



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

VYHODNOCENÍ ÚSPĚŠNOSTI FILTRŮ PŘI SLEDOVÁNÍ CÍLŮ

COMPARISON OF FILTERS IN TARGET TRACKING

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Matej Benko

VEDOUČÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. RNDr. Libor Žák, Ph.D.

BRNO 2019

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav matematiky
Student:	Matej Benko
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	doc. RNDr. Libor Žák, Ph.D.
Akademický rok:	2018/19

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Vyhodnocení úspěšnosti filtrů při sledování cílů

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Práce se bude zabývat vyhodnocováním různých typů filtrů (Kalmanův, částicové, atd.) při sledování cílů se zaměřením na letecké cíle.

Cíle bakalářské práce:

Popsat principy a metody sledování cílů.

Popsat využití různých typů filtrů při sledování cílů.

Vybrat vhodné statistické metody pro popis úspěšnosti filtrů.

Provést vyhodnocení filtrů na reálných datech.

Seznam doporučené literatury:

ANDĚL, Jiří. Základy matematické statistiky. 3., opr. vyd. Praha: Matfyzpress, 2011. ISBN 978-8-7378-001-2.

ANDĚL, Jiří. Statistické metody. 2., opr. vyd. Praha: Matfyzpress, 1998.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2018/19

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Táto bakalárska práca sa zaoberá využitím Optimálneho Bayesovho odhadu skrytého stavu na vedenie cieľa pomocou bistatického radaru. Sústredí sa na časticové filtre. Ukázalo sa, že sa jedná o sadu funkčných algoritmov na Bayesov odhad skrytého stavu. V práci sú otestované rôzne základné typy časticových filtrov, ako SIR, Auxiliary a Regularized. Sú porovnané ich presnosti odhadu na rôznych situáciách, v závislosti od tvaru trajektórie sledovaného cieľa, ako aj jeho zrýchlenia.

Summary

The topic of this bachelor thesis is Optimal Bayesian estimate usage in target tracking with bistatic measurement. The thesis is focused on particle filtering. It is shown particle filters are effective algorithms providing Optimal Bayesian estimate solution. There are tested and evaluated many types of fundamental algorithms, like SIR, Auxiliary or Regularized particle filters. They are compared to the accuracy of optimal estimates on various situations, depend on a different trajectory or acceleration of the target.

Klíčové slová

bistatický radar, Optimálny Bayesov odhad stavu, časticová filtrácia

Keywords

bistatic radar, Optimal Bayesian estimate, particle filtering

Benko, M. *Vyhodnocení úspěšnosti filtrů při sledování cílů*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2019. 42 s. Vedoucí doc. RNDr. Libor Žák, Ph.D.

Čestne prehlasujem, že som bakalársku prácu *Vyhodnotenie úspešnosti filtrov pri sledovaní cieľov* vypracoval samostatne pod vedením doc. RNDr. Libora Žáka, Ph.D. s použitím materiálov uvedených v zozname literatúry.

Matej Benko

Chcel by som sa poďakovať svojmu školiteľovi doc. RNDr. Liborovi Žákovi, Ph.D. za odborné vedenie práce a priateľský prístup pri konzultáciach. Pekne ďakujem tiež Ing. Pavlovi Kulmonovi za cenné rady a uvedenie do problematiky. V neposlednom rade patrí poďakovanie aj mojej rodine a priateľom za podporu a pochopenie v priebehu štúdia.

Matej Benko

Obsah

1	Úvod	3
2	Bistatický radar	4
2.1	Rovnice meraní	4
2.2	Bistatické páry	5
3	Optimálny Bayesov odhad stavu	6
3.1	Dynamický systém	6
3.2	Filtrácia	6
3.3	Výber reprezentatívnej hodnoty z aposteriórnej hustoty	7
4	Riešenie optimálneho Bayesovho odhadu	8
4.1	Analytické riešenia	8
4.2	Rozšírený Kálmánov filter	8
4.3	Časticová filtrácia	9
4.3.1	Sequence Importance Sampling časticový filter	9
4.3.2	Sampling Importance Resampling časticový filter	11
4.3.3	Regularized časticový filter	12
4.3.4	Ostatné časticové filtre	12
5	Štatistické testy hypotéz	13
5.1	$H : X_1 = X_2$ proti $H_A : X_1 \neq X_2$	13
5.2	$H : X_1 < X_2$ proti $H_A : X_1 \geq X_2$	15
5.3	$H : Y(X)$ lineárne nezávisí na X proti $H_A : Y(X)$ lineárne závisí na X	16
5.4	p -hodnota	17
6	Výsledky z reálnych meraní	18
6.1	Nastavenia parametrov časticových filtrov	18
6.2	Referenčné GPS dáta	19
6.3	Výsledky vedenia cieľa	20
6.4	Test na zhodu odhadu stavov a GPS referencií	23
6.5	Vplyv počtu generovaných častíc na presnosť odhadu	24
7	Spracovanie teoretických meraní	26
7.1	Test teoretických meraní z GPS dát	26
7.2	Vplyv zakrivenia trajektórie na odhad stavu	30
7.2.1	Vplyv zakrivenia dráhy v konštantnej výške	30
7.2.2	Vplyv zakrivenia dráhy s nekonštantnou výškou	32
7.3	Vplyv zrýchlenia na odhad stavu	33
7.3.1	Vplyv zrýchlenia v konštantnej výške	33
7.3.2	Vplyv zrýchlenia s nekonštantnou výškou	34
8	Záver	36

OBSAH

9	Zoznam príloh, použitých skratiek a symbolov	38
9.1	Prílohy	38
9.2	Použité skratky a symboly	38

1 Úvod

Táto práca sa zaoberá využitím filtrov pri sledovaní leteckých cieľov bistatickým radarom. Dôraz je kladený na vyhodnotenie ich úspešnosti a vzájomné porovnanie jednotlivých filtrov na výsledkoch. Leteckým cieľom sa myslí ľubovoľný objekt vo vzduchu, napríklad lietadlo, vrtuľník, dron.

Na začiatku práce je stručne popísaný bistatický radar. Bistatický radar je typický svojou spoľahlivosťou zachytenia cieľa. Na druhej strane, všeobecne nedosahuje vysokú presnosť pri určení polohy, najmä to platí pre výšku leteckého cieľa nad terénom. Cieľom filtrov je spočítať polohu a rýchlosť leteckého cieľa zo senzorov bistatického radaru.

Nasleduje popis filtrov ako matematického aparátu, pomocou ktorého budú merania z bistatického radaru spracované. Filtrami sa nazývajú algoritmy, ktoré z nameraných dát počítajú Bayesov optimálny odhad stavu. Veľmi dôležitú úlohu v nich má Bayesova veta. Ich cieľom je „odfiltrovať“ nepresné merania zo senzorov radaru. Skúsme si predstaviť, že užívateľ sleduje letecký cieľ a v nejakom čase chce zistiť jeho polohu a rýchlosť. Pre bistatický radar samotné namerané hodnoty zo senzorov nemajú vysokú mieru informácie. Ako je v práci popísané, sú to len informácie o elipsoidoch na ktorých sa cieľ nachádza. Sú určené s nejakou odchýlkou.

Filter bez znalosti nameraných dát z bistatického radaru spraví prvotný odhad polohy a rýchlosti na základe predchádzajúceho merania. V tejto práci budú filtre vždy uvažovať, že lietadlo koná rovnomerný pohyb po priamke. Ako sa ukázalo, takýto odhad je postačujúci, ak sú merania dostatočne časté. Tento prvotný odhad sa nazýva apriórny. Podstatnou výhodou filtrov je, že k tomuto odhadu nepristupujú ako k jednému bodu, ale uvažujú aj nepresnosť jeho zistenia. Teda v tomto kroku filter určí apriórnu hustotu pravdepodobnosti stavu. Rovnako aj k nameraným hodnotám nepristupujú ako k jednej hodnote, ale charakterizujú ich tzv. funkciou vierohodnosti meraní, ktorá zahŕňa aj šum, resp. nepresnosť. Filtrácia pozostáva z interferencie funkcie vierohodnosti a apriórnej hustoty pomocou Bayesovej vety. Vznikne tak aposteriórna hustota, z ktorej filter odhadne polohu a rýchlosť, napr. ako strednú hodnotu tejto hustoty.

Pri prevádzke radaru môže napríklad prísť k situácii, že vplyvom odrazu sú namerané hodnoty veľmi skreslené. V takom prípade by pri filtrácii neboli uvažované a výsledný odhad by bol len z apriórnej hustoty. Toto je veľmi pozitívna vlastnosť filtrov.

V práci je spomenutých a otestovaných 6 základných filtrov, ktoré splňajú teoretické predpoklady na filtrovanie meraní z bistatického radaru. Sú to SIR, Auxiliary, Regularized, Progressive Proposal, SIS, EKF. Iba prvé tri dosiahli uspokojujúce výsledky a ukázali sa ako použiteľné. Tieto boli ďalej analyzované a porovnávané.

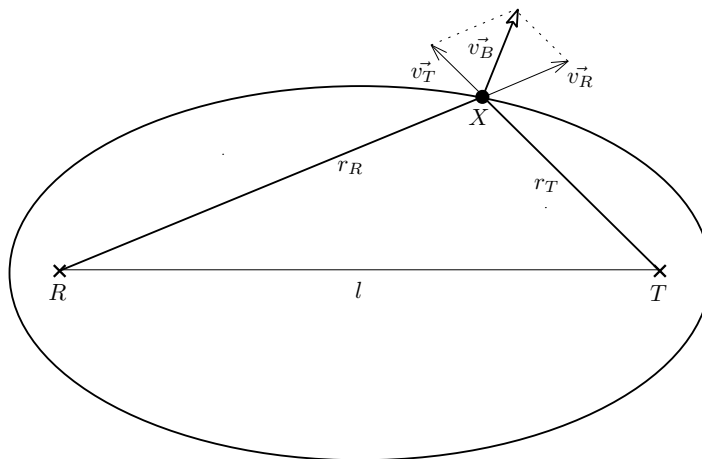
Filtre sú otestované na reálnych meraniach z bistatického radaru. Tu je možné demonštrovať ich funkčnosť, resp. nefunkčnosť. Problém však je vo vzájomnom porovnaní a hlbšej analýze, nakoľko pri reálnych dátach nie sú k dispozícii presné hodnoty polohy a rýchlosti. Preto následne sú testované aj na teoretických (vygenerovaných) dátach, kde sú známe referenčné hodnoty.

2 Bistatický radar

Bistatický radar [20] má dve oddelené antény na vysielanie a prijímanie signálu. Nena-
chádzajú sa na jednej pozícii. To vedie k meraniam polohy a rýchlosti v tzv. eliptickom
tvare. Bistatický radar sa v odbornej literatúre popisuje tiež ako radar s nespolupracujú-
cím vysielateľom a prijímačom. Je pasívny, čiže na zachytenie leteckého cieľa nepotrebuje
žiadnu informáciu ani signál od cieľa (na rozdiel od aktívneho radaru).

2.1 Rovnice meraní

Nech sa prijímač označí ako R (z *ang.* receiver) a vysielateľ ako T (z *ang.* transmitter).
Dvojica jedného vysielateľa a prijímača sa nazýva bistatický pár. Letecký cieľ nech sa označí
ako X . Úloha radaru je pomerne jasná. Zistiť polohu a rýchlosť leteckého cieľa X , ak sú
známe polohy R a T . Na obrázku 2.1 je znázornená schéma bistatického radaru. Pre
väčšiu názornosť je znázornená v rovine. Na pochopenie základného princípu je však
takéto zjednodušenie postačujúce. Jeden bistatický pár vie určiť (zmerať) dve hodnoty.
Bistatickú polohu a bistatickú rýchlosť.



Obr. 2.1: Schéma bistatického radaru

Bistatická poloha r_B predstavuje súčet dvoch vzdialeností. Vzdialenosti od leteckého
cieľa po vysielateľ a vzdialenosti od leteckého cieľa po prijímač. Formálne vyjadrené:

$$r_B = r_T + r_R.$$

Z geometrie je známe, že ak sú dva body pevne dané (v tomto prípade R, T) a bod
 X určený tak, že je daný súčet vzdialeností RX a TX , tak množina bodov, ktorá spĺňa
túto vlastnosť je elipsa a body R a T sú jej ohniská. V trojrozmernom prípade rotačný
elipsoid, ktorý je symetrický okolo priamky \vec{RT} .

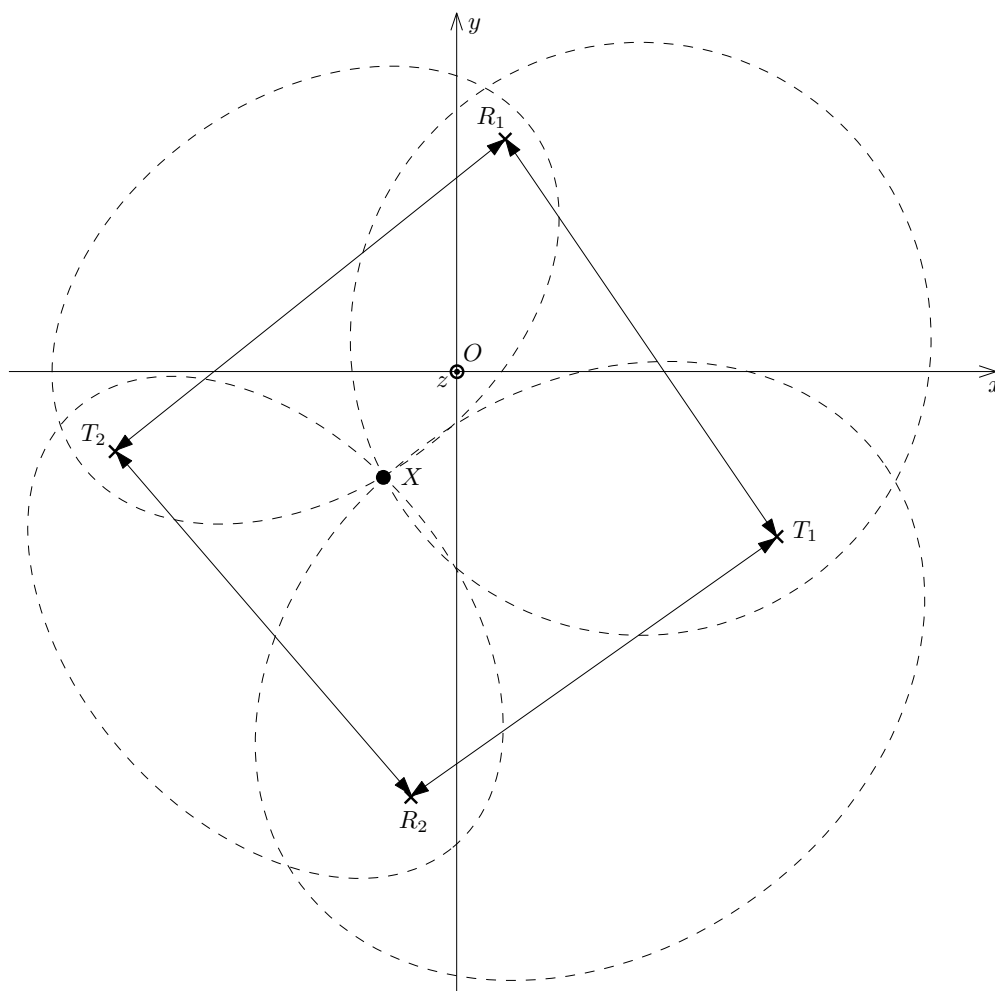
Bistatická rýchlosť je orientovaná veľkosť vektora \vec{v}_B . Vektor \vec{v}_T predstavuje rýchlosť
vzďalovania sa od prijímača a analogicky \vec{v}_R rýchlosť vzďalovania sa od vysielateľa, \vec{v}_B je
ich vektorový súčet. Ak \vec{v}_B smeruje do vnútra elipsoidu určeného bistatickou polohou,
je hodnota v_B záporná. V opačnom prípade, ak von z elipsoidu, kladná. Pre v_B tiež
platí známy fyzikálny vzťah polohy a rýchlosti, a to že v_B je derivácia r_B podľa času.
Matematicky zapísané vzťahy pre bistatickú rýchlosť sú

$$|v_B| = \|\vec{v}_B\| \quad \text{a tiež} \quad v_B = \dot{r}_B.$$

Bistatická rýchlosť vyjadruje rýchlosť zväčšovania sa (resp. zmenšovania) elipsoidu. Je rovnaká pre všetky body na elipse v danom čase.

2.2 Bistatické páry

Dvojica vysielača R a prijímača T sa nazve bistatický pár. Je zřejmé, že na určenie polohy a rýchlosti lietadla dve namerané hodnoty (bistatická poloha r_B a bistatická rýchlosť v_B) stačiť nebudú. Ak by bistatické páry boli tri s rôznymi polohami prijímačov a vysielačov, tak prienikom troch elipsoidov sú dva body, z toho jeden je zvyčajne pod povrchom, tak je iba jeden prípustný výsledok pre polohu. Obdobne to platí pre rýchlosť. V tejto práci sa pracuje so štyrmi bistatickými párami, kde jeden navyše slúži na kontrolu, resp. náhradu pri výpadku alebo pri pohybe lietadla v slepej zóne pre nejaký iný bistatický pár. Na obrázku 2.2 je znázornená situácia z vtáčej perspektívy. Osa z vyjadruje výšku lietadla nad povrchom. 4 čiarkované elipsy znázorňujú prienik elipsoidov určených z bistatických meraní s rovinou $z = h$, kde h je výška lietadla nad terénom. X je letecký cieľ. R_i a T_i sú prijímač a vysielač i -teho bistatického páru.



Obr. 2.2: Usporiadanie bistatických párov

3 Optimálny Bayesov odhad stavu

V tejto kapitole sú stručne popísané teoretické základy Optimálneho odhadu stavu ako matematického aparátu, ktorý bude v kapitolách 6 a 7 aplikovaný na konkrétny problém z praxe (odhad stavu z bistatických meraní).

