



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

NAPJATOSTNĚ DEFORMAČNÍ ANALÝZA LÁVKY U JEDOVSKÉHO MLÝNA

STRESS AND DEFORMATION ANALYSES OF THE BRIDGE NEAR THE JEDOV MILL

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

MICHAL HORT

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. VLADIMÍR FUIS, Ph.D.

BRNO 2023

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student: **Michal Hort**
Studijní program: Základy strojího inženýrství
Studijní obor: Základy strojího inženýrství
Vedoucí práce: **doc. Ing. Vladimír Fuis, Ph.D.**
Akademický rok: 2022/23

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Napjatostně deformační analýza lávky u Jedovského mlýna

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Prutové soustavy se běžně používají k modelování chování mostů, jeřábů, stožárů a ostatních technických objektů, které jsou vyrobeny z prutových těles a splňují předpoklady kladené na prutové soustavy. Lávka přes řeku Oslavu u Jedovského mlýna, který leží severně od Náměště nad Oslavou, je typickým reprezentantem prutové soustavy, jejíž deformačně napjatostní analýza bude součástí bakalářské práce.

Cíle bakalářské práce:

1. Získání vstupních údajů o lávce.
2. V případě nutnosti úprava topologie prutů lávky tak, aby byly splněny předpoklady kladené na prutovou soustavu.
3. Vytvoření 2D výpočtového modelu prutové soustavy lávky a provedení napjatostně deformační analýzy při různém statickém zatěžování.
4. Posouzení změny napjatosti a deformace lávky při změně míry statické neurčitosti uložení.
5. Verifikace vybraného 2D analytického výpočtu numerickým řešením.
6. Vytvoření 3D modelu lávky v systému MKP ANSYS a srovnání výsledků napjatostně deformační analýzy s 2D variantou.

Seznam doporučené literatury:

JANÍČEK, P., ONDRÁČEK, E., VRBKA, J. a BURŠA, J. Mechanika těles: Pružnost a pevnost I, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno, 2004, ISBN 80-214-2592-x.

FLORIAN, Z., PŘIKRYL, K., ONDRÁČEK, E. Mechanika těles - statika. Vyd. 3. Brno: PC-DIR, 1995, ISBN 80-214-0694-1.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2022/23

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jiří Hlinka, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Mostní objekty slouží denně mnoha lidem, proto je nutné zajímat se o jejich bezpečnost. Ke zvýšení bezpečnosti slouží výpočty mostních konstrukcí a tím se zabývá i tato práce. Konkrétně se jedná o analýzu lávky pro chodce nacházející se u Jedovského mlýna na řece Oslavě. K výpočtům napětí a deformace je použita obecná styčnicková metoda, která je porovnávána s metodou konečných prvků. Při porovnání použitých metod se zjistilo, že metoda styčnicková je vhodná na vytipování kritických míst, ale hodnoty napětí nedokáže určit přesně. Kdežto metoda konečných prvků dokáže, jak vytipovat kritická místa, tak stanovit přesné hodnoty napětí. Těmito výpočty jsou zjištěna kritická místa na dané konstrukci, která jsou v krajních prutech. Zvětšením jejich příčného průřezu by došlo ke zvýšení bezpečnosti konstrukce. Mezi kritická místa nepatří pruty poškozené od havárie lávky. Bezpečnost lávky vzhledem k meznímu stavu pružnosti, která je $k_{k5} = 1,74$, představuje dostatečnou rezervu k dalšímu používání lávky, i když nedojde k zvětšení příčných průřezů výše zmíněných prutů.

Klíčová slova

Prutová soustava, lineární pružnost a pevnost, lávka, mostní objekt, napjatostně deformální analýza

Summary

Bridges serve to many people every day, so it is necessary to be concerned about their safety. Analysis of bridge superstructures are used to increase their safety - and this is also the main subject of this thesis. Specifically, it is the analysis of the pedestrian bridge located near Jedov Mill on the Oslava river. For the stress and strain calculations, the method of joints is used, and that is compared with the finite element method. During the comparison of the methods which had been used, it was found, that the method of joints is suitable for identifying critical points, but cannot accurately determine stress values. While the finite element method can both, identify critical locations and determine the exact stress values. These calculations determined the critical locations on the footbridge, which are in the outmost members of the structure. By enlarge their cross-section would increase the safety of the structure. Among the critical trusses do not belong trusses damaged by the footbridge crash. The safety factor of the pedestrian bridge to the elasticity limit state, which is $k_{k5} = 1.74$, provides a sufficient reserve for the further use of the footbridge, even if the cross-sections of the above mentioned members are not increased.

Keywords

Truss, linear elasticity, footbridge, bridge, Stress-strain analysis

Bibliografická citace

HORT, M. *Napjatostně deformační analýza lávky u Jedovského mlýna*. Brno, 2023. Bachelářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství. Vedoucí doc. Ing. Vladimír Fuis, Ph.D.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Napjatostně deformační analýza lávky u Jedovského mlýna vypracoval samostatně s použitím odborné literatury a zdrojů, uvedených v seznamu, který se nachází na konci této práce práce.

Michal Hort

Poděkování

Tímto děkuji doc. Ing. Vladimíru Fuisovi, Ph.D. za odborné vedení mé práce, rady a vhodné připomínky při konzultacích. Dále bych chtěl poděkovat i všem ostatním vyučujícím, kteří mi vždy s mými otázkami vyšli vstříc. Na závěr také Antonínu Hlouškovi za objasnění historie řešené lávky.

Michal Hort

Obsah

Úvod	11
2 Teorie použitá pro výpočty	12
2.1 Předpoklady pro lineární pružnost a pevnost	12
2.2 Saint-Venantův princip	13
2.3 Prutové předpoklady	14
2.4 Výsledné vnitřní účinky v prutech	15
2.5 Pruty prutových soustav	16
2.5.1 Statický rozbor	17
2.6 Charakteristiky příčných průřezů	17
2.7 Napjatost v prutu	18
2.7.1 Tah a tlak v prutu	19
2.8 Castiglianova věta	20
2.9 Mezní stavy	21
2.10 Rozdíly výpočtového modelu a reálné konstrukce	23
2.11 Základy metody konečných prvků	25
3 Mostní objekty	27
3.1 Základní názvosloví	27
3.2 Konstrukce lávky	28
3.3 Zatížitelnost lávek	30
4 Lávka u Jedovského mlýna	32
4.1 Historie lávky	32
4.2 Poloha	33
4.3 Model	33
5 Analytické řešení	36
5.1 Řešení staticky určité úlohy (scénář 1)	37
5.1.1 Popis symbolů použitých při výpočtech	37
5.1.2 Vstupní údaje	38
5.1.3 Statický rozbor	40
5.1.4 Síly v externích vazbách	41
5.1.5 Uvolnění styčnic	42
5.1.6 Řešení soustavy rovnic a normálové síly	49
5.1.7 Normálové napětí v prutech	52
5.1.8 Průhyb	54
5.2 Řešení staticky určité úlohy (scénář 2)	55
5.2.1 Uvolnění a statický rozbor	55
5.2.2 Statická rovnováha	56
5.2.3 Výsledné síly a napětí v prutech	57
5.2.4 Průhyb	58
5.2.5 Srovnání s předchozím scénářem	58
5.3 Řešení staticky neurčité úlohy (scénář 3)	58
5.3.1 Uvolnění a statický rozbor	59

5.3.2	Statická rovnováha	59
5.3.3	Částečné uvolnění	60
5.3.4	Průhyb	71
5.3.5	Porovnání s předchozími scénáři	71
6	Numerické řešení pomocí MKP	73
6.1	Numerické řešení staticky určité úlohy (scénář 1)	73
6.2	Numerické řešení (scénář 2)	76
6.3	Numerické řešení úlohy (scénář 3)	77
6.4	Numerické řešení pomocí prvků Beam (scénář 4)	78
6.5	Numerické řešení ve 3D (scénář 5)	82
7	Změna statického zatížení	88
7.1	Analytický výpočet (scénář 6)	88
8	Vlastní frekvence mostních konstrukcí	91
8.1	Vlastní frekvence řešené lávky (scénář 7)	91
9	Porovnání řešených variant	94
	Závěr	98
	Seznam použitých zdrojů	100
	Seznam použitých zkratk a symbolů	103

Úvod

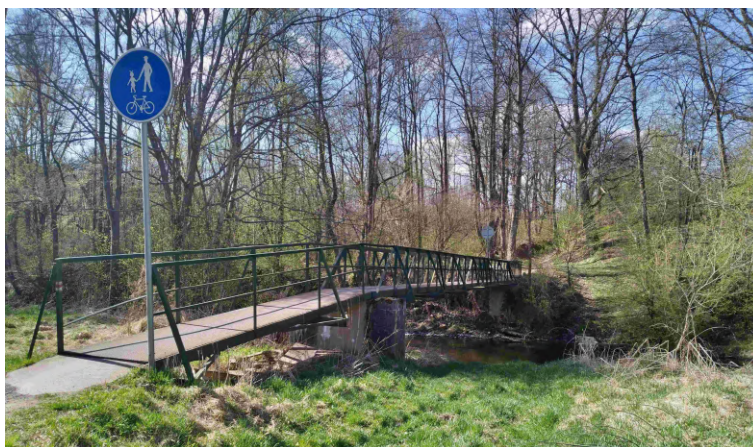
Mostní konstrukce jsou dnes neodmyslitelnou součástí dopravních cest. Jedná se o objekty používané v místech, kde je zapotřebí překonat přírodní nebo umělou překážku. S tímto cílem soupeřili už staří Římané, kteří jako jedni z prvních začali stavět tyto konstrukce pro snazší přesun svých početných vojsk přes řeky. Na používání těchto staveb se ani po několika staletích, tedy do dnes, nic nezměnilo. Stále slouží k překonávání překážek a usnadňují denně mnoha lidem život.

Jejich použití se také rozšiřuje. Na rozdíl od dob, kdy se používaly převážně k překonání vodních toků se dnes používají k přemostění silničních i železničních tratí, nebo také k průchodu mezi přilehlými budovami, či dokonce přímo v budovách ať už jako revizní lávky nebo designérské prvky. Proto lze předpokládat, že mostní konstrukce se budou používat i nadále a z toho důvodu je nutné se o ně zajímat.

S nástupem a rozvojem dopravní techniky bylo nutné vytvořit názvosloví označující různé druhy zmiňovaných konstrukcí. Moderní literatura dělí mostní konstrukce na mosty, lávky a propustě. Přičemž tahle práce je věnována právě lávce. Konkrétně její napjatostně deformační analýze.

K analýze byla vybrána starší lávka, která mohla být při jejím návrhu počítána stejnou metodou jaká je použita i v této práci. Lávka zobrazená na obrázku níže přemostuje řeku Oslavu v místech Jedovského mlýna, nachází se mezi lesy a loukami a je hojně využívána chodci a cyklisty. Jelikož se lávka nachází nedaleko mého bydliště, tak ji také sám využívám, a vnímám ji jako typického reprezentanta prutových soustav.

Výše uvedené odstavce popisují důvod výběru konkrétní konstrukce a tématu práce. Práce se věnuje vytvoření plošné i prostorové verze výpočetních modelů a následnou práci s nimi. K tomu je zapotřebí získat vstupní materiálové a geometrické údaje o lávce. Dále bude pozornost směřována na výpočet napětí v prutech a hledání kritických míst lávky na zmíněných modelech. Výpočet 2D variant bude proveden metodou obecnou styčnickovou a zkontrolován metodou konečných prvků. 3D varianta pak bude počítána pouze metodou konečných prvků. Na konci proběhne srovnání obou použitých metod a jednotlivých modelů. Dále budou hledány odpovědi na otázky zdali, a jak by se dala bezpečnost lávky vzhledem k meznímu stavu pružnosti zvýšit. A také jaký vliv má nedůkladná oprava po havárii.

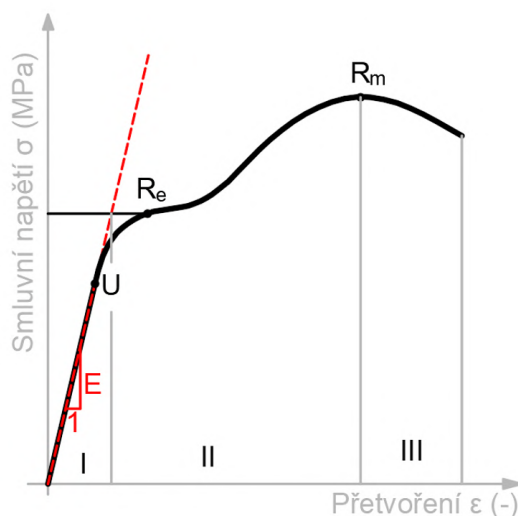


Obrázek 1: Pohled na lávku u Jedovského mlýna

2 Teorie použitá pro výpočty

2.1 Předpoklady pro lineární pružnost a pevnost

Materiál tělesa je lineárně pružný, tedy vztah mezi napětím a deformací je do meze kluzu přímka, to popisuje Hookův zákon. Tento zmíněný vztah se stanovuje experimentálně tahovou zkouškou. Jedná-li se o izotropní materiál, kde nezáleží na směru zatížení, lze jeho mechanické chování popsat dvěma nezávislými materiálovými parametry: modulem pružnosti E^1 a Poissonovým číslem μ^2 [1]. V lineární pružnosti se pohybujeme pouze v oblasti I na tahovém diagramu, jak je znázorněno na obrázku 2 [2].



Obrázek 2: Tahový diagram (překresleno dle [2] a upraveno)

Přetvoření je malé. Přetvoření v bodě tělesa je přetvořením elementárního prvku tělesa v tomto bodě [2]. Je popsáno pomocí složek tenzoru přetvoření 2.1 \mathbf{T}_ϵ [3].

$$\mathbf{T}_\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \epsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

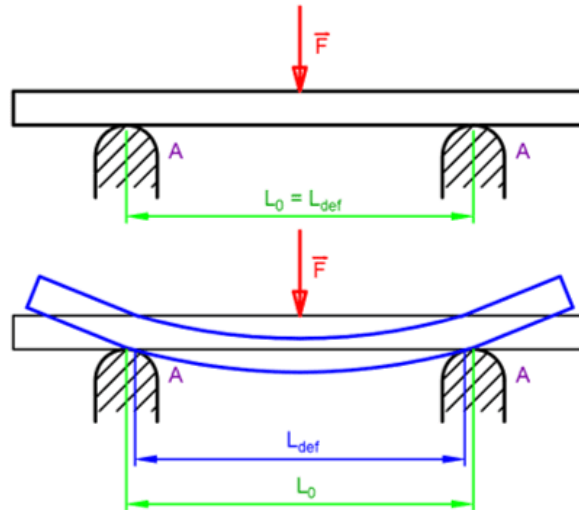
V tenzoru je ϵ přetvoření v daném směru dle indexu a γ je úhlové přetvoření hran dle indexů. O přetvoření více v podkapitole 2.7.1.

Posuvy u , v , w jsou malé a zanedbatelné z hlediska změny rovnic rovnováhy, které byly sestaveny pro nedeformovaný stav tělesa [2]. Pro pravoúhlý souřadný systém odpovídají posuvům ve směru os x , y a z . Pokud by posuvy malé nebyly, stane se úloha nelineární a geometrie tělesa se mění v závislosti na zatížení. Ale tuto změnu geometrie dopředu neznáme a úloha se stává mnohem složitější.

Deformační podmínky jsou lineární. Nemění se charakter sil ve vazbách [2]. Uvažujeme $L_0 = L_{def}$ jak je znázorněno na obrázku 3.

¹Je definován vztahem $E = \frac{\sigma_x}{\epsilon_x}$ [1] a je znázorněn na obrázku 2 jako směrnice.

²Zjišťuje se experimentálně, například z tahové zkoušky jako $\mu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x}$. více v kapitole 2.7.1.

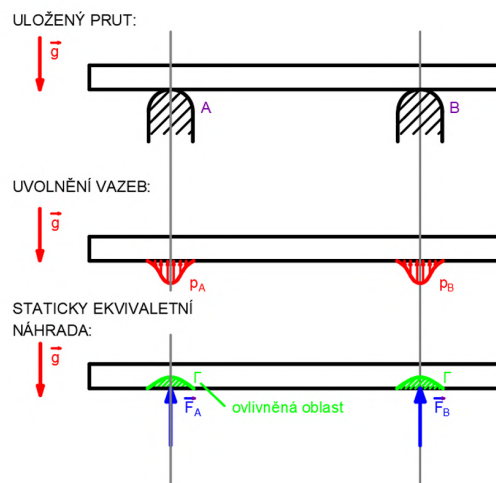


Obrázek 3: Deformace prutu

Výsledkem lineární pružnosti a pevnosti je jednodušší řešení rovnic, protože se geometrie nemění v průběhu zatěžování. Dále možnost využití principu superpozice. V případě zatížení tělesa více silovými soustavami lze řešit samostatně jednotlivé stavy, a pak je algebraicky sečíst do konečného výsledku.

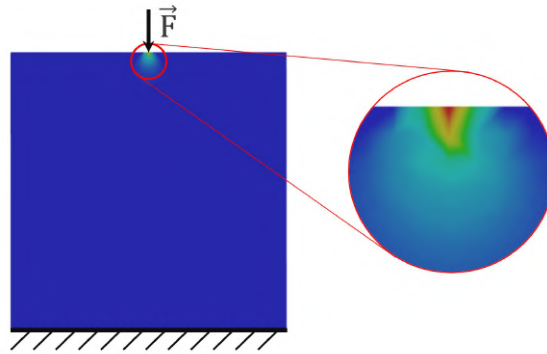
2.2 Saint-Venantův princip

Tento princip umožňuje vytvořit staticky ekvivalentní náhradu silové soustavy, přičemž je ovlivněno jen bezprostřední okolí náhrady Γ [2]. To znamená, že lze uvažovat osamělou sílu tak, jak je znázorněno na obrázku 4. Silami (F_A a F_B) je nahrazeno tlakové zatížení (p_A a p_B) vznikající od vazeb.



Obrázek 4: Saint-Venantův princip (překresleno dle [3])

Na obrázku 5 vykresleného pomocí MKP (Metody konečných prvků) v programu Ansys lze vidět, že i na poměrně malém tělese o rozměrech 50 mm × 50 mm se jedná o velmi malou oblast Γ . Lze zde vidět izoplochy znázorňující napětí, které v okolí Γ vzrůstá a v bodě působení síly jde k nekonečnu. Naopak mimo tuto ovlivněnou oblast (modrá barva) je naopak napětí konstantní po celém průřezu. Z toho vyplývá, že nelze vyhodnocovat mezní stavy přímo v okolí silové náhrady, ale dostatečně daleko od ní je pro vyhodnocování mezních stavů náhrada přesná.



Obrázek 5: Oblast ovlivněná zatížením jedním bodě

2.3 Prutové předpoklady

Prut³ je nejjednodušší výpočtový model reálného tělesa [2]. Aby se těleso dalo klasifikovat jako prut, musí splňovat tyto předpoklady [2]:

Geometrické .

- Prut je určen střednicí a příčným průřezem v každém místě střednice.
- Střednice je spojitá křivka a spojnice těžišť příčných průřezů.
- Příčný průřez je souvislá oblast.
- Délka střednice je alespoň tak velká jako největší rozměr příčného průřezu.

Zatěžovací a vazbové .

- Zatížení působí vždy na střednici.
- Vazby (obrázek 6) omezují deformaci střednice.

Deformační .

- Střednice po zatížení zůstává spojitou křivkou.
- Příčné průřezy po deformaci zůstávají rovinné a kolmé ke zdeformované střednici.

Napjatostní .

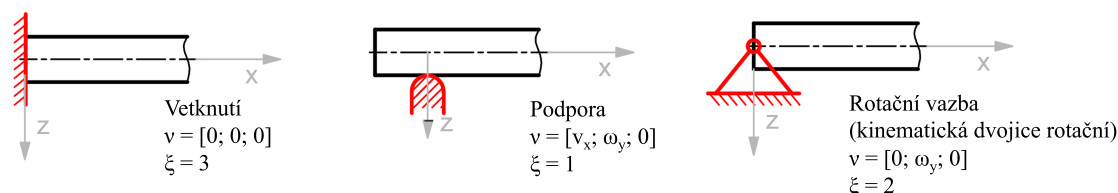
- Napjatost je v příčném průřezu určena normálovým a smykovým napětím, tedy prutovou napjatostí.

³V programu Ansys workbench je tento prvek označován jako Beam.

Vázaný prut

Každé těleso, tedy i prut, je ke svému okolí vázané pomocí vazeb [4]. Vazby na těleso působí silami a zamezují jeho pohyb nebo jeho deformaci. Rozlišují se vazby silové a vazby stykové [4]. Mezi silové vazby patří gravitační pole, a mezi stykové patří dotyky prutu s jiným tělesem.

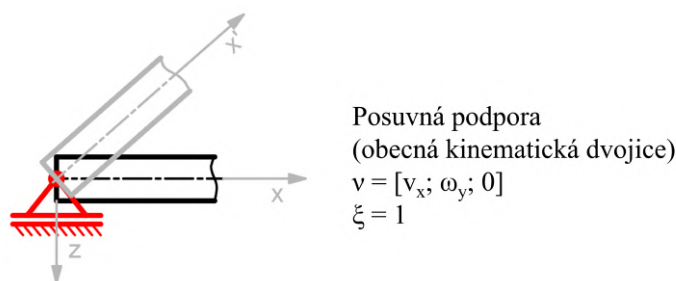
Základními druhy stykových vazeb, se kterými se můžeme setkat u mostových konstrukcí jsou:



Obrázek 6: Druhy stykových vazeb (překresleno dle [4] a upraveno)

Zde ν je matice pohyblivosti⁴ a ξ počet odebraných stupňů volnosti.

U podpory (obrázek 6) lze aplikovat jiné konstrukční řešení, které nemění matici pohyblivosti ani počet odebraných stupňů, avšak mění sklon síly působící od vazby na těleso. Na obrázku 7 je řešení, které oproti podpoře umožňuje, aby se síla na těleso od vazby přenášela stále ve stejném směru (směr osy z) i při naklonění osy do směru x' . Síla od Podpory na obrázku 6 by působila stále kolmo na směr osy x' .



Obrázek 7: Druhy stykových vazeb (překresleno dle [2] a upraveno)

2.4 Výsledné vnitřní účinky v prutech

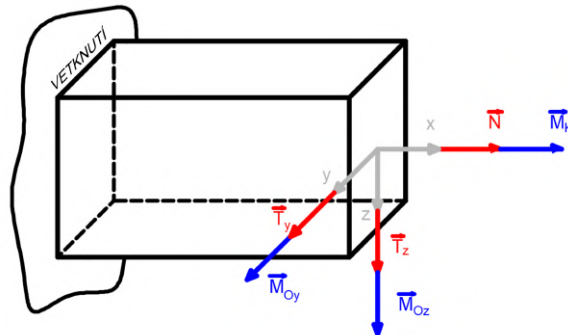
Zkratkou značeno VVÚ. Vychází z předpokladu, že ve statické pružnosti a pevnosti je každý elementární prvek uvolněný z prutu ve statické rovnováze. Do VVÚ patří čtyři základní složky, a to [2]:

- Normálová síla \vec{N} vždy v ose x .
- Tečná (posouvající) síla \vec{T} pro osu y nebo z .

⁴Udává směry ve kterých vazba vázanému tělesu umožňuje pohyb.

- Krouticí moment \vec{M}_K vždy okolo osy x.
- Ohybový moment \vec{M}_O kolem osy y nebo z.

Jednotlivé složky a osy jsou vyobrazeny v kladných směrech na následujícím obrázku 8.



Obrázek 8: Uvolněný prut se všemi VVÚ

Je známo vnější zatížení prutu. Velikosti složek VVÚ jsou neznámé, známé je pouze jejich působiště a směr [2]. Pro vyšetřovaný bod střednice (počátek souřadného systému na obrázku 8) se vyřeší rovnice statické rovnováhy, ze kterých se určí velikosti VVÚ. Směr řezu⁵ neovlivní hodnoty VVÚ, protože jak celý prut tak i jeho části jsou ve statické rovnováze. VVÚ slouží k výpočtu napětí uvnitř prutu, více v kapitole 2.7.1.

2.5 Pruty prutových soustav

Zvláštním případem prutů jsou pak pruty prutových soustav⁶. Tyto prvky, kromě prutových předpokladů 2.3, musí navíc splňovat další kritéria. Soustava takových těles se pak nazývá prutová soustava. Prutová soustava je vnitřně nepohyblivá příhradová konstrukce, která obsahuje dva typy těles: styčníky a pruty [4]. Předpoklady pro prutové soustavy[4]:

Tělesa .

- Pruty musí být přímé a nezatížené.
- Styčníky (Degenerované členy⁷) jsou zatížené nebo nezatížené.

Vazby .

- Vnitřní ani vnější vazby nesmí přenášet moment.
- Vnitřní vazby mohou být pouze rotační.
- Vnější vazby (obrázek 6) mohou být pouze pevné rotační nebo podpory v místě styčníku. Popřípadě i lana.

Konfigurace těles v soustavě .

- Každý prut je na svém konci vázán na styčník.

⁵Každý prut lze řezat zleva i zprava, tím zůstane pokaždé jiná část prutu.

⁶V programu Ansys workbench je tento prvek označován jako Link.

⁷Spojovací těleso u vícenásobné rotační nebo sférické vazby [4].

- V každém styčnicku se musí setkávat minimálně dva pruty.
- Soustava je vnitřně nepohyblivá.

Zatížení .

- Zatížení působí pouze na styčnicky.

2.5.1 Statický rozbor

Podmínky statické určitosti pro prutové soustavy se dělí na vnitřní a vnější. Vnější podmínky musí splňovat, že počet vnějších neznámých parametrů ν_e je roven použitelným vnějším rovnicím statické rovnováhy μ_e . To zpravidla bývá u 2D soustav rovno 3 a u 3D rovno 6. Vnitřní podmínky statické určitosti jsou určeny pomocí rovnice 2.2 pro 2D úlohy a 2.3 pro 3D úlohy.

$$s_i = p - 2k + 3 \quad (2.2)$$

$$s_i = p - 3k + 6 \quad (2.3)$$

Zde p je počet prutů a k počet styčnicků [4]. Pro $s_i = 0$ platí, že úloha je staticky vnitřně určitá. Pokud $s_i = 1$ (nebo více než jedna), jedná o úlohu jedenkrát vnitřně staticky neurčitou (nebo vícekrát). Naopak když bude $s_i = -1$ (nebo méně než -1), tak je úloha jedenkrát vnitřně staticky přeuročena (nebo vícekrát). Staticky určité prutové soustavy lze řešit pomocí jednodušších postupů než soustavy prutů. Soustava rovnic pak lze řešit metodou styčnickovou postupnou, kde se postupně uvolňují styčnicky a řeší se jeden po druhém. Záleží na pořadí uvolňování styčnicků. Další metodou je metoda styčnicková obecná, která řeší všech $2k$ nebo $3k$ rovnic najednou. V této metodě nezáleží na pořadí rovnic a lze jí použít i pro staticky neurčité úlohy. Jednou z možností je také grafické řešení, kde se postupně řeší statická rovnováha každého styčnicku obdobně jako u metody styčnickové postupné [4].

2.6 Charakteristiky příčných průřezů

Do těchto charakteristik patří zejména momenty lineární a kvadratické. Záleží u nich na poloze souřadného systému. Lineární momenty slouží k určování polohy těžiště od zvoleného souřadnicového systému.

Kvadratické momenty

Mezi tyto momenty patří kvadratické momenty osové, polární a deviační. Značí se J . Tyto momenty průřezu Ψ se mohou sčítat, pokud jsou ke stejným osám [2]. K přepočítání k jiné ose se používá Steinerova věta. Ta má tvar $J_{y'} = J_y + b^2 S$ pro osový kvadratický moment k ose y' , b je zde vzdálenost, o kterou posouváme osu y' od osy y , která leží v těžišti. Polární kvadratické momenty se používají u prutů namáhaných krutem.

Osový kvadratický moment: k ose y

$$J_y = \int_{\Psi} z^2 \cdot dS \quad (2.4)$$

Tyto momenty se počítají převážně k těžišti průřezu pro snazší použití při určování napětí podél průřezu prutu [2]. Jak se toto napětí určuje je zmíněno v podkapitole 2.7.

Deviační kvadratické momenty: k souřadnicovému systému yz

$$J_{yz} = \int_{\Psi} y \cdot z \cdot dS \quad (2.5)$$

2.7 Napjatost v prutu

Jak je zmíněno v podkapitole 2.3, prut je tvořen střednicí a průřezem. V každém místě střednice se kolmo na ni nachází průřez prutu, a za předpokladu, že je prut zatížený, tak v každém místě jeho průřezu vzniká napjatost [2]. Napjatost je obecně ve 3D prostoru fyzikální veličina popsána pomocí tenzoru napětí 2.6 [2]. Udává napětí elementárního prvku, která se nachází v bodě zatíženého tělesa.

$$\mathbf{T}_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Tenzor \mathbf{T}_{σ} je tvořen 6 nezávislými složkami $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ a τ_{yz} . Napětí působí v rovině řezu nebo kolmo na ni. Napětí kolmé, tedy ve směru normály na rovinu řezu, se nazývá normálové, a napětí ležící v rovině se nazývá tečné [2]. Při omezení této problematiky na zatížený prut lze napětí klasifikovat podle způsobu zatížení. K normálovému napětí se řadí takové, které je způsobeno tahem, tlakem, nebo prostým ohybem⁸. K jeho označení se používá σ . Tečné napětí je pak způsobeno vlivem od krutu či stříhu a k jeho označení slouží τ . S různými druhy zatížení se pak mění i podoba tenzoru napětí 2.6 [2].

