



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND
BIOMECHANICS

POPIS ROZLOŽENÍ NAPĚTÍ V OKOLÍ BIMATERIÁLOVÉHO VRUBU

A STUDY OF THE STRESS DISTRIBUTION AROUND THE BIMATERIAL NOTCH TIP

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

MIROSLAV HRSTKA

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. TOMÁŠ PROFANT, Ph.D.

BRNO 2010

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Akademický rok: 2009/10

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Miroslav Hrstka

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Strojní inženýrství (2301R016)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Popis rozložení v okolí bimateriálového vrubu

v anglickém jazyce

A study of the stress distribution around the bimaterial notch tip

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Vrub je běžnou součástí technických konstrukcí a také možným zdrojem problémů jejich provozu a užití, zejména v příp. vrubů sestavených z více jak jednoho typu materiálu. Z hlediska rozložení napětí se vrub chová jako koncentrátor způsobující nukleaci a následný růst trhlin ze svého kořene. Cílem uchazeče bude se seznámit s problematikou popisu rozložení napětí v blízkosti kořene bi-materiálového vrubu modelovaného jako rovinná úloha pružnosti. Znalost rozložení napětí v okolí vrubu ne totiž nutnou podmínkou k aplikaci základních principů lomové mechaniky na vyhodnocování iniciace a budoucího růstu trhlin v jeho okolí.

Cíle bakalářské práce:

1. Seznámení se s teoretickými základy lomové mechaniky.
2. Seznámení se s teorií rovinné pružnosti a její aplikací na problém singularity typu vrub.
3. Seznámení se s numericko-analytickým algoritmem pro určování exponentu singularity napětí a faktoru intenzity napětí bi-materiálového vrubu.
4. Testování algoritmu na konkrétní materiálové a zatěžovací konfiguraci bi-materiálového vrubu.

Seznam odborné literatury:

Broberg, K. B., Cracks and Fracture, Academic Press, 1999,
Ševeček, O. Solution of general stress concentrators in anisotropic media by combination of FEM and the complex potential theory, disertační práce, 2009.

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Tomáš Profant, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2009/10.

V Brně, dne 11. 11. 2009

L.S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
Ředitel ústavu

doc. RNDr. Miroslav Doupovec, CSs.
Děkan fakulty

Abstrakt

Předkládaná bakalářská práce se zabývá problémem určení exponentu singularity, pomocí kterého je možné úplně popsat rozložení napětí v okolí bimateriálového vrubu. Práce je rozdělena do čtyř částí. První část pojednává o základech lomové mechaniky, konkrétně lineárně elastické lomové mechaniky trhliny a Irwinovy koncepce faktoru intenzity napětí. Druhá část se zabývá zobecněním lineární lomové mechaniky na vruby. Ve třetí části je uveden numericko-analytický algoritmus pro výpočet exponentu singularity a určení posuvů a napětí daného vrubu složeného z dvou ortotropních materiálů. Poslední část tvoří numerický příklad, ve kterém jsou testovány konkrétní konfigurace vrubů pomocí výpočtového softwaru.

Abstract

Presented bachelor's thesis deals with determination of stress singularity exponent, by which is possible to completely define the stress distribution around the bimaterial notch tip. This task is divided in four parts. The first part concerns with basics of fracture mechanics, concretely linear elastic fracture mechanics of crack and Irwin's conception of stress intensity factor. The second part deals with generalizing of linear fracture mechanics to notches. In the third part is initiated the numeric-analytical algorithm for computation of stress singularity exponent and determination of strains and stresses of given notch, which is compounded from two orthotropic materials. The last part is created by numerical example, in which the concrete configurations of notches are tested in calculating software.

Klíčová slova

Lomová mechanika, bimateriálový vrub, ortotropní materiál, exponent singularity napětí, obecný singulární koncentrátor napětí.

Keywords

Fracture mechanics, bimaterial notch, orthotropic material, stress singularity exponent, general singular stress concentrator.

Bibliografická citace

HRSTKA, M. Popis rozložení napětí v okolí bimateriálového vrubu. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2010. 30 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Tomáš Profant, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že předkládaná bakalářská práce je mojí původní prací, kterou jsem vypracoval samostatně a pod vedením vedoucího bakalářské práce a s použitím uvedené literatury.

V Brně dne 26. května 2010

.....

Miroslav Hrstka

Poděkování

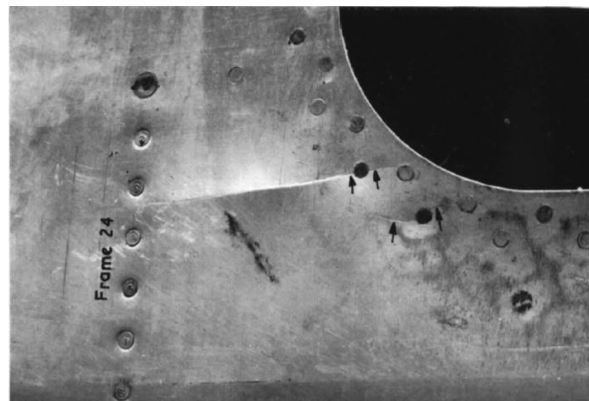
Rád bych upřímně poděkoval vedoucímu mé bakalářské práce Ing. Tomáši Profantovi, Ph.D. za cenné znalosti, jež mi předal, za jeho ochotu a čas, který mi při řešení této práce věnoval. Dále bych chtěl poděkovat svým nejbližším, kteří mě při studiu podporovali.

Obsah

1. Úvod	9
2. Základní pojmy lomové mechaniky	11
2.1. Lineárně elastická lomová mechanika trhliny	11
2.2. Módy zatěžování.....	11
2.3. Napjatost v okolí trhliny	12
2.4. Plastická zóna	12
3. Zobecnění na problém singularity typu vrub	13
3.1. Obecný singulární koncentrátor napětí.....	13
3.2. Rozdělení napětí v okolí obecného singulárního koncentrátoru napětí.....	14
3.3. Aplikace na bimateriálový vrub	14
3.4. Iniciační trhliny	15
4. Numericko-analytický algoritmus pro určení exponentu singularity	16
4.1. Napětí a posuvy v okolí koncentrátoru typu vrub	16
4.2. Určení komplexních potenciálů f	18
4.3. Okrajové podmínky a výpočet exponentu singularity	19
5. Numerický příklad	20
5.1. Popis funkce programu	20
5.2. Výpočet exponentu singularity pro konkrétní konfiguraci.....	21
5.3. Vykreslení normovaných posuvů a napětí	22
6. Závěr	24
7. Seznam veličin a symbolů	25
8. Literatura	27
Dodatek A	28



Obr. 1: Loď třídy Liberty poškozená křehkým lomem.



Obr. 2: Trhlina iniciovaná v rohu okna z díry pro nýty (označeny šipkami) po 5951 cyklech (zdroj: Oficiální vyř. zpráva).

1. Úvod

Vrub je nedílnou součástí většiny moderních inženýrských konstrukcí. Z napěťového hlediska však představuje tvarovou změnu, která způsobuje koncentraci napětí. S tím je spojeno nebezpečí vzniku trhlin v kořeni vrubu, jejich šíření a následný lom celého tělesa. Abychom byli schopni kvantifikovat napětí a určit podmínky vzniku trhlin ve vrubech, muselo dojít ke vzniku nové vědecké disciplíny – lomové mechaniky. Ta popisuje pomocí jednoho nebo více parametrů napětí před čelem trhliny, zabývá se její nukleací, iniciací a šířením.

V historii známe několik událostí, které motivovaly vznik teorie lomové mechaniky. Prvním, kdo se zabýval kvantitativním popisem šíření trhlin, byl A. A. Griffith, který je považován za zakladatele lomové mechaniky. Ve své práci z roku 1920 popsal šíření trhliny pomocí energetických principů, tj. trhlina se bude šířit nestabilně, jakmile změna deformační energie překročí kritickou mez – povrchovou energii materiálu. Upozornil tím na nebezpečí trhlin jakožto koncentrátorů napětí. Proto v té době byla snaha konstruktérů o jejich odstranění leštěním povrchu kovů. Na základě těchto poznatků vznikl například letoun *Boeing 247*. Griffith si za model ideálně křehkého materiálu zvolil sklo, proto jeho teorie byla problematicky aplikovatelná na kovové materiály vykazující plastické chování.

