

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

SYSTEMY AUTONOMNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

JANA BENÁČKOVÁ

BRNO 2009



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

SYSTÉMY AUTONOMNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

SYSTEM OF AUTONOMOUS DIFFERENTIAL EQUATIONS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

JANA BENÁČKOVÁ

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Mgr. ZDENĚK OPLUŠTIL, Ph.D.

BRNO 2009

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2008/2009

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Jana Benáčková

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Systémy autonomních diferenciálních rovnic

v anglickém jazyce:

System of autonomous differential equations

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Nastudování obecné problematiky systémů autonomních diferenciálních rovnic. Prozkoumání některých konkrétních matematických modelů v biologii.

Cíle bakalářské práce:

Osvojení problematiky systémů autonomních diferenciálních rovnic. Aplikace na konkrétních matematických modelech.

Seznam odborné literatury:

J. MURRAY, Mathematical biology, Springer, 3rd edition, Springer-Verlag, 2002.

D. S. JONES, B. D. SLEEMAN Differential equations and mathematical biology, Chapman and Hall/CRC, 2003.

J. KALAS, M. RÁB, Obyčejné diferenciální rovnice, Masarykova univerzita, 1995

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Zdeněk Opluštil, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2008/2009.

V Brně, dne 10.11.2008

L.S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
Ředitel ústavu

doc. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.
Děkan fakulty

Abstrakt

Ve své práci se zabývám aplikací teorie systému autonomních diferenciálních rovnic v biologii a to v analýze modelu vzájemné koexistence dvou populací. Matematické modely jsou popsány obecně nelineárním autonomním systémem diferenciálních rovnic. Uvedla jsem klasifikaci typů singulárních bodů, které jsou důležité pro následující řešení konkrétních modelů. V poslední části je přehled nejznámějších modelů dvou populací (predátor \times kořist) a konkrétní modely pro společenstva bezobratlých živočichů a savců.

Abstract

In his work dealing with applications, systems theory of autonomous differential equations in biology to the analysis model of coexistence of two populations. Mathematical models are described in general non-linear autonomous system of differential equations. I introduced the classification of types of singular points that are important for the following solutions to specific models. In the last part is an overview of the most famous models of the two populations (predator \times prey) and specific models for the communities of invertebrate animals and mammals.

Klíčová slova

Autonomní systém, singulární bod, model růstu populace.

Keywords

Autonomous system, singular point, model of population growth.

BENÁČKOVÁ, J. *Systémy autonomních diferenciálních rovnic*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2009. 31 s. Vedoucí bakalářské práce Mgr. Zdeněk Opluštil, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Systémy autonomních diferenciálních rovnic* vypracovala samostatně pod vedením Mgr. Zdeňka Opluštily, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Jana Benáčková

Děkuji svému školiteli Mgr. Zdeňku Opluštilovi, Ph.D. za vedení mé bakalářské práce.

Jana Benáčková

Obsah

1	Úvod	9
2	Systémy nelineárních diferenciálních rovnic	10
2.1	Úvod	10
2.2	Existence a jednoznačnost	10
2.3	Stabilita řešení	11
3	Autonomní systémy	12
3.1	Základní pojmy	12
3.2	Typy singulárních bodů v rovině	12
3.3	Singulární body lineárního homogenního autonomního systému	13
3.3.1	$\det A = 0$	14
3.3.2	$\det A \neq 0$	14
3.4	Shrnutí typů singulárních bodů	16
3.4.1	Příklady	16
3.5	Singulární body nelineárních autonomních rovnic	18
4	Modely společenstva predátor×kořist	19
4.1	Klasický Lotka-Volterův model společenstva predátor×kořist	19
4.2	Model společenstva predátor×kořist s vnitrodruhovou konkurencí kořisti	21
4.3	Model predátor×kořist Gausseho typu	23
4.4	Gausseho model s trofickou funkcí typu 2.	24
4.5	Gausseho model s trofickou funkcí typu 3	27
5	Závěr	30

1 Úvod

Matematika (z řeckého *mathematikós* = milující poznání) je věda zabývající se z formálního hlediska kvantitou, strukturou, prostorem a změnou. Charakteristickou vlastností matematiky je její důraz na absolutní přesnost metod a nezpochybnitelnost výsledků. Mezi jinými vědami se matematika vyznačuje nejvyšší mírou abstrakce a přesnosti. Díky těmto vlastnostem je často označována za královnu věd.

Aplikovaná matematika používá abstraktní matematické nástroje k řešení praktických problémů z jiných oblastí vědy, především fyziky, ekonomie, chemie, ale i biologie nebo medicíny.

Jedním ze základních nástrojů pro popis a výpočet praktických problémů jsou diferenciální rovnice. Rovnice tohoto typu hrají zásadní roli při modelování mnoha technických a přírodovědných problémů. Diferenciální rovnice jsou matematické rovnice, ve kterých jako proměnné vystupují derivace funkcí. Za zakladatele této teorie jsou považováni G. W. Leibnitz (1646 - 1716) a I. Newton (1642 - 1727). Největší rozvoj teorie diferenciálních rovnic proběhl v 18. stol., o který se zasloužili A. Clairaut (1713 - 1765), J. d'Alembert (1717 - 1783), J. L. Lagrange (1736 - 1813) a především L. Euler (1707 - 1783), který zavedl dodnes používaný způsob zápisu.

Speciálním případem diferenciálních rovnic jsou autonomní rovnice. Tyto rovnice, které nezávisí na proměnné t (obvykle čas), popisují hlavně jevy, při kterých se s časem nemění jejich podmínky. Autonomní rovnice se používají například pro modelování růstu populace. Systémy autonomních rovnic popisují model koexistence obecně n druhů.

Ve své práci se zabývám právě aplikací teorie systémů autonomních diferenciálních rovnic v biologii a to v analýze modelu vzájemné koexistence dvou populací ($n = 2$). Nejprve jsem zavedla systém nelineárních diferenciálních rovnic, protože autonomní systém, je pouze jeho speciálním případem. Klasifikovala jsem typy singulárních bodů, které jsou důležité pro následující řešení konkrétních modelů. V poslední části je přehled nejznámějších modelů dvou populací (predátor \times kořist) a konkrétní modely pro společenstva bezobratlých živočichů a savců.

2 Systémy nelineárních diferenciálních rovnic

2.1 Úvod

Budeme se zabývat systémem diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}x'_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\x'_2 &= f_2(t, x_1, \dots, x_n), \\&\vdots \\x'_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n),\end{aligned}\tag{1}$$

kde $' = \frac{d}{dt}$ a f_1, f_2, \dots, f_n jsou funkce definované na nějaké množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Tento systém budeme zapisovat ve vektorovém tvaru

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}),\tag{2}$$

kde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = (f_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(t, x_1, \dots, x_n))$.

Definice 2.1 Řešením budeme rozumět n -vektorovou funkci \mathbf{x} diferencovatelnou na nějakém intervalu I a takovou, že pro $t \in I$ je $[t, x_1(t), \dots, x_n(t)] \in \Omega$ a $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$.

Buď nyní $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $[t_0, \mathbf{x}_0] \in \Omega$. Problém určit řešení rovnice (2), které splňuje počáteční podmínku

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,\tag{3}$$

se nazývá počáteční (Cauchyho) problém nebo úloha. Říkáme, že počáteční úloha

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0\tag{4}$$

je jednoznačná, jestliže ke každým dvěma řešením $\mathbf{x}(t)$, $t \in J_1$, $\mathbf{y}(t)$, $t \in J_2$ problému (4) existuje $\delta > 0$ takové, že $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t)$ pro každé $t \in J_1 \cap J_2 \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Definice 2.2 Nechť $x(t)$ je řešení počáteční úlohy (4) definované na intervalu I , $\bar{x}(t)$ je řešení počáteční úlohy (4) definované na intervalu \bar{I} a $t_0 \in I \cap \bar{I}$. Řekneme, že $x(t)$ je rozšířením $\bar{x}(t)$, jestliže $\bar{I} \subseteq I$ a pro každé $t \in \bar{I}$ platí $x(t) = \bar{x}(t)$. $x(t)$ se nazývá úplné řešení počáteční úlohy (4), jestliže neexistuje jeho rozšíření.

2.2 Existence a jednoznačnost

Počáteční úloha (4) nemusí být vždy řešitelná resp. jednoznačně řešitelná. Nyní uvedeme postačující podmínky, kdy tomu tak je.

Věta 2.1 (Peanova): Budte $a, b \in \mathbb{R}^+$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ a označme $I = \langle t_0, t_0 + a \rangle$, $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq b\}$. Nechť funkce $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá. Pak existuje aspoň jedno řešení počátečního problému (4), které je definované na intervalu $J := \langle t_0, t_0 + \alpha \rangle$, kde $\alpha := \min(a, bm^{-1})$, $m = \max_{[t, \mathbf{x}] \in I \times D} |\mathbf{f}(t, \mathbf{x})|$.

Věta 2.2 (Picardova - Lindelöfova): Budte $a, b \in \mathbb{R}^+$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ a označme $J = \langle t_0, t_0 + a \rangle$, $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq b\}$. Předpokládejme, že funkce $f : J \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá a splňuje Lipschitzovu podmínku (vzhledem k \mathbf{x}): existuje $L \in \mathbb{R}_0^+$ tak, že platí

$$|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})| \leq L|\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \quad [t, \mathbf{x}], [t, \mathbf{y}] \in J \times D.\tag{5}$$

Pak existuje právě jedno řešení počáteční úlohy (4) definované na intervalu $\langle t_0, t_0 + \delta \rangle =: J^+$, kde

$$\delta = \min(a, bm^{-1}),$$

přičemž

$$m = \max_{[t, \mathbf{x}] \in J \times D} |\mathbf{f}(t, \mathbf{x})|.$$

2.3 Stabilita řešení

Další vlastností řešení, která nás zajímá, je jeho stabilita.

