložení napětí v příčném průřezu dle podmínky plasticity $HMH$ .	55
Obr. 7.3 Rozložení napětí v příčném průřezu dle podmínky plasticity $HMH$ u solid modelu.	56
Obr. 7.4 Procentuální rozdíl v napětích pro slabě a silně zakřivené pruty dle $\max_t$ .	57
Obr. 7.5 Procentuální rozdíl v napětích pro slabě a silně zakřivené pruty dle $HMH$ .	57
Obr. 7.6 Model cílený k použití při řešení jako kontaktní úloha.	58

## Seznam použitých zdrojů

- [1] Nauka o zbraních. *Zbraně kvalitně* [online]. CZECHNOLOGY, 2017 [cit. 2017-05-14]. Dostupné z: <https://zbrankkvalitne.cz/zbrojni-prukaz/nauka-o-zbranich>.
- [2] SHIGLEY, Joseph Edward, Charles R. MISCHKE, Richard G. (Richard Gordon) BUDYNAS, Martin HARTL a Miloš VLK. *Konstruování strojních součástí*. V Brně: VUTIUM, 2010, xxv, 1159 s.: il. ; 26 cm. ISBN 978-80-214-2629-0.
- [3] JANÍČEK, Přemysl. *Mechanika těles: pružnost a pevnost I*. Brno: CERM, 2004, 287 s. : obr. ISBN 80-214-2592-X.
- [4] PTÁČEK, Luděk, c2003. *Nauka o materiálu I. 2.*, opr. a rozš. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM. ISBN 80-720-4283-1.
- [5] HORNÍKOVÁ, Jana. *Pružnost a pevnost: Interaktivní učební text*. 1. vyd. Brno: CERM, 2003. ISBN 80-720-4268-8
- [6] JANÍČEK, Přemysl a Zdeněk FLORIAN. *Mechanika těles: úlohy z pružnosti a pevnosti I*. 4., přeprac. vyd., V Akademickém nakl. CERM 1. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2004, 170 s. : obr. ISBN 80-214-2655-1.
- [7] ANSYS® Academic Research, Release 17.2, Help System, Mechanical APDL, ANSYS, Inc.
- [8] Zákon č. 119/2002 Sb., o střelných zbraních a střelivu, ve znění pozdějších změn
- [9] *Ocelové dráty na mechanické pružiny: Část 1: Patentované pružinové dráty z nelegovaných ocelí, tažené za studena*, 2012. 2 vyd.

## Seznam použitých veličin

Symbol	Jednotka	Význam
$l_0$	mm	délka pružiny v nezatíženém stavu
$l_1$	mm	délka pružiny v předepjatém stavu
$l_8$	mm	délka pružiny při maximálním zatížení
$l_9$	mm	délka pružiny při dosednutí všech závitů na sebe
$F_1$	N	minimální pracovní síla
$F_8$	N	maximální pracovní síla
$F_9$	N	síla, která způsobí dosednutí závitů na sebe
$W_O$	mm <sup>3</sup>	modul průřezu v ohybu
$W_K$	mm <sup>3</sup>	modul průřezu v krutu
$W$	N·mm	energie napjatosti
$\Delta\sigma$	%	procentuální rozdíl napětí
$d$	mm	průměr pružinového drátu
$r$	mm	poloměr vinutí pružinového drátu
$N$	-	počet činných závitů pružiny
$s$	mm	stoupání pružiny
$\alpha$	rad	úhel stoupání pružiny
$\Omega$	-	prvek pružiny
$Re, \sigma_k$	MPa	mez kluzu materiálu
$\mu$	-	Poissonova konstanta
$M_y$	N·mm	výsledný moment v ose y pro dané VVÚ
$M_x$	N·mm	výsledný moment v ose x pro dané VVÚ
$M_z$	N·mm	výsledný moment v ose z pro dané VVÚ
$F_x$	N	výsledná síla v ose x pro dané VVÚ
$F_z$	N	výsledná síla v ose z pro dané VVÚ
$M_k$	N·mm	krouticí moment
$M_o$	N·mm	ohybový moment
$T_z$	N	posouvající síla VVÚ v ose z
$N$	N	normální síla
$F$	N	zátěžná síla
$S$	mm <sup>2</sup>	průřez pružinového drátu
$J_p$	mm <sup>4</sup>	polární kvadratický moment
$J_z$	mm <sup>4</sup>	kvadratický moment k ose z
$\sigma_{RED}$	MPa	redukované napětí
$\sigma_{M_o}$	MPa	normálně napětí od ohybového momentu
$\sigma_N$	MPa	normálně napětí od normální síly
$\tau_T$	MPa	smykové napětí od posouvající síly
$\tau_{M_k}$	MPa	smykové napětí od krouticího momentu
$k_k$	-	koeficient bezpečnosti
$l$	mm	délka pružinového drátu
$u$	mm	posuv ve směru zátěžné síly
$\beta_y$	-	tvarová funkce
$E$	MPa	modul pružnosti v tahu

$G$	MPa	modul pružnosti ve smyku
$M_D$	N·mm	doplňkový moment
$\varphi$	rad	úhel natočení čel pružiny
$D$	mm	střední průměr pružiny
$C$	-	poměr vinutí pružiny
$l_m$	mm	stlačení, které způsobí dosednutí závitů na sebe
$n_t$	-	celkový počet závitů
$a$	-	konstanta závisající na typu zakončení
$\sigma_{Pt}$	MPa	mez pevnosti materiálu
$\sigma$	MPa	normální napětí
$\tau$	MPa	smykové napětí
$k_{k_{HMH}}$	-	bezpečnost podle podmínky plasticity HMH
$\sigma_{MKP}$	MPa	napětí podle metody konečných prvků
$k_{k_{max\tau}}$	-	bezpečnost podle podmínky plasticity max $\tau$