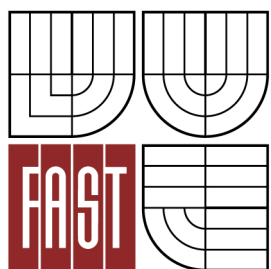




VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STAVEBNÍ  
ÚSTAV GEODÉZIE

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING  
INSTITUTE OF GEODESY

## ZPRACOVÁNÍ KVAZIGEOIDU NA PROFILU VELKÁ BÍTEŠ - UHERSKÉ HRADIŠTĚ

QUASIGEOID PROFILE VELKÁ BÍTEŠ - UHERSKÉ HRADIŠTĚ

DIPLOMOVÁ PRÁCE  
MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

Bc. RICHARD KRATOCHVÍL

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

Ing. RADOVAN MACHOTKA, Ph.D.



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA STAVEBNÍ

<b>Studijní program</b>	N3646 Geodézie a kartografie
<b>Typ studijního programu</b>	Navazující magisterský studijní program s prezenční formou studia
<b>Studijní obor</b>	3646T003 Geodézie a kartografie
<b>Pracoviště</b>	Ústav geodézie

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

<b>Diplomant</b>	Bc. RICHARD KRATOCHVÍL
<b>Název</b>	Určení průběhu kvazigeoidu na profilu Velká Bíteš - Uherské Hradiště
<b>Vedoucí diplomové práce</b>	Ing. Radovan Machotka, Ph.D.
<b>Datum zadání diplomové práce</b>	30. 11. 2012
<b>Datum odevzdání diplomové práce</b>	24. 5. 2013
V Brně dne 30. 11. 2012	

.....  
doc. Ing. Josef Weigel, CSc.  
Vedoucí ústavu

.....  
prof. Ing. Rostislav Drochytka, CSc.  
Děkan Fakulty stavební VUT

### **Podklady a literatura**

Vykutil, J., Vyšší geodézie. 1. vyd. Praha: Kartografie, 1982

Hofmann-Wellenhof B. and Moritz H., Physical Geodesy, SpriengerWienNewYork, Wien, 2005.

Torge W., Geodesy, de Gruyter, Berlin, 2001.

### **Zásady pro vypracování**

Užitím metody astronomické nivelace a astronomicko- gravimetrické nivelace určete průběh kvazigeoidu na zadaném profilu. Vyzkoušejte několik variantních řešení. Výsledky porovnejte s profilem určeným gravimetrickou metodou.

### **Předepsané přílohy**

.....  
Ing. Radovan Machotka, Ph.D.  
Vedoucí diplomové práce

**Abstrakt**

Práce pojednává o užití astronomicko-geodetické a astronomicko-gravimetrické nivelace pro výpočet kvazigeoidického profilu. Hlavními vstupními daty do výpočtu jsou elipsoidické a astronomické zeměpisné souřadnice a gravimetrické tížnicové odchylky v bodech profilu. Cílem práce je zpracování a vypočtení profilu relativního kvazigeoidu třemi metodami a následně porovnání výsledků výpočtu s gravimetrickým kvazigeoidem GPS/nivelací.

**Klíčová slova**

Kvazigeoid, astronomicko-geodetická nivelace, astronomicko-geodetická tížnicová odchylka, gravimetrická tížnicová odchylka, interpolace, aproximace

**Abstract**

This thesis deals with use of astronomical-geodetic and gravimetric leveling to calculate quasigeoid profile. The main input data in the calculation are gravimetric vertical deviations on point of profile. The aim of this thesis is the processing and calculating of the profile of relativ quasigeoid with three different methods and then comparing the calculation results with gravimetric quasigeoid and GPS/leveling.

**Keywords**

Quasigeoid, astronomical-geodetic leveling, astronomical-geodetic vertical deviation, gravimetric vertical deviation, interpolation, approximation

## **Bibliografická citace VŠKP**

KRATOCHVÍL, Richard. *Zpracování kvazigeoidu na profilu Velká Bíteš - Uherské Hradiště*. Brno, 2013. 72 s. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav geodézie. Vedoucí práce Ing. Radovan Machotka, Ph.D.

## **Prohlášení:**

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité informační zdroje.

V Brně dne 12.10.2012

.....  
podpis autora  
Richard Kratochvíl

**Poděkování:**

Děkuji vedoucímu této práce Ing. Radovanu Machotkovi Ph.D. za poskytnuté cenné rady a konzultace ke zpracování práce. Děkuji rodině za podporu po celou dobu mého studia.

# Obsah

<b>1. ÚVOD</b> .....	<b>9</b>
<b>2. REFERENČNÍ PLOCHY ZEMSKÉHO TĚLESA</b> .....	<b>10</b>
2.1. GEOID .....	10
2.2. ELIPSOID .....	11
2.3. KVAZIGEOID .....	12
<b>3. TEORIE VÝŠEK</b> .....	<b>16</b>
3.1. GEOPOTENCIÁLNÍ KÓTY .....	16
3.2. PRAVÉ ORTOMETRICKÉ VÝŠKY .....	17
3.3. NORMÁLNÍ ORTOMETRICKÉ VÝŠKY .....	18
3.4. NORMÁLNÍ MOLODĚNSKÉHO VÝŠKY .....	18
3.5. ELIPSOIDICKÉ VÝŠKY .....	19
<b>4. TÍŽNICOVÉ ODCHYLKY</b> .....	<b>21</b>
4.1. ASTRONOMICKO-GEODETICKÉ TÍŽNICOVÉ ODCHYLKY .....	21
4.2. GRAVIMETRICKÉ TÍŽNICOVÉ ODCHYLKY .....	24
<b>5. URČOVÁNÍ PRŮBĚHU KVAZIGEOIDU</b> .....	<b>26</b>
5.1. ASTRONOMICKO-GEODETICKÁ NIVELACE .....	26
5.2. ASTRONOMICKO-GRAVIMETRICKÁ NIVELACE .....	29
<b>6. GRAVITAČNÍ MODELY ZEMĚ</b> .....	<b>31</b>
6.1. EGM2008 .....	32
<b>7. SBĚR DAT</b> .....	<b>34</b>
7.1. LOKALITA .....	34
7.2. MAAS-1 .....	36
<b>8. VSTUPNÍ DATA</b> .....	<b>37</b>
8.1. URČOVÁNÍ GEODETICKÝCH SOUŘADNIC A ELIPSOIDICKÝCH VÝŠEK .....	37
8.2. URČOVÁNÍ ASTRONOMICKÝCH ZEMĚPISNÝCH SOUŘADNIC .....	38
<b>9. VÝPOČET</b> .....	<b>41</b>
9.1. VÝPOČET Z ASTRONOMICKÝCH BODŮ .....	41
9.2. VÝPOČET FUNKCÍ „SPLINE“ .....	43

9.2.1.	<i>Výpočet astronomicko-geodetických odchylek interpolací</i> .....	43
9.2.2.	<i>Výpočet profilu</i> .....	47
9.3.	VÝPOČET APROXIMACÍ.....	47
9.3.1.	<i>Výpočet aproximovaných odchylek</i> .....	47
9.3.2.	<i>Výpočet profilu</i> .....	55
<b>10.</b>	<b>POROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ</b> .....	<b>56</b>
10.1.	ASTRONOMICKÝ KVAZIGEOID .....	56
10.2.	INTERPOLOVANÝ KVAZIGEOID .....	59
10.3.	APROXIMOVANÝ KVAZIGEOID .....	62
<b>11.</b>	<b>ZÁVĚR</b> .....	<b>65</b>
	<b>POUŽITÁ LITERATURA</b> .....	<b>66</b>
	<b>SEZNAM OBRÁZKŮ</b> .....	<b>68</b>
	<b>SEZNAM TABULEK</b> .....	<b>68</b>
	<b>SEZNAM GRAFŮ</b> .....	<b>68</b>
	<b>SEZNAM ZKRATEK</b> .....	<b>69</b>
	<b>SEZNAM SYMBOLŮ</b> .....	<b>70</b>
	<b>SEZNAM ELEKTRONICKÝCH PŘÍLOH</b> .....	<b>72</b>

# 1. Úvod

Nejčastější referenční plochou Země je dvouosý rotační elipsoid. V dnešní době je určování převýšení kvazigeoidu s potřebnou přesností nad touto plochou stále závažnější problém. A to z toho důvodu, že získávání elipsoidické výšky je dnes díky technologii GNSS jednodušší, než získání nadmořské výšky bodu klasickou nivelací. Pro účel převodu elipsoidických a nadmořských, neboli fyzikálních výšek, jsou vytvářeny modely geoidu, respektive kvazigeoidu.

Existuje několik metod jak vypočítat převýšení modelovaných ploch nad elipsoidem. Tato práce se zabývá astronomickou nivelací, kterou lze snadno vypočítat průběh kvazigeoidu nad zvoleným elipsoidem.

Hlavními daty vstupujícími do této diplomové práce jsou gravimetrické tížnicové odchylky a astronomické a geodetické zeměpisné souřadnice bodů na počítaném profilu Velká Bíteš – Uherské Hradiště.

Cílem této práce je vypočítat kvazigeoid třemi různými způsoby a výsledky výpočtu porovnat navzájem mezi sebou a také je porovnat s kvazigeoidy získanými gravimetrickou metodou a GPS nivelací.

Struktura této práce odpovídá postupu při zpracování dat. Předmětem literární rešerše je teoretický základ, který je nutný pro zpracování výpočtu. Další kapitoly popisují přístroj, kterým byly získány data, a jednotlivé kroky výpočtu daného profilu.

Teoretická část obsahuje popis referenčních ploch zemského tělesa, nastínění základní problematiky teorie výšek, vysvětlení pojmu tížnicové odchylky, popis teorie výpočtu kvazigeoidu astronomickou-geodetickou a gravimetrickou nivelací a na závěr je vysvětleno, co jsou to gravitační modely Země.

V praktické části je popsána lokalita daného profilu a uveden stručný popis přístroje, kterým bylo provedeno měření na bodech profilu, dále je zde uveden popis postupu výpočtu astronomických zeměpisných a elipsoidických souřadnic, jsou zde popsány tři postupy výpočtu kvazigeoidu, které byly použity, a v poslední kapitole je uvedeno srovnání výsledků výpočtu.

## 2. Referenční plochy zemského tělesa

### 2.1. Geoid

Pro každý bod geoidu platí, že součet jeho gravitačního potenciálu  $V$  a potenciálu odstředivé síly  $Q$  je roven konstantě  $W$ , která se nazývá tíhový potenciál

$$(2.1) \quad W = V + Q = \textit{konst.}$$

Body se stejným tíhovým potenciálem nazýváme hladinové plochy. To znamená, že geoid je hladinovou plochou.

Přírůstek potenciálu v určitém bodě, je závislý na směru změny. Ve směru tečny k hladinové ploše je nulový, ve směru kolmém na hladinovou plochu je maximální. Stoupání v libovolném jiném směru je pak průmětem maximálního stoupání do tohoto směru.

Stoupání potenciálu v maximálním směru nazýváme gradientem

$$(2.2) \quad \textit{grad} W = -\frac{dW}{dn}.$$

Z tohoto vztahu může být vyjádřena odlehlost elementárně blízkých hladinových ploch. Pokud bude měřeno podél normály, pak velikost odlehlosti je dána výrazem

$$(2.3) \quad dn = -\frac{dW}{|\textit{grad} W|} = -\frac{dW}{|g|},$$

kde  $g$  je vektor tíhového zrychlení. Element  $dn$  může být nahrazen elementárním převýšením  $dh$ , které je měřeno podél normály. Pak bude mít výraz tvar

$$(2.4) \quad dW = -gdh.$$

Tento výraz se nazývá Brunsův teorém a je jedním z nejdůležitějších výrazů pro teorii výšek.

Kdyby Země byla ideálně tekutá, dala by se nalézt z množiny hladinových ploch plocha taková, že

$$(2.5) \quad W = W_0.$$

Tato plocha by se dokonale přimykala k ideální Zemi. Protože Země není ideálně tekutá, lze vybrat pouze plochu, která je nejbližší k fyzickému povrchu Země. Taková plocha je např. střední hladina moří a oceánů, která prochází pod kontinenty a ostrovy a je všude kolmá k siločarám tíhového pole Země. Protože ani střední hladiny moří a oceánů netvoří jedinou hladinovou plochu, realizuje se geoid hladinovou plochou, která prochází pevným bodem, ležícím přibližně v nulové výšce ke zjištěným středním hladinám moří a oceánů.

Od geoidu může být například měřena pravá ortometrická výška, která je dána vztahem (2.8). A to tak, že odlehlost  $\Delta h_{AB}$  hladinových ploch o tíhovém potenciálu  $W_A$  a  $W_B$ , měřená podél silokřivky tíhového pole, která všechny hladinové plochy protíná vždy kolmo, může být zjištěna integrací Brunsova teorému (2.4) v mezích  $A, B$

$$(2.6) \quad W_B - W_A = \Delta W_{AB} = \int_A^B dW = - \int_A^B |g| dh.$$

Po použití věty o střední hodnotě integrálního počtu může být rovnice (2.6) upravena takto

$$(2.7) \quad -\Delta W_{AB} = \int_A^B g dh = g_m \int_A^B dh = g_m \Delta h_{AB},$$

po vyjádření  $\Delta h_{AB}$  se rovnice (2.7) rovná

$$(2.8) \quad \Delta h_{AB} = \frac{\Delta W_{AB}}{g_m},$$

kde  $g_m$  je integrální střední hodnota intenzity tíhového pole na úseku silokřivky mezi uvažovanými hladinovými plochami. Hodnota  $g_m$  nemůže být spočtena, může být pouze při jistých zjednodušeních odhadnuta [1].

## 2.2. Elipsoid

Jako první aproximace zemského tělesa se používá koule. Jako druhá aproximace se může použít elipsoid. Země sice není přesně elipsoidického tvaru, ale její tíhové pole reprezentované tíhovým polem elipsoidu má dvě výhody. Tíhové pole elipsoidu lze jednoduše matematicky popsat a hodnoty elipsoidického normálního tíhového pole mají malé odchylky od skutečného tíhového pole Země. Toto pole se nazývá poruchovým polem a odchylky od skutečného tíhového pole Země, se nazývají poruchové odchylky. Protože takový elipsoid je ekvipotenciální plochou normálního tíhového pole, jedná se o hladinový elipsoid, který představuje normální formu geoidu. Potenciál normálního tíhového pole je značen  $U$  a potenciál hladinového elipsoidu je

$$(2.6) \quad U_0 = \text{konst.},$$

což přesně odpovídá tvaru geoidu [1].

Protože nemusí být známo detailní rozdělení hustoty hmot uvnitř hladinového elipsoidu, tak funkce normálního potenciálu je kompletně popsána těmito třemi body:

- tvarem rotačního elipsoidu, to je poloosami  $a$  a  $b$
- celkovou hmotností Země  $M$
- úhlovou rychlostí rotace Země  $\omega$  [2].

### 2.3. Kvazigeoid

V roce 1945 navrhl Michail Sergejevič Moloděnskij nový postup výpočtu výšek. Do té doby se výška  $H_{el}$  počítala jako součet ortometrické výšky  $H$  a odlehlosti geoidu od elipsoidu  $N$ . Odlehlost  $N$  lze vypočítat pomocí Stokesova integrálu [1]. Pro výpočet ortometrické výšky  $H$  je nutno znát střední hodnotu  $g_m$  podél tížnice mezi geoidem a zemským povrchem. Protože ale toto tíhové měření nelze provést, určuje se pomocí redukci, pro které je potřeba znát hustotní rozložení hmotností vně geoidu. Při klasickém přístupu k těmto problémům fyzikální geodézie musí být známo hustotní rozložení hmotností vně geoidu, nebo o tomto rozložení musejí být vytvářeny předpoklady.

Aby se tomuto Moloděnskij vyhnul, použil pro výpočet výšky  $H_{el}$  normální (Moloděnského) výšku  $H_Q$  a výškovou anomálii  $\zeta$ . Pak se tedy výška  $H_{el}$  vypočte podle vztahu

$$(2.7) \quad H_{el} = H_Q + \zeta.$$

Veličiny  $H_Q$  a  $\zeta$  sice nemají žádný fyzikální význam, ale lze je vypočítat pouze z měření, která byla vykonána na zemském povrchu. Moloděnskij řešil určení tvaru Země v nejobecnější podobě. Stokesovo řešení používal jako první přiblížení. Také teoreticky ukázal, že nelze určit hladinovou plochu geoidu a řešil úlohu pro fyzický povrch Země, na kterém se provádějí prakticky všechna geodetická a gravimetrická měření a pro který lze určovat tíhové anomálie  $\Delta g$  [1].

Kdyby se tíhové pole Země rovnalo normálnímu poli, tak by se  $W = U$  a  $g = \gamma$ , pak by bylo možné podle Brunsova teorému (2.4) napsat

$$(2.8) \quad H_Q = \frac{W_0 - W}{\gamma_m}.$$

Tento vztah vyjadřuje normální Moloděnského výšku a lze jej dále upravit

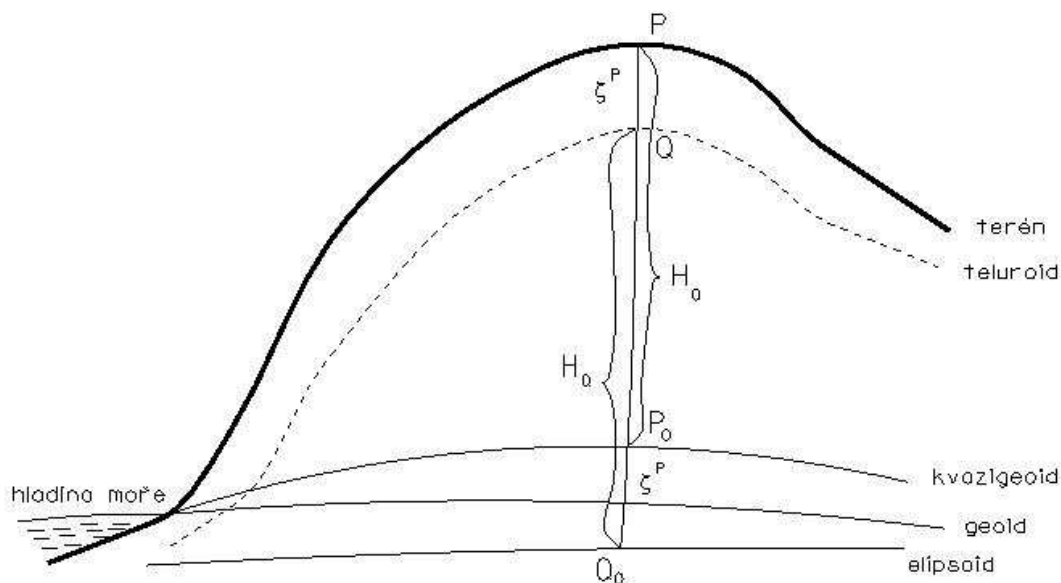
$$(2.9) \quad \gamma_m = \frac{1}{H_Q} \int_0^{H_Q} \gamma dH_Q.$$

Protože střední hodnota normálního tíhového zrychlení  $\gamma_m$  je integrována podél normální tížnice, může být normální tíhové zrychlení  $\gamma$ , za předpokladu určitých přiblížení, nahrazeno vztahem pro výpočet normálního tíhového zrychlení vně elipsoidu a pak vyjde vztah

$$(2.10) \quad \gamma_m = \gamma_0 \left[ 1 - \left( 1 + \frac{e'^2}{2} + m - e'^2 \sin^2 B \right) \frac{H_Q}{a} + \frac{H_Q^2}{a^2} \right],$$

kde  $\gamma_0$  je normální tíhové zrychlení na elipsoidu,  $m$  je poměr gravitačního a odstředivého zrychlení na rovníku Země,  $e'$  je druhá excentricita elipsoidu,  $B$  je geodetická šířka,  $a$  je hlavní poloosa elipsoidu. Ze vztahu sice vyplývá, že  $\gamma_m$  je závislá na  $H_Q$ , ale ne nějak závažně, takže iterační řešení je jednoduché [1].

Protože tíhový potenciál Země není normální, tak vzniká otázka jak normální Moloděnského výšky a kvazigeoid interpretovat. Klasická interpretace vychází z toho, že bod  $P$  na fyzickém povrchu Země má tíhový potenciál  $W(P)$  a také normální potenciál  $U(P)$ , které se obecně nerovnjají. Na normále k elipsoidu, která prochází bodem  $P$ , určitě existuje bod  $Q$ , u kterého platí  $U(Q) = W(P)$ . Z tohoto vyplývá, že v bodě  $Q$  se normální potenciál  $U$  rovná skutečnému tíhovému potenciálu  $W$  v bodě  $P$ . Normální výška  $H_Q$  bodu  $P$  je tedy výška bodu  $Q$  nad elipsoidem, tak jako ukazuje *Obr. 1: Teluroid*, zdroj [3], upraveno.