Definice 2.3 (Persidskij): Necht' $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(t)$ je řešení systému (1) definované na intervalu $\langle 0, \infty \rangle$. Řešení \mathbf{x}_0 se nazývá *stejněměrně stabilní*, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $t_0 \geq 0$ všechna řešení $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ systému (1) splňující podmínku $|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0(t_0)| < \delta$ existují pro všechna $t \geq t_0$ a splňují pro ně nerovnost $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)| < \varepsilon$. Není-li řešení \mathbf{x}_0 stabilní, nazývá se *nestabilní*.

Definice 2.4 (Ljapunov): Řešení $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(t)$ systému (1) definované na intervalu $\langle 0, \infty \rangle$ se nazývá *Ljapunovsky stabilní* (stručněji *stabilní*), když ke každému $\varepsilon > 0$ a $t_0 \geq 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že každé řešení $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ systému (1) vyhovující podmínce $|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0(t_0)| < \delta$ existuje pro $t \geq t_0$ a splňuje pro tato t nerovnost $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)| < \varepsilon$.

Definice 2.5 (Ljapunov): Necht' $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(t)$ je řešení systému (1) definované na intervalu $\langle 0, \infty \rangle$. Řešení \mathbf{x}_0 systému (1) se nazývá *asymptoticky stabilní*, když je stabilní a existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $t_1 \geq 0$ a všechna řešení $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ systému (1) splňující nerovnost $|\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_0(t_1)| < \delta$ platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)| = 0.$$

Definice 2.6 Řešení \mathbf{x}_0 systému (1) se nazývá *exponenciálně stabilní*, jestliže existují konstanty $K > 0, \alpha > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $t_1 \geq t_0$ je řešení \mathbf{x} systému (1) splňující podmínku $|\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_0(t_1)| < \delta$ definováno pro všechna $t \geq t_1$ a platí

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)| \leq K |\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_0(t_1)| e^{-\alpha(t-t_1)}, \quad t \geq t_1. \quad (6)$$

Věta 2.3 Buď \mathbf{A} konstantní matice. Jestliže všechny kořeny její charakteristické rovnice $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ (vlastní čísla matice \mathbf{A}) mají nekladnou reálnou část a ty s nulovou reálnou částí jsou jednonásobné, pak řešení $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(t) = 0$ lineárního autonomního systému $\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x}$ je stejněměrně stabilní.

Věta 2.4 Jestliže alespoň jedno vlastní číslo matice \mathbf{A} má kladnou reálnou část, pak řešení $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(t) = 0$ lineárního autonomního systému $\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x}$ je nestabilní.

Věta 2.5 Řešení $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(t) = 0$ lineárního autonomního systému $\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x}$ je stejněměrně asymptoticky stabilní právě tehdy, když všechna vlastní čísla matice \mathbf{A} mají zápornou reálnou část.

3 Autonomní systémy

3.1 Základní pojmy

Vektorová diferenciální rovnice

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (7)$$

kde vektorová funkce \mathbf{f} je definovaná na nějaké oblasti Ω v prostoru \mathbb{R}^n , se nazývá *autonomní systém*. Často bývá $\Omega = \mathbb{R}^n$. V této kapitole budeme předpokládat, že \mathbf{f} je spojitá n -vektorová funkce a že počáteční problém (7) s počáteční podmínkou $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ je jednoznačný pro libovolné $[t_0, \mathbf{x}_0] \in \mathbb{R} \times \Omega$. Řešením budeme důsledně rozumět úplné řešení.

Řešením $\mathbf{x} = \varphi(t)$ rovnice (7) můžeme interpretovat buďto jako graf funkce $\mathbf{x} = \varphi(t)$ v prostoru $\mathbb{R} \times \Omega$ nebo jako křivku v prostoru Ω danou parametricky rovnicí $\mathbf{x} = \varphi$. Ve druhém případě se taková křivka nazývá *trajektorie* systému (7). Je to kolmý průmět grafu funkce $\mathbf{x} = \varphi(t)$ z $\mathbb{R} \times \Omega$ do Ω .

Poznámka 3.1 Pro autonomní systémy pojmy *stabilní řešení* a *stejněměrně stabilní řešení* splývají.

Věta 3.1 Buď $\mathbf{x} = \varphi(t)$ řešení rovnice (7) splňující počáteční podmínku $\varphi(t_0) = \mathbf{x}_0$. Pak pro každé $c \in \mathbb{R}$ je též $\mathbf{x} = \psi(t) := \varphi(t_0 + c)$ řešením (7) a splňuje podmínku $\psi(t_0 - c) = \mathbf{x}_0$. Je-li $\varphi(t)$ definované na intervalu (t_1, t_2) je $\psi(t)$ definované na intervalu $(t_1 - c, t_2 - c)$.

Věta 3.2 Buďte φ, ψ řešení rovnice (7). Pak jejich trajektorie buďto splývají, nebo nemají ani jeden společný bod.

Definice 3.1 Bod \mathbf{x}_0 se nazývá *singulární bod* (kritický bod nebo stacionární bod) rovnice (7), jestliže $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$.

Věta 3.3 Autonomní systém (7) může mít trajektorie trojího typu:

- *Singulární body.* Odpovídají konstantním řešením.
- *Uzavřené trajektorie (cykly).* Odpovídají nekonstantním periodickým řešením.
- *Trajektorie, které samy sebe neprotínají.*

3.2 Typy singulárních bodů v rovině

Buď dán autonomní systém dvou rovnic ve vektorovém tvaru

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (8)$$

kde $\Omega = \mathbb{R}^2$ a předpokládejme existenci a jednoznačnost řešení každého počátečního problému.

Definice 3.2 Křivka, na nichž jsou směrové elementy uvažovaného dvojrozměrného systému autonomních diferenciálních rovnic rovnoběžné se souřadnými osami, se nazývá *nulklina*.

Singulární bod \mathbf{x}_0 rovnice (8) se nazývá:

- *střed*, když existuje ryzí okolí O bodu \mathbf{x}_0 takové, že každým bodem $a \in O$ prochází jediná trajektorie, která je uzavřená a obsahuje ve svém vnitřku bod \mathbf{x}_0 ;
- *ohnisko*, když existuje ryzí okolí O bodu \mathbf{x}_0 takové, že bod $\mathbf{x}(t)$ trajektorie \mathbf{x} vycházející z libovolného bodu $a \in O$ má tu vlastnost, že konverguje pro $t \rightarrow \infty$ nebo $t \rightarrow -\infty$ k \mathbf{x}_0 , a to tak, že velikost orientovaného úhlu vektoru $\overrightarrow{x_0 x(t)}$ od nějakého pevného vektoru $\overrightarrow{x_0 x_1}$ má nevlastní limitu;
- *uzel*, když existuje ryzí okolí O bodu \mathbf{x}_0 takové, že pro bod $x(t)$ trajektorie x vycházející z libovolného bodu $a \in O$ platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 \quad \text{nebo} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0, \quad (9)$$

přičemž velikost orientovaného úhlu vektoru $\overrightarrow{x_0 x(t)}$ od nějakého pevného vektoru $\overrightarrow{x_0 x_1}$ má konečnou limitu;

- *sedlo*, když existuje jen konečný počet trajektorií $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ takových, že

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 \quad \text{nebo} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0. \quad (10)$$

Poznámka 3.2 Je-li $\mathbf{x}_0 \neq 0$ singulární bod rovnice (8), lze posunutím $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ transformovat rovnici (8) na rovnici $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y} + \mathbf{x}_0)$, která má singulární bod v počátku fázového prostoru \mathbb{R}^2 . Touto transformací se nemění typ singulárního bodu.

3.3 Singulární body lineárního homogenního autonomního systému

Provedeme nyní klasifikaci singulárních bodů a popíšeme průběh trajektorií lineárních autonomních systémů ve fázovém prostoru \mathbb{R}^2 .

Buď dán homogenní autonomní systém dvou rovnic zapsaný ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ x_2' &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{aligned} \quad (11)$$

a označíme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}^2,$$

pak vlastní čísla matice \mathbf{A} jsou kořeny charakteristické rovnice

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 0. \quad (12)$$

Je-li \mathbf{x} řešením systému (11), je též $c\mathbf{x}$, $c \in \mathbb{R}$, řešením tohoto systému. Trajektorie odpovídající takovým řešením jsou tedy stejnohlé se středem stejnohllosti v počátku. S pomocí vhodné lineární transformace můžeme $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$ převést na tvar

$$\mathbf{y}' = \mathbf{B}\mathbf{y}, \quad \text{kde} \quad \mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}. \quad (13)$$

Podle povahy kořenů λ_1, λ_2 charakteristické rovnice matice \mathbf{A} může být \mathbf{B} tvaru

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_4 = \begin{pmatrix} \Re(\lambda_1) & \Im(\lambda_1) \\ -\Im(\lambda_1) & \Re(\lambda_1) \end{pmatrix}.$$

První tvar odpovídá dvěma reálným různým kořenům, druhý dvojnásobnému kořenu λ_1 , je-li $|a_{12}| + |a_{21}| = 0$. Třetí tvar odpovídá dvojnásobnému kořenu za podmínky $|a_{12}| + |a_{21}| \neq 0$. Poslední tvar odpovídá případu komplexně sdružených kořenů λ_1, λ_2 . Vyšetřování průběhu trajektorie systému (11) můžeme tedy nahradit vyšetřováním systému (13), protože jsme jej obdrželi lineární transformací, která geometricky představuje otočení a tudíž nemění typ singulárního bodu. Budeme tedy uvažovat, že $\mathbf{y} = (y_1, y_2)'$.