Zásadní zlom v postoji konstruktérů k problému šíření trhlin způsobil fenomén druhé světové války, loď třídy *Liberty*. Tato plavidla byla vyvinuta pro transport zásob pro podporu Anglie přes Atlantský oceán. Místo klasické metody spojování nýty bylo zvoleno svařování, tehdy neozkoušená metoda. Byla ovšem velice efektivní a umožňovala rychlou výrobu velkého množství lodí. V průběhu provozu těchto lodí se u téměř 1500 případů vyskytl případ poškození křehkým lomem, 12 plavidel se dokonce bez jakéhokoliv varování rozlomilo v polovině, jak je vidět na Obr. 1. Američanka Constance Tipper objevila, že trhliny nebyly způsobeny svařováním, ale použitou ocelí, která se vyznačovala tzv. *tranzitním chováním*. Studené vody oceánu způsobily, že houževnaté chování oceli přešlo na křehké a trhlina tak měla snazší podmínky k iniciaci a šíření. Svary, na rozdíl od děr pro nýty, umožnily hladký průchod trhliny, jež pak byla schopna urazit větší vzdálenosti a způsobit destruktivní lom.

Na konci čtyřicátých let a v průběhu let padesátých se stala kvůli novým materiálům a technologiím Griffithova teorie obtížně použitelná. Tyto nedostatky vyřešil roku 1957 G. R. Irwin, který přechází z globálního na lokální popis napjatosti v součásti. Definuje matematický vztah, kterým je popsáno rozložení napětí v okolí čela trhliny, a uvažuje plastické vlastnosti materiálu. Zavádí novou materiálovou charakteristiku – faktor intenzity napětí, jenž



Obr. 3: Boeing 737-297 s odlomenou horní částí trupu. Trhlina se iniciovala vedle dveří za kabinou letounu.

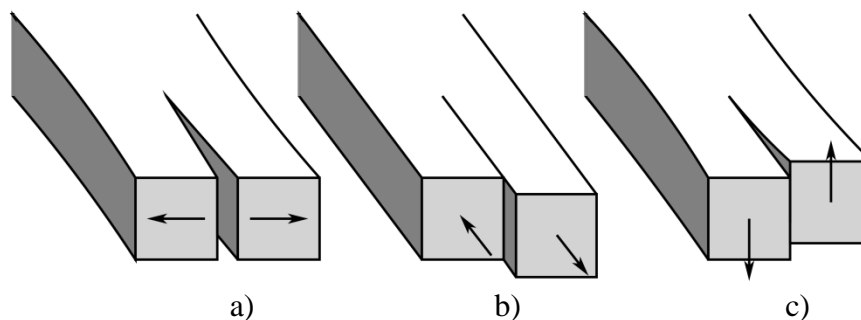
je nutnou podmínkou pro výpočet složek napětí v okolí trhliny. Do svých výpočtů zahrnuje veličiny zavedené Griffithem.

Lomová mechanika hraje důležitou roli v letectví, neboť tam jsou kladeny největší nároky na pevnostní vlastnosti konstrukce umocněné požadavkem minimální hmotnosti. Ani v době Irwinovy éry tomu nebylo jinak, o čemž svědčí havárie letadel *Comet* britské firmy *de Havilland*, jež se staly dalším mezníkem ve vývoji lomové mechaniky. Nehody byly způsobeny trhlinou, která vznikla v rohu oken (Obr. 2) vlivem cyklického namáhání přetlakové kabiny. Trhliny vznikaly také v dírách pro nýty, kterými se upevňovalo plátování k draku. Tyto prvky působily jako koncentrátoři napětí. Tehdejší znalosti neumožňovali výpočet kritické délky trhliny při cyklickém namáhání, pro překročení této hodnoty způsobilo její nestabilní šíření a tedy i rozlomení letounu.

Podobné havárie se objevily v budoucnu ještě několikrát. Na jejich základě byly rozšířeny poznatky o konstrukci letadel a zavedení důkladných inspekčních kontrol komponent letounu. Například nenavrhovat hranatá okna a obecně tvary s malým poloměrem zaoblení, které působí jako koncentrátoři napětí. Dále nedělat díry, když to není bezpodmínečně nutné. U moderních letadel se místo nýtů používají lepené spoje. Pro posouzení nebezpečných míst se aplikuje moderní metoda konečných prvků. Je jasné, že trhlina se nelze vyhnout, ovšem drak letadla je možné z hlediska lomu vypočítat tak, že trhlina se iniciuje v méně nebezpečném směru a navíc je objevena při kontrole ještě dřív, než dosáhne své kritické délky.

Další nebezpečí vyvstalo v podobě únavového namáhání. Lom nemusí nastat jen při překročení kritického lomového napětí, ale i při cyklickém zatěžování napětím menším. Objevuje se nový problém, kterým se v padesátých letech dvacátého století zabývali inženýři *L. F. Coffin* a *S. S. Manson*. Definovali podmínky růstu trhliny při uvažování plastické deformace na jejím čele. Cyklické zatěžování může být realizováno například kompresí a dekompresí kabiny letadla. Ta musí být při letu natlakovaná, protože v letových hladinách je tlak nižší než na zemi. Vlivem únavového porušení se stala v květnu 1988 nehoda *Letu 243 Aloha Airlines* do Honolulu. Při vyšetřování bylo zjištěno, že trhlina se iniciovala napravo od předních dveří. Při kompresi vnitřního prostoru dosáhla své kritické délky a způsobila odlomení jedné třetiny střechy, viz Obr. 3. Naštěstí piloti byli schopni přistát, protože k nehodě došlo v poměrně malé výšce. Zjistili také, že trhlina byla vystavena korozi. Havajská letecká společnost provedla rozsáhlé vyšetřování a zjistila, že na vině byl lidský faktor; došlo k zanedbání analýz trhlin. Nastal vývoj nových postupů, aby k podobným katastrofám nedocházelo.

V současné době se klade důraz mimo mechanických vlastností a hmotnosti také na cenu materiálů. Nové materiály, jako jsou plasty a především kompozitní materiály, nacházejí



Obr. 4: Módy zatěžování trhliny. a) Rozevírání. b) Smyk. c) Střih.

uplatnění v různých oblastech, jako je letecký a automobilní průmysl nebo medicína. S tím přicházejí i nové problémy. Dokážou snést větší zatížení, ovšem jejich chování se odlišuje od chování kovů, a proto je nutné vytvořit nové aplikovatelné modely lomové mechaniky. Nejjednodušším modelem kompozitního materiálu je model dvou ideálně spojených materiálů – bimateriál, který obsahuje koncentrátor typu vrub. Předkládaná práce se zabývá určením tzv. *exponentu singularity napětí* δ dosahujícího kritických hodnot ve vrcholu vrubu a jemu odpovídajících funkcí tvořících bázi tzv. *Williamsova rozvoje* [3, 1]. Tyto členy vystupují ve vztahu pro popis rozložení napětí v okolí bimateriálového vrubu.

2. Základní pojmy lomové mechaniky

2.1. Lineárně elastická lomová mechanika trhliny

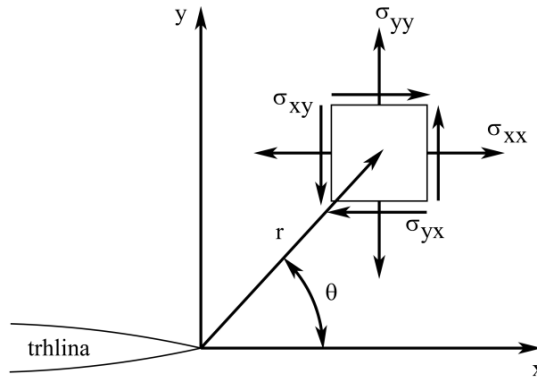
Teorie lomové mechaniky je založena na posuzování napjatosti a mezního stavu stability trhliny. Abychom mohli popsat rozložení napětí v okolí bimateriálového vrubu, je nutné vycházet z pojmů, které popisují vlastnosti trhliny, protože mechanismus lomu se realizuje vždy nestabilním šířením trhliny. Vztahy odvozené pro trhlínu lze pak pro vrub zobecnit.

Lineárně elastická lomová mechanika (LELM) je použitelná, předpokládáme-li mezi napětím a deformací lineární závislost, tj. platí Hookeův zákon. Setkáváme se v ní s dvěma přístupy posouzení trhliny. Prvním je Griffithův princip energetické bilance, druhým je Irwinův přístup intenzity napětí (K-koncepce) [11], jež právě poskytuje základ pro zobecnění na koncentrátory napětí typu vrub.

2.2. Módy zatěžování

Existují tři módy [3], jimiž může být trhlina namáhána. Tyto módy byly zavedeny Irwinem (1960) a hrají důležitou roli v analýze trhlín a lomů.

- Mód I se označuje jako rozevírací, dochází k rozevírání trhliny (z anglického „opening mode“). Napětí působí kolmo na rovinu trhliny (Obr. 4a).
- Mód II způsobuje smyková napětí, která jsou rovnoběžná s rovinou trhliny a kolmá na její čelo. Nazýváme ho smyk (v angličtině „in-plane shearing“) (Obr. 4b).
- Mód III vyvolává smyková napětí rovnoběžná jak s rovinou, tak s čelem trhliny. Z hlediska mechanismu je označován jako střih (v anglické literatuře „anti-plane shearing“) (Obr. 4c).