Pro jednoosý tah a tlak má podobu:

$$\mathbf{T}_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Jednoosý tah a tlak nastává u všech prutů prutových soustav definovaných v podkapitole 2.3, jiné než napětí σ_x ve směru prutu výpočtový model nezahrne [3].

U prutu zatíženým stříhem pak vypadá tenzor následovně:

$$\mathbf{T}_{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

V případě stříhu se předpokládá, že prut je zatížen pouze silou ve směru osy z , v případě jiného směru by složky τ_{yz} a τ_{zy} (které se rovnají) byly nenulové. Prostý stříh nastane pouze, když jsou síly působící proti sobě, nebo je síla u vazby v dostatečně malé vzdálenosti, aby se dal zanedbat ohyb [3].

V případě ohybu od síly má tenzor tvar:

$$\mathbf{T}_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

⁸Jedná se o ohyb prutu momentem, či silou. V případě síly se však zanedbává její vliv na tečné napětí, tedy od stříhu a tečná napětí jsou rovna nule aby se jednalo o prostý ohyb

V tomto případě není zanedbán vliv posouvající síly. Když by se jednalo o prostý ohyb, tenzor by měl tvar stejný jaký je u tahu a tlaku 2.7 [3].

Napětí od ohybového momentu je dáno vztahem:

$$\sigma_O = \frac{M_{Oy}}{W_O} = \frac{M_{Oy}}{J_y} \cdot z, \quad (2.10)$$

kde M_{Oy} je ohybový moment, W_O je průřezový modul v ohybu a z je vzdálenost bodu od těžiště, ve kterém zjišťujeme napětí, za předpokladu, že J_y je počítáno k těžišti [2]. Jak vychází ze vztahu 2.10, tak pro průřezový modul platí: $W_O = \frac{J_y}{z}$. Průřezový modul je většinou používán pro maximální hodnoty z , tedy pro místa s největším napětím.

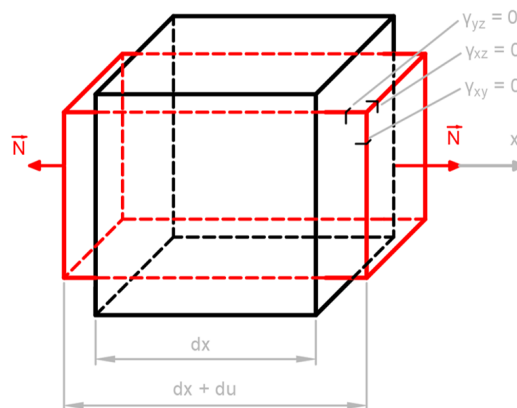
V případě zatížení od kroutícího momentu M_{Ky} pak obdobně:

$$\sigma_K = \frac{M_{Ky}}{W_K} = \frac{M_{Ky}}{J_p} \cdot z, \quad (2.11)$$

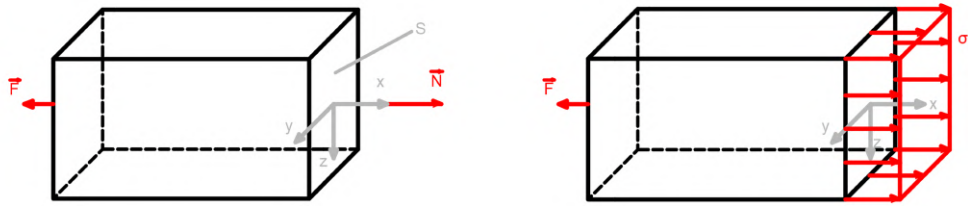
kde je W_K průřezový modul v krutu a z je rovno hodnotě poloměru kružnice, na které leží bod, pro který je zjišťováno napětí [2]. Průřezový modul v krutu: $W_K = \frac{J_p}{z}$, obvykle z nabývá hodnoty $\frac{d}{2}$ a zjišťuje se napětí na povrchu, tedy tam kde je maximální.

2.7.1 Tah a tlak v prutu

Pruty prutových soustav jsou přímé a jsou namáhány pouze tahem a tlakem. Vzniká tedy pouze jednoosé napětí σ_x , které je rovnoběžné se střednicí prutu. Napětí má konstantní průběh po celém průřezu prutu, jak je znázorněno na obrázku 10. Jednotlivé příčné průřezy se oddalují (respektive přibližují) a deformují. Tato deformace však nemá vliv na okrajové podmínky, uvolnění prutu a jeho vlastnosti [2]. Jediná nenulová složka výsledných vnitřních účinků je normálová síla N . Když z prutu uvolníme elementární prvek znázorněný na obrázku 9,



Obrázek 9: Uvolněný elementární prvek z prutu namáhaného tahem (překresleno dle [2] a upraveno)



Obrázek 10: Uvolnění a řez prutem namáhaného tahem

Pro všechny pravé úhly v elementárním prvku platí, že jejich změna je rovna nule $\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. Z toho tenzor přetvoření pro tah a tlak:

$$\mathbf{T}_\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Pro deformaci elementárního prvku platí rovnice délkového přetvoření ϵ_x , která se zapíše ve tvaru [2]:

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (2.13)$$

Pro výpočet přetvoření v ostatních směrech je použito Poissonovo číslo μ a vztahy nabývají následujícího tvaru [2].

$$\epsilon_y = -\mu \cdot \epsilon_x \quad , \quad \epsilon_z = -\mu \cdot \epsilon_x \quad (2.14)$$

Ze silové podmínky statické ekvivalence, která má tvar [2]:

$$\int_{\Psi} \sigma \cdot dS = N, \quad (2.15)$$

vyplývá vztah 2.16 pro normálové napětí $\sigma_x = \sigma$. Celkem jsou podmínky tři, ale momentové jsou rovny nule [2].

$$\sigma = \frac{N}{S} \quad (2.16)$$

2.8 Castiglianova věta

Při deformaci elementárního prvku, popsané v předchozí kapitole 2.7.1, vzniká v jeho objemu energie napjatosti dW . Ta se dá popsat pomocí deformační práce dA [2], která je zobrazena na obrázku 11.

$$dA = \frac{1}{2} \cdot du \cdot \sigma \cdot dS \quad (2.17)$$

Zde du je posuv v ose x zobrazený na obrázku 9. Do vztahu dosadíme $du = \epsilon \cdot dx$, $\sigma = \epsilon \cdot E$ a $dW = dA$:

$$dW = \frac{\sigma^2}{2E} dS \cdot dx \Rightarrow dW = \frac{N^2}{2ES} dx \quad (2.18)$$

Pro prut o délce l :

$$W = \int_0^l dW dx \Rightarrow W = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{2ES} dx \quad (2.19)$$

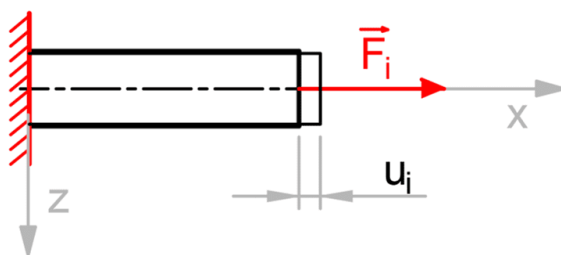


Obrázek 11: Deformační práce (překresleno dle [5] a upraveno)

Tento vztah 2.19 určuje energii napjatosti v celém prutu [2]. Vnitřní síla N je vyjádřena jako funkce zatěžujících sil a sil ve vazbách $N(F, F_v)$.

Castiglianova věta říká, že posun prutu u_i ve směru síly F_i je roven parciální derivaci energie napjatosti podle síly F_i v bodě, kde chceme deformaci zjistit [5]. Posun prutu u_i ve směru síly F_i je znázorněn na obrázku 12.

$$u_i = \frac{\partial W}{\partial F_i} = \frac{\partial \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{2ES} dx}{\partial F_i} = \int_0^l \frac{N}{ES} \frac{\partial N}{\partial F_i} dx \quad (2.20)$$



Obrázek 12: Prut zatížený silou F_i

Tato věta se používá nejen k určení deformace, ale taky k řešení staticky neurčitých soustav prutů. Kde se pomocí částečného uvolnění předepíše deformační podmínka, která obvykle záleží na dané vazbě ve které je provedeno částečné uvolnění. U staticky neurčitých úloh je více neznámých než použitelných rovnic statické rovnováhy. Deformační podmínka po dosazení do Castiglianovy věty vytvoří potřebnou rovnici pro vyřešení soustavy. Pro n -krát staticky neurčitou soustavu je potřeba n okrajových podmínek.

2.9 Mezní stavy

Pro každou strojní součást je podstatné, aby po montáži plnila svůj účel, a to za běžných podmínek a po určitou dobu. Schopnost plnit účel se nazývá spolehlivost. Spolehlivost lze vyjádřit různými způsoby a to **slovně**: dostatečná \times nedostatečná nebo vyhovuje \times nevyhovuje. Dále lze vyjádřit **vztahem ve tvaru** $\alpha \lesseqgtr \alpha_M$ nebo $\alpha \lesseqgtr \alpha_D$, kde se libovolná

veličina α (například napětí σ) porovnává z mezní hodnotou α_M nebo s maximální dovolenou hodnotou α_D . Vyhovující (\leq) a nevyhovující ($>$) [6]. Často používaná možnost je vyjádření pomocí **součinitele bezpečnosti**. Bezpečnost k_M se vypočítá jako $k_M = \frac{\alpha_M}{\alpha}$ a následně se porovnává s dovolenou bezpečností k_D [6]. Pokud $k_M \geq k_D$ tak vyhovuje, pokud $k_M < k_D$ nevyhovuje. Také **životnost** se používá velmi často. Obdobně jako u předchozích se zde hodnotí vztah mezi požadovaným počtem cyklů N nebo požadovanou dobou t a počtem cyklů do lomu N_f respektive t_f . Mezi další způsoby vyjádření patří **pravděpodobnost**, že součást bude vykonávat svoji funkci po nějaký čas či počet cyklů, a nedojde k poruše [6].

Mezním stavem se nazývá stav, který když nastane, tak součást už nadále není schopna plnit svoji funkci. Mezní stavy souvisí s deformací tělesa a s jeho porušováním [6].

Mezi mezní stavy související s deformací patří **mezní stav deformace**. To je stav kde součást ztrácí funkci v důsledku její deformace. Obvykle se deformací vymezí nějaká vůle a to způsobí nemožnost plnění funkce [6].

Dalším stavem je **mezní stav pružnosti (MSP)**. Ten nastane v případě, kdy zatížená součást překročí stav pružných deformací a nastanou na ní deformace plastické (trvalé). Tyto plastické deformace se ani po odlehčení součásti od zatížení nevrátí. Na obrázku 2 je reprezentován bodem R_e , tedy mezí kluzu. Pokud součást tuto mez překročí nastanou plastické deformace [6]. Bezpečnost k MSP se pro jednoosou napjatost vypočítá následovně:

$$k_k = \frac{R_e}{\sigma_x} \quad (2.21)$$

Pro pruty prutových soustav je tato podmínka dostačující, obecně se však pro pruty používá ve tvaru [6]:

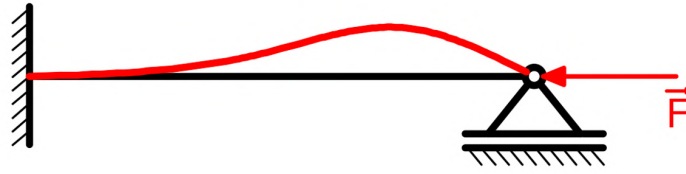
$$k_k = \frac{R_e}{\sigma_{red}}, \quad (2.22)$$

kde σ_{red} je redukované napětí. Redukované napětí je použito v případě kombinovaného namáhání prutu. Nejrozšířenější podmínky pro lineární pružnost a pevnost jsou podmínky podle Trescy a von Misesa, někdy značeny jako $\max\tau$ pro Trescovu a HMH pro von Misesovu podmínku. Pro prutovou napjatost pak mají tvar [6]:

$$\sigma_{red}^{Tresca} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (2.23)$$

$$\sigma_{red}^{vonMises} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad (2.24)$$

Mezi mezní stavy související s deformací patří také **mezní stav vzpěrné stability**, který nastává zejména u štíhlých prutů. Jedná se o stav, kdy na prut působí síla F v normálovém směru, jak je znázorněno na obrázku 13. Do doby, než se hodnota síly F změní na kritickou hodnotu síly F_k , je prut ve stabilním stavu, což se změní když síla vzroste na hodnotu F_k [6]. Při této hodnotě prut ztrácí vzpěrnou stabilitu a nelze určit směr, kterým se bude deformovat. Možná deformace je znázorněna na obrázku 13 červenou křivkou.



Obrázek 13: Mezní stav vzpěrné stability

Kritická síla je definována následovně [6]:

$$F_k = \frac{\alpha^2 E J_{min}}{L^2}, \quad (2.25)$$

kde α je číslo zohledňující uložení prutu a L je délka prutu. Pro prut na obrázku 13 platí $\alpha = \sqrt{2}\pi$. Síla F (obrázek 13) se pak porovná se silou F_k , z toho bezpečnost k MSVS 2.26.

$$k_v = \frac{F_k}{F} \quad (2.26)$$

Zda u prutu dojde dřív k MSP v tlaku nebo k MSVS se určí pomocí štíhlosti prutu λ :

$$\lambda = \frac{L}{\sqrt{\frac{J_y}{S}}} \quad (2.27)$$

Štíhlost prutu se pak porovnává s kritickou štíhlostí λ_k :

$$\lambda_k = \alpha \cdot \sqrt{\frac{E}{R_e}} \quad (2.28)$$

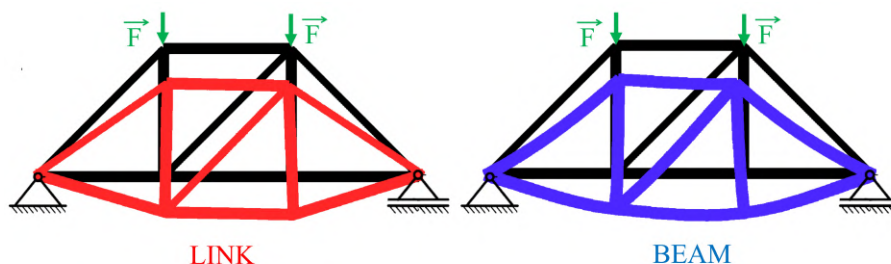
Pro případ $\lambda < \lambda_k$ mezní stav vzpěru nenastane a prut se kontroluje pouze na MSP. Kdyby však platilo $\lambda \geq \lambda_k$, tak může nastat mezní stav vzpěrné stability a je třeba určit kritickou sílu F_k , která nesmí být překročena [6]. Jinak dojde ke ztrátě vzpěrné stability a prut se nekontrolovatelně prohne.

Mezní stavy související s porušování tělesa se liší od stavů deformace tím, že u nich vznikají trhliny. Patří sem mezní stav porušení, který nastane, když se na součásti objeví první zjistitelné trhliny. Dále je to mezní stav trhlin, kde se trhliny hodnotí vzhledem k použití součásti na funkčně přípustné a funkčně nepřípustné. Mezní stav stability trhliny nastává, když se trhlina přestane šířit stabilně a začne se šířit nestabilně a to i bez vnějšího zatížení. Dalším stavem je pak mezní stav lomu, který nastane, když se součást rozdělí na dvě a více částí [6].

2.10 Rozdíly výpočtového modelu a reálné konstrukce

Výpočtový model prutových soustav je zjednodušen o mnoho podstatných vlastností. Mezi hlavní rozdíl patří uložení prutů vzájemně mezi sebou. Na modelu je to uskutečněno pomocí degenerovaných členů, tedy styčnicků. Tyto členy umožňují prutu kolem nich rotovat a natáčet se. Důsledkem je, že prut nepřenáší žádný ohybový moment. Na reálné

konstrukci jsou však pruty pevně spojeny. Pro spojení prutů se používá především svařovaných, nýťovaných nebo šroubových spojů. Tím se v prutech začne kromě tahu a tlaku přenášet také ohybový moment, jak je znázorněno na obrázku 14. Černou barvou je zde vyobrazena nedeformovaná konstrukce. Červenou deformovaný model prutové soustavy vykreslený v programu Ansys za pomoci prvků Link. Modrou barvou je vykresleno použití prvku Beam, které neumožní natáčení prutů okolo styčnicků. Deformace jsou úmyslně zvětšeny pro lepší názornost. Uložení, síly i geometrické rozměry obou modelů jsou stejné.



Obrázek 14: Porovnání deformace s prvky Link a deformace s prvky Beam



Obrázek 15: Mostová ložiska ([7] a [8])

Ani vazba prutů se základovým tělesem není ideální, ačkoliv některé konstrukce, zejména ty větší, se ho snaží docílit mostovými ložisky zobrazenými na obrázku 15. Tyto ložiska jsou konstrukčním řešením pro rotační vazby (vlevo) a podporu (vpravo). Řešená konstrukce však mostní ložiska neobsahuje, její uložení je na obrázku 16. Toto uložení však nelze zahrnout do výpočtového modelu prutových soustav, protože působí silou nejen na styčníky ale i na pruty. Proto je nahrazeno na jednom konci vazbou rotační a na druhém podporou.



Obrázek 16: Vazba prutové soustavy se základovým tělesem

Model prutových soustav dovoluje silové zatížení pouze ve styčnicích. Reálné zatížení je však obvykle způsobeno nějakým dopravním prostředkem, který přes konstrukci projíždí, nebo od lidí pohybujících se po konstrukci. Toto zatížení působí i na pruty, ke kterým je uchycena mostovka.

2.11 Základy metody konečných prvků

Zkratka MKP, anglicky finite element method (FEM). Jedná se o metodu pro řešení úloh popsaných diferenciálními rovnicemi. Řešení se aproximuje, to znamená, že je přibližné a záleží na zvoleném počtu prvků n v rovnici 2.29. Přechod ze spojitého řešení funkce $w(x)$ na řešení závislé na počtu prvků $w'(x)$ se nazývá diskreditace. Řešení závislé na počtu prvků aproximující funkci $w(x)$ [9]:

$$w(x) \approx w'(x) = \sum_{j=1}^n a_j w(x)_j = a_1 w(x)_1 + a_2 w(x)_2 + \dots + a_n w(x)_n, \quad (2.29)$$

$w(x)_j$ jsou funkce známé z knihovny programu. Nazývají se bázové funkce a musí být lineárně nezávislé. Koefficientům a_j dává MKP fyzikální význam. Jako například přetvoření, posuvy nebo teploty [9].

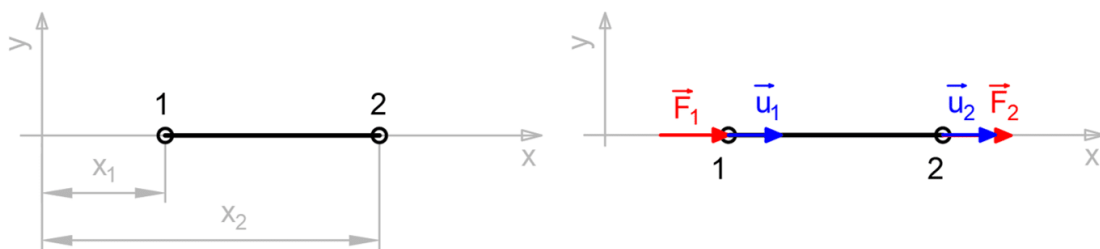
Základní rovnicí MKP je rovnice řešící vztah mezi maticí posuvů \mathbf{U} a maticí sil \mathbf{F} . Ta má tvar:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (2.30)$$

\mathbf{K} je zde matice tuhosti [9].

Známe programy pro řešení úloh pomocí MKP jsou například Abaqus, Ansys, RFEM nebo některé produkty od Autodesku. Mimo tyto produkty určené výhradně pro strojírenský průmysl této metody využívají i matematické programy, a to například některé nástavby programu MATLAB nebo software Mathematica od společnosti Wolfram Research, Inc. [10]. Pro tuto práci je použit program Ansys Mechanical.

Příklad základní rovnice MKP pro prut prutové soustavy, tedy prvek Link v programu Ansys. Prvek je zatížen pouze ve směru jedné osy, posuvy tedy budou ve směru stejné osy. Jedná se o nejjednodušší příklad.



Obrázek 17: Zatížení a posuvy prvku link (překresleno dle [9] a upraveno)

Na obrázku 17 je prut o délce $L_e = x_2 - x_1$ a tuhosti $k = \frac{ES}{L_e}$ zatížený silami F_1 a F_2 . Rovnice $\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}$ pak bude mít tvar:

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Primárním řešením této rovnice jsou posuvy krajních bodů u_1 a u_2 , sekundárně se z nich počítá přetvoření $\epsilon = \frac{du}{dx}$ a napětí $\sigma = E \cdot \epsilon$ [9]. Řešení $u(x)$, pro jiné než krajní body 1 a 2, je funkcí souřadnice $x \in \langle x_1; x_2 \rangle$. Podle rovnice 2.29 má pak řešení tvar [9]:

$$u(x) = N_1 u_1 + N_2 u_2 = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

kde bázové funkce N_1 a N_2 z knihovny nabývají hodnot [9]:

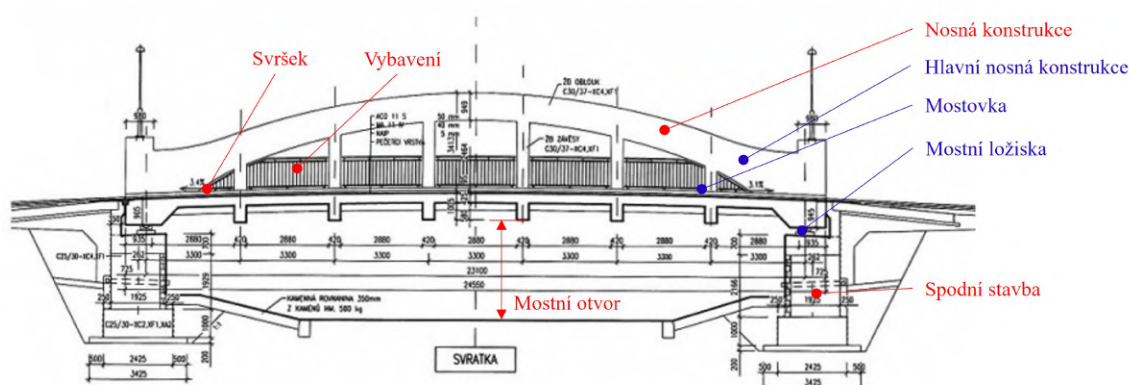
$$N_1 = \frac{1}{L_e}(x_2 - x), \quad N_2 = \frac{1}{L_e}(x - x_1) \quad (2.33)$$

Pro prvek Link v rovině by se pouze přidaly souřadnice posuvů v_1 a v_2 směřující v ose y a řešení by bylo obdobné. Stejně tomu tak je i v prostoru.

3 Mostní objekty

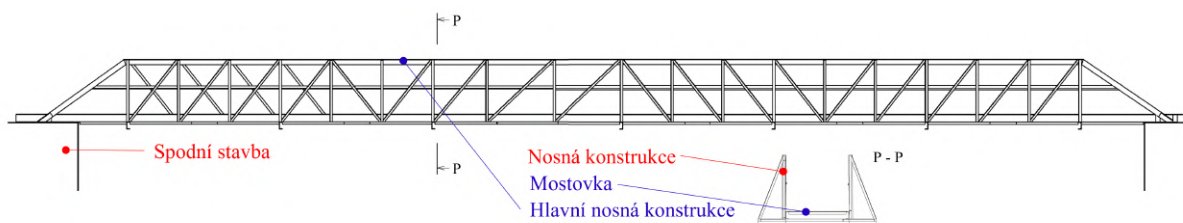
3.1 Základní názvosloví

Názvosloví udává česká technická státní norma Mosty - Terminologie a třídění ČSN 73 6200 [11]. Z té vychází všechny informace v této podkapitole, pokud není značeno jinak. Jakýkoliv objekt na dopravní cestě sloužící k překonání přírodní nebo umělé překážky přemostěním se nazývá mostní objekt. Ten se dělí na tři hlavní skupiny a to: mosty, propustky a lávky. **Propustek** je mostní objekt se světlostí mostního otvoru¹ od 0,4 m do 2,0 m včetně. **Lávka** je mostní objekt sloužící pouze chodcům a cyklistům, nebo jedné z těchto dvou skupin. **Most** musí mít světlost mostního otvoru alespoň 2,0 m a více.



Obrázek 18: Most přes řeku Svatku u Jimramova ([12] a přidány popisky)

Mostní objekt se skládá ze spodní stavby, nosné konstrukce, svršku a vybavení. Každá část je znázorněna na obrázku 18. Samotnou nosnou konstrukci pak tvoří hlavní nosná konstrukce, mostovka a mostní ložiska. U lávek je problém mírně jednodušší. Obvykle se zde nevyskytují mostní ložiska a svršek. Vybavení je pak součástí nosné konstrukce. Do vybavení obvykle patří zábradlí či svodidla a další prvky zlepšující bezpečnost na objektu. Svršek zahrnuje koleje, asphalt či jinou pokrývku silnice. Konkrétní lávka vybraná pro napjatostně deformační analýzu se skládá pouze ze spodní stavby, mostovky² a hlavní nosné konstrukce, která tvoří zároveň i zábradlí. Je zobrazena na obrázku 19.



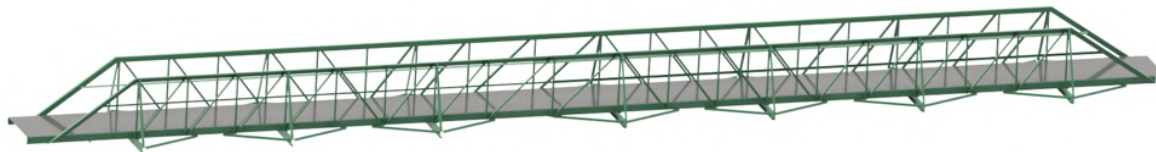
Obrázek 19: Lávka přes řeku Oslavu u Jedovského mlýna

¹Největší kolmá vzdálenost mezi spodní částí mostu a zemí, či dnem vodní plochy

²Ta je tvořena pouze protiskluzovým plechem více rozebíraným v kapitole 6.5.

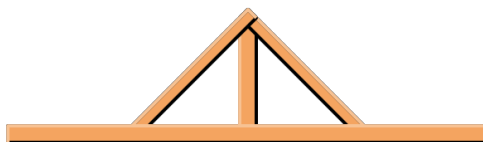
3.2 Konstrukce lávky

Lávka, znázorněna na obrázku 20, je tvořena ze svařených nebo navzájem přišroubovaných prutů.



Obrázek 20: Konstrukce lávky

Jedná se tedy o prutovou konstrukci. Prutové konstrukce znali už i staří Egypťané a Římané [13]. Ti je však používali převážně na krovky střech [14]. Nejstarší dochovaný krov měl strukturu vyobrazenou na obrázku 21. Tato struktura skladby prutů se nazývá king post truss ³ [13]. Je známo že Římané používali mosty s dřevěnou konstrukcí [15]. Proto je velmi pravděpodobné, že se této konstrukce využívalo i k přemostění menších vodních toků, avšak o tom nejsou žádné písemné či jiné dochované důkazy [14].