3.3.1 $\det \mathbf{A} = 0$

Jestliže $\det \mathbf{A} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} = 0$, pak alespoň jedno vlastní číslo rovnice (12) je rovno 0. Systém (11) a tedy i (13) má v tomto případě nekonečně mnoho singulárních bodů. Je-li navíc $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$, jsou singulární právě všechny body přímky \mathbf{x} . Je-li $\mathbf{A} = \mathbf{O}$, je každý bod fázového prostoru \mathbb{R}^2 singulární.

3.3.2 $\det \mathbf{A} \neq 0$

Pokud $\det A \neq 0$ pak systém (11) má jediný singulární bod a to v počátku fázového prostoru \mathbb{R}^2 . O kořenech λ_1, λ_2 rovnice (12) můžeme říct, že $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$.

(1) $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1$

Má-li charakteristická rovnice (12) reálné kořeny $\lambda_1 \neq \lambda_2$, je

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Řešením autonomního systému (13) je vektorová funkce o složkách

$$y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_2 = c_2 e^{\lambda_2 t},$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ jsou libovolné konstanty. Pokud se konstanty nerovnají 0, platí

$$\left(\frac{y_1}{c_1}\right)^{\lambda_2} = e^{\lambda_1 \lambda_2 t} = \left(\frac{y_2}{c_2}\right)^{\lambda_1},$$

takže každou trajektorii systému (12) můžeme psát ve tvaru

$$y_2 = c_2 c_1^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} y_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}. \quad (14)$$

- Je-li $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, pak pro $t \rightarrow -\infty$ konverguje bod $y(t) = [y_1(t), y_2(t)]$ k počátku a platí

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y_2(t)}{y_1(t)} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t}} = \begin{cases} \infty, & \text{leží-li } [c_1, c_2] \text{ v 1. nebo 3. kvadrantu,} \\ -\infty, & \text{leží-li } [c_1, c_2] \text{ v 2. nebo 4. kvadrantu.} \end{cases}$$

Počátek je tedy *odpudivý uzel*.

- Je-li $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, transformace $t \rightarrow -t$ převádí tento případ na předcházející. Průběh trajektorií je stejný, pouze pohyb bodu po trajektorii je opačný, singulární bod je tedy *přitažlivý uzel*.
- Jsou-li λ_1, λ_2 opačných znamének je $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ v rovnici (14) záporný. A singulárním bodem v počátku fázového prostoru je *sedlo*.

(2) $\mathbf{B} = \mathbf{B}_2$

Má-li charakteristická rovnice (12) dvojnásobný kořen $\lambda_1 \neq 0$ a $|a_{12}| + |a_{21}| = 0$, je

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

V tomto případě jsou trajektoriemi rovnice (13) polopřímky vycházející z počátku

$$y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_2 = c_2 e^{\lambda_1 t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} - 0.$$

V počátku je tedy opět *uzel*.

(3) $\mathbf{B} = \mathbf{B}_3$

Má-li charakteristická rovnice (12) dvojnásobný kořen $\lambda_1 \neq 0$ a $|a_{12}| + |a_{21}| \neq 0$, je

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Trajektorie systému (11) jsou určeny rovnicemi

$$y_1 = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda_1 t}, \quad y_2 = c_2 e^{\lambda_1 t}.$$

Pokud $c_2 \neq 0$ lze rovnici trajektorií psát ve tvaru

$$y_1 = \frac{y_2}{c_2} \left(c_1 + \frac{c_2}{\lambda_1} \ln \frac{y_2}{c_2} \right).$$

Průběh trajektorií kolem počátku fázového prostoru je opět *uzel*.

(4) $\mathbf{B} = \mathbf{B}_4$

Má-li charakteristická rovnice (12) nereálné kořeny $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ je

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \Re(\lambda_1) & \Im(\lambda_1) \\ -\Im(\lambda_1) & \Re(\lambda_1) \end{pmatrix}.$$

Označme $\mu = \Re(\lambda_1)$, $\nu = \Im(\lambda_1)$.

- Nechť $\mu = 0$. Jedná se tedy o systém

$$y_1' = \nu y_2, \quad y_2' = -\nu y_1,$$

takže $y_1'' = -\nu^2 y_1$ a parametrické rovnice trajektorií jsou

$$y_1 = c_1 \cos(\nu t + c_2), \quad y_2 = -c_1 \sin(\nu t + c_2), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Trajektoriemi jsou tedy kružnice $y_1^2 + y_2^2 = c_1^2$ a počátek je *střed*.

- Je-li $\mu \neq 0$, jedná se o systém

$$y_1' = \mu y_1 + \nu y_2, \quad y_2' = -\nu y_1 + \mu y_2.$$

Zavedením polárních souřadnic $y_1 = r \cos \varphi$, $y_2 = r \sin \varphi$, obdržíme

$$r r' = y_1 y_1' + y_2 y_2' = \mu r^2,$$

$$\varphi' = \frac{y_2' y_1 - y_2 y_1'}{y_1^2 + y_2^2} = -\nu.$$

Řešením tohoto systému jsou funkce

$$r = c_1 e^{\mu t}, \quad \varphi = c_2 - \nu t, \quad \text{kde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Pro $c_1 > 0$ to jsou parametrické rovnice logaritmických spirál, takže počátek fázového prostoru je *ohnisko*.

3.4 Shrnutí typů singulárních bodů

Výsledky předchozího odstavce lze shrnout takto.

Označme D jako diskriminant charakteristické rovnice (12) a Tr jako stopu matice \mathbf{A} .

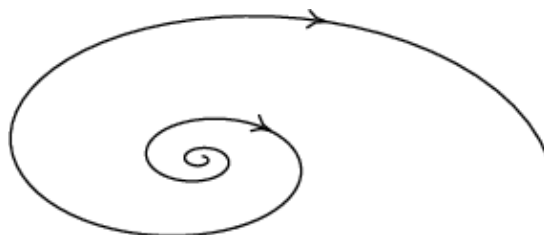
$$D = (a_{11} - a_{22})^2 + 4 a_{12} a_{21}, \quad Tr(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} \quad \text{a} \quad det\mathbf{A} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

Pak jednotlivé typy singulárních bodů můžeme určit podle následující tabulky.

$det(\mathbf{A})$	D	$Tr(\mathbf{A})$	Typ singulárního bodu
$det(\mathbf{A}) > 0$	$D < 0$	$Tr(\mathbf{A}) \neq 0$	ohnisko
$det(\mathbf{A}) > 0$	$D < 0$	$Tr(\mathbf{A}) = 0$	střed
$det(\mathbf{A}) > 0$	$D \geq 0$		uzel
$det(\mathbf{A}) < 0$			sedlo

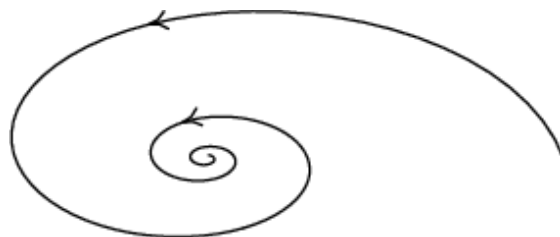
3.4.1 Příklady

- $x' = 6x - 5y \rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow P(\lambda) = (6 - \lambda)(3 - \lambda) + 5 = \lambda^2 - 9\lambda + 23$
 $y' = x + 3y \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{9 \pm i\sqrt{11}}{2} \rightarrow$ singulární bod je *odpudivé ohnisko*



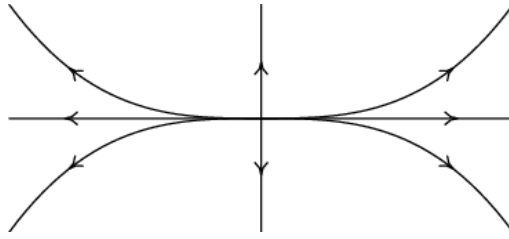
Obrázek 1: Singulární bod typu odpudivé ohnisko

- $x' = -2x + y \rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow P(\lambda) = (-2 - \lambda)(-2 - \lambda) + 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 5$
 $y' = -x - 2y \rightarrow \lambda_{1,2} = -2 \pm i \rightarrow$ singulární bod je *přitažlivé ohnisko*



Obrázek 2: Singulární bod typu přitažlivé ohnisko

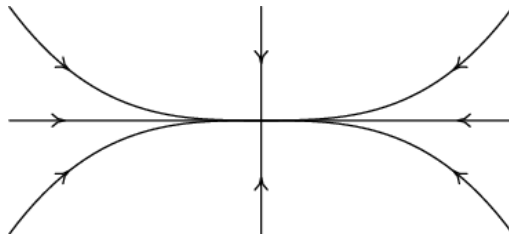
- $x' = 3x + y \rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow P(\lambda) = (3 - \lambda)(1 - \lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4$
 $y' = -x + y \rightarrow \lambda_{1,2} = 2 \rightarrow$ singulární bod je *odpudivý uzel*



Obrázek 3: Singulární bod typu odpudivý uzel

- $$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= 3x - y \end{aligned} \rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow P(\lambda) = (-1 - \lambda)(-1 - \lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

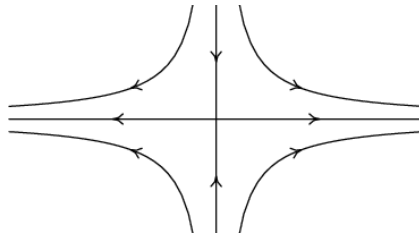
$$\rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \rightarrow \text{singulární bod je přitažlivý uzel}$$



Obrázek 4: Singulární bod typu přitažlivý uzel

- $$\begin{aligned} x' &= 3x + 4y - 5 \\ y' &= 2x + y \end{aligned} \rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow P(\lambda) = (3 - \lambda)(1 - \lambda) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5$$

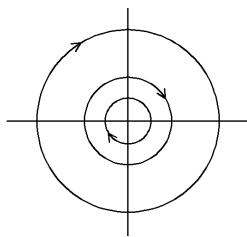
$$\rightarrow \lambda_{1,2} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{singulární bod je sedlo}$$



Obrázek 5: Singulární bod typu sedlo

- $$\begin{aligned} x' &= x - y \\ y' &= 2x - y \end{aligned} \rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow P(\lambda) = (1 - \lambda)(-1 - \lambda) + 2 = \lambda^2 + 1$$

$$\rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \rightarrow \text{singulární bod je střed}$$



Obrázek 6: Singulární bod typu střed

3.5 Singulární body nelineárních autonomních rovnic

Nyní uvedeme, jak se určují singulární body u nelineárních autonomních rovnic.