Obr. 5: Souřadnicový systém s počátkem v kořeni trhliny. Poloha elementu je určena polárními souřadnicemi (r, θ) .

2.3. Napjatost v okolí trhliny

Reálná trhlina může být namáhána kombinací libovolných módů. Výslednou napjatost a deformaci pak dostaneme superpozicí jednotlivých složek napětí

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=I,II,III} \frac{K_k}{\sqrt{2\pi r}} f_{ijk}(\theta), \quad (1)$$

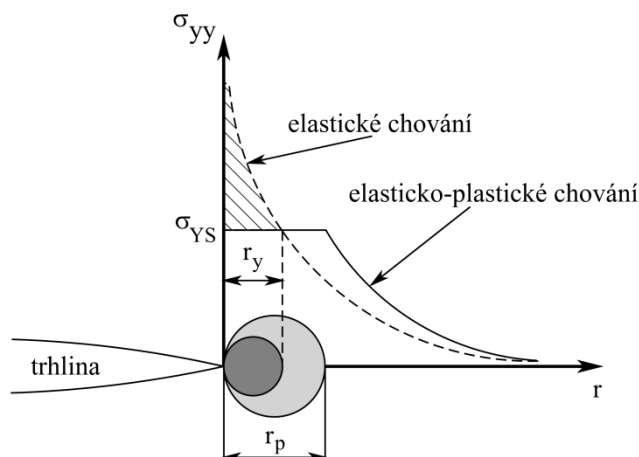
kde K_k značí faktor intenzity napětí ($k = I, II, III$ určuje mód namáhání) a f_{ijk} je bezrozměrná funkce závisající pouze na úhlu θ (Obr. 5). Vztah (1) popisuje rozložení napjatosti v okolí trhliny v homogenním materiálu [8]. Budeme-li uvažovat pouze zatěžování módem I , jenž je z hlediska šíření trhliny nejnebezpečnější, bude mít rovnice (1) tvar

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos^3 \frac{\theta}{2}, \\ \sigma_{r\theta} = \tau_{r\theta} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}, \end{aligned} \quad (2)$$

kde K_I je faktor intenzity napětí při módu zatěžování I [3]. Rovnice (1) je výsledkem Irwinovy dlouholeté práce a poskytuje základ pro pozdější zobecnění na bimateriálový vrub. Řešení obsahuje člen $\frac{1}{\sqrt{r}}$, který pro $r \rightarrow 0$ roste nade všechny meze a určuje oblast dominantní singularity v okolí trhliny způsobující v něm velkou koncentraci napětí.

2.4. Plastická zóna

Reálné materiály vykazující plastické chování (kovy, plasty atd.) nejsou schopné se elasticky deformovat napětími, která predikuje LELM v oblasti singularity. Navíc poloměr zaoblení kořene trhliny je konečné číslo, tak i napětí musí být konečná. Proto po překročení meze kluzu se začne materiál nepružně deformovat a dochází k relaxaci napětí. Oblast, kde dochází k plastické deformaci, se nazývá *plastická zóna*. Čím je zóna větší, tím nepřesnější je



Obr. 6: Plastická zóna o velikosti r_p před čelem trhliny. Oblast o poloměru r_y představuje hranici mezi elastickou a plastickou deformací tělesa s ideálním elastickým chováním.

výpočet napětí. Aby byla LELM dostatečně aplikovatelná, musí být, po zavedení drobných korekcí, velikost plastického přetvoření v okolí kořene malého rozsahu [1]. Například [8] uvádí, že plastická zóna nesmí přesáhnout 2% tloušťky tělesa.

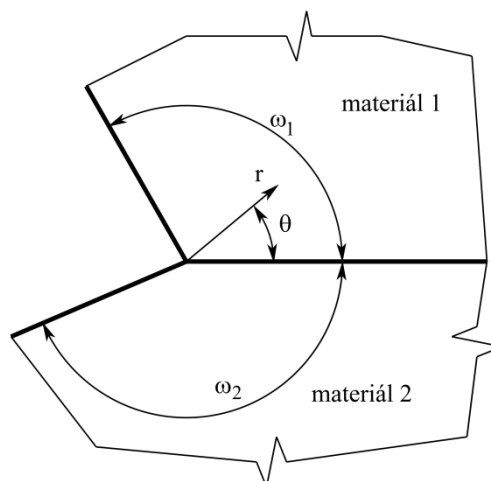
Průsečík závislosti (1) a přímky konstantní meze kluzu σ_{YS} určuje poloměr hranice mezi elastickým a plastickým chováním r_y . Toto určení plastické oblasti vycházející z elastického řešení není přesné. Nerespektuje totiž elasticko-plastické chování materiálů. Vyšrafovaná oblast v Obr. 6 odpovídá elastické energii, která se musí přerozdělit pro vznik plastické deformace. Aby mohla být tato energie absorbována, musí se plastická zóna zvětšit na hodnotu r_p , která se nazývá *poloměr plastické zóny*. Pro rozsáhlou plastickou oblast se chování materiálu stává nelineární a je nutné použít jinou koncepci, například elasticko-plastickou lomovou mechaniku.

3. Zobecnění na problém singularity typu vrub

3.1. Obecný singulární koncentrátor napětí

Obecný singulární koncentrátor napětí je prvek tělesa, který způsobuje koncentraci napětí. Můžeme si ho představit jako obecný vrub z jednoho nebo více materiálů, tvarové změny, díry atd. Speciálním případem je bimateriálový vrub, jehož existence je spojena s geometrickými a materiálovými nespojitostmi. Obecná konfigurace takového vrubu je na Obr. 7. Jeho geometrie je dána úhly ω_1 , ω_2 a materiálové charakteristiky odpovídající materiálu 1 a 2 jsou určeny Youngovými moduly E_1 , E_2 a Poissonovými konstantami ν_1 , ν_2 [6].

Materiál, jehož vlastnosti jsou v různých směrech různé, nazýváme *anizotropní* a je popsán 21 *nezávislými elastickými koeficienty*. Je-li těleso elasticky symetrické vzhledem k určitým rovinám nebo směrům, počet elastických konstant se redukuje. Pro případ symetrie na sebe kolmých os x , y , příp. z , hovoříme o *ortotropním* materiálu, jenž je popsán pomocí 9 *nezávislých elastických konstant*. V případě *izotropního* materiálu, který má ve všech směrech stejné vlastnosti, klesá počet *nezávislých elastických konstant* na 2 – Poissonovu konstantu ν a Youngův modul pružnosti E [2]. Předkládaná práce se zabývá ortotropními materiály. Tvary matic elastických konstant jsou k nalezení v dodatku. Modul pružnosti ve smyku G je závislá elastická konstanta, kterou lze vypočítat z E a ν [8].



Obr. 7: Bimateriálový vrub charakterizovaný úhly ω_1 a ω_2 , materiály 1 a 2 a polárním souřadnicovým systémem s počátkem v kořeni vrubu.

3.2. Rozdělení napětí v okolí obecného singulárního koncentrátoru napětí

Rozložení napětí v okolí obecného singulárního koncentrátoru napětí se liší od napěťového pole trhliny v homogenním materiálu. Z hlediska singularity je napětí v jeho okolí obecně vyjádřeno vztahem

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{H_k}{\sqrt{2\pi}} r^{(\delta_k-1)} F_{ijk}, \quad (3)$$

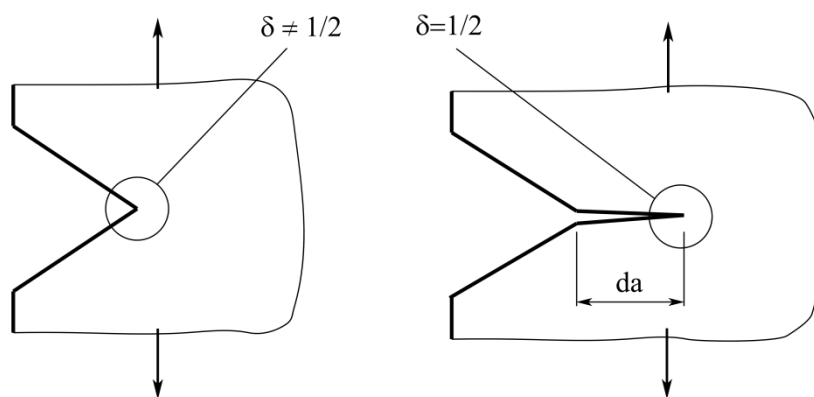
kde n je počet odpovídajících singulárních členů. H_k představuje zobecněný faktor intenzity napětí. Indexy (i, j) značí polární souřadnice (r, θ) s počátkem v kořeni koncentrátoru, funkce F_{ijk} je výsledkem limitního analytického řešení problému a závisí na úhlu θ , geometrii koncentrátoru a použitém materiálu. Hodnota δ se nazývá exponent singularity napětí a je závislá na konkrétních okrajových podmínkách a konfiguraci koncentrátoru (geometrie, materiál, úhel θ) [7].

