O ROZLOŽENÍ KOŘENŮ KUBICKÉHO POLYNOMU

JAN ČERMÁK A LUDĚK NECHVÁTAL

ABSTRAKT. Článek je věnován problematice lokalizace kořenů kubického polynomu s obecnými reálnými koeficienty. Jsou zde odvozeny efektivní a současně optimální (tj. nutné i postačující) podmínky na koeficienty tohoto polynomu, které zajišťují, že všechny jeho tři kořeny leží ve stanovených oblastech komplexní roviny. Poněvadž přímý postup založený na užití Cardanových vzorců není pro tento účel vhodný, článek diskutuje i další metody pro řešení problémů tohoto typu.

1. ÚVOD

Kubické polynomy (tedy polynomy třetího stupně) s reálnými koeficienty hrají velmi důležitou úlohu v různých matematických i nematematických oblastech, a s potřebou nalézt kořeny nějakého konkrétního kubického polynomu se setkal téměř každý student technického či přírodovědného směru. Je všeobecně známo, že pro řešení tohoto problému existují tzv. Cardanovy vzorce, které umožňují vyjádření těchto kořenů pomocí koeficientů daného polynomu. Tato skutečnost přispívá k domněnce, že tím je otázka vyšetřování kořenů kubického polynomu vyřešena, a není proto důvod se problematikou související s analýzou těchto kořenů dále hlouběji zabývat. Cílem tohoto článku je poukázat na skutečnost, že tomu tak není, a že naopak existují problémy, související především s lokalizací kořenů, které mohou být i nadále předmětem výzkumu v oblasti kubických polynomů.

Jedna z nejvýznamnějších aplikací kubických polynomů souvisí s kvalitativní analýzou spojitých a diskrétních dynamických systémů. Uvažujeme-li spojitý dynamický systém ve formě soustavy tří lineárních autonomních diferenciálních rovnic prvního řádu (příp. ve formě jedné lineární autonomní diferenciální rovnice třetího řádu), pak odpovídající charakteristický polynom je právě kubický polynom. Je přitom známo, že lineární a nelineární třídimenzionální dynamické systémy mají zásadní význam z hlediska teoretického i praktického (v této souvislosti připomeňme alespoň Lorenzův problém konvektivního proudění v atmosféře, jehož matematický model ve tvaru zmíněné dynamické soustavy se stal základem pro studium chaotického chování, viz např. [6]). Vyšetřování hlavních problémů kvalitativní teorie spojitých dynamických systémů, jako jsou otázky (asymptotické) stability, periodického chování a oscilatorických vlastností, pak formuluje následující problémy pro příslušné charakteristické polynomy:

2010 *MSC.* Primární 26C10; Sekundární 65H04.

Klíčová slova. Kubický polynom, Cardanovy vzorce, lokalizace kořenů.

Práce byla podpořena projektem Moderní metody aplikované matematiky pro využití v technických vědách (FSI–S–14–2290).

Mají všechny kořeny daného polynomu zápornou reálnou část? Existuje kořen polynomu s nulovou reálnou částí? Jak je tomu s reálností či nereálností kořenů?

Zatímco v případě kubického polynomu je poslední otázka poměrně snadná, a lze ji skutečně zodpovědět přímo pomocí Cardanových vzorců (příp. pomocí dalších elementárních vlastností kubických polynomů), odpovědi na zbývající dvě otázky již tak snadné nejsou. Později ukážeme, že ani pro kubický polynom s konkrétními koeficienty nelze užitím Cardanových vzorců snadno rozhodnout, zda všechny kořeny mají, či nemají zápornou reálnou část. V teorii stability je navíc často potřeba tuto odpověď znát pro polynom s obecnými koeficienty. V takovém případě se ukazuje použití Cardanových vzorců být nevhodné, a proto se volí alternativní postupy (vycházející nejčastěji z aplikace Routhova–Hurwitzova kritéria), které dávají rychlou odpověď na tuto otázku.

V nedávné době se objevily nové obecnější polynomiální problémy, a to zejména v souvislosti s analýzou tzv. zlomkových spojitých dynamických systémů, kdy je derivace prvního řádu stavové proměnné nahrazena derivací neceločíselného řádu (nejčastěji se jedná o reálné číslo ležící mezi nulou a jedničkou). Speciálně problém asymptotické stability systémů tohoto typu se dá formulovat pomocí příslušného charakteristického polynomu takto:

Jaké podmínky je třeba klást na koeficienty polynomu, aby absolutní hodnota argumentů všech jeho kořenů byla větší než předepsaná hodnota $\gamma \in (0, \pi/2]$?

Všimněme si, že při $\gamma = \pi/2$ se jedná o výše zmíněný klasický problém, kdy požadujeme, aby všechny kořeny daného polynomu měly zápornou reálnou část.

Odpověď na tento problém je obecně velmi obtížná, a do nedávné doby nebyla zodpovězena ani v případě kubického polynomu. Přesněji řečeno, zformulované podmínky nebyly buď explicitní (tj. formulované přímo pomocí koeficientů polynomu a parametru γ), nebo měly charakter pouze postačujících podmínek. Hlavní výsledek tohoto článku zformuluje podmínky explicitní a přitom optimální (tj. nutné i postačující).

Podobné problémy se řeší i v oblasti analýzy diskrétních dynamických systémů. Rozdíl spočívá pouze v tom, že příslušné podmínky, kterým mají kořeny charakteristického polynomu vyhovovat, jsou jiného charakteru. Speciálně, omezíme-li se na otázku asymptotické stability klasických diskrétních dynamických systémů, pak je třeba posoudit, zda všechny kořeny příslušného charakteristického polynomu mají velikost menší než jedna. V případě kubického polynomu s obecnými koeficienty je analýza této vlastnosti založena na užití Schurova–Cohnova kritéria (přímé odvození potřebných podmínek pomocí Cardanových vzorců je opět početně velmi komplikované). Uvažujeme-li tzv. zlomkové diskrétní dynamické systémy, které zahrnují diference neceločíselných řádů, pak otázka lokalizace kořenů příslušného charakteristického kubického polynomu v dané oblasti komplexní roviny je dosud nezodpovězeným problémem.