Definice 3.3 *Singulární bod x_0 se nazývá bod rotace, jestliže v libovolném okolí bodu x_0 existuje alespoň jeden cyklus, obsahující ve svém vnitřku bod x_0 .*

Nyní zavedeme označení:

$$\begin{aligned}x'_1 &= f(x_1, x_2) \\x'_2 &= g(x_1, x_2)\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}f_1 &= \frac{\partial f(x_{10}, x_{20})}{\partial x_1}, & f_2 &= \frac{\partial f(x_{10}, x_{20})}{\partial x_2}, \\g_1 &= \frac{\partial g(x_{10}, x_{20})}{\partial x_1}, & g_2 &= \frac{\partial g(x_{10}, x_{20})}{\partial x_2}.\end{aligned}$$

Věta 3.4 *Předpokládejme, že funkce $f(x_1, x_2)$, $g(x_1, x_2)$ jsou spojité a mají spojité partiální derivace druhého řádu v okolí bodu $[x_{10}, x_{20}]$ a že $f(x_{10}, x_{20}) = g(x_{10}, x_{20}) = 0$.
Nechť*

$$\det \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Pak je bod $[x_{10}, x_{20}]$ izolovaným singulárním bodem autonomního systému. Přitom je bod $[x_0, y_0]$ uzel, ohnisko nebo sedlo pro autonomní systém, je-li počátek singulárním bodem stejného typu pro lineární systém

$$\begin{aligned}x'_1 &= f_1 x_1 + f_2 x_2, \\x'_2 &= g_1 x_1 + g_2 x_2.\end{aligned}$$

Je-li však počátek střed pro tento systém, je bod $[x_0, y_0]$ buď bod rotace nebo ohnisko pro původní autonomní systém.

4 Modely společenstva predátor×kořist

Nyní se budeme zabývat konkrétním modelem vývoje dvou populací z nichž jedna (predátor) se živí druhou (kořist).

Specializujeme se na situaci, kdy se predátor živí jen jedním typem kořisti a v její nepřítomnosti vymírá, naopak kořist je lovena pouze jedním typem predátora.

Označme $x = x(t)$ velikost populace kořisti v čase t a $y = y(t)$ velikost populace predátora v čase t (velikost je dána buď jako počet jedinců, či hustota populace). Dále označme

$\alpha_1 = \alpha_1(x)$ jako specifickou míru růstu populace kořisti,

$V = V(x, y)$ jako množství kořisti ulovené jedním predátorem, závisí jak na velikosti populace predátora (např. čím víc predátorů, tím větší konkurence), tak na množství kořisti (např. čím méně kořisti, tím je horší šance pro predátora ji najít a ulovit),

ε jako míru vymírání populace predátora, $\varepsilon > 0$,

$\alpha_2 = \alpha_2(V)$ jako míru porodnosti predátora (závisí na množství ulovené kořisti).

Jsou-li v čase t velikost populace kořisti $x(t)$ a predátora $y(t)$, pak v čase $t + \Delta t$ jsou

$$\begin{aligned}x(t + \Delta t) &= x(t) + \alpha_1(x(t))x(t)\Delta t - V(x(t), y(t))y(t)\Delta t \\y(t + \Delta t) &= y(t) - \varepsilon y(t)\Delta t + \alpha_2(V(x(t), y(t)))y(t)\Delta t,\end{aligned}$$

kde $\alpha_1(x(t))x(t)\Delta t$ je přírůstek (úbytek) populace kořisti za čas Δt , $V(x(t), y(t))y(t)\Delta t$ je množství ulovené kořisti za čas Δt .

Za předpokladu diferencovatelnosti funkcí $x(t)$, $y(t)$ a spojitosti funkcí α_1 , α_2 a V limitním přechodem $\Delta t \rightarrow 0$ dostáváme z předchozí rovnice obecný model predátor×kořist

$$\begin{aligned}x' &= \alpha_1(x)x - V(x, y)y \\y' &= (-\varepsilon + \alpha_2 V(x, y))y.\end{aligned}$$

4.1 Klasický Lotka-Volterův model společenstva predátor×kořist

Základním matematickým modelem popisující chování populací predátor×kořist je Lotka-Volterův model. Tento model nezávisle na sobě poprvé popsali matematici Vito Volterra a Alfred Lotka ve 20 letech minulého století. Zavedeme označení:

x ... velikost populace kořisti,

y ... velikost populace predátora,

α_1 ... střední rychlost růstu velikosti populace kořisti,

α_2 ... střední rychlost růstu velikosti populace predátora.

Pro jednoduchost budeme předpokládat, že predátor a kořist žijí izolovaně od ostatních živočišných druhů (např. na pustém ostrově), že predátor se živí pouze kořistí a kořist má dostatek potravy, tzn. $\alpha_1 > 0$. Kdyby se predátor neživil kořistí, postupně by vyhynul, z čehož můžeme usoudit, že $\alpha_2 > 0$. Předpokládejme, že existují dvě konstanty $c_1, c_2 > 0$ takové, že pro změnu velikosti populace kořisti Δx (resp. predátora Δy) při změně času Δt platí

$$\begin{aligned}\Delta x &= \alpha_1 x \Delta t - c_1 x y \Delta t, \\ \Delta y &= -\alpha_2 y \Delta t + c_2 x y \Delta t.\end{aligned}\tag{15}$$

Člen $c_1 x y \Delta t$ představuje úbytek populace kořisti vlivem lovu predátorů, naproti tomu člen $c_2 x y \Delta t$ představuje nárůst populace predátora vlivem dostatku potravy (kořisti).

Podělením předchozí rovnice změnou času Δt a limitním přechodem $\Delta t \rightarrow 0$ dostáváme

$$\begin{aligned}x' &= (\alpha_1 - c_1 y)x, \\ y' &= (-\alpha_2 + c_2 x)y.\end{aligned}\tag{16}$$

Každý počáteční problém tohoto systému má jediné a úplné řešení. Systém (16) má body singularity v $[0, 0]$ a $[\frac{\alpha_2}{c_2}, \frac{\alpha_1}{c_1}]$. Jacobiho matici zapíšeme ve tvaru

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - c_1 y & -c_1 x \\ c_2 y & -\alpha_2 + c_2 x \end{pmatrix}.$$

Pak platí

$$\mathbf{J}(0, 0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}\left(\frac{\alpha_2}{c_2}, \frac{\alpha_1}{c_1}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{c_1 \alpha_2}{c_2} \\ \frac{c_2 \alpha_1}{c_1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla Jacobiho matice $\mathbf{J}(0, 0)$ jsou $\lambda_1 = \alpha_1$ a $\lambda_2 = -\alpha_2$, tedy $\lambda_1 > 0$ a $\lambda_2 < 0$ z čehož můžeme určit typ singulárního bodu, *sedlo*.

Vlastní čísla druhé Jacobiho matice $\mathbf{J}\left(\frac{\alpha_2}{c_2}, \frac{\alpha_1}{c_1}\right)$ jsou $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$, takže $[\frac{\alpha_2}{c_2}, \frac{\alpha_1}{c_1}]$ je singulárním bodem typu *střed*.

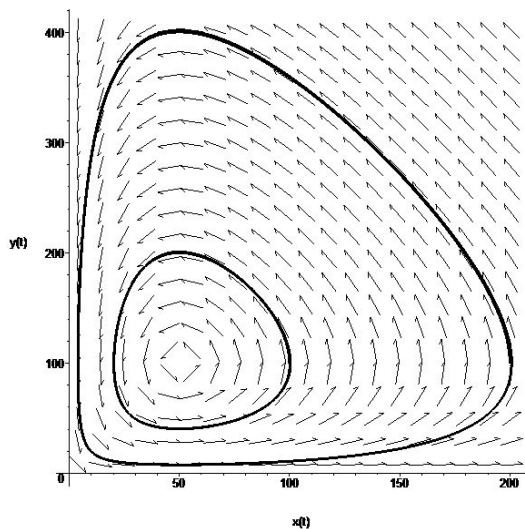
Velikost populací predátora a kořisti se cyklicky opakují, přičemž kolísají kolem rovnovážných stavů; x (kořist) kolem $\frac{\alpha_2}{c_2}$ a y (predátor) kolem $\frac{\alpha_1}{c_1}$ (Obrázek 7).