Obr. 1: Teluroid, zdroj [3], upraveno

Teluroid je množina všech bodů  $Q$ , u kterých se normální tíhový potenciál  $U$  rovná skutečnému tíhovému potenciálu  $W$  v bodě  $P$ . Body  $P$  a  $Q$ , které si odpovídají, budou vždy na stejné normále k elipsoidu [1]. Z Obr. 1 je jasné, že kdyby byl tíhový potenciál  $W$  roven normálnímu tíhovému potenciálu  $U$ , tak by body  $P$  a  $Q$  splynuly a teluroid by byl totožný se zemským povrchem. Dále by normální výšky  $H_Q$  všech bodů zemského povrchu byly rovny elipsoidickým výškám  $H_{el}$ . Obecně se tyto dva potenciály nerovnají, takže platí

$$(2.11) \quad \zeta(P) = H_{el}(P) - H_Q(P) = H_{el}(P) - H_{el}(Q),$$

kde  $\zeta$  je výšková anomálie.

Tíhovou anomálii nyní lze definovat, jako rozdíl skutečného tíhového potenciálu v bodě  $P$  na povrchu Země a normálního tíhového potenciálu v bodě  $Q$  na teluroidu, takto

$$(2.12) \quad \Delta g_F = g(P) - \gamma(Q).$$

Tato anomálie se nazývá anomálie na volném vzduchu nebo též Fayova anomálie, protože pro výpočet tíhového zrychlení na teluroidu se nejprve počítá z tíhového zrychlení na elipsoidu, které je na teluroid redukováno právě redukcí z volného vzduchu směrem nahoru. Tím jsou tíhové anomálie nyní nově vztaženy k povrchu Země místo ke geoidu.

Výšková anomálie  $\zeta$  je vzdálenost mezi hladinovou plochou  $W = W(P) = konst.$  a normální hladinovou plochou  $U = U(Q) = W(P) = konst.$  Podle Brunsova teorému se může tato vzdálenost vyjádřit jako

$$(2.13) \quad \zeta = \frac{T(P)}{\gamma}$$

kde

$$(2.14) \quad T(P) = W(P) - U(P),$$

je poruchový potenciál definovaný na zemském povrchu v bodě  $P$  a  $\gamma$  je normální tíhové zrychlení na teluroidu.

Lze očekávat, že  $\zeta$  je analogií pro odlehlost  $N$  geoidu ve Stokesově vzorci, proto ji lze vynášet na elipsoid. Tím je vytvořen povrch, který je na moři totožný s geoidem a pod kontinenty a ostrovy je mu velmi blízký. Tento povrch se nazývá kvazigeoid. Kvazigeoid není hladinovou plochou a nemá tak fyzikální smysl [1].

### 3. Teorie výšek

#### 3.1. Geopotenciální kóty

Je označen bod  $O$ , ležící na přibližné střední hladině moře a patřící do hladinové plochy, která je označena jako geoid. Dále je označen bod  $A$ , ležící na hladinové ploše o tíhovém potenciálu  $W$ . Potom se rozdíl tíhového potenciálu mezi body  $O$  a  $A$  vypočte takto

$$(3.1) \quad C_A = W_0 - W_A = \int_0^A g dh.$$

Tento rozdíl je nazýván geopotenciální kótou bodu  $A$ . Termín geopotenciální kóta byl přijat na zasedání IAGG ve Florencii v roce 1955 [4].

Jednotkou geopotenciálních kót je  $gpu$  a má rozměr

$$(3.2) \quad 1 \text{ gpu} = 10 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} = 1 \text{ 000 Gal. m.}$$

Geopotenciální kóty se numericky blíží k výškám, liší se přibližně o 2%, ale fyzikálním významem jsou hodnotami úměrnými práci potřebné k přemístění jednotkové hmotnosti z jedné hladinové plochy na druhou (např. z geoidu na hladinovou plochu bodu  $A$ ). Pro konzistenci definic výšek je vhodné zařadit veličiny označované jako geopotenciální kóty do systému geopotenciálních výšek. Geopotenciální výška hladinové plochy je pak dána vztahem

$$(3.3) \quad H_g^A = \frac{C_A}{10} = \frac{1}{10} \int_0^A g dh.$$

Jmenovatel 10 přibližuje hodnotu geopotenciálních výšek k nadmořským výškám v metrech [5].

Velkou výhodou geopotenciálních kót je možnost určit jejich hodnotu z měření na fyzickém terénu Země. Ve vztahu (3.3) lze nahradit integrál součtem součinů nivelačních převýšení  $\Delta h$  a hodnot tíhového zrychlení  $g$  na každém stanovisku přístroje. Nivelovaným převýšením je možné nahradit elementární převýšení a z hodnot tíhového zrychlení lze udělat průměr pro střed každé sestavy. Potom

$$(3.4) \quad C_A = \int_0^A g dh \approx \sum_1^i g_{m,i} \Delta h_i,$$

kde  $i$  je počet dílčích převýšení mezi bodem  $O$  a  $A$  a  $g_m$  je střední hodnota tíhového zrychlení uprostřed nivelační sestavy.

Velký význam mají geopotenciální kóty v určování vztahů mezi jednotlivými výškovými systémy. Proto byly použity pro vyrovnání EULN [4].

### 3.2. Právě ortometrické výšky

Průsečíkem geoidu s tížnicí z bodu  $A$  je bod  $A_0$ .  $C$  je potom geopotenciální kóta bodu  $A$

$$(3.5) \quad C_A = W_0 - W_A.$$

a  $H$  je jeho ortometrická výška, která je délka úseku tížnice mezi body  $A_0$  a  $A$  [2]. Po integraci úseku tížnice  $P_0P$  vyjde

$$(3.6) \quad C_A = \int_0^A g dH.$$

Pro vyjádření  $H$  explicitně, může diferenciální převýšení ortometrické výšky  $dH$  být nahrazeno diferenciálním převýšením  $dh$ . Pak bude upravený vztah (3.6) vypadat následovně

$$(3.7) \quad C_A = H^A \frac{1}{H^A} \int_0^A g dh = g_m H,$$

kde  $g_m$  je integrální střední hodnota tíhového zrychlení na úseku tížnice  $A_0A$ . Po úpravě výrazů (3.6) a (3.7) vyjde vztah pro právě ortometrické výšky

$$(3.8) \quad H^A = \frac{C_A}{g_m^A} = \frac{1}{g_m^A} \int_0^A g dh.$$

Na úseku tížnice  $A_0A$  nelze přímo měřit tíhové zrychlení, proto nelze přesně určit hodnotu  $g_m$ . Právě ortometrické výšky nelze určit a vzorec (3.8) má pouze teoretický význam [5].

Různí autoři navrhovali přibližná řešení  $g_m$ . V geodetické praxi se nejvíce používá Helmertovo řešení. Helmertova úvaha se zakládala na předpokladu, že vrstva zemské kůry má mezi zemským povrchem a geoidem stejnou hustotu a lze jí modelovat pomocí Bouguerovy redukce. Hodnotu  $g$  naměřenou v bodě na zemském povrchu přenáší pomocí

vertikálního gradientu normálního tíhového pole do bodu o výšce  $H/2$ . Tato úvaha vede k výrazu pro Helmertovu ortometrickou výšku bodu A [4]

$$(3.9) \quad H_{Hel}^A = \frac{C_A}{g^A + 0,042 \cdot 10^{-5} H^A}.$$

### 3.3. Normální ortometrické výšky

Až do třicátých let dvacátého století nebylo prakticky možné provést tíhové měření kdekoli na zemském povrchu, protože se používali velké kyvadlové gravimetry [3]. Ve vzorci (3.8) pro pravou ortometrickou výšku nebylo možné určit hodnotu  $g_m$  ani hodnotu  $g$  v integrálu. Proto se místo skutečného tíhového pole začalo uvažovat normální tíhové pole. Místo hodnoty  $g$  a  $g_m$  se tedy do vzorce (3.8) dosadí hodnoty  $\gamma$  a  $\gamma_m$  a tím vznikne vztah pro normální ortometrické výšky  $H_\gamma$

$$(3.10) \quad H_\gamma^A = \frac{1}{\gamma_m^A} \int_0^A \gamma dh.$$

Tuto výšku, na rozdíl od pravé ortometrické, lze vypočítat přesně, protože je známo normální tíhové zrychlení na elipsoidu.

Dosazením do vztahu (3.10) za  $\gamma = \gamma_m^A + \gamma - \gamma_m^A$  vyjde

$$(3.11) \quad H_\gamma^A = \int_0^A dh + \frac{1}{\gamma_m^A} \int_0^A (\gamma - \gamma_m^A) dh,$$

kde druhý člen rovnice na pravé straně je roven normální ortometrické korekci  $C_\gamma^A$ , neboli korekci ze sbíhavosti hladinových ploch normálního tíhového pole [5].

### 3.4. Normální Moloděnského výšky

Normální výšky vyplývají z Moloděnského teorie o určení tvaru Země, která odstraňuje realizační problémy Stokesovy koncepce geoidu. Tyto výšky jsou založeny pouze na veličinách vnějšího gravitačního pole. Výšky jsou získány pomocí tíhových měření na zemském povrchu a nivelací. Přesnost těchto měření je limitující pro přesnost normálních výšek. Vzorec pro normální výšku  $H_Q$  bodu A může být napsán tak, že ve vzorci (3.8) pro pravou ortometrickou výšku je nahrazena hodnota  $g_m$  skutečného tíhového zrychlení za hodnotu  $\gamma_m$ , takto vyjde vztah

$$(3.12) \quad H_Q^A = \frac{1}{\gamma_m^A} \int_0^A g dh.$$

Normální výšky jsou měřeny od plochy kvazigeoidu [5].

Střední hodnota  $\gamma_m$  normálního tíhového zrychlení je prakticky určena předpokladem, že je hodnotou uprostřed úseku tížnice mezi bodem na teluroidu a jemu odpovídajícím bodem na elipsoidu. Tuto hodnotu lze s dostatečnou přesností vypočítat pomocí vztahu

$$(3.13) \quad \gamma_m^A = \gamma_0^A - 0,1543 \cdot 10^{-5} H_N^A,$$

kde  $\gamma_m$  je sice závislá na určované  $H_Q$ , ale protože závislost není silná, stačí výšku znát na méně platných číslic.

Dosazením do vzorce (3.12)  $g = \gamma_m^A + g - \gamma_m^A$  vyjde

$$(3.14) \quad H_N^A = \int_0^A dh + \frac{1}{\gamma_m^A} \int_0^A (g - \gamma_m^A) dh,$$

kde druhý člen je normální korekce. Pro praktické užití je ale výhodnější, když za  $g$  je dosazeno  $g = \gamma + g - \gamma$ . Potom pro bod  $A$  vyjde vztah

$$(3.15) \quad H_N^A = \frac{1}{\gamma_m^A} \int_0^A \gamma dh + \frac{1}{\gamma_m^A} \int_0^A (g - \gamma) dh,$$

kde první člen na pravé straně rovnice je normální ortometrická výška  $H_\gamma$  bodu  $A$  a druhý člen je korekce z vlivu tíhové anomálie na voleném vzduchu, tedy Fayova anomálie  $\Delta g_F$ .

### 3.5. Elipsoidické výšky

Elipsoidická výška  $H_{el}$  je definovaná jako vzdálenost bodu od elipsoidu měřená na kolmici k elipsoidu vedené tímto bodem, která je kladná, je-li směrem nahoru nebo vně elipsoidu [6].

**Geometrická nivelace je velmi** zdlouhavá metoda určení výšek. Technologie GNSS přináší do této oblasti malou revoluci. Základní rovnice je

$$(3.16) \quad H^A = H_{el}^A - N,$$

kde  $H^A$  je ortometrická výška bodu  $A$ ,  $H_{el}^A$  je elipsoidická výška a  $N$  je odlehlost geoidu od elipsoidu. Když jsou známy dvě veličiny z této rovnice, lze jednoduše dopočítat třetí.

Jestliže  $H_{el}$  je měřená GNSS a pokud existuje dostatečně přesná mapa odlehlostí  $N$  geoidu, lze dopočítat ortometrickou výšku  $H$ . Po úpravě (3.16) lze z elipsoidické výšky  $H_{el}$  a ortometrické výšky  $H$  vypočítat odlehlost geoidu  $N$ . To se s výhodou používá při modelování geoidu [2].

Pokud je nahrazena ortometrická výška  $H$  normální Moloděnského výškou  $H_Q$  pak lze počítat místo odlehlosti geoidu  $N$  výškovou anomálii kvazigeoidu  $\zeta$ . Vztah pro odlehlost kvazigeoidu  $\zeta$  má tvar

$$(3.17) \quad \zeta = H_{el}^A - H_N^A.$$

Tento tvar je pro území ČR vhodnější, protože podle [7] je závazný referenční výškový systém Baltský po vyrovnání, který používá Moloděnského výšky.

## 4. Tížnicové odchylky

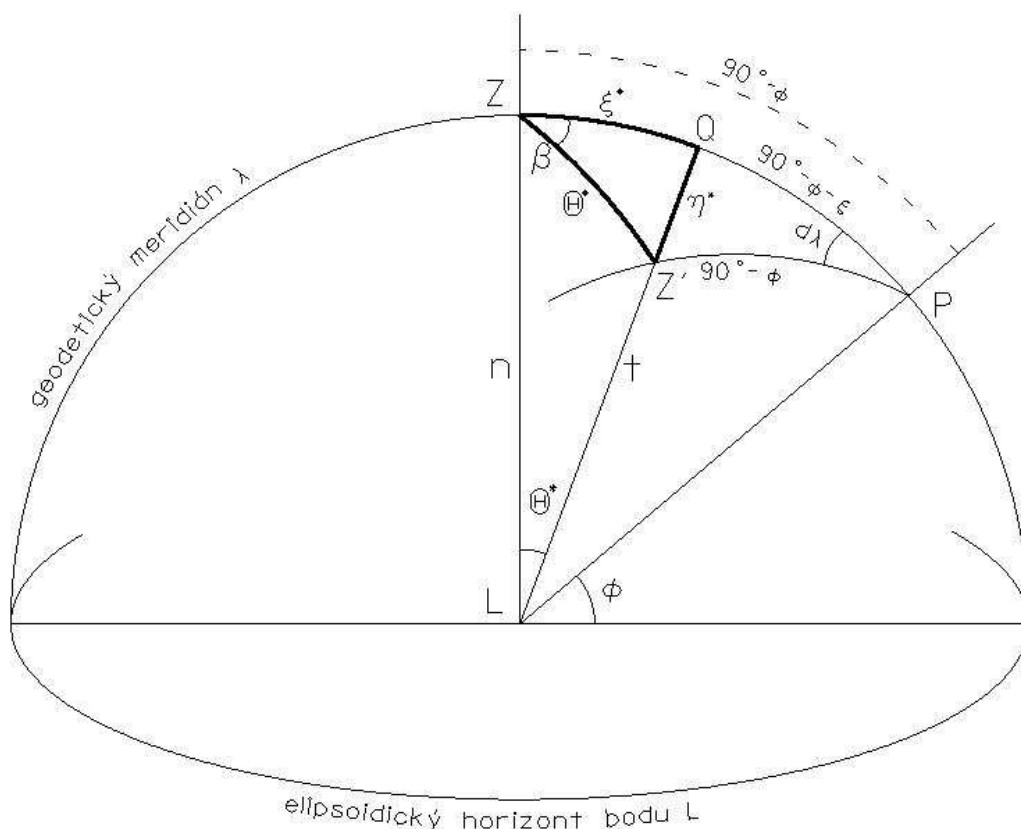
Tížnicové odchylky obecně určují sklon geoidu resp. kvazigeoidu k dané referenční ploše [4], nejčastěji elipsoidu. Dělí se na dvě skupiny. První skupinou jsou astronomicko-geodetické tížnicové odchylky, které se získávají, jak už název říká, pomocí astronomických a geodetických měření. Druhou skupinou jsou gravimetrické tížnicové odchylky, které se počítají z anomálie tíže.

### 4.1. Astronomicko-geodetické tížnicové odchylky

Na Laplaceově bodě  $L$  je myšlena jednotková koule. Normála  $n_e$  procházející bodem  $L$  protne kouli v bodě  $Z$ , který se nazývá elipsoidický zenit. Tečna  $t$  k tížnici, která prochází bodem  $L$ , protne jednotkovou kouli v astronomickém zenitu  $Z'$ . Směr z bodu  $L$  na světový pól protne jednotkovou kouli v bodě  $P$ . Body  $L$ ,  $Z$ ,  $P$  určují rovinu elipsoidického meridiánu, body  $L$ ,  $Z'$ ,  $P$  určují rovinu astronomického meridiánu. Oblouk  $\widehat{ZP}$  je roven  $(90^\circ - \varphi)$ , kde  $\varphi$  je elipsoidická šířka a oblouk  $\widehat{Z'P}$  je roven  $(90^\circ - \varphi')$ , kde  $\varphi'$  je astronomická šířka bodu  $L$ . Úhel  $\angle ZPZ' = \Delta\lambda$  je rozdíl astronomického a elipsoidického meridiánu bodu  $L$

$$(4.1) \quad d\lambda = \lambda' - \lambda.$$

Jako tížnicová odchylka  $\theta$  je označen úhel, který svírá normála  $n$  s tížnicí  $t$ , která prochází astronomickým zenitem  $Z'$  a bodem  $L$ . Rovina kolmá k elipsoidickému meridiánu, která prochází astronomickým zenitem  $Z'$ , protne meridián v bodě  $Q$ . Oblouk  $\widehat{ZQ} = \xi^*$  je meridiánová složka tížnicové odchylky a oblouk  $\widehat{Z'Q} = \eta^*$  je příčná složka tížnicové odchylky [3].



Obr. 2: Tíživcová odchylka, zdroj [3], upraveno

Z trojúhelníku  $Z'PQ$  na *Obr. 2* lze podle Neperova pravidla napsat

$$(4.2) \quad \cos(\lambda' - \lambda) = \cot(90^\circ - \varphi') * \cot(\varphi - \xi^*),$$

$$(4.3) \quad \cos(90^\circ - \eta^*) = \sin \eta = \sin(90^\circ - \varphi') * \sin(\lambda' - \lambda).$$

Úhly  $(\lambda - \lambda')$  a  $\eta$  jsou malé, proto mohou být zavedena zjednodušení

$$\cos(\lambda' - \lambda) = 1, \sin(\lambda' - \lambda) = \lambda' - \lambda, \sin \eta^* = \eta^*.$$

Rovnici (4.2) lze přepsat do tvaru

$$(4.4) \quad \tan(\varphi - \xi^*) = \tan \varphi'.$$

Při rovnosti tangent, se musejí rovnat i úhly, pak tedy

$$(4.5) \quad \xi^* = \varphi' - \varphi$$

Analogicky lze zjednodušit (4.2) na vztah

$$(4.6) \quad \eta^* = (\lambda' - \lambda) * \cos \varphi'.$$

V tomto vztahu může být zavedena rovnost  $\varphi' = \varphi$ , aniž by se snížila přesnost a pak tedy

$$(4.7) \quad \eta^* = (\lambda' - \lambda) * \cos \varphi.$$

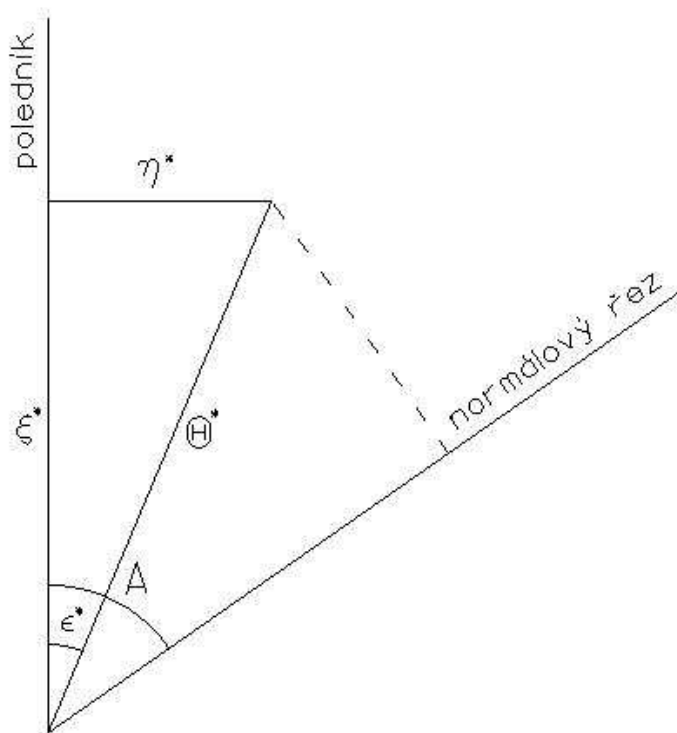
Vzorec pro celkovou tížnicovou odchytku  $\Theta^*$  a pro její azimut  $\varepsilon^*$  je odvozen ze sférického trojúhelníku  $Z'ZQ$ , který může být považován za rovinný.

$$(4.8) \quad \Theta^* = \sqrt{\xi^{*2} + \eta^{*2}},$$

$$(4.9) \quad \tan \varepsilon^* = \frac{\eta^*}{\xi^*}.$$

Pro geodetické výpočty je potřeba znát nejen složky tížnicových odchylek v meridiánu a v prvním vertikálu, ale i složky  $\varepsilon^*$  v libovolném normálovém řezu o azimutu  $A$ . Tato složka je rovna průmětu celkové odchytky  $\Theta^*$  do roviny daného normálového řezu [3], jak je zobrazeno na *Obr. 3*.

$$(4.10) \quad \varepsilon^* = \xi^* \cos A + \eta^* \sin A.$$



Obr. 3: Tížnicová odchytky v azimutu, zdroj [3], převzato

Pokud jsou změněny elipsoidické souřadnice  $\varphi$ ,  $\lambda$  všech bodů a azimuty  $\alpha$  stran trigonometrické sítě, a to zvolením jiného elipsoidu pro výpočty nebo jinou polohou a orientací ve výchozím bodě, změní se tím složky tížnicových odchylek i celková odchylka a její azimut. Astronomicko-geodetické tížnicové odchylky jsou proto hodnoty relativní, závislé na geodetickém systému.