Nyní uvedeme pár poznámek ke struktuře tohoto článku. Kapitola druhá je věnována shrnutí základních poznatků, které souvisejí s Cardanovými vzorci a jejich užitím při hledání kořenů kubického polynomu s obecnými koeficienty. Třetí kapitola připomene výše zmíněná klasická polynomiální kritéria, která aplikujeme na kubické polynomy s cílem získat efektivní podmínky na jejich koeficienty zaručující, že všechny kořeny splňují požadovanou lokalizační vlastnost. V kapitole čtvrté uvedeme rozšířenou verzi Routhova–Hurwitzova kritéria pro kubické polynomy, včetně nastínění principu důkazu. Závěry této kapitoly jsou výsledkem nedávného výzkumu autorů tohoto článku. Poslední kapitola má shrnující charakter, naznačí ale také některé směry dalšího výzkumu.

Na závěr úvodní kapitoly je třeba zdůraznit, že v dalším textu se zaměříme již výhradně na výše uvedené problémy související s lokalizací kořenů kubického polynomu. Výše užívané pojmy, jako asymptotická stabilita diskrétních a spojitých dynamických systémů, nebo derivace a diference neceločíselných řádů, sloužily pouze jako motivace a zdůvodnění, proč je užitečné se těmito polynomiálními otázkami zabývat. Proto tyto pojmy nebudeme blíže specifikovat. Poznamenejme jen, že zatímco otázka stability lineárních dynamických systémů a její souvislost s rozložením kořenů příslušného charakteristického polynomu je záležitost klasická (podrobnosti lze nalézt v každé učebnici věnované těmto systémům, viz např. [7] a [3]), oblast tzv. zlomkového kalkulu, kam patří pojmy derivace a diference neceločíselných řádů, již standardní věcí není. Úvod do této problematiky je přístupnou formou popsán např. v [5] a [10]. Poznamenejme také ještě, že výsledky tohoto článku obsahově navazují na práci [1], kde jsou uvedeny další související výsledky a poznámky.

2. Cardanovy vzorce

V této i dalších kapitolách bude kubický polynom uvažován s vedoucím koeficientem rovným jedné[1], tj. ve tvaru

$$Q(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c,$$

kde koeficienty a, b, c jsou libovolná reálná čísla. Předpis pro výpočet všech tří kořenů tohoto polynomu je znám pod názvem Cardanovy vzorce[2]. Postup při odvození těchto vzorců je následující. Kubickou rovnici

$$Q(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{2.1}$$

nejprve převedeme na tzv. redukovaný tvar, který neobsahuje kvadratický člen. To lze provést díky substituci

$$\lambda = t - \frac{a}{3}.$$

Po dosazení tohoto vztahu do (2.1) a úpravě dostaneme rovnici

$$t^3 + pt + q = 0, \tag{2.2}$$

kde

$$p = b - \frac{a^2}{3} \qquad \text{a} \qquad q = c + \frac{2a^3 - 9ab}{27}.$$

Je-li $p = 0$, $q \neq 0$, nebo $p \neq 0$, $q = 0$, nebo $p = q = 0$, pak rovnici (2.2) lze snadno vyřešit. V dalším tedy uvažujme $p, q \neq 0$.

[1] To není omezující, neboť kdyby vedoucí koeficient nebyl roven jedné, tak polynom vydělený tímto koeficientem bude mít stejné kořeny.

[2] Gerolamo Cardano (1501–1576) byl italský matematik, filosof, astronom a astrolog.

Předpokládejme nyní, že lze nalézt dvě neznámé u a v splňující $t = u + v$. Dosazení tohoto výrazu do (2.2) vede po roznásobení na tvar

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Položme

$$3uv + p = 0, \quad \text{neboli} \quad uv = -p/3 \tag{2.3}$$

(to jistě můžeme, tato vazba neodporuje podmínce $u + v = t$). Potom

$$u^3 + v^3 = -q \quad \text{a zároveň} \quad u^3v^3 = -p^3/27.$$

Je známo, že kořeny x_1, x_2 kvadratické rovnice $x^2 + Ax + B = 0$ splňují vztahy $x_1 + x_2 = -A$, $x_1x_2 = B$ (tzv. Viètovy vzorce). Z toho plyne, že u^3 a v^3 jsou řešeními kvadratické rovnice

$$x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0,$$

tedy

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}. \tag{2.4}$$

Rovnice (2.4) nyní představují dvě binomické rovnice pro neznámé u, v, přičemž každá rovnice má tři řešení. Zdánlivě tedy dostaneme devět hodnot řešení $t = u+v$ rovnice (2.2). Uvědomíme-li si však, že pro jedno konkretní řešení u rovnice $(2.4)_1$ je řešení v rovnice $(2.4)_2$ určeno již jednoznačně vztahem $v = -p/(3u)$ plynoucím z (2.3), máme pouze tři možné hodnoty pro součet $u + v$.

Platí následující tvrzení: Nechť $\sqrt[3]{z_0}$ představuje jednu (pevně zvolenou) hodnotu tohoto řešení (ze tří možných) binomické rovnice $z^3 = z_0$. Pak všechny tři hodnoty řešení je možné napsat ve tvaru[3]

$$\sqrt[3]{z_0}, \quad \varepsilon\sqrt[3]{z_0}, \quad \varepsilon^2\sqrt[3]{z_0}, \quad \text{kde} \quad \varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

Označme u_1 libovolnou (ale pevně zvolenou) hodnotu třetí odmocniny

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\,.$$

Potom podle výše uvedeného pro zbylé dvě hodnoty máme $u_2 = \varepsilon u_1$ a $u_3 = \varepsilon^2 u_1$. Pro hodnotu u_1 dále platí

$$\left(-\frac{p}{3u_1}\right)^3 = -\frac{p^3}{27} \cdot \frac{1}{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \cdot \frac{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = v^3.$$