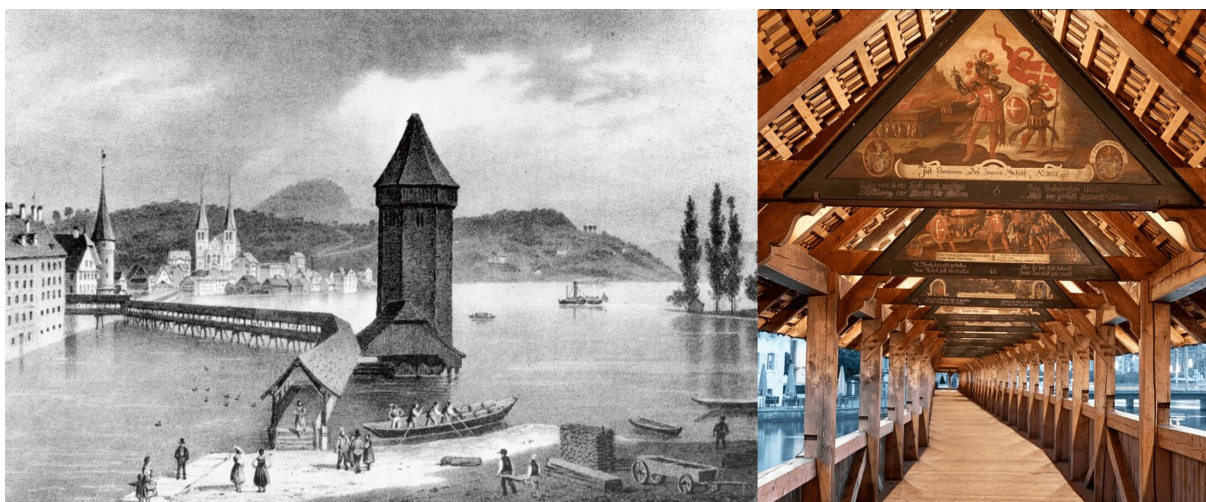
Obrázek 21: King post truss [13]

Za nejstarší prutovou lávku je považována Kapellbrücke [16]. Byla postavena ze dřevěných trámů ve 14. století a nachází se ve Švýcarsku ve městě Luzern [17]. Kapellbrücke sloužila a stále slouží k přemístění osob z pevniny ke kamenné věži, která byla postavena téměř o sto let dříve než samotná lávka [18]. Věž sloužila pouze jako symbol moci a nebyla používána k vojenským účelům [18]. Z toho důvodu nebyla spojena s opevněním města a jediná možnost jak se do věže dostat byla lodí po řece [18]. Na obrázku 22 vlevo jde vidět lávka i věž v roce 1835, jedná se zřejmě o jednu z nejstarších ⁴ kreseb této konstrukce. Stejně zajímavé jako samotná lávka je i cyklus maleb, které se nacházejí v krovu (obrázek 22 vpravo). Malby od Hanse Heinricha Wägmana měly symbolizovat úspěchy Švýcarské konfederace [17]. Až do roku 1993 se dochovalo 147 z původních 158 maleb, bohužel v tomto roce lávku zachvátil požár a 110 maleb bylo zničeno či poškozeno [17].

V průběhu dalších století vznikaly dřevěné mosty a lávky s různou skladbou prutů [19]. Tyto mosty byly často kryté a obvykle nepřemostovaly velké vzdálenosti [20]. S nárůstem železniční dopravy v 19. století se místo dřevěných trámů začali používat ocelové pruty a nosníky [20]. Z počátku nahradily jen nejméně namáhané pruty, později sloužily jako hlavní materiál pro stavbu celých mostů [20]. Ocel zůstává nejpoužívanějším materiálem ke stavbě prutových mostů až do dnes.

³Název nemá český ekvivalent, proto zůstal nepřeložen.

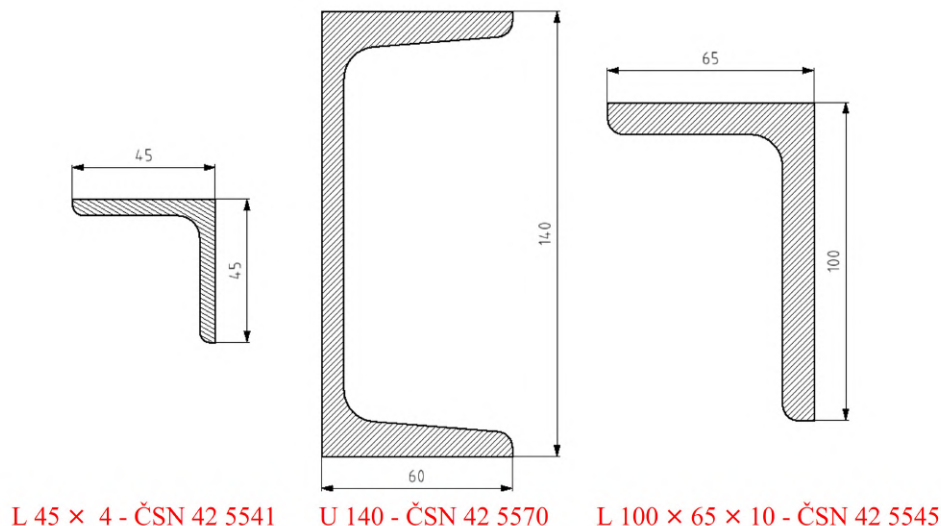
⁴Lávka je vyobrazena i na dřívějších dílech, avšak se jedná převážně o mapy města, nebo malby pohledů zevnitř lávky.



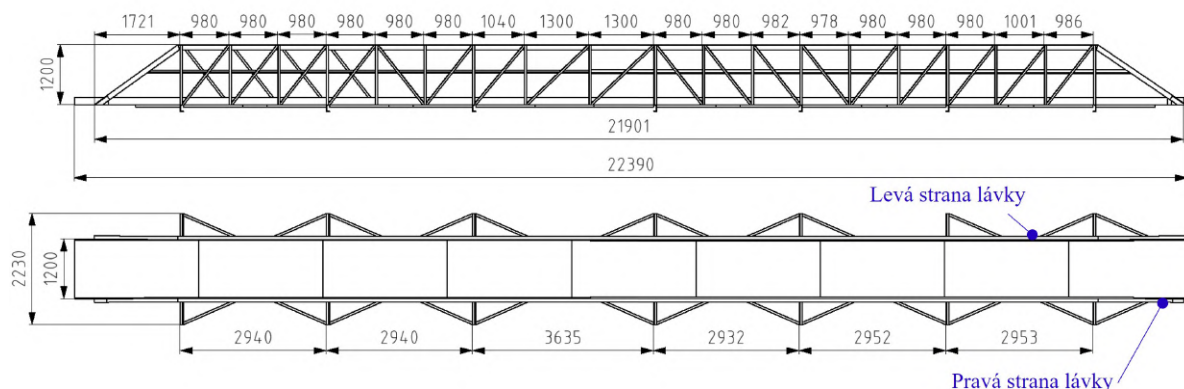
Obrázek 22: Kapellbrücke 1835 [18] a malby [17]

Řešená lávka je také ocelové konstrukce. Jak již bylo zmíněno k lávce nejsou žádné dokumenty, proto použitá ocel bude pouze odhadem možného použitého materiálu. Norma ČSN 73 6205 [21] pojednávající o navrhování ocelových mostů udává tabulku vhodných materiálů pro ocelové konstrukce mostů. Materiálem s nejhorsími mechanickými vlastnostmi v tabulce je ocel S235 s mezí kluzu 235 MPa a mezí pevnosti v tahu 360 MPa [21]. Důvod volby materiálu s nejhorsími mechanickými vlastnostmi je snaha zachovat řešení na konzervativní straně, i když není vyloučeno, že mohl být použit i lepší materiál. Nicméně materiál S235 je podle normy ČSN EN 10025, která byla vydána 01.08.1996 [22]. Lávka je však mnohem starší, proto je zvolen materiál 11 375 ČSN 41 1375 [23], který má velice podobné mechanické vlastnosti jako materiál S253. Je tu možnost že právě tento materiál byl použit pro konstrukci lávky, protože 11 375 je svařitelná neušlechtilá konstrukční ocel vhodná pro konstrukce namáhané dynamicky i staticky [23]. Byly z ní vyráběny tyče různých profilů válcované za tepla i za studena [23]. Na lávce jsou použity tyče profilů L a U válcované za tepla. Pro ty platí nejnižší mez kluzu $175 - 235 \text{ MPa}$ a mezí pevnosti v tahu $320 - 470 \text{ MPa}$, hodnoty se liší v důsledku rozměrů profilů [23]. Pro použité profily znázorněné na obrázku 23 je pak nejnižší mez kluzu $R_e = 195 \text{ MPa}$ a mez pevnosti $R_m = 340 \text{ MPa}$ [23].

Rozměry profilů byly naměřeny posuvným měřítkem na konstrukci a dohledány ve strojnických tabulkách [24]. Použity byly nejbližší nižší normalizované profily, z toho důvodu, že na konstrukci je mnoho antikorozních nátěrů, a ty zvětšují měřené rozměry. Stejně tak kvůli chybějící dokumentaci musely být naměřeny i ostatní rozměry lávky. K měření byly mimo posuvného měřítka použity svinovací metr a měřicí pásmo. Hlavní z rozměrů jsou znázorněny na obrázku 24.



Obrázek 23: Profily nosné konstrukce lávky (rozměry v mm)



Obrázek 24: Naměřené rozměry lávky (rozměry v mm)

Lávka je vymodelována v programu Autodesk Inventor 2023, díky tomu lze snadno zjistit hmotnost celé konstrukce. Ta je pro hustotu oceli $\rho = 7850 \frac{kg}{m^3}$ přibližně $m = 3360 kg^5$.

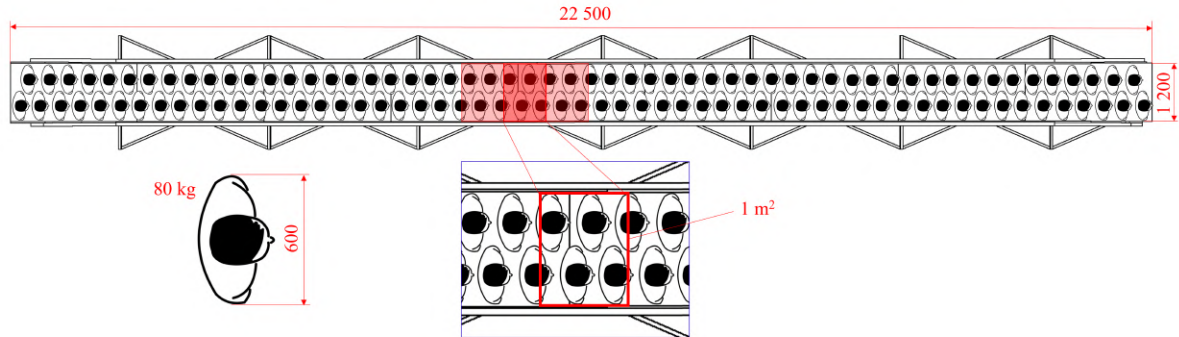
3.3 Zatížitelnost lávek

Návrh mostních objektů se musí řídit českou technickou normou Zatížitelnost mostů pozemních komunikací⁶ ČSN 73 6222 [25]. Normální zatížitelnost veřejných lávek pro chodce a cyklisty je $w_f = 2,5 kN/m^2$ [25]. Jsou možné i případy, kdy je toto zatížení menší. V takových případech je však nutné omezit šířku průchozího prostoru, nebo provést omezení pomocí informativní tabulky. V takové tabulce pak musí být uvedeno maximální dovolené zatížení v kN/m^2 [25]. U řešené lávky se žádná tabulka nenachází a šířka mostu

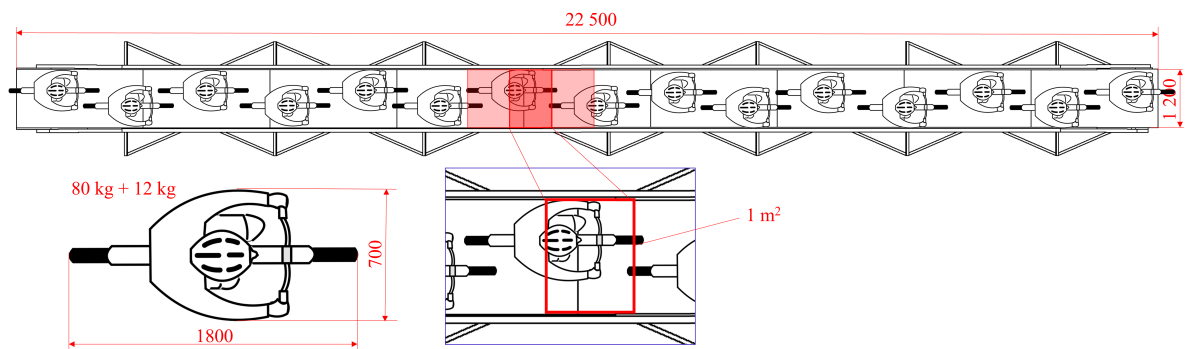
⁵Hodnota byla zaokrouhlena nahoru, to zajišťuje i zahrnutí hmotnosti antikoroziční barvy, spojovacího materiálu a materiálu přidáním svařováním.

⁶Tato norma neplatí pro železniční dopravu.

je 1200 mm , takže průchod není omezen. Podle obrázku 25, který zobrazuje maximální počet osob na dané konstrukci, lze vidět, že na 1 m^2 stojí až 4 lidé. Ačkoliv je tato situace velmi nepravděpodobná, není nemožná. Pro 4 osoby, každou o hmotnosti 80 kg , pak platí $w_4 = 3,2\text{ kN/m}^2$.



Obrázek 25: Lávka s maximálním počtem osob



Obrázek 26: Lávka s maximálním počtem cyklistů

Lávka je určena ovšem i pro cyklisty, proto na obrázku 26 je zobrazena s maximálním počtem cyklistů. Ale jak zle vidět, tak na 1 m^2 se nalézá sotva jeden cyklista. Podle toho je zatíženost $w_1 = 0,92\text{ kN/m}^2$ a po porovnání s chodci se dále nemá cenu zabývat touto situací. Chodci pro lávku představují větší zatížení. Normální zatíženost lávky je tedy $w_4 = 3,2\text{ kN/m}^2$, je zatížena po celé své šířce a hodnota nepřekonalala $w_m = 4\text{ kN/m}^2$ [25]. To znamená, že hodnota w_4 může nahradit hodnotu w_f při výpočtu [25].

„Dynamické účinky zatížení dopravou při stanovení zatížitelnosti, obvykle zohledňuje dynamický součinitel δ , kterým se násobí statické účinky příslušného zatížení.“ [25] Pro mostní objekt posouzený jako lávka pro chodce je $\delta = 1,1$ [25].

$$w_{max} = w_4 \cdot \delta = 3,2 \cdot 1,1 = 3,52\text{ kN/m}^2 \quad (3.1)$$

Největší zatížení od chodců na mostovku je tedy $w_{max} = 3,52\text{ kN/m}^2$. Nutné je dále započíst vlastní váhu konstrukce, která na rozdíl od zatížení od chodců bude rozmístěna do všech styčníků.

4 Lávka u Jedovského mlýna

4.1 Historie lávky

Pokud není uvedeno jinak, tak celá kapitola vychází z ústního sdělení pana Antonína Hlouška, který je majitelem mlýnu nacházejícího se vedle řešené lávky. Před touto konkrétní konstrukcí (obrázek 1) se na stejném místě nacházela dřevěná lávka se dřevěným středovým pilířem zavěšená na lanech. Tato lávka však nebyla nijak evidována a nedocházelo k její patřičné údržbě. Na začátku 60. let minulého století už byla prakticky nepoužitelná a z tohoto důvodu se na místě postavila v roce 1968¹ lávka nová, ocelová, na betonových pilířích. Tato lávka sloužila až do roku 1985. V tomto roce přišla 21. května povodeň na řece Oslavě [26]. Bylo zničeno nebo poškozeno mnoho domů a továren, ale i mosty a lávky [27]. V místech lávky napršelo 30 mm srážek za 8 hodin [27]. Na obrázku 27 je pro představu dobová fotografie zachycující stav řeky Oslavy v místě nedalekého Velkého Meziříčí.



Obrázek 27: Povodeň 21. květen 1985 [26]

Povodeň měla za důsledek poškození konstrukce lávky, která nevydržela a byla odnesena vodou několik metrů po proudu. Po uklidnění vod byla lávka natažena zpět na betonové pilíře, které na rozdíl od lávky zůstaly v pořádku. Konstrukce lávky musela být z důvodu poškození jedné strany zkrácena, jinak byla opravena a použita znovu. Na lávce lze vidět poškození nenosných prutů dodnes, dokonce i jeden prut chybí², to je zobrazeno na obrázku 28. Obrázek 1 ukazuje dnešní stav lávky.

¹Tento rok je pouze přibližný, na úřadech není datum stavby evidován.

²Který prut chybí lze vidět na obrázcích 25 a 26.



Obrázek 28: Poškození konstrukce

4.2 Poloha

Lávka se nachází na řece Oslavě, konkrétně na jejím 32,6 řkm³ [29]. Nejbližší okolní mostní objekty jsou silniční most na 39,6 řkm a po proudu je to lávka na 35,3 řkm. Zmíněná lávka má stejnou konstrukci jako lávka řešená. Jedovský mlýn se nachází mezi Náměstím nad Oslavou a Jedovem, poloha je znázorněna na obrázku 29.



Obrázek 29: Poloha lávky ([30] a upraveno)

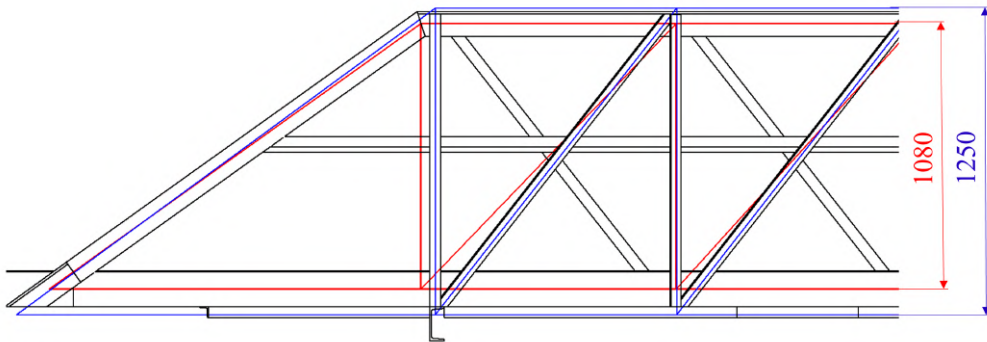
4.3 Model

Jedná se o 2D model pravé strany lávky (obrázek 24), to je ta první ze strany po proudu řeky. Druhá strana se liší skladbou prvních čtyř prutů, čehož si lze všimnout na obrázku 24⁴. Na obrázku 20 a 24 si také lze všimnout, že se zde nachází vodorovný prut omezující velikost otvorů v boku lávky z důvodu bezpečnosti. Tento prut není do výpočtového modelu nijak zahrnut. Stejně tak zavětrování boků lávky. Nejedná se totiž o nosné prvky.

³Říční kilometr udává vzdálenost od určitého místa, například ústí řeky do jiného toku, k prameni řeky [28].

⁴Touto variantou se zabývá scénář 2 řešený v kapitole 5.2.

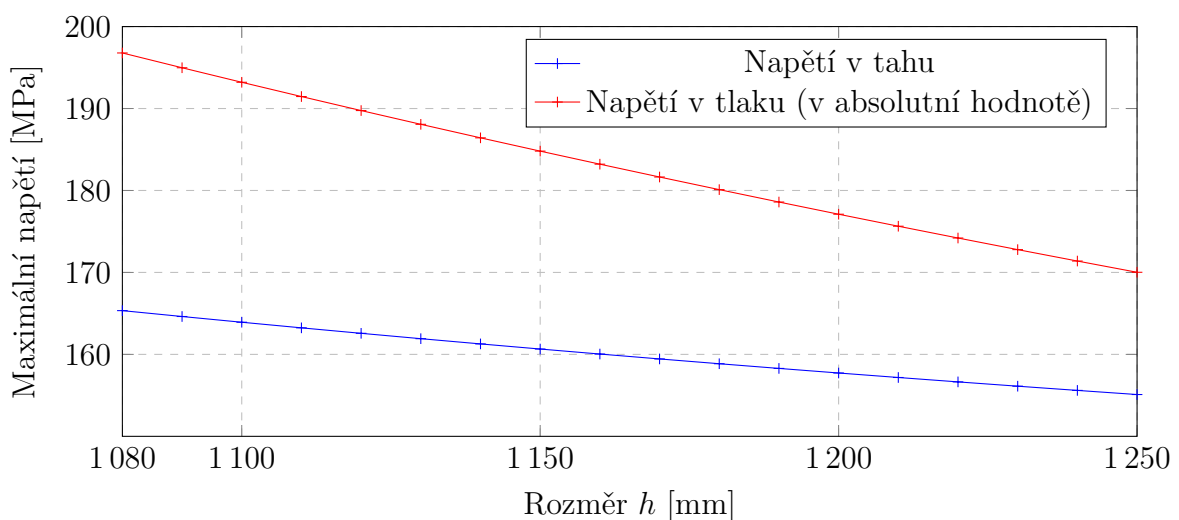
Geometrie výpočtového modelu je vytvořena podle geometrie reálné konstrukce, avšak je nutné určit rozměry modelu. Model lze sestavit více způsoby, a ve snaze zachovat řešení konzervativní, je vhodné použít to nejméně bezpečné. Na obrázku 30 je vidět, že styčník může být ve více polohách, podle toho zda je střednice prutů modelu totožná se střednicí spodního a horního nosníku reálné konstrukce. Tato varianta je znázorněna červeně na obrázku 30. Nebo může být totožná se střednicí šikmých prutů v reálné konstrukci, modrá barva na obrázku 30.



Obrázek 30: Možnosti krajních poloh styčníků modelu (rozměry v mm)

Výška modelu se tedy může pohybovat od 1080 mm po 1250 mm . Tyto hodnoty byly zvoleny jako mezní, aby model stále odpovídal reálné konstrukci. Viditelná mezera mezi prvním svislým prutem červené barvy a stejným prutem modré barvy je 50 mm , a je zanedbána z hlediska hledání nejkritičtějšího modelu.

Pro zjištění chování modelu při změně výšky lávky je použita simulace v programu Ansys. Poissonovo číslo je $\mu = 0,3$ a modul pružnosti $E = 210\text{ GPa}$. Lávka je zatěžována v každém styčníku zvolenou silou $F = 3\text{ kN}$ ⁵. Na obrázku 31 lze sledovat závislost výšky h na maximálním napětí v celé konstrukci.



Obrázek 31: Závislost výšky h na maximálním napětí

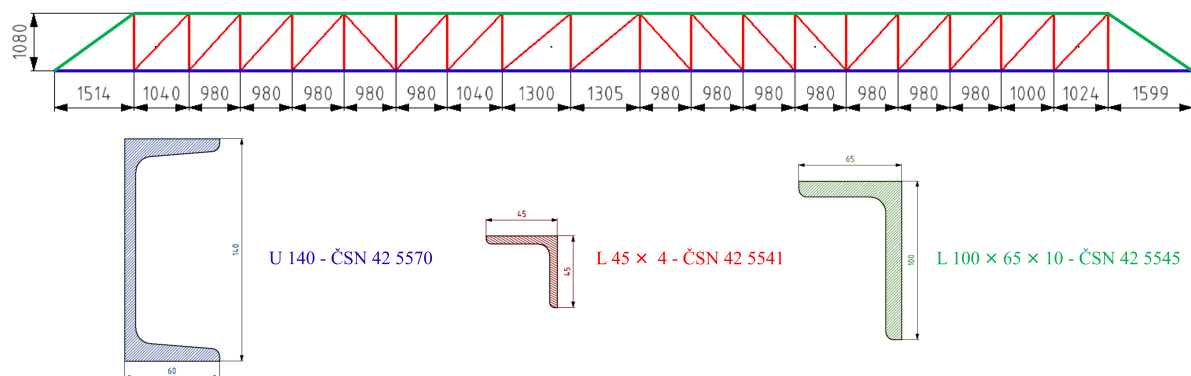
⁵Tyto hodnoty jsou zvoleny pouze pro určení trendu.

Z obrázku 31 lze vyčíst, že ani jedna závislost není lineární. Avšak na vybraném úseku od 1080 mm do 1250 mm se nenachází žádný extrém. Rozdíl mezi hodnotami napětí pro rozměr 1080 mm a pro 1250 mm činí u tahu 6,6 % a u tlaku 15,7 %. Ve snaze zachovat řešení co nejvíce konzervativní, je vybrána varianta s hodnotou 1080 mm, tedy červené znázornění na obrázku 30. Celý model lávky je zobrazen na obrázku 32. Nyní k modelu



Obrázek 32: Rozměry modelu lávky v *mm* (verze 1)

stačí už jen přiřadit příčné průřezy. To je znázorněno na obrázku 33. Barva prutu odpovídá barvě průřezu. Na natočení průřezu okolo osy prutu nezáleží, protože pruty jsou namáhány pouze na tah a tlak.



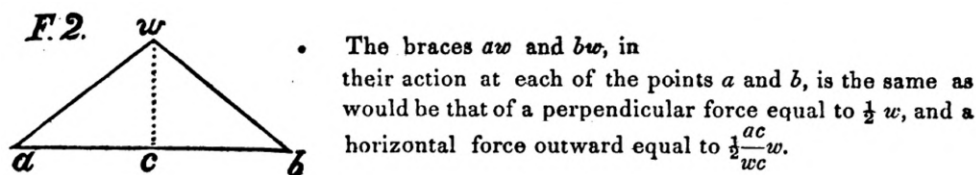
Obrázek 33: Model lávky (rozměry v *mm*) (verze 1)

5 Analytické řešení

Mostní konstrukce jsou daleko starší než jejich výpočty. Jako jeden z prvních se tohoto tématu dotkl v roce 1455 italský architekt Leon Battista Alberti [15]. Ten se ve své knize *De re aedificatoria* věnuje spíše doporučením pro stavby mostů [15]. Mosty rozděluje na kamenné a dřevěné, z čehož dřevěné mají blíže k prutovým konstrukcím. Zmiňuje zde místa konstrukce, kde je nutnost použít dřevěné trámy silnější než na místech jiných a popisuje, že různé materiály mají odlišné mechanické vlastnosti [15]. Také kvantitativně popisuje vhodné poměry jednotlivých částí mostu [15].

Až do 18. století vznikalo mnoho publikací, které popisují osobní zkušenosti autorů a obecné architektonické poučky, jak navrhnout most. V roce 1716 francouzský inženýr H. Gautier sepsal veškeré známé informace o stavbě mostů a vytvořil tak novou disciplínu mostní stavitelství [31]. Také jako první sepisuje tabulku, která určuje základní rozměry mostů na základě délky mostu [31]. Další významnou osobou je Jean Rodolphe Perronet, francouzský architekt a inženýr, který byl prvním ředitelem akademické instituce pro výuku stavebního inženýrství zabývající se silnicemi a mostními konstrukcemi [32]. Tato instituce se zabývala teoretickou studií stability oblouků a přenosem sil. S příchodem průmyslové revoluce se začaly více používat materiály jako je ocel, ta však byla velmi drahá a méně dostupná než dřevo. Také s narůstající dopravou přicházeli i první havárie spojené s mosty s prutovou konstrukcí [32]. Toto vedlo inženýry ke snaze zjistit co nejvíce o jejich chování [32].

Zásadní průlom uskutečnili nezávisle na sobě Squire Whipple v USA (1847) a v Rusku D. I. Jourawski (1850) [32]. Squire Whipple v knize *A Work on Bridge Building* přemýšlí nad prutovou konstrukcí jako nad systémem sil v rovnováze, spoje prutů předpokládá jako spoj čepem s nulovým třením, a síly rozkládá do svislého a vodorovného směru [33]. Po určení dvou sil pro každý prut se dopočítá napětí [33]. Vytvořil metodu početní i grafickou. Zmíněná metoda se nazývá metoda styčnicková a využije se i v následujících analytických výpočtech. Ukázka z této knihy je na obrázku 34, je zde uveden výpočet sil pro jednoduchou prutovou soustavu zatíženou silou w , působící v bodě w . Několik let potom vznikaly různé další metody odvíjející se od této, například metoda průsečná [32]. Dále se pozornost zaměřila především na ohyb v prutech [32].



Obrázek 34: Ukázka z knihy *A Work on Bridge Building* [33]

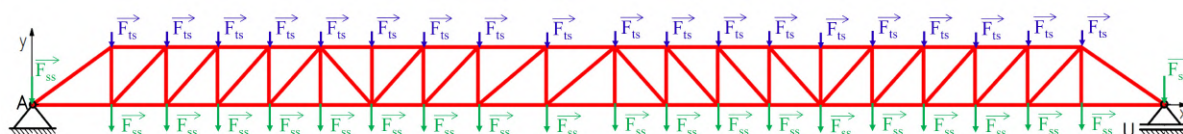
Analytické řešení prutových soustav je zastaralé. V dnešní době dostávají ve výpočtech přednost převážně řešení numerická, protože dokáží zahrnout konkrétní geometrii objektu a mají výrazně méně omezení a vyšší přesnost. Tyto výhody jsou však vyvažovány pořizovací cenou programů k tomu určeným. Právě v tomto je i dnes výhoda analytických výpočtů. Není k nim zapotřebí žádný program, protože využívá analytických vztahů, které není třeba řešit numericky. Avšak použití libovolného matematického programu výrazně usnadní práci.

Pro analytické řešení byl použit program Matlab R2022b s Add-On ¹ Antenna Toolbox a Symbolic Math Toolbox. Volba matematického programu může být libovolná. Slouží pouze k výpočtům, které by jinak museli být prováděny ručně. Vhodnou alternativou k programu Matlab by mohl být například open source program GNU Octave, který využívá velmi podobný jazyk jako Matlab [34].

Při tvorbě skriptu byl kladen důraz na jeho snadné modifikace z hlediska změny zatížení a změny geometrie.