Pokud systém není ovlivňován vnějšími podněty, velikost populace kořisti x kolísá kolem $\frac{\alpha_2}{c_2}$, zatímco velikost populace predátora y kolísá kolem vyšší hodnoty $\frac{\alpha_1}{c_1}$.

Lovem kořisti se snižuje střední rychlost růstu velikosti populace kořisti α_1 , x potom kolísá kolem $\frac{\alpha_2}{c_2}$, zatímco y kolísá kolem nižší hodnoty $\frac{\alpha_1}{c_1}$.

Lovem predátora se snižuje střední rychlost růstu velikosti populace predátora α_2 , x potom kolísá kolem vyšší hodnoty $\frac{\alpha_2}{c_2}$, y kolísá kolem $\frac{\alpha_1}{c_1}$.

Pokud bráníme kořist a nesnižujeme počet populace predátora, klesají konstanty c_1, c_2 , zatímco $\frac{\alpha_1}{c_1}, \frac{\alpha_2}{c_2}$ vzrůstají.



Obrázek 7: Klasický Lotka-Volterův model

4.2 Model společenstva predátor×kořist s vnitrodruhovou konkurencí kořisti

Klasický model, který je ukázán v předchozím odstavci má jeden nereálný rys. Pokud by vymřela populace predátora, populace kořisti by začala neomezeně růst. Ale protože jsme původně předpokládali, že žijí na opuštěném ostrově, neměli by dostatek prostoru ani potravy. Proto do rovnice (15) začleníme omezující člen vývoje kořisti. Označme:

- x ... velikost populace kořisti,
- y ... velikost populace predátora,
- α_1 ... specifickou míru růstu populace kořisti,
- $-\alpha_2$... specifickou míru růstu populace predátora izolovaného od kořisti,
- a ... míru vnitrodruhové konkurence kořisti,
- c_1 ... specifickou míru ničení populace kořisti predátorem,
- b ... efektivnost přeměny zničené kořisti na populaci predátora,

kde všechny konstanty jsou kladné a položíme $c_2 = b c_1$. Pro model společenstva predátor×kořist s vnitrodruhovou konkurencí tedy platí

$$\begin{aligned} x' &= (\alpha_1 - a x - c_1 y) x, \\ y' &= (-\alpha_2 + c_2 x) y. \end{aligned} \quad (17)$$

Každý počáteční problém pro tento systém je jednoznačně určen. Zajímají nás pouze řešení ležící v prvním kvadrantu. Body singularity tohoto systému jsou $[0, 0]$, $[\frac{\alpha_1}{a}, 0]$ a pro $c_2 \alpha_1 > a \alpha_2$ také $[x^*, y^*] = [\frac{\alpha_2}{c_2}, \frac{c_2 \alpha_1 - a \alpha_2}{c_1 c_2}]$. Jacobiho matici zapíšeme ve tvaru

$$\mathbf{J}(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - 2 a x - c_1 y & -c_1 x \\ c_2 y & -\alpha_2 + c_2 x \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Vlastní čísla matice $\mathbf{J}(0, 0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{pmatrix}$ jsou $\alpha_1 > 0$ a $\alpha_2 < 0$, takže singulární bod $[0, 0]$ je *sedlo*.

Je-li $c_2 \alpha_1 < a \alpha_2$, pak vlastní čísla matice $\mathbf{J}(\frac{\alpha_1}{a}, 0) = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\frac{c_1 \alpha_1}{a} \\ 0 & \frac{c_2 \alpha_1 - a \alpha_2}{a} \end{pmatrix}$ jsou $-\alpha_1 < 0$ a $\frac{(c_2 \alpha_1 - a \alpha_2)}{a} < 0$, takže singulární bod je typu *uzel* (Obrázek 8).

Pro $c_2 \alpha_1 > a \alpha_2$ jsou vlastní čísla předchozí matice $\mathbf{J}(\frac{\alpha_1}{a}, 0)$ s opačnými znaménky, takže singulární bod je *sedlo*.

Opět vezmeme předpoklad $c_2 \alpha_1 > a \alpha_2$, pak vlastní čísla matice $\mathbf{J}(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} -\frac{a \alpha_2}{c_2} & -\frac{c_1 \alpha_2}{c_2} \\ \frac{c_2 \alpha_1 - a \alpha_2}{c_1} & 0 \end{pmatrix}$

jsou

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \alpha_2 \pm \sqrt{D}}{2 c_2},$$

kde označíme $D = a^2 \alpha_2^2 - 4 c_2 \alpha_2 (c_2 \alpha_1 - a \alpha_2)$.

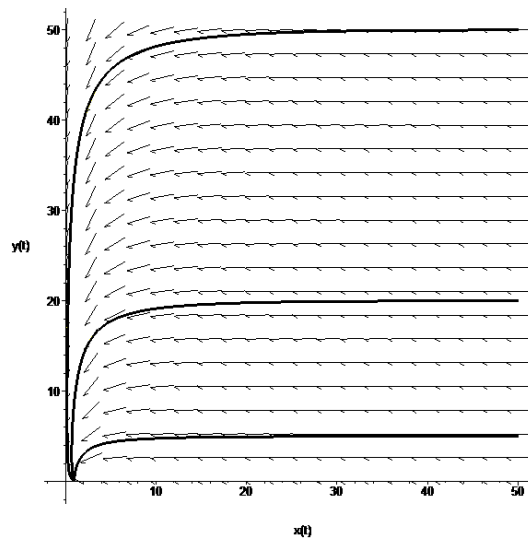
Jestliže $D \geq 0$, pak singulární bod je *uzel* (Obrázek 10).

Jestliže $D < 0$, pak singulární bod je *ohnisko* (Obrázek 9).

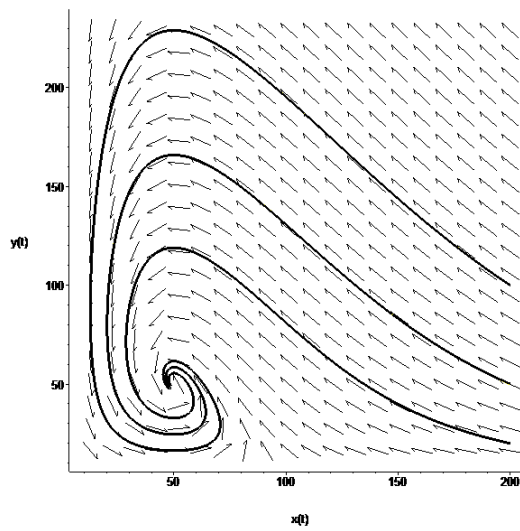
Oba případy jsou stabilní.

Počet kusů kořisti se ustálí na hodnotě x^* a počet predátorů na y^* . K tomuto ustálenému stavu populace dojdou s tlumenými oscilacemi nebo konečným počtem zakolísání.

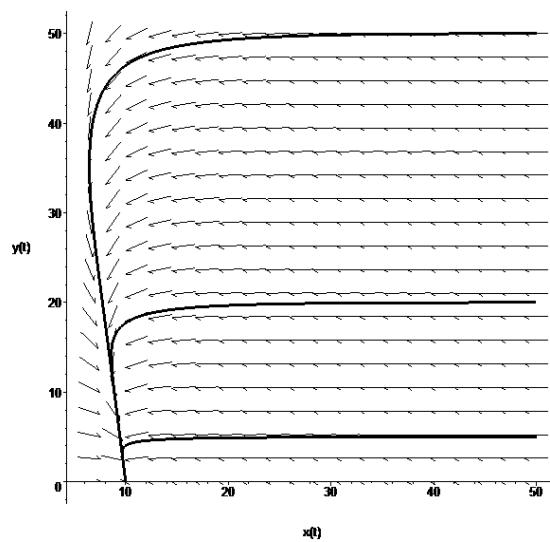
Lovem predátora se snižuje jeho populace a zvyšuje se populace kořisti (pouze omezeně).



Obrázek 8: Model s vnitrodruhovou konkurencí za předpokladu $c_2\alpha_1 < a\alpha_2$



Obrázek 9: Model s vnitrodruhovou konkurencí za předpokladu $c_2\alpha_1 > a\alpha_2, D < 0$



Obrázek 10: Model s vnitrodruhovou konkurencí za předpokladu $c_2\alpha_1 > a\alpha_2, D > 0$

4.3 Model predátor×kořist Gausseho typu

Oba modely v předchozích oddílech vysvětlovaly jevy vyskytující se ve skutečných populacích, vyskytoval se v nich stacionární stav, kolem kterého kolísaly velikosti obou populací. Modely ale mají taky nezanedbatelné nedostatky. Reálné populace podle klasického Lotka-Volterova modelu by se nevyvíjely v pravidelných cyklech, ale nepředvídatelně kolísaly díky náhodným vlivům. Model s vnitrodruhovou konkurencí tento nedostatek nemá, ale nevysvětluje cyklické kolísání velikosti populací.