[3]Obecněji: je-li $\sqrt[n]{z_0}$ libovolná (ale pevná) hodnota řešení binomické rovnice $z^n = z_0$, pak všechny hodnoty řešení rovnice lze vyjádřit jako

$$\sqrt[n]{z_0}, \quad \varepsilon\sqrt[n]{z_0}, \quad \varepsilon^2\sqrt[n]{z_0}, \ldots, \quad \varepsilon^{n-1}\sqrt[n]{z_0}, \quad \text{kde} \quad \varepsilon = \cos\Bigl(\frac{2\pi}{n}\Bigr) + \sin\Bigl(\frac{2\pi}{n}\Bigr)\mathrm{i}.$$

Označíme-li v_1 tu hodnotu

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

pro kterou platí $v_1 = -p/(3u_1)$, pak dostáváme tři kořeny rovnice (2.2) ve tvaru Cardanových vzorců

$$\begin{aligned}
t_1 &= u_1 + v_1,\\
t_2 &= \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 v_1 = -\frac{1}{2}(u_1+v_1) + \frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1)\mathrm{i},\\
t_3 &= \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon v_1 = -\frac{1}{2}(u_1+v_1) - \frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1)\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

Proveďme nyní diskuzi typu kořene. Označme

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

diskriminant[4] rovnice (2.2).

Je-li $D > 0$, jsou hodnoty u^3 a v^3 ve vztahu (2.4) reálné. Pak je ovšem reálná i jedna ze tří hodnot $\sqrt[3]{u^3}$. Označíme-li právě tuto reálnou hodnotu u_1, pak kořen $t_1 = u_1 + v_1$ je také reálný a zbývající dva kořeny t_2, t_3 jsou komplexně sdružené, což plyne přímo z jejich vyjádření. Na tomto místě je vhodné poznamenat, že v době G. Cardana ještě komplexní čísla nebyla známa, v rovnicích (2.4) se tedy předpokládalo $D > 0$ (tj. na pravých stranách těchto rovnic bylo reálné číslo) a třetí odmocnina z reálného čísla se chápala též jako reálné číslo (striktně vzato, v té době ještě ani množina reálných čísel nebyla korektně představena). V Cardanově práci *Ars Magna*, která statě týkající se kubických rovnic obsahuje, je však naznačeno, že řešení mimo číselný obor, se kterým se tehdy pracovalo, existovat bude.

Je-li $D = 0$, ze vzorců (2.4) plyne $u^3 = v^3$ a tedy buď $u = v$, nebo $u = \varepsilon v$, nebo $u = \varepsilon^2 v$. Potom je buď $t_2 = t_3$, nebo $t_1 = t_3$, nebo $t_1 = t_2$, tj. rovnice má alespoň dvojnásobný kořen. Přitom jsou všechny kořeny nutně reálné, neboť imaginární kořeny polynomu s reálnými koeficienty jsou vždy (po dvou) komplexně sdružené.

Je-li $D < 0$, lze ukázat, že všechny tři kořeny budou reálné a různé, diskuze však již není tak snadná, jako v předcházejících dvou případech. Poznamenejme, že i když jsou kořeny v tomto případě reálné, Cardanovy vzorce je vyjadřují jako součty třetích odmocnin z imaginárních čísel (v případě $D < 0$ jsou pravé strany (2.4) imaginární čísla, a tedy žádná hodnota třetí odmocniny nebude reálná). Jinak řečeno, má-li kubická rovnice reálné různé kořeny, nelze je algebraicky vyjádřit jinak, než jako třetí odmocniny z imaginárních čísel. Tento případ se obvykle nazývá ireducibilní.

Vrátíme-li se zpět k rovnici (2.1) (připomeňme, že řešení rovnic (2.1) a (2.2) jsou svázána vztahem $\lambda = t - a/3$), můžeme výše uvedené úvahy shrnout do následujícího tvrzení:

---

[4]V případě původní rovnice (2.1) se diskriminant obvykle píše ve tvaru $\widehat{D} = 18abc + a^2b^2 - 4a^3c - 4b^3 - 27c^2$, přičemž vztah mezi D a $\widehat{D}$ je $\widehat{D} = -108 \cdot D$.

Věta 2.1. *Označme symbolem u kteroukoliv hodnotu třetí odmocniny*

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}, \quad kde \quad p=b-\frac{a^2}{3} \quad a \quad q=c+\frac{2a^3-9ab}{27}.$$

Dále označme symbolem v tu hodnotu třetí odmocniny

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

pro kterou platí $3uv=-p$. Potom kořeny polynomu $Q(\lambda)$ jsou čísla

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= u+v-\frac{a}{3},\\ \lambda_2 &= -\frac{1}{2}(u+v)-\frac{a}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)\mathrm{i},\\ \lambda_3 &= -\frac{1}{2}(u+v)-\frac{a}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)\mathrm{i}.\end{aligned}$$

Označíme-li dále

$$D=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$$

diskriminant rovnice, potom platí: je-li $D>0$, polynom má jeden reálný kořen a dva imaginární komplexně sdružené kořeny, je-li $D=0$, polynom má jeden reálný trojnásobný kořen nebo dva reálné kořeny (dvojnásobný a jednoduchý), a konečně je-li $D<0$, polynom má tři reálné (navzájem různé) kořeny.

Poznámka 2.2. Z praktického hlediska není užití Cardanových vzorců příliš výhodné především proto, že vyjadřují kořeny často v komplikovaném tvaru, což znesnadňuje další potřebnou analýzu. Např. rovnice $t^3-15t+22=0$ má tři reálné kořeny, z toho jeden celočíselný $t_1=2$. Cardanovy vzorce jej ale vyjadřují jako

$$t_1=\Big(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\Big)^2\sqrt[3]{-11+2\mathrm{i}}+\Big(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\Big)\sqrt[3]{-11-2\mathrm{i}}\,.$$

Navíc, z hlediska problému lokalizace kořenů uvnitř dané oblasti komplexní roviny by ke Cardanovým vzorcům musely přistoupit další výpočty týkající se velikosti a argumentu daných kořenů. Proto se v další části zaměříme na jiné způsoby řešení tohoto problému, které jsou efektivnější (a v některých případech aplikovatelné i na polynomy obecného stupně).