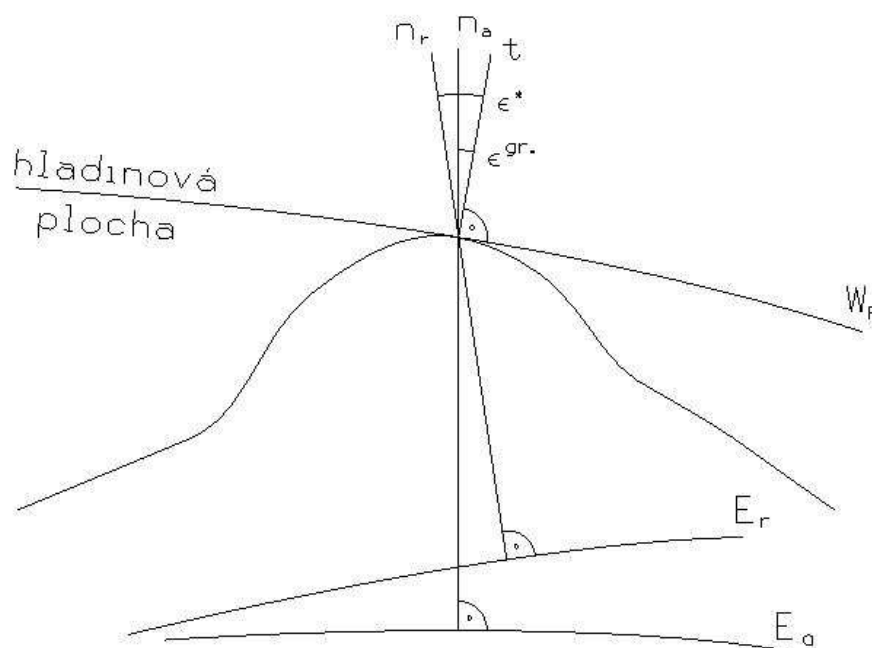
Za předpokladu, že se tížnicové odchylky mění lineárně a plynule, můžeme interpolací mezi Laplaceovými body určit přibližné hodnoty tížnicových odchylek pro libovolný bod [3].

## 4.2. Gravimetrické tížnicové odchylky

Gravimetrické odchylky se jmenují proto, že se získávají na rozdíl od astronomicko-geodetických odchylek (popisovány v kapitole 4.1) z gravimetrických dat.

Pro geodetické práce má velký význam směr zemské tíže, protože podle tohoto směru se urovnávají pomocí libel svislé osy geodetických přístrojů.

Hladinová plocha procházející bodem  $P$  na zemském povrchu, na kterou je kolmá tížnice  $t$  procházející tímto bodem, není obecně rovnoběžná s plochou normálního sféroidu (absolutní elipsoid)  $E_a$ , ani s plochou referenčního elipsoidu  $E_r$ , tak jako ukazuje *Obr. 4*.



Obr. 4: gravimetrická tížnicová odchylka, zdroj [3], převzato

Úhel svíraný normálou  $n_r$  k referenčnímu elipsoidu a tížnicí  $t$  je astronomicko-geodetická odchylka  $\varepsilon^*$ , která byla popsána v předešlé kapitole. Úhel mezi normálou  $n_a$  ke sféroidu a tížnicí  $t$  je gravimetrická tížnicová odchylka  $\varepsilon^{gr}$ . Dříve vznikal rozdíl mezi astronomicko-geodetickou a gravimetrickou tížnicovou odchylkou netotožností referenčního a absolutního zemského elipsoidu [3]. V dnešní době, kdy se jako referenční elipsoidy používají geocentrické elipsoidy WGS84 a GRS80 a zároveň jsou tyto elipsoidy používány i pro výpočet normální tíže, vznikají systematické rozdíly mezi astronomicko-geodetickými a gravimetrickými odchylkami pouze v důsledku systematických chyb v použitých datech a metodách jejich zpracování [2].

Způsob výpočtu gravimetrických odchylek může být například následující. „Hodnoty složek odchylek určené kombinací modelu EGM08 a integrací reziduálních pozemních tíhových anomálií vztažených k zemskému povrchu, určených jako rozdíly mezi hodnotami tíhového zrychlení na zemském povrchu a hodnotami pro referenční sféroid z rozvoje do stupně a řádu 2160/2190 (numerickým řešením Vening Meineszových vzorců ve sférickém tvaru) v integrační oblasti o poloměru 0 -5',“ (Kostelecký J., Novák P., Šimek J., Technická zpráva: Výpočet gravimetrických tížnicových odchylek a výšek kvazigeoid na bodech sítě AGNES, VÚGTK Zdíby). Uvedený způsob je kombinací dvou metod. Běžný postup výpočtu je integrací tíhových anomálií přes celý povrch Země užitím Vening Meineszových vzorců.

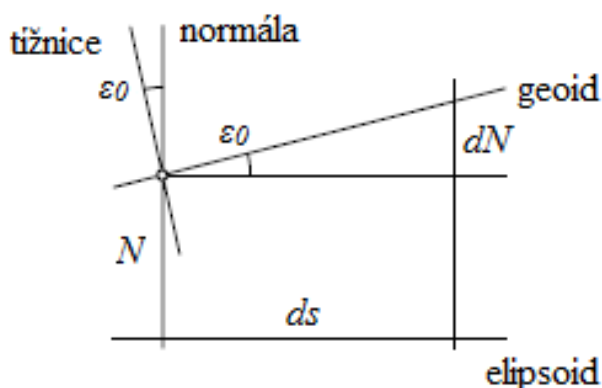
## 5. Určování průběhu kvazigeoidu

Určením tvaru geoidu se rozumí vynášení odlehlostí  $N$  od matematicky definované plochy. V případě členských států NATO, tedy i ČR, se jedná o elipsoidy GRS 80 a WGS 84.

Určení tvaru geoidu s vysokou přesností a podrobností je velmi důležitý úkol pro plné využití údajů získaných z GNSS metod měření. Potom můžeme použít i složku měření, která se nejprve musí přetransformovat na hodnotu elipsoidické výšky  $H_{el}$  a pak k ní připočíst odlehlost kvazigeoidu  $\zeta$ , abychom vypočetli normální Moloděnského výšku  $H_Q$  ve výškovém systému Bpv, který je pro území ČR závazný [4, 7].

### 5.1. Astronomicko-geodetická nivelace

Pokud jsou známy astronomicko-geodetické tížnicové odchylky na určitém území, metodou astronomicko-geodetické nivelace lze určit průběh geoidu na tomto území. Princip této metody je čistě geometrický a je znázorněn na *Obr. 5*.



Obr. 5: Astronomicko – geodetická nivelace podle Helmerta, zdroj [2], převzato

Z *Obr. 5* vyplývá

$$(5.1) \quad dN = -\varepsilon_0 ds,$$

kde  $\varepsilon_0$  je odchylka normály od tížnice. Záporné znaménko je v rovnici proto, aby hodnota převýšení geoidu nad elipsoidem byla kladná. Integrací toho vztahu mezi body  $A$ ,  $B$  dostaneme

$$(5.2) \quad N_B - N_A = - \int_A^B \varepsilon_0 ds,$$

po integraci

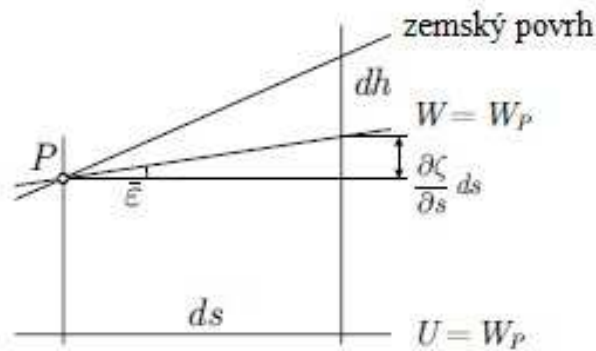
$$(5.3) \quad N_B - N_A = \frac{\varepsilon_{0A} + \varepsilon_{0B}}{2} S_{AB}.$$

Tento postup výpočtu zavedl Helmert a chtěl tím poukázat na to, že k určení výšek geoidu nad referenčním elipsoidem je potřeba kromě běžných geodetických výpočtů a měření také provést měření astronomická k určení složek tížnicových odchylek.

Odpovídající vztah pro výškovou anomálii podle Moloděnského

$$(5.4) \quad d\zeta = \frac{\delta\zeta}{\delta s} ds + \frac{\delta\zeta}{\delta h} dh,$$

tak jak znázorňuje *Obr. 6*.



Obr. 6: Astronomická nivelace podle Moloděnského, zdroj [2], převzato

Protože zemský povrch není hladinovou plochou, je ve vzorci (5.4) kromě obvyklé horizontální složky  $(\delta\zeta / \delta s) ds$  ještě vertikální složka  $(\delta\zeta / \delta h) dh$ , která je obvykle menší než horizontální složka. Pak analogicky z (5.1) vychází

$$(5.5) \quad \frac{\delta\zeta}{\delta s} = -\bar{\varepsilon},$$

kde je  $\bar{\varepsilon}$  tížnicová odchylka v azimutu na zemském terénu. Vertikální složka se může vyjádřit jako

$$(5.6) \quad \frac{\delta\zeta}{\delta h} = -\frac{\Delta g}{\gamma} = -\frac{g-\gamma}{\gamma},$$

což odpovídá ([2], s. 301, vzorec 8.36).

Pak lze (5.4) psát jako

$$(5.7) \quad d\zeta = -\bar{\varepsilon}ds - \frac{g-\gamma}{\gamma}dh.$$

Integrací vztahu (5.7) mezi body  $A, B$  vyjde vztah

$$(5.8) \quad \zeta_B - \zeta_A = -\int_A^B \bar{\varepsilon} ds - \int_A^B \frac{\Delta g_F}{\gamma} dh,$$

kde  $\Delta g_F$  je Fayova anomálie. Tento vztah lze analogicky upravit jako (5.3)

$$(5.9) \quad \zeta_B - \zeta_A = -\frac{\bar{\varepsilon}_A + \bar{\varepsilon}_B}{2} s_{AB} - \frac{\Delta g_{FA} + \Delta g_{FB}}{2\gamma} h_{AB} [2].$$

Moloděnského postup výpočtu, na rozdíl od Helmertova, probíhá na zemském povrchu. Proto musí být známy souřadnice bodu a tížnicové odchylky na zemském povrchu.

Při výpočtu souřadnic bodu na zemském povrchu je třeba zohlednit vliv zakřivení tížnice v meridiánu. Protože je tížnice zakřivena v meridiánu, má její zakřivení vliv pouze na souřadnici  $\varphi$ , na souřadnici  $\lambda$  má vliv nulový. Korekce elipsoidické šířky  $\varphi$  se vypočte podle následujícího vztahu

$$(5.10) \quad \Delta\varphi = -0,17'' h \sin 2\varphi,$$

kde  $h$  je nadmořská výška dosazená v kilometrech a  $\varphi$  je elipsoidická šířka. Potom budou souřadnice  $\bar{\varphi}, \bar{\lambda}$  bodu na zemském povrchu rovny

$$(5.11) \quad \bar{\varphi} = \varphi - \Delta\varphi,$$

$$(5.12) \quad \bar{\lambda} = \lambda.$$

Složky tížnicových odchylek se vypočtou analogicky ke vztahům (4.5), (4.7) a (4.10) z předešlé kapitoly

$$(5.13) \quad \bar{\xi} = \varphi' - \bar{\varphi},$$

$$(5.14) \quad \bar{\eta} = (\lambda' - \bar{\lambda}) \cos A,$$

$$(5.15) \quad \bar{\varepsilon} = \bar{\xi} \cos A + \bar{\eta} \sin A,$$

kde  $\bar{\xi}, \bar{\eta}$  jsou složky tížnicové odchylky v bodě na zemském povrchu,  $\bar{\varphi}, \bar{\lambda}$  jsou elipsoidické a  $\varphi', \lambda'$  jsou astronomické souřadnice bodu na zemském povrchu [3].

Za předpokladu dostatečně malých vzdáleností mezi body  $A$ ,  $B$  lze změnu výšky geoidu nad elipsoidem považovat za lineární. V rovinnatém terénu stačí astronomicky určit jeden bod na 10 – 20  $km$  profilu, v hornatém terénu je tato vzdálenost podstatně menší, přibližně 3  $km$  [3].

## 5.2. Astronomicko-gravimetrická nivelace

V předchozí kapitole 5.1 byla stručně popsána metoda astronomicko-geodetické nivelace. Aby byl geoid z takovýchto měření dostatečně přesně určen, musíme mít dostatečně hustou síť astronomických bodů (popsáno v předchozí kapitole 5.1). Při menší hustotě astronomických bodů vznikají nepřesnosti, protože průběh astronomicko-geodetických tížnicových odchylek mezi body nebude lineární. Velká hustota astronomických bodů je však neekonomická [3].

Proto Moloděnskij zavedl metodu, kde pro určení geoidu s potřebnou přesností, postačí hustota astronomických bodů jeden bod na 70 – 100  $km$ . Ke zpřesnění průběhu astronomicko-geodetických tížnicových odchylek se využijí gravimetrické tížnicové odchylky měřené na astronomických a mezilehlých bodech. Hustota mezilehlých bodů musí být opět dostatečná.

Postup výpočtu je jednoduchý. Spočítají se diference jednotlivých složek tížnicových odchylek

$$(5.16) \Delta\xi = \xi^* - \xi^{gr},$$

$$(5.17) \Delta\eta = \eta^* - \eta^{gr}.$$

Tyto rozdíly se mezi astronomicko-geodetickými a přibližnými gravimetrickými odchylkami mění velmi pomalu a lze přijmou předpoklad, že i lineárně. Gravimetrické odchylky jsou považovány za přibližné, protože při jejich výpočtu se ve Vening Meinesově vzorci zanedbává vliv vzdálených hmot více než 1000  $km$ .

Z rozdílů ze vztahů (5.16) a (5.17) na astronomických bodech můžou být vypočteny rozdíly na mezilehlých bodech např. interpolací podle Cimbálníka [4] nebo aproximací podle Hirt [8]. Obě metody budou v práci dále popsány.

Po vypočtení rozdílů na všech mezilehlých bodech, se rozdíly přičtou ke gravimetrickým tížnicovým odchylkám podle vztahů

$$(5.18) \xi^* = \xi^{gr.} + \Delta\xi,$$

$$(5.19) \eta^* = \eta^{gr.} + \Delta\eta.$$

Tato kombinace astronomicko-geodetických a gravimetrických odchylek se nazývá astronomicko-gravimetrická nivelace [4].

## 6. Gravitační modely Země

Gravitační modely Země jsou matematický popis gravitačního pole, které je nejčastěji popsáno gravitačním potenciálem  $V$ . Gravitační potenciál  $V$  se vyjadřuje rozvojem do řady harmonických funkcí

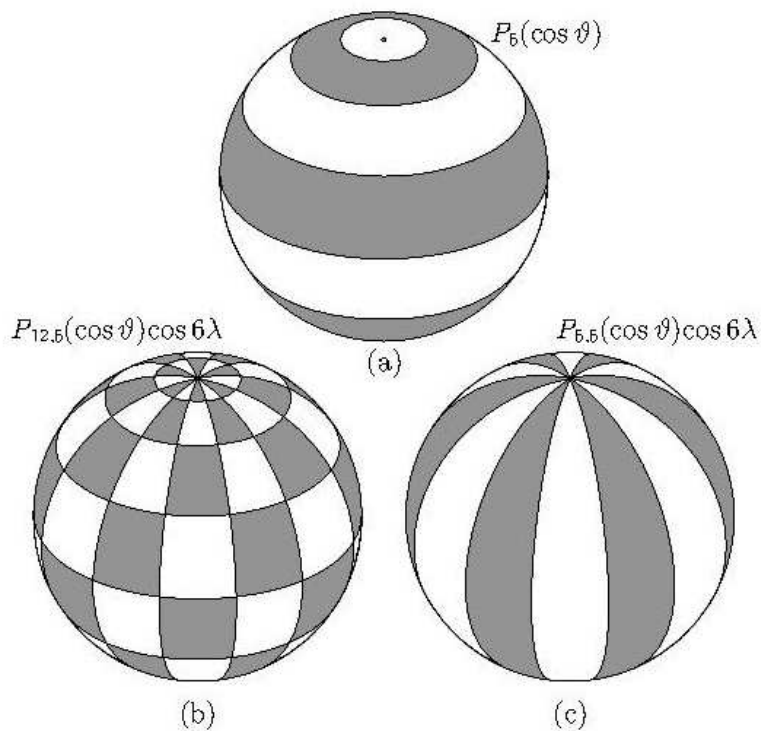
$$(6.1) V(r, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} (\bar{C}_{n,m} \cos m\lambda + \bar{S}_{n,m} \sin m\lambda) \bar{P}_{n,m} \cos \theta,$$

kde  $GM$  je geocentrická gravitační konstanta,  $R$  je rovno konstantě 6 378 137 m,  $r$  je geocentrický průvodič,  $\bar{C}_{n,m}, \bar{S}_{n,m}$  jsou Stokesovy koeficienty,  $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ ,  $\lambda$  jsou geocentrické souřadnice,  $\bar{P}_{n,m} \cos \theta$  je Legendrova asociativní funkce a  $n, m$  je stupeň a řád Legendreovy asociativní funkce. Tento rozvoj snadno aproximuje funkci na kouli. Pokud jsou Stokesovy koeficienty určeny z tíhových dat, tak výsledný soubor nazýváme gravitační model Země. Rozlišení modelu udává maximální hodnota stupně  $n$  [9].

Legendreova asociativní funkce  $n$ -tého stupně a  $m$ -tého řádu je dána vztahem

$$(6.2) P_{n,m}(x) = \frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n$$

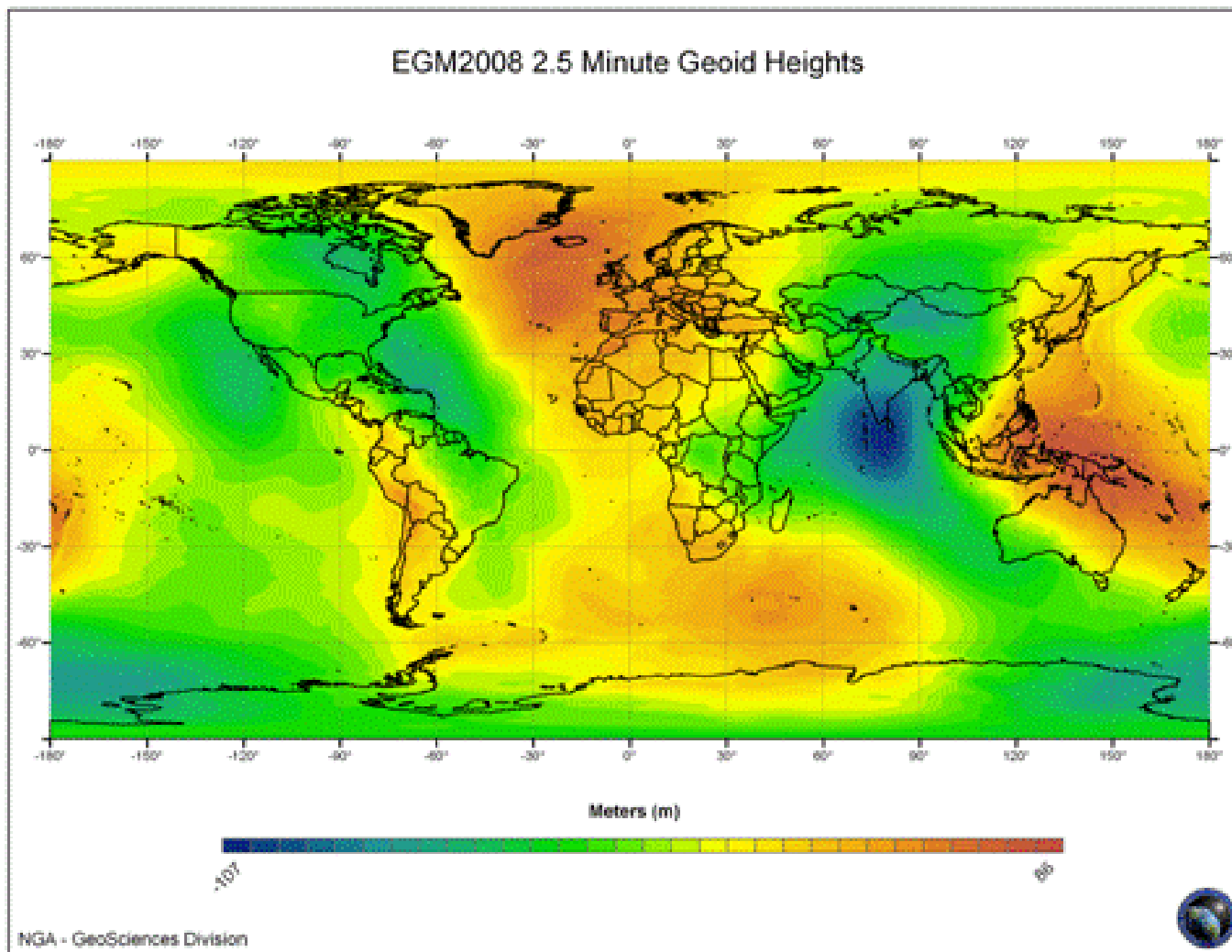
Pro řád  $m = 0$  získáme Legendreovy polynomy, které jsou nezávislé na zeměpisné délce  $\lambda$  a sféru rozdělují na  $n$  kladných a záporných zón, které jsou rovnoběžné s rovníkem a střídají se. Tyto funkce se nazývají zonální harmonické funkce. Pro  $m \neq 0$  získáme rozdělení sféry, které je závislé na zeměpisné délce  $\lambda$  a je opět rozdělené střídavě na kladné a záporné plochy. Ve směru rovnoběžek je sféra rozdělena na  $n - m$  ploch a ve směru poledníků je rozdělena na  $n$  ploch. Tyto funkce se nazývají teserální harmonické funkce. Pro  $m = n$  dojde k rozdělení sféry na  $n$  resp.  $m$  kladných a záporných sektorů. Tyto funkce se nazývají sektorální harmonické funkce [10, 11]. Tyto typy harmonických funkcí znázorňuje *Obr. 7*.