5.1 Řešení staticky určité úlohy (scénář 1)

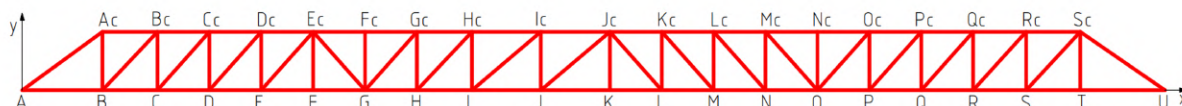
Scénář 1 odpovídá obrázku 35. Z hlediska zatížení se jedná o nejkritičtější situaci, která na lávce může nastat.



Obrázek 35: Model zatížený silami (scénář 1)

5.1.1 Popis symbolů použitých při výpočtech

Na začátku řešení úlohy je nutné zavést popis symbolů a souřadný systém. Souřadný systém bude pravoúhlý x a y s počátkem ve styčnicku A , jak je zobrazeno na obrázku 36. Jednotlivé styčníky jsou značeny velkými písmeny abecedně od počátku souřadného systému (A). Styčníky ve vrchní řadě pak mají u značení písmeno c (Ac).



Obrázek 36: Značení styčnicků (scénář 1)

Jednotlivé pruty pak budou označeny pomocí sloupcových vektorů. Například \overrightarrow{AB} značí prut mezi styčníky A a B . Ve výpočtu jsou pruty brány jako sloupcové vektory, tak že platí $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$, ale jedná se o stejný prut. Toto značení je zvoleno z důvodu snadnější tvorby skriptu v programu Matlab.

Síly jsou pak značeny obdobným způsobem. Síly působící na styčníky jsou značeny podle styčnicku (FA), síly v prutech pak podle prutů. Například síla působící na styčník A od prutu AB je značena FAB , kde opět platí $\overrightarrow{FAB} = -\overrightarrow{FBA}$ kvůli akci a reakci. Síly ve vazbách jsou značeny s písmenem v , podle toho, v jaké vazbě se styčník nachází (Fav).

¹Jedná se o doplňky zahrnující aplikace, balíčky a sady nástrojů. Tyto doplňky rozšiřují možnosti programu MATLAB o funkce pro další úlohy a aplikace.

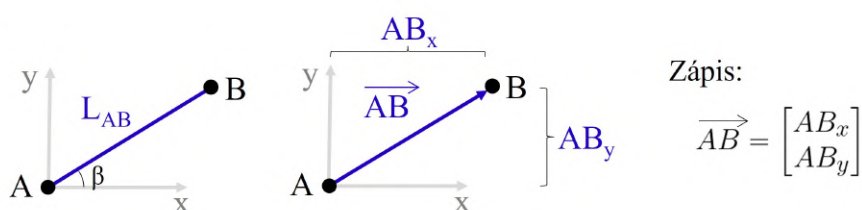
Styčníky jsou značeny jako polohový vektor od počátku souřadného systému xy v mm, jak je uvedeno v rovnici 5.1.

$$\vec{Ac} = \begin{bmatrix} x_{Ac} \\ y_{Ac} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1514 \\ 1080 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Značení prutů je v rovnici 5.2. Pruty jsou popsány jako vektory, mají tedy i směr. Na obrázku 37 vlevo je zobrazeno klasické značení prutů pomocí jeho délky a sklonu, vpravo je značení použité v této práci. Výhodou značení vpravo je, že se zde nenachází žádný úhel a snadněji se zde provádí úprava popisu geometrie.

$$\vec{BBc} = \vec{Bc} - \vec{B} = \begin{bmatrix} x_{Bc} - x_B \\ y_{Bc} - y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2554 - 1514 \\ 1080 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1040 \\ 1080 \end{bmatrix} = -\vec{BcB} \quad (5.2)$$

Rozměry jsou opět v mm.



Obrázek 37: Značení prutů

Síly působící ve styčnicích jsou popsány souřadnicemi x a y . Jsou předem vypočtené v kapitole 5.1.2 a do samotného výpočtu vstupují jako známé parametry. Jednotkou je N .

$$\vec{FB} = \begin{bmatrix} F_{Ac_x} \\ F_{Ac_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1514 \\ 1080 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

V rovnicích bude rozlišováno, zda se jedná o sloupcový vektor (\vec{AB}) nebo pouze o jeho velikost (AB). V textu pak bude uváděno pouze označení (AB) bez šipky znázorňující, že se jedná o vektor, protože v textu není nutné tuto skutečnost rozlišovat.

5.1.2 Vstupní údaje

Popis všech styčniců lávky, podle obrázků 24 a 36, vypadá pak následovně:

A=[0;0];
B=[1514;0];
C=[2554;0];
D=[3534;0];
E=[4514;0];

F=[5494;0];
G=[6474;0];
H=[7454;0];
I=[8494;0];
J=[9794;0];

K=[11099;0];
L=[12079;0];
M=[13059;0];
N=[14039;0];
O=[15019;0];

P=[15999;0];
Q=[16979;0];
R=[17959;0];
S=[18959;0];
T=[19983;0];
U=[21582;0];

h=1080;
Ac=[1514;h];
Bc=[2554;h];
Cc=[3534;h];
Dc=[4514;h];

Ec=[5494;h];
Fc=[6474;h];
Gc=[7454;h];
Hc=[8494;h];
Ic=[9794;h];

Jc=[11099;h];
Kc=[12079;h];
Lc=[13059;h];
Mc=[14039;h];
Nc=[15019;h];

Oc=[15999;h];
Pc=[16979;h];
Qc=[17959;h];
Rc=[18959;h];
Sc=[19983;h];

Na všechna tělesa na povrchu země působí tíhová síla, dána vztahem $\vec{F}_g = m \cdot \vec{g}$. Hmotnost lávky je konstantní o velikosti $m = 3360 \text{ kg}$, určené v podkapitole 3.2. Pro výpočet síly od hmotnosti celé lávky se použije následující rovnice 5.4. Zrychlení působí v záporném směru osy y.

$$\vec{F}_g = m \cdot \vec{g} = 3360 \cdot 9,81 = 32961,6 \text{ N}, \vec{F}_g = \begin{bmatrix} 0 \\ -32962 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Na lávce se nachází celkem $k_c = 80$ styčníků. Na každé straně $k = 40$ styčníků. Z toho síla F_{gs} na jeden styčníc:

$$\vec{F}_{gs} = \frac{\vec{F}_g}{k_c} = \begin{bmatrix} 0/80 \\ -32962/80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -412 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

V podkapitole 3.3 je uvedena maximální zatížitelnost lávky $w_{max} = 3,52 \text{ kN/m}^2$, a z obrázku 24 je patrná provozní plocha lávky $S_{lavka} = 1,2 \cdot 22,39 = 26,9 \text{ m}^2$. Z důvodu směru, ze kterého chodci zatěžují lávku se w_{max} napíše jako:

$$\vec{w}_{max} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3520 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad (5.6)$$

Pomocí toho se určí zatížení od chodců F_w , která je vyjádřena v rovnici 5.7. Síly od zatížení chodců však působí na mostovku a ta je uchycena k hlavní nosné konstrukci jen v místě spodních styčníků, proto toto zatížení je rozpočítáno do $k_{sc} = 42$ styčníků. Na každé straně $k_s = 21$ styčníc. Z toho síla na jednotlivé spodní styčníc F_{ws} se nachází v rovnici 5.8.

$$\vec{F}_w = \vec{w}_{max} \cdot S_{lavka} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 26,9 \\ -3520 \cdot 26,9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -94575 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$\vec{F}_{ws} = \frac{\vec{F}_w}{k_{sc}} = \begin{bmatrix} 0/42 \\ -94575/42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2252 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Na každý spodní styčníc působí síla F_{ss} .

$$\vec{F}_{ss} = \vec{F}_{gs} + \vec{F}_{ws} = \begin{bmatrix} 0 + 0 \\ -412 - 2252 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2664 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Na vrchní pak $\vec{F}_{vs} = \vec{F}_{gs}$.

Zápis pro Matlab pak vypadá následovně.

Fgs=-412;
Fss=-2663;

FA=[0;Fss];
FB=[0;Fss];

FC=[0;Fss];
FD=[0;Fss];

FE=[0;Fss];
FF=[0;Fss];

$FG=[0;F_{ss}]$;
 $FH=[0;F_{ss}]$;
 $FI=[0;F_{ss}]$;
 $FJ=[0;F_{ss}]$;
 $FK=[0;F_{ss}]$;
 $FL=[0;F_{ss}]$;
 $FM=[0;F_{ss}]$;
 $FN=[0;F_{ss}]$;
 $FO=[0;F_{ss}]$;

$FP=[0;F_{ss}]$;
 $FQ=[0;F_{ss}]$;
 $FR=[0;F_{ss}]$;
 $FS=[0;F_{ss}]$;
 $FT=[0;F_{ss}]$;
 $FU=[0;F_{ss}]$;
 $FAC=[0;F_{gs}]$;
 $FBC=[0;F_{gs}]$;
 $FCc=[0;F_{gs}]$;

$FDc=[0;F_{gs}]$;
 $FEc=[0;F_{gs}]$;
 $FFc=[0;F_{gs}]$;
 $FGc=[0;F_{gs}]$;
 $FHc=[0;F_{gs}]$;
 $FIc=[0;F_{gs}]$;
 $FJc=[0;F_{gs}]$;
 $FKc=[0;F_{gs}]$;

$FLc=[0;F_{gs}]$;
 $FMc=[0;F_{gs}]$;
 $FNc=[0;F_{gs}]$;
 $FOc=[0;F_{gs}]$;
 $FPc=[0;F_{gs}]$;
 $FQc=[0;F_{gs}]$;
 $FRc=[0;F_{gs}]$;
 $FSc=[0;F_{gs}]$;

Vektory prutů:

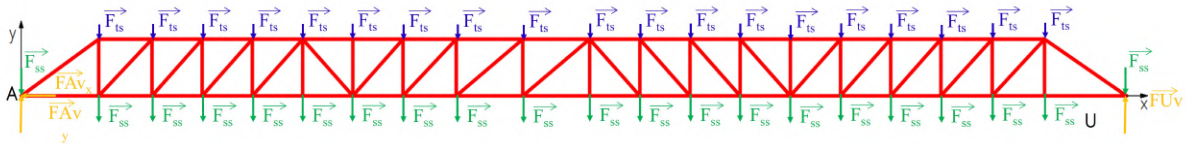
$AAc=A_c-A$; $AcA=A-A_c$; ... $TU=U-T$; $UT=T-U$;

Vektory vzdáleností od vazeb A a U (pro výpočet sil ve vazbách):

$AA=A-A$; $UA=A-U$; $AB=B-A$; $UB=B-U$; ... $URc=Rc-U$; $ASc=Sc-A$; $USc=Sc-U$;

5.1.3 Statický rozbor

Ve styčnicku A se nachází rotační vazba a ve styčnicku U podpora, jak je znázorněno na obrázku 35. Tyto vazby jsou zvoleny jako náhrada za reálné uložení, kapitola 2.10. Na obrázku 38 se nachází uvolnění vazeb. Vazba A odebírá $\xi_A = 2$ stupně volnosti. Vazba U



Obrázek 38: Zatížený model s uvolněnými vazbami (scénář 1)

odebírá $\xi_U = 1$ stupeň volnosti, podle obrázku 6. Z rovnic statické rovnováhy pak pro 2D úlohu ($\nu_e = 3$) platí:

$$\mu_e = \xi_A + \xi_U = 2 + 1 = 3 \quad (5.10)$$

Po dosazení výsledku rovnice 5.10 do rovnice určující vnější statickou určitost.

$$s_e = \mu_e - \nu_e = 3 - 3 = 0 \quad (5.11)$$

Je vidět, že $s_e = 0$, takže soustava je externě staticky určitá.

Určení vnitřní statické určitosti: pro 2D platí rovnice 2.2. Počet prutů je $p = 77$ a počet styčnicků $k = 40$. Po dosazení do rovnice 2.2, $s_i = p - 2k + 3$.

$$s_i = 77 - 2 \cdot 40 + 3 = 0 \quad (5.12)$$

Výsledek této rovnice je nulový, takže soustava je vnitřně staticky určitá. Soustavu tak lze řešit obecnou styčnickovou metodou. Uvolněním jednotlivých styčnicků, sepsáním rovnic rovnováhy v každém z nich a následně řešit soustavu rovnic.

5.1.4 Síly v externích vazbách

Na výpočet sil v externích vazbách potřebujeme tři rovnice rovnováhy. Hledáme síly FAv_x , FAv_y a FUv_y . Z obrázku 38 a vazeb (obrázek 6) je patrné, že $FUv_x = 0$. Rovnice rovnováhy jsou dvě silové (rovnice 5.13 a 5.14) a jedna momentová (rovnice 5.15).

$$\sum_{n=1}^{p+2} F_x = FAv_x + FUv_x + FA_x + FB_x + FC_x + FD_x + FE_x + \dots \\ \dots + FOc_x + FPc_x + FQc_x + FRc_x + FSc_x = 0 \quad (5.13)$$

$$\sum_{n=1}^{p+2} F_y = FAv_y + FUv_y + FA_y + FB_y + FC_y + FD_y + FE_y + \dots \\ \dots + FOc_y + FPc_y + FQc_y + FRc_y + FSc_y = 0 \quad (5.14)$$

$$\sum_{n=1}^{2 \cdot p + 4} M_z = FUv_x \cdot AU_y + FUv_y \cdot AU_x + FAv_x \cdot AA_y + FAv_y \cdot AA_x + \\ + FA_x \cdot AA_y + FA_y \cdot AA_x + FB_x \cdot AB_y + FB_y \cdot AB_x + \dots \\ \dots + FRc_x \cdot ARc_y + FRc_y \cdot ARc_x + FSc_x \cdot ASc_y + FSc_y \cdot ASc_x = 0 \quad (5.15)$$

Zápis a řešení rovnic v Matlabu:

```
xr=FAv(1) + FUv(1) + FA(1) + FB(1) + ... + FRc(1) + FSc(1)==0;
yr=FAv(2) + FUv(2) + FA(2) + FB(2) + ... + FRc(2) + FSc(2)==0;

zrA=FUv(1)*AU(2) + FUv(2)*AU(1) + FAv(1)*AA(2) + ... + FSc(2)*ASc(1)==0;
vaz=FUv(1)==0; %posuvná, v x je možný posuv

xyz=solve([xr yr zrA vaz],[FAv FUv])
SC=struct2array(xyz);

FAv=[SC(1); SC(2)];
F=sqrt(SC(1)^2+SC(2)^2);
FAvv=round(F,10)
FUv=[SC(3); SC(4)];
F=sqrt(SC(3)^2+SC(4)^2);
FUvv=round(F,10)
```

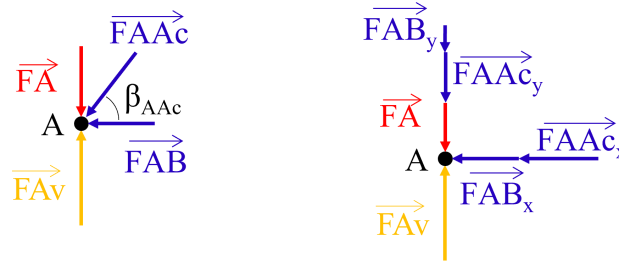
Řešením soustavy rovnic se získají následující výsledky pro síly ve vazbách A a U .

$$\begin{aligned} FAv_x &= 0 \text{ N} \\ FAv_y &= 31888 \text{ N} \\ FUv_x &= 0 \text{ N} \\ FUv_y &= 31880 \text{ N} \end{aligned} \quad (5.16)$$

5.1.5 Uvolnění styčnicků

Styčnick A

Uvolnění styčnicku A je znázorněno na obrázku 39. Pro každý styčnick jsou dvě silové



Obrázek 39: Uvolněný styčnick A

rovnice rovnováhy pro každou osu. Tento způsob je využíván velmi často a lze se s ním setkat například v literatuře [4] a [2]. Pro styčnick A jsou následující algebraické rovnice statické rovnováhy.

$$\begin{aligned} A : \sum F_x = 0 : FAv_x + FA_x + FAAC_x + FAB_x &= 0 \\ \sum F_y = 0 : FAv_y + FA_y + FAAC_y + FAB_y &= 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

Stejný vztah lze zapsat i pomocí vektorové rovnice statické rovnováhy, aniž by se změnila jeho funkce. A to konkrétně takto:

$$A : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FAv} + \vec{FA} + \vec{FAAc} + \vec{FAB} = \vec{0}, \quad (5.18)$$

to usnadní práci se psaním rovnic rovnováhy do programu Matlab a zároveň umožní i snazší úpravy skriptu při případných změnách skladby prutů. Nyní jsou dvě rovnice o čtyřech neznámých $FAAC_x$, FAB_x , $FAAC_y$ a FAB_y . Další rovnice lze doplnit pomocí goniometrických funkcí podle obrázku 39 následovně.

$$\begin{aligned} FAAC : FAAC \cdot \cos \beta_{AAc} &= FAAC_x \\ FAAC \cdot \sin \beta_{AAc} &= FAAC_y \\ FAB : FAB \cdot \cos \beta_{AB} &= FAB_x \\ FAB \cdot \sin \beta_{AB} &= FAB_y \end{aligned} \quad (5.19)$$

Kde $\beta_{AAc} = \arccos \frac{|AB|}{|AAc|}$ a $\beta_{AB} = 0$. Po dosazení pak rovnice rovnováhy mají tvar:

$$\begin{aligned} A : \sum F_x = 0 : FAv_x + FA_x + FAAC \cdot \cos \beta_{AAc} + FAB \cdot \cos \beta_{AB} &= 0 \\ \sum F_y = 0 : FAv_y + FA_y + FAAC \cdot \sin \beta_{AAc} + FAB \cdot \sin \beta_{AB} &= 0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

Tento tvar rovnice 5.20 už je řešitelný, a lze z něj dopočítat obě dvě neznámé $FAAC$ a FAB .

Doplnění rovnic pomocí goniometrických funkcí je zdlouhavé a zbytečně komplikované na tvorbu skriptu. Další možností je využít kolinearitu vektorů. Je známo že prut má vždy

stejný směr jako jeho normálová síla, platí tedy rovnoběžnost vektorů $\overrightarrow{FAAc} \parallel \overrightarrow{AAc}$ a $\overrightarrow{FAB} \parallel \overrightarrow{AB}$. Dva vektory jsou kolineární právě tehdy, pokud platí následující rovnice: 5.21.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FAAc} \parallel \overrightarrow{AAc} &\iff \frac{FAAc_x}{AAc_x} = \frac{FAAc_y}{AAc_y} \\ \overrightarrow{FAB} \parallel \overrightarrow{AB} &\iff \frac{FAB_x}{AB_x} = \frac{FAB_y}{AB_y}\end{aligned}\tag{5.21}$$

Tady lze využít už známé vektory prutů z podkapitoly 5.1.2. Po úpravě, aby nedošlo k dělení nulou, lze pro styčník A napsat čtyři rovnice o čtyřech neznámých.

$$\begin{aligned}A : \sum F_x = 0 : FAv_x + FA_x + FAAc_x + FAB_x &= 0 \\ A : \sum F_y = 0 : FAv_y + FA_y + FAAc_y + FAB_y &= 0 \\ \overrightarrow{FAAc} \parallel \overrightarrow{AAc} &\iff FAAc_x \cdot AAc_y = FAAc_y \cdot AAc_x \\ \overrightarrow{FAB} \parallel \overrightarrow{AB} &\iff FAB_x \cdot AB_y = FAB_y \cdot AB_x\end{aligned}\tag{5.22}$$

A následné nahrazení algebraického tvaru za vektorový, tedy za tvar který bude používán v této práci.

$$\begin{aligned}A : \sum \vec{F} = \vec{0} : \overrightarrow{FAv} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FAAc} + \overrightarrow{FAB} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{FAAc} \parallel \overrightarrow{AAc} &\iff FAAc_x \cdot AAc_y = FAAc_y \cdot AAc_x \\ \overrightarrow{FAB} \parallel \overrightarrow{AB} &\iff FAB_x \cdot AB_y = FAB_y \cdot AB_x\end{aligned}\tag{5.23}$$

V programu Matlab to pak vypadá následovně:

```
NSvP=[FAAc ,FAB ]; %Neznámé síly v prutech
P=[AAc ,AB ]; %Pruty

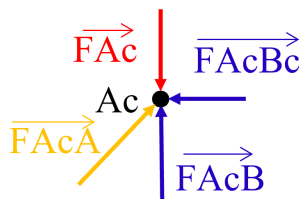
RS=FAv+FA+FAB+FAAc==0; %Rovnováha sil

KV1=(NSvP(1,1)*P(2,1))== (NSvP(2,1)*P(1,1)); %Kolinearita vektorů
KV2=(NSvP(1,2)*P(2,2))== (NSvP(2,2)*P(1,2)); %Kolinearita vektorů

RSA=[RS;KV1;KV2] %Soustava rovnic pro styčník A
```

Styčník Ac

Uvolnění styčníku Ac je znázorněno na obrázku 40. Rovnice pro styčník A .



Obrázek 40: Uvolněný styčník Ac

$$\begin{aligned}
Ac : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FA} + \vec{FAcA} + \vec{FAcB} + \vec{FAcBc} = \vec{0} \\
\vec{FAcB} \parallel \vec{AcB} \iff FAcB_x \cdot AcB_y = FAcB_y \cdot AcB_x \\
\vec{FAcBc} \parallel \vec{AcBc} \iff FAcBc_x \cdot AcBc_y = FAcBc_y \cdot AcBc_x
\end{aligned} \tag{5.24}$$

V programu Matlab:

```

NSvP=[FAcB ,FAcBc]; %Neznámé síly v prutech
P=[AcB ,AcBc ]; %Pruty

RS=FAc+FAcB+FAcBc+FAcA==0; %Rovnováha sil

KV1=(NSvP(1,1)*P(2,1))== (NSvP(2,1)*P(1,1)); %Kolinearita vektorů
KV2=(NSvP(1,2)*P(2,2))== (NSvP(2,2)*P(1,2)); %Kolinearita vektorů

RSAc=[RS;KV1;KV2] %Soustava rovnic

```

Styčnick B

Rovnice pro styčnick B .

$$B : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FB} + \vec{FBÁ} + \vec{FBÁc} + \vec{FBBc} + \vec{FBC} = \vec{0} \tag{5.25}$$

V programu Matlab:

```

NSvP=[FBBc ,FBC]; %Neznámé síly v prutech
P=[BBc ,BC ]; %Pruty %zalezi na poradi vuci NSvP

RS=FB+FBA+FBÁc+FBBc+FBC==0; %Rovnováha sil

KV1=(NSvP(1,1)*P(2,1))== (NSvP(2,1)*P(1,1)); %Kolinearita vektorů
KV2=(NSvP(1,2)*P(2,2))== (NSvP(2,2)*P(1,2)); %Kolinearita vektorů

RSB=[RS;KV1;KV2] %Soustava rovnic

```

Řešení je prováděno metodou obecnou styčnickovou, tak nezáleží na pořadí uvolňování styčnicků. Celkem je 77 prutů, tedy 154 neznámých, když jsou rozděleny do směrů x a y. Ze styčnicků (80) a geometrie prutů (77) lze celkem získat 157 rovnic. Ovšem síly ve vazbách jsou již vyřešené, proto stačí 154 rovnic. Jsou odebrány poslední tři rovnice, a to obě dvě pro styčnick U a jedna určující vztah mezi prutem TU a silou FTU.

Pro ostatní styčnicky platí následující rovnice.

Styčnick Bc

Rovnice pro styčnick Bc .

$$Bc : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FBc} + \vec{FBcAc} + \vec{FBcB} + \vec{FBcC} + \vec{FBcCc} = \vec{0} \tag{5.26}$$

Styčník C

Rovnice pro styčník C .

$$C : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FC} + \vec{FCB} + \vec{FCBc} + \vec{FCCc} + \vec{FCD} = \vec{0} \quad (5.27)$$

Styčník Cc

Rovnice pro styčník Cc .

$$Cc : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FCc} + \vec{FCcBc} + \vec{FCcC} + \vec{FCcD} + \vec{FCcDc} = \vec{0} \quad (5.28)$$

Styčník D

Rovnice pro styčník D .

$$D : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FD} + \vec{FDC} + \vec{FDCc} + \vec{FDDc} + \vec{FDE} = \vec{0} \quad (5.29)$$

Styčník Dc

Rovnice pro styčník Dc .

$$Dc : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FDc} + \vec{FDcCc} + \vec{FDcD} + \vec{FDcE} + \vec{FDcEc} = \vec{0} \quad (5.30)$$

Styčník E

Rovnice pro styčník E .

$$E : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FE} + \vec{FED} + \vec{FEDc} + \vec{FEEc} + \vec{FEF} = \vec{0} \quad (5.31)$$

Styčník Ec

Rovnice pro styčník Ec .

$$Ec : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FEc} + \vec{FEcDc} + \vec{FEcc} + \vec{FEcF} + \vec{FEcFc} = \vec{0} \quad (5.32)$$

Styčník F

Rovnice pro styčník F .

$$F : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FF} + \vec{FFE} + \vec{FFEc} + \vec{FFG} = \vec{0} \quad (5.33)$$

Styčník Fc

Rovnice pro styčník Fc .

$$Fc : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FFc} + \vec{FFcEc} + \vec{FFcG} + \vec{FFcGc} = \vec{0} \quad (5.34)$$

Styčnick G

Rovnice pro styčnick G .

$$G : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FG} + \vec{FGF} + \vec{FGEc} + \vec{FGFc} + \vec{FGGc} + \vec{FGH} = \vec{0} \quad (5.35)$$

Styčnick Gc

Rovnice pro styčnick Gc .

$$Gc : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FGc} + \vec{FGcFc} + \vec{FGcG} + \vec{FGcH} + \vec{FGcHc} = \vec{0} \quad (5.36)$$

Styčnick H

Rovnice pro styčnick H .

$$H : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FH} + \vec{FHG} + \vec{FHGc} + \vec{FHHc} + \vec{FH\dot{I}} = \vec{0} \quad (5.37)$$

Styčnick Hc

Rovnice pro styčnick Hc .

$$Hc : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FHc} + \vec{FHcGc} + \vec{FHcH} + \vec{FHc\dot{I}} + \vec{FHc\dot{I}c} = \vec{0} \quad (5.38)$$

Styčnick I

Rovnice pro styčnick I .

$$I : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FI} + \vec{FIH} + \vec{FIHc} + \vec{FIIc} + \vec{FI\dot{J}} = \vec{0} \quad (5.39)$$

Styčnick Ic

Rovnice pro styčnick Ic .

$$Ic : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FIc} + \vec{FIcHc} + \vec{FIc\dot{I}} + \vec{FIc\dot{J}} + \vec{FIc\dot{J}c} = \vec{0} \quad (5.40)$$

Styčnick J

Rovnice pro styčnick J .

$$J : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FJ} + \vec{FJI} + \vec{FJIc} + \vec{FJJc} + \vec{FJK} = \vec{0} \quad (5.41)$$

Styčnick Jc

Rovnice pro styčnick Jc .

$$Jc : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FJc} + \vec{FJc\dot{I}c} + \vec{FJc\dot{J}} + \vec{FJc\dot{K}} + \vec{FJc\dot{L}} + \vec{FJc\dot{K}c} = \vec{0} \quad (5.42)$$

Styčník K

Rovnice pro styčník K .

$$K : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FK} + \vec{FKJ} + \vec{FKJc} + \vec{FKL} = \vec{0} \quad (5.43)$$

Styčník Kc

Rovnice pro styčník Kc .

$$Kc : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FKc} + \vec{FKcJc} + \vec{FKcL} + \vec{FKcM} + \vec{FKcLc} = \vec{0} \quad (5.44)$$

Styčník L

Rovnice pro styčník L .

$$L : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FL} + \vec{FLK} + \vec{FLJc} + \vec{FLKc} + \vec{FLM} = \vec{0} \quad (5.45)$$

Styčník Lc

Rovnice pro styčník Lc .

$$Lc : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FLc} + \vec{FLcKc} + \vec{FLcM} + \vec{FLcN} + \vec{FLcMc} = \vec{0} \quad (5.46)$$

Styčník M

Rovnice pro styčník M .

$$M : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FM} + \vec{FML} + \vec{FMKc} + \vec{FMLc} + \vec{FMN} = \vec{0} \quad (5.47)$$

Styčník Mc

Rovnice pro styčník Mc .

$$Mc : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FMc} + \vec{FMcLc} + \vec{FMcN} + \vec{FMcO} + \vec{FMcNc} = \vec{0} \quad (5.48)$$

Styčník N

Rovnice pro styčník N .

$$N : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FN} + \vec{FNM} + \vec{FNLc} + \vec{FNMc} + \vec{FN O} = \vec{0} \quad (5.49)$$

Styčník Nc

Rovnice pro styčník Nc .

$$Nc : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FNc} + \vec{FNcMc} + \vec{FNcO} + \vec{FNcOc} = \vec{0} \quad (5.50)$$

Styčník O

Rovnice pro styčník O .

$$O : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FO} + \vec{FON} + \vec{FOMc} + \vec{FONc} + \vec{FOOc} + \vec{FOp} = \vec{0} \quad (5.51)$$

Styčník Oc

Rovnice pro styčník Oc .

$$Oc : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FOc} + \vec{FOcNc} + \vec{FOcO} + \vec{FOcP} + \vec{FOcPc} = \vec{0} \quad (5.52)$$

Styčník P

Rovnice pro styčník P .

$$P : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FP} + \vec{FPo} + \vec{FPoc} + \vec{FPPc} + \vec{FPQ} = \vec{0} \quad (5.53)$$

Styčník Pc

Rovnice pro styčník Pc .

$$Pc : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FPc} + \vec{FPcOc} + \vec{FPcP} + \vec{FPcQ} + \vec{FPcQc} = \vec{0} \quad (5.54)$$

Styčník Q

Rovnice pro styčník Q .

$$Q : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FQ} + \vec{FQP} + \vec{FQPc} + \vec{FQQc} + \vec{FQR} = \vec{0} \quad (5.55)$$

Styčník Qc

Rovnice pro styčník Qc .

$$Qc : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FQc} + \vec{FQcPc} + \vec{FQcQ} + \vec{FQcR} + \vec{FQcRc} = \vec{0} \quad (5.56)$$

Styčník R

Rovnice pro styčník R .

$$R : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FR} + \vec{FRQ} + \vec{FRQc} + \vec{FRRc} + \vec{FRS} = \vec{0} \quad (5.57)$$

Styčník Rc

Rovnice pro styčník Rc .

$$Rc : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FRc} + \vec{FRcQc} + \vec{FRcR} + \vec{FRcS} + \vec{FRcSc} = \vec{0} \quad (5.58)$$

Styčnick S

Rovnice pro styčnick S .

$$S : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FS} + \vec{FSR} + \vec{FSRc} + \vec{FSSc} + \vec{FST} = \vec{0} \quad (5.59)$$

Styčnick Sc

Rovnice pro styčnick Sc .

$$Sc : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FSc} + \vec{FScRc} + \vec{FScS} + \vec{FScT} + \vec{FScU} = \vec{0} \quad (5.60)$$

Styčnick T

Rovnice pro styčnick T .

$$T : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FT} + \vec{FTS} + \vec{FTSc} + \vec{FTU} = \vec{0} \quad (5.61)$$

Ke každému styčnicku jsou ve skriptu dopsány i rovnice kolinearit, ty však není nutné uvádět, protože jsou ve všech styčnickách analogické. Nyní jsou k dispozici všechny potřebné rovnice, a lze přejít k jejich řešení.