3. Několik dalších klasických výsledků

Uvažujme obecný polynom k-tého stupně ve tvaru

$$P(\lambda)=\lambda^k+p_1\lambda^{k-1}+p_2\lambda^{k-2}+\ldots+p_{k-1}\lambda+p_k\,,$$

kde p_i $(i=1,\ldots,k)$ jsou reálná čísla. V úvodní kapitole bylo připomenuto, že otázka asymptotické stability lineárních dynamických rovnic vede k problému nalezení podmínek na koeficienty polynomu $P(\lambda)$ zaručujících, že všechny jeho kořeny mají zápornou reálnou část (spojitý případ), resp. zaručujících, že všechny jeho kořeny mají velikost menší než jedna (diskrétní případ).

Odpověď na první otázku dává Routhovo–Hurwitzovo kritérium. Pro jeho obvyklou formulaci nejprve zavedeme označení

$$d(n) = \det \begin{pmatrix} p_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{2n-1} & p_{2n-2} & p_{2n-3} & p_{2n-4} & \cdots & \cdots & p_n \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \ldots, k,$$

kde prvek p_m nahradíme nulou pro $m > k$. Pak platí

Věta 3.1. (Routhova–Hurwitzova). *Všechny kořeny $P(\lambda)$ mají zápornou reálnou část právě tehdy, když*

$$d(1) > 0,\ d(2) > 0,\ \ldots,\ d(k) > 0\,.$$

Formálně velmi podobný tvar má i druhé kritérium, odpovídající diskrétnímu případu. Místo determinantů $d(n)$ zavádíme determinanty

$$D(n) = \det \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ B_n & A_n \end{pmatrix}, \qquad n = 1, 2, \ldots, k-1\,,$$

kde

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ p_{n-1} & \cdots & p_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & p_k \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & p_{k-1} \\ 0 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \\ p_k & p_{k-1} & \cdots & p_{k-n+1} \end{pmatrix}.$$

Pak platí

Věta 3.2. (Schurova–Cohnova). *Všechny kořeny $P(\lambda)$ mají velikost menší než jedna právě tehdy, když*

$$P(1) > 0, \qquad (-1)^k P(-1) > 0 \tag{3.1}$$

a zároveň

$$D(1) > 0,\ D(2) > 0,\ \ldots,\ D(k-1) > 0\,. \tag{3.2}$$

Obě tvrzení mají i svá komplexní rozšíření, kdy p_i $(i = 1, \ldots, k)$ jsou komplexní čísla, viz např. [8].

Nyní tato kritéria aplikujme na kubický polynom

$$Q(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c\,,$$

kde a, b, c jsou reálná čísla. Jako první posoudíme otázku, kdy mají všechny tři kořeny $Q(\lambda)$ zápornou reálnou část. V tomto případě z Routhova–Hurwitzova kritéria vyplývá, že $d(1) = a > 0$ a

$$d(2) = \det \begin{pmatrix} a & 1 \\ c & b \end{pmatrix} = ab - c > 0\,,$$

$$d(3) = \det \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ c & b & a \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = c(ab - c)\,.$$

Dostáváme tak následující jednoduchou charakterizaci požadované kořenové vlastnosti.

Důsledek 3.3. *Všechny tři kořeny $Q(\lambda)$ mají zápornou reálnou část právě tehdy, když*

$$a, b > 0 \qquad a \qquad 0 < c < ab\,. \tag{3.3}$$

O něco málo složitější je rozpracování Schurova–Cohnova kritéria pro polynom $Q(\lambda)$. V tomto případě podmínky (3.1) a (3.2) dávají

$$Q(1) = 1 + a + b + c > 0, \qquad (-1)^3 Q(-1) = 1 - a + b - c > 0$$

a

$$D(1) = \det \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{pmatrix} = 1 - c^2 > 0\,,$$

$$D(2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c \\ a & 1 & c & b \\ 0 & c & 1 & 0 \\ c & b & a & 1 \end{pmatrix} = (1 - c^2)^2 - (b - ac)^2 > 0\,.$$

Odtud vyplývá

$$|c| < 1\,, \qquad |a + c| < 1 + b\,, \qquad |b - ac| < 1 - c^2\,.$$

Dostáváme tedy

Důsledek 3.4. *Všechny tři kořeny $Q(\lambda)$ mají velikost menší než jedna právě tehdy, když*

$$|a + c| < 1 + b \qquad a \qquad |b - ac| < 1 - c^2\,.$$

Zdůrazněme, že předcházející postupy jsou mnohem jednodušší, než kdybychom se závěry Důsledků 3.3 a 3.4 snažili odvodit přímo z vyjádření kořenů $Q(\lambda)$ pomocí Cardanových vzorců.

4. Zobecněné Routhovo-Hurwitzovo kritérium pro kubický polynom

V této kapitole uvedeme (a částečně dokážeme) nutné a postačující podmínky, které, při pevně daném $\gamma \in (0, \pi/2]$, zajistí splnění nerovnosti

$$|\arg(\lambda_i)| > \gamma \tag{4.1}$$

pro všechny kořeny λ_i $(i = 1, 2, 3)$ kubického polynomu $Q(\lambda)$ (symbolem $\arg(\cdot)$ zde rozumíme hlavní argument daného komplexního čísla). Jedná se tedy o rozšíření Routhova–Hurwitzova kritéria v tom smyslu, že při volbě $\gamma = \pi/2$ nerovnost (4.1) přechází právě v požadavek, aby všechny kořeny λ_i $(i = 1, 2, 3)$ polynomu $Q(\lambda)$ měly zápornou reálnou část.