Obr. 7: Typy harmonických funkcí (a) zonální (b) teserální (c) sektorální, zdroj [2], převzato

## 6.1. EGM2008

EGM2008 je sférický harmonický model zemského gravitačního potenciálu, který byl vyvinut kombinací dat z mise GRACE, která byla převedena na tíhové anomálie, a pozemních dat, které jsou tíhové anomálie v mřížce  $5' \times 5'$  určené gravimetrickým měřením. Model byl zveřejněn v dubnu 2008, na konferenci ve Vídni, týmem Nikolaose Pavlise. Model je plně definován stupněm a řádem 2159, ale obsahuje koeficienty až do stupně 2190 a řád 2159. V oblastech, kde je vysoká kvalita a hustota tíhových dat jako je např. USA nebo Evropa, je rozdíl zvlnění mezi EGM2008 a geoidem, zjištěným GPS/nivelací,  $\pm 5$  až  $\pm 10$  cm [12]. Model je spočítán pro elipsoid WGS84 [12].



Obr. 8: Model EGM2008, zdroj [13], převzato

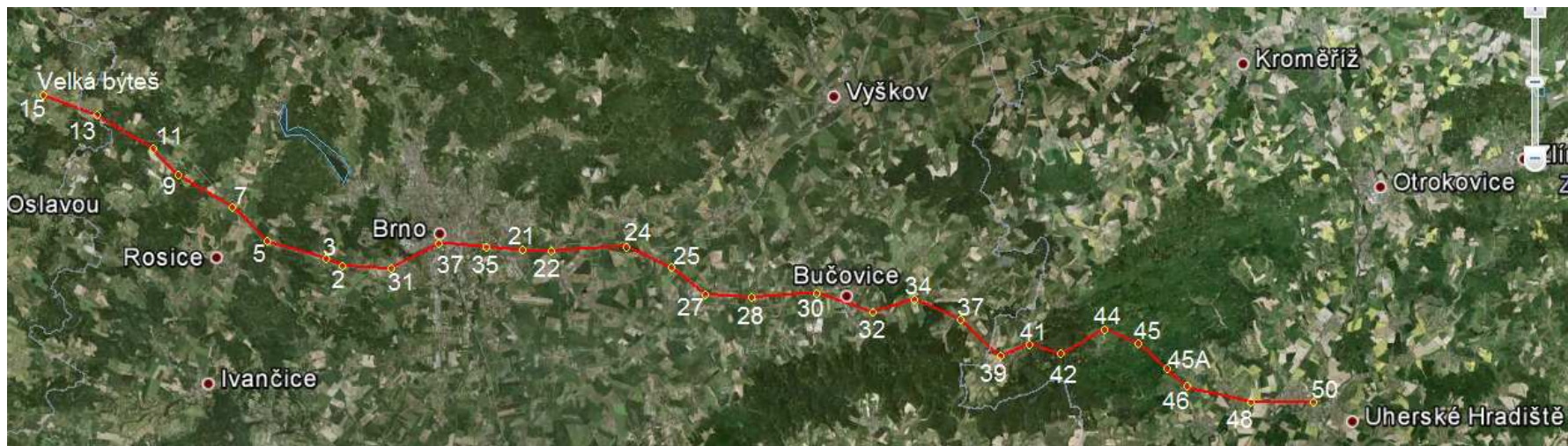
## 7. Sběr dat

### 7.1. Lokalita

Měřený profil má směr západovýchodní, jedná se tedy o délkový profil. Nejzápadnějším bodem je bod číslo 15 ve Velké Bíteši na křižovatce ulic Jihlavská a Pod Spravedlností. Od tohoto bodu vede profil směrem na východ podél státní komunikace II. třídy číslo 602 až do Brna. Z Brna pokračuje profil podél státní komunikace II. třídy číslo 460 až ke křižovatce se státní komunikací I. třídy číslo 50 u Holubic. Od této křižovatky je profil veden podél komunikace číslo 50 směrem na Nesovice, kde přejde na státní komunikaci II. třídy číslo 429. Podél této komunikace je profil veden až do Koryčan, kde se komunikace číslo 429 napojuje na státní komunikaci II. třídy číslo 432. Ještě v Koryčanech profil uhýbá z komunikace číslo 432 a je veden podél státní komunikace III. třídy číslo 43231 až na křižovatku za obcí Stupava, kde se opět napojuje na komunikaci číslo 50, podél které je veden přes Staré Město do Uherského Hradiště, kde je nejvýchodnější bod číslo 50 na ulici Moravské nábřeží. Profil je dlouhý 99 888 m. Trasu profilu zobrazuje *Obr. 9: Trasa profilu.*

Po stránce topografické je lokalita středně zvlněná. Na západní straně začíná profil v podhůří Českomoravské vrchoviny, kde má svůj nevyšší bod v nadmořské výšce 525 m. Dále pokračuje Dyjsko–svrateckým úvalem až k Chřibům, které překonává v oblasti vodní nádrže Koryčany. Od východního úpatí Chřibů vede profil Dolnomoravským úvalem až ke koncovému bodu, poblíž něhož má svůj nejnižší bod ve výšce 174 m.n.m. O výškových poměrech profilu vypovídá *Obr. 10.*

Zadaný profil má 30 astronomických bodů, vyznačených na *Obr. 9: Trasa profilu,* datový podklad Google Earth, na kterých byly určeny astronomické zeměpisné souřadnice  $\varphi^*$ ,  $\lambda^*$ , elipsoidické souřadnice  $\varphi$ ,  $\lambda$  a elipsoidická výška  $H_{el}$ . Na zbylých 550 bodech byly určeny pouze elipsoidické souřadnice a elipsoidická výška. Na všech 580 bodech, byly určeny gravimetrické tížnicové odchylky, normální Moloděnského výška bodu a Bouguerova anomálie.



Obr. 9: Trasa profilu, datový podklad Google Earth



Obr. 10: Výškové poměry profilu, datový podklad Google Earth

## 7.2. MAAS-1

MAAS-1 je mobilní automatizovaný astronomický systém, který vyvíjí vedoucí této práce Ing. Radovan Machotka Ph.D. Jedná se o systém, který je, díky své kompaktnosti a nízké váze, lehce přenosný a lze ho využít (na rozdíl od zenitových digitálních kamer) pro určování zeměpisných souřadnic i v těžko dostupných lokalitách, jako jsou například hory nebo místa se špatnou sítí dopravních cest.

Základem tohoto systému je totální stanice TOPCON GPT 9001A, což je motorizovaná totální stanice s komunikačním rozhraním pro dálkové řízení. Výrobce uvádí úhlovou přesnost  $1''$  dle normy ČSN ISO 17123-3. Dalšími komponenty systému jsou černobílá CCD kamera, která se připevňuje na okulár dalekohledu přístroje, GPS přijímač pro navázání měření na světový čas, videovkladač, který vkládá titulky do pořízených snímků, grabovací box pro převod videa z analogového do digitálního formátu a laptop, kterým se řídí měření, zpracovávají a ukládají se v něm naměřená data. Celý systém pracuje na třech bateriích, jedna je v laptopu, druhá v totální stanici a třetí napájí GPS přijímač, videovkladač a kameru (Rukopis poskytnutý vedoucím práce). Detail přístroje je na *Obr. 11*.



Obr. 11: MAAS-1, zdroj (Rukopis poskytnutý vedoucím práce), převzato

Tímto měřícím systémem byly určeny astronomické zeměpisné souřadnice astronomických bodů profilu. Metoda určení astronomických zeměpisných souřadnic je uvedena v následující kapitole.

## 8. Vstupní data

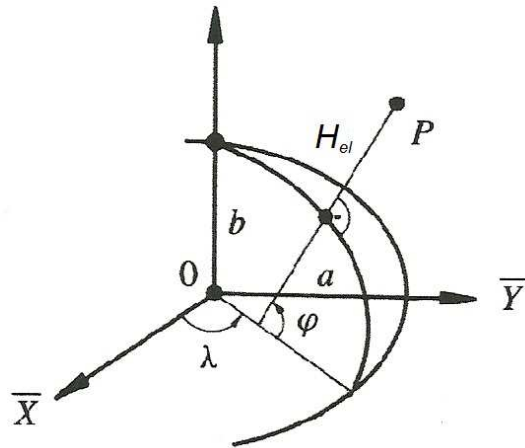
Vstupními daty do výpočtu byly elipsoidické souřadnice, elipsoidické výšky, astronomické zeměpisné souřadnice, gravimetrické tížnicové odchylky, Bouguerovi anomálie, což je rozdíl mezi tíhovými zrychlením opraveným o Bouguerovu redukci a normálním tíhovým zrychlením v bodě  $P$  na zemském povrchu [3] a normální Moloděnského výšky bodů v systému Bpv. V předchozích statích 4.1 a 4.2 jsou popsány tížnicové odchylky a ve statí 3.4 jsou popsány normální Moloděnského výšky. V následujících dvou statích bude popsáno získání elipsoidických a astronomických zeměpisných souřadnic.

### 8.1. Určování geodetických souřadnic a elipsoidických výšek

V této kapitole bude stručně naznačeno, jakou metodou byly určeny elipsoidické souřadnice a výška bodů profilu. Pro konkrétnější informace je uveden odkaz například na [14].

Nejsnazším způsobem určení elipsoidických souřadnic je použití GNSS technologií. Elipsoidické souřadnice v systému ETRS89 bodů profilu byly určeny metodou RTK. Pro výpočet bylo použito síťové řešení CZEPOS MAX a na každém bodě byla délka observace 20 sekund.

Cílem této metody je určit elipsoidickou šířku  $\varphi$ , elipsoidickou délku  $\lambda$  a elipsoidickou výšku  $H_{el}$ . Úloha se řeší tak, že se určí prostorové pravoúhlé souřadnice, které mají počátek ve středu elipsoidu a orientace os je následující, osa  $\bar{Z}$  směřuje do severního pólu elipsoidu, osa  $\bar{X}$  směřuje do průsečíku rovníku a nultého poledníku a osa  $\bar{Y}$  doplňuje systém na pravotočivý, viz *Obr. 12*.



Obr. 12: Prostorové a elipsoidické souřadnice, zdroj [14], převzato

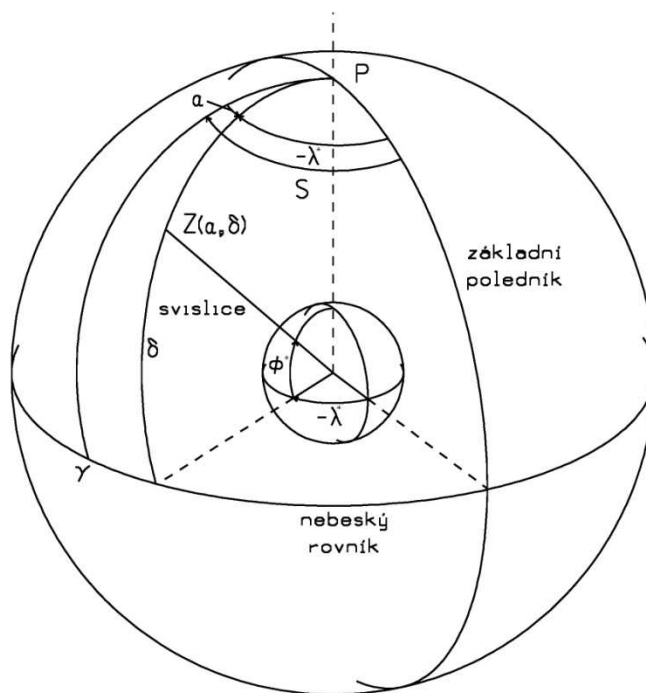
Pak se z pravouhlých prostorových souřadnic vypočtou transformací elipsoidické souřadnice. Vztah mezi prostorovými a elipsoidickými souřadnicemi definuje rovnice

$$(8.1) \quad \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\bar{N} + H_{el}) \cos \varphi \cos \lambda \\ (\bar{N} + H_{el}) \cos \varphi \sin \lambda \\ ((1 - e^2)\bar{N} + H_{el}) \sin \varphi \end{pmatrix},$$

kde  $\bar{N}$  je poloměr příčného normálového řezu a  $e$  je první numerická excentricita [14].

## 8.2. Určování astronomických zeměpisných souřadnic

Cílem této úlohy je určit astronomickou zeměpisnou šířku  $\varphi^*$  a astronomickou zeměpisnou délku  $\lambda^*$  stanoviska. Tuto úlohu lze též pojmout jako určení směru svislice procházející daným stanoviskem, tedy souřadnicové soustavě, která je určena osou rotace Země procházející bodem  $P$  a rovinou základního poledníku.



Obr. 13: Metodika určení astronomických zeměpisných souřadnic, zdroj [15], převzato

Tato úloha se převádí na úlohu určení rovníkových souřadnic rektascenze  $\alpha$  a deklinace  $\delta$  zenitu  $Z$  stanoviska. Podle *Obr. 13* mohou být tyto veličiny jednoduše přepočteny na požadované podle

$$(8.2) \quad \varphi^* = \delta,$$

$$(8.3) \quad \lambda^* = \alpha - S,$$

kde  $S$  je světový hvězdný čas v okamžiku měření. To znamená, že astronomické zeměpisné souřadnice je možno určit přímo z rovníkových souřadnic, ale jen když v okamžiku  $S$  se nachází v zenitu stanoviska hvězda. Toto řešení je v praxi nerealizovatelné, proto se určení polohy zenitu  $Z$  vůči pólu  $P$  a základnímu poledníku řeší nepřímou pomocí zenitových vzdáleností a časů nebo vodorovných směrů a časů. Protože určování astronomických zeměpisných souřadnic není předmětem této práce, dále je jen uveden odkaz na práci autora Kabeláče [15] a je zde stručně popsána metoda určování astronomických zeměpisných souřadnic systémem MAAS-1.

Pro získání dat byla použita Metoda páru stejné výšky navržená pro MAAS-1. Metoda by mohla být zařazena do metod zenitových, které měří páry ve stejném almukantaratu a opačném azimutu. Páry hvězd jsou měřeny tak, aby nedocházelo pokud

možno k časovým prodlevám mezi jednotlivými měřeními párů. Měří se severo-jížní (šířkové) páry a východo-západní (délkové) páry. Hvězdy v páru musejí mít opačný azimut s tolerancí  $10^\circ$ , ale zenitový úhel musí být přesně stejný a musí ležet v intervalu  $20^\circ$ - $35^\circ$  (Rukopis poskytnutý vedoucím práce).

Metoda je navržena tak, aby byla co nejméně zatížena systematickými chybami, jako jsou atmosférická refrakce, chyba v měření času, chyby způsobené měřičem a chyba v matematickém modelu [16].

## 9. Výpočet

Pro výpočet kvazigeoidu na zadaném profilu byly použity metody z kapitoly 5. Nejprve byl vypočten kvazigeoid pouze z astronomických bodů profilu. Protože bylo zřejmé, že vzdálenosti mezi jednotlivými body byly velké, byly provedeny další výpočty s mezilehlými body. Na tyto výpočty byl kladen požadavek, aby výsledná vypočtená křivka tížnicových odchylek měla v každém bodě spojitou první derivaci. Z toho důvodu nebyla provedena lineární interpolace a ani kubická interpolace po částech, protože u těchto dvou metod nemá výsledná křivka spojitou derivaci v astronomických bodech profilu. Profil byl vypočten kubickou interpolací, neboli pomocí funkce „spline“ a aproximací. V této kapitole jsou popsány tři použité metody výpočtu profilu.

### 9.1. Výpočet z astronomických bodů

Tento výpočet byl proveden pouze ze třiceti astronomických bodů profilu, na kterých byly určeny astronomické zeměpisné souřadnice, elipsoidické souřadnice a elipsoidická výška, normální Moloděnského výška a Bouguerova anomálie.

Nejprve byla vypočtena meridiánová a příčná složka astronomicko-geodetických tížnicových odchylek  $\zeta^*$  a  $\eta^*$  odečtením elipsoidických souřadnic od astronomických zeměpisných souřadnic bodů. Pak byly pomocí I. a II. zgu vypočteny azimuty a délky mezi jednotlivými body a z délek bylo vypočteno staničení bodů na profilu ve směru západovýchodním. Po té bylo možno vypočítat astronomicko-geodetickou tížnicovou odchylku v azimutu  $\varepsilon^*$  podle (4.10). Pak byla přepočtena Bouguerova anomálie na Fayovu anomálii na volném vzduchu  $\Delta g_F$  a byly vypočteny výškové rozdíly mezi body z normálních Moloděnského výšek. Z elipsoidických šířek bodů byla vypočtena normální tíže  $\gamma$ . Pak už byly k dispozici všechny potřebné veličiny k výpočtu převýšení jednotlivých bodů mezi sebou na kvazigeoidu podle vzorce (5.9). První bod profilu číslo 15, byl postupně výškově ztotožněn s gravimetrickým kvazigeoidem, s EGM 2008 a kvazigeoidem z GPS/nivelace a od tohoto bodu byl kvazigeoid vypočten. Dále byly vypočteny výškové rozdíly mezi kvazigeoidy. Celý výpočet proběhl v programu Excel s použitím jeho implementovaných funkcí. Ukázkou výpočetní tabulky ukazuje

Tab. 1, celá výpočetní tabulka je v *Příloha 1*.