5.1.6 Řešení soustavy rovnic a normálové síly

Řešení soustavy 154 rovnic v Matlabu.

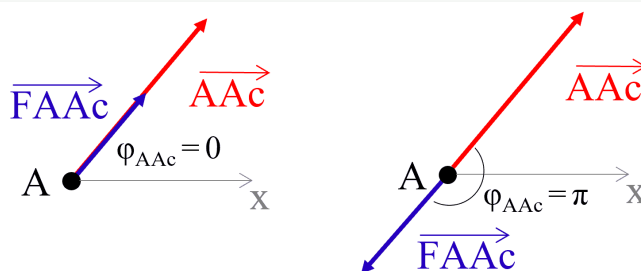
```
Mat=[RSA; RSB; RSC; RSD; RSE; RSF; ... RSPc; RSQc; RSRc; RSSc ]
```

```
Sol=solve(Mat)
```

Nyní jsou známy hodnoty normálové síly v každém prutu v podobě souřadnic x a y . Pro normálovou sílu $FAAc$ je to $FAAc_x = -39085 \text{ N}$ a $FAAc_y = -27881 \text{ N}$. Velikost síly $FAAc$ je:

$$FAAc = \sqrt{FAAc_x^2 + FAc_y^2} = \sqrt{(-39085)^2 + (-27881)^2} = 48010 \text{ N} \quad (5.62)$$

Tímto postupem se ale ztratí znaménko, a tím i možnost rozeznat tah (+) od tlaku (-). Kontrolovat ručně směr každé síly by bylo zdlouhavé. Proto je použito řešení pomocí odchylky ϕ vektoru síly od vektoru prutu. To porovnává zda je směr síly \vec{FAAc} stejný se směrem prutu \vec{AAc} , nebo právě opačný. Znázorněno na obrázku 41.



Obrázek 41: Odchylka vektorů \vec{FAAc} a \vec{AAc}

Odchylka se vypočítá jako:

$$\phi_{AAc} = \arccos \frac{\overrightarrow{AAc} \cdot \overrightarrow{FAAc}}{|\overrightarrow{AAc}| \cdot |\overrightarrow{FAAc}|} \quad (5.63)$$

Po dosazení:

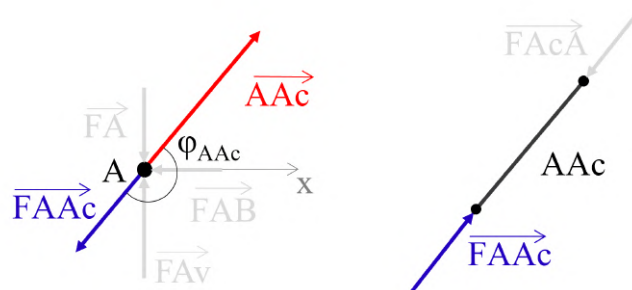
$$|\overrightarrow{FAAc}| = \sqrt{FAAc_x^2 + FAAc_y^2} = \sqrt{(-40968)^2 + (-29225)^2} = 50324 \text{ N} \quad (5.64)$$

$$|\overrightarrow{AAc}| = \sqrt{AAc_x^2 + AAc_y^2} = \sqrt{1514^2 + 1080^2} = 1860 \text{ mm} \quad (5.65)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AAc} \cdot \overrightarrow{FAAc} &= AAc_x \cdot FAAc_x + AAc_y \cdot FAAc_y = \\ &= 1514 \cdot -40968 + 1080 \cdot -29225 = -93588826 \text{ Nmm} \end{aligned} \quad (5.66)$$

$$\phi_{AAc} = \arccos \frac{\overrightarrow{AAc} \cdot \overrightarrow{FAAc}}{|\overrightarrow{AAc}| \cdot |\overrightarrow{FAAc}|} = \arccos \frac{-93588826}{1860 \cdot 50324} \approx \pi \quad (5.67)$$

Výsledek $\phi_{AAc} = 0$ znamená, že síla \overrightarrow{FAAc} na styčnku A má stejný směr jako prut \overrightarrow{AAc} . Po přenesení síly ze styčnku na prut (obrázek 42) se změní znaménko² a znamená to, že prut je namáhaný na tah (+). Když $\phi_{FAAc} = \pi$, tak se jedná o tlak (-).



Obrázek 42: Uvolnění styčnku A a prutu AAc

V programu Matlab:

²3. Newtonův zákon: Akce a reakce. $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$.

```

FAAc=[SA(1) ;SA(2)];
fi=acos((dot([SA(1);SA(2)],AAc))/...
        ... (sqrt(SA(1)^2+SA(2)^2)*sqrt(AAc(1)^2+AAc(2)^2)));

if round(fi,3) == 0
    sig=1;
else
    sig = -1;
end

F=sig*sqrt(SA(1)^2+SA(2)^2);
FAAc=round(F,10)

```

Pro všechny ostatní síly pak proběhne stejný výpočet. Následují výsledné normálové síly v prutech:

$F_{AAc} = -50324 \text{ N}$	$F_{HcIc} = -150330 \text{ N}$
$F_{AB} = 40968 \text{ N}$	$F_{IIc} = -7227 \text{ N}$
$F_{AcB} = 28813 \text{ N}$	$F_{IJ} = 155888 \text{ N}$
$F_{AcBc} = -40968 \text{ N}$	$F_{IcJ} = 4206 \text{ N}$
$F_{BBc} = -36302 \text{ N}$	$F_{IcJc} = -155888 \text{ N}$
$F_{BC} = 66149 \text{ N}$	$F_{JJc} = -2419 \text{ N}$
$F_{BcC} = 25737 \text{ N}$	$F_{JK} = 157752 \text{ N}$
$F_{BcCc} = -66149 \text{ N}$	$F_{JcK} = 2664 \text{ N}$
$F_{CCc} = -31156 \text{ N}$	$F_{JcKc} = -156360 \text{ N}$
$F_{CD} = 87085 \text{ N}$	$F_{JcL} = -2071 \text{ N}$
$F_{CcD} = 22661 \text{ N}$	$F_{KL} = 157752 \text{ N}$
$F_{CcDc} = -87085 \text{ N}$	$F_{KcL} = 4198 \text{ N}$
$F_{DDc} = -27003 \text{ N}$	$F_{KcLc} = -152177 \text{ N}$
$F_{DE} = 105231 \text{ N}$	$F_{KcM} = -6225 \text{ N}$
$F_{DcE} = 19585 \text{ N}$	$F_{LM} = 156360 \text{ N}$
$F_{DcEc} = -105231 \text{ N}$	$F_{LcM} = 7273 \text{ N}$
$F_{EEc} = -22849 \text{ N}$	$F_{LcMc} = -145203 \text{ N}$
$F_{EF} = 120585 \text{ N}$	$F_{LcN} = -10378 \text{ N}$
$F_{EcF} = 2664 \text{ N}$	$F_{MN} = 152177 \text{ N}$
$F_{EcFc} = -133149 \text{ N}$	$F_{McN} = 10349 \text{ N}$
$F_{EcG} = 18696 \text{ N}$	$F_{McNc} = -135438 \text{ N}$
$F_{FG} = 120585 \text{ N}$	$F_{McO} = -14531 \text{ N}$
$F_{FcG} = -412 \text{ N}$	$F_{NO} = 145203 \text{ N}$
$F_{FcGc} = -133149 \text{ N}$	$F_{NcO} = -412 \text{ N}$
$F_{GGc} = -14542 \text{ N}$	$F_{NcOc} = -135438 \text{ N}$
$F_{GH} = 142921 \text{ N}$	$F_{OOc} = 18685 \text{ N}$
$F_{GcH} = 10358 \text{ N}$	$F_{OP} = 122882 \text{ N}$
$F_{GcHc} = -142921 \text{ N}$	$F_{OcP} = -14249 \text{ N}$
$F_{HHc} = -10681 \text{ N}$	$F_{OcPc} = -122882 \text{ N}$
$F_{HI} = 150330 \text{ N}$	$F_{PPc} = 22838 \text{ N}$
$F_{HcI} = 7282 \text{ N}$	$F_{PQ} = 107535 \text{ N}$

$$\begin{aligned}
FPcQ &= -17325 \text{ N} \\
FPcQc &= -107535 \text{ N} \\
FQQc &= 26991 \text{ N} \\
FQR &= 89397 \text{ N} \\
FQcR &= -20401 \text{ N} \\
FQcRc &= -89397 \text{ N} \\
FRRc &= 31433 \text{ N} \\
FRS &= 68041 \text{ N}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
FRcS &= -23477 \text{ N} \\
FRcSc &= -68041 \text{ N} \\
FSSc &= 36023 \text{ N} \\
FST &= 43256 \text{ N} \\
FScT &= 2664 \text{ N} \\
FScU &= -52199 \text{ N} \\
FTU &= 43256 \text{ N}
\end{aligned}$$

Tím jsou vyřešeny síly, které se použijí pro výpočet napětí a určení bezpečnosti vzhledem k MSP. Červenou barvou jsou zde vyznačeny extrémy, tedy největší a nejmenší síla.

5.1.7 Normálové napětí v prutech

Na obrázku 33 jsou znázorněny 3 druhy průřezů v soustavě. Z toho tabulka 1 rozdělení prutů podle průřezu:

Tabulka 1: Roztřídění prutů podle průřezu

U 140		L 100 × 65 × 10		L 45 × 4			
AB	KL	AAc	JcKc	AcB	FcG	KcL	PcQ
BC	LM	AcBc	KcLc	BBe	GGc	KcM	QQc
CD	MN	BcCc	LcMc	BcC	GcH	LcM	QcR
DE	NO	CcDc	McNc	CCc	HHc	LcN	RRc
EF	OP	DcEc	NcOc	CcD	HcI	McN	RcS
FG	PQ	EcFc	OcPc	DDc	Ic	McO	SSc
GH	QR	FcGc	PcQc	DcE	IcJ	NcO	ScT
HI	RS	GcHc	QcRc	EEc	JJc	OOc	
IJ	ST	HcIc	RcSc	EcF	JcK	OcP	
JK	TU	IcJc	ScU	EcG	JcL	PPc	

Plocha průřezu U 140 - ČSN 42 5570 je 2040 mm^2 [24]. Podle modelu v programu Inventor je to 2037 mm^2 . Předpokládá se, že Inventor je přesnější, proto je zvolena plocha $S_{U140} = 2037 \text{ mm}^2$. Napětí u prutů s průřezem U 140 je počítáno podle vztahu 5.68.

$$\sigma_n = \frac{F_n}{S_{U140}} \quad (5.68)$$

Pro průřez L 100 × 65 × 10 - ČSN 42 5545 je plocha dle aplikace Inventor $S_{L100} = 1561 \text{ mm}^2$. Podle ČSN 42 5545 je to 1560 mm^2 [24]. Napětí u prutů s průřezem L 100 × 65 × 10 je počítáno podle vztahu 5.69.

$$\sigma_n = \frac{F_n}{S_{L100}} \quad (5.69)$$

Pro průřez L 45 × 4 - ČSN 42 5541 je plocha dle aplikace Inventor $S_{L45} = 430 \text{ mm}^2$. Podle normy je to také 430 mm^2 [24]. Napětí u prutů s průřezem L 45 × 4 je počítáno podle vztahu 5.70.

$$\sigma_n = \frac{F_n}{S_{L45}} \quad (5.70)$$

Výsledná napětí v prutech:

$\sigma_{FAAc} = -32 \text{ MPa}$	$\sigma_{FJcKc} = -100 \text{ MPa}$
$\sigma_{FAB} = 20 \text{ MPa}$	$\sigma_{FJcL} = -5 \text{ MPa}$
$\sigma_{FAcB} = 67 \text{ MPa}$	$\sigma_{FKL} = 77 \text{ MPa}$
$\sigma_{FAcBc} = -26 \text{ MPa}$	$\sigma_{FKcL} = 10 \text{ MPa}$
$\sigma_{FBBc} = -84 \text{ MPa}$	$\sigma_{FKcLc} = -98 \text{ MPa}$
$\sigma_{FBC} = 32 \text{ MPa}$	$\sigma_{FKcM} = -14 \text{ MPa}$
$\sigma_{FBcC} = 60 \text{ MPa}$	$\sigma_{FLM} = 77 \text{ MPa}$
$\sigma_{FBcCc} = -42 \text{ MPa}$	$\sigma_{FLcM} = 17 \text{ MPa}$
$\sigma_{FCCc} = -72 \text{ MPa}$	$\sigma_{FLcMc} = -93 \text{ MPa}$
$\sigma_{FCD} = 43 \text{ MPa}$	$\sigma_{FLcN} = -24 \text{ MPa}$
$\sigma_{FCcD} = 53 \text{ MPa}$	$\sigma_{FMN} = 75 \text{ MPa}$
$\sigma_{FCcDc} = -56 \text{ MPa}$	$\sigma_{FMcN} = 24 \text{ MPa}$
$\sigma_{FDDc} = -63 \text{ MPa}$	$\sigma_{FMcNc} = -87 \text{ MPa}$
$\sigma_{FDE} = 52 \text{ MPa}$	$\sigma_{FMcO} = -34 \text{ MPa}$
$\sigma_{FDcE} = 46 \text{ MPa}$	$\sigma_{FNO} = 71 \text{ MPa}$
$\sigma_{FDcEc} = -67 \text{ MPa}$	$\sigma_{FNcO} = -1 \text{ MPa}$
$\sigma_{FEEc} = -53 \text{ MPa}$	$\sigma_{FNcOc} = -87 \text{ MPa}$
$\sigma_{FEF} = 59 \text{ MPa}$	$\sigma_{FOOc} = 43 \text{ MPa}$
$\sigma_{FEcF} = 6 \text{ MPa}$	$\sigma_{FOP} = 60 \text{ MPa}$
$\sigma_{FEcFc} = -85 \text{ MPa}$	$\sigma_{FOcP} = -33 \text{ MPa}$
$\sigma_{FEcG} = 43 \text{ MPa}$	$\sigma_{FOcPc} = -79 \text{ MPa}$
$\sigma_{FFG} = 59 \text{ MPa}$	$\sigma_{FPPc} = 53 \text{ MPa}$
$\sigma_{FFcG} = -1 \text{ MPa}$	$\sigma_{FPPQ} = 53 \text{ MPa}$
$\sigma_{FFcGc} = -85 \text{ MPa}$	$\sigma_{FPCQ} = -40 \text{ MPa}$
$\sigma_{FGGc} = -34 \text{ MPa}$	$\sigma_{FPCQc} = -69 \text{ MPa}$
$\sigma_{FGH} = 70 \text{ MPa}$	$\sigma_{FQQc} = 63 \text{ MPa}$
$\sigma_{FGcH} = 24 \text{ MPa}$	$\sigma_{FQR} = 44 \text{ MPa}$
$\sigma_{FGcHc} = -92 \text{ MPa}$	$\sigma_{FQcR} = -47 \text{ MPa}$
$\sigma_{FHHc} = -25 \text{ MPa}$	$\sigma_{FQcRc} = -57 \text{ MPa}$
$\sigma_{FHI} = 74 \text{ MPa}$	$\sigma_{FRRc} = 73 \text{ MPa}$
$\sigma_{FHcI} = 17 \text{ MPa}$	$\sigma_{FRS} = 33 \text{ MPa}$
$\sigma_{FHcIc} = -96 \text{ MPa}$	$\sigma_{FRcS} = -55 \text{ MPa}$
$\sigma_{FIIc} = -17 \text{ MPa}$	$\sigma_{FRcSc} = -44 \text{ MPa}$
$\sigma_{FIJ} = 77 \text{ MPa}$	$\sigma_{FSSc} = 84 \text{ MPa}$
$\sigma_{FIcJ} = 10 \text{ MPa}$	$\sigma_{FST} = 21 \text{ MPa}$
$\sigma_{FIcJc} = -100 \text{ MPa}$	$\sigma_{FScT} = 6 \text{ MPa}$
$\sigma_{FJJc} = -6 \text{ MPa}$	$\sigma_{FScU} = -33 \text{ MPa}$
$\sigma_{FJK} = 77 \text{ MPa}$	$\sigma_{FTU} = 21 \text{ MPa}$
$\sigma_{FJcK} = 6 \text{ MPa}$	

Z toho největší tlakové napětí $\sigma_{FJcKc} = -100 \text{ MPa}$ a $\sigma_{FIcJc} = -100 \text{ MPa}$ a největší tahové napětí $\sigma_{FSSc} = 84 \text{ MPa}$. Největší napětí je potom $\sigma_{FJcKc} = -100 \text{ MPa}$ (stejně pro IcJc), na stejném prutu $JcKc$ jako byla největší síla. Bezpečnost vzhledem k MSP.

$$k_{k1} = \frac{R_e}{|\sigma_{FJcKc}|} = \frac{195}{100} = 1,95 \quad (5.71)$$

5.1.8 Průhyb

Pro kontrolu průhybu konstrukce je vybrán posuv styčnicku K. Ten byl zvolen kvůli předpokladu největšího posunutí, protože leží uprostřed řešené konstrukce. Tento předpoklad je pak zkontrolován v kapitole 6.1 pomocí MKP.

Samotné řešení je provedeno pomocí Castiglianovy věty (kapitola 2.8). Pro posuv styčnicku K tedy platí rovnice:

$$v = \frac{\partial W}{\partial FKv_y}, \quad (5.72)$$

kde FKv_y je myšlená síla ve směru osy y o rozměru $FKv_y = 0 \text{ N}$. Po dosazení za energii napjatosti má rovnice následující tvar 5.73. Je celkem 77 prutů, proto suma od 1 do 77 pro pruty AAc až TU . Vyjádřené rovnice pro výpočet sil v sobě nyní mají nulovou sílu FKv_y , jak takové rovnice vypadají je ukázáno v kapitole 5.3 pro scénář 3, kde je tato síla nenulová.

$$v = \frac{\partial W}{\partial FKv_y} = \sum_{i=1}^{77} \frac{\sqrt{F_{ix}^2 + F_{iy}^2}}{E_i \cdot S_i} \cdot \frac{\partial \sqrt{F_{ix}^2 + F_{iy}^2}}{\partial FKv_y} \cdot L_i, \quad (5.73)$$

kde $\sqrt{F_{ix}^2 + F_{iy}^2}$ je normálová síla na jednotlivých prutech, S_i je průřez pro dané pruty, L_i jsou délky jednotlivých prutů $L_{AAc} \dots L_{TU}$, pro které platí $L_{AAc} = \sqrt{AAc_x^2 + AAC_y^2} \dots L_{TU} = \sqrt{TU_x^2 + TU_y^2}$. Modul pružnosti v tahu $E = 205 \text{ GPa}$ je pro všechny pruty stejný a lze vytknout.

$$v = \frac{1}{E} \cdot \left(\frac{\sqrt{FAAc_x^2 + FAAc_y^2}}{SL100} \cdot \frac{\partial \sqrt{FAAc_x^2 + FAAc_y^2}}{\partial FKv_y} \cdot L_{AAc} + \dots \dots + \frac{\sqrt{FTU_x^2 + FTU_y^2}}{SU140} \cdot \frac{\partial \sqrt{FTU_x^2 + FTU_y^2}}{\partial FKv_y} \cdot L_{TU} \right) \quad (5.74)$$

Zápis v Matlabu:

```
FAAc = [sol12(1); sol12(2)];
FAB = [sol12(3); sol12(4)];
...

FAAc = sqrt(FAAc(1)^2+FAAc(2)^2);
FAB = sqrt(FAB(1)^2+FAB(2)^2);
...
```

```

castFAAc = (FAAc/SL100)*diff(FAAc,FKv(2))*sqrt(AAc(1)^2+AAc(2)^2);
castFAB = (FAB/SU140)*diff(FAB,FKv(2))*sqrt(AB(1)^2+AB(2)^2);
...
CastiglianPrava=castFAAc + castFAB + castFAcB + ...
... + castFSSc + castFST + castFScT + castFScU ;

```

Řešení rovnice v Matlabu:

```

syms v
Etah=205000
CastiglianLeva=Etah*v;

Castiglian=solve([CastiglianPrava==CastiglianLeva],v)

CastSub = subs(Castiglian,[FKv1,FKv2],[0,0])

v=round(CastSub,5)

```

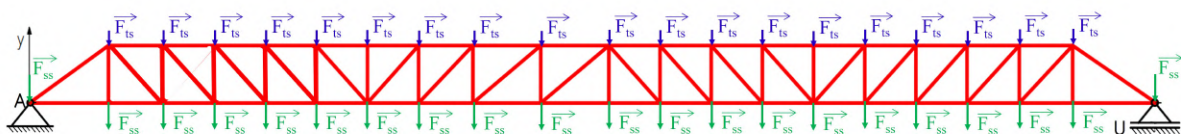
Řešením rovnice a tedy i hledaným průhybem je:

$$v_1 = 44,9 \text{ mm}, \quad (5.75)$$

ten bude později použit pro porovnání různých scénářů.

5.2 Řešení staticky určité úlohy (scénář 2)

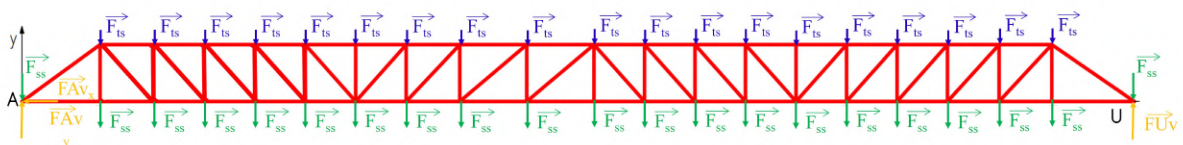
Druhá modifikace úlohy má stejné uložení k základovému tělesu jako scénář 1 (kapitola 5.1). Rozdíl spočívá ve skladbě prvních 4 prutů, které se liší. Stejné uspořádání prutů má lávka na levé straně. Geometrie modelu je zobrazena na obrázku 43.



Obrázek 43: Model zatížený silami (scénář 2)

5.2.1 Uvolnění a statický rozbor

Obrázek 44 ukazuje úplné vnější uvolnění soustavy.



Obrázek 44: Vnější úplné uvolnění (scénář 2)

Vazba ve styčnίκu A odebírá 2 stupně volnosti a vazba ve styčnίκu U 1 stupeň volnosti. Celkem tedy $\mu_e = 3$. Počet použitelných podmínek statické rovnováhy je pro 2D úlohy $\nu_e = 3$ (kapitola 2.5.1). Následující rovnice posuzuje vnitřní statickou určitost.

$$s_e = \mu_e - \nu_e = 0 \quad (5.76)$$

Úloha je externě staticky určitá.

Podle kapitoly 2.5.1 se vnitřní statická určitost vypočítá následovně. Počet prutů je $p = 77$ a počet styčnίκů je $k = 40$. Podle rovnice 2.2.

$$s_i = 77 - 2 \cdot 40 + 3 = 0 \quad (5.77)$$

Úloha je tedy vnitřně staticky určitá.

5.2.2 Statická rovnováha

Podmínky vnější statické rovnováhy jsou ve tvaru 5.78.

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M_{zA} = 0 \quad (5.78)$$

Po dosazení jsou rovnice stejné jako u předchozího scénáře. Reakční síly ve vazbách jsou tedy následující.

$$\begin{aligned} FAv_x &= 0 \text{ N} \\ FAv_y &= 31888 \text{ N} \\ FUV_y &= 31880 \text{ N} \end{aligned} \quad (5.79)$$

Podmínky statické rovnováhy pro jednotlivé styčnící mají následující tvary. Liší se pouze pro první styčnící (oproti scénáři 1).

$$A : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FA} + \vec{FAAc} + \vec{FAB} = \vec{0} \quad (5.80)$$

$$Ac : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FAc} + \vec{FAcA} + \vec{FAcB} + \vec{FAcBc} + \vec{FAcC} = \vec{0} \quad (5.81)$$

$$B : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FB} + \vec{FBA} + \vec{FBAc} + \vec{FBC} = \vec{0} \quad (5.82)$$

$$Bc : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FBc} + \vec{FBcAc} + \vec{FBcC} + \vec{FBcCc} + \vec{FBcD} = \vec{0} \quad (5.83)$$

$$C : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FC} + \vec{FCB} + \vec{FCBc} + \vec{FCD} + \vec{FCAc} = \vec{0} \quad (5.84)$$

$$Cc : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FCc} + \vec{FCcBc} + \vec{FCcD} + \vec{FCcDc} + \vec{FCcE} = \vec{0} \quad (5.85)$$

$$D : \sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{FD} + \vec{FDC} + \vec{FDCc} + \vec{FDE} + \vec{FDBc} = \vec{0} \quad (5.86)$$

$$Dc : \sum \vec{F} = \vec{0} : \overrightarrow{FDc} + \overrightarrow{FDcCc} + \overrightarrow{FDcE} + \overrightarrow{FDcEc} + \overrightarrow{FDcF} = \vec{0} \quad (5.87)$$

$$E : \sum \vec{F} = \vec{0} : \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FED} + \overrightarrow{FEDc} + \overrightarrow{FECc} + \overrightarrow{FEF} = \vec{0} \quad (5.88)$$

$$Ec : \sum \vec{F} = \vec{0} : \overrightarrow{FEc} + \overrightarrow{FEcDc} + \overrightarrow{FEcF} + \overrightarrow{FEcG} + \overrightarrow{FEcFc} = \vec{0} \quad (5.89)$$

$$F : \sum \vec{F} = \vec{0} : \overrightarrow{FF} + \overrightarrow{FFE} + \overrightarrow{FFEc} + \overrightarrow{FFG} + \overrightarrow{FFDc} = \vec{0} \quad (5.90)$$

...

Zbytek podmínek je stejný jako u scénáře 1 (kapitola 5.1.5).

5.2.3 Výsledné síly a napětí v prutech

V programu Matlab se opět vyřeší soustava 154 rovnic získaných ze 40ti styčníků a geometrie konstrukce. Výsledkem je 154 neznámých složek sil v prutech. Jejich znaménka se určí podle postupu popsáném ve scénáři 1 5.1.5.