Exponent singularity napětí zobecňuje první člen Irwinova vztahu (1) pro napjatost v okolí čela trhliny a říká tedy, že trhlina v homogenním materiálu je speciální případ obecného singulárního koncentrátoru napětí s exponentem singularity $\delta = 1/2$ a faktorem intenzity napětí K_i , kde $i = I, II, III$ odpovídá módu zatěžování. Obecně pak pro vruby δ nabývá hodnot z intervalu $(0; 1)$.

3.3. Aplikace na bimateriálový vrub

Z předchozího výkladu vyplývá, že bimateriálový vrub složený z dvou ortotropních materiálů považujeme za speciální případ obecného singulárního koncentrátoru napětí, a lze ho tedy modelovat pomocí zmíněných matematických vztahů. Ideální bimateriálový vrub má ostrý kořen (poloměr zaoblení se blíží nule), mezi oběma materiály, které ho tvoří, je skoková změna materiálových vlastností a na jejich rozhraní je ideální adheze. Geometrie vrubu je na Obr. 7.

Pro vrub je počet singulárních členů v rovnici (3) roven $n = 2$, přičemž každý z nich představuje kombinovaný mód namáhání. Zobecněné faktory intenzity proto značíme H_1 a H_2



Obr. 8: Skoková změna exponentu singularity při iniciaci trhliny v kořeni vrubu. Vlevo je vrub s exponentem singularity různým od $1/2$. Vpravo se z kořene vrubu začala šířit trhlina, tudíž exponent singularity $\delta = 1/2$ a podmínky stability jsou dány vztahy odvozenými pro trhlinu.

a odpovídají danému exponentu singularity. Exponent singularity nabývá komplexních hodnot, přičemž pro jeho reálnou hodnotu platí [9]:

- $\delta > 0$ (deformační energie je kladná)
- $\delta < 1$ (napětí má singulární charakter).

Shrneme-li obě podmínky dohromady, reálná část exponentu singularity musí splňovat inkluzi $\text{Re}(\delta) \in (0; 1)$.

3.4. Iniclace trhliny

Irwinova koncepce lineárně elastické lomové mechaniky říká, že trhlina v homogenním materiálu se nezačne nestabilně šířit, pokud hodnota faktoru intenzity napětí K_I (uvažujeme namáhání módem I) nepřesáhne hodnotu lomové houževnatosti K_{IC} . Mezní stav šíření trhliny také může nastat při únavovém zatěžování za podmínky $K_I < K_{IC}$. Podmínky stability pak charakterizuje rozkmit faktoru intenzity napětí ΔK a trhlina se šíří, pokud je jeho hodnota větší než prahová hodnota rozkmitu faktoru intenzity napětí ΔK_{th} .

Uvažujme, že na trhlinu působí aplikované napětí σ_{appl} . Podmínky, za kterých se trhlina nebude šířit, jsou vyjádřeny ve tvaru

$$K_I(\sigma_{appl}) < K_{Icrit}(M), \quad (4)$$

kde K_{Icrit} kritická materiálová charakteristika závisící na mechanismu šíření trhliny (např. lomová houževnatost K_{IC} u křehkého mechanismu lomu nebo ΔK_{th} u únavového porušení). Známe-li tuto kritickou hodnotu, můžeme odhadnout kritické aplikované napětí σ_{crit} a podmínka, kdy se trhlina nebude šířit, získá tvar

$$\sigma_{appl} < \sigma_{crit}. \quad (5)$$

Podobně lze stejným způsobem odvodit podmínky stability bimateriálového vrubu. Místo, kde se bude iniciovat trhlina, je okolí kořene koncentrátoru (Obr. 8), neboť podle analytických vztahů [11] pro poloměr zaoblení $r \rightarrow 0$ se napětí blíží nekonečnu. Reálně to ovšem není možné, protože v okolí kořene existuje plastická oblast, kde dochází k relaxaci napětí.

Kritické lomové napětí pak závisí na okrajových podmínkách, na typu zatěžování (únava, creep atd.), konfiguraci a materiálu vrubu. Při určování kritického aplikovaného napětí σ_{crit} předpokládáme, že mechanismus šíření trhliny materiálem z kořene vrubu je stejný jako mechanismus šíření trhliny v homogenním materiálu a je dán odpovídajícím parametrem $K_{Icrit}(M)$, to znamená

$$\sigma_{crit} = \sigma_{crit} [K_{Icrit}(M)]. \quad (6)$$

Tak jako bylo možné u trhliny stanovit stabilitu pomocí kritické hodnoty faktoru intenzity napětí, pro danou geometrii a materiálové kombinace lze kritické napětí bimateriálového vrubu vyjádřit jako funkci zobecněného faktoru intenzity napětí $H_{kcrit}(M)$. Podmínka stability je dána nerovností

$$H_{k(\sigma_{appl})} < H_{kcrit}(M), \quad (7)$$

kde $H_{kcrit}(M)$ je kritická hodnota zobecněného faktoru intenzity napětí. Hodnoty zobecněného faktoru intenzity napětí H_k můžou být numericky odhadnuty jako funkce aplikovaného napětí σ_{appl} , tzn. $H_k = H_k(\sigma_{appl})$. Podmínka stability pak má tvar daný vztahem (5) [7]. Je tedy zřejmé, že mezi $K_{Icrit}(M)$ a $H_{kcrit}(M)$ je určitý vztah, jenž říká, že mezní stav šíření trhliny je u trhliny a vrubu řízen stejnou proměnnou.

4. Numericko-analytický algoritmus pro určení exponentu singularity

4.1. Napětí a posuvy v okolí koncentrátoru typu vrub

V druhé polovině minulého století byla formulována teorie *rovinné anizotropní pružnosti*, která byla vystavěna na vlastnostech *funkcí komplexní proměnné*, viz např. [10]. Tato teorie je nazvána podle jmen autorů jako tzv. *Lechnicky-Eshelby-Strohův formalismus* (LES formalismus). Existují dva důvody využití charakteristických vlastností funkcí komplexní proměnné. Prvním je, že diferencovanost v oboru komplexních čísel je ekvivalentem *harmoničnosti*, tzn., jestliže má funkce v komplexním oboru derivaci (teorie komplexních čísel takové funkce označuje *analytické*), splňuje automaticky tzv. *biharmonickou* rovnici a tudíž může být použita jako *Airyho funkce napětí*. Druhým důvodem použití komplexního oboru je zjednodušení popisu elastických vlastností materiálu, které jsou v LES formalismu popsány pouze třemi konstantami, tzv. *charakteristickými (vlastními) čísly* daného materiálu. Jejich počet lze dále redukovat zvyšováním počtu rovin symetrie daného materiálu, kdy v případě ortotropního materiálu se počet jeho vlastních čísel redukuje na dvě a jejich absolutní hodnoty se určují podle následujících vztahů

$$\mu_1 = \lambda^{-\frac{1}{4}}(n + m), \quad \mu_2 = \lambda^{-\frac{1}{4}}(n - m) \quad \text{pro } 1 < \rho < \infty, \quad (8)$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \lambda^{-\frac{1}{4}}\sqrt{n^2 + m^2} \quad \text{pro } -1 < \rho < 1, \quad (9)$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \lambda^{-\frac{1}{4}} \quad \text{pro } \rho = 1, \quad (10)$$

kde

$$\lambda = \frac{s_{11}}{s_{22}}, \rho = \frac{2s_{12} + s_{66}}{2\sqrt{s_{11}s_{22}}}, n = \sqrt{\frac{1+\rho}{2}}, m = \sqrt{\left|\frac{1-\rho}{2}\right|} \quad (11)$$

a s_{11} , s_{12} , s_{22} a s_{66} jsou prvky *matice poddajnosti*. V dalším textu budeme uvažovat pouze případ materiálu (8) a (10), tj. když $1 \leq \rho < \infty$. Pro posuvy u_x , u_y a složky tenzoru napětí σ_{xx} , σ_{yy} a σ_{xy} platí následující vztahy