Opět označíme $x = x(t)$ jako velikost populace kořisti a $y = y(t)$ jako velikost populace predátora. Předpokládejme:

- přírůstek (resp. úbytek) izolované populace kořisti je úměrný její velikosti, tzn. v čase t má x jedinců, pak v čase $t + \Delta t$ má $x + \alpha_1 x \Delta t$ jedinců, kde $\alpha_1(x)$ je specifická míra růstu
- jeden predátor zabije za jednotku času V kusů kořisti, tzn. za čas Δt predátor zabije $V \Delta t$ kusů kořisti, kde $V(x, y)$ je množství zabíjených kusů kořisti
- kořist je jediným nebo alespoň hlavním zdrojem potravy predátora, ten tedy bez kořisti vymírá konstantní rychlostí $\varepsilon_2 > 0$, tzn. v čase t má populace predátora y jedinců, pak v čase $t + \Delta t$ má $y - \varepsilon_2 y \Delta t$ jedinců
- pokud má predátor potravu, může se rozmnožovat, potom tedy za jednotku času může mít predátor α_2 mláďat, tzn. za čas Δt se narodí $\alpha_2 y \Delta t$ mláďat, kde $\alpha_2(V)$ je specifická míra porodnosti predátora

Z uvedených předpokladů plynou rovnice

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) &= x(t) + \alpha_1(x(t))x(t)\Delta t - V(x(t), y(t))y(t)\Delta t, \\ y(t + \Delta t) &= y(t) - \varepsilon_2 y(t)\Delta t + \alpha_2(V(x(t), y(t)))y(t)\Delta t. \end{aligned}$$

Předpokládejme, že x, y jsou diferencovatelné a α_1, α_2, V jsou spojitě, limitním přechodem $\Delta t \rightarrow 0$ dostaneme systém rovnic

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_1(x)x - V(x, y)y, \\ y' &= [-\varepsilon_2 + \alpha_2(V(x, y))]y. \end{aligned} \tag{19}$$

Konkrétní modely získáme bližším určením funkcí α_1, α_2, V .

Předpokládejme, že izolovaná populace kořisti se chová podle modelu $\alpha_1(x) = \varepsilon_1 - ax$, kde $\varepsilon_1, a > 0$ a že predátoři se při lovu neovlivňují, což znamená $V = V(x)$. Dalším zjednodušením bude, že množství ulovené kořisti se přímo podílí na růstu populace predátora, tj. $\alpha_2(V) = \kappa V$, kde kladná konstanta κ představuje efektivnost přeměny populace kořisti na populaci predátora. S použitím těchto předpokladů můžeme systém (19) zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} x' &= (\varepsilon_1 - ax)x - V(x)y, \\ y' &= [-\varepsilon_2 + \kappa V(x)]y. \end{aligned} \tag{20}$$

Nyní specifikujme funkci $V(x)$, která se nazývá trofická funkce nebo funkční odpověď predátora. Předpokládejme, že funkce $V(x)$ je spojitá a splňuje následující předpoklady:

- $V(0) = 0$, tzn. pokud není kořist, predátor nic neuloví
- $\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = M$, tzn. i při nadbytku kořisti uloví predátor jen omezený počet kusů

- funkce V je neklesající

Rozlišujeme čtyři typy trofické funkce:

- typ 1. tento typ se používá pro predátory, kteří se živí filtrováním vody nebo spásáním trávy, $V(x) = \begin{cases} ax, & x < M/c \\ M, & x \geq M/c \end{cases}$
- typ 2. tento typ je charakteristický pro bezobratlé živočichy, $V(x) = M \frac{ax^k}{ax^k + 1}$ nebo $V(x) = M(1 - e^{-ax^k})$, kde $a > 0$ a $k \in (0, 1)$
- typ 3. tento typ se využívá v prostředí, kde pro kořist existují úkryty a predátor má další zdroje potravy, rovnice je stejná jako pro typ 2., jen $k > 1$
- typ 4. tento typ se používá pro obratlovce, tedy pro živočichy schopné složitějšího chování, $V(x) = \begin{cases} 0, & x < b/c \\ cx - b, & b/c \leq x \leq (M + b)/c, \text{ kde } b, c > 0 \\ M, & x > (M + b)/c, \end{cases}$

4.4 Gausseho model s trofickou funkcí typu 2.

Model reálné populace bezobratlých živočichů má trofickou funkci typu 2, $V(x) = \frac{bx}{bx+1}$, kde $b > 0$. Pro tento systém analyzujeme jeho typy singulárních bodů.

$$\begin{aligned} x' &= (\varepsilon_1 - ax)x - \frac{bx}{bx+1}y \\ y' &= (-\varepsilon_2 + \kappa \frac{bx}{bx+1})y \end{aligned} \quad (21)$$

Stacionární body zjistíme pomocí nulklin.

x -nulklina: $x' = 0$

$$\varepsilon_1 \left(1 - \frac{ax}{\varepsilon_1}\right)x - \frac{bx}{bx+1}y = 0, \text{ kde označíme } \frac{\varepsilon_1}{a} = k. \Rightarrow x = 0, y = \frac{\varepsilon_1}{b} \left(1 - \frac{x}{k}\right)(bx + 1)$$

y -nulklina: $y' = 0$

$$(-\varepsilon_2 + \kappa \frac{bx}{bx+1})y = 0 \Rightarrow x = \frac{\varepsilon_2}{b(\kappa - \varepsilon_2)}, y = 0$$

Stacionární body tedy jsou $[0, 0]$, $[k, 0]$, $[\frac{\varepsilon_2}{b(\kappa - \varepsilon_2)}, \frac{\varepsilon_1 \kappa (bk(\kappa - \varepsilon_2) - \varepsilon_2)}{b^2 \kappa (\kappa - \varepsilon_2)^2}] = [x^*, y^*]$.

Nyní sestrojíme Jacobiho matici, kam dosadíme stacionární body. Podle tabulky z odstavce 2.4 určíme jejich typy.

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - 2ax - V'(x)y & -V(x) \\ \kappa V'(x)y & -\varepsilon_2 + \kappa V(x) \end{pmatrix}$$

$$1. \mathbf{J}(0, 0) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

$\det \mathbf{J}(0, 0) = -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \rightarrow \det \mathbf{J}(0, 0) < 0$ a tedy singulární bod je typu *sedlo*.

$$2. \mathbf{J}(k, 0) = \begin{pmatrix} -\varepsilon_1 & -V(k) \\ 0 & -\varepsilon_2 + \kappa V(k) \end{pmatrix}$$

$\det \mathbf{J}(k, 0) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \kappa V(x)$ je-li

$k > \frac{\varepsilon_2}{b(\kappa - \varepsilon_2)} \rightarrow \det \mathbf{J}(k, 0) < 0 \Rightarrow$ singulární bod je tedy typu *sedlo*,

$k < \frac{\varepsilon_2}{b(\kappa - \varepsilon_2)} \rightarrow \det \mathbf{J}(k, 0) > 0 \Rightarrow$ singulární bod je tedy typu *uzel* nebo *ohnisko*.

$D = [bk(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \kappa) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)]^2 > 0 \Rightarrow$ singulární bod je *uzel* (Obrázek 11).

$$3. \mathbf{J}(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - 2ax^* - V'(x^*)y^* & -V(x^*) \\ \kappa V'(x^*)y^* & -\varepsilon_2 + \kappa V(x^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - 2ax^* - V'(x^*)y^* & -\frac{\varepsilon_2}{\kappa} \\ \kappa V'(x^*)y^* & 0 \end{pmatrix},$$

aby bod $[x^*, y^*]$ byl v prvním kvadrantu musí být $k > \frac{\varepsilon_2}{b(\kappa - \varepsilon_2)}$.

$$\det \mathbf{J}(x^*, y^*) = \frac{\varepsilon_2 b}{(bx^* + 1)^2} y^* > 0 \Rightarrow \text{uzel nebo ohnisko.}$$

Nyní vyřešíme stabilitu stacionárního bodu pomocí stopy matice $Tr(\mathbf{J}(x^*, y^*))$.

$$Tr(\mathbf{J}(x^*, y^*)) = \varepsilon_1 - 2\frac{\varepsilon_1}{k}x^* - V'(x^*)y^* = -2bx^{*2} + bkx^* - x^* = x^*(x^* - \frac{bk-1}{2b})$$

$Tr(\mathbf{J}(x^*, y^*)) > 0$ pro $x \in \langle 0, \frac{bk-1}{2b} \rangle \rightarrow$ nestabilní stacionární bod (Ohnisko) viz.

Obrázek 13

$Tr(\mathbf{J}(x^*, y^*)) < 0$ pro $x \in (\frac{bk-1}{2b}, \infty) \rightarrow$ stabilní stacionární bod (Ohnisko) viz.

Obrázek 14

Nyní vyšetříme chování modelu v okolí významných bodů, tj. $x = 0, x = k, x = \frac{bk-1}{2b}$.

Označme $h(x) = D(x) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} = (\varepsilon_1 - 2ax - V'(x)y + \varepsilon_2 - \kappa V(x))^2 - 4\kappa V(x)V'(x)y$.