3.1 Dynamický systém

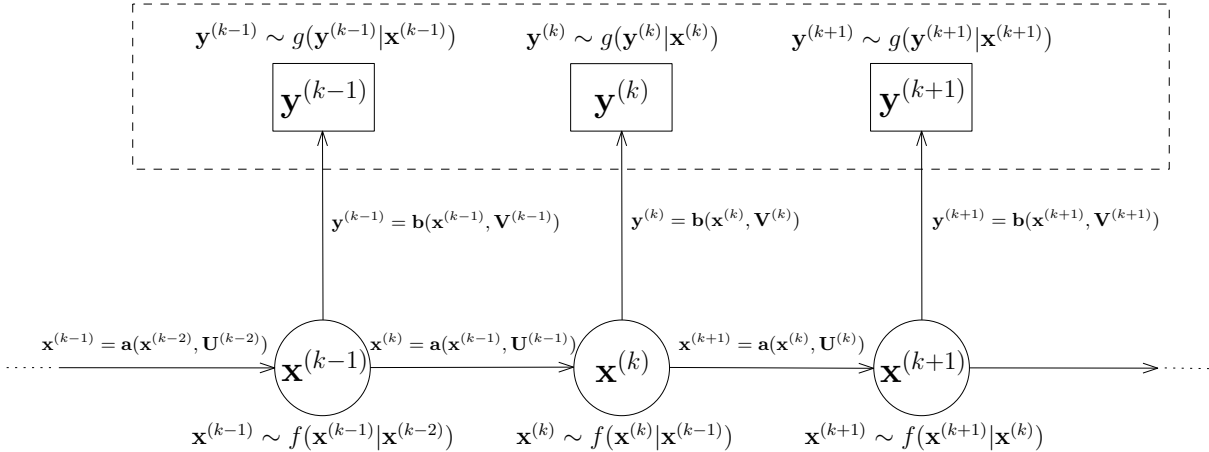
Definuje sa dynamický model [6] v tzv. stavovo-priestorovej formulácii.

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{a}(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{U}^{(k-1)}), \tag{3.1}$$

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{b}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{V}^{(k)}). \tag{3.2}$$

3.1 sa nazýva model systému, 3.2 model meraní. Vektor $\mathbf{x}^{(k)}$ predstavuje stavový vektor v čase k . Vektor $\mathbf{y}^{(k)}$ predstavuje tzv. vektor meraní, tj. hodnoty, ktoré sú známe z pozorovania stavu. Matica $\mathbf{U}^{(k-1)}$ je variačná matica systému v čase k . Vyjadruje jeho neurčitost. Nie je možné ju presne spočítať, len sa odhaduje. Matica $\mathbf{V}^{(k)}$ je variačná matica šumu meraní. Charakterizuje nepresnosť sensorov. Zvyčajne býva daná ako ich charakteristika a v závislosti od času je konštantná, avšak nie nutne.

Nakolko vektorové polia \mathbf{a} a \mathbf{b} sú závislé od variačných matíc $\mathbf{U}^{(k-1)}$ a $\mathbf{V}^{(k)}$, jedná sa o stochastické funkcie. Z rovnice (3.1) sa dá vyjadriť hustota pravdepodobnosti $f(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$ a z rovnice (3.2) hustota $g(\mathbf{y}^{(k)} | \mathbf{x}^{(k)})$. Popísaný dynamický systém je znázornený na obrázku č. 3.1. Jediné známe hodnoty sú v čiarkovanom obdĺžniku, ostatné sa získavajú odhadom pomocou filtrácie popísanej v nasledujúcom odseku. Z rovnice 3.1 vyplýva,



Obr. 3.1: Schéma dynamického modelu

že popísaný model je Markov reťazec [18]. Pretože stav $\mathbf{x}^{(k)}$ v čase k závisí len od stavu $\mathbf{x}^{(k-1)}$ v čase $k - 1$ a nezávisí od stavov v iných časových krokoch.

3.2 Filtrácia

Cieľom filtrácie je získať aposteriornu hustotu v $p(\mathbf{x}^{(k)} | \mathbf{Y}^{(k)})$ čase k , kde $\mathbf{Y}^{(k)} = \{\mathbf{y}_i\}_{i=1}^k$ je postupnosť všetkých meraní od počiatku pozorovania až po čas k . Najskôr sa určí

apriórna hustota pomocou Chapman-Kolmogorovej vety (je použiteľná len pri Markovych reťazcoch, čo sa ukázalo v predchádzajúcom odseku ako splnené).

$$p(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k-1)}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{x}^{(k-1)}) \cdot p(\mathbf{x}^{(k-1)}|\mathbf{Y}^{(k-1)})d\mathbf{x}^{(k-1)}. \quad (3.3)$$

Hustota $f(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{x}^{(k-1)})$ vychádza z rovnice (3.1). $p(\mathbf{x}^{(k-1)}|\mathbf{Y}^{(k-1)})$ je aposteriórna hustota pravdepodobnosti v čase $k - 1$. Cieľom filtrácie je túto hustotu určiť, tzn. že v čase k je už táto hustota známa. Ďalej sa na vyjadrenie aposteriórnej hustoty v čase k využije Bayesova veta:

$$p(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)}) = \frac{g(\mathbf{y}^{(k)}|\mathbf{x}^{(k)}) \cdot p(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k-1)})}{p(\mathbf{y}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k-1)})}. \quad (3.4)$$

Obe hustoty v čitateli zlomku sú už v tomto kroku známe. Zostáva vyjadriť len hustotu v menovateli, tzv. normalizujúcu konštantu. Opäť sa využije Chapman-Kolmogorova rovnica a získa sa vzťah

$$p(\mathbf{y}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k-1)}) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{y}^{(k)}|\mathbf{x}^{(k)}) \cdot p(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k-1)})d\mathbf{x}^{(k)}. \quad (3.5)$$

Hustoty v integráli sú známe a tým je odvodenie aposteriórnej hustoty hotové. Problém však ostáva ako túto filtráciu realizovať na konkrétnych príkladoch. Riešenie tohto problému je popísané v kapitole 4.

3.3 Výber reprezentatívnej hodnoty z aposteriórnej hustoty

Cieľom filtrácie je získať aposteriórnu hustotu $p(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)})$. Avšak v praxi je dôležité na základe získanej aposteriórnej hustoty spočítať odhad stavu z aposteriórnej hustoty ako jednu hodnotu. Štandardne sa vyberie jedna z týchto hodnôt [13] v závislosti od kritéria, ktoré má odhad spĺňať:

- a) *Maximalizovať pravdepodobnosť, že $\mathbf{x}^{*(k)} = \mathbf{x}^{(k)}$*
 $\mathbf{x}^{*(k)} = \text{mod}(p(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)}))$
 Táto možnosť je definovaná ako najviac pravdepodobný odhad.
- b) *Minimalizovať hodnotu integrálu $\int \|\mathbf{x}^{*(k)} - \mathbf{x}^{(k)}\|^2 p(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)})d\mathbf{x}_k$*
 $\mathbf{x}^{*(k)} = E(p(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)}))$
 Táto voľba sa nazýva podmienený stredný odhad.
- c) *Minimalizovať hodnotu $\max |\mathbf{x}^{*(k)} - \mathbf{x}^{(k)}|$*
 $\mathbf{x}^{*(k)} = \text{med}(p(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)}))$
 Táto možnosť je nazývaná ako minimax odhad.

4 Riešenie optimálneho Bayesovho odhadu

Riešením optimálneho Bayesovho odhadu sa myslí už konkrétne vyjadrenie aposteriórnej hustoty $p(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)})$. Existujú dva základné typy algoritmov na riešenie Bayesovho odhadu stavu. Sú to

- *analytické (presné)* - Kálmánov filter, metódy založené na mriežke, ...
- *aproximačné* - Rozšírený Kálmánov filter, aproximačné metódy založené na mriežke, časticové filtre.

Výhodou prvej možnosti je bezpochyby možnosť analytického vyjadrenia aposteriórnej hustoty, avšak za cenu silných predpokladov (linearita modelu). V prípade vedenia cieľa bistatickým radarom nie sú splnené. Ďalšou možnosťou sú aproximačné riešenia, ktoré hustotu iba aproximujú (nie sú ju schopné presne spočítať) a ich výsledok nie je tak kvalitný ako analytický. Na druhej strane pre ich funkčnosť nie je nutné splniť tak silné predpoklady a preto majú v technickej praxi širšie uplatnenie.

4.1 Analytické riešenia

Najznámejšie analytické riešenie je Kálmánov filter (ďalším sú napríklad metódy založené na mriežke, viď [8]). Kálmánov filter odvodil a v roku 1960 prezentoval americký matematik maďarského pôvodu Rudolf Emil Kálmán (1930 – 2016) v článku [15]. Pre použitie vyžaduje splnenie predpokladov, a to nasledujúcich. Rovnica (3.1) sa musí dať prepísať na tvar

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{u}^{(k-1)}, \quad \text{kde } \mathbf{u}^{(k-1)} \sim N(\mathbf{o}, \mathbf{U}^{(k-1)}).$$

Teda vektorové pole \mathbf{a} musí byť lineárna transformácia stavu $\mathbf{x}^{(k-1)}$ s Gaussovským (bielym) šumom. Obdobne rovnica (3.2) sa musí dať prepísať na tvar

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{v}^{(k)}, \quad \text{kde } \mathbf{v}^{(k)} \sim N(\mathbf{o}, \mathbf{V}^{(k)}).$$

Vektorové pole \mathbf{b} musí byť lineárna transformácia stavu $\mathbf{x}^{(k)}$ s Gaussovským (bielym) šumom. Následne je možné vyjadriť aposteriórnu (a rovnako aj apriórnu) hustotu v čase k pomocou maticových operácií. Dá sa ukázať, viď [15], že obe hustoty budú mať vždy normálne rozdelenie.

4.2 Rozšírený Kálmánov filter

Rozšírený Kálmánov filter (EKF) predstavuje najjednoduchší spôsob riešenia problému nesplnenia podmienok na linearitu funkcií \mathbf{a} a \mathbf{b} v dynamickom systéme definovaného rovnicami (3.1) a (3.2). Matice $\mathbf{A}^{(k-1)}$ a $\mathbf{B}^{(k)}$ sa získajú z nelineárnych funkcií \mathbf{a} a \mathbf{b} ako Jacobiho matice týchto vektorových polí:

$$\mathbf{A}^{(k-1)} = \frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{x}^{(k-1)}}, \quad \mathbf{B}^{(k)} = \frac{d\mathbf{b}}{d\mathbf{x}^{(k)}} \Big|_{\mathbf{x}^{(k)}=\bar{\mathbf{x}}^{(k)}},$$

kde $\bar{\mathbf{x}}^{(k)} = E(p(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k-1)}))$. Po získaní týchto matíc je možné ďalej postupovať ako v analytickom Kálmánovom filtri.

Rozšírený Kálmánov filter je použiteľný s uspokojivým výsledkom, ak nelinearita vektorových polí \mathbf{a} a \mathbf{b} nie je veľmi silná v okolí bodu $\mathbf{x}^{(k-1)}$ pre vektorové pole \mathbf{a} a podobne v okolí bodu $\hat{\mathbf{x}}^{(k)}$ pre pole \mathbf{b} . V takom prípade príslušné Jacobiho matice dobre aproximujú vektorové polia. Ukazuje sa, že Rozšírený Kálmánov filter je citlivejší na nepresnosť v aproximácii vektorového pola \mathbf{b} , čo je model meraní.

Nelinearita meraní bistatického radaru (v tvare elipsoidov) je dostatočne silná na to, aby Rozšírený Kálmánov filter bol na takéto vedenie cieľa nepoužiteľný. Pri testoch ani nezachytil tvar krivky trajektórie.

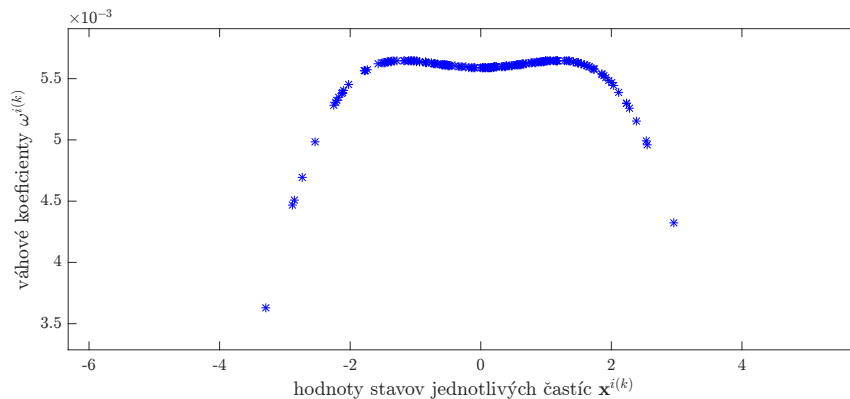
4.3 Časticová filtrácia

Tiež sa nazýva Sekvenčná Monte Carlo metóda, pretože podobne ako Monte Carlo metódy spočíva v generovaní náhodných vzoriek a následnom sledovaní ich vlastností.

Spočíva v diskretnej aproximácii aposteriórnej hustoty v čase k pomocou váhových koeficientov $\omega^{i(k)}$. Majú význam hodnoty významnosti každej i -tej častice vzhľadom k aposteriórnej hustote a platí pre ne $\sum_{i=1}^N \omega^{i(k)} = 1$. Formálne sa táto diskretná aproximácia zapíše

$$p(\mathbf{x}^{(k)} | \mathbf{Y}^{(k)}) \approx \sum_{i=1}^N \omega^{i(k)} \delta(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{i(k)}). \quad (4.1)$$

Kde $\mathbf{x}^{(k)}$ je skutočný (a zároveň neznámy) stav cieľa v čase k . $\mathbf{x}^{i(k)}$ sú stavy častíc, ktoré sú generované algoritmom v čase k . δ je Diracova funkcia. Výpočet váhových koeficientov $\omega^{i(k)}$ je závislý od jednotlivých algoritmov, a teda bude popísaný neskôr. Táto aproximácia je ukázaná na obrázku č. 4.1. Pre jednoduchosť a názornosť je dimenzia stavového vektora na obrázku $\dim \mathbf{x} = 1$. Pri riešení v tejto práci bude dimenzia vždy rovná $\dim \mathbf{x} = 6$.

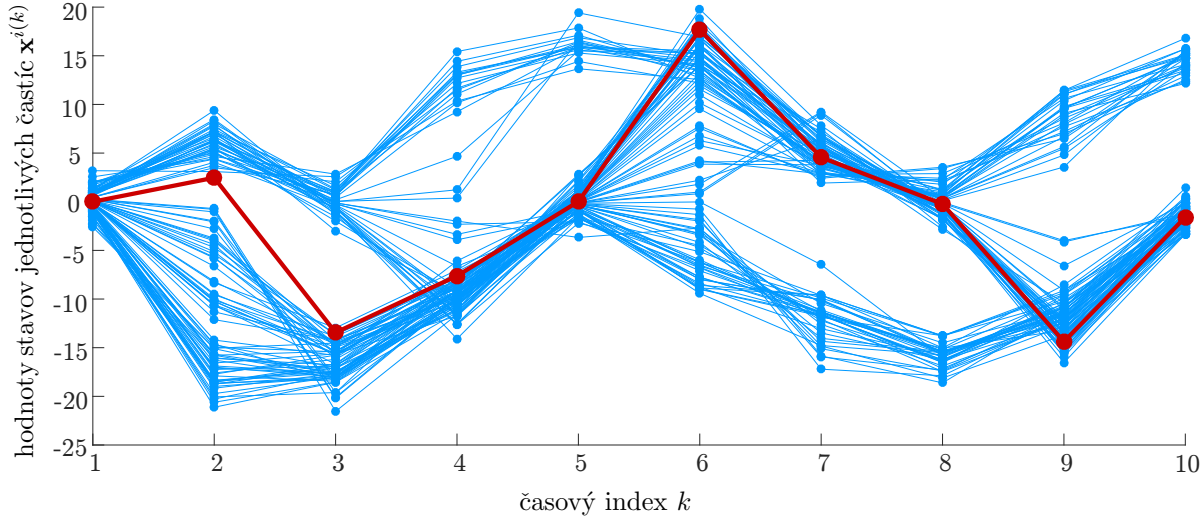


Obr. 4.1: Ukážka aproximácie aposteriórnej hustoty pomocou častíc pre jedno-dimenzionálny stavový vektor

4.3.1 Sequence Importance Sampling časticový filter

Sequence Importance Sampling (SIS) predstavuje základný časticový filter. Je predstavený v článku [11]. Všetky ostatné filtre sú od neho odvodené pridávaním do algoritmu ďalšie výpočty a úpravy častíc. Na tomto filtri sa najlepšie ukazuje princíp funkcie časticových filtrov, aj keď sám o sebe je málokedy použiteľný. Na obrázku 4.2 je znázornený odhad stavu SIS filtrom počas 10 časových krokov. Opäť pre názornosť $\dim \mathbf{x} = 1$.

4.3 ČASTICOVÁ FILTRÁCIA



Obr. 4.2: Ukážka princípu fungovania časticového filtra SIS. Modrým sú označené jednotlivé častice a červeným výsledná reprezentatívna hodnota – odhad. Odhad je braný ako stredná hodnota aproximovanej aposteriórnej hustoty (4.1).

V každom časovom kroku k na obrázku 4.2 sú modrou farbou vykreslené hodnoty stavov častíc $\mathbf{x}^{i(k)} = \mathbf{a}(\mathbf{x}^{i(k-1)}, \mathbf{U}^{(k-1)})$, čo vychádza z rovnice (3.1). Jedná sa o diskretnú aproximáciu apriórnej hustoty $p(\mathbf{x}^{(k)} | \mathbf{Y}^{(k-1)})$. Formálne zapísané

$$p(\mathbf{x}^{(k)} | \mathbf{Y}^{(k-1)}) \approx \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \cdot \delta(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{i(k)}), \quad (4.2)$$

kde N je počet generovaných častíc. Pri porovnaní pravých strán rovníc (4.1) a (4.2) je vidieť, že v rovnici (4.1) je namiesto člena $1/N$ člen $\omega^{i(k)}$, tzv. váhový koeficient. To je člen, ktorý má v tejto rovnici rovnaký význam ako podiel $\frac{g(\mathbf{y}^{(k)} | \mathbf{x}^{(k)})}{p(\mathbf{y}^{(k)} | \mathbf{Y}^{(k-1)})}$ v rovnici (3.4). Zostáva teda určiť, akým spôsobom filter SIS tieto váhové koeficienty $\omega^{i(k)}$ spočíta.

Na začiatok si je potrebné uvedomiť, že z rovnice $\mathbf{x}^{i(k)} = \mathbf{a}(\mathbf{x}^{i(k-1)}, \mathbf{U}^{(k-1)})$ vyplýva $\mathbf{x}^{i(k)} \sim f(\mathbf{x}^{i(k)} | \mathbf{x}^{i(k-1)})$. Váhové koeficienty sa spočítajú pomocou vzťahu

$$\omega^{i(k)} \propto \omega^{i(k-1)} \cdot g(\mathbf{y}^{(k)} | \mathbf{x}^{i(k)}). \quad (4.3)$$

Symbol \propto značí rovnosť až na násobok konštantou. Vzťah (4.3) je podrobne odvodený v článku [11]. Algoritmus spočíta váhové koeficienty vzťahom $\omega^{i(k)} := \omega^{i(k-1)} \cdot g(\mathbf{y}^{(k)} | \mathbf{x}^{i(k)})$ a následne ich normalizuje $\omega^{i(k)} := \omega^{i(k)} / \sum_{i=1}^N \omega^{i(k)}$.