Nyní se vyberou maximální (tah) a minimální (tlak) síly pro každý průřez. Zbylé síly není z hlediska výpočtu bezpečnosti nutné uvádět. Pro průřez U140 je to síla FKL v prutu KL . Tlak se v prutech s tímto průřezem nevyskytuje.

$$FKL = 157752 \text{ N} \quad (5.91)$$

Pro průřez L100 je to síla $FJcKc$ v prutu $IcJc$. Tah se v prutech s tímto průřezem nevyskytuje.

$$FJcKc = -156360 \text{ N} \quad (5.92)$$

Pro průřez L45 to jsou síly $FAcC$ a $FBcC$ v prutech AcC a BcC .

$$\begin{aligned} FAcC &= 36302 \text{ N} \\ FBcC &= -23485 \text{ N} \end{aligned} \quad (5.93)$$

Napětí se vypočítá stejně jak je uvedeno v kapitole 5.1.7.

$$\begin{aligned} \sigma_{FKL} &= 77 \text{ MPa} \\ \sigma_{FJcKc} &= -100 \text{ MPa} \\ \sigma_{FAcC} &= 84 \text{ MPa} \\ \sigma_{FBcC} &= -55 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (5.94)$$

Z toho největší napětí $\sigma_{FJcKc} = -100 \text{ MPa}$. Bezpečnost vzhledem k MSP k_k v rovnici 5.95.

$$k_{k2} = \frac{R_e}{|\sigma_{FJcKc}|} = \frac{195}{|-100|} = 1,95 \quad (5.95)$$

5.2.4 Průhyb

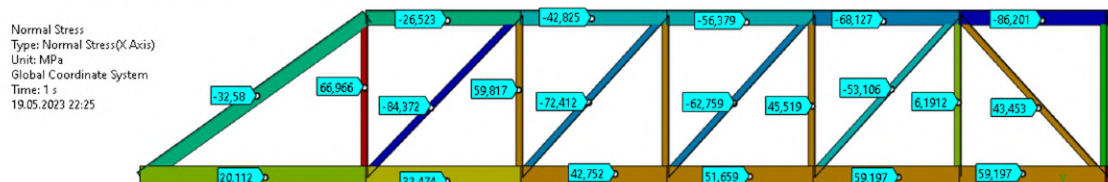
Do rovnic byla opět přidána nulová síla FKv_y , pomocí které byl spočítán průhyb stejným způsobem jako u scénáře 1. Průhyb tedy je:

$$v_2 = 46,2 \text{ mm} \quad (5.96)$$

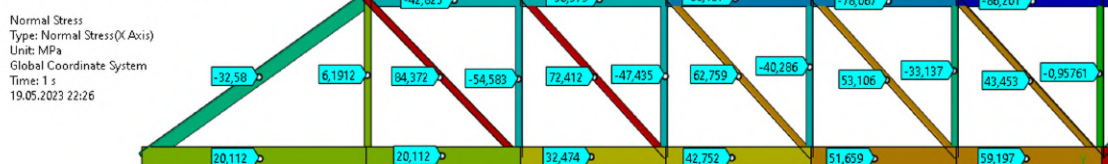
5.2.5 Srovnání s předchozím scénářem

Hlavním důvodem tvorby druhého scénáře je, že se liší skladba prutů na levé a na pravé straně konstrukce. Jak je zmíněno na začátku kapitoly, scénář 2 je modelem levé strany. Na obrázku 45 je zobrazena pravá a levá strana lávky. Pro obrázek bylo použito vykreslení pomocí MKP z kapitoly 6.1 a 6.2. To z toho důvodu, že jsou zde výsledky vykresleny u jednotlivých prutů a porovnání bude jednodušší. Výsledky jsou téměř totožné s řešením analytickým.

Pravá strana lávky (scénář 1)



Levá strana lávky (scénář 2)

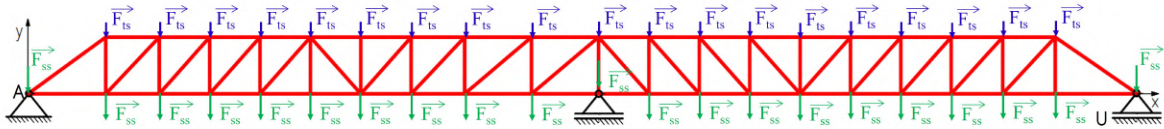


Obrázek 45: Porovnání pravé a levé strany lávky (scénář 1 a 2)

Z porovnání lze vyčíst, že jiná skladba prutů ovlivňuje především napětí v horních (L100) a spodních (U140) prutech. Pruty s průřezem L45 jsou pak místo na tlak namáhány na tah. To může mít negativní vliv při šíření trhlin, které se vlivem tahového napětí otvírají a šíří. U prutů s průřezem U140, které jsou namáhány na tahem, napětí pokleslo. Naopak u prutů s průřezem L100 napětí narůstá, ale pruty jsou namáhány na tlak. Nicméně v prutu AcC je kvůli této skladbě prutů největší napětí od tahu, takže skladba prutů na pravé straně (scénář 1) se jeví z hlediska bezpečnosti jako vhodnější. Ostatní pruty mimo tuto oblast na obrázku 45 příliš ovlivněny nejsou.

5.3 Řešení staticky neurčitě úlohy (scénář 3)

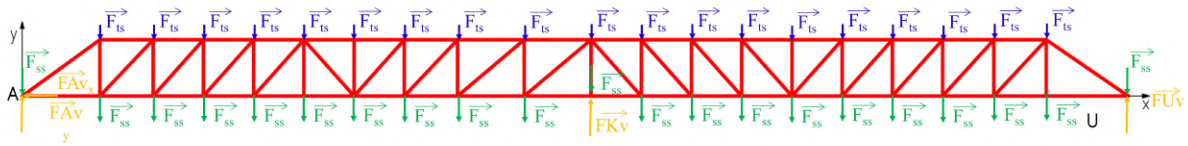
Další modifikace úlohy spočívá v přidání vazby se základovým tělesem. Konkrétně podpory v místě styčnicku K , který se nachází uprostřed a předpokládá se tam největší průhyb konstrukce. Zatížení zůstává stejné (od maximálního počtu chodců). Model je zobrazený na obrázku 46.



Obrázek 46: Model zatížený silami (scénář 3)

5.3.1 Uvolnění a statický rozbor

Obrázek 47 ukazuje úplné vnější uvolnění soustavy.



Obrázek 47: Vnější úplné uvolnění (scénář 3)

Vazba ve styčnicku A odebrává 2 stupně volnosti, ve styčnicku U 1 stupeň volnosti a přidaná vazba ve styčnicku K také 1 stupeň volnosti. Celkem tedy $\mu_e = 4$. Počet použitelných podmínek statické rovnováhy je pro 2D úlohy $\nu_e = 3$, jak je zmíněno v kapitole 2.5.1. Následující rovnice posuzuje vnější (externí) statickou určitost.

$$s_e = \mu_e - \nu_e = 1 \quad (5.97)$$

Úloha je 1x externě staticky neurčitá.

Vnitřní určitost se určí podle postupu v kapitole 2.5.1. Počet prutů je $p = 77$ a počet styčníků je $k = 40$. Podle rovnice 2.2.

$$s_i = 77 - 2 \cdot 40 + 3 = 0 \quad (5.98)$$

Úloha je tedy vnitřně staticky určitá.

5.3.2 Statická rovnováha

Podmínky vnější statické rovnováhy jsou ve tvaru 5.99.

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M_{zA} = 0 \quad (5.99)$$

Po dosazení jsou rovnice obdobné jako u předchozích scénářů, pouze je navíc přidán vliv sílového působení vazby K .

$$\sum F_x = FAv_x = 0 \quad (5.100)$$

$$\begin{aligned} \sum F_y = & FKv_y + FAv_y + FUv_y + FA_y + FB_y + FC_y + FD_y + FE_y + \dots \\ & \dots + FOc_y + FPc_y + FQc_y + FRC_y + FSc_y = 0 \end{aligned} \quad (5.101)$$

$$\sum M_{zA} = FKv_y \cdot AK_x + FUv_y \cdot AU_x + AB_x + \dots \\ \dots + FRc_y \cdot ARc_x + FSc_y \cdot ASc_x + FT_y \cdot AT_x + FU_y \cdot AU_x = 0 \quad (5.102)$$

Podmínky vnitřní statické rovnováhy mají následující tvary.

$$Ac : \sum \vec{F} = 0 : \vec{FA} + \vec{FAcA} + \vec{FAcB} + \vec{FAcBc} = \vec{0} \quad (5.103)$$

$$B : \sum \vec{F} = 0 : \vec{FB} + \vec{FBa} + \vec{FBaC} + \vec{FBbC} + \vec{FBcC} = \vec{0} \quad (5.104)$$

...

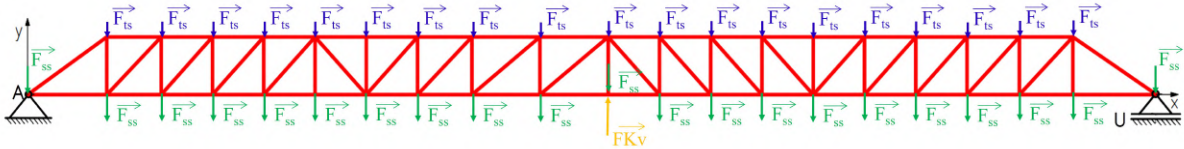
Podmínky jsou stejné jako u scénáře 1 (5.1.5). Liší se pouze podmínka pro styčník K .

$$K : \sum \vec{F} = 0 : \vec{FKv} + \vec{FK} + \vec{FKJ} + \vec{FKJc} + \vec{FKL} = \vec{0} \quad (5.105)$$

Nyní je 154 rovnic vnitřní statické rovnováhy a 3 vnější statické rovnováhy, dohromady 157 rovnic. Neznámých parametrů je však 158. Proto je nutné použít Castiglianovu větu (kapitola 2.8).

5.3.3 Částečné uvolnění

Úloha je $1 \times$ staticky neurčitá, částečné uvolnění je zobrazeno na obrázku 48.



Obrázek 48: Vnější částečné uvolnění (scénář 3)

Silové působení od vazby FKv v bodě K je neznámý parametr, pro který je potřeba určit rovnici pomocí Castiglianovy věty (kapitola 2.8). Deformační podmínka má následující tvar.

$$\frac{\partial W}{\partial FKv_y} = 0 \quad (5.106)$$

Pro určení energie napjatosti W v každém prutu je potřeba vyjádřit výsledné síly v prutech jako funkci síly FKv_y a vnějších zatížení. Na rozdíl od předchozích scénářů, kde nabývala hodnoty 0 N, tak u tohoto scénáře FKv_y nulová není. Složky vektorů prutů pak mají následující rovnice (spočítáno Matlabem).

$$FAAc_x = \frac{721421}{1059480} \cdot FKv_y + \frac{77614453}{5827140} \cdot F_{gs} + \frac{77614453}{5827140} \cdot F_{ws} \quad (5.107)$$

Konstanty, které násobí hodnoty sil jsou tvořeny dosazením známých geometrických rozměrů konstrukce. Rovnice jsou vypočteny všechny najednou a vyjádřeny programem Matlab. Při dosazení za známé síly F_{gs} a F_{ws} lze tvar rovnice zkrátit na:

$$FAAc_x = \frac{721421}{1059480} \cdot FKv_y + \frac{3281068775929013534002357}{80087602333483008000}, \quad (5.108)$$

druhý zlomek v tomto tvaru už není bezrozměrný, ale je v Newtonech, proto byl zvolen výpis pomocí bezrozměrných konstant. Toto rozhodnutí však nemá žádný vliv na následné řešení rovnic.

$$FAAc_y = \frac{953}{1962} \cdot FKv_y + \frac{102529}{10791} \cdot F_{gs} + \frac{102529}{10791} \cdot F_{ws} \quad (5.109)$$

$$FAB_x = -\frac{721421}{1059480} \cdot FKv_y - \frac{77614453}{5827140} \cdot F_{gs} - \frac{77614453}{5827140} \cdot F_{ws} \quad (5.110)$$

$$FAB_y = 0 \quad (5.111)$$

$$FAcB_x = 0 \quad (5.112)$$

$$FAcB_y = \frac{953}{1962} \cdot FKv_y + \frac{91738}{10791} \cdot F_{gs} + \frac{102529}{10791} \cdot F_{ws} \quad (5.113)$$

$$FAcBc_x = \frac{721421}{1059480} \cdot FKv_y + \frac{77614453}{5827140} \cdot F_{gs} + \frac{77614453}{5827140} \cdot F_{ws} \quad (5.114)$$

$$FAcBc_y = 0 \quad (5.115)$$

$$FBBc_x = \frac{12389}{26487} \cdot FKv_y + \frac{2385188}{291357} \cdot F_{gs} + \frac{2385188}{291357} \cdot F_{ws} \quad (5.116)$$

$$FBBc_y = \frac{953}{1962} \cdot FKv_y + \frac{91738}{10791} \cdot F_{gs} + \frac{91738}{10791} \cdot F_{ws} \quad (5.117)$$

$$FBC_x = -\frac{1216981}{1059480} \cdot FKv_y - \frac{125318213}{5827140} \cdot F_{gs} - \frac{125318213}{5827140} \cdot F_{ws} \quad (5.118)$$

$$FBC_y = 0 \quad (5.119)$$

$$FBcC_x = 0 \quad (5.120)$$

$$FBcC_y = \frac{953}{1962} \cdot FKv_y + \frac{80947}{10791} \cdot F_{gs} + \frac{91738}{10791} \cdot F_{ws} \quad (5.121)$$

$$FBcCc_x = \frac{1216981}{1059480} \cdot FKv_y + \frac{125318213}{5827140} \cdot F_{gs} + \frac{125318213}{5827140} \cdot F_{ws} \quad (5.122)$$

$$FBcCc_y = 0 \quad (5.123)$$

$$FCCc_x = \frac{46697}{105948} \cdot FKv_y + \frac{3966403}{582714} \cdot F_{gs} + \frac{3966403}{582714} \cdot F_{ws} \quad (5.124)$$

$$FCCc_y = \frac{953}{1962} \cdot FKv_y + \frac{80947}{10791} \cdot F_{gs} + \frac{80947}{10791} \cdot F_{ws} \quad (5.125)$$

$$FCD_x = -\frac{561317}{353160} \cdot FKv_y - \frac{54994081}{1942380} \cdot F_{gs} - \frac{54994081}{1942380} \cdot F_{ws} \quad (5.126)$$

$$FCD_y = 0 \quad (5.127)$$

$$FCcD_x = 0 \quad (5.128)$$

$$FCcD_y = \frac{953}{1962} \cdot FKv_y + \frac{70156}{10791} \cdot F_{gs} + \frac{80947}{10791} \cdot F_{ws} \quad (5.129)$$

$$FCcDc_x = \frac{561317}{353160} \cdot FKv_y + \frac{54994081}{1942380} \cdot F_{gs} + \frac{54994081}{1942380} \cdot F_{ws} \quad (5.130)$$

$$FCcDc_y = 0 \quad (5.131)$$

$$FDDc_x = \frac{46697}{105948} \cdot FKv_y + \frac{1718822}{291357} \cdot F_{gs} + \frac{1718822}{291357} \cdot F_{ws} \quad (5.132)$$

$$FDDc_y = \frac{953}{1962} \cdot FKv_y + \frac{70156}{10791} \cdot F_{gs} + \frac{70156}{10791} \cdot F_{ws} \quad (5.133)$$

$$FDE_x = -\frac{2150921}{1059480} \cdot FKv_y - \frac{199358683}{5827140} \cdot F_{gs} - \frac{199358683}{5827140} \cdot F_{ws} \quad (5.134)$$

$$FDE_y = 0 \quad (5.135)$$

$$FDcE_x = 0 \quad (5.136)$$

$$FDcE_y = \frac{953}{1962} \cdot FKv_y + \frac{59365}{10791} \cdot F_{gs} + \frac{70156}{10791} \cdot F_{ws} \quad (5.137)$$

$$FDcEc_x = \frac{2150921}{1059480} \cdot FKv_y + \frac{199358683}{5827140} \cdot F_{gs} + \frac{199358683}{5827140} \cdot F_{ws} \quad (5.138)$$

$$FDcEc_y = 0 \quad (5.139)$$

$$FEEc_x = \frac{46697}{105948} \cdot FKv_y + \frac{2908885}{582714} \cdot F_{gs} + \frac{2908885}{582714} \cdot F_{ws} \quad (5.140)$$

$$FEEc_y = \frac{953}{1962} \cdot FKv_y + \frac{59365}{10791} \cdot F_{gs} + \frac{59365}{10791} \cdot F_{ws} \quad (5.141)$$

$$FEF_x = -\frac{2617891}{1059480} \cdot FKv_y - \frac{228447533}{5827140} \cdot F_{gs} - \frac{228447533}{5827140} \cdot F_{ws} \quad (5.142)$$

$$FEF_y = 0 \quad (5.143)$$

$$FEcF_x = 0 \quad (5.144)$$

$$FEcF_y = F_{ws} \quad (5.145)$$

$$FEcF_{c_x} = \frac{1028287}{353160} \cdot FKv_y + \frac{84082931}{1942380} \cdot F_{gs} + \frac{84082931}{1942380} \cdot F_{ws} \quad (5.146)$$

$$FEcF_{c_y} = 0 \quad (5.147)$$

$$FEcG_x = -\frac{46697}{105948} \cdot FKv_y - \frac{1190063}{291357} \cdot F_{gs} - \frac{1190063}{291357} \cdot F_{ws} \quad (5.148)$$

$$FEcG_y = \frac{953}{1962} \cdot FKv_y + \frac{48574}{10791} \cdot F_{gs} + \frac{48574}{10791} \cdot F_{ws} \quad (5.149)$$

$$FFG_x = -\frac{2617891}{1059480} \cdot FKv_y - \frac{228447533}{5827140} \cdot F_{gs} - \frac{228447533}{5827140} \cdot F_{ws} \quad (5.150)$$

$$FFG_y = 0 \quad (5.151)$$

$$FFcG_x = 0 \quad (5.152)$$

$$FFcG_y = -F_{gs} \quad (5.153)$$

$$FFcG_{c_x} = \frac{1028287}{353160} \cdot FKv_y + \frac{84082931}{1942380} \cdot F_{gs} + \frac{84082931}{1942380} \cdot F_{ws} \quad (5.154)$$

$$FFcG_{c_y} = 0 \quad (5.155)$$

$$FGG_{c_x} = \frac{46697}{105948} \cdot FKv_y + \frac{1851367}{582714} \cdot F_{gs} + \frac{1851367}{582714} \cdot F_{ws} \quad (5.156)$$

$$FGG_{c_y} = \frac{953}{1962} \cdot FKv_y + \frac{37783}{10791} \cdot F_{gs} + \frac{37783}{10791} \cdot F_{ws} \quad (5.157)$$

$$FGH_x = -\frac{3551831}{1059480} \cdot FKv_y - \frac{270762463}{5827140} \cdot F_{gs} - \frac{270762463}{5827140} \cdot F_{ws} \quad (5.158)$$

$$FGH_y = 0 \quad (5.159)$$

$$FGcH_x = 0 \quad (5.160)$$

$$FGcH_y = \frac{953}{1962} \cdot FKv_y + \frac{26992}{10791} \cdot F_{gs} + \frac{37783}{10791} \cdot F_{ws} \quad (5.161)$$

$$FGcHc_x = \frac{3551831}{1059480} \cdot FKv_y + \frac{270762463}{5827140} \cdot F_{gs} + \frac{270762463}{5827140} \cdot F_{ws} \quad (5.162)$$

$$FGcHc_y = 0 \quad (5.163)$$

$$FHHc_x = \frac{12389}{26487} \cdot FKv_y + \frac{701792}{291357} \cdot F_{gs} + \frac{701792}{291357} \cdot F_{ws} \quad (5.164)$$

$$FHHc_y = \frac{953}{1962} \cdot FKv_y + \frac{26992}{10791} \cdot F_{gs} + \frac{26992}{10791} \cdot F_{ws} \quad (5.165)$$

$$FHI_x = -\frac{4047391}{1059480} \cdot FKv_y - \frac{284798303}{5827140} \cdot F_{gs} - \frac{284798303}{5827140} \cdot F_{ws} \quad (5.166)$$

$$FHI_y = 0 \quad (5.167)$$

$$FHcI_x = 0 \quad (5.168)$$

$$FHcI_y = \frac{953}{1962} \cdot FKv_y + \frac{16201}{10791} \cdot F_{gs} + \frac{26992}{10791} \cdot F_{ws} \quad (5.169)$$

$$FHcIc_x = \frac{4047391}{1059480} \cdot FKv_y + \frac{284798303}{5827140} \cdot F_{gs} + \frac{284798303}{5827140} \cdot F_{ws} \quad (5.170)$$

$$FHcIc_y = 0 \quad (5.171)$$

$$FIIc_x = \frac{61945}{105948} \cdot FKv_y + \frac{1053065}{582714} \cdot F_{gs} + \frac{1053065}{582714} \cdot F_{ws} \quad (5.172)$$

$$FIIc_y = \frac{953}{1962} \cdot FKv_y + \frac{16201}{10791} \cdot F_{gs} + \frac{16201}{10791} \cdot F_{ws} \quad (5.173)$$

$$FIJ_x = -\frac{4666841}{1059480} \cdot FKv_y - \frac{295328953}{5827140} \cdot F_{gs} - \frac{295328953}{5827140} \cdot F_{ws} \quad (5.174)$$

$$FIJ_y = 0 \quad (5.175)$$

$$FIcJ_x = 0 \quad (5.176)$$

$$FIcJ_y = \frac{953}{1962} \cdot FKv_y + \frac{5410}{10791} \cdot F_{gs} + \frac{16201}{10791} \cdot F_{ws} \quad (5.177)$$

$$FIcJc_x = \frac{4666841}{1059480} \cdot FKv_y + \frac{295328953}{5827140} \cdot F_{gs} + \frac{295328953}{5827140} \cdot F_{ws} \quad (5.178)$$

$$FIcJc_y = 0 \quad (5.179)$$

$$FJJc_x = \frac{27637}{47088} \cdot FKv_y + \frac{78445}{129492} \cdot F_{gs} + \frac{78445}{129492} \cdot F_{ws} \quad (5.180)$$

$$FJJc_y = \frac{953}{1962} \cdot FKv_y + \frac{5410}{10791} \cdot F_{gs} + \frac{5410}{10791} \cdot F_{ws} \quad (5.181)$$

$$FJK_x = -\frac{10577347}{2118960} \cdot FKv_y - \frac{13584499}{264870} \cdot F_{gs} - \frac{13584499}{264870} \cdot F_{ws} \quad (5.182)$$

$$FJK_y = 0 \quad (5.183)$$

$$FJcK_x = 0 \quad (5.184)$$

$$FJcK_y = FKv_y + F_{ws} \quad (5.185)$$

$$FJcKc_x = \frac{9588527}{2118960} \cdot FKv_y + \frac{74055572}{1456785} \cdot F_{gs} + \frac{74055572}{1456785} \cdot F_{ws} \quad (5.186)$$

$$FJcKc_y = 0 \quad (5.187)$$

$$FJcL_x = \frac{49441}{105948} \cdot FKv_y + \frac{263669}{582714} \cdot F_{gs} + \frac{263669}{582714} \cdot F_{ws} \quad (5.188)$$

$$FJcL_y = -\frac{1009}{1962} \cdot FKv_y - \frac{5381}{10791} \cdot F_{gs} - \frac{5381}{10791} \cdot F_{ws} \quad (5.189)$$

$$FKL_x = -\frac{10577347}{2118960} \cdot FKv_y - \frac{13584499}{264870} \cdot F_{gs} - \frac{13584499}{264870} \cdot F_{ws} \quad (5.190)$$

$$FKL_y = 0 \quad (5.191)$$

$$FKcL_x = 0 \quad (5.192)$$

$$FKcL_y = \frac{1009}{1962} \cdot FKv_y + \frac{5381}{10791} \cdot F_{gs} + \frac{16172}{10791} \cdot F_{ws} \quad (5.193)$$

$$FKcLc_x = \frac{955523}{235440} \cdot FKv_y + \frac{2669426}{53955} \cdot F_{gs} + \frac{2669426}{53955} \cdot F_{ws} \quad (5.194)$$

$$FKcLc_y = 0 \quad (5.195)$$

$$FKcM_x = \frac{49441}{105948} \cdot FKv_y + \frac{396214}{291357} \cdot F_{gs} + \frac{396214}{291357} \cdot F_{ws} \quad (5.196)$$

$$FKcM_y = -\frac{1009}{1962} \cdot FKv_y - \frac{16172}{10791} \cdot F_{gs} - \frac{16172}{10791} \cdot F_{ws} \quad (5.197)$$

$$FLM_x = -\frac{9588527}{2118960} \cdot FKv_y - \frac{74055572}{1456785} \cdot F_{gs} - \frac{74055572}{1456785} \cdot F_{ws} \quad (5.198)$$

$$FLM_y = 0 \quad (5.199)$$

$$FLcM_x = 0 \quad (5.200)$$

$$FLcM_y = \frac{1009}{1962} \cdot FKv_y + \frac{16172}{10791} \cdot F_{gs} + \frac{26963}{10791} \cdot F_{ws} \quad (5.201)$$

$$FLcMc_x = \frac{7610887}{2118960} \cdot FKv_y + \frac{137543069}{2913570} \cdot F_{gs} + \frac{137543069}{2913570} \cdot F_{ws} \quad (5.202)$$

$$FLcMc_y = 0 \quad (5.203)$$

$$FLcN_x = \frac{49441}{105948} \cdot FKv_y + \frac{1321187}{582714} \cdot F_{gs} + \frac{1321187}{582714} \cdot F_{ws} \quad (5.204)$$

$$FLcN_y = -\frac{1009}{1962} \cdot FKv_y - \frac{26963}{10791} \cdot F_{gs} - \frac{26963}{10791} \cdot F_{ws} \quad (5.205)$$

$$FMN_x = -\frac{955523}{235440} \cdot FKv_y - \frac{2669426}{53955} \cdot F_{gs} - \frac{2669426}{53955} \cdot F_{ws} \quad (5.206)$$

$$FMN_y = 0 \quad (5.207)$$

$$FMcN_x = 0 \quad (5.208)$$

$$FMcN_y = \frac{1009}{1962} \cdot FKv_y + \frac{26963}{10791} \cdot F_{gs} + \frac{37754}{10791} \cdot F_{ws} \quad (5.209)$$

$$FMcNc_x = \frac{6622067}{2118960} \cdot FKv_y + \frac{128293339}{2913570} \cdot F_{gs} + \frac{128293339}{2913570} \cdot F_{ws} \quad (5.210)$$

$$FMcNc_y = 0 \quad (5.211)$$

$$FMcO_x = \frac{49441}{105948} \cdot FKv_y + \frac{924973}{291357} \cdot F_{gs} + \frac{924973}{291357} \cdot F_{ws} \quad (5.212)$$

$$FMcO_y = -\frac{1009}{1962} \cdot FKv_y - \frac{37754}{10791} \cdot F_{gs} - \frac{37754}{10791} \cdot F_{ws} \quad (5.213)$$

$$FNO_x = -\frac{7610887}{2118960} \cdot FKv_y - \frac{137543069}{2913570} \cdot F_{gs} - \frac{137543069}{2913570} \cdot F_{ws} \quad (5.214)$$

$$FNO_y = 0 \quad (5.215)$$

$$FNcO_x = 0 \quad (5.216)$$

$$FNcO_y = -F_{gs} \quad (5.217)$$

$$FNcOc_x = \frac{6622067}{2118960} \cdot FKv_y + \frac{128293339}{2913570} \cdot F_{gs} + \frac{128293339}{2913570} \cdot F_{ws} \quad (5.218)$$

$$FNcOc_y = 0 \quad (5.219)$$

$$FOOc_x = -\frac{49441}{105948} \cdot FKv_y - \frac{2378705}{582714} \cdot F_{gs} - \frac{2378705}{582714} \cdot F_{ws} \quad (5.220)$$

$$FOOc_y = -\frac{1009}{1962} \cdot FKv_y - \frac{48545}{10791} \cdot F_{gs} - \frac{48545}{10791} \cdot F_{ws} \quad (5.221)$$

$$FOP_x = -\frac{1877749}{706320} \cdot FKv_y - \frac{19399969}{485595} \cdot F_{gs} - \frac{19399969}{485595} \cdot F_{ws} \quad (5.222)$$

$$FOP_y = 0 \quad (5.223)$$

$$FOcP_x = 0 \quad (5.224)$$

$$FOcP_y = -\frac{1009}{1962} \cdot FKv_y - \frac{59336}{10791} \cdot F_{gs} - \frac{48545}{10791} \cdot F_{ws} \quad (5.225)$$

$$FOcPc_x = \frac{1877749}{706320} \cdot FKv_y + \frac{19399969}{485595} \cdot F_{gs} + \frac{19399969}{485595} \cdot F_{ws} \quad (5.226)$$

$$FOcPc_y = 0 \quad (5.227)$$

$$FPPc_x = -\frac{49441}{105948} \cdot FKv_y - \frac{1453732}{291357} \cdot F_{gs} - \frac{1453732}{291357} \cdot F_{ws} \quad (5.228)$$

$$FPPc_y = -\frac{1009}{1962} \cdot FKv_y - \frac{59336}{10791} \cdot F_{gs} - \frac{59336}{10791} \cdot F_{ws} \quad (5.229)$$

$$FPQ_x = -\frac{4644427}{2118960} \cdot FKv_y - \frac{50931247}{1456785} \cdot F_{gs} - \frac{50931247}{1456785} \cdot F_{ws} \quad (5.230)$$