2	bod	Lokalita	GPS			Astro			tížnic. odchylky		azimut	Staničení	$\varepsilon$	$g_F$	$\zeta_{n+1}-\zeta_n$	h				
			Lat.	Long.	Hel	Lat.	Long.	$\xi$	$\eta$											
4	C15	Velká Bítěš	49° 17'	17.61''	16° 13'	11.73''	515.18 m	49° 17'	18.15''	16° 13'	19.87''	0.54''	5.31''		0.000m	04.75''	44.37 mGal		45.973 m	
5	C13		49° 16'	29.56''	16° 16'	19.20''	547.79 m	49° 16'	29.95''	16° 16'	28.50''	0.38''	6.07''	111° 25'	49.95''	4065.556m	04.99''	50.58 mGal	-0.097 m	45.876 m
6	C11	Domašov	49° 15'	12.10''	16° 19'	34.21''	545.78 m	49° 15'	11.68''	16° 19'	43.80''	-0.42''	6.26''	121° 18'	25.84''	8675.117m	04.63''	51.24 mGal	-0.107 m	45.768 m
7	C9	Řičky	49° 13'	58.68''	16° 21'	21.59''	492.74 m	49° 13'	57.31''	16° 21'	31.28''	-1.37''	6.33''	136° 18'	56.07''	11816.265m	06.16''	47.93 mGal	-0.079 m	45.689 m
8	C7	Ostrovačice, u hřbitova	49° 12'	48.16''	16° 24'	27.48''	377.81 m	49° 12'	46.95''	16° 24'	36.31''	-1.21''	5.77''	120° 7'	47.72''	16160.606m	04.81''	36.29 mGal	-0.111 m	45.578 m
9	C5		49° 11'	31.47''	16° 26'	16.45''	422.88 m	49° 11'	29.90''	16° 26'	24.25''	-1.57''	5.10''	137° 6'	48.54''	19398.164m	05.34''	46.66 mGal	-0.082 m	45.496 m
10	C3	Popůvky	49° 10'	56.16''	16° 29'	27.68''	338.94 m	49° 10'	53.73''	16° 29'	37.71''	-2.43''	6.56''	105° 45'	27.49''	23416.892m	06.96''	40.70 mGal	-0.116 m	45.381 m
11	C2		49° 10'	32.72''	16° 30'	41.64''	340.61 m	49° 10'	29.69''	16° 30'	51.54''	-3.03''	6.47''	115° 51'	11.04''	25079.245m	05.69''	39.56 mGal	-0.051 m	45.330 m
12	B31	Rybnická	49° 10'	58.64''	16° 33'	46.30''	303.54 m	49° 10'	56.96''	16° 34'	2.54''	-1.68''	10.62''	77° 51'	50.86''	28899.253m	10.70''	38.49 mGal	-0.151 m	45.179 m
13	B37	Renneská	49° 10'	37.90''	16° 35'	48.73''	256.77 m	49° 10'	36.69''	16° 36'	3.61''	-1.21''	9.73''	104° 30'	49.57''	31457.291m	09.14''	29.79 mGal	-0.121 m	45.058 m
14	B35	Olomoucká	49° 11'	10.45''	16° 39'	6.57''	285.88 m	49° 11'	6.89''	16° 39'	15.52''	-3.56''	5.85''	75° 51'	12.14''	35583.428m	06.37''	13.50 mGal	-0.156 m	44.902 m
15	C21		49° 10'	55.11''	16° 41'	22.52''	328.08 m	49° 10'	51.25''	16° 41'	32.23''	-3.86''	6.35''	99° 46'	33.27''	38373.463m	06.14''	24.23 mGal	-0.085 m	44.817 m
16	C22	Bedřichovice	49° 10'	59.01''	16° 43'	19.06''	278.70 m	49° 10'	54.68''	16° 43'	29.60''	-4.33''	6.89''	87° 3'	42.38''	40733.507m	06.71''	17.11 mGal	-0.073 m	44.744 m
17	C24		49° 11'	5.50''	16° 47'	18.11''	322.60 m	49° 11'	0.31''	16° 47'	27.67''	-5.19''	6.25''	87° 35'	46.51''	45572.352m	07.88''	13.96 mGal	-0.172 m	44.573 m
18	C25	stoupání na Slavkov	49° 10'	14.64''	16° 49'	60.00''	284.58 m	49° 10'	10.54''	16° 50'	9.17''	-4.10''	6.00''	115° 38'	53.27''	49205.226m	07.23''	12.48 mGal	-0.133 m	44.440 m
19	C27	Slavkov u Brna	49° 9'	10.33''	16° 51'	56.35''	252.10 m	49° 9'	5.15''	16° 52'	5.58''	-5.18''	6.03''	130° 11'	41.75''	52287.901m	06.68''	7.51 mGal	-0.104 m	44.336 m
20	C28	benzinka	49° 8'	53.98''	16° 54'	58.29''	260.05 m	49° 8'	49.20''	16° 55'	6.50''	-4.78''	5.37''	97° 48'	14.34''	56004.473m	04.85''	4.41 mGal	-0.104 m	44.233 m
21	C30	Marefy	49° 9'	8.13''	16° 58'	27.32''	263.23 m	49° 9'	3.24''	16° 58'	35.53''	-4.89''	5.37''	84° 4'	14.26''	60257.307m	06.75''	4.22 mGal	-0.120 m	44.113 m
22	C32	Vicemilice	49° 8'	19.29''	17° 1'	44.44''	272.45 m	49° 8'	15.17''	17° 1'	51.42''	-4.12''	4.57''	110° 43'	19.09''	64523.645m	03.22''	-0.31 mGal	-0.103 m	44.010 m
23	C34	Nesovice	49° 8'	47.38''	17° 4'	10.72''	281.41 m	49° 8'	43.42''	17° 4'	17.30''	-3.96''	4.30''	73° 37'	22.25''	67609.493m	05.58''	-0.58 mGal	-0.066 m	43.944 m
24	C37	Nemotice, nádraží	49° 7'	58.87''	17° 6'	49.12''	288.13 m	49° 7'	55.01''	17° 6'	55.19''	-3.86''	3.97''	115° 4'	12.57''	71149.814m	05.54''	1.12 mGal	-0.095 m	43.849 m
25	C39	křižovatka	49° 6'	28.92''	17° 9'	8.81''	351.21 m	49° 6'	25.79''	17° 9'	13.89''	-3.13''	3.33''	134° 31'	18.60''	75118.246m	01.93''	4.87 mGal	-0.072 m	43.777 m
26	C41	Koryčany, stadion	49° 6'	55.69''	17° 10'	51.58''	328.24 m	49° 6'	52.23''	17° 10'	54.30''	-3.46''	1.78''	68° 17'	23.28''	77358.517m	02.79''	2.93 mGal	-0.026 m	43.751 m
27	C42	vodní nádrž	49° 6'	31.14''	17° 12'	42.91''	356.89 m	49° 6'	27.97''	17° 12'	47.74''	-3.17''	3.16''	108° 36'	3.35''	79737.845m	01.25''	6.61 mGal	-0.023 m	43.728 m
28	C44	Stupava	49° 7'	25.42''	17° 15'	15.06''	400.27 m	49° 7'	21.53''	17° 15'	20.17''	-3.89''	3.34''	61° 23'	31.94''	83247.081m	04.61''	12.97 mGal	-0.050 m	43.677 m
29	C45	skládká dřeva	49° 6'	51.57''	17° 17'	15.35''	482.04 m	49° 6'	46.86''	17° 17'	21.61''	-4.71''	4.10''	113° 15'	13.47''	85898.609m	06.23''	21.66 mGal	-0.071 m	43.606 m
30	C45A	odpočívadlo	49° 5'	53.42''	17° 18'	42.99''	396.84 m	49° 5'	47.57''	17° 18'	51.36''	-5.85''	5.48''	135° 22'	36.57''	88426.236m	07.99''	11.19 mGal	-0.086 m	43.520 m
31	C46	Buchlovice	49° 5'	5.72''	17° 20'	2.32''	310.77 m	49° 5'	0.34''	17° 20'	10.34''	-5.38''	5.26''	132° 32'	52.28''	90608.219m	06.40''	-0.64 mGal	-0.076 m	43.445 m
32	C48	cyklostezka	49° 4'	26.82''	17° 24'	1.21''	254.94 m	49° 4'	22.26''	17° 24'	5.65''	-4.56''	2.91''	103° 56'	12.20''	95597.210m	02.97''	-15.69 mGal	-0.114 m	43.331 m
33	C50	Uherské Hradiště	49° 4'	24.81''	17° 27'	32.88''	222.77 m	49° 4'	22.38''	17° 27'	33.85''	-2.43''	0.64''	90° 48'	34.90''	99888.037m	00.67''	-15.51 mGal	-0.038 m	43.292 m

Tab. 1: Ukázka výpočetní tabulky z astronomických bodů

Výsledky výpočtu jsou uvedeny v kapitole 10.

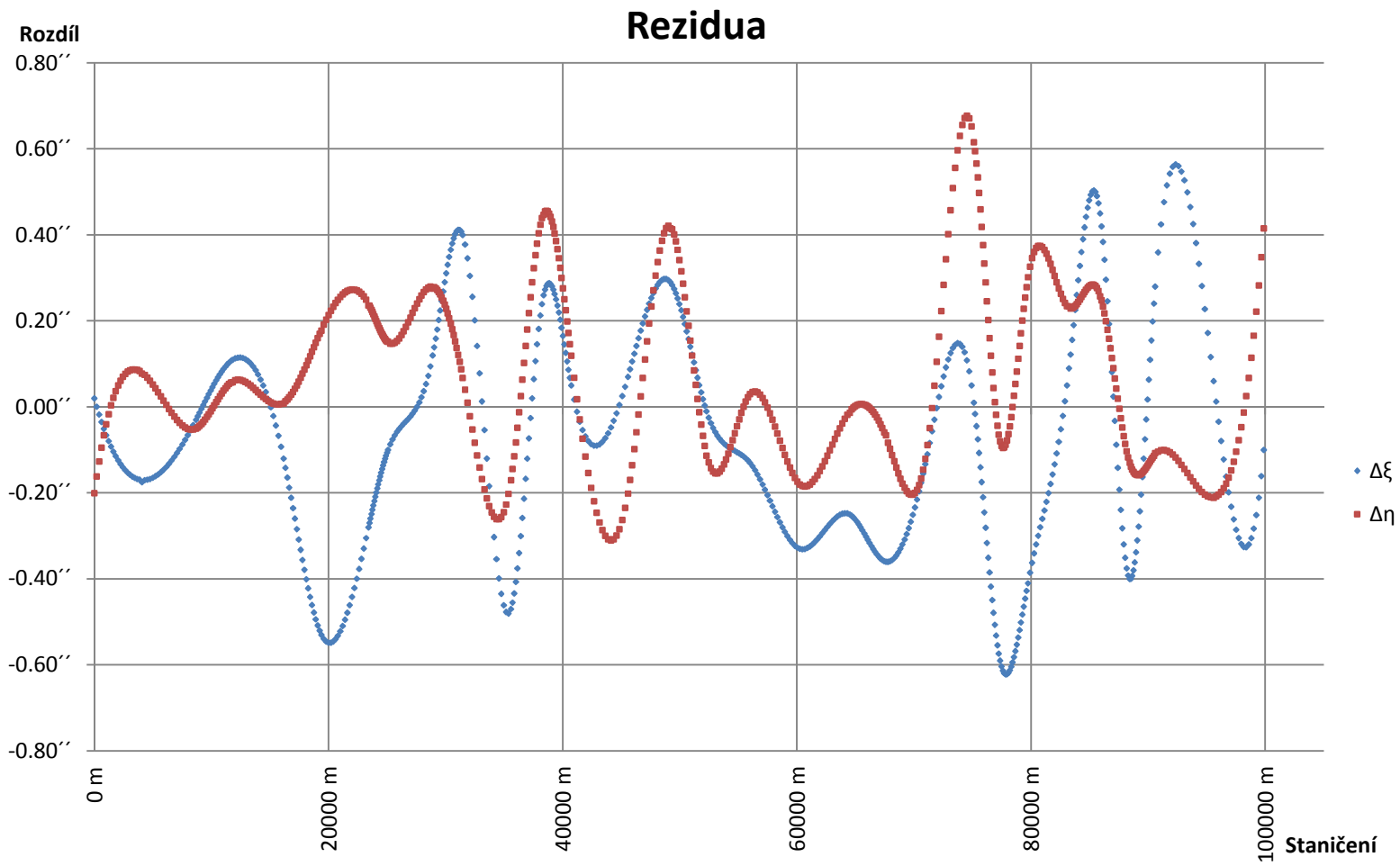
## 9.2. Výpočet funkcí „spline“

Do tohoto výpočtu na rozdíl od předešlého vstoupilo všech 580 bodů profilu. U mezilehlých bodů byly známy elipsoidické souřadnice a elipsoidická výška, gravimetrické tížnicové odchylky, normální Moloděnského výška a Bouguerova anomálie. Astronomické body měly od předešlého výpočtu určeny navíc gravimetrické tížnicové odchylky. Gravimetrických tížnicových odchylek bylo využito k interpolaci astronomicko-geodetických tížnicových odchylek. Postup interpolace je popsán v následující stati.

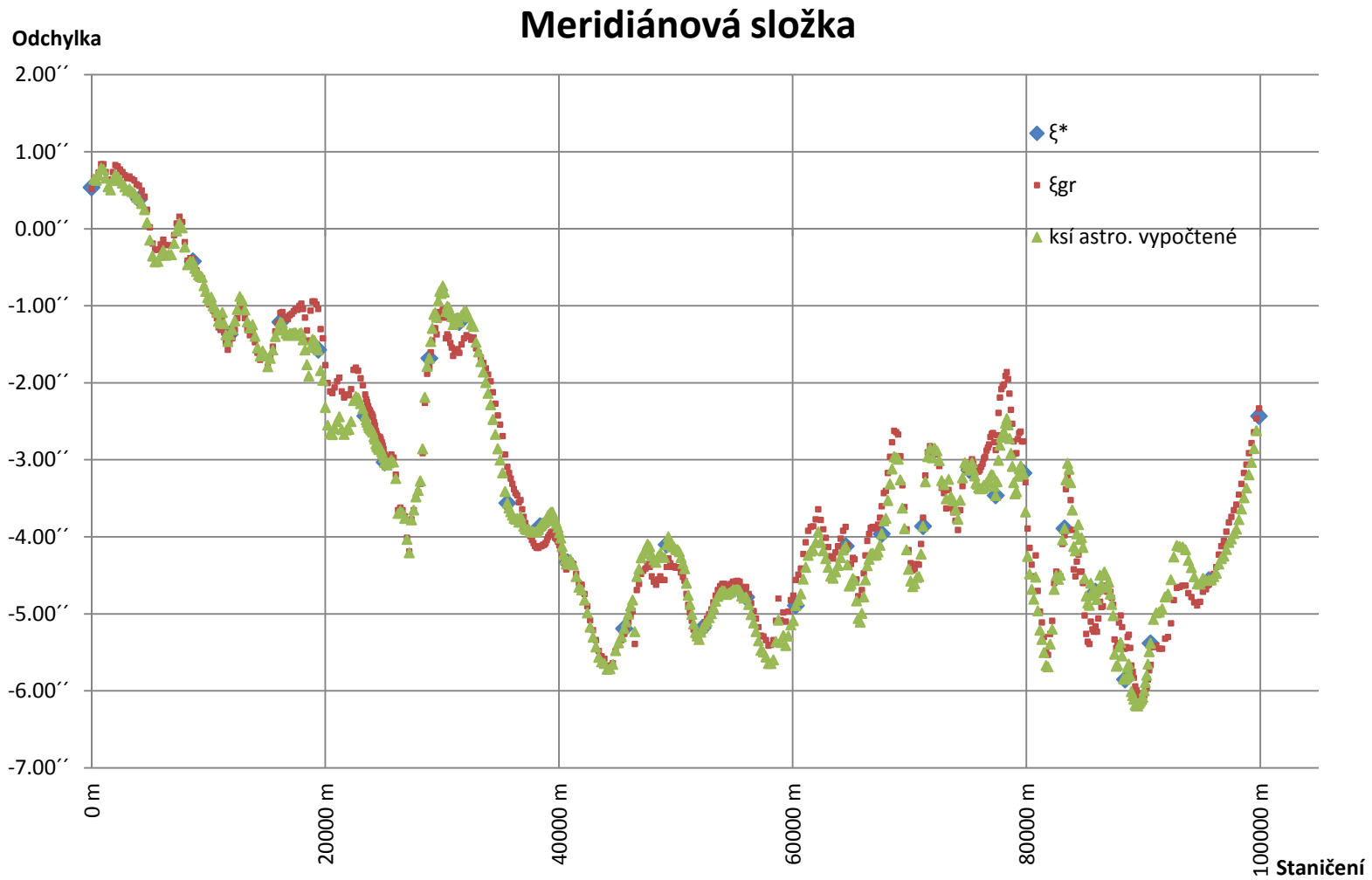
### 9.2.1. Výpočet astronomicko-geodetických odchylek interpolací

Nejprve byly vypočteny astronomicko-geodetické tížnicové odchylky na astronomických bodech, stejně jako v předešlém výpočtu. Od těch byly odečteny gravimetrické odchylky podle vztahů (5.16) a (5.17), takže vzniklo třicet rozdílů. Pomocí II. zgu byly z elipsoidických souřadnic vypočteny vzdálenosti mezi body a následně staničení profilu. Ze staničení a rozdílů tížnicových odchylek byla provedena interpolace funkcí „spline“ v programu Matlab R2010a. Popis této funkce naleznete v nápovědě programu [17]. Výsledek interpolovaných rozdílů neboli reziduí je uveden v *Graf 1: Interpolované rezidua*. Zpětně pak interpolované rozdílly byly přičteny ke gravimetrickým tížnicovým odchylkám podle (5.18) a (5.19) a byly vypočteny astronomicko-geodetické tížnicové odchylky. V *Graf 2: Meridiánová složka interpolovaných tížnicových odchylek* a *Graf 3: Příčná složka interpolovaných tížnicových odchylek* jsou znázorněny zadané astronomicko-geodetické tížnicové odchylky  $\zeta^*$  a  $\eta^*$  na astronomických bodech, zadané gravimetrické tížnicové odchylky  $\zeta^{gr}$  a  $\eta^{gr}$  všech bodů a vypočtené astronomicko-geodetické tížnicové odchylky na mezilehlých bodech.

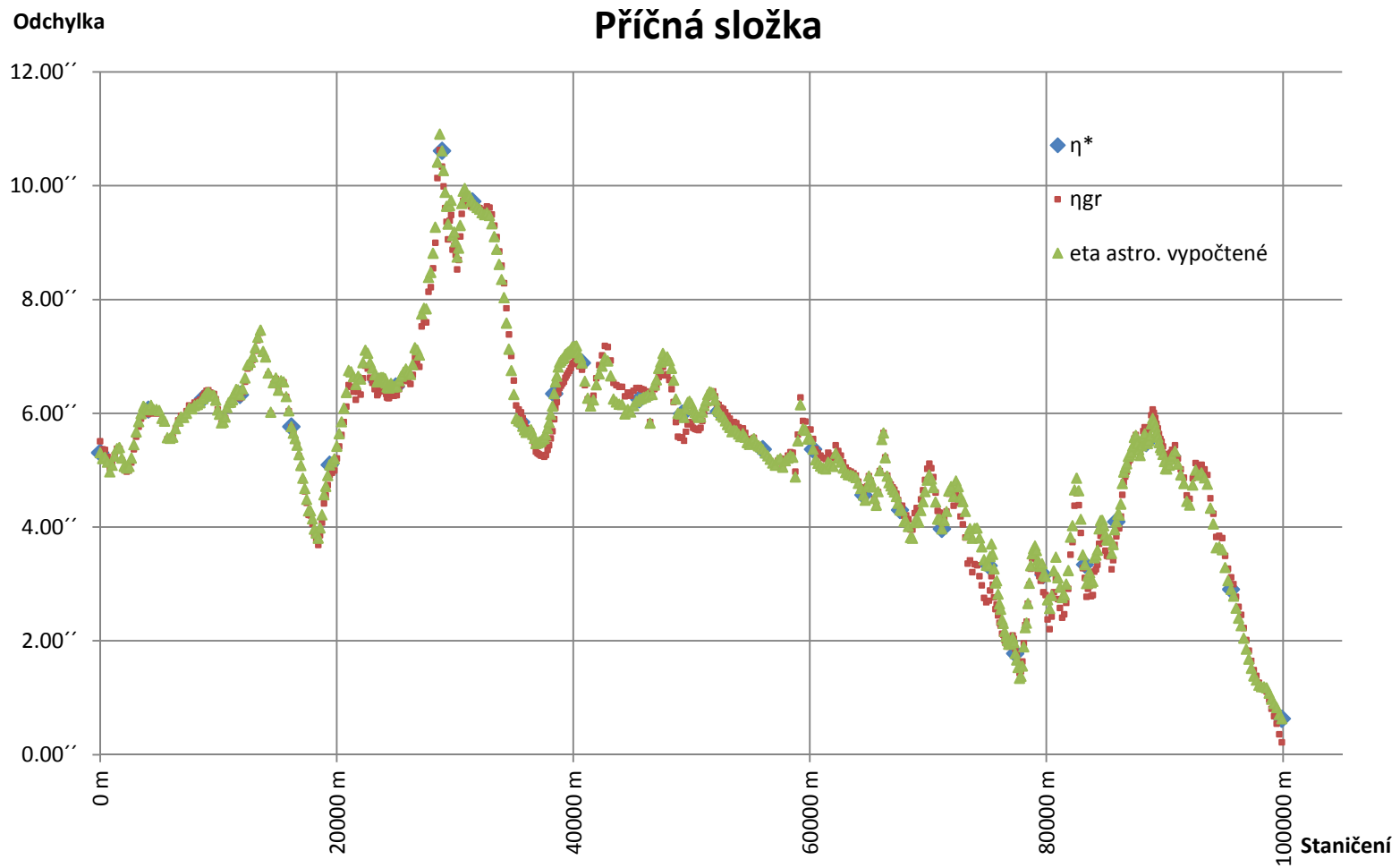
Protokol o výpočtu interpolace z programu Matlab je přiložen v *Příloha 2*.



Graf 1: Interpolované rezidua



Graf 2: Meridiánová složka interpolovaných tížnicových odchylek



Graf 3: Příčná složka interpolovaných tížnicových odchylek

### 9.2.2. Výpočet profilu

Po výpočtu astronomicko-geodetických tížnicových odchylek byly vypočteny astronomické souřadnice mezilehlých bodů profilu, přičtením vypočtených tížnicových odchylek ke geodetickým (elipsoidickým) souřadnicím bodů. Z geodetických souřadnic byly pak pomocí I. a II. zgú vypočteny staničení jednotlivých bodů a azimuty stran. Pak už byl výpočet kvazigeoidu shodný s postupem popsáním v kapitole 9.1.

Výpočetní tabulka v programu Excel je uvedena v *Příloha 2*.

### 9.3. Výpočet aproximací

Do tohoto výpočtu vstoupily stejné hodnoty jako do výpočtu v kapitole 9.2, ale k jejich zpracování byla použita jiná metoda, která je popsána v následující stati.

#### 9.3.1. Výpočet aproximovaných odchylek

Metodika tohoto výpočtu vychází z práce autora Hirt [8]. Výpočet opět začal výpočtem astronomicko-geodetických tížnicových odchylek na astronomických bodech, který je popsán v předešlých kapitolách. Také byly na astronomických bodech vypočteny rozdíly mezi astronomicko-geodetickými a gravimetrickými tížnicovými odchylkami stejně jako v předešlé kapitole a bylo vypočteno staničení všech bodů profilu. Staničení a rozdíly tížnicových odchylek byly vstupními hodnotami do výpočtu aproximace rozdílů tížnicových odchylek na všech bodech. Výpočet proběhl opět v programu Matlab R2010a a popis aproximační funkce naleznete v nápovědě programu [17], ale v principu se jedná o interpolaci metodou nejmenších čtverců. Výpočet aproximovaných tížnicových odchylek byl proveden jako součet gravimetrických tížnicových odchylek a aproximovaných rozdílů. Výsledky aproximace složek tížnicových odchylek jsou uvedeny v *Graf 4*: Meridiánová složka aproximovaných tížnicových odchylek a *Graf 5*. V grafech jsou zobrazeny rozdíly astronomicko-geodetických a gravimetrických odchylek, které jsou označeny jako delta (astro-gr), velikosti aproximovaných rozdílů v astronomických bodech jsou označeny jako approx astro a velikosti aproximovaný rozdílů v mezilehlých bodech jsou označeny jako approx.