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= -2(s_{11}\mu_1^2 - s_{12})f_{11}(x, \mu_1 y) - 2(s_{11}\mu_2^2 - s_{12})f_{21}(x, \mu_2 y), \\ u_y(x, y) &= -2\left(s_{12}\mu_1 - \frac{s_{22}}{\mu_1}\right)f_{12}(x, \mu_1 y) - 2\left(s_{12}\mu_2 - \frac{s_{22}}{\mu_2}\right)f_{22}(x, \mu_2 y), \\ \sigma_{xx}(x, y) &= -2\mu_1^2 \frac{\partial f_{11}}{\partial x}(x, \mu_1 y) - 2\mu_2^2 \frac{\partial f_{21}}{\partial x}(x, \mu_2 y), \\ \sigma_{yy}(x, y) &= 2 \frac{\partial f_{11}}{\partial x}(x, \mu_1 y) + 2 \frac{\partial f_{21}}{\partial x}(x, \mu_2 y), \\ \sigma_{xy}(x, y) &= \sigma_{yx}(x, y) = 2\mu_1 \frac{\partial f_{12}}{\partial x}(x, \mu_1 y) + 2\mu_2 \frac{\partial f_{22}}{\partial x}(x, \mu_2 y), \end{aligned} \quad (12)$$

kde μ_1 a μ_2 jsou výše definované absolutní hodnoty charakteristických čísel materiálu. Funkce $f_{11}(x, y)$, $f_{12}(x, y)$, $f_{21}(x, y)$ a $f_{22}(x, y)$ jsou v podstatě libovolné a určují se na základě okrajových podmínek, přičemž musí splňovat *Cauchy-Riemannovy rovnice*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{11}(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial f_{12}(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_{11}(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial f_{12}(x, y)}{\partial x}, \\ \frac{\partial f_{21}(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial f_{22}(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_{21}(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial f_{22}(x, y)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (13)$$

Místo vztahů v (12) pro napětí je výhodnější pracovat s vektorem funkce napětí $\phi = (\varphi_x, \varphi_y)$, jehož souřadnice jsou vyjádřeny rovnicemi

$$\begin{aligned} \varphi_x(x, y) &= 2\mu_1 f_{12}(x, \mu_1 y) + 2\mu_2 f_{22}(x, \mu_2 y), \\ \varphi_y(x, y) &= 2f_{11}(x, \mu_1 y) + 2f_{21}(x, \mu_2 y). \end{aligned} \quad (14)$$

Derivováním těchto souřadnic lze pak napětí vyjádřit pomocí vztahů

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x, y) &= -\frac{\partial \varphi_x(x, y)}{\partial y}, \\ \sigma_{yy}(x, y) &= \frac{\partial \varphi_y(x, y)}{\partial x}, \\ \sigma_{xy}(x, y) &= \sigma_{yx}(x, y) = -\frac{\partial \varphi_y(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_x(x, y)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (15)$$

Kromě složek tenzoru napětí lze pomocí funkce napětí (14) lze vyjádřit vektor výsledné síly $\mathbf{T} = (T_x, T_y)$ působící podél určité křivky. Například pro složky vektoru výsledné síly podél polopřímky vycházející z počátku souřadnicového systému a procházející bodem $[x, y]$, za předpokladu $\varphi_x(x, y) = \varphi_y(x, y) = 0$ pro $[x, y] \rightarrow \infty$, platí

$$\begin{aligned} T_x &= \varphi_x(x, y)|_{(x,y) \rightarrow \infty} - \varphi_x(x, y) = -\varphi_x(x, y) = -2\mu_1 f_{12}(x, \mu_1 y) - 2\mu_2 f_{22}(x, \mu_2 y), \\ T_y &= \varphi_y(x, y)|_{(x,y) \rightarrow \infty} - \varphi_y(x, y) = -\varphi_y(x, y) = -2f_{11}(x, \mu_1 y) - 2f_{21}(x, \mu_2 y). \end{aligned} \quad (16)$$

Jak již bylo v předchozím textu uvedeno, k popisu posuvů a napětí v okolí koncentrátoru typu vrub je vhodné zavést polární souřadnice, jejichž transformační vztahy z kartézských souřadnic jsou

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta, \end{aligned} \quad (17)$$

kde r je radiusvektor a θ je úhel, který svírá s kladnou osou x . Napětí se pak vyjádří ve složkách radiálního a tečného směru za pomoci vektoru (16) jako

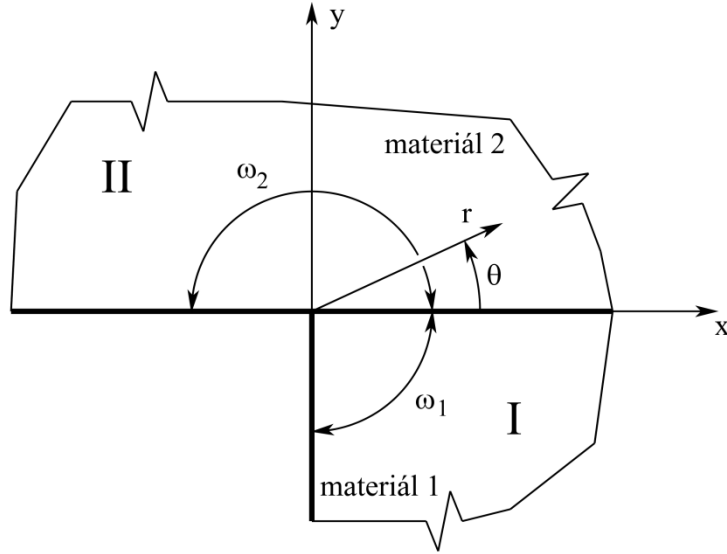
$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi_x(r, \theta)}{\partial \theta} \cos \theta + \frac{\partial \varphi_y(r, \theta)}{\partial \theta} \sin \theta \right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= -\frac{\partial \varphi_x(r, \theta)}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \varphi_y(r, \theta)}{\partial r} \cos \theta, \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{\partial \varphi_x(r, \theta)}{\partial r} \cos \theta + \frac{\partial \varphi_y(r, \theta)}{\partial r} \sin \theta = \\ &= -\frac{1}{r} \left(-\frac{\partial \varphi_x(r, \theta)}{\partial \theta} \sin \theta + \frac{\partial \varphi_y(r, \theta)}{\partial \theta} \cos \theta \right). \end{aligned} \quad (18)$$

4.2. Určení komplexních potenciálů f

Pro případ vrubu se funkce $f_{11}(x, y)$, $f_{12}(x, y)$, $f_{21}(x, y)$ a $f_{22}(x, y)$ hledají ve tvaru

$$\begin{aligned} f_{11}(x, \mu_1 y) &= Hr^\delta R_1^\delta (v_{11} \cos(\delta\Psi_1) - v_{12} \sin(\delta\Psi_1)), \\ f_{12}(x, \mu_1 y) &= Hr^\delta R_1^\delta (v_{11} \sin(\delta\Psi_1) + v_{12} \cos(\delta\Psi_1)), \\ f_{21}(x, \mu_2 y) &= Hr^\delta R_2^\delta (v_{21} \cos(\delta\Psi_2) - v_{22} \sin(\delta\Psi_2)), \\ f_{22}(x, \mu_2 y) &= Hr^\delta R_2^\delta (v_{21} \sin(\delta\Psi_2) + v_{22} \cos(\delta\Psi_2)), \end{aligned} \quad (19)$$

kde H je zobecněný faktor intenzity napětí a δ je exponent singularity, přičemž bereme v úvahu pouze jeho reálnou hodnotu. Veličiny $\mathbf{v}_1 = (v_{11}, v_{12})$ a $\mathbf{v}_2 = (v_{21}, v_{22})$ jsou tzv. vlastní vektory odpovídající danému exponentu singularity δ . Pro parametry R_i a Ψ_i , kde $i = 1, 2$, platí



Obr. 9: Konfigurace bimateriálového vrubu pro výpočet exponentu singularity a kartézských a polárních souřadnicích. Úhel $\omega_1 = 90^\circ$ a $\omega_2 = 180^\circ$, římská čísla I, II značí oblasti skokových změn materiálových charakteristik.

$$R_i^2 = (\cos\theta)^2 + (\mu_i \sin\theta)^2, \quad (i = 1, 2) \quad (20)$$

$$\psi_i = \begin{cases} 0 & \text{pro } \theta = 0, \\ \operatorname{arccotg}(\cos\theta/(\mu_i \sin\theta)) & \text{pro } \theta \in (0, \pi), \\ \operatorname{arccotg}(\cos\theta/(\mu_i \sin\theta)) - \pi & \text{pro } \theta \in (-\pi, 0), \\ -\pi & \text{pro } \theta = -\pi. \end{cases} \quad (i = 1, 2) \quad (21)$$