$$FPQ_y = 0 \quad (5.231)$$

$$FPcQ_x = 0 \quad (5.232)$$

$$FPcQ_y = -\frac{1009}{1962} \cdot FKv_y - \frac{70127}{10791} \cdot F_{gs} - \frac{59336}{10791} \cdot F_{ws} \quad (5.233)$$

$$FPcQc_x = \frac{4644427}{2118960} \cdot FKv_y + \frac{50931247}{1456785} \cdot F_{gs} + \frac{50931247}{1456785} \cdot F_{ws} \quad (5.234)$$

$$FPcQc_y = 0 \quad (5.235)$$

$$FQQc_x = -\frac{49441}{105948} \cdot FKv_y - \frac{3436223}{582714} \cdot F_{gs} - \frac{3436223}{582714} \cdot F_{ws} \quad (5.236)$$

$$FQQc_y = -\frac{1009}{1962} \cdot FKv_y - \frac{70127}{10791} \cdot F_{gs} - \frac{70127}{10791} \cdot F_{ws} \quad (5.237)$$

$$FQR_x = -\frac{3655607}{2118960} \cdot FKv_y - \frac{84681379}{2913570} \cdot F_{gs} - \frac{84681379}{2913570} \cdot F_{ws} \quad (5.238)$$

$$FQR_y = 0 \quad (5.239)$$

$$FQcR_x = 0 \quad (5.240)$$

$$FQcR_y = -\frac{1009}{1962} \cdot FKv_y - \frac{80918}{10791} \cdot F_{gs} - \frac{70127}{10791} \cdot F_{ws} \quad (5.241)$$

$$FQcRc_x = \frac{3655607}{2118960} \cdot FKv_y + \frac{84681379}{2913570} \cdot F_{gs} + \frac{84681379}{2913570} \cdot F_{ws} \quad (5.242)$$

$$FQcRc_y = 0 \quad (5.243)$$

$$FRRc_x = -\frac{25225}{52974} \cdot FKv_y - \frac{2022950}{291357} \cdot F_{gs} - \frac{2022950}{291357} \cdot F_{ws} \quad (5.244)$$

$$FRRc_y = -\frac{1009}{1962} \cdot FKv_y - \frac{80918}{10791} \cdot F_{gs} - \frac{80918}{10791} \cdot F_{ws} \quad (5.245)$$

$$FRS_x = -\frac{2646607}{2118960} \cdot FKv_y - \frac{64451879}{2913570} \cdot F_{gs} - \frac{64451879}{2913570} \cdot F_{ws} \quad (5.246)$$

$$FRS_y = 0 \quad (5.247)$$

$$FRcS_x = 0 \quad (5.248)$$

$$FRcS_y = -\frac{1009}{1962} \cdot FKv_y - \frac{91709}{10791} \cdot F_{gs} - \frac{80918}{10791} \cdot F_{ws} \quad (5.249)$$

$$FRcSc_x = \frac{2646607}{2118960} \cdot FKv_y + \frac{64451879}{2913570} \cdot F_{gs} + \frac{64451879}{2913570} \cdot F_{ws} \quad (5.250)$$

$$FRcSc_y = 0 \quad (5.251)$$

$$FSSc_x = -\frac{64576}{132435} \cdot FKv_y - \frac{11738752}{1456785} \cdot F_{gs} - \frac{11738752}{1456785} \cdot F_{ws} \quad (5.252)$$

$$FSSc_y = -\frac{1009}{1962} \cdot FKv_y - \frac{91709}{10791} \cdot F_{gs} - \frac{91709}{10791} \cdot F_{ws} \quad (5.253)$$

$$FST_x = -\frac{537797}{706320} \cdot FKv_y - \frac{2731625}{194238} \cdot F_{gs} - \frac{2731625}{194238} \cdot F_{ws} \quad (5.254)$$

$$FST_y = 0 \quad (5.255)$$

$$FScT_x = 0 \quad (5.256)$$

$$FScT_y = F_{ws} \quad (5.257)$$

$$FScU_x = \frac{537797}{706320} \cdot FKv_y + \frac{2731625}{194238} \cdot F_{gs} + \frac{2731625}{194238} \cdot F_{ws} \quad (5.258)$$

$$FScU_y = -\frac{1009}{1962} \cdot FKv_y - \frac{102500}{10791} \cdot F_{gs} - \frac{102500}{10791} \cdot F_{ws} \quad (5.259)$$

$$FTU_x = -\frac{537797}{706320} \cdot FKv_y - \frac{2731625}{194238} \cdot F_{gs} - \frac{2731625}{194238} \cdot F_{ws} \quad (5.260)$$

$$FTU_y = 0 \quad (5.261)$$

$$FUv_x = 0 \quad (5.262)$$

$$FUv_y = -\frac{1009}{1962} \cdot FKv_y - \frac{102500}{10791} \cdot F_{gs} - \frac{113291}{10791} \cdot F_{ws} \quad (5.263)$$

$$FAv_x = 0 \quad (5.264)$$

$$FAv_y = -\frac{953}{1962} \cdot FKv_y - \frac{102529}{10791} \cdot F_{gs} - \frac{113320}{10791} \cdot F_{ws} \quad (5.265)$$

Po dosazení za síly F_{gs} a F_{ws} určené v kapitole 5.1. A následné dosazení do vztahu určujícího energii v prutu, který má následující tvar pro všechny pruty.

$$\sum_{i=1}^{77} \frac{\sqrt{F_{ix}^2 + F_{iy}^2}}{E_i \cdot S_i} \cdot \frac{\partial \sqrt{F_{ix}^2 + F_{iy}^2}}{\partial FKv_y} \cdot L_i = 0 \quad (5.266)$$

Chybějící rovnice má následující tvar 5.267. V rovnici je 77 analogických vztahů a není nutné je vypisovat.

$$\frac{\sqrt{FAAc_x^2 + FAAc_y^2}}{E \cdot SL100} \cdot \frac{\partial \sqrt{FAAc_x^2 + FAAc_y^2}}{\partial FKv_y} \cdot L_{AAc} + \dots \\ \dots + \frac{\sqrt{FTU_x^2 + FTU_y^2}}{E \cdot SU140} \cdot \frac{\partial \sqrt{FTU_x^2 + FTU_y^2}}{\partial FKv_y} \cdot L_{TU} = 0 \quad (5.267)$$

Kde L_i jsou opět délky jednotlivých prutů. Výsledkem této rovnice o jedné neznámé FKv_y je:

$$FKv_y = 37612N \quad (5.268)$$

Zápis v Matlabu:

```
FAAc = [sol2(1); sol2(2)];
FAB = [sol2(3); sol2(4)];
...

FAAc = sqrt(FAAc(1)^2+FAAc(2)^2);
FAB = sqrt(FAB(1)^2+FAB(2)^2);
...

castFAAc =(FAAc/SL100)*diff(FAAc,FKv(2))*sqrt(AAc(1)^2+AAc(2)^2);

castFAB = (FAB/SU140)*diff(FAB,FKv(2))*sqrt(AB(1)^2+AB(2)^2);
...

CastiglianPrava=castFAAc + castFAB + castFAcB + ...
... + castFSSc + castFST + castFScT + castFScU ;
```

```
CastiglianLeva=Etah*0;

Castiglian=solve([CastiglianPrava==CastiglianLeva],FKv(2))

CastSub = subs(Castiglian,[FKv1],[0])

FKvROUND=round(CastSub,5)
```

Nyní se hodnota dosadí do předchozích rovnic a pomocí algoritmu popsaném v kapitole 5.1.6 se určí síly a příslušná znaménka. Síly, kterými vazby působí na konstrukci.

$$\begin{aligned}FAv_x &= 0 \text{ N} \\FAv_y &= 13619 \text{ N} \\FUV_y &= 12537 \text{ N} \\FKv_y &= 37612 \text{ N}\end{aligned}\tag{5.269}$$

Z řešení rovnic jsou známy všechny³ síly v prutech. Vyberou se ale pouze maximální (tah) a minimální (tlak) síly pro každý průřez, ostatní není z hlediska výpočtu bezpečnosti nutné uvádět. Pro průřez U140 je to síla FDE v prutu DE . Tlak se v prutech s tímto průřezem nevyskytuje.

$$FDE = 28872 \text{ N}\tag{5.270}$$

Pro průřez L100 je to síla $FDcEc$ v prutu $DcEc$. Tah se v prutech s tímto průřezem nevyskytuje.

$$FDcEc = -28872 \text{ N}\tag{5.271}$$

³Jako u scénáře 1, kde jsou vypsané všechny.

Pro průřez L45 to jsou síly FJc a $FJcK$ v prutech Jc a JcK .

$$\begin{aligned} FJc &= 26236 \text{ N} \\ FJcK &= -34948 \text{ N} \end{aligned} \quad (5.272)$$

Napětí se vypočítá opět tak, jak je uvedeno v kapitole 5.1.7.

$$\begin{aligned} \sigma_{FDE} &= 14 \text{ MPa} \\ \sigma_{FDcEc} &= -18 \text{ MPa} \\ \sigma_{FJc} &= 61 \text{ MPa} \\ \sigma_{FJcK} &= -81 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (5.273)$$

Největší napětí je pak $\sigma_{FJcK} = -81 \text{ MPa}$ na prutu JcK . Bezpečnost vzhledem k MSP k_k je dána rovnicí 5.274.

$$k_{k3} = \frac{R_e}{|\sigma_{FJcK}|} = \frac{195}{|-81|} = 2,40 \quad (5.274)$$

5.3.4 Průhyb

Tentokrát už určení průhybu v místě styčnicku K postrádá význam, protože je zde vazba, která posuv zamezuje. Ta nám ale zároveň rozděluje konstrukci na dvě části a u každé z nich je nutné určit posuv prostředního styčnicku. Z těchto důvodů jsou ke kontrole vybrány styčnický F a P nacházející se přibližně v $\frac{1}{4}$ a ve $\frac{3}{4}$ konstrukce, kde se očekává největší průhyb.

Opět jako u scénáře 1 je napsána Castiglianova věta:

$$v_F = \frac{\partial W}{\partial FFv_y} = \sum_{i=1}^{77} \frac{\sqrt{F_{ix}^2 + F_{iy}^2}}{E_i \cdot S_i} \cdot \frac{\partial \sqrt{F_{ix}^2 + F_{iy}^2}}{\partial FFv_y} \cdot L_i, \quad (5.275)$$

respektive

$$v_P = \frac{\partial W}{\partial FPv_y} = \sum_{i=1}^{77} \frac{\sqrt{F_{ix}^2 + F_{iy}^2}}{E_i \cdot S_i} \cdot \frac{\partial \sqrt{F_{ix}^2 + F_{iy}^2}}{\partial FPv_y} \cdot L_i, \quad (5.276)$$

a tyto rovnice budou řešeny postupně. Tedy prve budou vyjádřeny vnitřní síly prutů jako funkce síly FFv_y a spočítán průhyb. Poté analogicky jako funkce síly FPv_y a z nich vypočten průhyb. Obě síly jsou samozřejmě rovny nule. Z postupně řešených rovnic pak vyplývá, že průhyby jsou:

$$v_{3F} = 3,55 \text{ mm} \quad (5.277)$$

a

$$v_{3P} = 2,89 \text{ mm} \quad (5.278)$$

5.3.5 Porovnání s předchozími scénáři

Tento scénář pojednává o přidání pilíře do poloviny konstrukce, pod styčnick K. Nejvíce se přidání tohoto pilíře projevilo v průhybu konstrukce, který oproti scénářům 1 a 2 poklesl z 45 mm na pouhé 4 mm. Jak zle vidět v tabulce 2, také se snížilo napětí, tedy zvýšila se bezpečnost, a to z 1,95 na 2,41. Ačkoliv přidáním pilíře by se zvýšila bezpečnost, tak

realizace tohoto pilíře by byla náročná z důvodu jeho umístění v proudící řece. Navíc dva pilíře na okraji řeky se jeví jako dostačující.

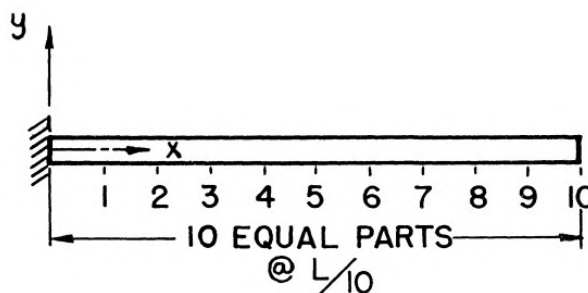
Tabulka 2: Porovnání scénáře 1, 2 a 3

	Scénář 1	Scénář 2	Scénář 3
Průhyb [mm]	44,9	46,2	3,55
Max. napětí (tah) [MPa]	84	84	61
Min. napětí (tlak) [MPa]	-100	-100	-81
Bezpečnost k_k [-]	1,95	1,95	2,41

6 Numerické řešení pomocí MKP

Ve snaze automatizovat řešení prutových soustav řecký inženýr John Argyris jako první použil numerickou cestu k výpočtu prutových soustav v roce 1954 [35]. Naprogramováním tohoto algoritmu se získají stejné rovnice jako nyní používá MKP. Přesto je za základ MKP považován výpočet v článku z časopisu Journal of the Aeronautical sciences z roku 1956 [35]. Článek se věnuje výpočtu křídla letadla, které je rozděleno na několik částí, ale na demonstraci MKP je zde uveden prut zobrazený na obrázku 49 [36]. Zde je popsána matice tuhosti a další náležitosti popsané v kapitole 2.11 [36]. Také je zde zmíněno, že zvyšováním počtu uzlů se zvyšuje přesnost výsledků [36]. To ale bylo pouze na základě pozorování a porovnávání. Matematicky to bylo potvrzeno až v roce 1968, kdy profesori M. Zlámal a A. Ženíšek z VUT potvrdili konvergenci této metody [35].

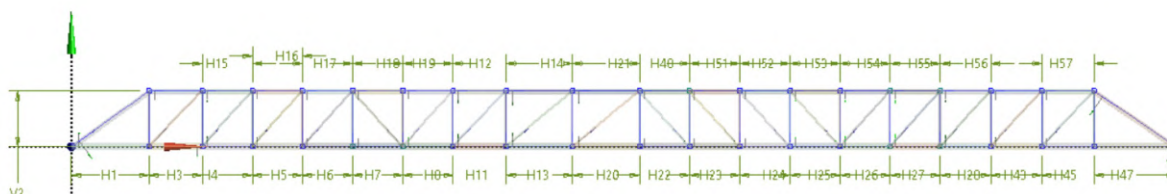
Na přelomu 60. a 70. let se začaly vyvíjet MKP programy pro komerční použití [35]. Konkrétně program Ansys, použitý v této práci, byl od roku 1970 vyvíjen americkým inženýrem J. Swansonem [37]. První verze programu byla Ansys Rev. 2 a byl u ní zahrnut uživatelský servis a podpora [37]. Další verze následovala v roce 1977 [37]. Pro tuto práci je použita verze programu Ansys Workbench 2022 R2. Pro modelování je využit jeho modul DesignModeler a k výpočtům Mechanical Enterprise.



Obrázek 49: Ukázka prutu ze zmíněného článku (1956) [36]

6.1 Numerické řešení staticky určité úlohy (scénář 1)

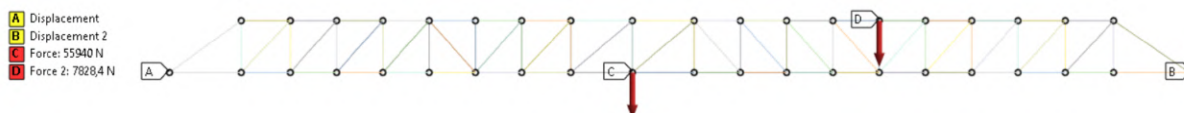
Zatížení i geometrie vychází z modelu (scénář 1), který je na obrázku 38. Jedná se tedy o staticky určitou prutovou soustavu. Použity budou prvky Link, které odpovídají prutům prutové soustavy a přenáší pouze tah a tlak. Příčné průřezy¹ jsou nakresleny podle příslušných vyhledaných norem dle [24]. Na obrázku 50 je vidět prutová konstrukce v modulu DesignModeler.



Obrázek 50: Geometrický model (scénář 1)

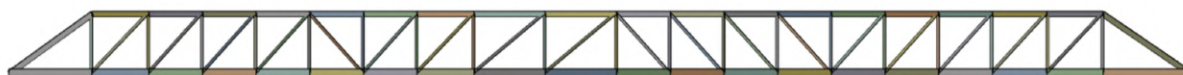
¹V programu Ansys nazývány cross sections.

Po vytvoření prutů k nim byly následně přiřazeny příslušné průřezy. Protože se jedná o prutovou soustavu, typ analýzy je 3D. Modul pružnosti v tahu $E = 205 \text{ GPa}$ [24] [38]². Poissonovo číslo $\mu = 0,3$ pro konstrukční ocel třídy 11 a 12 dle [24]³. Následně v modulu Mechanical byly prutové prvky nastaveny jako Link. Toto nastavení umožní jednotlivým prutům natáčení okolo styčníků a zajistí, že pruty přenáší pouze tah a tlak. Numerické řešení scénáře 1 je pouze verifikací analytického výpočtu provedeného v kapitole 5.1. Zatížení i vazby se tedy shodují s obrázkem 38. V programu Ansys je toto nastavení zobrazeno na obrázku 51.



Obrázek 51: Vazby a zatížení modelu (scénář 1)

Jedná se o prvky Link, počet prvků v mesh síti tedy odpovídá počtu prutů v prutové soustavě a to je 77. Síť konečných prvků je zobrazena na obrázku 52.

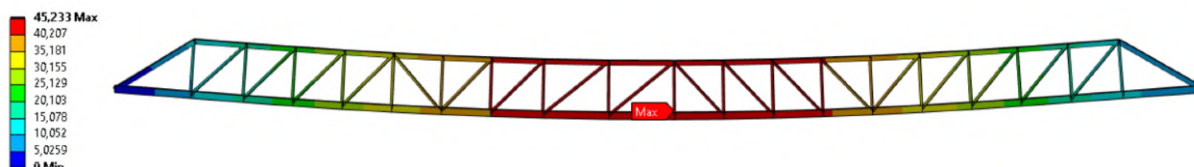


Obrázek 52: Mesh (scénář 1)

Vykreslené normálové síly v jednotlivých prutech jsou na obrázku 53, napětí se nachází na obrázku 54. Síly působící ve vazbách nabývají následujících hodnot 6.1⁴.

$$\begin{aligned} FAv_x &= 0 \text{ N} \\ FAv_y &= 31888 \text{ N} \\ FUV_y &= 31880 \text{ N} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Následuje určení maximálního průhybu celé konstrukce. Ten se nachází ve styčniku K a je přibližně 45,2 mm. Na obrázku 55 je zobrazena celá deformace prutové soustavy. Deformace je $12\times$ zvětšena pro lepší přehlednost.

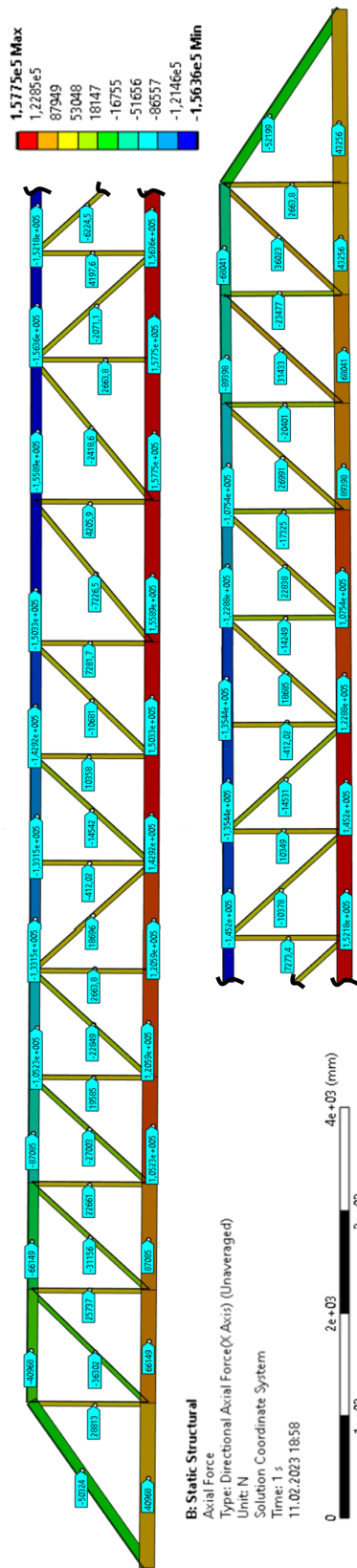


Obrázek 55: Deformace konstrukce (scénář 1)

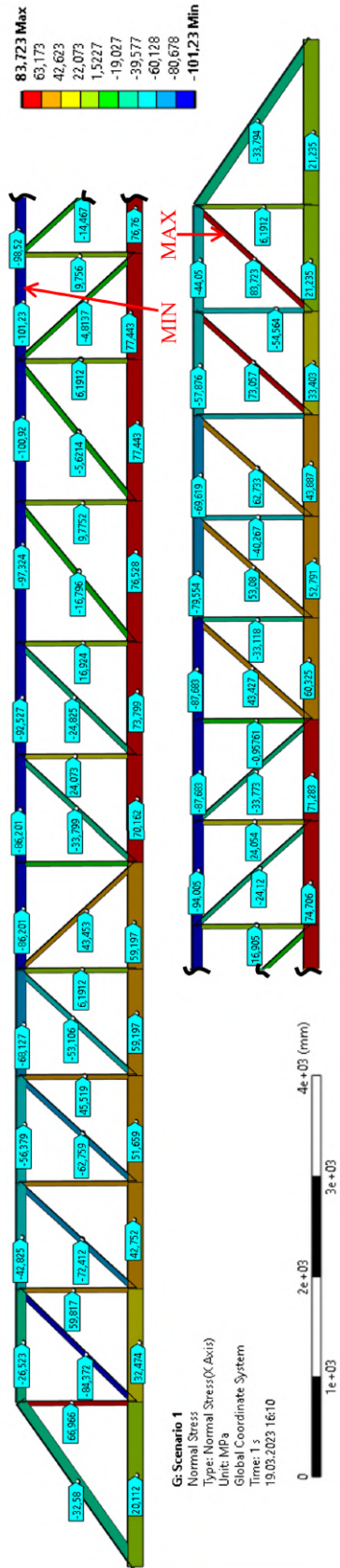
²Dle [23] ocel 11 375 odpovídá oceli Fe 360 B ISO630:1980.

³Modul pružnosti i Poissonovo číslo jsou pro všechny numerické výpočty stejné.

⁴Numerická nula, Ansys udává hodnotu $FAv_x = 1,375 \cdot 10^{-9} \text{ N}$.



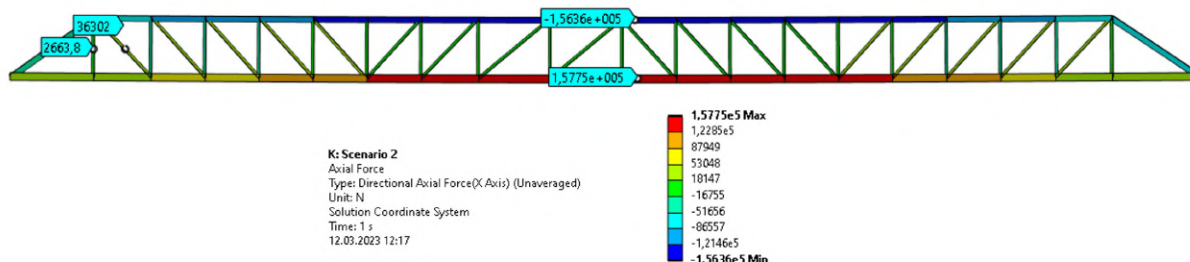
Obrázek 53: Normálové síly v prutech (scénář 1)



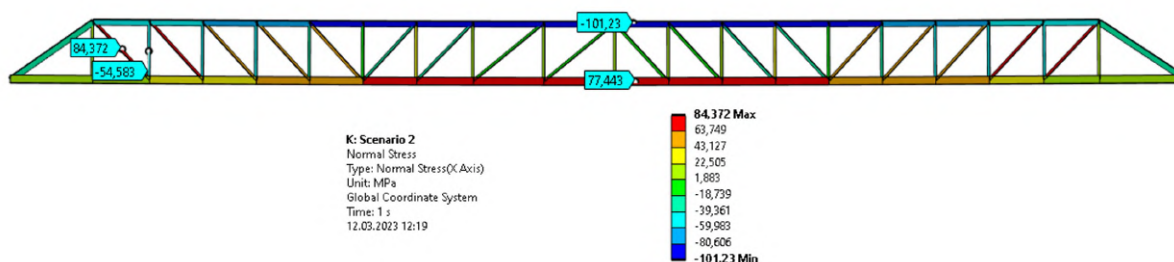
Obrázek 54: Normálové napětí v prutech (scénář 1)

6.2 Numerické řešení (scénář 2)

Numerické řešení scénáře 2 je pouze verifikací analytického řešení. Odpovídá obrázku 43. Je to opět staticky určitá prutová soustava používající prvky Link. Síly ve vazbách jsou shodné s hodnotami 6.1. Na obrázku 56 jsou vykresleny normálové síly v prutech, vyznačeny jsou pouze maximální síly pro každý průřez. Stejně tak je to i pro napětí na obrázku 57.

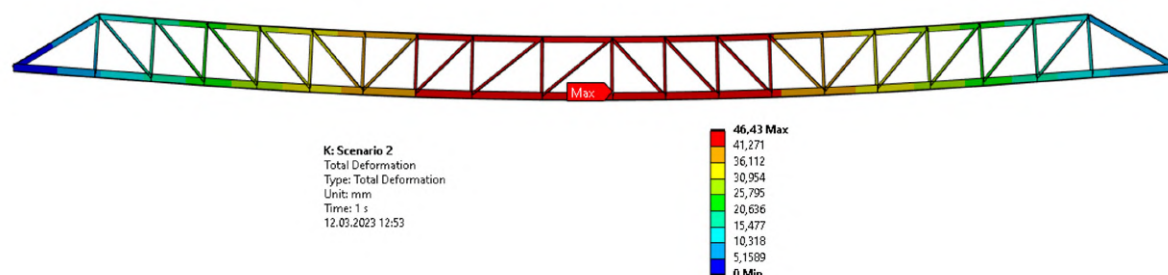


Obrázek 56: Normálové síly (scénář 2)



Obrázek 57: Normálové napětí (scénář 2)

Na obrázku 58 je vykreslena deformace. Opět je 12× zvětšena.



Obrázek 58: Deformovaná konstrukce (scénář 2)

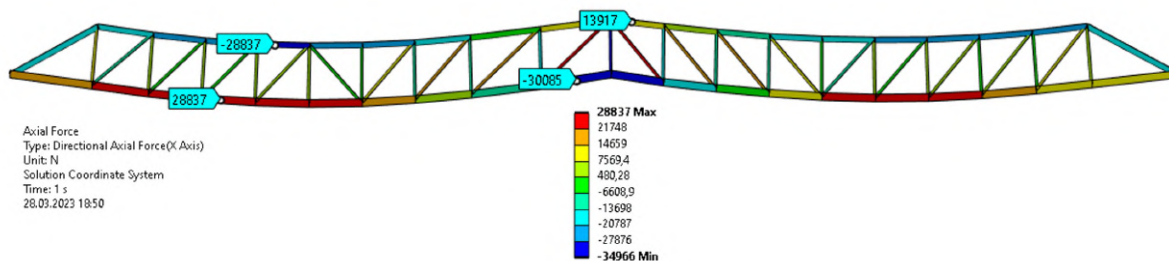
Největší průhyb je opět ve styčnicku *K* a nabývá hodnoty 46,4 mm.

6.3 Numerické řešení úlohy (scénář 3)

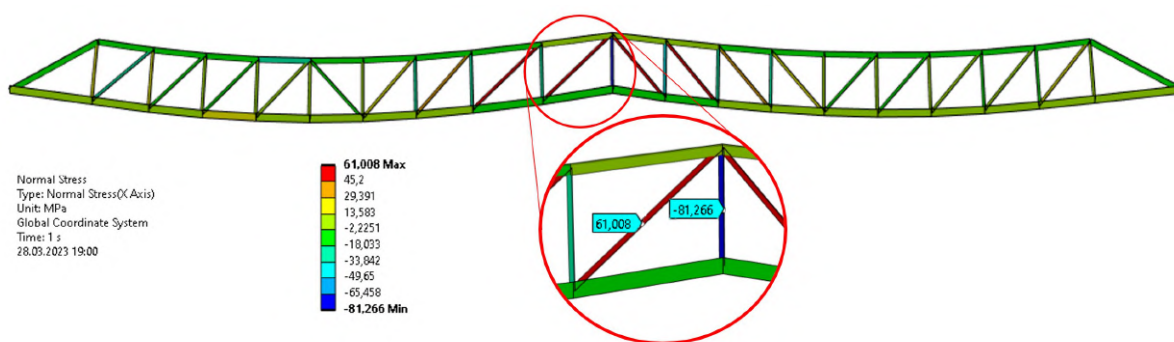
Numerické řešení pro scénář 3 je opět pouze verifikací analytického řešení stejného scénáře. Odpovídá obrázku 46. Na rozdíl od předchozích verifikací, zde se jedná o jedenkrát externě staticky neurčitou prutovou soustavu, která využívá opět prvky Link. Síly ve vazbách jsou následující hodnoty z rovnic 6.2⁵.

$$\begin{aligned}
 FAv_x &= 0 \text{ N} \\
 FAv_y &= 13611 \text{ N} \\
 FUv_y &= 12528 \text{ N} \\
 FKv_y &= 37629 \text{ N}
 \end{aligned}
 \tag{6.2}$$

Na obrázku 59 jsou vykresleny normálové síly v prutech, vyznačeny jsou pouze maximální síly pro každý průřez. Stejně tak je to i pro napětí na obrázku 57. Deformace na obrázcích je 150× zvětšena.