Výslednou velikost meridiánových a příčných složek aproximovaných tížnicových odchylek ukazují

*Graf 6* a *Graf 7*. Pro ilustraci, jak moc se liší od vypočtených astronomicko-geodetických tížnicových odchylek, jsou v grafech uváděny i hodnoty astronomicko-geodetických tížnicových odchylek, ty jsou v grafech označeny jako *astro* a aproximované tížnicové odchylky jsou označeny jako *aprox*.

Díky postupu řešení bylo možné vypočítat rezidua mezi rozdíly astronomicko-geodetických a gravimetrických tížnicových odchylek a aproximovaných tížnicových odchylek podle vzorců

$$(9.1) \quad \xi_{astro-aprox} = \Delta\xi - \Delta\xi_{aprox},$$

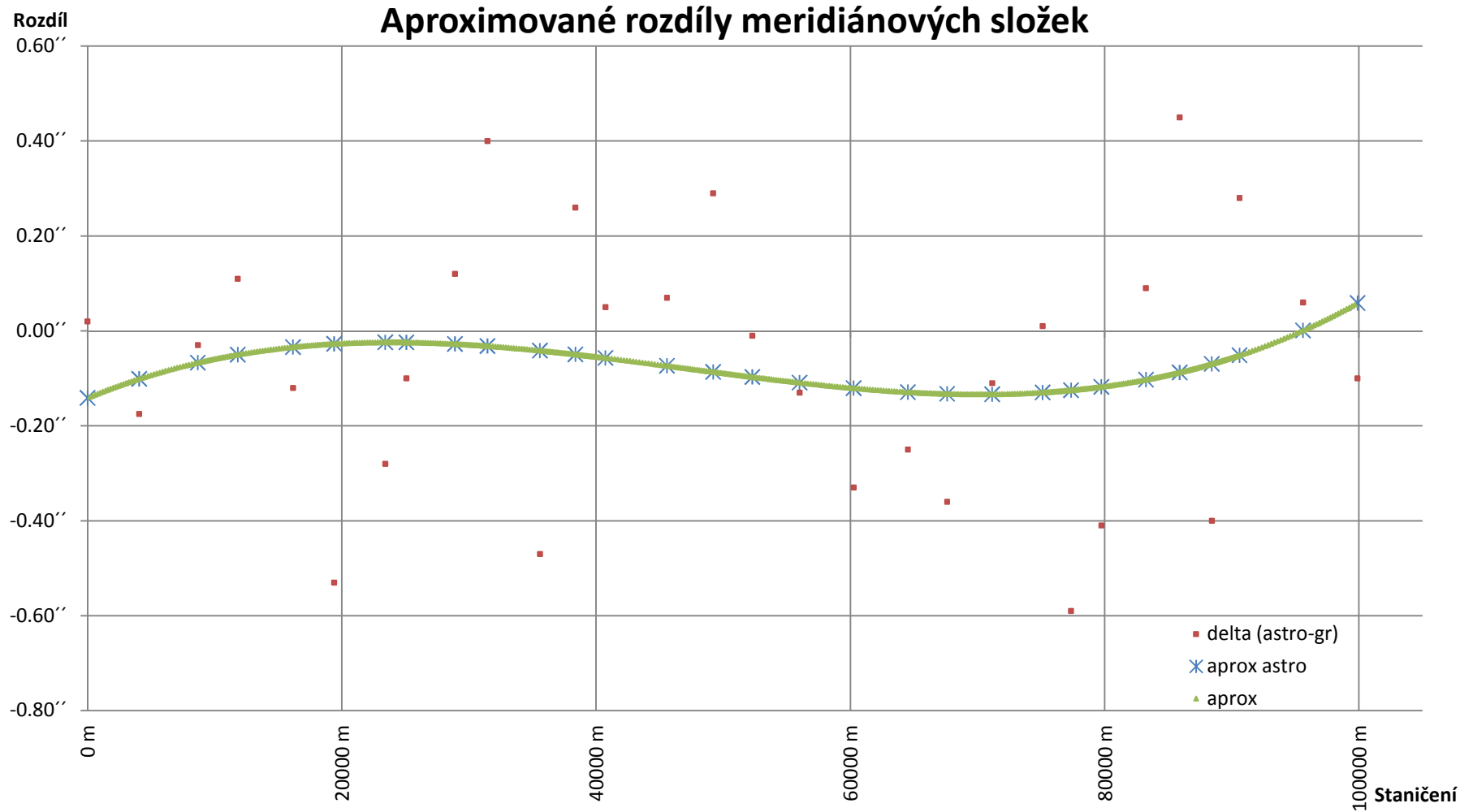
$$(9.2) \quad \eta_{astro-aprox} = \Delta\eta - \Delta\eta_{aprox}.$$

Residua jsou uvedena v *Graf 8* a *Graf 9*. Z těchto reziduí bylo možno vypočítat střední chyby složek astronomicko-geodetických tížnicových odchylek vstupujících do výpočtu. Střední chyba byla vypočtena podle vzorce

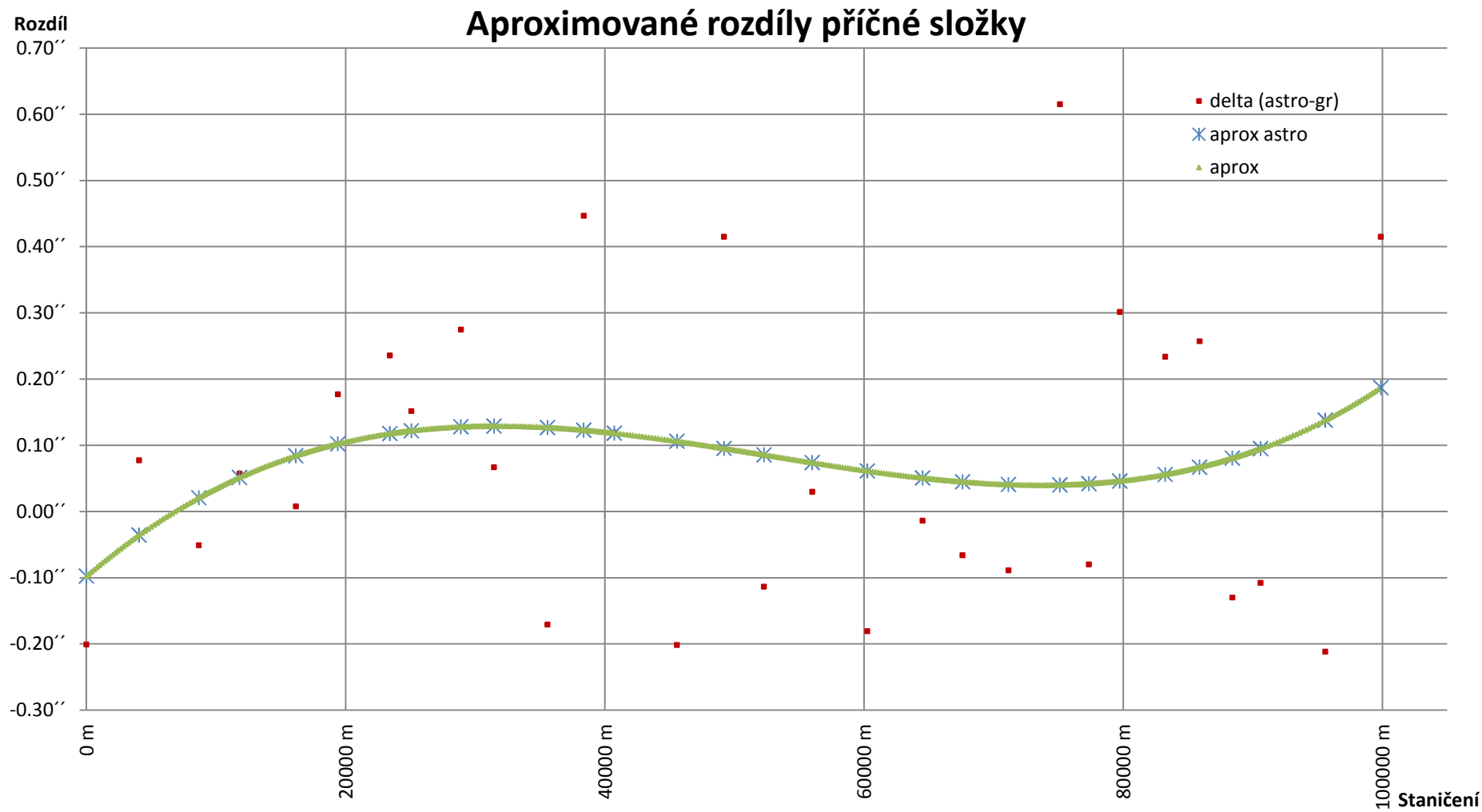
$$(9.3) \quad m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{30} v_i^2}{n-k}},$$

kde  $v_i$  jsou vypočtené residua,  $n$  je počet astronomických bodů a je rovno 30 a  $k$  je počet nutných astronomických bodů k proložení aproximační křivky třetího řádu, tedy 4. Výsledné střední chyby jsou  $m_\xi = 0,282''$  a  $m_\eta = 0,227''$ .

Protokol z výpočtu aproximace z programu Matlab je v *Příloha 3*.

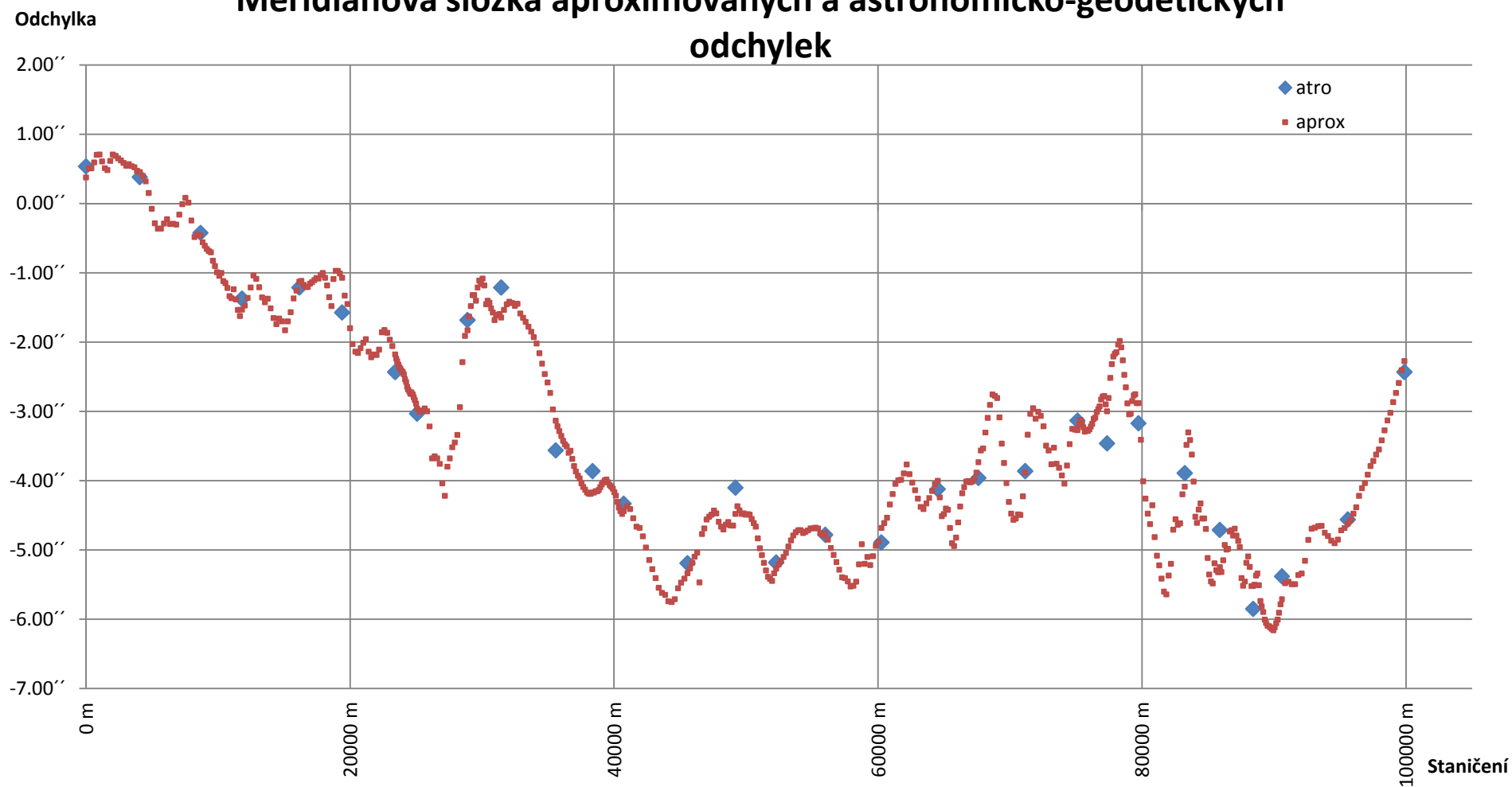


Graf 4: Meridiánová složka aproximovaných tížnicových odchylek

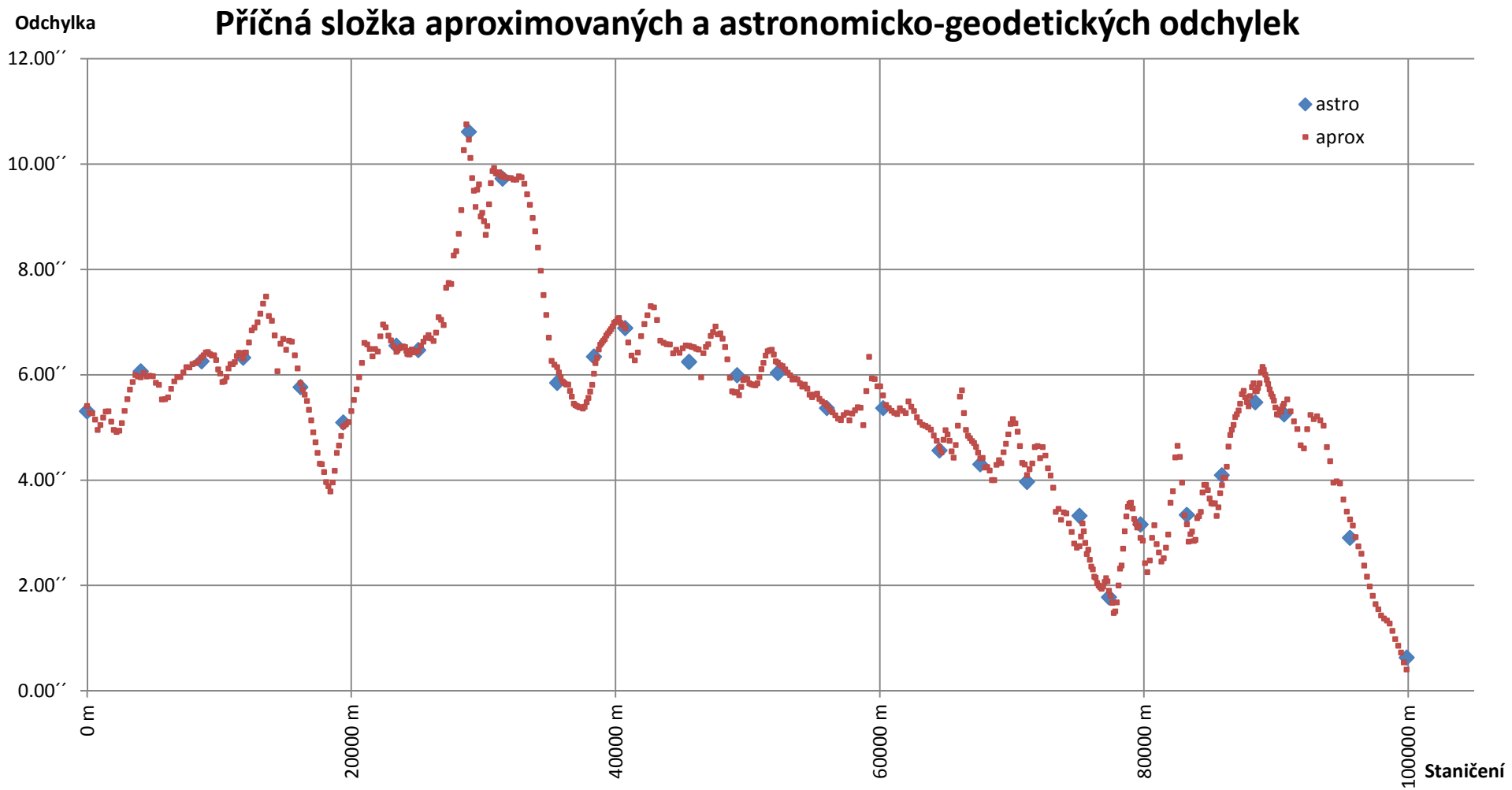


Graf 5: Příčná složka aproximovaných tížnicových odchek

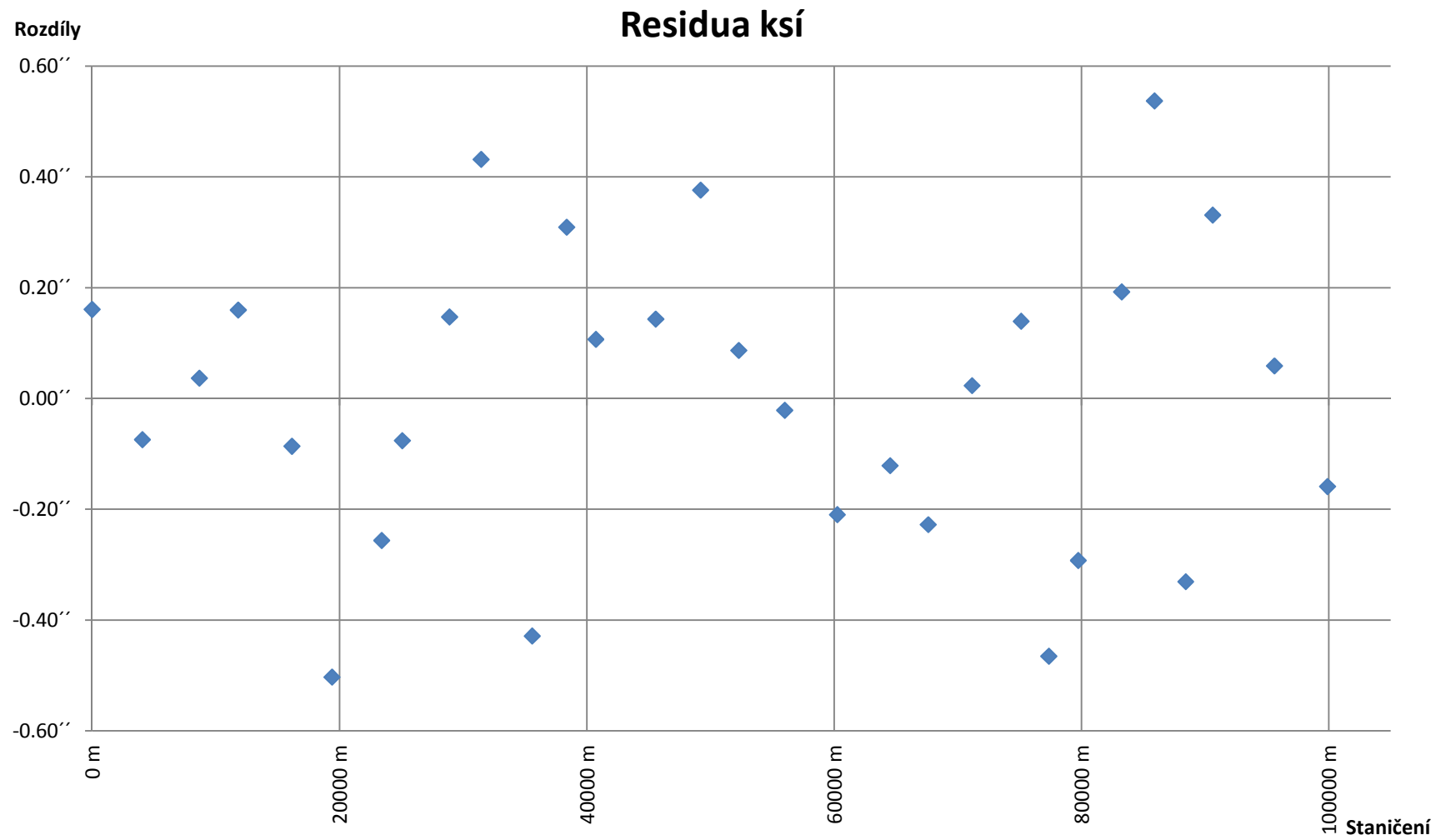
## Meridiánová složka aproximovaných a astronomicko-geodetických odchylek