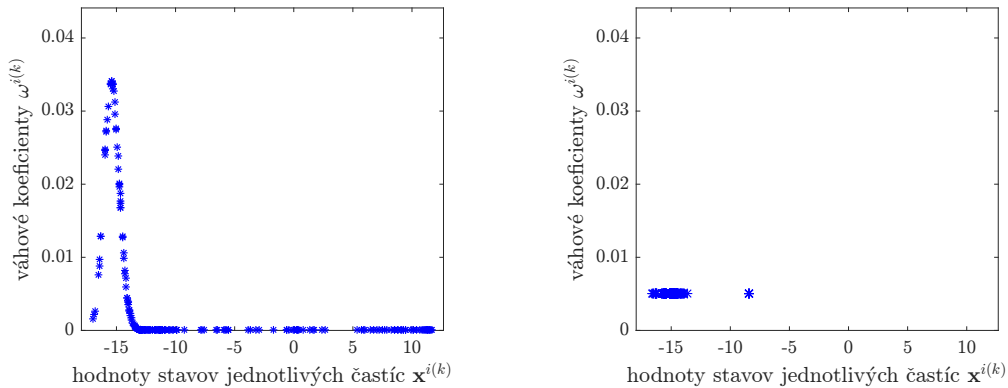
Keď už sú známe váhové koeficienty $\omega^{i(k)}$, a teda aj diskretná aproximácia aposteriórnej hustoty (4.1), môže byť spočítaný odhad stavu ako nejaká reprezentatívna hodnota, viď odsek 3.3. Konkrétne na obrázku 4.2 bola ako reprezentatívna hodnota zvolená stredná hodnota.

Degeneračný fenomén

Degeneračný fenomén je nepriaznivý jav, ktorý nastáva, ak sa na filtráciu použije SIS filter. Je dôvodom, prečo sa SIS filter v praxi nepoužíva.

Degeneračným fenoménom sa myslí jav, znázornený na obrázku č. 4.3a, kde významná časť častíc má veľmi nízku, resp. nulovú hodnotu príslušného váhového koeficientu $\omega^{i(k)}$. To spôsobí, že v porovnaní s celkovým počtom častíc N má relatívne málo častíc významný

váhový koeficient $\omega^{i(k)}$, a teda na výslednom odhade stavu sa podieľa malá vzorka častíc. To spôsobí zníženú presnosť a spoľahlivosť odhadu stavu. Tiež zbytočne plytvá pamäťou počítača, nakoľko veľká časť častíc je spracovávaná zbytočne. Ukázalo sa, že so vzrastajúcou dimenziou stavového vektora \mathbf{x} býva degeneračný fenomén silnejší. Pri pokuse o filtráciu z meraní bistatického radaru bol degeneračný fenomén SIS filtra tak silný, že filtrácia nebola možná. Riešením degeneračného fenoménu je tzv. *prevzorkovanie*. Čo je krok, ktorý sa pridá do SIS algoritmu a vznikne tak Sampling Importance Resampling časticový filter (SIR).



(a) aproximovaná apriórna hustota, kde častice trpia degeneračným fenoménom

(b) aproximovaná apriórna hustota po prevzorkovaní

Obr. 4.3: Ukážka degeneračného fenoménu a jeho nápravy v podobe prevzorkovania – SIR filter. Znázornené na ukážkovom modeli, kde $\dim \mathbf{x} = 1$.

4.3.2 Sampling Importance Resampling časticový filter

Tiež nazývaný *Bootstrap* časticový filter je základný algoritmus, často použiteľný s dobrými výsledkami, ktorý rieši degeneračný fenomén. Je popísaný v publikácii [4]. Rozdiel medzi ním a SIS časticovým filtrom je v prevzorkovaní. Je to krok, ktorý sa zaradí za výpočet a následnú normalizáciu váhových koeficientov $\omega^{i(k)}$ v SIS algoritme.

Základnou myšlienkou prevzorkovania je vynechanie častíc s nízkym váhovým koeficientom a ich nahradenie časticou s vyššou hodnotou váhového koeficientu. Prevzorkovanie je znázornené na obrázku 4.3b. Prevzorkovaním v čase k vznikne nová množina častíc $\{\hat{\mathbf{x}}^{j(k)}\}_{j=1}^N$. Sú to náhodné vzorky z náhodnej veličiny, ktorá je definovaná diskretnou aproximáciou hustoty pravdepodobnosti (4.1). Z toho vyplýva, že pravdepodobnosť $P(\hat{\mathbf{x}}^{j(k)} = \mathbf{x}^{i(k)}) = \omega^{i(k)}$, kde $\mathbf{x}^{i(k)}$ sú poôvodné častice pred prevzorkovaním a $\omega^{i(k)}$ ich váhové koeficienty. To znamená, že váhové koeficienty po prevzorkovaní budú mať všetky nové častice rovnaké, a to $\hat{\omega}^{j(k)} = 1/N$.

Problém vyčerpania vzoriek

Ak je šum systému nízky (variačné matice $\mathbf{U}^{(k-1)}$ a $\mathbf{V}^{(k)}$ majú prvky s nízkymi hodnotami), tak sa môže stať, že po prevzorkovaní majú všetky nové častice rovnakú hodnotu stavu. Jedná sa o nežiadúci jav, lebo nie je dostatočná variabilita častíc, čo znižuje spoľahlivosť odhadu stavu. Riešením tohto problému je *regularizácia*. Pridaním regularizácie do SIR filtra za krok prevzorkovania vznikne Regularized časticový filter.

4.3 ČASTICOVÁ FILTRÁCIA

4.3.3 Regularized časticový filter

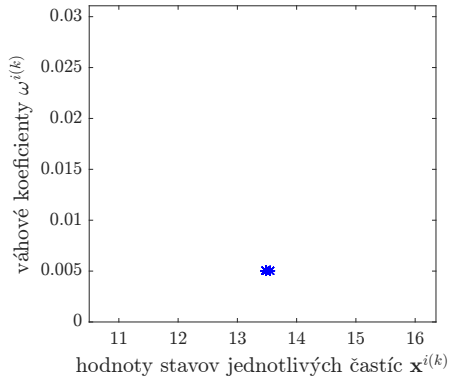
V tejto práci je predstavený podľa článku [4]. Regularized filter je podobný filtru SIR, až na to, že častice po spracovaní algoritmom nie sú náhodnými vzorkami z diskkrétnej aproximácie (4.1), ale spojitaj aproximácie aposteriórnej hustoty

$$p(\mathbf{x}^{(k)} | \mathbf{Y}^{(k)}) \approx \sum_{i=1}^N \hat{\omega}^{i(k)} K(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{i(k)}).$$

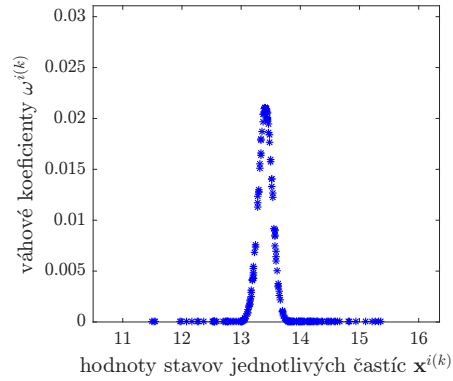
K je prepočítaná hustota Epanechnikovho jadra [16]. Nech $n = \dim \mathbf{x}$ a c_n je objem jednotkovej sféry v \mathbb{R}^n [10].

$$K = \begin{cases} \frac{1}{h^n} \cdot \frac{n+2}{2 \cdot c_n} \left(1 - \left\| \frac{\mathbf{x}^{(k)}}{h} \right\|^2\right) & \text{pre } \left\| \frac{\mathbf{x}^{(k)}}{h} \right\| < 1, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases} \quad \text{kde } h = \left(\frac{4}{N+2} \right)^{\frac{1}{n+4}}$$

je optimálna šírka Epanechnikovho jadra. Tohoto sa dosiahne regularizáciou, čo je algoritmus, ktorý sa zaradí za prevzorkovanie. Tak vznikne rozšírením SIR filtra o regularizáciu Regularized časticový filter. Na obrázku 4.4a je znázornený problém vyčerpania vzoriek



(a) aproximovaná aposteriórna hustota po prevzorkovaní, kde častice trpia problémom vyčerpania vzoriek



(b) vyriešenie problému vyčerpania vzoriek regularizáciou

Obr. 4.4: Ukážka degeneračného fenoménu a jeho nápravy v podobe prevzorkovania – SIR filter. Znázornené na ukážkovom modeli, kde $\dim \mathbf{x} = 1$.

a na obrázku 4.4b jeho riešenie regularizáciou. Je vidieť, že po regularizácii majú opäť niektoré častice nulové váhové koeficienty, takže Regularized časticový filter opäť prináša problém degeneračného fenoménu. Aj keď už nie je tak silný a významný ako v SIS filtri. Teda všeobecne platí, že tieto dva filtre idú proti sebe. Pri nižšom šume je vhodnejšie použiť Regularized a pri vyššom SIR filter. Avšak toto je teoretický predpoklad a v praxi ťažko posúdiť veľkosť šumu, najmä pre viac rozmerný stavový vektor, kde šum charakterizuje variačná matica.

4.3.4 Ostatné časticové filtre

Medzi ďalšie dôležité časticové filtre patrí *Auxiliary Sampling Importance Resampling* [6] ako rozšírenie SIR filtra o ďalšie úpravy častíc. *Progressive Proposal* [5] naopak rieši degeneračný fenomén priblížením apriórnej hustoty k aposteriórnej princípom založeným na EKF.

5 Štatistické testy hypotéz

V ďalších kapitolách budú testované rôzne hypotézy. Kvôli väčšej prehľadnosti a súdržnosti textu, sú testy príslušných hypotéz popísané v tejto kapitole. Na ich realizáciu boli použité programy Microsoft Office Excel a Minitab.

5.1 $H : X_1 = X_2$ proti $H_A : X_1 \neq X_2$

na hladine významnosti α . Nech X_1 a X_2 sú dve náhodné veličiny. x_1, x_2 ich realizácie. V tejto práci budú popisovať vždy chybu (rozdiel dvoch hodnôt). Ich rozdiel sa označí $\xi = x_1 - x_2$, analogicky $\Xi = X_1 - X_2$. Je nutné aby X_1 a X_2 popisovali dve nezávislé merania toho istého stavu a boli realizované vždy v rovnakom čase. Postupuje sa nasledovne:

- (a) *Test Ξ na normalitu.* Test Ξ na normalitu je potrebný k rozhodnutiu použitia ďalších testov. Používal sa Andersonov-Darlingov test uvedený v [3]. Bol zvolený preto, lebo po Shapiro-Wilkovom teste má tesne druhú najväčšiu silu z pomedzi známych filtrov na test normality náhodnej veličiny [17]. Navyše pre $n \geq 50$ (čo je splnené pre väčšinu testovaných súborov v práci) je vďaka svojej dobrej vypovedajúcej schopnosti odporúčaný normou ČSN 01 0225 [14]. Má testovaciu charakteristiku

$$t = -n - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (2k-1) \cdot (\log p^{(k)} + \log(1 - p^{(n-k+1)})), \quad (5.1)$$

$$\text{kde } p^{(k)} = \Phi\left(\frac{\xi^{(k)} - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right).$$

$\hat{\mu}$ je bodový odhad strednej hodnoty ξ . $\hat{\sigma}$ je bodový odhad smerodajnej odchýlky ξ . Kritické hodnoty testovacej charakteristiky sú tabuľované, viď [3].

- (b) *Test Ξ na symetriu¹ za predpokladu, že test na normalitu bol zamietnutý.* Ak by boli dáta normálneho rozdelenia, symetria z toho vyplýva a test by bol zbytočný. Symetria Ξ sa overí graficky, viď napr. obrázok 5.1. Nech medián súboru ξ je označený $\tilde{\xi}$. Usporiadaním ξ vznikne usporiadaný štatistický súbor ξ' . Do grafu s osami x a y sa vykreslia postupne usporiadané dvojice

$$\left(\left|\xi_i^{(1)} - \tilde{\xi}\right|, \left|\xi_i^{(n)} - \tilde{\xi}\right|\right), \left(\left|\xi_i^{(2)} - \tilde{\xi}\right|, \left|\xi_i^{(n-1)} - \tilde{\xi}\right|\right), \dots$$

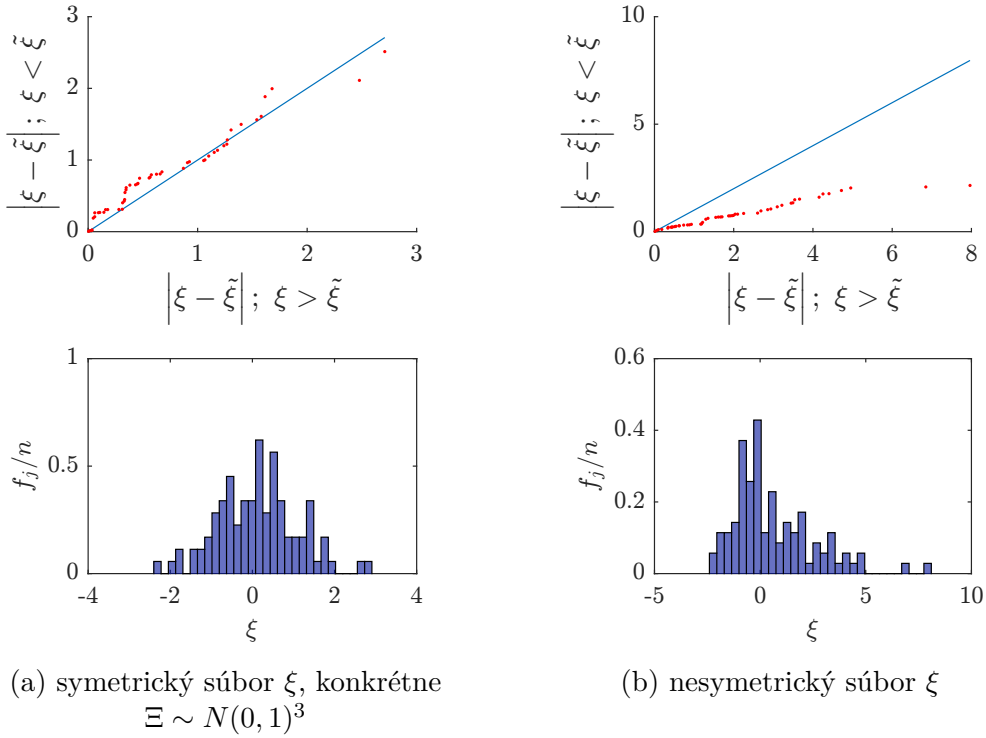
$$\dots, \left(\left|\xi_i^{(n \text{ div } 2)} - \tilde{\xi}\right|, \left|\xi_i^{(n-(n \text{ div } 2))} - \tilde{\xi}\right|\right).^2$$

Ďalej sa do grafu vykreslí priamka $y = x$. Ak sú body rozložené po obidvoch stranách priamky, resp. sú symetrické k priamke, tak hypotéza, že dáta sú symetrické sa nezamieta. V opačnom prípade sa zamieta.

¹Symetriou sa myslí, že nech má náhodná veličina Ξ hustotu f . Potom ak je symetrická, platí pre jej hustotu $f(a+x) = f(a-x)$. Kde potom bod a je zrejme medián tejto náhodnej veličiny.

²Operátor div značí celočíselné delenie

5.1 $H : X_1 = X_2$ PROTI $H_A : X_1 \neq X_2$



Obr. 5.1: Ukážka testu na symetriu. Horné grafy sú samotný test, dolné sú histogramy na porovnanie.

2. (a) $\Xi \sim N(\mu, \sigma^2)$.

V tomto prípade sa použije t -test podľa [2]. Testuje sa hypotéza $H : \mu = 0$ proti alternatívnej hypotéze $H_A : \mu \neq 0$ na hladine významnosti α . Veličiny $\xi^{(1)} \dots \xi^{(n)}$ sú nezávislé. Hypotéza sa nezamieta, ak

$$t = \frac{\bar{\xi} \cdot \sqrt{n}}{s} \in \langle -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1), t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \rangle.$$

V opačnom prípade sa zamieta. s je výberová smerodajná odchýlka. $\bar{\xi}$ výberový priemer. $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ je kvantil študentovho rozdelenia s $n-1$ stupňami voľnosti.

- (b) $\Xi \approx N(\mu, \sigma^2)$, Ξ je symetrická

V takomto prípade sa použije Wilcoxonov test, popísaný v [2]. Ten nepožaduje normalitu Ξ , ale je nutná symetria. Sila Wilcoxonovho testu je nižšia ako sila t -testu, ale na druhej strane vyššia ako sila znamienkového testu. Testuje sa hypotéza $H : \tilde{\xi} = 0$ proti alternatívnej hypotéze $H_A : \tilde{\xi}_i \neq 0$ na hladine významnosti α . Súbor ξ sa usporiada do neklesajúcej postupnosti podľa absolútnej hodnoty

$$|\xi|^{(1)} \leq |\xi|^{(2)} \leq \dots \leq |\xi|^{(n)}. \quad (5.2)$$

Nech R_k^+ je poradie veličiny $\xi^{(k)}$ v postupnosti (5.2). Nech sa označí

$$S^+ = \sum_{\xi^{(k)} \geq 0} R_k^+.$$

³Len na ukážku, ak by vyšiel súbor, že má normálne rozdelenie, už by sa na symetriu netestoval. Pre potreby ukážky však boli vygenerované hodnoty z normálneho rozdelenia, aby bola zaručená symetria.

Dá sa ukázať, že S^+ má asymptoticky normálne rozdelenie, viď [12]. Hypotéza H sa nezamieta na hladine, ktorá sa s rastúcim n približuje k hladine α , ak platí

$$|t| = \left| \frac{S^+ - E(S^+)}{\sqrt{D(S^+)}} \right| \geq u\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

kde u je kvantil normovaného normálne rozdelenia $N(0, 1)$ a ďalej

$$E(S^+) = \frac{1}{4}n(n+1), \quad D(S^+) = \frac{1}{24}n(n+1)(2n+1).$$

Ak je hodnota $\xi^{(k)} = 0$, potom sa spravidla vynecháva.

(c) $\Xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, ξ sú nesymetrické

V prípade, že ξ nemá normálne rozdelenie, sa testuje hypotéza $H : \tilde{\xi} = 0$ proti alternatívnej hypotéze $H_A : \tilde{\xi} \neq 0$ na hladine významnosti α . Použije sa znamienkový test. Nevyžaduje znalosť rozdelenia náhodnej veličiny (neparametrický test) a tiež nevyžaduje symetriu. Je popísaný v [2]. Zavedie sa náhodná veličina

$$\psi^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{pre } \xi^{(k)} > 0, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Testovacie kritérium znamienkového testu je

$$t = \frac{2 \sum_{k=1}^n \psi^{(k)} - \hat{n}}{\sqrt{\hat{n}}},$$

kde \hat{n} je počet meraní n znížený o počet nulových hodnôt ξ v danej súradnici. Hypotézu H sa nezamieta na hladine významnosti α , ak $|t| < \frac{\alpha}{2}$. Hladina významnosti tohto testu sa blíži k α s rastúcim n . V praxi je tento test odporúčané používať pre $n \geq 20$, čo je splnené pre testované hodnoty v tejto práci. Pravdepodobnosť chyby 2. druhu tohto testu je relatívne vysoká v porovnaní s ostatnými testami. To znamená, že je relatívne nízka sila znamienkového testu.