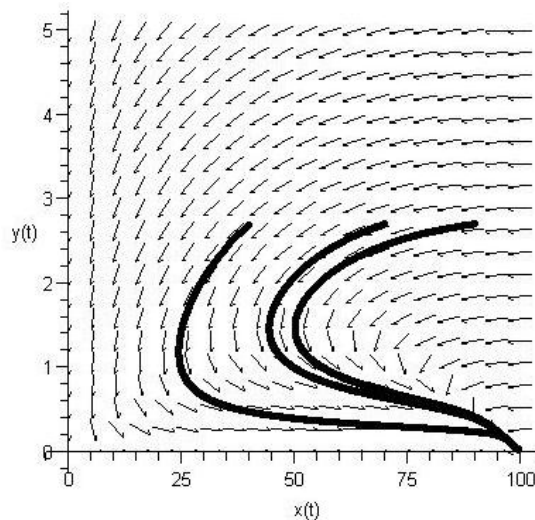
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 > 0 \Rightarrow$ v okolí 0 bude (x^*, y^*) nestabilní uzel
- $\lim_{x \rightarrow k} h(x) = (-\varepsilon_1)^2 > 0 \Rightarrow$ v okolí k bude (x^*, y^*) stabilní uzel (Obrázek 12)
- $\lim_{x \rightarrow \frac{bk-1}{2b}} h(x) = -4\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{bk} < 0 \Rightarrow$ v okolí $\frac{bk-1}{2b}$ bude (x^*, y^*) ohnisko

Shrnutí modelu s trofickou funkcí typu 2

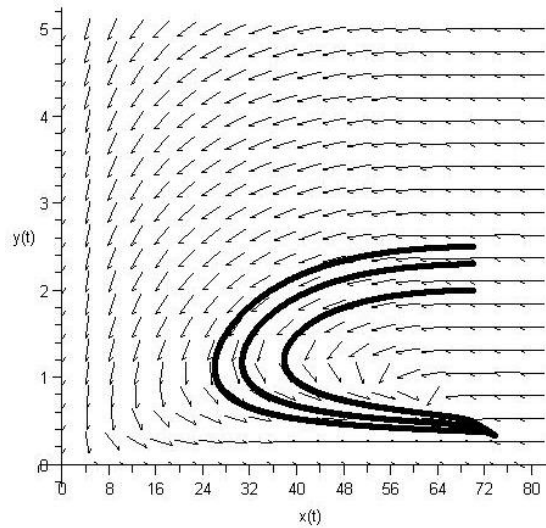
Přiblíží-li se x k hodnotě k , pak y se blíží k 0. V tomto bodě $[k, 0]$ jsme určili singulární bod typu *stabilní uzel*, což lze interpretovat jako stav, kdy populaci predátora nestačí počet kořisti a vymírá, zatímco populace kořisti se ustálí na hodnotě k , což je kapacita prostředí.

Pokud se x blíží k $\frac{bk-1}{2b}$ zleva (nestabilní oblast), singulárním bodem je *nestabilní ohnisko*. Populace predátora a kořisti opakovaně oscilují.

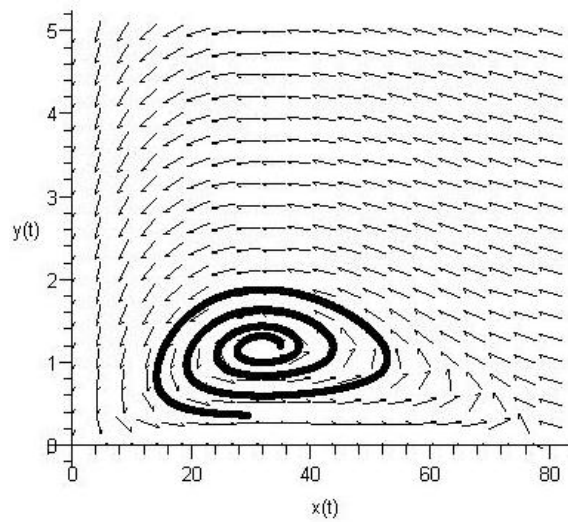
Pro x blíží se k $\frac{bk-1}{2b}$ zprava (stabilní oblast), populace predátora i kořisti se ustálí na určité hodnotě, singulárním bodem je totiž *stabilní ohnisko*.



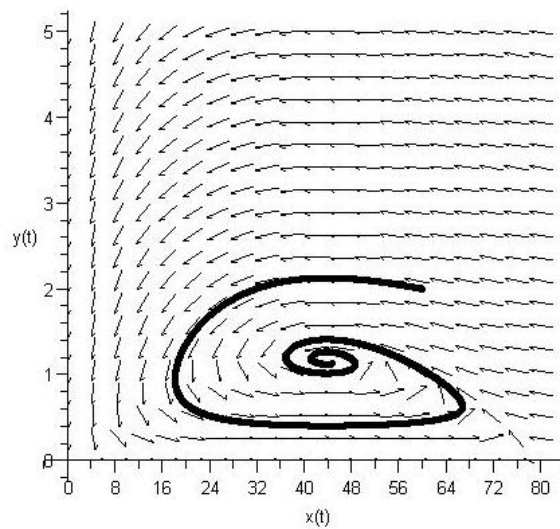
Obrázek 11: Gauseho model s trofickou funkcí typu 2, pro $x = k$



Obrázek 12: Gauseho model s trofickou funkcí typu 2, pro $x \rightarrow k$



Obrázek 13: Gauseho model s trofickou funkcí typu 2, pro $x \in (0, \frac{bk-1}{2b})$



Obrázek 14: Gauseho model s trofickou funkcí typu 2, pro $x \in (\frac{bk-1}{2b}, \infty)$

4.5 Gausseho model s trofickou funkcí typu 3

Model reálné populace savců (např. rys \times zajíc) má trofickou funkci typu 3, $V(x) = M \frac{bx^2}{bx^2+1}$, kde $b > 0$. Pro tento systém analyzujeme jeho typy singulárních bodů.

$$\begin{aligned} x' &= (\varepsilon_1 - ax)x - \frac{bx^2}{bx^2+1}y \\ y' &= (-\varepsilon_2 + \kappa \frac{bx^2}{bx^2+1})y \end{aligned} \quad (22)$$

Stacionární body zjistíme pomocí nulklin.

x -nulklina: $x' = 0$

$$\varepsilon_1 \left(1 - \frac{ax}{\varepsilon_1}\right)x - \frac{bx^2}{bx^2+1}y = 0, \text{ kde označíme } \frac{\varepsilon_1}{a} = k. \Rightarrow x = 0, y = \varepsilon_1 \left(1 - \frac{x}{k}\right) \frac{bx^2+1}{Mbx}$$

y -nulklina: $y' = 0$

$$(-\varepsilon_2 + \kappa \frac{bx}{bx+1})y = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{b(\kappa M - \varepsilon_2)}}, y = 0$$

Stacionární body tedy jsou $[0, 0]$, $[k, 0]$, $\left[\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{b(\kappa M - \varepsilon_2)}}, \frac{\varepsilon_1}{bkM} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\kappa M - \varepsilon_2}} + 1\right) \left(\sqrt{ak} - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\kappa M - \varepsilon_2}}\right)\right] = [x^*, y^*]$.

Nyní sestojíme Jacobiho matici, kam dosadíme stacionární body. Podle tabulky z odstavce 2.4 určíme jejich typy.

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - 2ax - V'(x)y & -V(x) \\ \kappa V'(x)y & -\varepsilon_2 + \kappa V(x) \end{pmatrix}$$

$$1. \mathbf{J}(0, 0) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

$\det \mathbf{J}(0, 0) = -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \rightarrow \det \mathbf{J}(0, 0) < 0$ a tedy singulární bod je typu *sedlo*.

$$2. \mathbf{J}(k, 0) = \begin{pmatrix} -\varepsilon_1 & -V(k) \\ 0 & -\varepsilon_2 + \kappa V(k) \end{pmatrix}$$

$\det \mathbf{J}(k, 0) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \kappa V(k)$ je-li

$k > \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{b(\kappa M - \varepsilon_2)}} \rightarrow \det \mathbf{J}(k, 0) < 0 \Rightarrow$ singulární bod je tedy typu *sedlo*,

$k < \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{b(\kappa M - \varepsilon_2)}} \rightarrow \det \mathbf{J}(k, 0) > 0 \Rightarrow$ singulární bod je tedy typu *uzel* nebo *ohnisko*.

$D = [\kappa M \frac{ak^2}{ak^2+1} + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2]^2 > 0 \Rightarrow$ singulární bod je *uzel*.

$$3. \mathbf{J}(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - 2ax^* - V'(x^*)y^* & -V(x^*) \\ \kappa V'(x^*)y^* & -\varepsilon_2 + \kappa V(x^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - 2ax^* - \frac{2\varepsilon_1(1-x^*/k)}{ax^{*2}+1} & -V(x^*) \\ \frac{2\varepsilon_1 \kappa (1-x^*/k)}{ax^{*2}+1} & 0 \end{pmatrix},$$

aby bod $[x^*, y^*]$ byl v prvním kvadrantu musí být $k > \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{b(\kappa M - \varepsilon_2)}}$.

$\det \mathbf{J}(x^*, y^*) = \frac{2\varepsilon_1 \kappa (1-x^*/k)}{ax^{*2}+1} > 0 \Rightarrow$ *uzel* nebo *ohnisko*.

Nyní vyřešíme stabilitu stacionárního bodu pomocí stopy matice $Tr(\mathbf{J}(x^*, y^*))$.

$$Tr(\mathbf{J}(x^*, y^*)) = \varepsilon_1 - \frac{2\varepsilon_1 x^*}{k} - \frac{2\varepsilon_1(1-x^*/k)}{bx^{*2}+1} = -6bx^{*3} + b k x^{*2} - k = 0$$

Vyšetřili jsme průběh funkce a zjistili jsme, že v kladné poloose má maximum v $\frac{k}{3}$, dosadíme do $-6bx^{*3} + b k x^{*2} - k$ za $x = \frac{k}{3}$, dostaneme výraz $\frac{k(ak^2-27)}{27}$. Pak pro $ak^2 > 27$ existuje interval nestability stacionárních bodů, pro $ak^2 < 27$ je stacionární bod vždy stabilní.

Nyní vyšetříme chování modelu v okolí významných bodů, tj. $x = 0$ a $x = k$.

Označme $h(x) = D(x) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} = (\varepsilon_1 - 2ax - V'(x)y + \varepsilon_2 - \kappa V(x))^2 - 4\kappa V(x)V'(x)y$.