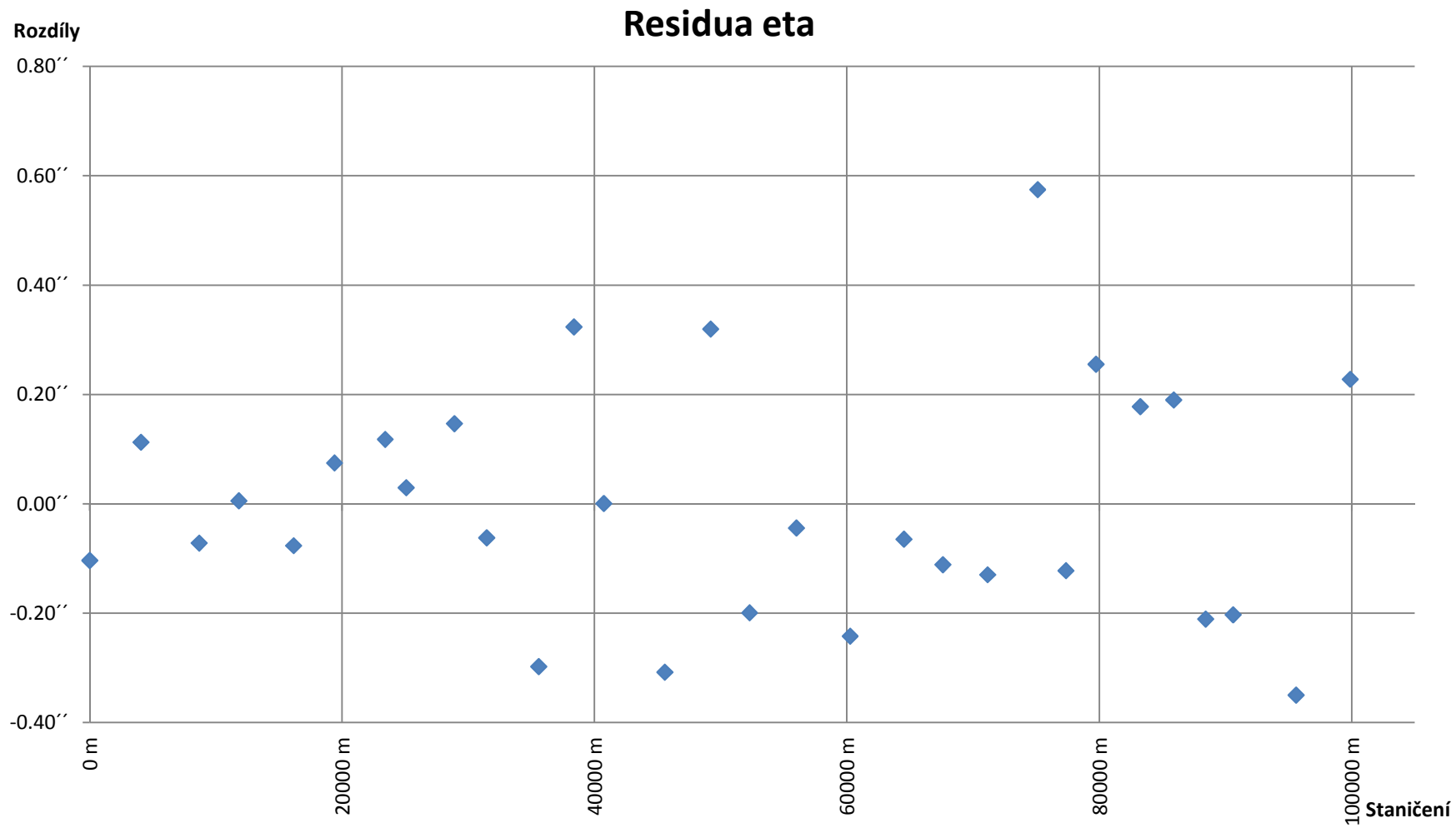
Graf 6: Výsledné meridiánové tížnicové odchylky aproximované



Graf 7: Výsledné příčné tížnicové odchylky aproximované



Graf 8: Residua  $\xi$



Graf 9: Residua  $\eta$

### **9.3.2. Výpočet profilu**

Po výpočtu aproximovaných složek tížnicových odchylek byl výpočet kvazigeoidu stejný jako v předchozím případě. Dále byly vypočteny aproximované astronomické souřadnice všech 580-ti bodů profilu, přičtením aproximovaným tížnicových odchylek ke geodetickým souřadnicím.

Výpočetní tabulka v programu Excel je uvedena v *Příloha 3*.

## 10. Porovnání výsledků

Výše vypočtené kvazigeoidy byly porovnány se zadaným gravimetrickým modelem kvazigeoidu, s EGM2008 a s kvazigeoidem získaným z GPS/nivelace, která byla provedena na patnácti bodech v blízkosti astronomických bodů profilu. Na základě zjištěných odchylek byla vypočtena střední chyba kvazigeoidů.

Protože použité metody výpočtu, astronomicko-geodetická nivelace a astronomicko-gravimetrická nivelace, jsou metody relativní, tedy nepodávají žádnou informaci o absolutním výškovém umístění profilu, provádí se porovnáním tak, že se ztotožní výška nad elipsoidem prvního bodu vypočteného profilu s prvním bodem zadaného profilu. Tedy rozdíl, na prvním bodě vypočteného kvazigeoidu a porovnávacího modelu, je nulový [8].

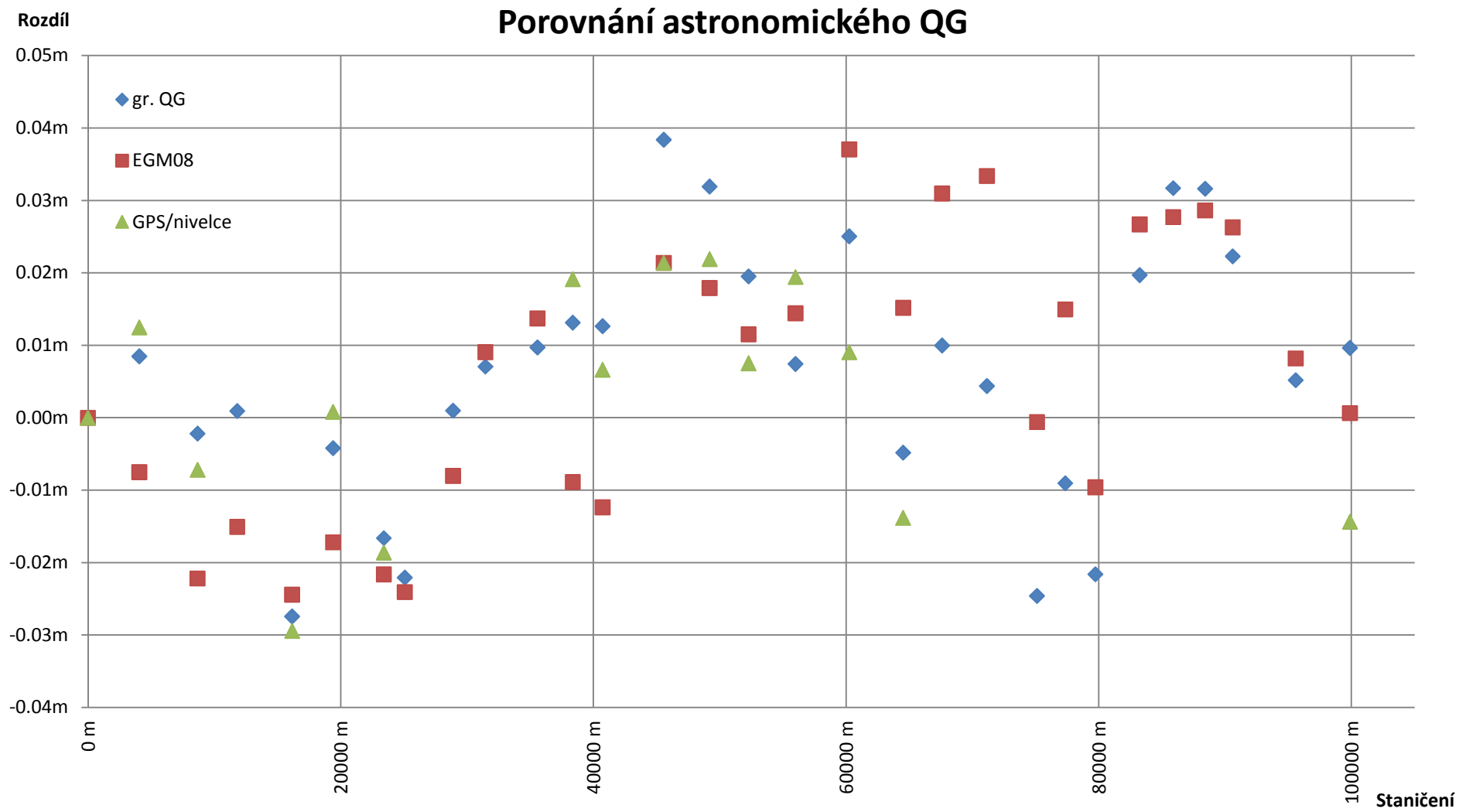
V následujících statích jsou uvedeny maximální a minimální odchylky od jednotlivých modelů, jejich střední hodnota vypočtená jako aritmetický průměr a relativní střední chyba vypočtená podle (9.3), kde  $v_i$  jsou vypočtené rozdíly,  $n$  je celkový počet rozdílů a  $k$  je nutný počet rozdílů. V tomto případě je  $k$  vždy rovno jedné, kvůli použité metodě výpočtu odchylek. Dále jsou v nich také zobrazeny grafy odchylek.

### 10.1. Astronomický kvazigeoid

V této kapitole je porovnán astronomický kvazigeoid v *Tab. 2*, v *Graf 10* jsou vyneseny rozdíly od gravimetrického kvazigeoidu, EGM2008 a GPS/nivelace a v *Graf 11* jsou vyneseny výšky nad elipsoidem WGS84 a první bod profilu je ztotožněn s prvním bodem gravimetrického kvazigeoidu.

Astronomický kvazigeoid porovnáván s			
	Gravimetrickým [m]	EGM2008 [m]	GPS/nivelace [m]
Max	0.038	0.037	0.022
Min	-0.029	-0.024	-0.029
Průměr	-0.006	-0.006	0.002
Střední chyba	0.019	0.020	0.016

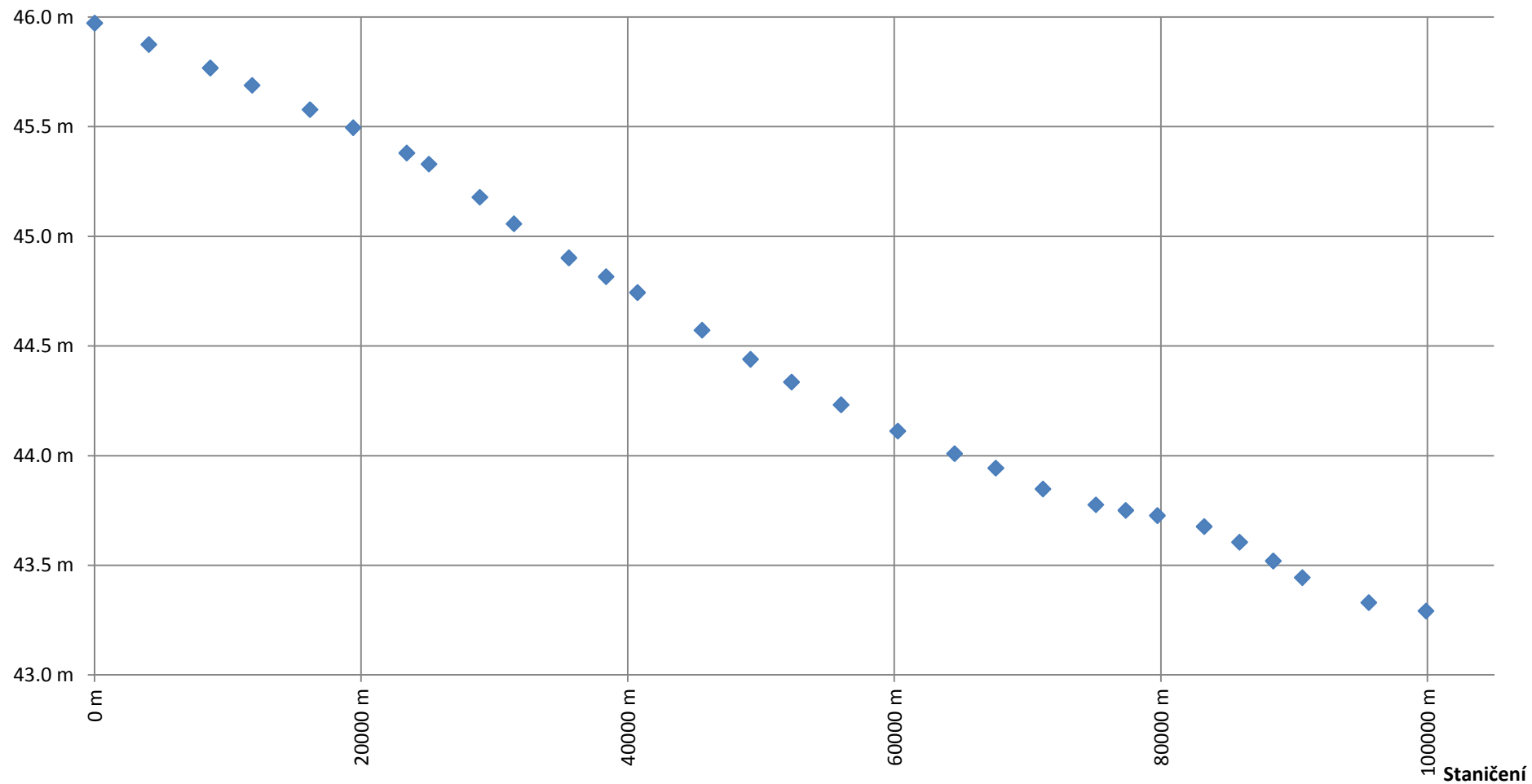
Tab. 2: Porovnání astronomického kvazigeoidu



Graf 10: Porovnání astronomického kvazigeoidu

Výška nad el.

## Astronomický kvazigeoid



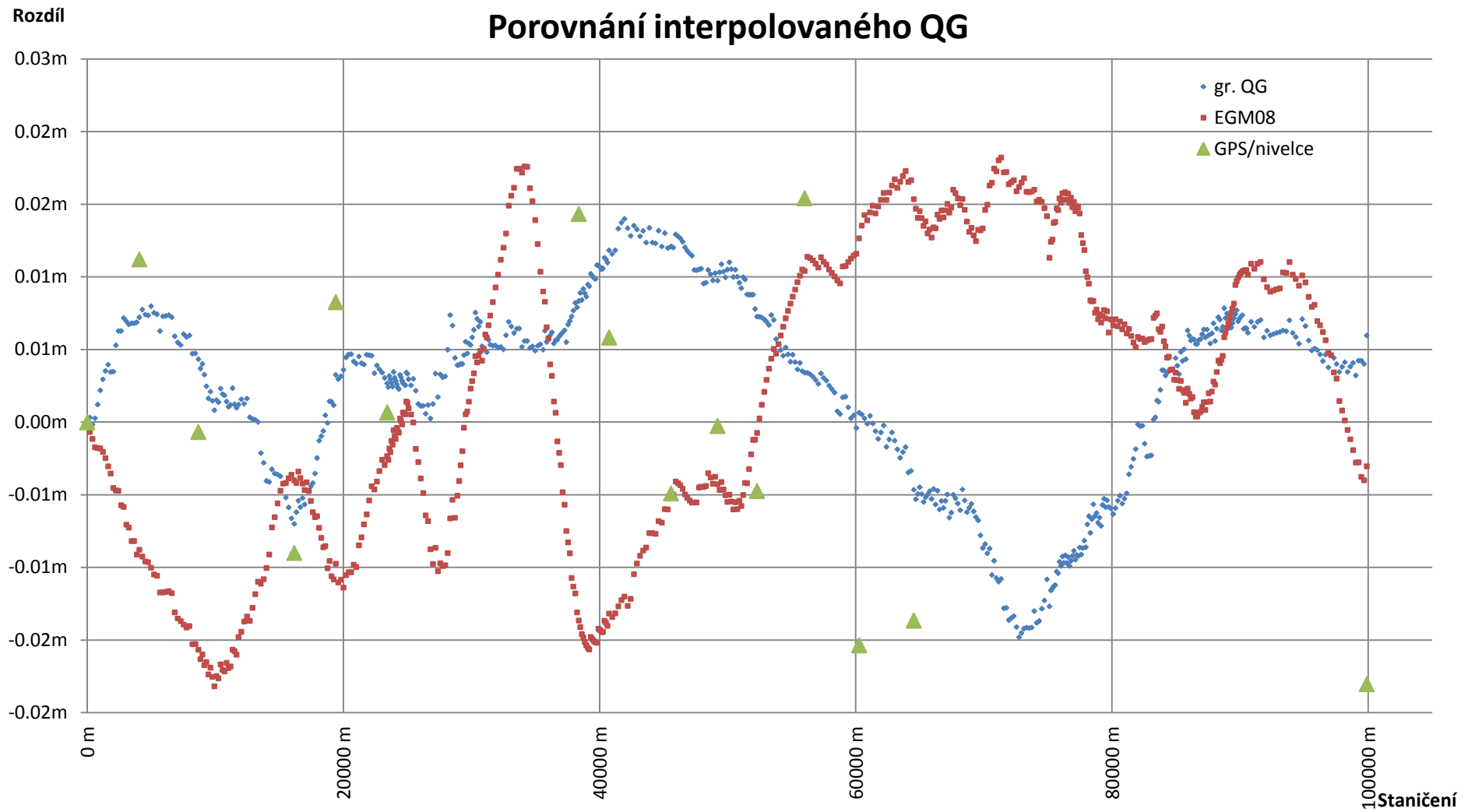
Graf 11: Astronomický kvazigeoid

## 10.2. Interpolovaný kvazigeoid

V této kapitole je porovnán interpolovaný kvazigeoid v *Tab. 3*, v *Graf 12* jsou vyneseny rozdíly od gravimetrického kvazigeoidu, EGM2008 a GPS/nivelace a v *Graf 13* jsou vyneseny výšky nad elipsoidem WGS84 a první bod profilu je ztotožněn s prvním bodem gravimetrického kvazigeoidu.

Interpolovaný kvazigeoid porovnáván s			
	Gravimetrickým [m]	EGM2008 [m]	GPS/nivelace [m]
Max	0.014	0.018	0.015
Min	-0.015	-0.018	-0.018
Průměr	0.002	0.002	-0.001
Střední chyba	0.007	0.010	0.011

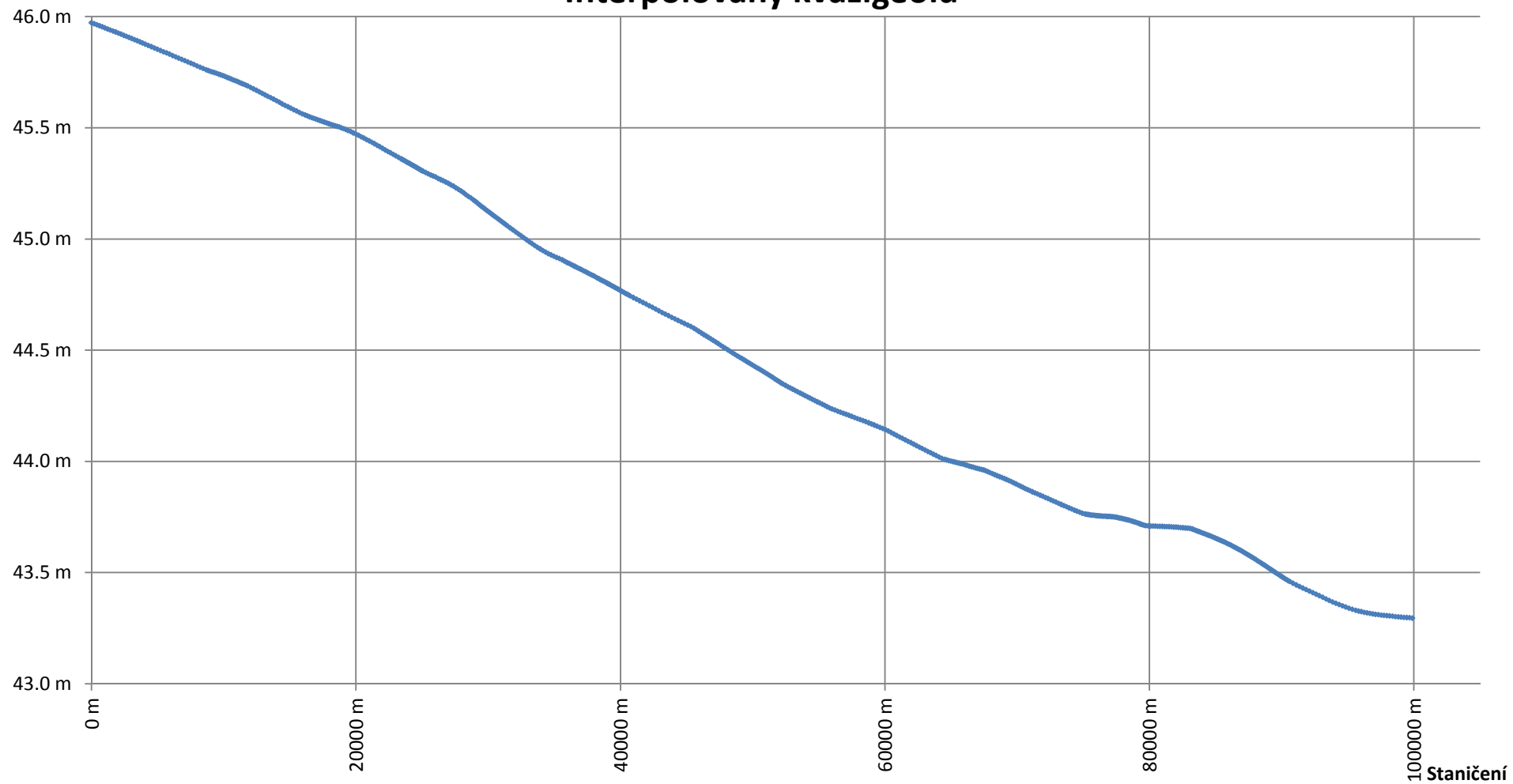
Tab. 3: Porovnání interpolovaného kvazigeoidu



Graf 12: Porovnání interpolovaného kvazigeoidu

Výška nad el.