4.3. Okrajové podmínky a výpočet exponentu singularity

Uvažujme konfiguraci vrubu podle Obr. 9. Potom můžeme předepsat okrajové podmínky a podmínky spojitosti napětí a posuvů následovně:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^I &= 0 & \text{pro } \theta = -\pi/2, \\ \mathbf{T}^I - \mathbf{T}^{II} &= 0 & \text{pro } \theta = 0, \\ \mathbf{u}^I - \mathbf{u}^{II} &= 0 & \text{pro } \theta = 0, \\ \mathbf{T}^{II} &= 0 & \text{pro } \theta = \pi, \end{aligned} \quad (22)$$

kde indexy I, II značí jednotlivé oblasti materiálů (viz Obr. 9). Okrajové podmínky (22) představují systém osmi homogenních algebraických rovnic pro neznámé vektory $\mathbf{v}_1^I, \mathbf{v}_2^I, \mathbf{v}_1^{II}, \mathbf{v}_2^{II}$ funkcí (19) definovaných na oblastech I, II. Tuto soustavu můžeme zapsat symbolicky pomocí maticového zápisu jako

$$\mathbf{A}(\delta)\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (23)$$

kde \mathbf{A} je matice soustavy, jejíž prvky jsou funkcí exponentu singularity δ , a $\mathbf{v} = [\mathbf{v}_1^I, \mathbf{v}_2^I, \mathbf{v}_1^{II}, \mathbf{v}_2^{II}]^T$. Aby soustava (23) měla nenulové řešení, musí platit

$$\det(\mathbf{A}(\delta)) = 0. \quad (24)$$

Řešením rovnice (24) je neznámý exponent singularity δ , jenž můžeme chápat jako vlastní číslo matice \mathbf{A} , tudíž je rovnice (24) charakteristická dané konfigurace bimateriálového rozhraní a vektory $\mathbf{v}_1^I, \mathbf{v}_2^I, \mathbf{v}_1^{II}, \mathbf{v}_2^{II}$ jsou vlastní vektory odpovídající exponentu δ , které se dostanou ze soustavy rovnic (23) po zpětném dosazení exponentu singularity do matice \mathbf{A} .

5. Numerický příklad

Tato část pojednává o praktické aplikaci numericko-analytického algoritmu na danou konfiguraci bimateriálového vrubu složeného ze dvou ortotropních materiálů. K výpočtu exponentu singularity δ byl využit software *Maple 12* a program vyvinutý na Ústavu mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky.

5.1. Popis funkce programu

Na začátku výpočtu je nutné zadat materiálové a geometrické charakteristiky vrubu, tj.

- moduly pružnosti v tahu E_L, E_T , moduly pružnosti ve smyku G_L, G_T a Poissonovy konstanty ν_L, ν_T
- úhly ω_1 a ω_2 definující geometrii vrubu,

kde indexy L, T označují kartézský souřadnicový systém a indexy 1, 2 odpovídají jednotlivým materiálům. Uvažujme geometrii vrubu podle Obr. 9. Souřadnicovému systému (L, T) potom odpovídá systém (x, y) a pro materiálové charakteristiky platí

$$\begin{aligned} E_L &= E_x & \nu_L &= \nu_x & G_L &= G_x \\ E_T &= E_y & \nu_T &= \nu_y & G_T &= G_y. \end{aligned}$$

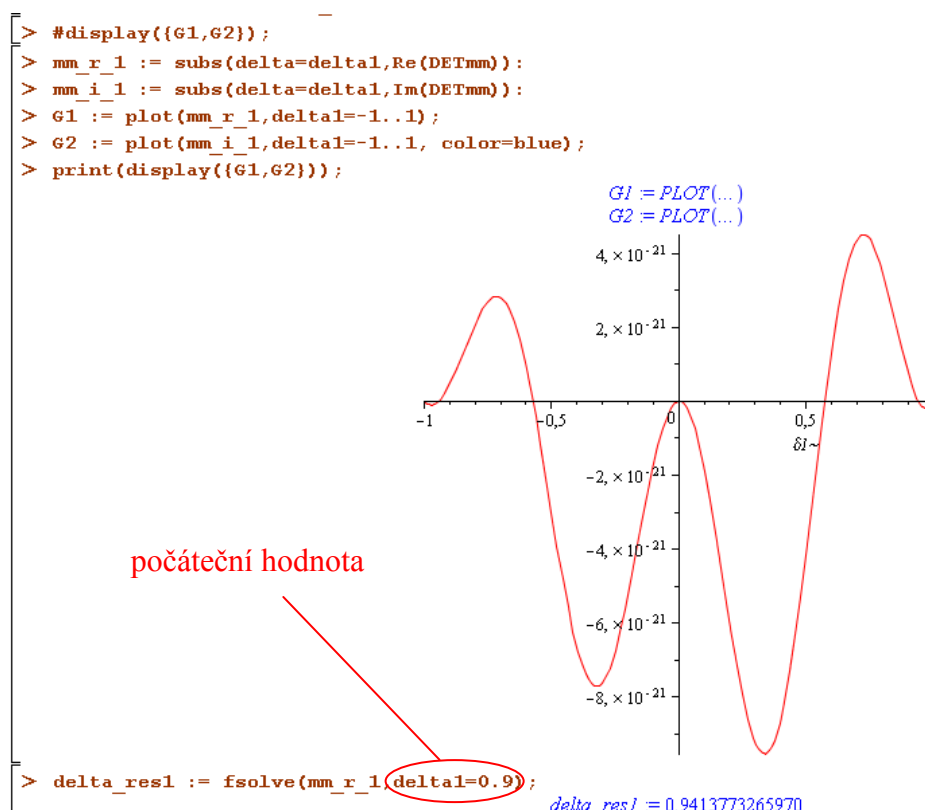
Výpočet je zahájen sestavením matic poddajnosti S_I a S_{II} pro jednotlivé materiály. Tyto matice jsou čtvercové, velikosti 6×6 a jejich obecný tvar pro ortotropní materiál je k nalezení v dodatku A. Toto platí pouze v případě rovinné napjatosti. Za podmínek rovinné deformace se prvky matice poddajnosti přepočítají podle vztahu

$$s'_{ij} = s_{ij} - \frac{s_{i3}s_{j3}}{s_{33}}, \quad (i, j = 1, 2, 6), \quad (25)$$

kde s'_{ij} jsou prvky přepočítané matice poddajnosti (podmínky rovinné deformace) a s_{ij} jsou prvky původní matice (podmínky rovinné napjatosti) [9].

Exponent singularity δ může mít obecně komplexní tvar, ale vzhledem k symetrii materiálových vlastností předpokládáme jeho reálné řešení. Následuje výpočet koeficientů podle rovnic (11), které jsou potřeba k sestavení vlastních čísel (8), (9), (10) pro jednotlivé exponenty singularity a materiály. Dále jsou sestaveny matice popisující ortotropii vzorku, geometrii a orientaci vrubu a pomocné matice zpřesňující numerický výpočet. Poté už je možné sestavit matici \mathbf{A} a rovnici (23). Výpočet exponentu singularity se provede podle vztahu (24). Řešení je zobrazeno na Obr. 10 jako průsečík křivky s kladnou osou δ , tzn., řešením jsou dva exponenty singularity δ_1 a δ_2 , což je v souladu s odstavcem 3.3, že počet singulárních členů je roven $n = 2$.

Průsečíky křivky se zápornou osou δ jsou pomocné exponenty $-\delta_1$ a $-\delta_2$ a slouží k určení zobecněného faktoru intenzity napětí.



Obr. 10: Určení exponentu singularity jako průsečíku křivky řešení s kladnou δ . Protože program používá Newtonovu numerickou iterační metodu tečen, je pro získání přesného nutné zadat počáteční hodnotu, v jejíž blízkosti křivka protíná osu (v našem případě $\delta=0,9$).

Program je doplněn o algoritmus pro určení a vykreslení posuvů a napětí a kód k vyexportování dat do souboru.

5.2. Výpočet exponentu singularity pro konkrétní konfiguraci

Je dána konfigurace vrubu podle Obr. 9, který je složen z ortotropní vrstvy (materiál 1) a ortotropního substrátu (materiál 2). Budeme počítat exponenty singularity pro různé kombinace materiálů. Ve výpočtech předpokládáme rovinnou deformaci. Geometrie vrubu je určena úhly $\omega_1 = 90^\circ$ a $\omega_2 = 180^\circ$. Pro materiálové charakteristiky uvedené v odstavci 5.1 pro jednotlivé materiály platí:

$$\begin{aligned} v_{x1} &= v_{x2} = 0,3 \\ v_{y1} &= v_{y2} = 0,3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{x1} &= G_{x2} = 30 \text{ GPa} \\ G_{y1} &= G_{y2} = 30 \text{ GPa}. \end{aligned}$$

V Tab. 1 jsou uvedeny kombinace materiálů, kdy ortotropní vrstvu (materiál 1) kombinujeme s pěti různými ortotropními substráty (materiál 2). Výpočet exponentů singularity je realizován v dolní části Tab. 1. Při výpočtu musí být splněny okrajové podmínky (22) a navíc musí pro rozhraní bimateriálu ($\theta = 0$) platit:

- posuvy u_x a u_y musí mít spojitý průběh

- výsledné síly působící po určité křivce T_x a T_y musí mít spojitý průběh
- napětí σ_{yy} a σ_{xy} musí mít spojitý průběh
- napětí ve směru normály volného povrchu vrubu musí být nulová.