Všimněme si, že Routhovy–Hurwitzovy podmínky (3.3) představují postačující podmínky pro splnění vlastnosti (4.1) (přičemž pro $\gamma = \pi/2$ se stávají současně i podmínkami nutnými). Je totiž dobře vidět, že při klesající hodnotě γ se podmínka (4.1), kladená na hlavní argumenty kořenů, stává stále méně omezující. Jinak vyjádřeno, množina všech koeficientů $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, při kterých všechny kořeny λ_i $(i = 1, 2, 3)$ polynomu $Q(\lambda)$ splňují podmínku (4.1), se při klesající hodnotě γ stále rozšiřuje.

Protože systém nutných a postačujících podmínek, které zajistí splnění (4.1) pro $\gamma \in (0, \pi/2)$, je výrazně komplikovanější, než tomu bylo v případě $\gamma = \pi/2$, zavedeme nejprve některá pomocná označení. Klademe

$$c^{\pm}(a,b;\gamma) = \Big\{ -ab \pm 2\cos(\gamma)[a^2 - 4b\cos^2(\gamma) + b]\sqrt{a^2\cos^2(\gamma) - 4b\cos^2(\gamma) + b} + 2a\cos^2(\gamma)[-a^2 + 4b\cos^2(\gamma) + b]\Big\} \Big/ \Big\{4\cos^2(\gamma) - 1\Big\}^3$$

a

$$\widehat{b}(a;\gamma) = \frac{a^2\cos^2(\gamma)}{4\cos^2(\gamma) - 1}, \qquad \overline{b}(a;\gamma) = \frac{a^2}{4\cos^2(\gamma)},$$

jestliže uvedené výrazy mají smysl. Pak v závislosti na hodnotě parametru γ dostáváme následující čtyři tvrzení, která budeme také průběžně komentovat.

Věta 4.1. *Nechť $\pi/3 < \gamma < \pi/2$. Všechny kořeny λ_i $(i = 1,2,3)$ polynomu $Q(\lambda)$ splňují* (4.1) *právě tehdy, když platí libovolná z následujících (disjunktních) podmínek:*

(a) $a > 0, \quad b > 0, \quad 0 < c < c^-(a,b;\gamma);$
(b) $a \le 0, \quad b > \overline{b}(a;\gamma), \quad 0 < c < c^-(a,b;\gamma);$
(c) $a > 0, \quad \widehat{b}(a;\gamma) \le b \le 0, \quad c^+(a,b;\gamma) < c < c^-(a,b;\gamma).$

Poznámka 4.2. Podmínky tvrzení kladené na trojice koeficientů (a,b,c) tvoří prostorovou oblast, která zasahuje do I. II. a IV. oktantu. Bude-li se parametr γ blížit zleva k hodnotě $\pi/2$, bude se tato oblast zmenšovat „směrem“ k I. oktantu, až v limitě přejde na oblast popsanou Routhovými–Hurwitzovými podmínkami (3.3). Naopak, s klesající hodnotou parametru γ se oblast, ve které se mohou koeficienty (a,b,c) pohybovat, postupně rozšiřuje.

Věta 4.3. *Nechť $\gamma = \pi/3$. Všechny kořeny λ_i $(i = 1,2,3)$ polynomu $Q(\lambda)$ splňují vztah* (4.1) *právě tehdy, když platí libovolná z následujících (disjunktních) podmínek:*

(a) $a \ge 0, \quad b > 0, \quad c > 0;$
(b) $a < 0, \quad b > a^2, \quad 0 < c < (a^2b^2 - b^3)/a^3;$
(c) $a > 0, \quad b \le 0, \quad c > (a^2b^2 - b^3)/a^3.$

Poznámka 4.4. Pro hodnotu $\gamma = \pi/3$ již podmínky na trojice (a,b,c) zahrnují celý I. oktant (to je důležitá informace, neboť mnoho reálných úloh vede právě na polynom s kladnými koeficienty). V tomto případě také naše množina trojic (a,b,c) vyplní příslušnou část II. a IV. oktantu.

Věta 4.5. *Nechť $\pi/4 < \gamma < \pi/3$. Všechny kořeny λ_i $(i = 1,2,3)$ polynomu $Q(\lambda)$ splňují* (4.1) *právě tehdy, když platí libovolná z následujících (disjunktních) podmínek:*

(a) $a < 0, \quad b \le \overline{b}(a;\gamma), \quad c > c^+(a,b;\gamma);$
(b) $a < 0, \quad \overline{b}(a;\gamma) < b < \widehat{b}(a;\gamma), \quad 0 < c < c^-(a,b;\gamma)$ *nebo* $c > c^+(a,b;\gamma);$
(c) $a < 0, \quad b > \widehat{b}(a;\gamma), \quad c > 0;$
(d) $a \ge 0, \quad b < 0, \quad c > c^+(a,b;\gamma);$
(e) $a \ge 0, \quad b \ge 0, \quad c > 0.$

Poznámka 4.6. Při uvedených hodnotách γ splnění podmínky (4.1) nově zajistí také některé trojice koeficientů (a, b, c) náležejících III. oktantu.

Věta 4.7. *Nechť* $0 < \gamma \le \pi/4$. *Všechny kořeny* λ_i $(i = 1, 2, 3)$ *polynomu* $Q(\lambda)$ *splňují vztah* (4.1) *právě tehdy, když platí libovolná z následujících (disjunktních) podmínek:*

(a) $a < 0, \quad b \le \bar{b}(a; \gamma), \quad c > c^+(a, b; \gamma)$;
(b) $a < 0, \quad b > \bar{b}(a; \gamma), \quad c > 0$;
(c) $a \ge 0, \quad b < 0, \quad c > c^+(a, b; \gamma)$;
(d) $a \ge 0, \quad b \ge 0, \quad c > 0$.

Poznámka 4.8. V souladu s našimi očekáváními se prostorová oblast všech trojic (a, b, c), pro které platí podmínka (4.1), nadále zvětšuje. V limitě pro $\gamma \to 0+$ pak dostáváme celý poloprostor $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$.