## Interpolovaný kvazigeoid



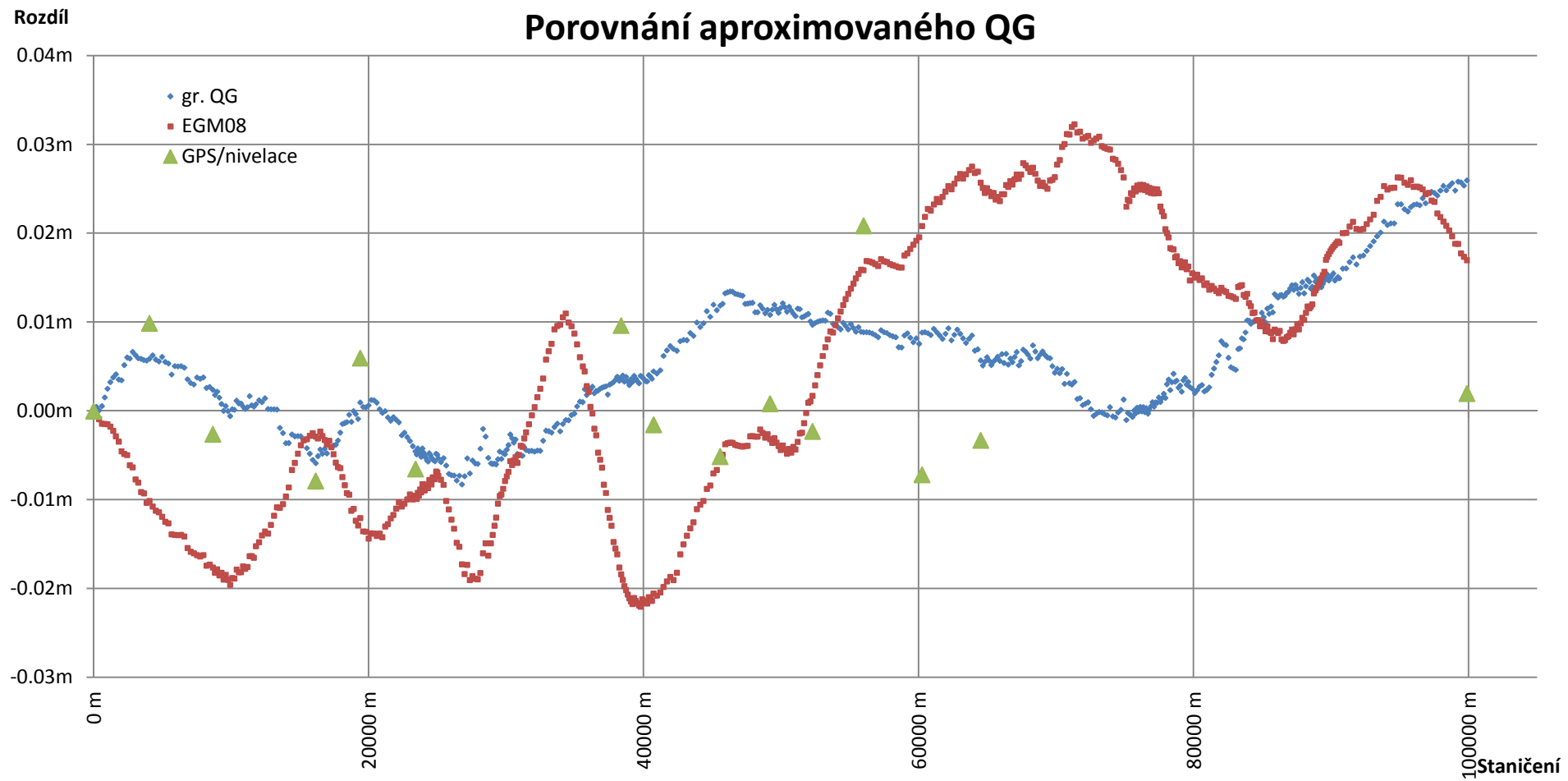
Graf 13: Aproximovaný kvazigeoid

### 10.3. Aproximovaný kvazigeoid

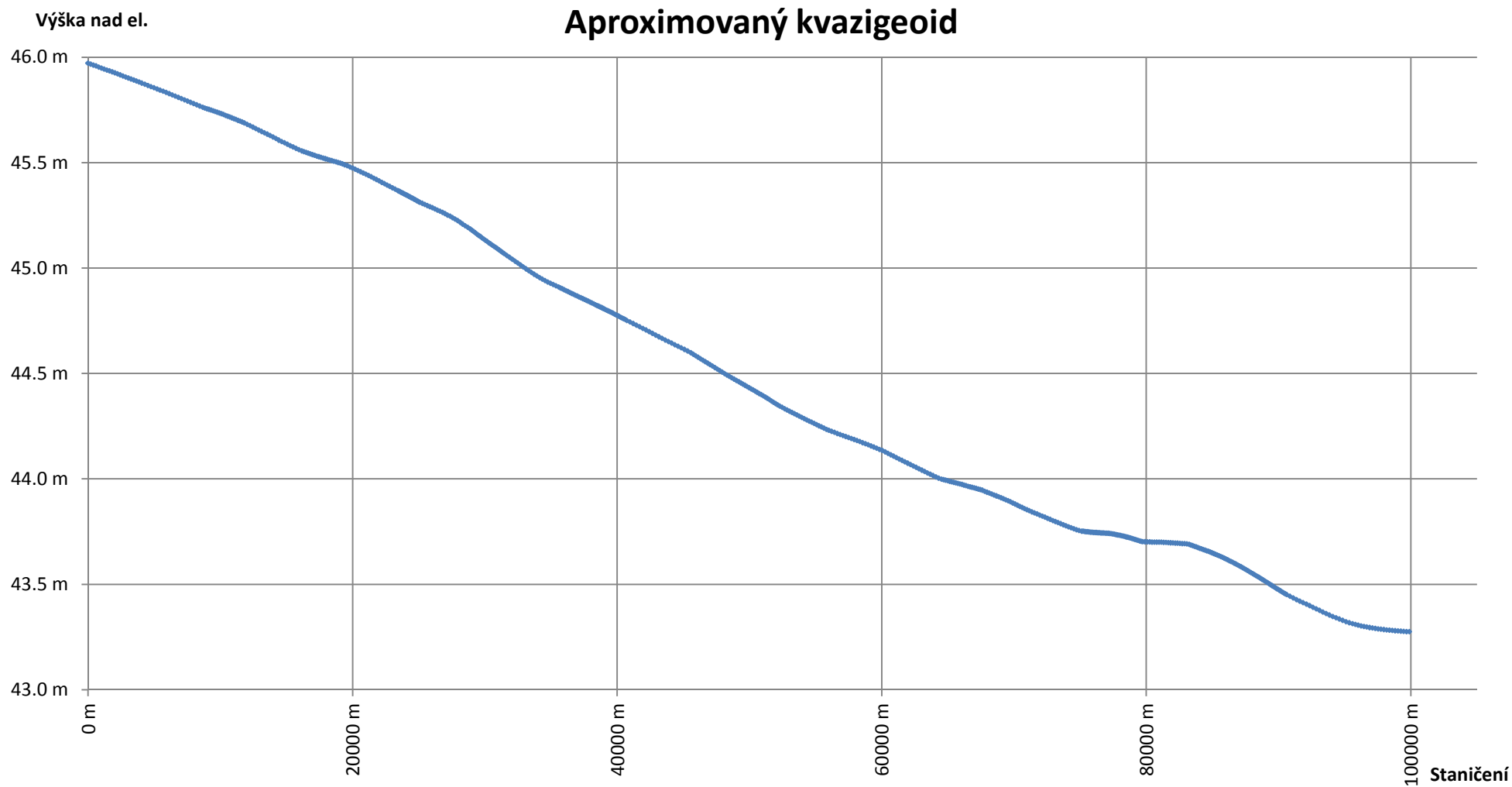
V této kapitole je porovnán aproximovaný kvazigeoid v *Tab. 4*, v *Graf 14* jsou vyneseny rozdíly od gravimetrického kvazigeoidu, EGM2008 a GPS/nivelace a v *Graf 15* jsou vyneseny výšky nad elipsoidem WGS84 a první bod profilu je ztotožněn s prvním bodem gravimetrického kvazigeoidu.

Aproximovaný kvazigeoid porovnáván s			
	Gravimetrickým [m]	EGM2008 [m]	GPS/nivelace [m]
Max	0.026	0.032	0.021
Min	-0.008	-0.022	-0.008
Průměr	0.005	0.005	0.001
Střední chyba	0.009	0.017	0.008

Tab. 4: Porovnání aproximovaného kvazigeoidu



Graf 14: Porovnání aproximovaného kvazigeoidu



Graf 15: Aproximovaný kvazigeoid

## 11. Závěr

V diplomové práci byl na základě předaných dat vypočten kvazigeoid třemi variantami řešení na profilu Velká Bíteš – Uherské Hradiště, které byly následně porovnány s gravimetrickým modelem kvazigeoidu, modelem EGM2008 a s GPS/nivelací. Výsledky porovnání jsou uvedeny v *Tab. 2*, *Tab. 3* a *Tab. 4*, ze kterých plyne, že nejlépe se přimyká ke gravimetrickému modelu interpolovaný kvazigeoid a to s přesností 0,7 cm, aproximovaný kvazigeoid se ke stejnému modelu přimyká s přesností 0,8 cm a astronomický kvazigeoid s přesností 1,9 cm.

Protože ale interpolovaný a aproximovaný kvazigeoid jsou korelované s gravimetrickým kvazigeoidem, který byl vypočten ze stejných gravimetrických dat a modelu EGM2008, byly vypočtené kvazigeoidy porovnány s GPS/nivelací, na které jsou nezávislé. Z tohoto porovnání vyšlo, že nejlépe se přimyká aproximovaný kvazigeoid s přesností 0,8 cm. Interpolovaný kvazigeoid se k GPS/nivelaci přimyká s přesností 1,1 cm a astronomický kvazigeoid s přesností 1,6 cm.

Obecně lze tvrdit, že postupem, kterým byly získány data, a postupem jejich následného zpracování lze určit průběh kvazigeoidu řádově s centimetrovou přesností na vzdálenost 100 km.

Díky použité aproximační metodě výpočtu, také mohla být určena střední chyba určení složek astronomicko-geodetických odchylek. Ta je v meridiánovém směru  $m_{\xi} = 0,282''$  a v příčném směru  $m_{\eta} = 0,227''$ .

## Použitá literatura

1. Zeman, A., Fyzikální geodézie. 2010, Praha: ČVUT. 188 s.
2. Hofmann-Wellenhof, B. and H. Moritz, Physical geodesy. 1st ed. 2005, Wien ; New York: SpringerWienNewYork. xvii, 403 p.
3. Vykuřil, J., Vyšší geodézie. 1982, Praha: Kartografie Praha. 544 s.
4. Cimbálník, M., A. Zeman, and J. Kostecký, Základy vyšší a fyzikální geodézie. 2007, Praha: ČVUT. 218 s.
5. Zeman, A., Fyzikální geodézie: teorie výšek a výškové systémy: doplňkové skriptum. 2008, Praha: ČVUT. 83 s.
6. Terminologický slovník. ZČU Plzeň [cited 4.2. 2013]; Available from: <http://www.gis.zcu.cz/samostatnestranky/slovník/index.xml#paragraphE>.
7. ČESKO. Nařízení vlády č. 430/2006 Sb., o stanovení geodetických referenčních systémů a státních mapových děl závazných na území státu a zásadách jejich používání. In Sbírka zákonů ČR, ročník 2006 [cited 4.2. 2013]; Available from: <http://www.zakonyprolidi.cz/cs/2006-430>.
8. Hirt, C., et al., Astrogeodetic Validation of Gravimetric Quasigeoid Models in the German Alps - First Result. 2007.
9. Buttorazová, E., Modelování tíhových dat pomocí bodových hmotností, Diplomová práce. 2012, ČVUT: Praha. p. 81 s.
10. Torge, W., Geodesy. 3rd completely rev. and extended ed. 2001, Berlin ; New York: W. de Gruyter. xv, 416 p.
11. Dvořáková, Z., Kandidáti na impaktní struktury z pohledu modelu Gravitačního pole Země EGM2008, Diplomová práce. 2012, ČVUT: Praha. p. 149 s.
12. Pavlis, N.K., et al., The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008). J. Geophys. Res., 2012. 117.

13. EGM2008 2.5 Minute Geoid Heights. NGA [cited 2013 25.3.]; Available from: [http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/egm08\\_wgs84.html](http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/egm08_wgs84.html).
14. Machotka, R. and J. Fixel, Geodetická astronomie a kosmická geodézie II, Modul 01: Kosmická geodézie. 2007.
15. Kabeláč, J. and J. Kostelecký, Geodetická astronomie 10. 2009, Praha: ČVUT.
16. Jurčík, J., Užití astronomické nivelace pro vytváření modelů kvazigeoidu, Diplomová práce, in FAST. 2012, VUT: Brno. p. 75.
17. Matlab\_R2010a, Návod k programu. 2010, The MathWorks.

## Seznam obrázků

Obr. 1: Teluroid, zdroj [3], upraveno.....	14
Obr. 2: Tížnicová odchylka, zdroj [3], upraveno.....	22
Obr. 3: Tížnicová odchylka v azimutu, zdroj [3], převzato.....	23
Obr. 4: gravimetrická tížnicová odchylka, zdroj [3], převzato.....	24
Obr. 5: Astronomicko – geodetická nivelace podle Helmerta, zdroj [2], převzato.....	26
Obr. 6: Astronomická nivelace podle Moloděnského, zdroj [2], převzato.....	27
Obr. 7: Typy harmonických funkcí (a) zonální (b) tesserální (c) sektorální, zdroj.....	32
Obr. 8: Model EGM2008, zdroj [13], převzato.....	33
Obr. 9: Trasa profilu, datový podklad Google Earth.....	35
Obr. 10: Výškové poměry profilu, datový podklad Google Earth.....	35
Obr. 11: MAAS-1, zdroj (Rukopis poskytnutý vedoucím práce), převzato.....	36
Obr. 12: Prostorové a elipsoidické souřadnice, zdroj [14], převzato.....	38
Obr. 13: Metodika určení astronomických zeměpisných souřadnic, zdroj [15], převzato.....	39

## Seznam tabulek

Tab. 1: Ukázka výpočetní tabulky z astronomických bodů.....	42
Tab. 2: Porovnání astronomického kvazigeoidu.....	56
Tab. 3: Porovnání interpolovaného kvazigeoidu.....	59
Tab. 4: Porovnání aproximovaného kvazigeoidu.....	62

## Seznam grafů

Graf 1: Interpolované rezidua.....	44
Graf 2: Meridiánová složka interpolovaných tížnicových odchylek.....	45
Graf 3: Příčná složka interpolovaných tížnicových odchylek.....	46
Graf 4: Meridiánová složka aproximovaných tížnicových odchylek.....	49
Graf 5: Příčná složka aproximovaných tížnicových odchylek.....	50
Graf 6: Výsledné meridiánové tížnicové odchylky aproximované.....	51
Graf 7: Výsledné příčné tížnicové odchylky aproximované.....	52
Graf 8: Residua $\xi$ .....	53
Graf 9: Residua $\eta$ .....	54
Graf 10: Porovnání astronomického kvazigeoidu.....	57
Graf 11: Astronomický kvazigeoid.....	58
Graf 12: Porovnání interpolovaného kvazigeoidu.....	60
Graf 13: Aproximovaný kvazigeoid.....	61
Graf 14: Porovnání aproximovaného kvazigeoidu.....	63
Graf 15: Aproximovaný kvazigeoid.....	64

## Seznam zkratek

IAGG	- Mezinárodní asociace geodetická a geofyzikální ( <i>International association of geodesy and geophysics</i> )
gpu	- geopotenciální jednotka ( <i>geopotential unit</i> )
EULN	- Jednotná evropská nivelační síť ( <i>United European Levelling Net</i> )
AGNES	- Astronomicko-geodetická nivelační síť
VÚGTK	- Výzkumný ústav geodetický, topografický a kartografický ve Zdíbech
GNSS	- Globální navigační satelitní systémy
Bpv	- výškový systém Balt po vyrovnání
EGM 2008	- Earth Gravitational Model 2008 (Model gravitačního pole Země 2008)
GPS	- Global positionig systém (Globální navigační systém)
WGS84	- World Geodetic Systém 1984 (Světový geodetický systém 1984)
ETRS89	- European Terrestrial Reference System 1989 (Evropský terestrický referenční systém 1989)
RTK	- Real Time Kinematic (Kinematická metoda v reálné čase)
MAAS – 1	- Mobilní automatizovaný astronomický systém
zgú	- základní geodetická úloha

## Seznam symbolů

$A$	- azimut
$a$	- velká poloosa elipsoidu
$B$	- geodetická šířka
$b$	- malá poloosa elipsoidu
$C$	- geopotenciální kóta
$e$	- první excentricita elipsoidu
$e'$	- druhá excentricita elipsoidu
$g$	- tíhové zrychlení
$g_m$	- střední hodnota tíhového zrychlení
$H$	- ortometrická výška
$H_{el}$	- elipsoidická výška
$H_g$	- geopotenciální výška
$H_{Hel}$	- Helmertova ortometrická výška
$H_Q$	- normální Moloděnského výška
$H_\gamma$	- normální ortometrická výška
$L$	- Laplaceův bod
$M$	- hmotnost Země
$m$	- poměr gravitačního a odstředivého zrychlení na rovníku Země
$N$	- odlehlost geoidu od elipsoidu
$n_a$	- normála ke sféroidu
$n_e$	- normála k elipsoidu
$n_r$	- normála k referenčnímu elipsoidu
$Q$	- potenciál gravitační síly
$T$	- poruchový potenciál
$t$	- tížnice
$U$	- normální tíhové zrychlení
$V$	- gravitační potenciál
$W$	- potenciál zemské tíže
$Z$	- elipsoidický zenit
$Z'$	- astronomický zenit
$\alpha$	- rektascenze
$\gamma$	- normální tíhové zrychlení

$\gamma_m$	- střední hodnota normálního tíhového zrychlení
$\delta$	- deklinace
$\Delta g_F$	- Fayova anomálie
$\bar{\varepsilon}$	- tížnicová odchylka v azimutu v bodě na zemském povrchu
$\varepsilon^*$	- astronomicko-geodetická tížnicová odchylka v azimutu
$\varepsilon_0$	- tížnicová odchylka v azimutu na geoidu
$\varepsilon^{gr}$	- gravimetrická tížnicová odchylka v azimutu
$\zeta$	- odlehlost kvazigeoid od elipsoidu
$\bar{\eta}$	- příčná složka tížnicové odchylky v bodě na zemském povrchu
$\eta^*$	- příčná složka astronomicko-geodetické tížnicové odchylky
$\eta^{gr}$	- příčná složka gravimetrické tížnicové odchylky
$\Theta^*$	- astronomická tížnicová odchylka
$\lambda$	- elipsoidická zeměpisná délka
$\lambda^*$	- astronomická zeměpisná délka
$\bar{\xi}$	-meridiánová složka tížnicové odchylky v bodě na zemském povrchu
$\xi^*$	- meridiánová složka astronomicko-geodetické tížnicové odchylky
$\xi^{gr}$	- meridiánová složka gravimetrické tížnicové odchylky
$\varphi$	- elipsoidická zeměpisná šířka
$\varphi^*$	- astronomická zeměpisná šířka
$\omega$	- úhlová rychlost

## **Seznam elektronických příloh**

Příloha 1 – Výpočet z astro. bodů

- prevyseni\_QG-astro.bodu.xlsx

Příloha 2 – Výpočet spline

- prevyseni\_QG-vsechny\_body\_spline.xlsx
- protokol\_spline.txt

Příloha 3 – Výpočet aproximací

- prevyseni\_QG-vsechny\_body\_aprox.xlsx
- protokol\_ksi\_aprox.txt
- protokol\_eta\_aprox.txt

Příloha 4 – Výsledky

- Výsledky.xlsx