V bode 2 ak sa príslušné testované hypotézy v (a), (b), (c) nezamietajú, tak sa nezamieta aj hypotéza $H : X_1 = X_2$ proti $H_A : X_1 \neq X_2$. V opačnom prípade sa zamieta.

5.2 $H : X_1 < X_2$ proti $H_A : X_1 \geq X_2$

Nech X_1 a X_2 sú dve náhodné veličiny. x_1, x_2 ich realizácie. Ich rozdiel sa označí $\xi = x_1 - x_2$, analogicky $\Xi = X_1 - X_2$. Je nutné aby X_1 a X_2 popisovali dve nezávislé merania toho istého stavu a boli realizované vždy v rovnakom čase. Postupuje sa veľmi podobne ako v 5.1. Krok 1. zostáva nezmenený. K úpravám dochádza len v 2. kroku:

(a) $\Xi \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Použije t -test podľa [2]. Testuje sa hypotéza $H : \mu < 0$ proti alternatívnej hypotéze $H_A : \mu \geq 0$ na hladine významnosti α . Veličiny $\xi^{(1)} \dots \xi^{(n)}$ sú nezávislé. Hypotéza sa nezamieta, ak

$$t = \frac{\bar{\xi} \cdot \sqrt{n}}{s} \in \langle -\infty, t_{1-\alpha}(n-1) \rangle.$$

V opačnom prípade sa zamieta. s je výberová smerodajná odchýlka. $\bar{\xi}$ výberový priemer. $t_{1-\alpha}(n-1)$ je kvantil študentovho rozdelenia s $n-1$ stupňami voľnosti.

5.3 $H : Y(X)$ LINEÁRNE NEZÁVISÍ NA X PROTI $H_A : Y(X)$ LINEÁRNE ZÁVISÍ NA X

(b) $\Xi \approx N(\mu, \sigma^2)$, Ξ je symetrická

Použije sa Wilcoxonov test [2]. Ten nepožaduje normalitu Ξ , ale je nutná symetria. Testuje sa hypotéza $H : \tilde{\xi} < 0$ proti alternatívnej hypotéze $H_A : \tilde{\xi}_i \geq 0$ na hladine významnosti α . Oproti 5.1 v bode 2b sa zmení len testovacie kritérium.

$$t = \frac{S^+ - E(S^+)}{\sqrt{D(S^+)}} < u(1 - \alpha),$$

kde u je kvantil normovaného normálne rozdelenia $N(0, 1)$. Potom sa hypotéza $H : \tilde{\xi} < 0$ proti alternatívnej hypotéze $H_A : \tilde{\xi}_i \geq 0$ nezamieta na hladine významnosti α .

(c) $\Xi \approx N(\mu, \sigma^2)$, ξ sú nesymetrické

V prípade, že ξ nemá normálne rozdelenie, sa testuje hypotéza $H : \tilde{\xi} < 0$ proti alternatívnej hypotéze $H_A : \tilde{\xi} \geq 0$ na hladine významnosti α . Použije sa znamienkový test. Oproti 5.1 bod 2c sa zmení len podmienka pre testovacie kritérium. Ak $t < 1 - \alpha$ potom sa hypotéza $H : \tilde{\xi} < 0$ proti alternatívnej hypotéze $H_A : \tilde{\xi}_i \geq 0$ nezamieta na hladine významnosti α .

Ak sa príslušné testované hypotézy v (a), (b), (c) nezamietajú, tak sa nezamieta aj hypotéza $H : X_1 < X_2$ proti $H_A : X_1 \geq X_2$ na hladine významnosti α . V opačnom prípade sa zamieta. Tento tejto hypotézy je ekvivalentný s testom korelácie X a Y na nulu.

5.3 $H : Y(X)$ lineárne nezávisí na X proti $H_A : Y(X)$ lineárne závisí na X

na hladine významnosti α . Nech Y náhodná veličina, ktorá je funkciou od X . Nech sú získané dáta y_i a x_i , $i = 1 \dots n$. Testuje sa hypotéza, či Y je lineárne závislá od X . Použijú sa prostriedky regresnej analýzy. Vytvorí sa model $Y = \beta_1 + \beta_2 \cdot X$. b_2 je bodový odhad β_2 , podobne b_1 je bodový odhad β_1 . Spočítajú sa podľa [1]

$$b_2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}, \quad b_1 = \bar{y} - b_2 \bar{x},$$

\bar{y} a \bar{x} sú výberové priemery. Ďalej

$$s^2 = \frac{1}{n-2} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - b_1 \sum_{i=1}^n y_i - b_2 \sum_{i=1}^n x_i y_i \right), \quad v = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

Testuje sa hypotéza $H : \beta_2 = 0$ proti $H_A : \beta_2 \neq 0$ na hladine významnosti α . Nezamieta sa ak

$$|t| = \left| \frac{b_2}{s \sqrt{v}} \right| \leq t_{1-\alpha/2}(n-2).$$

$t_{1-\alpha/2}(n-2)$ je kvantil študentovho rozdelenia s $n-2$ stupňami voľnosti. Ak sa nezamieta táto hypotéza, potom sa nezamieta aj hypotéza, že Y lineárne nezávisí na X , proti alternatívnej hypotéze, že lineárne závisí na hladine významnosti α .

5.4 p -hodnota

Vo vyššie popísaných testoch hypotéz sa vyjadrili testovacie kritéria t pre jednotlivé testy. Je to realizácia náhodnej veličiny T . V analýzach v 6. a 7. kapitole nie je uvádzaný iba záver (H sa zamieta/nezamieta), ale aj tzv. p -hodnota (tiež nazývaná signifikácia). Formálne sa definuje pre obojstrannú alternatívnu hypotézu ($H_A : \neq$) ako

$$p = 2 \cdot (1 - P(T \leq t)),$$

pre jednostrannú alternatívnu hypotézu ($H_A : \geq$)

$$p = 1 - P(T \leq t).$$

Slovne popísané, p -hodnota vyjadruje najmenšiu hladinu významnosti testu, na hladine významnosti ktorej by bola hypotéza H pri danej realizácii t zamietnutá. Platí teda, že čím je nižšia p -hodnota testu, tým menšiu nám tento test indikuje pravdepodobnosť platnej hypotézy. Tzn. ak sa testuje hypotéza na hladine významnosti α , tak ak $p > \alpha$, hypotéza sa nezamieta, v opačnom prípade ($p \leq \alpha$) sa zamieta.

Presný výpočet p -hodnoty vedie cez distribučnú funkciu náhodnej veličiny T , ktorá je rozdielna pre rôzne testy. Často je to analyticky neriešiteľný integrál. Jej hodnoty sú preto tabulované. Na získanie p -hodnôt v tejto práci sa používal software Minitab a Microsoft Office Excel.

6 Výsledky z reálnych meraní

Pomocou filtrov opísaných v kapitole 4 sa pretransformovali namerané údaje z bistatického radaru počas sledovania letu ľahkého jedno-vrtulového lietadla na kartézsku polohu a rýchlosť v priestore. Konfigurácia vysielačov a prijímačov je rovnaká ako na obrázku č. 2.2. Prípustné výsledky sa získali len filtermi Sampling Importance Resampling (SIR), Auxiliary Sampling Importance Resampling a Regularized. Ostatné spomenuté filtre v kapitole 4 nemali prípustné výsledky (nezachytili tvar trajektórie), preto už nebudú v tejto a ďalších kapitolách uvažované.

6.1 Nastavenia parametrov časticových filtrov

Počet generovaných častíc filtermi je 1000. Matice \mathbf{U} a \mathbf{V} sú v závislosti od času konštantné. Preto sa bude vynechávať pri týchto maticiach časový index k . Ich hodnoty sú

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 700 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 700 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-6} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 400 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 400 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

Matica \mathbf{V} je daná výrobcom, ktorý pre každú súradnicu má odhadovaný rozptyl (prvky na diagonále variačnej matice). Matica \mathbf{U} bola odhadnutá pokusne. V matici \mathbf{U} je možné postrehnúť výrazne nižšie hodnoty pre 3. a 6. hodnotu na diagonále. Odpovedajú polohe a rýchlosti v osi z . Ich vplyv na odhad musí byť takýmto spôsobom „potlačený“, najmä to platí pre rýchlosť (6. súradnicu). Súvisí to s problematickým meraním výšky pri bistatickom radare. Je to dané tvarom elipsoidov na obrázku 2.2. Vzdialenosť medzi jednotlivými prijímačmi a vysielačmi je 15 – 20 km, zatiaľ čo výška lietadla nad terénom sa pohybuje do 1 km. Nepomáha tomu ani fakt, že vysielače a prijímače sa nachádzajú v približne rovnakej nadmorskej výške. Toto je však spôsobené tvarom terénu a je to veľmi ťažko ovplyvniteľné.

Vektorové pole \mathbf{a} (3.1) bolo zvolené tak, že sa predpokladá rovnomerný priamočiary pohyb (RPP) cieľa.

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{U}) = \begin{pmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \\ x_4^{(k-1)} + \Delta t^{(k)} \cdot x_1^{(k-1)} \\ x_5^{(k-1)} + \Delta t^{(k)} \cdot x_2^{(k-1)} \\ x_6^{(k-1)} + \Delta t^{(k)} \cdot x_3^{(k-1)} \end{pmatrix} + \mathbf{u}; \quad \mathbf{u} \sim N(\mathbf{o}, \mathbf{U}). \quad (6.2)$$

Stavový vektor $\mathbf{x}^{(k)} = (\mathbf{r}^{(k)\top}, \mathbf{v}^{(k)\top})^\top$ má 6 súradníc (rovnako ako variačná matica \mathbf{U}). Prvé tri súradnice predstavujú polohu $\mathbf{r}^{(k)}$ v priestore. Posledné tri predstavujú rýchlosť $\mathbf{v}^{(k)}$.

Pre hodnotu $\Delta t^{(k)}$ platí $\Delta t^{(k)} = t^{(k)} - t^{(k-1)}$ a $t^{(k)}$ je čas v sekundách v časovom kroku k . V reálnych meraniach spracovávaných v tejto kapitole sa $\Delta t^{(k)}$ pohybuje zvyčajne intervale od 1 do 1,5 s. Vektorové pole \mathbf{b} (3.2) je odvodené z bistatických meraní polohy a rýchlosti (popísaných v 2. kapitole) podľa [7].

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{R_1}\| + \|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{T_1}\| \\ \|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{R_1}\| + \|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{T_2}\| \\ \|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{R_2}\| + \|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{T_1}\| \\ \|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{R_2}\| + \|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{T_2}\| \\ \left(\frac{\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{R_1}}{\|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{R_1}\|} + \frac{\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{T_1}}{\|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{T_1}\|} \right)^\top \cdot \mathbf{v}^{(k)} \\ \left(\frac{\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{R_1}}{\|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{R_1}\|} + \frac{\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{T_2}}{\|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{T_2}\|} \right)^\top \cdot \mathbf{v}^{(k)} \\ \left(\frac{\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{R_2}}{\|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{R_2}\|} + \frac{\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{T_1}}{\|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{T_1}\|} \right)^\top \cdot \mathbf{v}^{(k)} \\ \left(\frac{\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{R_2}}{\|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{R_2}\|} + \frac{\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{T_2}}{\|\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}_{T_2}\|} \right)^\top \cdot \mathbf{v}^{(k)} \end{pmatrix} + \mathbf{v}; \quad \mathbf{v} \sim N(\mathbf{o}, \mathbf{V}) \quad (6.3)$$

Vektory \mathbf{r}_{T_i} a \mathbf{r}_{R_i} sú polohové vektory i -teho vysielača a i -teho prijímača. $\mathbf{r}^{(k)}$ je polohový vektor stavu cieľa v čase k (prvé tri súradnice stavového vektora $\mathbf{x}^{(k)}$). Vektor meraní $\mathbf{y}^{(k)}$ má 8 súradníc. Prvé 4 predstavujú bistatické polohy pre jednotlivé štyri páry, druhé 4 predstavujú bistatické rýchlosti.

Pre vedenie cieľa pomocou filtrov je nutné zadať počiatočný stav. Vychádza to z toho, že vektorové pole \mathbf{a} je funkciou $\mathbf{x}^{(k-1)}$, stavu v predchádzajúcom kroku. V tomto prípade sa za počiatočný stav berie hodnota z palubnej GPS v časovom kroku $k = 1$. Ak by neboli GPS merania k dispozícii, je možné spočítať počiatočný stav ako prienik elipsoidov, teda sústavu nelineárnych rovníc.

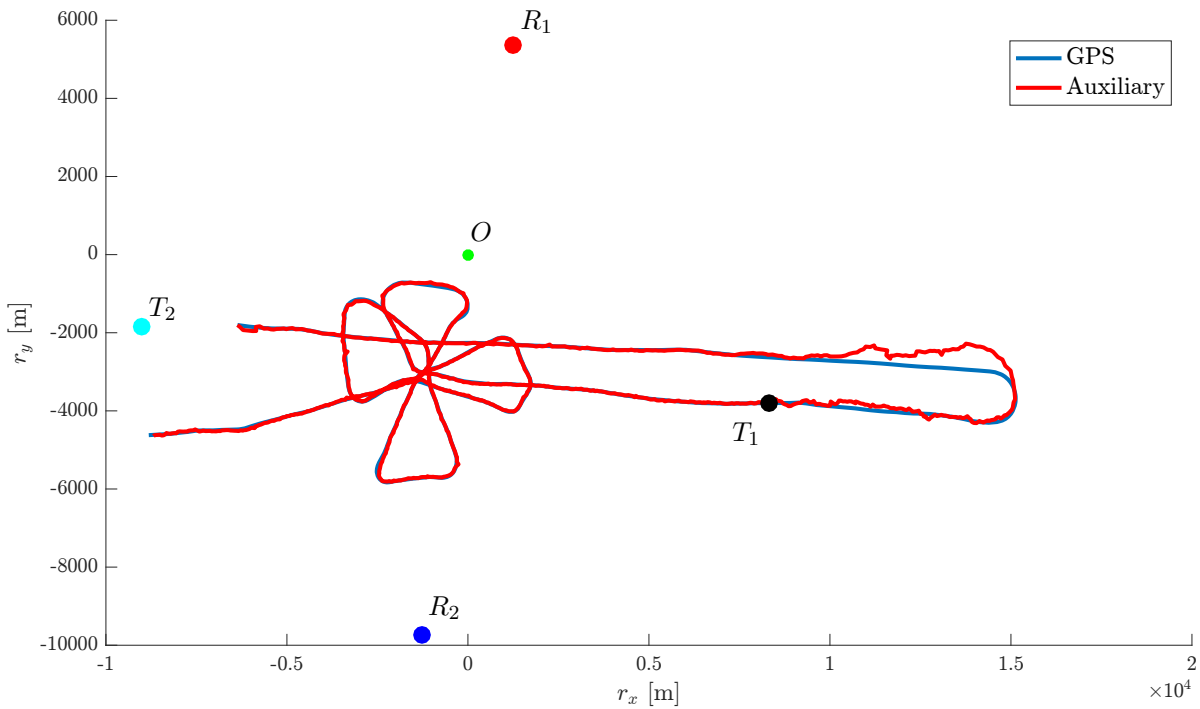
6.2 Referenčné GPS dáta

Na porovnanie vedenia cieľa pomocou filtrov sú použité GPS dáta z palubnej GPS lietadla. Hodnoty sú v stupňoch, minútach a sekundách pre geografickú dĺžku, šírku a výška v metroch vzhľadom k referenčnému elipsoidu definovaného systémom WGS-84 – viď [21]. Na zabezpečenie čo najvyššej výpovednej hodnoty GPS meraní je použitá iteračná Vincentova rekurentná formula (viď [19]). Poskytuje presnosť prepočtu s chybou do 1 mm pri vzdialenosti dvoch bodov na zemi so zadanými geografickými súradnicami. Rýchlosť GPS je spočítaná pomocou doprednej diferencie zo známych polôh GPS. Časový krok $\Delta t_{\text{GPS}}^{(k)}$ je rôzny v závislosti od času (zvyčajne sa pohybuje v intervale od 4 do 6 s).

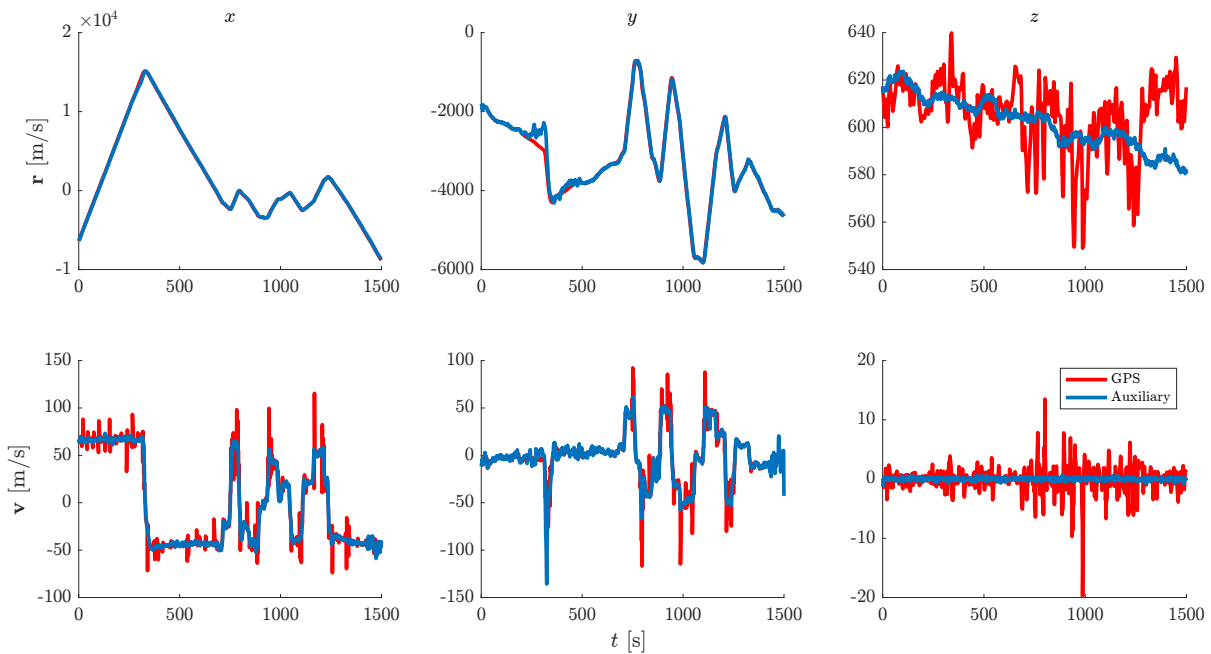
Je všeobecne známe, že lokácia pomocou GPS poskytuje relatívne dobrú presnosť pri zistení geografickej dĺžky a šírky. V tomto prípade polohy r_x a r_y . Horšie je to už s výškou nad terénom r_z . Tam sú merania GPS pomerne nepresné. Tým že rýchlosť je len dopočítaná z polohy, sa chyba zistenia polohy roznáša aj na hodnotu rýchlosti a aj rýchlosť GPS má nezanedbateľnú chybovosť. GPS merania teda rozhodne nie je možné považovať za presné, ale len za približné s nie výraznou, ale významnou chybou. Teda rozdiel GPS stavu $\mathbf{x}^{\text{GPS}(k)}$ a odhadu stavu $\mathbf{x}^{*(k)}$ nie je chyba odhadu od skutočného stavu.