Všimněme si také, že žádná z podmínek v předcházejících čtyřech tvrzeních nedovolí, aby c bylo nekladné. Kdyby totiž platilo $c \le 0$, pak polynom $Q(\lambda)$ má nezáporný reálný kořen (ověření této skutečnosti je elementární, a plyne okamžitě z vlastností $Q(0) \le 0$ a $Q(\infty) = \infty$), tedy podmínka (4.1) nemůže být pro takový kořen splněna. Jinými slovy, $c > 0$ je nutnou podmínkou pro splnění vztahu (4.1), a tedy „výchozí“ množinou, ve které se trojice koeficientů (a, b, c) může pohybovat, je poloprostor $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$.

Idea důkazu. Důkaz předcházejících tvrzení využívá tzv. *boundary locus* metodu, která je poměrně značně rozšířena zejména při analýze stability v oblasti numerické matematiky. Podstata metody spočívá v nalezení množiny nazývané *boundary locus*, která leží v prostoru koeficientů daného polynomu a má tu vlastnost, že při volbě koeficientů z množiny *boundary locus* má daný polynom alespoň jeden kořen ležící na hranici vyšetřované lokalizační oblasti v komplexní rovině. V našem případě je tato množina definována jako

$$\mathcal{BL}(\gamma) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \text{ existuje } \lambda \in \mathbb{C} \text{ splňující } Q(\lambda) = 0 \text{ a } |\arg(\lambda)| = \gamma\}.$$

Jinak řečeno, $\mathcal{BL}(\gamma)$ je tvořena všemi trojicemi (a, b, c) takovými, že $Q(\lambda)$ má kořen

$$\lambda = \omega \exp(\mathrm{i}\gamma) \quad \text{pro vhodné} \quad \omega \ge 0. \tag{4.2}$$

Dosadíme-li (4.2) do $Q(\lambda) = 0$ a separujeme reálnou a imaginární část, dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} &\omega^3 \cos(3\gamma) + a\omega^2 \cos(2\gamma) + b\omega \cos(\gamma) + c = 0, \\ &\omega[\omega^2 \sin(3\gamma) + a\omega \sin(2\gamma) + b \sin(\gamma)] = 0 \end{aligned}$$

pro neznámé a, b, c. Přesněji vyjádřeno, hledáme všechny trojice (a, b, c) tvořené koeficienty polynomu $Q(\lambda)$, které dané soustavě vyhovují při nějaké (vhodné) volbě parametru $\omega \ge 0$.

Tato soustava má řešení $c = 0$ $(a, b$ libovolná) při volbě $\omega = 0$, a řešení

$$\begin{aligned} b &= -2a\omega \cos(\gamma) - \omega^2 \left[4 \cos^2(\gamma) - 1\right], \\ c &= 2\omega^3 \cos(\gamma) + a\omega^2 \end{aligned} \tag{4.3}$$

(a libovolné) při libovolné volbě $\omega > 0$. V rovnicích (4.3) dále rozlišíme případy $\gamma \neq \pi/3$ a $\gamma = \pi/3$.

Je-li $\gamma \neq \pi/3$, pak první z rovnic (4.3) je kvadratická rovnice v proměnné ω, která má dvě řešení $\omega_{1,2} = \omega_{1,2}(a, b; \gamma)$. Protože tato řešení mají být reálná a kladná, je třeba provést diskuzi, za jakých podmínek na a, b a γ se tak stane. Jakmile je potřebná analýza provedena, stačí dosadit hodnoty $\omega_{1,2}$ do druhé z rovnic (4.3), čímž dostaneme dvě řešení $c_{1,2} = c_{1,2}(a, b; \gamma)$. Poznamenejme, že naznačená analýza vede právě k symbolům $\widehat{b}(a; \gamma)$ a $c^{\pm}(a, b; \gamma)$, které byly zavedeny na začátku této kapitoly, a které vystupují v podmínkách jednotlivých vět.

Je-li $\gamma = \pi/3$, pak se soustava (4.3) zjednoduší na

$$\begin{aligned} b &= -a\omega, \\ c &= \omega^3 + a\omega^2 , \end{aligned}$$

kde $\omega > 0$ je parametr. Odtud vyplývá, že

$$ab < 0,\ c = (a^2b^2 - b^3)/a^3, \qquad \text{nebo} \qquad a = b = 0,\ c > 0 .$$

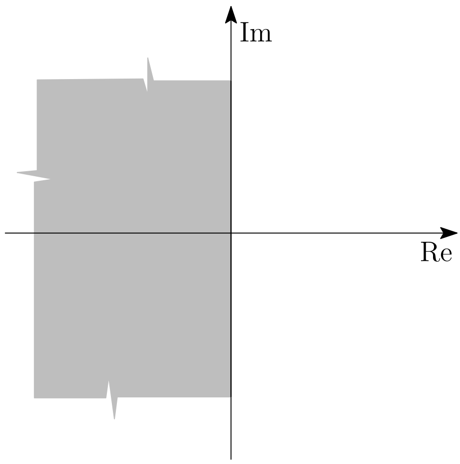
Naznačené úvahy, a s nimi související výpočty, dávají plně explicitní popis množiny $\mathcal{BL}(\gamma) \subset \mathbb{R}^3$. Přidáním výše zmíněné nutné podmínky $c > 0$ se nám další úvahy zúží na poloprostor $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ (poznamenejme, že zúžení $\mathcal{BL}(\gamma) \cap (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+)$ si vynutí zavedení další „hraniční křivky“ $\overline{b}(a; \gamma)$ uvedené výše). Podmínka $c > 0$ zaručuje existenci záporného kořene λ_1, který vztah (4.1) splňuje automaticky. Aby i zbylé dva kořeny tento vztah splnily, musí to být komplexně sdružené imaginární kořeny s argumenty vyhovujícími (4.1), nebo dva reálné záporné kořeny.