Na rozhraní mají uvedené veličiny spojitý průběh a může se zde vyskytovat zlom, tzn., křivka nemusí být hladká. Napětí σ_{xx} nemá mít spojitý průběh, neboť průmět jeho směru do normály rozhraní je nulový; materiál musí mít určitý stupeň volnosti, jinak by nemohl z fyzikálního hlediska existovat.

materiál 1	E_{x1} [GPa]	100				
	E_{y1} [GPa]	50				
materiál 2	E_{x2} [GPa]	50	50	50	200	400
	E_{y2} [GPa]	400	200	100	50	50
δ_1		0,751	0,626	0,572	0,557	0,573
δ_2		0,929	0,927	0,911	0,926	0,941

Tab. 1: Výpočet exponentů singularity pro jednotlivé kombinace materiálů.

5.3. Vykreslení normovaných posuvů a napětí

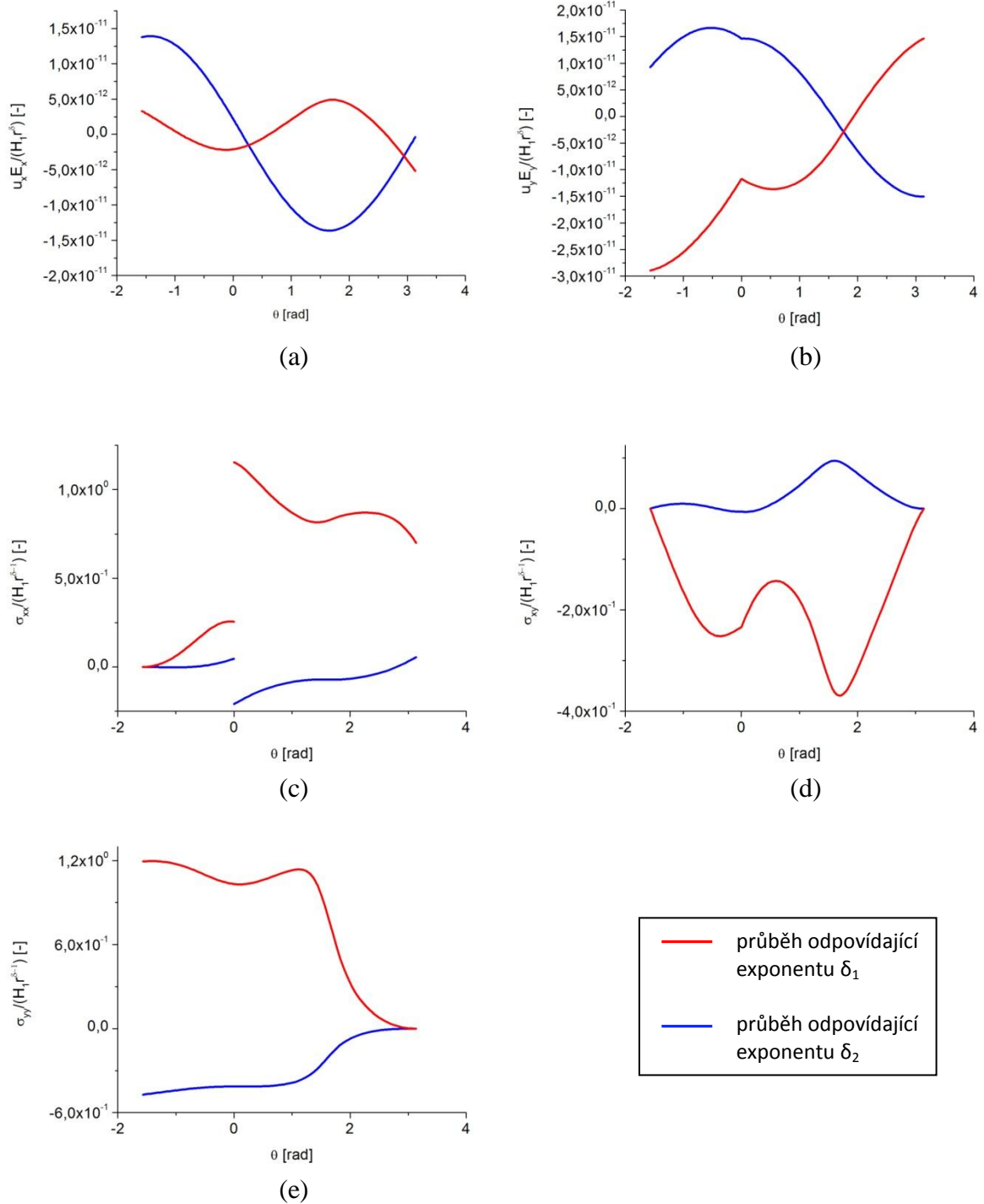
Normovaná napětí a posuvy vykreslíme pro první kombinaci bimateriálu, tj. $E_{x1} = 100 \text{ GPa}$, $E_{y1} = 50 \text{ GPa}$, $E_{x2} = 50 \text{ GPa}$, $E_{y2} = 400 \text{ GPa}$ (Obr. 11). Výsledná napětí a posuvy získáme superpozicí dílčích hodnot odpovídajících danému exponentu singularity. Z rovnice (3) víme, že napětí je úměrné členu $r^{\delta-1}$. Podle [5] víme, že napětí získáme derivací posuvů podle proměnné r , tedy

$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (26)$$

Posuv potom získáme integrací napětí podle r . Z toho vyplývá, že posuvy jsou úměrné členu r^{δ} , což odpovídá vztahům v [9] pro napjatost a posuvy.

V obrázku 11 vidíme, že jsou splněny všechny předpoklady správnosti řešení exponentu singularity, tj.:

- napětí σ_{xx} (Obr. 11c) je rovno nule v hodnotě $\theta = -\pi/2$, nespojitost nemá vliv na správnost řešení
- napětí σ_{xy} (Obr. 11d) je rovno nule v hodnotě $\theta = -\pi/2$ a v $\theta = \pi$ je spojitě
- napětí σ_{yy} (Obr. 11e) je rovno nule v hodnotě $\theta = \pi$ a je spojitě
- posuv u_x (Obr. 11a) je spojitě
- posuv u_y (Obr. 11b) je spojitě.



Obr. 11: Průběhy normovaných posuvů a napětí pro jednotlivé exponenty singularity a pro kombinaci materiálů $E_{x1} = 100$ GPa, $E_{y1} = 50$ GPa, $E_{x2} = 50$ GPa, $E_{y2} = 400$ GPa.

6. Závěr

Cílem práce bylo popsat rozložení napjatosti v okolí bimateriálového vrubu. Prvotní motivací pro mě byly zajímavosti týkající se vývoje letecké techniky, v níž právě lomová mechanika a obecně mezní stavy nachází velké uplatnění. Byla nastudována příslušná literatura, aby mohl být navržen matematický model.

Vycházíme z Irwinovy koncepce K-faktoru pro trhlinu v homogenním izotropním materiálu a snažíme se ukázat analogii mezi vztahy pro trhlinu a pro vrub. Byl popsán vznik plastické zóny na čele trhliny a vysloven předpoklad křehkého chování zkoumaného materiálu, to jest v případě, kdy má plastická zóna malé nebo zanedbatelné rozměry. V případě, že by neměla zanedbatelné rozměry, lineárně elastická lomová mechanika se stává nepoužitelnou.

Další kapitola pojednává o zobecnění Irwinova vztahu pro obecný singulární koncentrátor napětí. Rozložení napětí se řídí exponentem singularity δ , pro nějž musí být splněno $0 < \delta < 1$. Speciální případem obecného singulárního koncentrátoru je trhlinu v homogenním izotropním materiálu a její exponent singularity je roven $\delta = 1/2$.

Následující podkapitola se zabývá mezním stavem stability vrubu. Uvádíme, že trhlinu se nebude šířit, jestliže bude faktor intenzity napětí podle daného módu zatěžování menší než lomová houževnatost. Analogicky lze vyslovit podmínku stability vrubu, kdy zobecněný faktor intenzity napětí při daném aplikovaném zatížení musí být menší než kritická hodnota zobecněného faktoru intenzity napětí. Začne-li se z kořene vrubu šířit trhlinu, přejde exponent singularity na hodnotu $\delta = 1/2$ a mechanismus dalšího šíření je založen na analýze stability trhliny.

Dále byla navržena geometrie vrubu, který se skládá z dvou ortotropních materiálů. Matematický model byl nazván Lechnicky-Eshelby-Strohův formalismus. Dominantní roli hrají vlastní čísla materiálu, která vystupují ve vztazích pro komplexní potenciály, jejichž lineární kombinací je možné vyjádřit příslušné posuvy. Po předepsání okrajových podmínek spojitosti napětí a posuvů je možné sestavit matici, jejíž vlastní čísla jsou hledané exponenty singularity.