6.3 Výsledky vedenia cieľa

Na obrázkoch 6.1 a 6.2 je znázornené len vedenie cieľa pomocou Auxiliary časticového filtra kvôli prehľadnosti. Vedenie ostatnými filtermi bolo v grafoch na pohľad veľmi podobné.



Obr. 6.1: Vedenie cieľa pomocou Auxiliary časticového filtra pri pohľade zhora



Obr. 6.2: Vedenie cieľa pomocou Auxiliary časticového filtra rozkreslené pre všetky súradnice polohy a rýchlosti

Na obrázku 6.1 je dobre vidieť, že vedenie cieľa mimo štvoruholník $T_1R_1T_2R_2$ je oveľa horšie ako vnútri tohto štvoruholníka. Preto sú výsledky porovnávané oddelene podľa toho, či sa cieľ nachádzal vnútri alebo mimo spomenutý štvoruholník.

Ako je napísané v úvode tejto kapitoly, sú porovnávané iba filtre SIR, Auxiliary a Regularized. Ostatné filtre zo 4. kapitoly nezachytili tvar trajektórie lietadla, preto nie sú uvažované.

Tabuľka 6.1: Vyhodnotenie vedenia leteckého cieľa vnútri štvoruholníka $R_1T_1R_2T_2$ podľa jednotlivých súradníc stavového vektora

	$i =$	1	2	3	4	5	6
$\overline{(x_i^* - x_i^{\text{GPS}})}$	SIR	3,72	0,34	2,29	-0,71	-0,66	0,36
	Auxiliary	4,57	0,84	0,62	-0,74	-0,55	0,37
	Regularized	5,53	1,24	33,73	-0,82	-0,49	0,38
		[m]	[m]	[m]	[m/s]	[m/s]	[m/s]
$s^2(x_i^* - x_i^{\text{GPS}})$	SIR	4437,27	2054,39	374,64	119,27	115,24	8,12
	Auxiliary	4317,28	2205,94	301,64	118,46	113,83	8,17
	Regularized	4495,94	2122,98	489,71	116,08	112,61	8,05
		[m ²]	[m ²]	[m ²]	[m ² /s ²]	[m ² /s ²]	[m ² /s ²]
$\max x_i^* - x_i^{\text{GPS}} $	SIR	161,51	115,39	52,19	59,23	57,53	19,59
	Auxiliary	163,39	131,96	47,33	60,23	57,06	19,75
	Regularized	176,33	124,99	90,17	58,96	58,01	19,58
		[m]	[m]	[m]	[m/s]	[m/s]	[m/s]

Súradnice $i = \{1, 2, 3\}$ poloha, $i = \{4, 5, 6\}$ rýchlosť.

$\overline{(\cdot)}$ výberová stredná hodnota, $s^2(\cdot)$ výberový rozptyl, $\max|\cdot|$ maximum z absolútnej hodnoty

Výpočet hodnôt $x_i^* - x_i^{\text{GPS}}$, ktoré majú charakter náhodnej veličiny, je sprevádzaný problémom, pretože merania radaru a GPS nie sú v rovnakom čase. Tiež frekvencia týchto meraní je rozdielna. Radar robí merania približne každú sekundu až sekundu a pol, zatiaľ čo GPS každé 2 až 4 s. Aby bolo možné spočítať spomenutý rozdiel, tak odhadované stavy radarom x_i^* boli preložené splajnom 3. stupňa. V časoch merania GPS bolo už možné spočítať rozdiely. Prekladané boli hodnoty z radaru, pretože merania radarom boli robené častejšie. Predpokladalo sa tak, že chyba spôsobená interpoláciou bude menšia ako keby sa prekladali dáta z GPS, ktoré boli merané približne 3 krát menej častejšie.

Z obrázku 6.1 sa dá posúdiť, že vedenie cieľa je dobré v polohe v rovine xy , pokiaľ sa cieľ nachádza vo štvoruholníku $R_1T_1R_2T_2$. Mimo neho je poloha v rovine veľmi skreslená, najmä v y -vej súradnici. V tabuľke 6.1 je vidieť výrazne horší výsledok filtru Regularized pre 3. súradnicu stavového vektora v porovnaní s ostatnými dvoma filtrami. Je to vidieť v riadku so strednou hodnotou ako aj s maximálnou hodnotou. V tabuľke 6.2 naopak opäť citeľne najhoršie obstál filter Regularized v 2. súradnici. Celkovo z tabuliek s výsledkami 6.1 až 6.3 sa dá usúdiť, že zatiaľ čo v prípade rýchlosti majú filtre podobné výsledky, v polohe sa jasným porazeným stáva filter Regularized. Je to dobre viditeľné v tabuľke 6.3.

6.3 VÝSLEDKY VEDENIA CIELA

Tabuľka 6.2: Vyhodnotenie vedenia leteckého cieľa mimo štvoruholníka $R_1T_1R_2T_2$ podľa jednotlivých súradníc stavového vektora

	$i =$	1	2	3	4	5	6
$\overline{(x_i^* - x_i^{\text{GPS}})}$	SIR	-13,02	99,55	-0,81	1,70	-6,83	-0,05
	Auxiliary	-28,32	-28,32	-5,10	1,49	-4,56	-0,10
	Regularized	-29,24	209,43	5,23	1,56	-5,58	-0,06
		[m]	[m]	[m]	[m/s]	[m/s]	[m/s]
$s^2(x_i^* - x_i^{\text{GPS}})$	SIR	25591,35	53816,99	286,06	87,90	427,43	2,69
	Auxiliary	28298,50	45292,97	154,69	96,61	308,32	2,57
	Regularized	30226,02	71830,57	202,97	97,42	419,49	2,50
		[m ²]	[m ²]	[m ²]	[m ² /s ²]	[m ² /s ²]	[m ² /s ²]
$\max x_i^* - x_i^{\text{GPS}} $	SIR	484,62	745,99	25,99	42,42	107,69	3,84
	Auxiliary	359,10	757,68	37,88	41,12	102,22	3,83
	Regularized	464,40	744,59	35,79	42,63	108,43	3,92
		[m]	[m]	[m]	[m/s]	[m/s]	[m/s]

Súradnice $i = \{1, 2, 3\}$ poloha, $i = \{4, 5, 6\}$ rýchlosť.

$\overline{(\cdot)}$ výberová stredná hodnota, $s^2(\cdot)$ výberový rozptyl, $\max|\cdot|$ maximum z absolútnej hodnoty

Tabuľka 6.3: Vektorové charakteristiky vedenia leteckého cieľa zvlášť pre polohu a rýchlosť

	$\ \mathbf{r}^* - \mathbf{r}^{\text{GPS}}\ $ [m]	$\max\ \mathbf{r}^* - \mathbf{r}^{\text{GPS}}\ $ [m]	$\ \mathbf{v}^* - \mathbf{v}^{\text{GPS}}\ $ [m/s]	$\max\ \mathbf{v}^* - \mathbf{v}^{\text{GPS}}\ $ [m/s]
vnútri $R_1T_1R_2T_2$				
SIR	79,56	162,05	10,33	64,23
Auxiliary	79,14	166,38	10,33	65,07
Regularized	87,66	196,36	10,17	63,95
mimo $R_1T_1R_2T_2$				
SIR	236,83	720,52	14,26	109,67
Auxiliary	245,83	817,49	12,45	113,21
Regularized	273,17	1018,21	13,64	111,95

$\|\cdot\|$ stredná hodnota z euklidovských noriem vektorov,

$\max\|\cdot\|$ maximálna hodnota z euklidovských noriem vektorov,

[·] jednotka fyzikálnej veličiny.

Toto je však len veľmi hrubý úsudok. Štatisticky správne je potrebné porovnať filtre testami popísanými v 5. kapitole.

Tabuľky a obrázky uvedené v tomto odseku slúžia najmä na lepšie znázornenie situácie a utvorenie si predstavy o konkrétnych hodnotách.

6.4 Test na zhodu odhadu stavov a GPS referencií

V tomto odseku sa spravili testy hypotéz $H : x_i^* = x_i^{\text{GPS}}$ voči alternatívnej hypotéze $H_A : x_i^* \neq x_i^{\text{GPS}}$ na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ (viď odsek 5.1) postupne pre všetky súradnice a filtre SIR, Auxiliary a Regularized. Výsledky testov sú v tabuľke 6.4. Sú v nej uvedené p -hodnoty. Testy boli robené na hladine $\alpha = 0,05$. Ak $p \leq 0,05$, hypotéza zhody meraní a referencií sa zamietá. Inak nezamietá. Ak nie je pri p -hodnote *, bol použitý znamienkový test. Ak je jedna * Wilcoxonov test a 2 * t -test. Teda čím viac hviezdíčiek pri hodnote, tým je sila testu vyššia.

Tabuľka 6.4 je rozdelená na dve časti, vedenie cieľa vnútri štvoruholníka $R_1T_1R_2T_2$ a mimo neho. Najskôr sa sústredíme na prvú časť, teda vedenie vnútri tohto štvoruholníka a to zvlášť pre polohu ($i = \{1, 2, 3\}$) a rýchlosť ($i = \{4, 5, 6\}$). Pre polohu vo všetkých filtroch sa hypotéza nezamietá pre súradnice x, y a zamietá pre výšku, teda súradnicu z . Najvyššie p -hodnoty pre polohu má SIR filter, teda má aj najvyššiu pravdepodobnosť platnosti H . Čo sa týka rýchlosti vnútri $R_1T_1R_2T_2$, tak H sa nezamietá pre všetky súradnice jedine v prípade filtra Auxiliary.

Teraz sa sústredíme na časť mimo $R_1T_1R_2T_2$. Zaujímavá je pomerne vysoká p -hodnota pre polohu v súradnici x – filter Auxiliary. Ďalej vysoké p -hodnoty pre všetky filtre vo všetkých súradniciach rýchlosti. Tu však toto nemusí znamenať požadovanú presnosť. Ako bolo spomenuté v odseku 6.2, merania GPS rýchlosti nemusia mať dobrú presnosť. V súradniciach je tiež relatívne vysoký rozptyl, ktorý znižuje hodnotu testového kritéria a tým zvyšuje p -hodnotu. Tento problém sa odstráni v 7. kapitole. Tu budú vygenerované teoretické merania bistatického radaru k známym polohám, teda budú známe presné hodnoty stavov.

Tabuľka 6.4: Výsledky testovania $H : x_i^* = x_i^{\text{GPS}}$ proti $H_A : x_i^* \neq x_i^{\text{GPS}}$, $\alpha = 0,05$.

$i =$	1	2	3	4	5	6
vnútri $R_1T_1R_2T_2$						
SIR	0,10	0,86*	0,00	0,10	0,30	0,03
Auxiliary	0,09	0,19*	0,01	0,19	0,38	0,09
Regularized	0,08	0,47	0,00	0,21	0,18	0,05
mimo $R_1T_1R_2T_2$						
SIR	0,02	0,01	0,05	0,75	1,00	0,79**
Auxiliary	0,59	0,00	0,00**	0,91	0,75	0,86**
Regularized	0,07	0,00	0,00**	0,60	0,75	0,78**

Sú vypísané p -hodnoty pre jednotlivé súradnice.

Súradnice i predstavujú súradnice stavového vektora \mathbf{x} .

Súradnice $i = \{1, 2, 3\}$ polohy a $i = \{4, 5, 6\}$ rýchlosť.

Ak je číslo hrubým, hypotéza zhody sa nezamietá, inak sa zamietá.

(**) – t -test, (*) – Wilcoxonov test, inak znamienkový test

6.5 Vplyv počtu generovaných častíc na presnosť odhadu

Jedným z parametrov filtra je počet generovaných častíc. V odseku 6.3 všetky filtre generovali 1000 častíc. Nakoľko váhové koeficienty aproximujú aposteriornu hustotu, viď odsek 4.3, dalo by sa intuitívne predpokladať, že so vzrastajúcim počtom častíc sa bude aproximácia zlepšovať. Takáto úvaha, ako sa ukáže v tomto odseku, však nemusí byť správna.

Na ukážku sa použil SIR filter. Najskôr sa prefiltrovali hodnoty s 1000 časticami. Potom so 100 000 časticami. Odhady stavov z filtra s 1000 generovanými časticami sú označené \mathbf{x}_s^* a so 100 000 časticami \mathbf{x}_t^* . Porovnali sa tieto dve merania testom hypotézy $H : x_{s,i}^* = x_{t,i}^*$ proti alternatívnej hypotéze $H_A : x_{s,i}^* \neq x_{t,i}^*$ na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ pre všetky súradnice i postupom popísaným v odseku 5.1.

Tabuľka 6.5: $H : x_{s,i}^* = x_{t,i}^*$ proti $H_A : x_{s,i}^* \neq x_{t,i}^*$, $\alpha = 0,05$.

$i =$	1	2	3	4	5	6
vnútri $R_1T_1R_2T_2$	0,83*	0,09	0,44*	0,44*	0,82*	0,44*
mimo $R_1T_1R_2T_2$	0,91	0,02	0,00	0,01*	0,60	0,25*

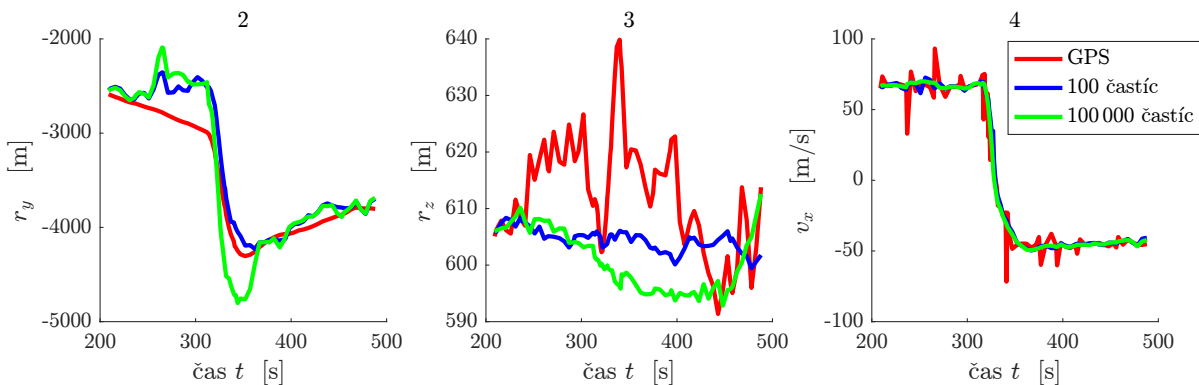
Sú vypísané p -hodnoty pre jednotlivé súradnice.

Ak je číslo hrubým, hypotéza zhody sa nezamieta, inak sa zamieta.

(*) – Wilcoxonov test, inak znamienkový test.

Opäť nech sa posúdia výsledky zvlášť pre vedenie vnútri a mimo $R_1T_1R_2T_2$. Hypotéza zhody H sa nezamieta pre všetky súradnice. Navyše p -hodnoty sú pomerne vysoké (s výnimkou 2. súradnice). Môže sa teda vyvodiť záver, že rozdiel medzi použitím 1000 a 100 000 časticami nie je štatisticky významný pre vedenie cieľa vnútri štvoruholníka $R_1T_1R_2T_2$.

Obdobný záver sa môže vyvodiť pre 1., 5., 6. súradnicu mimo $R_1T_1R_2T_2$. Zostáva posúdiť 2. – 4. súradnicu, kde sa hypotéza zamieta. Na obrázku 6.3 je vykreslené vedenie cieľa počas letu mimo štvoruholník $R_1T_1R_2T_2$, kedy cieľ vyletel mimo neho, spravil otočku a vrátil sa naspäť do tohto štvoruholníka, trajektóriu letu vidieť na obrázku č. 6.1.



Obr. 6.3: Vedenie cieľa pre 2., 3., 4. súradnicu stavového vektora mimo štvoruholník $R_1T_1R_2T_2$ filtrom SIR so 1000 a 100 000 časticami

Na obrázku 6.3 filter so 100 000 generovanými časticami rozhodne nepôsobí dojmom, že by jeho výsledky boli lepšie, práve naopak. Vidieť to na 2. súradnici stavového vektora, teda polohy v osi y (na obrázku 6.3 úplne vľavo). Tento jav je možné logicky zdôvodniť.

Z obrázku 6.1 je možné usúdiť, že radarové merania mimo $R_1T_1R_2T_2$ sú skreslené a sú nepresné. V 3. kapitole je popísané, ako filtre fungujú s využitím Bayesovej vety. Zmyslom určenia aposteriórnej hustoty na základe funkcie vierohodnosti meraní $g(\mathbf{y}^{(k)}|\mathbf{x}^{(k)})$ a apriórnej hustoty $p(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k-1)})$ je, že ak nejaká oblasť uvažovaného priestoru má v čase k má

$$P(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k-1)}) = 0 \xrightarrow{(3.4)} P(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k)}) = 0,$$

bez ohľadu na hodnotu $g(\mathbf{y}^{(k)}|\mathbf{x}^{(k)})$, funkciu vierohodnosti meraní. Toto je podstatná výhoda Bayesovho odhadu. P predstavuje pravdepodobnosť.

Nech v čase k dôjde k chybnému radarovému meraniu (k akému evidentne dochádza mimo štvoruholník $R_1T_1R_2T_2$). Funkcia vierohodnosti meraní $g(\mathbf{y}^{(k)}|\mathbf{x}^{j(k)})$ má významné hodnoty v oblasti s nízkou pravdepodobnosťou z apriórnej hustoty $P(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{Y}^{(k-1)})$. To znamená, že v tejto oblasti je aj veľmi malá hustota vygenerovaných častíc. Funkcia vierohodnosti $g(\mathbf{y}^{(k)}|\mathbf{x}^{j(k)})$ nemá akým časticiam priradiť významnú hodnotu váhového koeficientu a chybné merania nebudú brané do úvahy. Výrazne väčší počet častíc však umožňuje pokryť väčšiu plochu uvažovaného pravdepodobnostného priestoru a tým zvyšuje pravdepodobnosť, že aj oblasť s veľmi nízkou pravdepodobnosťou z apriórnej hustoty bude pokrytá časticami.