Množina $\mathcal{BL}(\gamma)$ rozděluje $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ na dvě disjunktní části. Je známo (viz např. [3]), že kořeny polynomu spojitě závisejí na jeho koeficientech, tedy malá změna hodnot koeficientů vyvolá malou změnu v hodnotách kořenů. To znamená, že pokud jakákoliv trojice (a, b, c), ležící v jedné ze zmíněných dvou částí, generuje polynom $Q(\lambda)$ s kořeny splňujícími (resp. nesplňujícími) (4.1), pak každá další trojice ležící ve stejné části má tutéž vlastnost. Stačí tedy v každé ze zmíněných disjunktních částí vybrat jednoho reprezentanta, spočítat kořeny odpovídajícího kubického polynomu a ověřit, zda jejich argument splňuje (4.1) či nikoliv. $\square$

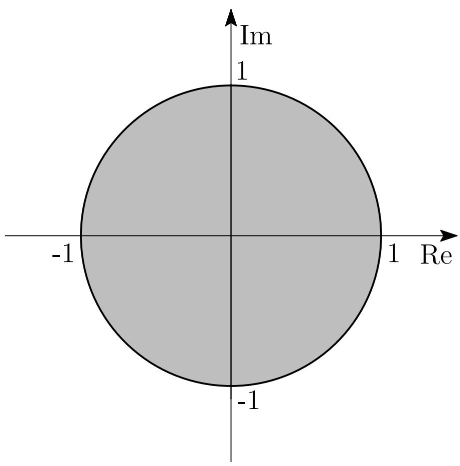
Poznámka 4.9. Předcházející úvahy jsou obsahem článku [2]. Poznamenejme ještě, že zcela analogickým způsobem by bylo možné diskutovat i splnění podmínky (4.1) v případě $\gamma \in (\pi/2, \pi)$.

5. Závěrečné poznámky

Smyslem předcházejících kapitol bylo ukázat, že znalost Cardanových vzorců není automatickou odpovědí na všechny otázky, které se objevují v souvislosti s problematikou kořenů kubického polynomu, a že v řadě případů se jeví jako účinnější užití alternativních postupů. Speciálně tomu pak je v případech, kdy je třeba odvodit efektivní podmínky na koeficienty tohoto polynomu zaručující, že všechny jeho tři kořeny leží uvnitř předepsané oblasti. Nejvýznamnějšími takovými oblastmi jsou levá polorovina komplexní roviny (vymezená vztahem $\mathrm{Re}\,(\lambda) < 0$) a otevřený jednotkový kruh (daný vztahem $|\lambda)| < 1$). Obě dvě tyto části Gaussovy komplexní roviny jsou znázorněny na Obrázku 1 a 2.



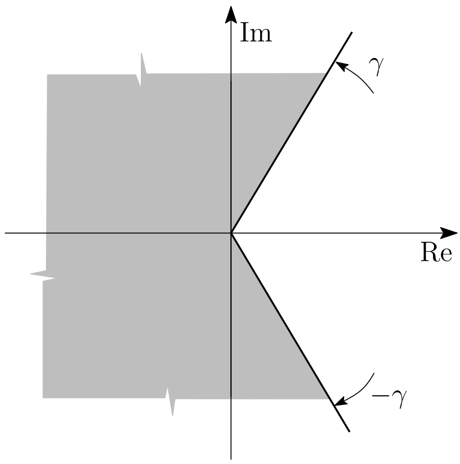
Obrázek 1



Obrázek 2

Potřebné efektivní podmínky, zaručující příslušnost všech kořenů $Q(\lambda)$ do těchto oblastí, byly zformulovány jako Důsledek 3.3, resp. Důsledek 3.4, vyplývající téměř okamžitě z Routhova–Hurwitzova, resp. Schurova–Cohnova kritéria. Důkazy obou těchto kritérií a další související poznatky lze nalézt v monografii M. Mardena [8], která je v tomto směru považována za jednu z nejkvalifikovanějších učebnic.

Třetím typem oblasti, která byla v souvislosti s lokalizací kořenů $Q(\lambda)$ diskutována, je otevřený sektor Gaussovy roviny, vymezený vztahem $|\arg(\lambda)| > \gamma$, kde $\gamma \in (0, \pi/2]$ je reálné číslo. Tento sektor je zobrazen na Obrázku 3, z něhož je dobře patrné, že při $\gamma = \pi/2$ se uvedená oblast redukuje na levou komplexní polorovinu (viz Obrázek 1).



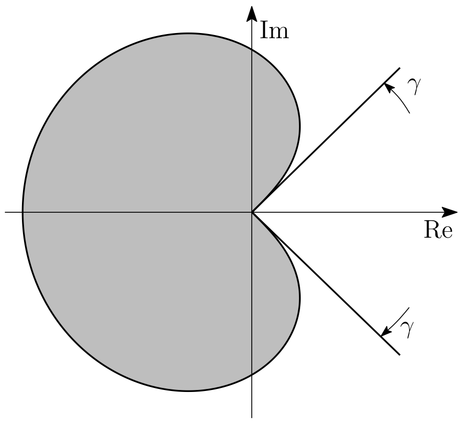
Obrázek 3

Není bez zajímavosti, že i této oblasti je v monografii [8] věnována pozornost (přesněji řečeno, je zde vyšetřován počet kořenů obecného polynomu $P(\lambda)$ ležících v doplňku této oblasti v rámci komplexní roviny). Zatímco motivace vyšetřování standardních lokalizačních problémů (kdy všechny kořeny daného polynomu mají ležet v levé části komplexní roviny, příp. uvnitř jednotkového kruhu) je věc klasická a daná potřebami teorie stability diferenciálních, příp. diferenčních rovnic, žádná podobná motivace pro vyšetřování podmínek zaručujících, že všechny kořeny daného polynomu mají ležet ve výseku komplexní roviny dle Obrázku 3 v době vzniku Mardenovy knihy známa nebyla. Zásadní výsledek D. Matignona, popisující význam této oblasti v rámci teorie stability diferenciálních rovnic neceločíselných řádů, se totiž objevil teprve v jeho známém článku [9] z roku 1996. Kniha [8] se tedy otázkou lokalizace kořenů polynomu v daném sektoru zevrubně zabývala již o 30 let dříve, a to pomocí konstrukce speciálních Sturmových posloupností. Zdůrazněme ovšem, že touto cestou není možné získat efektivní podmínky podobné těm, které byly formulovány v příslušných větách kapitoly čtvrté.