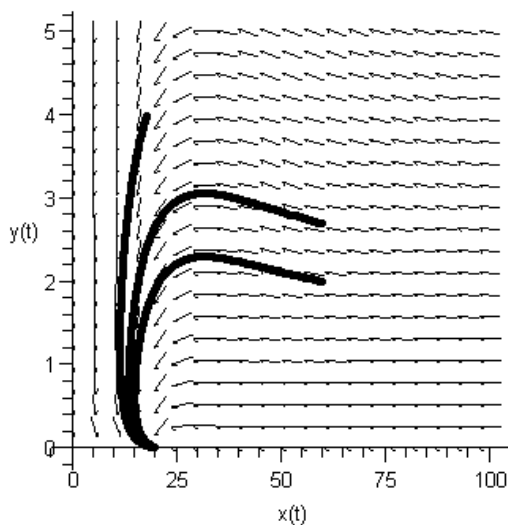
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = (-\varepsilon_1)^2 > 0 \Rightarrow$ v okolí 0 bude (x^*, y^*) uzel
- $\lim_{x \rightarrow k} h(x) = (\varepsilon_1)^2 > 0 \Rightarrow$ v okolí k bude (x^*, y^*) uzel (Obrázek 15)
- Nechť \bar{x} je bod, kde se mění stabilita (pokud existuje), tzn. že $a_{11} + a_{22} = 0$
 $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} h(x) = -4(\varepsilon_1 - \frac{2\varepsilon_1 x}{k})\kappa \frac{Mbx^2}{bx^2 + 1}$.
 Je-li $\frac{k}{2} > \bar{x} \rightarrow$ nestabilní (resp. stabilní) ohnisko (Obrázek 16 (resp. Obrázek 17)).
 Je-li $\frac{k}{2} < \bar{x} \rightarrow$ stabilní uzel (Obrázek 18).

Shrnutí modelu s trofickou funkcí typu 3

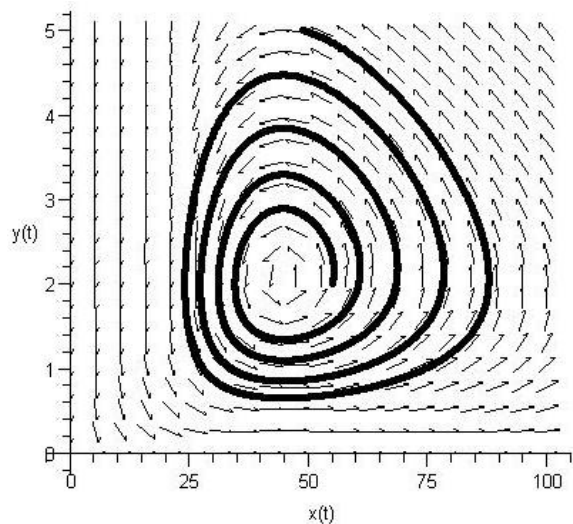
Přiblíží-li se x k hodnotě k , pak y se blíží k 0. V tomto bodě $[k, 0]$ jsme určili singulární bod typu *stabilní uzel*, což lze interpretovat jako stav, kdy populaci predátora nestačí počet kořisti a vymírá, zatímco populace kořisti se ustálí na hodnotě k , což je kapacita prostředí.

Je-li $x < \frac{k}{2}$, populace se pro jakékoliv počáteční hodnoty po čase ustálí na konkrétní hodnotě a to v singulárním bodě typu *stabilní ohnisko*.

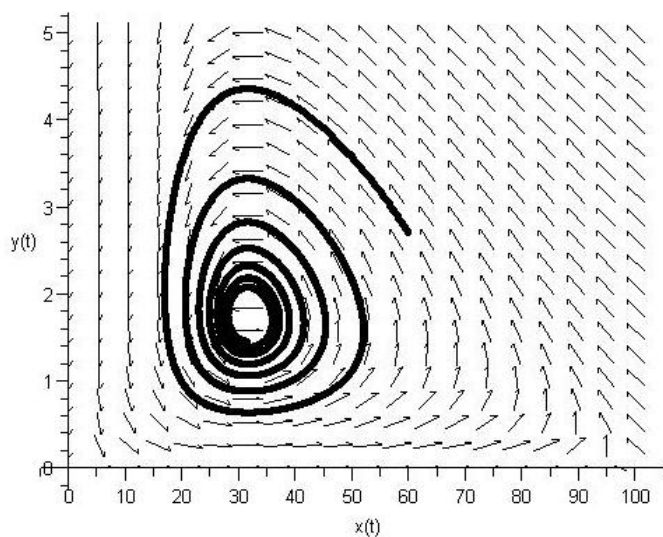
Pro $x > \frac{k}{2}$ se populace, pro jakékoliv počáteční hodnoty, po čase ustálí na konkrétní hodnotě v singulárního bodu typu *stabilní uzel*. V tomto případě se do ustáleného stavu dostane populace mnohem rychleji, než je tomu u stabilního ohniska.



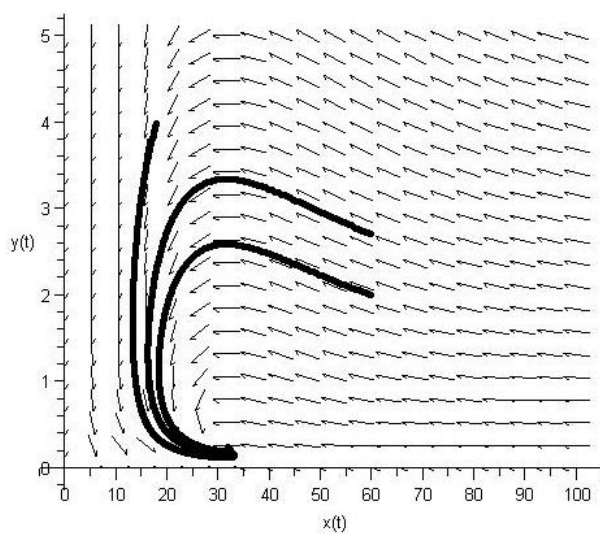
Obrázek 15: Gauseho model s trofickou funkcí typu 3, pro $x \rightarrow k$



Obrázek 16: Gausseho model s trofickou funkcí typu 3, pro $\frac{k}{2} > x, x \in$ intervalu nestability



Obrázek 17: Gausseho model s trofickou funkcí typu 3, pro $\frac{k}{2} > x, x \in$ intervalu stability



Obrázek 18: Gausseho model s trofickou funkcí typu 3, pro $x > \frac{k}{2}$

5 Závěr

Můžeme si povšimnout, že v přírodě se populace chovají podle určitých zákonitostí. V této práci jsem se je snažila přiblížit pomocí matematických modelů s využitím autonomních diferenciálních rovnic. Ukázala jsem zde nejznámější modely koexistence dvou populací predátor \times kořist. Mezi ně patří klasický Lotka-Volterův model, model s vnitrodruhovou konkurencí a nejreálnější Gauseho model.

Pomocí Gauseho modelu jsem vyšetřila model populací pro bezobratlé živočichy (odstavec 4.4), pro které je použita trofická funkce typu 2 a model populací savců (odstavec 4.5), pro které je použita trofická funkce typu 3.

V obou modelech nám vyjdou singulární body v $[0, 0]$ jako sedla a přiblíží-li se x k hodnotě k , pak y se blíží k 0. V tomto bodě $[k, 0]$ jsme určili singulární bod typu stabilní uzel, což lze interpretovat jako stav, kdy populaci predátora nestačí počet kořisti a vymírá, zatímco populace kořisti se ustálí na hodnotě k , což je kapacita prostředí.

U modelu bezobratlých živočichů pak další významný bod je $x \rightarrow \frac{bk-1}{2b}$. Pokud se x blíží k $\frac{bk-1}{2b}$ zleva (nestabilní oblast), singulárním bodem je nestabilní ohnisko. Populace predátora a kořisti opakovaně oscilují. Pro x blížící se k $\frac{bk-1}{2b}$ zprava (stabilní oblast), populace predátora i kořisti se ustálí na určité hodnotě, singulárním bodem je totiž stabilní ohnisko.

U modelu savců je také významný bod $x = \frac{k}{2}$. Je-li totiž $x < \frac{k}{2}$, populace se pro jakékoliv počáteční hodnoty po čase ustálí na konkrétní hodnotě a to v singulárním bodě typu stabilní ohnisko. Pro $x > \frac{k}{2}$ je tomu také tak, jen se do tohoto stavu dostane mnohem rychleji.

Literatura

- [1] KALAS, J., RÁB, M. *Obyčejné diferenciální rovnice*. Masarykova univerzita, Brno, 1995.
- [2] JONES, D. S., SLEEMAN, B. D. *Differential equations and mathematical biology*. Chapman and Hall/CRC, 2003.
- [3] MURRAY, J. *Mathematical biology*. Springer, 3rd edition, Springer-Verlag, 2002.
- [4] KALAS, J., POSPÍŠIL, Z. *Spojité modely v biologii*. Brno, 2001.
- [5] MAŘÍK, R. *Inženýrská matematika, autonomní systémy [online]*. 2007-2008.
Dostupné z WWW: <<http://old.mendelu.cz/~marik/in-mat-web/in-mat-webse16.html>>
- [6] POSPÍŠIL, Z. *Matematické modelování dynamiky populací [online]*. 12. 4. 2006.
Dostupné z WWW: <<http://www.math.muni.cz/~pospisil/Habilitace/Pedagogicka.pdf>>
- [7] REKTORYS, K. a spol. *Přehled užité matematiky II*. Prometheus, spol. s r. o., Praha, 2003.