Z vyššie uvedeného je možné vyjadriť záver, že v tomto prípade sledovania cieľa nie je vedenie cieľa vnútri $R_1T_1R_2T_2$ štatisticky významné. Navyše mimo tento štvoruholník, kde sú merania chybné, ešte môže zvýšiť nepresnosť odhadu.

Vyššie uvedené výsledky sú podmienené tým, že apriórna hustota je informatívna. Teda už je dostatočne blízka aposteriórnej hustote. Sú aj dôkazom o tom, že apriórna hustota v tomto modeli získaná pomocou vektorového poľa \mathbf{a} je dostatočne blízka aposteriórnej hustote.

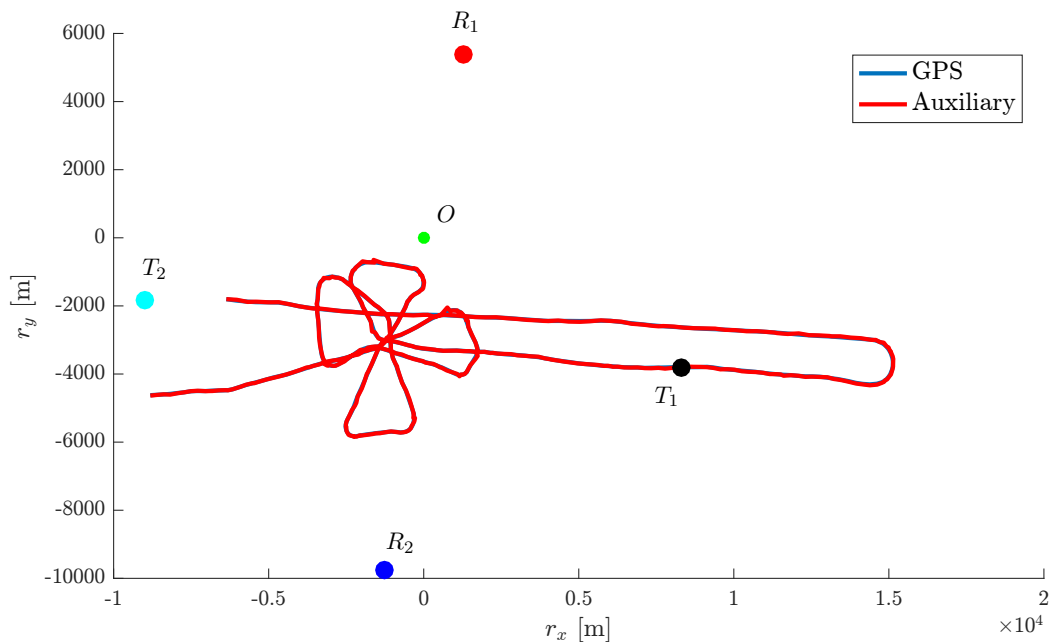
V opačnom prípade, ak by nebola informatívna apriórna hustota (neinformatívna apriórna hustota je hustota rovnomerného rozdelenia), tak by logicky navyšovanie častíc pomáhalo lepšie pokryť daný priestor a zlepšovalo presnosť odhadu stavu leteckého cieľa.

7 Spracovanie teoretických meraní

V tejto kapitole sú filtrované tzv. teoretické, resp. teoreticky vygenerované merania. Myslí sa tým, že ku známemu stavu $\mathbf{x}^{(k)}$ sa spočítajú merania $\mathbf{y}^{(k)}$ rovnicou (3.2). Následne pomocou týchto meraní sa filtrami získa odhad stavu $\mathbf{x}^{*(k)}$. Takýto postup má význam v tom, že je možné objektívne posúdiť presnosť odhadu stavu $\mathbf{x}^{*(k)}$, nakoľko skutočná hodnota stavu $\mathbf{x}^{(k)}$ je známa. Je potlačený vplyv chybných meraní radaru a tiež je možné testovať filtre na rôzne trajektórie a rýchlosti leteckého cieľa.

7.1 Test teoretických meraní z GPS dát

V tomto odseku sú filtrované teoretické merania spočítané z GPS dát preletu riešenom v 6. kapitole. Teda za hodnotu presných stavov sa považujú prepočítané GPS merania na kartézsku polohu a rýchlosť $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{\text{GPS}(k)}$. Nastavenia filtrov sú rovnaké ako v odseku 6.1. Rovnaké ako boli pri spracovaní reálnych meraní v 6. kapitole. Toto má význam aby mohli byť porovnané obidve filtrácie teoretických aj reálnych meraní.



Obr. 7.1: Vykreslenie vedenia cieľa pre teoretické merania z GPS dát filtrom Auxiliary.¹

Na obrázku 7.1 je vidieť, že (podľa očakávaní) už nie je tak výrazný rozdiel v presnosti odhadu medzi letom vnútri a mimo štvoruholník $R_1T_1R_2T_2$. Napriek tomu budú porovnané výsledky opäť vyhodnocované zvlášť pre let vnútri a mimo štvoruholníka $R_1T_1R_2T_2$. Je to z dôvodu možného porovnania s výsledkami filtrácie reálnych meraní. Tiež vďaka tomu budú viditeľnejšie rozdiely medzi filtráciou teoretických a reálnych meraní. Číselné výsledky sú uvedené v tabuľkách 7.1, 7.2 a 7.3. Je vhodné ich porovnať s tabuľkami 6.1, 6.2 a 6.3, v ktorých sú uvedené rovnaké číselné charakteristiky, avšak pre filtráciu reálnych meraní.

¹Rovnaká schéma s rovnakým filtrom je na obrázku 6.1 pre reálne merania.

Tabuľka 7.1: Vyhodnotenie vedenia leteckého cieľa vnútri štvoruholníka $R_1T_1R_2T_2$ podľa jednotlivých súradníc stavového vektora pre teoretické merania

		$i =$	1	2	3	4	5	6
$\overline{(x_i^* - x_i)}$	SIR		5,33	2,96	21,09	-0,50	0,38	0,39
	Auxiliary		1,79	-0,35	8,64	0,05	0,41	0,40
	Regularized		-2,58	2,94	51,64	-0,37	0,59	0,40
			[m]	[m]	[m]	[m/s]	[m/s]	[m/s]
$s^2(x_i^* - x_i)$	SIR		770,43	527,12	469,18	60,85	70,08	8,17
	Auxiliary		231,26	263,95	440,37	8,36	37,69	8,03
	Regularized		482,44	514,64	686,92	41,91	74,04	8,25
			[m ²]	[m ²]	[m ²]	[m ² /s ²]	[m ² /s ²]	[m ² /s ²]
$\max x_i^* - x_i $	SIR		158,31	115,27	71,21	84,70	93,44	19,78
	Auxiliary		79,18	97,94	60,24	21,09	79,26	19,78
	Regularized		150,22	101,23	113,65	82,78	85,96	19,78
			[m]	[m]	[m]	[m/s]	[m/s]	[m/s]

Viď pod tabuľkou 7.2.

Tabuľka 7.2: Vyhodnotenie vedenia leteckého cieľa mimo štvoruholníka $R_1T_1R_2T_2$ podľa jednotlivých súradníc stavového vektora

		$i =$	1	2	3	4	5	6
$\overline{(x_i^* - x_i)}$	SIR		7,21	5,80	15,04	0,21	1,26	-0,02
	Auxiliary		7,70	1,20	-7,17	0,18	0,50	-0,04
	Regularized		8,55	18,56	37,75	0,62	0,94	-0,07
			[m]	[m]	[m]	[m/s]	[m/s]	[m/s]
$s^2(x_i^* - x_i)$	SIR		389,65	1209,93	191,40	7,36	39,89	2,54
	Auxiliary		60,43	281,58	183,58	0,87	8,35	2,56
	Regularized		274,04	3789,42	117,66	32,34	38,58	2,56
			[m ²]	[m ²]	[m ²]	[m ² /s ²]	[m ² /s ²]	[m ² /s ²]
$\max x_i^* - x_i $	SIR		136,67	137,65	43,53	14,62	35,19	3,88
	Auxiliary		26,57	55,61	45,19	2,71	14,03	3,97
	Regularized		92,16	250,53	61,27	47,99	25,99	4,06
			[m]	[m]	[m]	[m/s]	[m/s]	[m/s]

Súradnice $i = \{1, 2, 3\}$ poloha, $i = \{4, 5, 6\}$ rýchlosť.

$\overline{(\cdot)}$ výberová stredná hodnota, $s^2(\cdot)$ výberový rozptyl, $\max |\cdot|$ maximum z absolútnej hodnoty

7.1 TEST TEORETICKÝCH MERANÍ Z GPS DÁT

Tabuľka 7.3: Vektorové charakteristiky vedenia leteckého cieľa zvlášť pre polohu a rýchlosť pri teoretických meraniach

	$\overline{\ \mathbf{r}^* - \mathbf{r}\ }$ [m]	$\max\ \mathbf{r}^* - \mathbf{r}\ $ [m]	$\overline{\ \mathbf{v}^* - \mathbf{v}\ }$ [m/s]	$\max\ \mathbf{v}^* - \mathbf{v}\ $ [m/s]
vnútri $R_1T_1R_2T_2$				
SIR	38, 46	174, 82	5, 73	94, 59
Auxiliary	26, 21	116, 59	3, 68	81, 80
Regularized	59, 45	197, 77	5, 62	86, 24
mimo $R_1T_1R_2T_2$				
SIR	37, 27	153, 82	4, 49	38, 26
Auxiliary	23, 06	56, 26	2, 87	14, 35
Regularized	61, 51	255, 69	5, 14	54, 58

[.] jednotka fyzikálnej veličiny.

$\overline{\|\cdot\|}$ stredná hodnota z euklidovských noriem vektorov,

$\max\|\cdot\|$ maximálna hodnota z euklidovských noriem vektorov,

Najskôr nech sa porovnajú číselné charakteristiky v tabuľkách 7.1 s teoretickými meraniami a 6.1 s reálnymi meraniami. Pri strednej hodnote je zaujímavá výrazne vyššia hodnota v 3. súradnici pre všetky tri filtre. Presnejšie bude významnosť rozdielu analyzovaná pomocou štatistických testov v ďalších odsekoch, ale už z tohto je možné predpokladať, že problém so z -tovou súradnicou je pravdepodobne kvôli geometrii elipsoidov a nie len kvôli nepresnostiam reálnych meraní, keďže pri teoretických meraniach sa tento problém opakuje a navyše sa zdá výraznejší. Podstatne nižšie sú hodnoty výberového rozptylu pre všetky súradnice. Hodnoty maximálnej odchýlky sú výrazne nižšie vo filtri Auxiliary oproti SIR a Regularized časticovým filtrom.

Pri porovnaní tabuliek 6.2 a 7.2 došlo k poklesu všetkých charakteristík vo všetkých súradniciach okrem 3. a 6. Tie predstavujú polohu a rýchlosť v osi z . Táto skutočnosť už mohla byť očakávaná pri pohľade na obrázok 7.1. V porovnaní s obrázkom 6.1 je vedenie cieľa v rovinnej polohe xy mimo štvoruholník $R_1T_1R_2T_2$ hladšie a presnejšie. Nakoniec pri porovnaní tabuľky 7.3 s tabuľkou 6.3 došlo k poklesu všetkých hodnôt okrem maximálnych hodnôt vnútri $R_1T_1R_2T_2$. Predpokladá sa, že vyššie hodnoty v maximálnych odchýlkach sú spôsobené chybnými odhadmi vo výške.

Test na zhodu odhadov a skutočných stavov

Rovnakým spôsobom ako v odseku 6.4 sa otestuje hypotéza $H : x_i^* = x_i$ proti alternatívnej hypotéze $H : x_i^* \neq x_i$ na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ pre všetky súradnice i stavového vektora. Test tejto hypotézy je popísaný v odseku 5.1. Výsledky testov pre jednotlivé súradnice sú uvedené v tabuľke č. 7.4, ktorá korešponduje s tabuľkou 6.4 pre odhad z reálnych meraní.

Tabuľka 7.4: Výsledok na test zhody medzi odhadom z teoretických meraní a GPS dátami z preletu lietadla. Test hypotézy $H : x_i^* = x_i$ proti alternatívnej hypotéze $H_A : x_i^* \neq x_i$ na hladine významnosti $\alpha = 0,05$.

$i =$	1	2	3	4	5	6
vnútri $R_1T_1R_2T_2$						
SIR	0,13	0,23	0,00*	0,11	0,80*	0,02*
Auxiliary	0,00*	0,07	0,00	0,20*	0,78*	0,02*
Regularized	0,40	0,11	0,00**	0,72*	0,03*	0,02*
mimo $R_1T_1R_2T_2$						
SIR	0,00*	0,60	0,00**	0,26*	0,75	0,92**
Auxiliary	0,00**	0,92	0,00**	0,08**	0,10**	0,83**
Regularized	0,00	0,34	0,00**	0,75	0,46	0,69**

Sú vypísané p -hodnoty pre jednotlivé súradnice.

Súradnice i predstavujú súradnice stavového vektora \mathbf{x} .

Súradnice $i = \{1, 2, 3\}$ polohy a $i = \{4, 5, 6\}$ rýchlostí.

Ak je číslo hrubým, hypotéza zhody sa nezamieta, inak sa zamieta.

(**) – t -test, (*) – Wilcoxonov test, inak znamienkový test

Z tabuľky 7.4 nie je možné jednoznačne určiť, ktorý filter bol najúspešnejší. V porovnaní s tabuľkou 6.4 došlo k zlepšeniu v 2. súradnici pre vedenie mimo štvoruholník $R_1T_1R_2T_2$. Toto je opäť viditeľné na obrázku č. 7.1. Na druhej strane však pomerne prekvapujúco došlo k zhoršeniu v 1. súradnici. Ešte jeden rozdiel, pre filter Regularized došlo k zhoršeniu aj v piatej súradnici pre vedenie vnútri štvoruholníka $R_1T_1R_2T_2$. Všeobecne sa predpokladalo, že p -hodnoty v tejto tabuľke budú pre všetky súradnice vyššie. K tomuto okrem 2. súradnice mimo $R_1T_1R_2T_2$ nedošlo. Usudzuje sa, že je to spôsobené vplyvom nepresností v osi z . Tiež sa prisudzuje veľký vplyv výrazne nižšiemu výberovému rozptylu s^2 . Uvedený je v tabuľkách 7.1, 7.2 pre teoretické merania a 6.1 a 6.2 pre reálne merania. V t -teste a Wilcoxonovom teste je testové kritérium delené odmocninou z rozptylu (smerodajnou odchýlkou). Ak je tento rozptyl nižší, testovacie kritérium sa zvýši a tým pádom klesne p -hodnota. Toto sa však netýka znamienkového testu.

Porovnanie chyby odhadu pri reálnych a teoretických meraniach

V tomto odseku sa otestuje pomocou štatistických testov, ako sa zmenil rozdiel medzi odhadom stavu \mathbf{x}^* a referenčnou hodnotou stavu \mathbf{x} . Nech $\varepsilon_{i,real}$ označuje rozdiel $x_i^* - x_i^{GPS}$. Teda rozdiel medzi odhadom a GPS referenciou pri filtrácii z reálnych meraní v i -tej súradnici. Podobne $\varepsilon_{i,teor}$ rozdiel $x_i^* - x_i$ pri filtrácii z teoretických meraní pre i -tu súradnicu.

Cieľom je porovnať $\varepsilon_{i,teor}$ a $\varepsilon_{i,real}$ na hladine významnosti $\alpha = 0,05$. Spraví sa to tak, že najskôr sa otestuje hypotéza $H : \varepsilon_{i,teor} = \varepsilon_{i,real}$ proti alternatívnej hypotéze $H_A : \varepsilon_{i,teor} \neq \varepsilon_{i,real}$. Test hypotézy je popísaný v odseku 5.1. V prípade, že sa hypotéza nezamieta, chyba v i -tej súradnici pre príslušný filter sa považuje za štatisticky rovnakú pre filtráciu z reálnych aj teoretických meraní. V opačnom prípade sa ďalej testuje jednostranná hypotéza $H : \varepsilon_{i,teor} < \varepsilon_{i,real}$ proti alternatívnej hypotéze $H_A : \varepsilon_{i,teor} \geq \varepsilon_{i,real}$ na hladine významnosti α . Test tejto hypotézy je popísaný v odseku 5.2. Ak sa neza-

7.2 VPLYV ZAKRIVENIA TRAJEKTÓRIE NA ODHAD STAVU

mietne, chyba $\varepsilon_{i,teor}$ sa považuje za štatisticky menšiu v porovnaní s $\varepsilon_{i,real}$. V opačnom prípade, ak sa zamietne, chyba $\varepsilon_{i,teor}$ sa považuje za štatisticky väčšiu v porovnaní s $\varepsilon_{i,real}$.

Tabuľka 7.5: Porovnanie chýb $\varepsilon_{i,teor}$ a $\varepsilon_{i,real}$ na hladine významnosti $\alpha = 0,05$. Konkrétne znenie testovaných hypotéz je uvedené pod tabuľkou.

	$i = 1$	2	3	4	5	6
vnútri $R_1T_1R_2T_2$						
SIR	=	=**	<	=*	=	=**
Auxiliary	=	=*	<*	=*	=*	=*
Regularized	<	=**	>	=*	>*	=*
mimo $R_1T_1R_2T_2$						
SIR	=	<	>	=	=	=**
Auxiliary	=	<	>	=	=	=**
Regularized	=	<	>	=	=	=

Súradnice i predstavujú súradnice stavového vektora \mathbf{x} .

$i = \{1, 2, 3\}$ poloha, $i = \{4, 5, 6\}$ rýchlosť.

= $\varepsilon_{i,teor}$ a $\varepsilon_{i,real}$ sú štatisticky rovnaké na hladine významnosti $\alpha = 0,05$

= $\varepsilon_{i,teor}$ je štatisticky menšie ako $\varepsilon_{i,real}$ na hladine významnosti $\alpha = 0,05$

= $\varepsilon_{i,teor}$ je štatisticky väčšie ako $\varepsilon_{i,real}$ na hladine významnosti $\alpha = 0,05$

(**) – t -test, (*) – Wilcoxonov test, inak znamienkový test

V tabuľke 7.5 je vidno, že všetky tri filtre majú rovnaké výsledky až na použitý test okrem filtra Regularized pri lete vnútri štvoruholníka $R_1T_1R_2T_2$. Potvrdilo sa, že rovnako pri obrázkoch aj predošlých tabuľkách, chyba pre 2. súradnicu polohy pri lete mimo štvoruholníka $R_1T_1R_2T_2$ je menšia pri teoretických meraniach. Čo je však prekvapivé, v tabuľkách 7.1 až 7.4 výsledky naznačovali, že v prvej súradnici došlo k zhoršeniu, chyba vyzerala byť väčšia pre teoretické merania. Pri tomto teste sa však takýto výsledok poprel.