Uvedené typy lokalizačních oblastí pro kořeny kubického polynomu jsou bezesporu nejvýznamnější, avšak nikoliv jediné. Jako příklad lze uvést oblast popsanou podmínkami

$$|\lambda| < \left(2\cos\frac{|\arg\lambda| - \pi}{2 - 2\gamma/\pi}\right)^{2\gamma/\pi} \quad \text{a} \quad |\arg\lambda| > \gamma$$

(γ je opět z intervalu $(0, \pi/2]$) a zobrazenou na Obrázku 4. Důvodem, proč se zabývat otázkou, za jakých podmínek leží všechny kořeny $Q(\lambda)$ právě uvnitř této oblasti, je analýza stability některých diskrétních soustav neceločíselných řádů. Zdůrazněme přitom, že na rozdíl od předcházejících diskutovaných lokalizačních otázek, je zodpovězení této záležitosti otevřeným problémem. Jeví se však jako reálné, že použití podobné důkazové techniky, jako v případě odvození rozšířeného Routhova–Hurwitzova kritéria, by mohlo vést k nalezení potřebných podmínek.



Obrázek 4

Problematika rozložení kořenů kubického polynomu však není omezena jen na podmínky příslušnosti všech jeho kořenů do dané oblasti komplexní roviny. Jako příklad lze uvést následující zajímavou souvislost mezi rozložením kořenů kubického polynomu a jistého (souvisejícího) kvadratického polynomu:

Uvažujme kubický polynom $Q(\lambda)$ s vlastností, že jeho tři kořeny, zobrazené v Gaussově komplexní rovině, neleží na jedné přímce. Tyto kořeny tedy vytvoří vrcholy trojúhelníku, do kterého lze vepsat (jednoznačně určenou) elipsu, která se hranice trojúhelníku dotýká ve středech jeho jednotlivých stran. Pak ohniska této elipsy jsou kořeny kvadratického polynomu, který vznikne derivací původního kubického polynomu, tedy jedná se o kořeny polynomu

$$Q'(\lambda) = 3\lambda^2 + 2a\lambda + b\,.$$

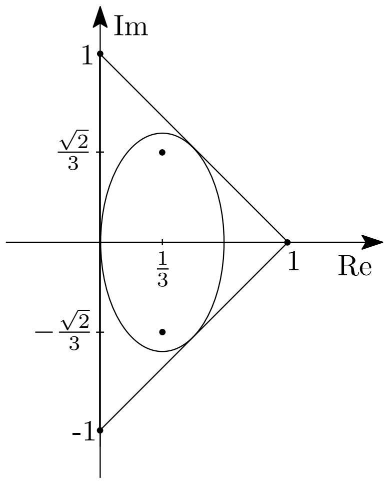
Situace je znázorněna na Obrázku 5, a to pro případ polynomu

$$Q(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1$$

s kořeny $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_{2,3} = \pm \mathrm{i}$. Tyto tři kořeny vytvoří v Gaussově komplexní rovině vrcholy rovnoramenného trojúhelníku, jemuž vepsaná elipsa, dotýkající se středů jeho stran, má ohniska $(1 \pm \sqrt{2}\mathrm{i})/3$. Tato ohniska jsou v souladu se závěrem předcházejícího tvrzení současně kořeny kvadratického polynomu

$$Q'(\lambda) = 3\lambda^2 - 2\lambda + 1\,.$$

Poznamenejme ještě, že autorství této věty je připisováno J. Siebeckovi, v širší povědomí však vešla teprve díky již zmiňovanému M. Mardenovi, a to s vydatným přispěním popularizačního článku [4] D. Kalmana. Autoři tohoto článku byli na její existenci upozorněni Mgr. Janem Pavlíkem, Ph.D., kolegou z Ústavu matematiky FSI. Snad i tato věta, společně s přehledem předcházejících poznatků o lokalizaci kořenů kubického polynomu, přispěla ke zdůraznění skutečnosti, že i v této klasické (a zdánlivě uzavřené) oblasti se lze dozvědět nové zajímavé skutečnosti, či dokonce nalézat originální výsledky.



Obrázek 5

Reference

[1] J. Čermák, J. Jánský: *Elementární důkaz Levinovy-Mayovy věty*, Kvaternion **2013** (2013), 57–68.

[2] J. Čermák, L. Nechvátal: The Routh–Hurwitz conditions of fractional type in stability analysis of the Lorenz dynamical system, zasláno k publikaci do Appl. Math. Model.

[3] S. Elaydi: *An Introduction to Difference Equations*, 3. vyd., Springer, 2005.

[4] D. Kalman: *The most marvelous theorem in mathematics*, J. Online Math. Appl. **8** (2008), `http://www.maa.org/external_archive/joma/Volume8/Kalman/index.html`.

[5] J. Karásek: *Diferenciální rovnice neceléh̄o řádu*, Kvaternion **2013** (2013), 15–25.

[6] E. N. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atmos. Sci. **20** (1963), 130–141.

[7] D. G. Luenberger: *Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models, and Applications*, John Wiley & Sons, 1979.

[8] M. Marden: *Geometry of Polynomials*, Mathematical Surveys and Monographs **3**, Providence, 1966.

[9] D. Matignon: *Stability results for fractional differential equations with applications to control processing*, v: Computational Engineering in Systems and Application Multiconference, IMACS, IEEE-SMC, Lille, France, Vol. 2, 1996, 963–968.

[10] I. Podlubný: *Fractional Differential Equations*, Academic Press, New Jersey, 1999.

Jan Čermák, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: `cermak.j@fme.vutbr.cz`

Luděk Nechvátal, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: `nechvatal@fme.vutbr.cz`