V poslední kapitole byl programem Maple 12 testován algoritmus, pomocí něhož byly vypočteny exponenty singularity a hodnoty vlastních vektorů vstupujících do tvarové funkce pro zvolené kombinace daného bimateriálu. Poté jsme pro vybranou kombinaci vykreslili normovaná napětí a posuvy pro jednotlivé vruby, kdy pro celkové posuvy a napětí platí princip superpozice.

V budoucnu by bylo možné algoritmus rozšířit o určení zobecněného faktoru intenzity napětí, odhad směru šíření iniciované trhliny a sestavení kritéria šíření trhliny.

7. Seznam veličin a symbolů

1, 2	indexy odpovídající materiálu 1 a 2
<i>I, II, III</i>	módy zatěžování
δ	exponent singularity napětí
ΔK	rozkmít faktoru intenzity napětí
θ	úhel polárních souřadnic
μ	vlastní číslo materiálu
σ_{appl}	aplikované napětí
σ_{crit}	kritické aplikované napětí
σ_{ij}	napětí v daném souřadném systému (i, j) pro $i = j$
σ_{YS}	mez kluzu
$\tau_{ij} (\sigma_{ij})$	smykové napětí v daném souřadném systému (i, j) pro $i \neq j$
ν	Poissonova konstanta
ϕ	vektor funkce napětí
ω	úhel geometrie vrubu
E	Youngův modul pružnosti v tahu
G	modul pružnosti ve smyku
H_k	zobecněný faktor intenzity napětí ($k = 1 \dots n$)
H_{krit}	kritická hodnota zobecněného faktoru intenzity napětí
K_{IC}	lomová houževnatost při módu zatěžování I
K_k	faktor intenzity napětí podle módu $k = I, II, III$
M	materiál
n	počet singulárních členů
r	obecný poloměr polárních souřadnic
r_p	poloměr plastické zóny

S	matice poddajnosti
s_{ij}	prvek matice poddajnosti ($i, j = 1 \dots 6$)
T	vektor výsledné síly působící podél určité křivky
u	vektor posuvů
v	vlastní vektor

8. Literatura

- [1] ANDERSON, T.L. *FRACTURE MECHANICS : Fundamentals and Applications*. Third edition. Boca Raton : CRC Press, 2005. 625 s. ISBN 0-8493-1656-1.
- [2] BRDIČKA, Miroslav; SAMEK, Ladislav; SOPKO, Bruno. *MECHANIKA KONTINUA*. Vydání 3. Praha : Academia, 2005. 799 s. ISBN 80-200-1344-X.
- [3] BROBERG, K. B. *CRACKS AND FRACTURE*. London : Academic Press, 1999. 753 s. ISBN 0-12-134130-5.
- [4] DLOUHÝ, Ivo. *Elastická deformace* [online]. 2010 [cit. 2010-05-02]. Podpora výuky - Skupina křehkého lomu ÚFM AV ČR. Dostupné z WWW: <<http://www.ipm.cz/group/fracture/vyuka/doc/P03.pdf>>.
- [5] JANÍČEK, Přemysl, et al. *MECHANIKA TĚLES : PRUŽNOST A PEVNOST I*. Třetí přepracované. Brno : AKADEMICKÉ NAKLADATELSTVÍ CERM, s.r.o., 2004. 287 s. ISBN 80-214-2592-X.
- [6] KLUSÁK, Jan; KNĚSL, Zdeněk; NÁHLÍK, Luboš. Crack initiation criteria for singular stress concentrations : Part II: Stability of Sharp and Bi-Material Notches. *Engineering MECHANICS*, 2007, roč. 14, č. 6, s. 409-422. ISSN 1802-1484.
- [7] KNĚSL, Zdeněk; KLUSÁK, Jan; NÁHLÍK, Luboš. Crack initiation criteria for singular stress concentrations : Part I: A Universal Assessment of Singular Stress Concentrations. *Engineering MECHANICS*, 2007, roč. 14, č. 6, s. 399-408. ISSN: 1802- 1484.
- [8] ONDRÁČEK, Emanuel, et al. *MECHANIKA TĚLES : PRUŽNOST A PEVNOST II*. 4. přepracované. Brno : AKADEMICKÉ NAKLADATELSTVÍ CERM, s.r.o., 2006. 262 s. ISBN 80-214-3260-8.
- [9] ŠEVEČEK, O.; PROFANT, T.; KOTOUL, M. Stress field analysis near the semi-infinite crack tip terminating to the interface between two orthotropic materials. In *Engineering Mechanics 2006. Nezařazené články*. První vyd. Svratka: Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague, 2006. s. 304-305. ISBN: 80-86246-27-2.
- [10] TING, T. C. T. *Anisotropic Elasticity : Theory and Applications*. New York : Oxford University Press, 1996. 571 s. ISBN 0-19-507447-5.
- [11] VLACH, Bohumil. *Základy lomové mechaniky* [online]. 2001 [cit. 2010-05-24]. Ústav Materiálových Věd a Inženýrství. Dostupné z WWW: <<http://ime.fme.vutbr.cz/files/vyuka/GS0/06%20-%20Lomova%20mechanika.doc>>.

Dodatek A

Matice elastických koeficientů

Obecný tvar Hookeova zákona pro anizotropní materiál v kartézském souřadnicovém systému (x, y, z) má tvar

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}, \quad (\text{A1})$$

kde \mathbf{S} s prvky s_{ij} ($i, j = 1, 2 \dots 6$) je matice elastických koeficientů pro anizotropní materiál, která je symetrická vzhledem k hlavní diagonále, což znamená, že má 21 nezávislých prvků. Pro ortotropní materiál má matice tvar

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xz}}{E_y} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{zx}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}. \quad (\text{A2})$$

Uvažujeme-li rovinný problém v rovině určené osami (x, y) , pak se matice redukuje na

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}. \quad (\text{A3})$$

V případě izotropního materiálu, který má ve všech směrech stejné vlastnosti, se počet nezávislých konstant redukuje na dvě [4], tj.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}. \quad (\text{A4})$$

Reálná funkce komplexní proměnné

Každé zobrazení $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá reálná funkce komplexní proměnné. Je to tedy zobrazení komplexní roviny z do reálných čísel r , tedy

$$r = f(z). \quad (\text{A5})$$

Lechnicky-Eshelby-Strohův formalismus

Sergej Georgievič Lechnicky

Profesor Lechnicky byl doktor fyzikálních a matematických věd, nositel Státní ceny. Působil jako vedoucí vědecký pracovník na poli teorie elasticity, především elasticity anizotropních těles. Graduoval roku 1931 na státní univerzitě v Leningradu, doktorský titul získal na stejné univerzitě v roce 1934. Mezi jeho práce patří knihy *Stabilita Anizotropních Desek*, *Teorie Elasticity Anizotropních Těles* a *Krut Anizotropních a Nehomogenních Tyčí*.

John Douglas Eshelby

Vystudoval Bristolskou Univerzitu, kde se ve své diplomové práci zabýval teorií elasticity. Poté pracoval na několika vědeckých postech. Na univerzitě v Cambridgi pracoval v laboratořích Cavendish. Profesor se stal na univerzitě v Sheffieldu. Byl oceněn Timošenkovou medailí v roce 1977. Na jeho počest se uděluje Eshelbyho výroční stipendium.

A. N. Stroh

Narodil se v Qeenstownu v JAR. Bakalářský titul získal roku 1945 a o dva roky později i magisterský v oboru fyziky a matematiky na Jihoafrické Univerzitě. Poté se přestěhoval do Anglie, kde pracoval pod vedením J. D. Eshelbyho na Bristolské Univerzitě. V roce 1953 získal titul Ph.D. V letech 1954 – 1958 pracoval jako vědecký pracovník a přednášel fyziku, než se přesunul na univerzitu MIT v Massachusetts, kde působil jako profesor v oboru mechaniky těles. Zemřel při cestě do nového zaměstnání ve výzkumných laboratořích firmy Boeing v Seattlu.

Harmoničnost

Diferencovanost v oboru komplexních čísel je ekvivalentem harmoničnosti, tzn., že každá funkce u je harmonická, je-li řešením *Laplaceovy rovnice*

$$\Delta u = 0, \quad (\text{A6})$$

kde Δ je Laplaceův operátor, který lze zapsat jako

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

kde x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) jsou nezávislé směry.

Biharmonická rovnice

Biharmonická rovnice je parciální diferenciální rovnice čtvrtého řádu. Její využití je především v mechanice kontinua a v aplikacích LELM. Zapisujeme ji jako

$$\Delta \Delta \Phi = 0, \quad (\text{A7})$$

kde Δ je Laplaceův operátor. V polárním souřadnicovém systému lze vztah (A7) rozepsat ve tvaru

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (\text{A8})$$