7.2 Vplyv zakrivenia trajektórie na odhad stavu

Na obrázku z reálneho preletu 6.1 je vidieť, že lietadlo malo úseky letu s rôznym zakrivením trajektórie. V tomto odseku sa otestuje vplyv zakrivenia na výsledný odhad. Toto je možné vďaka teoretickým vygenerovaným meraniam. Testuje sa odhad stavu pre dráhy letu v tvare kružníc najskôr s konštantnou výškou a následne aj so stúpaním/klesaním.

7.2.1 Vplyv zakrivenia dráhy v konštantnej výške

Otestovala sa závislosť vplyvu zakrivenia trajektórie pri konštantnej veľkosti rýchlosti $v = 62$ m/s v konštantnej výške 700 m nad počiatkom súradnicového systému O . Bolo vygenerovaných 38 rôznych preletov, každý mal trajektóriu s konštantnou krivosťou κ . Pre každý prelet sa počítal odhad príslušným filtrom v 400 časových krokoch. Tvar trajektórie je popísaný vektorovým polom

$$\mathbf{r}_\kappa(t) = \left[\frac{1}{\kappa} \cdot \cos\left(\frac{62}{\kappa} \cdot t\right), \frac{1}{\kappa} \cdot \sin\left(\frac{62}{\kappa} \cdot t\right), 700 \right]^\top. \quad (7.1)$$

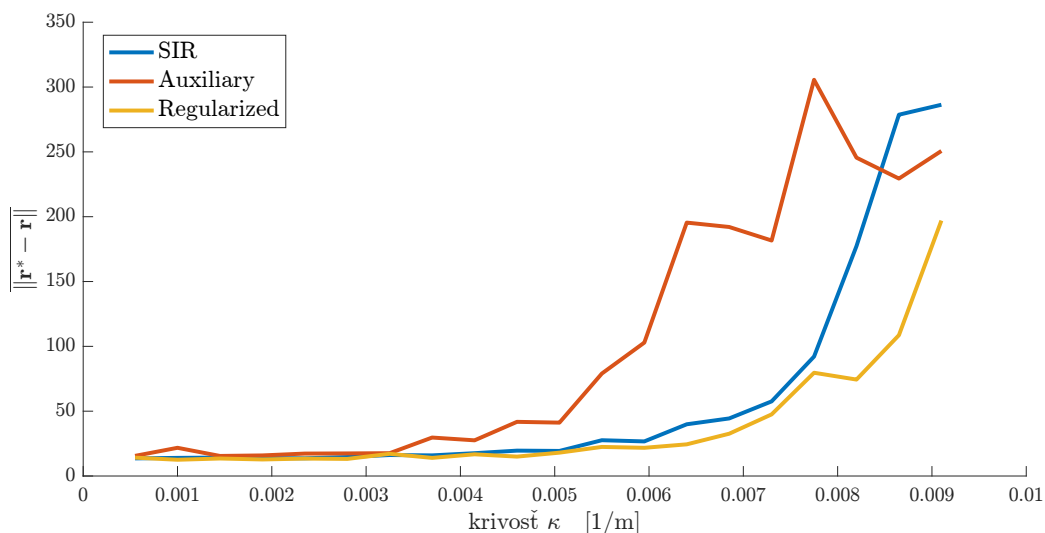
Z rovnice (7.1) je možné ľahko spočítať, že $\|\dot{\mathbf{r}}_\kappa\| = v = 62$ m/s. Tvarom trajektórií sú rovinné kružnice s polomerom $1/\kappa$ vo výške $r_z = 700$.

Nastavenie filtrov

Nastavenie filtrov boli použité rovnaké ako sú popísané v odseku 6.1 s jedinou výnimkou, a to variačnou maticou \mathbf{U} . Je to z dôvodu, že tieto teoretické trajektórie v tvare kružníc sú hladšie ako predchádzajúce spracovávané dáta, preto pri nižších hodnotách prvkov variačnej matice \mathbf{U} dôjde k zlepšeniu výsledkov. Variačná matica použitá v tomto odseku pre test vplyvu zakrivenia dráhy v rovine pri konštantnej rýchlosti je

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-6} \end{pmatrix}.$$

Na obrázku č. 7.2 sú vykreslené výsledky ako stredná hodnota veľkosti chyby odhadu polohy $\|\mathbf{r}^* - \mathbf{r}\|$ v závislosti od krivosti κ . V prípade, že trajektóriou cieľa je kružnica ležiaca v rovine, platí pre krivosť $\kappa = 1/R$, kde R je polomer kružnice.



Obr. 7.2: Vykreslenie závislosti priemernej chyby odhadu polohy od zakrivenia dráhy v rovine. $r_z = \text{konšt.}$, $v_z = 0$. Tvar trajektórie je kružnica. Pre všetky hodnoty bola konštantná veľkosť rýchlosti 62 m/s.

Z obrázku 7.2 je vidieť, že najcitlivejší na zmenu zakrivenia trajektórie je filter Auxiliary. Reaguje na ňu už pri nižších krivostiach okolo $0,003$ m⁻¹. Následne s rastúcou krivosťou κ sú filtre SIR a Regularized pomerne rovnako stabilné, až okolo hodnoty $0,075$ m⁻¹ začne chyba pre SIR algoritmus výraznejšie rásť. Na obrázku 7.2 to už kvôli prehľadnosti nie je znázornené, aj keď je to čiastočne naznačené pri krivosti $\kappa = 0,009$ m⁻¹, že pre vyššie hodnoty krivosti nad $\kappa = 0,009$ m⁻¹ má najväčšiu chybu odhadu polohy SIR filter, 2. najväčšiu filter Auxiliary. Celkovo ako najstabilnejší filter v tomto teste vyšiel filter Regularized. Chyby odchýlky rýchlosti $\|\mathbf{v}^* - \mathbf{v}\|$ boli pre všetky filtre a všetky krivosti κ približne rovnaké.

7.2.2 Vplyv zakrivenia dráhy s nekonštantnou výškou

V tomto odseku je analýza rovnakého problému ako v odseku 7.2.1, ale s nekonštantnou výškou (polohou v súradnici z). Vygenerovalo sa 38 dráh letu s rôznou krivosťou κ . Pre každú dráhu letu sa počítal odhad príslušným filtrom v 400 časových krokoch. Analytický predpis trajektórie pre príslušné hodnoty krivosti κ je

$$\mathbf{r}_\kappa(t) = \left[\frac{1}{\kappa} \cdot \cos\left(\frac{c}{\kappa} \cdot t\right), \frac{1}{\kappa} \cdot \sin\left(\frac{c}{\kappa} \cdot t\right), 700 + t \right]^\top, \quad \text{kde } c = \sqrt{62^2 - 1}. \quad (7.2)$$

Jedná sa o závitnicu. Bola zvolená zámerne. Dá sa ukázať, že závitnica je jediná priestorová krivka, ktorá má konštantnú krivosť. Tiež je možné odvodiť, že krivosť závitnice (7.2) je κ . Oboje podľa [9]. Ďalej je možné jednoducho ukázať, že pre ľubovoľnú krivosť κ je veľkosť rýchlosti $\|\mathbf{v}_\kappa\| = \|\dot{\mathbf{r}}_\kappa\| = 62$ m/s.

Nastavenie filtrov

Nastavenia parametrov filtrov sú až na dve výnimky zhodné s nastaveniami popísanými v odseku 6.1.

Prvou výnimkou je nastavenie variačnej matice

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 7000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 700 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 700 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,001 \end{pmatrix}.$$

Jej hodnota bola odhadnutá skúšaním, pre akú dosahovali filtre prijateľnejšie výsledky. Je možné si všimnúť, že akonáhle je v polohe výraznejšia zmena výšky (polohy v z -ovej súradnici r_z), je potrebné navýšiť hodnoty vo variačnej matici \mathbf{U} (viď napríklad porovnanie s \mathbf{U} v odsekoch 6.1 a 7.2.1). Je možné si všimnúť, že je výrazne vyššia ako v odseku 7.2.1. Nekonštantná výška zjavne výrazne zvyšuje neurčitost systému.

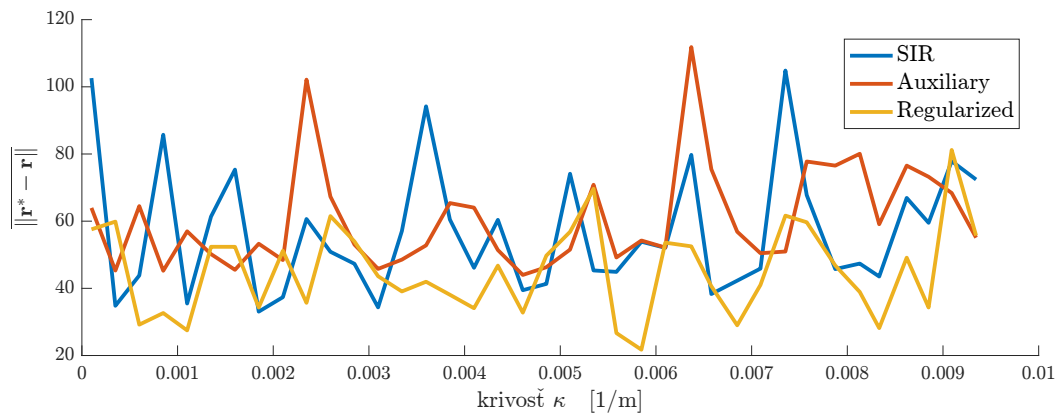
Druhou výnimkou je voľba reprezentatívnej hodnoty. Doteraz všetky filtre používali ako reprezentatívnu hodnotu aposteriórnej hustoty jej strednú hodnotu. Avšak doposiaľ nebola tak výrazná variabilita výšky r_z . Preto je nutné brať ako reprezentatívnu hodnotu medián. Jedná sa o stabilnejšiu charakteristiku. Na druhej strane, menej presnú. Táto problematika je stručne popísaná v odseku 3.3.

Výsledky

No obrázku 7.3 sú vykreslené výberové priemery $\overline{\|\mathbf{r}^* - \mathbf{r}\|}$ pre jednotlivé vygenerované prelety s krivosťou dráhy κ .

Je zaujímavé porovnať obrázok 7.3 s obrázkom 7.2 ako je výška (jediná podstatná zmena) schopná ovplyvniť závislosť odhadu stavu filtrami od krivosti trajektórie κ .

Na obrázku 7.2 bola zrejماً závislosť chyby odhadu od krivosti trajektórie. Naopak, z obrázku 7.3 sa skôr zdá, že chyba od krivosti nezávisí. Na hladine $\alpha = 0,05$ sa otestuje hypotéza, že $\overline{\|\mathbf{r}^* - \mathbf{r}\|}$ lineárne nezávisí na κ , viď odsek 5.3. Testuje sa na hladine významnosti $\alpha = 0,05$. Pre všetky tri filtre SIR, Auxiliary a Regularized sa hypotéza nezamietala. Z toho sa vyvodzuje záver, že chyba odhadu polohy $\|\mathbf{r}^* - \mathbf{r}\|$ pri nekonštantnej



Obr. 7.3: Vykreslenie závislosti priemernej chyby odhadu polohy $\overline{\|\mathbf{r}^* - \mathbf{r}\|}$ od zakrivenia dráhy v priestore. $r_z \neq \text{konšt.}$, $v_z = \text{konst.}$. Konštantná veľkosť rýchlosti $v = 62$ m/s.

výške leteckého cieľa r_z nad počiatkom súradnicového systému O nie je lineárne závislá od krivosti κ . Tým sa myslí, že nemá rastúcu ani klesajúcu tendenciu.

Zostáva ešte porovnať jednotlivé filtre medzi sebou. Nech sa označí $\varepsilon = \overline{\|\mathbf{r}^* - \mathbf{r}\|}$ pre jeden filter. Cieľom je na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ zistiť, či pre dvojicu filtrov sú ich chyby ε štatisticky zhodné a ak nie, tak ktorá je väčšia. Zvolený je nasledujúci postup. Nech sa označia chyby ε_1 pre jeden filter a ε_2 pre druhý. Najskôr sa otestuje hypotéza $H : \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ proti alternatívnej hypotéze $H_A : \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, viď 5.1. Ak sa nezamieta, ε_1 a ε_2 sa považujú za štatisticky zhodné. Ak sa zamieta tak sa následne testuje hypotéza $H : \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ proti alternatívnej hypotéze $H_A : \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$, $\alpha = 0,05$. Viď 5.2. Ak sa nezamieta, ε_1 sa považuje za štatisticky nižšie, ak zamieta, za štatisticky vyššie. 3 vykreslené filtre na obrázku 7.3 sa otestovali po dvojiciach a zoradili podľa získaných výsledkov. Podľa výšky priemernej chyby $= \overline{\|\mathbf{r}^* - \mathbf{r}\|}$ je ich poradie zostupne 1. Auxiliary, 2. SIR, 3. Regularized.

7.3 Vplyv zrýchlenia na odhad stavu

V odseku 7.2 sa analyzoval vplyv zakrivenia trajektórie na odhad stavu pri konštantnej veľkosti rýchlosti. V tomto odseku sa naopak bude posudzovať vplyv zmeny rýchlosti (zrýchlenia) na odhad stavu pri pohybe po priamke (trajektórii s nulovou krivosťou). Rovnako sa rozlíšia prípady, kedy je výška konštantná a kedy nie.

7.3.1 Vplyv zrýchlenia v konštantnej výške

V tomto odseku sa vygenerovalo 30 preletov s rôznym konštantným zrýchlením $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$. V každom vygenerovanom prelete sa počítal odhad v 400 časových krokoch. Nech sa označí $\|\mathbf{a}\| = a$ ako veľkosť zrýchlenia. Trajektória cieľa má analytický predpis pre príslušnú hodnotu a

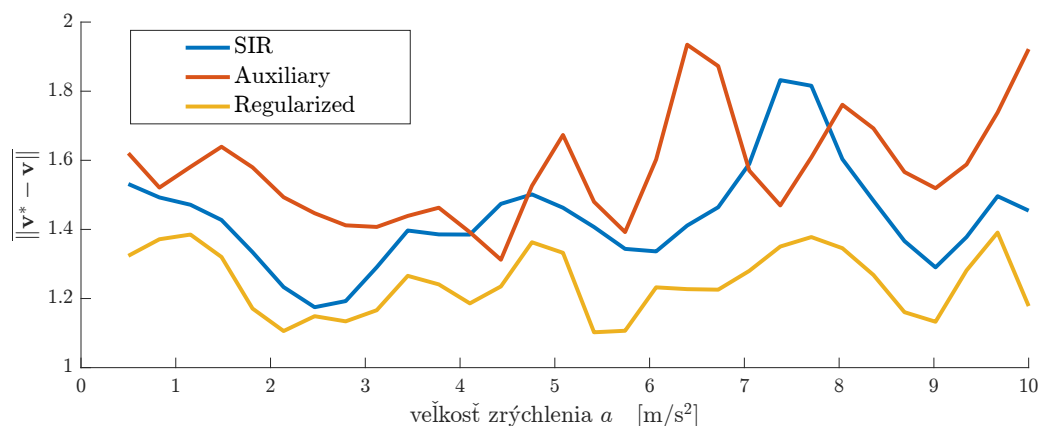
$$\mathbf{r}_a(t) = \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{4} a \right) t^2, \left(\frac{\sqrt{2}}{4} a \right) t^2, 700 \right]^T \Rightarrow \|\mathbf{a}\| = \|\ddot{\mathbf{r}}_a\| = a. \quad (7.3)$$

Nastavenia filtrov sú totožné s nastaveniami v odseku 7.2. V uvedenom odseku sa testoval vplyv zakrivenia trajektórie pri konštantnej veľkosti rýchlosti a výške.

7.3 VPLYV ZRÝCHLENIA NA ODHAD STAVU

Výsledky

Na obrázku 7.4 sú vykreslené výberové priemery $\overline{\|\mathbf{v}^* - \mathbf{v}\|}$ pre jednotlivé lety v závislosti od veľkosti zrýchlenia a .



Obr. 7.4: Vykreslenie závislosti priemernej chyby odhadu rýchlosti od veľkosti zrýchlenia. $r_z = \text{konšt.}$, $v_z = 0$. Tvar trajektórie je priamka.

Z grafu nie je čitateľná žiadna zaujímavá informácia. Bude sa následne postupovať ako v odseku 7.2.2 v časti Výsledky. Analogicky sa preverí, či $\overline{\|\mathbf{v}^* - \mathbf{v}\|}$ je alebo nie je lineárne závislá od veľkosti zrýchlenia a pomocou regresnej analýzy.² Výsledok je, že pre všetky filtre SIR, Auxiliary aj Regularized sa hypotéza o lineárnej nezávislosti $\overline{\|\mathbf{v}^* - \mathbf{v}\|}$ pre jednotlivé filtre na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ nezamieta.

Ďalej opäť rovnakým postupom ako v 7.2.2 sa porovnajú jednotlivé filtre medzi sebou.² Na základe týchto testov sa zoradilo poradie podľa veľkosti chyby odhadu v rýchlosti $\overline{\|\mathbf{v}^* - \mathbf{v}\|}$ zostupne: 1. Auxiliary, 2. SIR, 3. Regularized.

Tieto výsledky sú analogické s výsledkami v odseku 7.2.2.

7.3.2 Vplyv zrýchlenia s nekonštantnou výškou

V tomto odseku je podobná analýza ako v odseku 7.3.1, akurát s meniacou sa výškou r_z v čase. V každom vygenerovanom prelete sa počítal odhad v 400 časových krokoch. Nech sa označí $\|\mathbf{a}\| = a$ ako veľkosť zrýchlenia. Trajektória cieľa má analytický predpis pre príslušnú hodnotu a

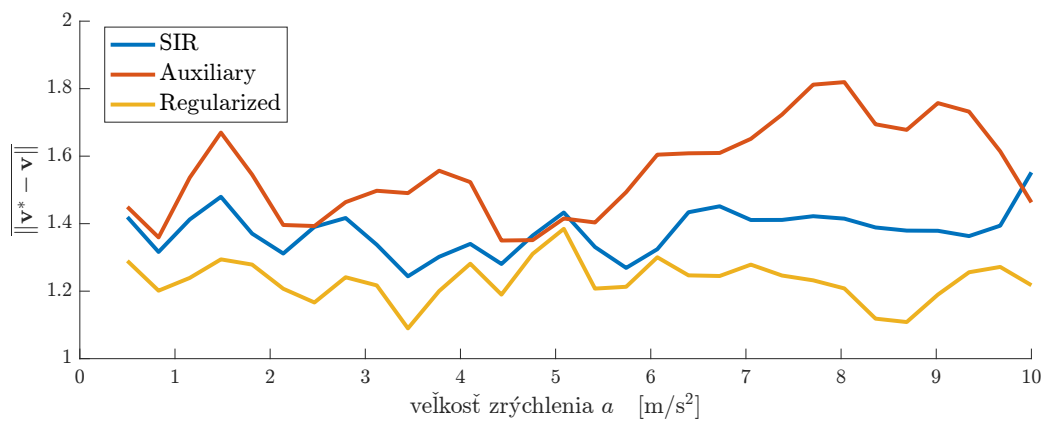
$$\mathbf{r}_a(t) = \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{4} a \right) t^2, \left(\frac{\sqrt{2}}{4} a \right) t^2, 700 + t \right]^T \Rightarrow \|\mathbf{a}\| = \|\ddot{\mathbf{r}}_a\| = a. \quad (7.4)$$

Nastavenia filtrov sú totožné s nastaveniami v odseku 7.3. V uvedenom odseku sa testoval vplyv zakrivenia trajektórie pri konštantnej veľkosti rýchlosti a výšky premennej v čase.

Výsledky

Na obrázku 7.5 sú vykreslené výberové priemery $\overline{\|\mathbf{v}^* - \mathbf{v}\|}$ pre jednotlivé lety v závislosti od veľkosti zrýchlenia a .

²Postupuje sa rovnako ako v odseku 7.2.2 v časti výsledky, akurát $\overline{\|\mathbf{r}^* - \mathbf{r}\|}$ sa nahradí $\overline{\|\mathbf{v}^* - \mathbf{v}\|}$ a κ sa nahradí a .



Obr. 7.5: Vykreslenie závislosti priemernej chyby odhadu rýchlosti od veľkosti zrýchlenia. $r_z \neq \text{konšt.}$, $v_z = \text{konšt.}$ Tvar trajektórie je priamka.

Spravili sa testy zhodné s testami Ostatné porovnania testované v odseku 7.3.1 platia aj pre tento odsek. Z čoho sa usudzuje záver, že zmena pohybu cieľa v súradnici z nemá vplyv na filtre pre lineárnu závislosť od zrýchlenia leteckého cieľa.

8 Záver

Bakalárska práca sa zaoberala využitím Bayesovho optimálneho odhadu na spracovanie meraní zo senzorov bistatického radaru. V prvej kapitole bola stručne popísaná charakteristika bistatického radaru. Bolo uvedené, v akom tvare sú merania z jeho senzorov. V ďalších kapitolách nasledovalo postupné odvodenie, popísanie filtrov až po ich aplikáciu a vyhodnotenie výsledkov. Dôraz v práci bol kladený na porovnanie a korektné štatistické vyhodnotenie úspešnosti filtrov pri určovaní polohy a rýchlosti leteckého cieľa z meraní získaných bistatickým radarom.

Bolo otestovaných 6 základných filtrov, pre ktoré boli splnené nutné predpoklady na funkčnosť. Boli to Sequence Importance Sampling (SIS), Sampling Importance Resampling (SIR), Auxiliary Sampling Importance Resampling, Regularized, Progressive Proposal a Rozšírený Kálmánov filter. Iba filtre SIR, Auxiliary a Regularized dosahovali prípustné výsledky a mohli byť ďalej analyzované.

Úspešnosť spomenutých troch filtrov bola analyzovaná na meraniach z reálneho preletu ľahkého jedno-vrtuľového lietadla. Ukázalo sa, že zameranie cieľa mimo priestor vytýčený vysielacími a prijímačmi môže byť pomerne nepresné. Výsledky z filtrov boli porovnávané s GPS dátami. V tejto situácii žiaden filter nemal citeľne lepší, ani horší výsledok. Ak by sa ako kritérium zobral počet súradníc, kde došlo k štatistickej zhode s GPS meraniami, bol by najlepším filtrom Auxiliary časticový filter. Aj keď s minimálnym rozdielom. Týmto testovaním sa však ukázala ako pomerne problematická výška nad terénom. Je ťažké ju presne odhadnúť. Je to spôsobené tým, že vysieláče a prijímače sa nachádzajú v približne rovnakej nadmorskej výške.

Bolo demonštrovaný a popísaný zaujímavý jav, že navyšovanie počtu generovaných častíc časticovým filtrom nemusí zlepšiť kvalitu odhadu. Najmä pokiaľ je apriórna hustota dostatočne informatívna môže navyšovanie počtu generovaných častíc skôr kvalitu odhadu zhoršovať.

Podrobnejšia analýza správania filtrov mohla byť spravená vďaka tzv. teoretickým meraniam. Tým sa myslí, že k danej trajektórii sa spočítali merania bistatického radaru a z nich sa spočítal odhad. Ten mohol byť porovnaný s presnou referenčnou hodnotou. Pre takéto teoretické merania mohli byť filtre analyzované pre trajektóriu s rôznou rýchlosťou, zrýchlením a zakrivením.

Ak letecký cieľ letí v rovine, na zakrivenie najcitlivejšie reaguje filter Auxiliary. Na druhej strane pre veľmi veľké krivosti sa drží pod určitou hranicou priemernej chyby odhadu na rozdiel od filtra SIR. Ak sa však lietadlo nepohybuje v rovine, ale stúpa, resp. klesá, je vplyv zakrivenia trajektórie na chybu odhadu štatisticky nevýznamný. Obdobne sa ukázalo že ani zrýchlenie (zmena rýchlosti) nemá na chybu odhadu štatisticky významný vplyv.

Veľmi zaujímavý výsledok, ktorý teoretické merania priniesli je, že pokiaľ je dráha letu dostatočne hladká, jednoznačne najlepšie výsledky dosahuje filter Regularized.

Je potrebné dodať, že nie je možné vybrať jeden filter, ktorý by bol jednoznačne najlepší. Skôr ich vyhodnotenie treba brať ako ukážku rôznych situácií. Pri niektorých sa výsledky jednotlivých filtrov líšia a pri ďalších naopak všetky dosahujú rovnaké výsledky, čo ale môže byť nemenej zaujímavé.

Na úplný koniec by bolo dobré poznamenať, že tematiku časticovej filtrácie s aplikáciou na sledovanie cieľov rozhodne nie je možné považovať za uzavretú záležitosť. Obsahuje ešte veľa nepreskúmaných oblastí, ktoré by si zaslúžili pozornosť. Pri testoch hypotéz, kde sa

testovala chyba na nulovú hodnotu alebo sa porovnávali chyby navzájom, bola zamietnutá hypotéza normálneho rozdelenia. Bolo by dobré vyšetriť príčinu toho, že chyba nemala normálne rozdelenie. Normalita by umožnila použiť testy s vyššou výpovednou hodnotou. Tiež by bolo dobré venovať pozornosť vplyvu rozmiestnenia vysielačov a prijímačov. Možno aj aký má vplyv zmena ich počtu na odhad polohy a rýchlosti leteckého cieľa. Ďalším smerom by sa mohol vybrať výskum k riešeniu problematiky súradníc v osi z . Problém určenia výšky sprevádzal každý výpočet spomínaný v tejto bakalárskej práci.

9 Zoznam príloh, použitých skratiek a symbolov

9.1 Prílohy

Na priloženom CD nosiči je možné nájsť sadu funkcií slúžiacich k časticovej filtrácii. Tento balík obsahuje všetky filtre spomínané v bakalárskej práci. Sú k dispozícii na ukážku súbor s vygenerovanými teoretickými meraniami a súbor s referenčnými hodnotami na porovnanie. Funkcie sú ukážkovo volané zo skriptu `aircraft.m`. Pred spustením je dobré si prečítať súbor `readme.txt`, ktorý obsahuje bližšie informácie k nahraným súborom.

9.2 Použité skratky a symboly

A	matica systému, lineárnej transformácie stavu cieľa, čiastočne nahrádza vektorové pole a pre lineárny model – nezahŕňa šum systému
A ^(k-1)	matica systému v čase $k-1$, lineárnej transformácie stavu cieľa, vznikla ako Jacobiho matica nelineárneho vektorového poľa a
a	vektorové pole predpisujúce stavový model – stochastická funkcia
<i>a</i>	veľkosť zrýchlenia
B	matica meraní, lineárnej transformácie stavu cieľa, čiastočne nahrádza vektorové pole b pre lineárne merania – nezahŕňa šum/nepresnosť meraní
B ^(k)	matica meraní v čase k , lineárnej transformácie stavu cieľa, vznikla ako Jacobiho matica nelineárneho vektorového poľa b
b	vektorové pole predpisujúce model meraní – stochastická funkcia
δ	Diracova funkcia
dim	hodnota dimenzie vektora
<i>E</i>	stredná hodnota – číselná charakteristika náhodnej veličiny
EKF	Rozšírený Kálmánov filter
$f(\mathbf{x}^{(k)} \mathbf{x}^{(k-1)})$	prechodová hustota systému
$g(\mathbf{y}^{(k)} \mathbf{x}^{(k)})$	vierohodnosť meraní
<i>h</i>	optimálna šírka Epanechnikovho jadra
<i>K</i>	Epanechnikovo jadro
κ	krivosť trajektórie leteckého cieľa
<i>l</i>	vzdialenosť medzi vysielačom a prijímačom

9 ZOZNAM PRÍLOH, POUŽITÝCH SKRATIEK A SYMBOLOV

max	maximálna hodnota
med	medián – číselná charakteristika náhodnej veličiny
mod	modus – číselná charakteristika náhodnej veličiny
N	počet častíc generovaných časticovým filtrom
$N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$	normálne rozdelenie, k rozmerné, kde k je dané veľkosťou vektora stredných hodnôt $\boldsymbol{\mu}$, resp. variačnej matice $\boldsymbol{\Sigma}$
\mathbf{O}	matica s nulovými prvkami
\mathbf{o}	vektor s nulovými prvkami
O	počiatok lokálneho súradnicového kartézskeho systému
$\omega^{i(k)}$	normalizovaný váhový koeficient jednej častice
$\hat{\omega}^{j(k)}$	normalizovaný váhový koeficient častice, ktorá je z množiny prevzorokovaných častíc, jeho hodnota je $1/N$
P	hodnota pravdepodobnosti
$p(\mathbf{x}^{(k)} \mathbf{Y}^{(k-1)})$	apriórna hustota stavu v čase k
$p(\mathbf{x}^{(k)} \mathbf{Y}^{(k)})$	aposteriórna hustota stavu v čase k
$p(\mathbf{y}^{(k)} \mathbf{Y}^{(k-1)})$	podmienená hustota meraní v čase k v závislosti na predchádzajúcich meraniach, vo filtrácii má význam iba normalizačnej konštanty v Bayesovej vete
RPP	rovnorný priamočiary pohyb
GPS	Globálny pozičný systém
r_B	bistatická poloha
\dot{r}_B	derivácia bistatickej polohy podľa času
r_R	vzdialenosť medzi prijímačom a leteckým cieľom
r_T	vzdialenosť medzi vysielačom a leteckým cieľom
R	prijímač
R_i	i -ty prijímač sledovacieho systému
SIS	Sequence Importance Sampling časticový filter
SIR	Sequence Importance Resampling časticový filter
T	vysielač
T_i	i -ty vysielač sledovacieho systému

9.2 POUŽITÉ SKRATKY A SYMBOLY

$\mathbf{U}^{(k-1)}$	variačná matica systému v čase $k-1$, charakterizuje nepredvídateľnosť pohybu cieľa, neurčitost systému
$\mathbf{u}^{(k-1)}$	šumový vektor systému v čase $k-1$ - biely šum $\Rightarrow \mathbf{u}^{(k-1)} \sim N(\mathbf{o}, \mathbf{U}^{(k-1)})$
$\mathbf{V}^{(k)}$	variačná matica meraní v čase k , charakterizuje nepresnosť meraní
$\mathbf{v}^{(k)}$	šumový vektor systému v čase k - biely šum $\Rightarrow \mathbf{v}^{(k)} \sim N(\mathbf{o}, \mathbf{V}^{(k)})$
v_B	bistatická rýchlosť
v_R	rýchlosť vzdalovania sa cieľa od prijímača
v_T	rýchlosť vzdalovania sa cieľa od vysielča
X	letecký cieľ \equiv ľubovoľný sledovaný objekt vo vzdušnom priestore, lietadlo, vrtuľník, dron, ...
$\mathbf{x}^{(k)}$	stav cieľa v čase k (skrytá \equiv nie je známa)
$\mathbf{x}^{*(k)}$	odhadu stavu cieľa v čase k
$\mathbf{x}^{\text{GPS}(k)}$	hodnota stavu získaná z GPS meraní
$\mathbf{x}^{i(k)}$	stav jednej častice (vzorky)
$\bar{\mathbf{x}}^{(k)}$	odhad stavu v čase k z apriórnej hustoty $p(\mathbf{x}^{(k)} \mathbf{Y}^{(k-1)})$, v tomto texte braný len ako jej stredná hodnota
$\hat{\mathbf{x}}^{j(k)}$	stav j -tej častice, ktorá je z množiny častíc, ktoré prešli prevzorkovaním
x_i	hodnota stavu v i -tej súradnici
$\mathbf{Y}^{(k)}$	história všetkých meraní až do času k vrátane, jedná sa o maticu $k \times n$, kde n je dimenzia vektora \mathbf{y} , $\mathbf{Y}^{(k)} = \{\mathbf{y}^{(i)}\}_{i=1}^k$
$\mathbf{y}^{(k)}$	namerané hodnoty zo sensorov z pozorovania stavu cieľa
$\mathbf{y}^{i(k)}$	merania stavu jednej častice (vzorky), $\mathbf{y}^{i(k)} = \mathbf{b}(\mathbf{x}^{i(k)}, \mathbf{0})$
$\ \cdot\ $	Euklidovská norma vektora
$\bar{\cdot}$	výberová stredná hodnota
$\tilde{\cdot}$	medián štatistického súboru
\vec{AB}	priamka prechádzajúca bodmi A a B
\approx	diskrétne aproximuje
\propto	rovná sa až na násobok konštantou

Literatúra

- [1] ANDĚL, Jiří. *Statistické metody*. 2., opr. vyd. Praha: Matfyzpress, 1998.
- [2] ANDĚL, Jiří. *Základy matematické statistiky*. 3., opr. vyd. Praha: Matfyzpress, 2011. ISBN 978-8-7378-001-2.
- [3] Anderson, T. W., Darling, D. A. (1954). *A test of goodness of fit*. Journal of the American Statistical Association, **49**(268), 765–769.
- [4] ARULAMPALAM, M.S., S. MASKELL, N. GORDON a T. CLAPP. *A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking*. IEEE Transactions on Signal Processing. **50**(2), 174-188. DOI: 10.1109/78.978374. ISSN 1053587X. Dostupné také z: <http://ieeexplore.ieee.org/document/978374/>
- [5] Bunch, Pete & Godsill, S.J.. (2014). *The Progressive Proposal Particle Filter: Better Approximations to the Optimal Importance Density*.
- [6] CAPPÉ, Olivier, Simon J. GODSILL a Eric MOULINES. *An Overview of Existing Methods and Recent Advances in Sequential Monte Carlo*. Proceedings of the IEEE. 2007, **95**(5), 899-924. DOI: 10.1109/JPROC.2007.893250. ISSN 0018-9219. Dostupné tiež z: <http://ieeexplore.ieee.org/document/4266870/>
- [7] CROUSE, David. *Basic tracking using nonlinear 3D monostatic and bistatic measurements*. IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine. 2014, **29**(8), 4-53. DOI: 10.1109/MAES.2014.120229. ISSN 0885-8985. Dostupné tiež z: <http://ieeexplore.ieee.org/lpdocs/epic03/wrapper.htm?arnumber=7059618>
- [8] DOUCET A., de FREITAS N., GORDON N. (2001) *An Introduction to Sequential Monte Carlo Methods*. In: DOUCET A., de FREITAS N., GORDON N. (eds) *Sequential Monte Carlo Methods in Practice. Statistics for Engineering and Information Science*. Springer, New York, NY
- [9] DOUPOVEC, Miroslav. *Diferenciální geometrie a tensorový počet*. Brno, 1999. Skriptum. Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně.
- [10] GIPPLE, Jake (2014). *The Volume of n-balls*. Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal: Vol. 15 : Iss 1, Article 14. Available at : <https://scholar.rose-hulman.edu/rhumj/vol15/iss1/14>
- [11] GUSTAFSSON, Fredrik, S. MASKELL, N. GORDON a T. CLAPP. Particle filter theory and practice with positioning applications. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*. 2010, **25**(7), 53-82. DOI: 10.1109/MAES.2010.5546308. ISSN 0885-8985. Dostupné také z: <https://ieeexplore.ieee.org/document/5546308/>
- [12] HÁJEK, Jaroslav a Zbyněk ŠIDÁK. *Theory of rank tests*. Prague: Academia, 1967.
- [13] HO, Y. C. a R. C. K. LEE. *A Bayesian Approach to Problems in Stochastic Estimation and Control*. 1964, 333-339. Minneapolis
- [14] Jaroš, F., Rosa, Z. (1980). *ČSN 01 0225 - Aplikovaná statistika. Testy shody empirického rozdělení s teoretickým*. Český normalizační institut, Praha.

LITERATÚRA

- [15] KALMAN, R. E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Journal of Basic Engineering*. 1960, **82**(1). DOI: 10.1115/1.3662552. ISSN 00219223. Dostupné také z: <http://FluidsEngineering.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1430402>
- [16] MUSSO C., OUDJANE N. and F LeGland. *Improving regularised particle filters in Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, A. Doucet, J. F. G. de Freitas, and N. J. Gordon, Eds. New York: Springer - Verlag, 2001.
- [17] RAZALI, Mohd Nornadiah & Yap, BEE. (2011). *Power Comparisons of Shapiro-Wilk, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors and Anderson-Darling Tests*. *J. Stat. Model. Analytics*. 2.
- [18] VAN RAVENZWAAIJ, Don, Pete CASSEY a Scott D. BROWN. *A simple introduction to Markov Chain Monte-Carlo sampling*. 2018, **25**(1), 143-154. DOI: 10.3758/s13423-016-1015-8. ISSN 1069-9384. Dostupné také z: <http://link.springer.com/10.3758/s13423-016-1015-8>
- [19] VINCENTY, T. *Direct and Inverse Solutions of Geodesics on the Ellipsoid with application of nested equations*. *Survey Review*. 2013, **23**(176), 88-93. DOI: 10.1179/sre.1975.23.176.88. ISSN 0039-6265. Dostupné tiež z: <http://www.tandfonline.com/doi/full/10.1179/sre.1975.23.176.88>
- [20] WILLIS, Nicholas J. *Bistatic radar*. Edison, NJ: SciTech Publishing, [2005]. ISBN 978-1891121456.
- [21] *World Geodetic System — 1984 (WGS-84) Manual*. Second Edition. Montreal, Quebec, Canada: International Civil Aviation Organization, 2002.