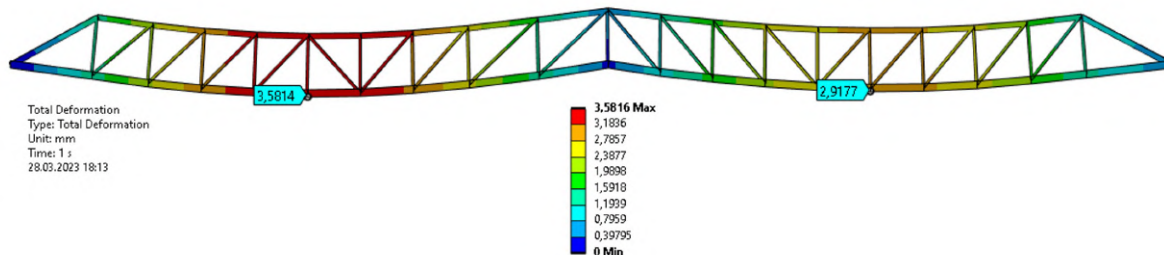
Obrázek 59: Normálové síly (scénář 3)



Obrázek 60: Normálové napětí (scénář 3)

Na obrázku 61 je vykreslena deformace.

⁵Numerická nula, Ansys udává hodnotu $FAv_x = 3,038 \cdot 10^{-10} \text{ N}$.

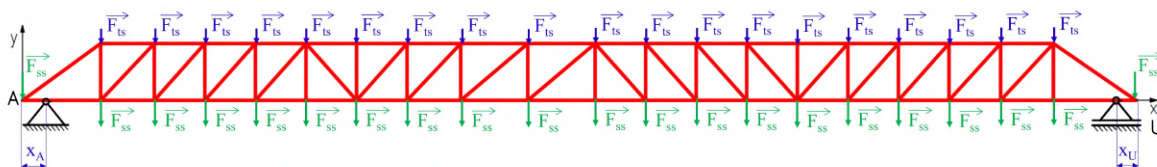


Obrázek 61: Deformovaná konstrukce (scénář 3)

Největší průhyb je ve styčnicku F a nabývá hodnoty přibližně 3,55 mm. Další velký průhyb se nachází ve styčnicku P a činí 2,92 mm.

6.4 Numerické řešení pomocí prvků Beam (scénář 4)

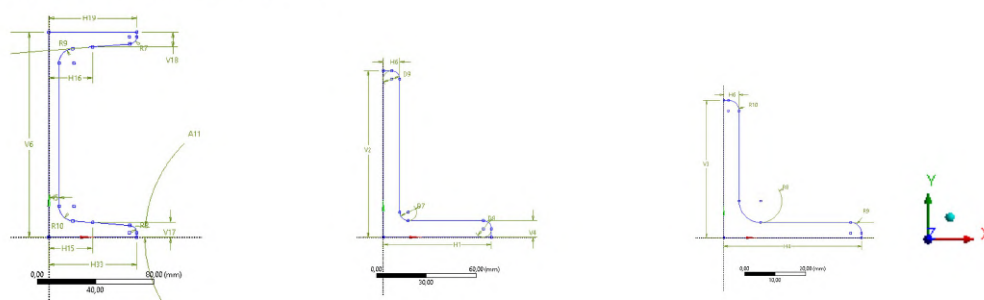
Geometrie, zatížení i vazby vychází z modelu (scénář 1), který je na obrázku 38. Liší se typ použitých prvků a pozice vazeb. Už se nejedná o prutovou soustavu, ale o rámovou konstrukci. Místo prvků Link jsou použity prvky Beam, které umožňují přenášet moment (kapitola 2.10). Další rozdíl spočívá v umístění vazeb. Ty se už nemusí nacházet ve styčnicku. Jak je patrné z obrázku 16, při deformaci konstrukce se nebude spodní prut v místě styčnicku dotýkat pilíře a přenášet v tomto místě styčnicku A sílu. Síla se bude přenášet v místě, kde končí betonový pilíř. Proto je na obrázku 62 zobrazen řešený model s posunutými vazbami. Náznornější zobrazení lze vidět na obrázku 75 v další kapitole. Vazby jsou posunuty o hodnoty $x_A = 380\text{mm}$ a $x_U = 400\text{mm}$ odměřené z reálné konstrukce (kóty jsou na obrázku 62).



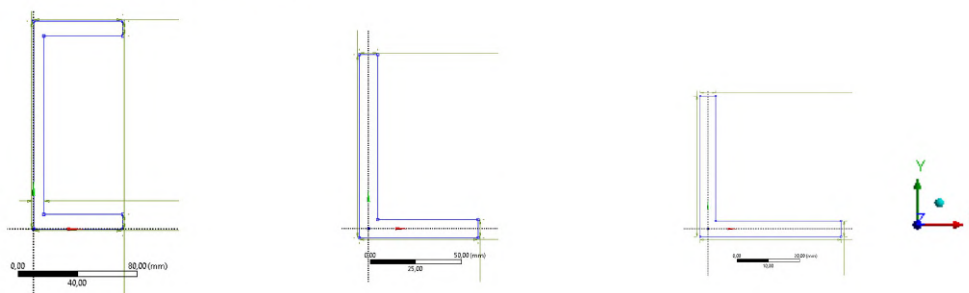
Obrázek 62: Model s posunutím vazeb (scénář 4)

Program Ansys neumožňuje výpočet napětí od ohybu pro uživatelem nadefinované průřezy. Z tohoto důvodu byly na model použity zjednodušené příčné průřezy. Nové průřezy jsou definované programem a jsou změněny pouze jejich rozměry, aby odpovídaly skutečným průřezům. Změna je zobrazena na obrázku 63. S novými průřezy byla vygenerována síť konečných prvků (mesh), a jelikož se už nejedná o prvky Link, tak počet prvků neodpovídá počtu prutů. Počet prvků pro tento scénář je 935 a počet uzlů je 1833.

Příčné průřezy nadefinované uživatelem

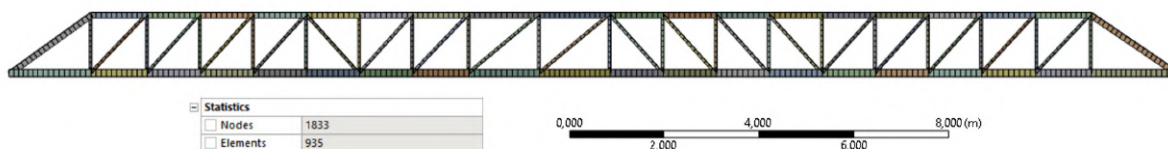


Příčné průřezy nadefinované programem



Obrázek 63: Zjednodušení příčných průřezů

Mesh s nejmenší velikostí prvku 100 mm je zobrazena na obrázku 64.



Obrázek 64: Mesh (scénář 4)

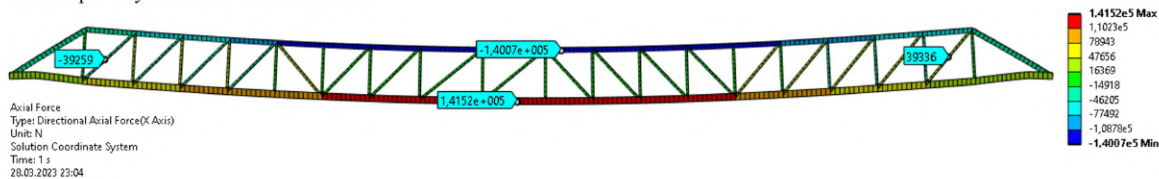
Síly ve vazbách jsou v následujících tvarech 6.3⁶. Ačkoliv síly už nepůsobí do styčníků, i tak značení zůstane stejné kvůli lepší přehlednosti při porovnání.

$$\begin{aligned}
 FAv_x &= 0 \text{ N} \\
 FAv_y &= 31942 \text{ N} \\
 FUV_y &= 31827 \text{ N}
 \end{aligned}
 \tag{6.3}$$

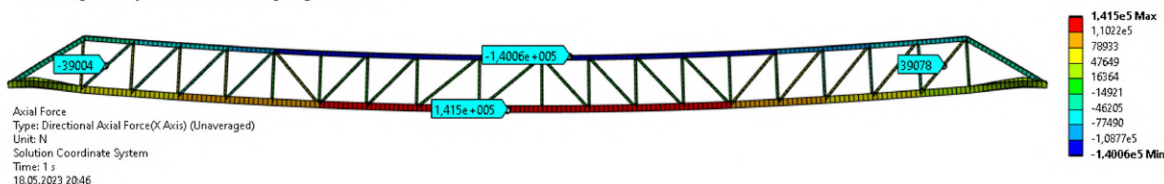
Jako první je nutné zjistit, jak moc se touto změnou geometrie průřezů ovlivní samotné výsledky. Na obrázku 65 je zobrazeno porovnání normálových sil spočítaných nejprve s vlastními příčnými průřezy a poté se zjednodušenými.

⁶Numerická nula, Ansys udává hodnotu $FAv_x = -3,725 \cdot 10^{-5} \text{ N}$.

Příčné průřezy nadeřinované uživatelem

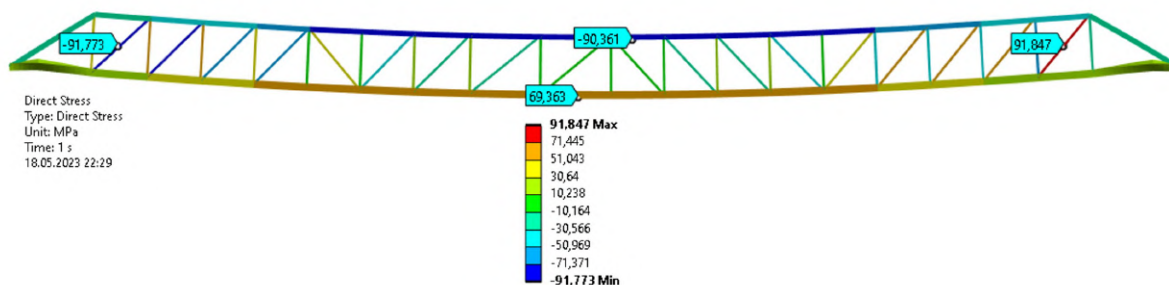


Příčné průřezy nadeřinované programem



Obrázek 65: Porovnání sil v prutech (scénář 4)

Z porovnání lze vidět, že změna průřezů má na výsledek zanedbatelný vliv. Výsledné síly se liší v řádech nižších stovek Newtonů, a to je u tak velké konstrukce zanedbatelné. Na dalším obrázku 66 jsou vykresleny napětí od tahu a tlaku v prutech, a to pro zjednodušené průřezy. Tyto průřezy pak budou použity ke všem následujícím simulacím v této kapitole. Ve všech obrázcích je deformace konstrukce 12× zvětšena.

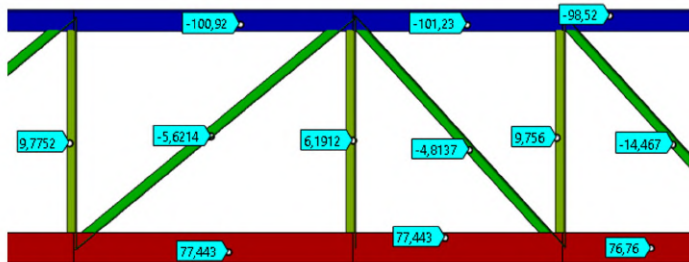


Obrázek 66: Normálové napětí (scénář 4)

Při porovnání se scénářem 1 (obrázek 67), tedy prutovou soustavou simulovanou prvky Link, lze vidět, že napětí (od tahu a tlaku) u rámové konstrukce s prvky Beam je nižší.

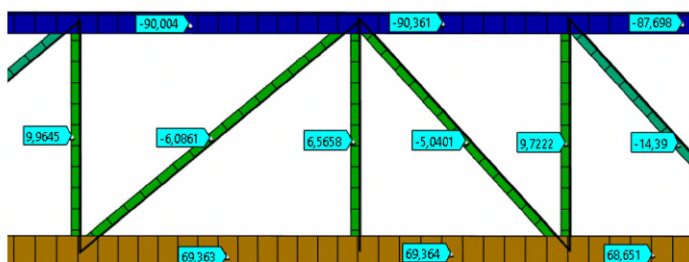
Scénář 1

Normal Stress
 Type: Normal Stress(X Axis)
 Unit: MPa
 Global Coordinate System
 Time: 1 s
 18.05.2023 21:55



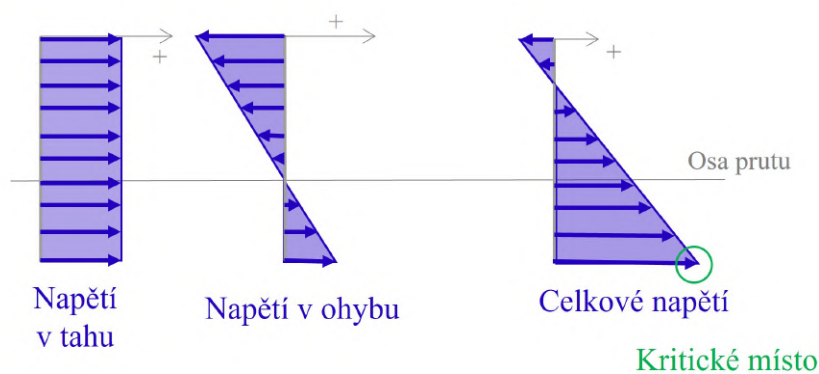
Scénář 4

Direct Stress
 Type: Direct Stress
 Unit: MPa
 Time: 1 s
 18.05.2023 22:20



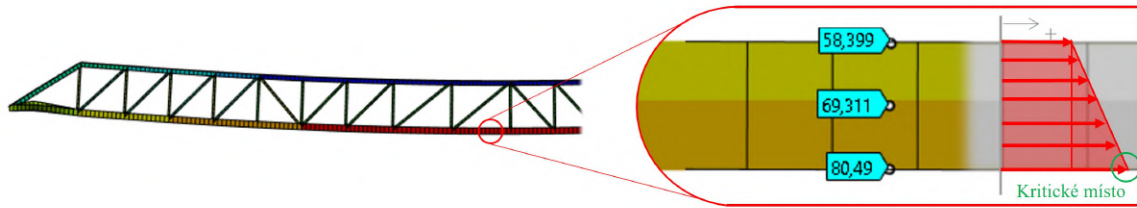
Obrázek 67: Porovnání napětí (scénář 1, scénář 4)

Nicméně v rámové konstrukci se již nenachází styčníky, a tak jednotlivé pruty přenáší ohyb a krut. Tím vzniká napětí od ohybu (krut se v konstrukcích tohoto typu nevyskytuje). Obrázek 68 ukazuje sečtení napětí od tahu nebo tlaku (to je vykresleno na obrázku 66) s napětím od ohybu, tím vznikne celkové napětí v normálové rovině. Právě toto napětí je důležité pro výpočet bezpečnosti.



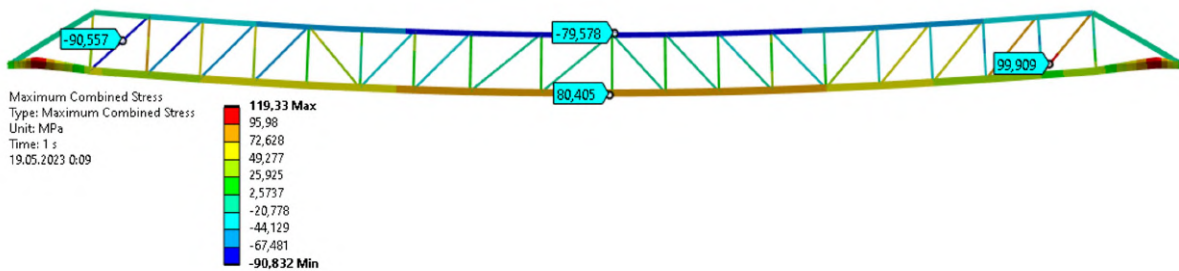
Obrázek 68: Grafická ukázka sečtení normálových napětí

Na obrázku 69 je pak ukázka celkového normálového napětí přímo na prutu z řešené konstrukce. Přičemž kritické místo je v krajních vláknech prutu.



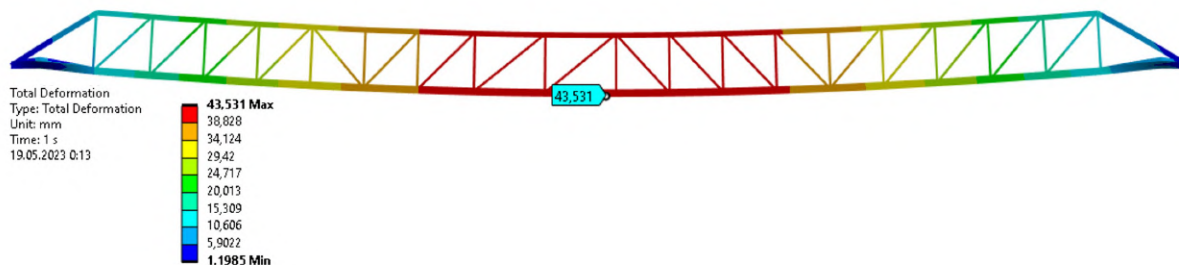
Obrázek 69: Grafické vyobrazení normálového napětí v prutu JcKc (scénář 4)

Celkové normálové napětí, konkrétně jeho maximální hodnoty, jsou ukázány na obrázku 70.



Obrázek 70: Celkové normálové napětí (scénář 4)

Na obrázku 71 je vykreslena deformace. Prvek v okolí styčnicku K je posunut o 43,5 mm.



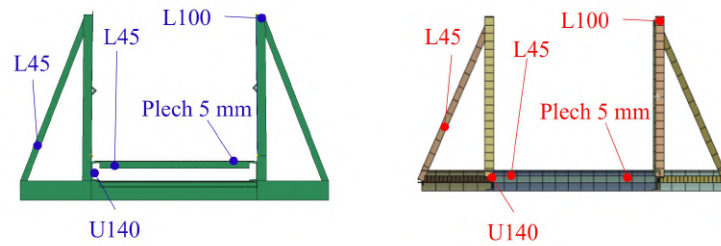
Obrázek 71: Deformovaná konstrukce (scénář 4)

Největší napětí je na prutu SSc a nabývá hodnoty $\sigma_{FSSc} = 100 \text{ MPa}$ (obrázek 70). Výpočet bezpečnosti je v následující rovnici 6.4.

$$k_{k4} = \frac{R_e}{\sigma_{FSSc}} = \frac{195}{100} = 1,95 \quad (6.4)$$

6.5 Numerické řešení ve 3D (scénář 5)

Na rozdíl od předchozích scénářů je tento scénář prostorový. Na obrázku 72 lze vidět reálné uspořádání prutů (vlevo) ve srovnání s modelem (vpravo). V modelu jsou všechny spodní pruty v jedné rovině, a toto zjednodušení nemá téměř žádný vliv, protože největší napětí vzniká v bočních prutech.



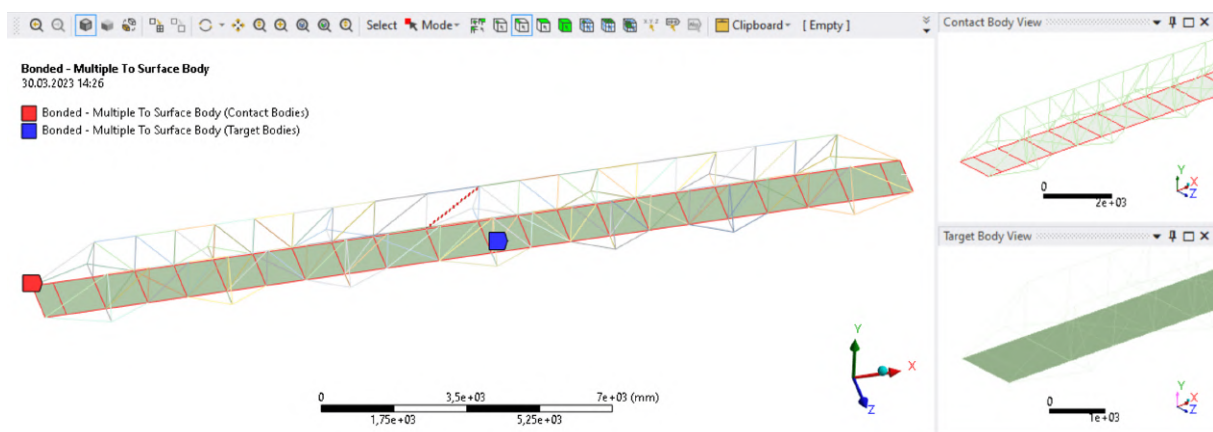
Obrázek 72: Pohled na most (scénář 5)

Mostovka v podobě protiskluzového vlnitého plechu⁷ má tloušťku 5 mm a je vymodelována pomocí prvku Shell. Mostovka a její upevnění k hlavní nosné konstrukci je znázorněno na obrázku 73.



Obrázek 73: Mostovka

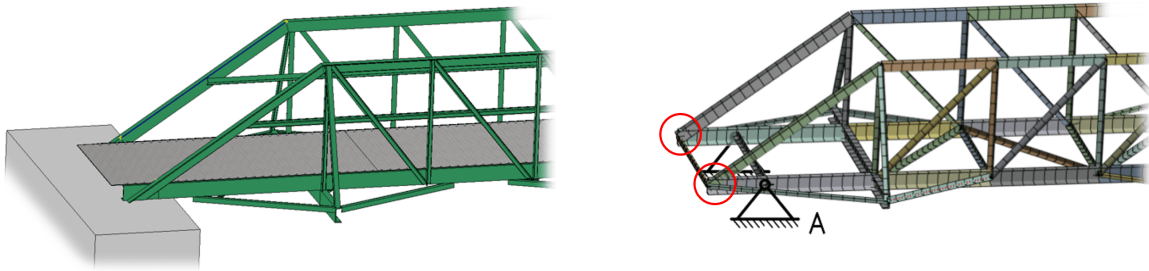
Mostovka je svařena s bočními pruty s průřezem U140 a podložena pruty L45, které jdou vidět na obrázku 73. Přesnou polohu prutů L45 je obtížné změřit, protože se nachází v dolní části konstrukce, kde je obtížný přístup. Přesná poloha není ani důležitá vzhledem k řešení bočních prutů. Proto jsou pruty L45 rozmístěny do styčnicků. Spojení prvku Shell s prvky Beam je zobrazeno na obrázku 74.



Obrázek 74: Spojení prvku Shell s prvky Beam (scénář 5)

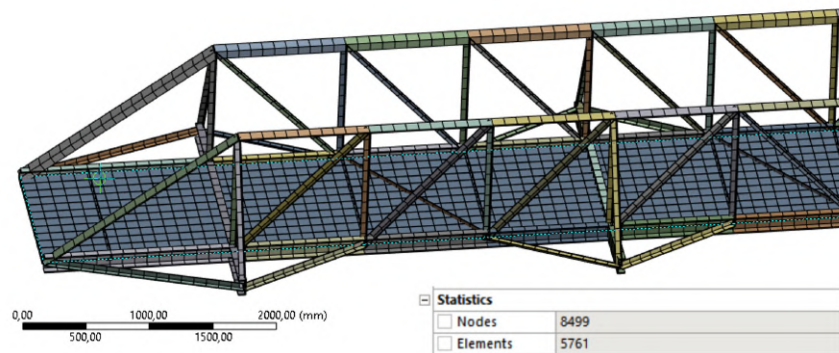
⁷Pravděpodobně dle ruské normy GOST 8568-1977 [39]. ČSN tento vzor nemá.

Zatížení působící na mostovku určené v kapitole 3.3 je $w_{max} = 3,52 \text{ kN/m}^2$. Zatížení je rozloženo po celé mostovce. Silová náhrada za váhu mostu používaná u předchozích scénářů je zde nahrazena tíhovým zrychlením $g = -9,8066 \text{ m/s}^2$ působícím proti ose y. Vazby se základovým tělesem jsou namodelovány pomocí rotačních vazeb (Displacement) umístěnými na okraji pilířů (obrázek 75). Předpokládá se deformace prutů a jejich natočení, proto místo dotyku bude právě okraj pilíře. Konec prutů (označen červeně na obrázku 75) se uvažuje nezatížený kromě zatížení od mostovky. Síly na těchto koncích prutů působící od připojeného vybavení lávky se zanedbávají.



Obrázek 75: Zavazbení hlavní nosné konstrukce se základovým tělesem (scénář 5)

Lávka je modelována se všemi pruty, i těmi, které na reálné konstrukci chybí (kapitola 4.1). Jak lze vyčíst z obrázku 76, mesh tvoří 5761 prvků a 8499 uzlů. Největší velikost prvku je 100 mm. Na mostovku, tedy prvek Shell, byl použit face meshing pro zrovnměrnění sítě a ponechání čtvercových prvků. Opět jsou použity zjednodušené průřezy z kapitoly 6.4.



Obrázek 76: Mesh 3D modelu (scénář 5)

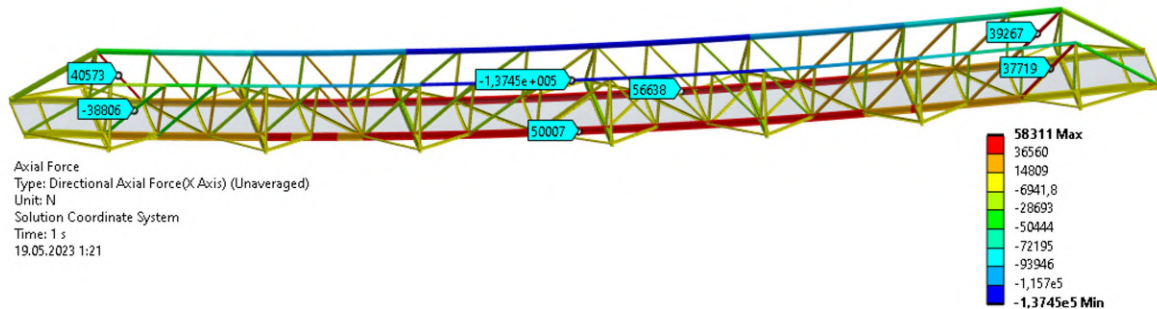
Síly působící ve vazbách A a U jsou následující (6.5).

$$\begin{aligned}
 FAv_y &= 63115 \text{ N} \\
 FUV_y &= 61994 \text{ N}
 \end{aligned}
 \tag{6.5}$$

Pro možnost srovnání s ostatními scénáři jsou síly poděleny dvěma, aby se získala síla ve vazbě působící z jedné strany lávky. Po této úpravě pak mají rovnice tvar 6.6.

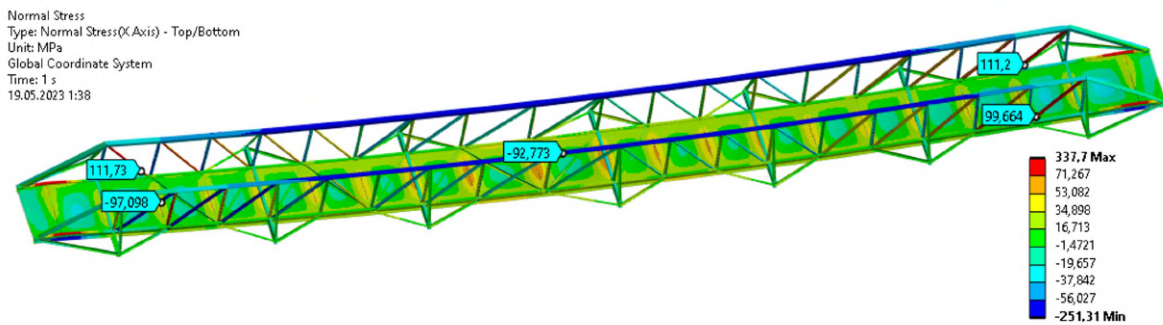
$$\begin{aligned} FAv_x &= 0 \text{ N} \\ FAv_y &= 31558 \text{ N} \\ FUV_y &= 30997 \text{ N} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Na obrázku 77 jsou znázorněny normálové síly. Opět jsou zvýrazněny pouze ty největší pro každý průřez.



Obrázek 77: Normálové síly (scénář 5)

Napětí v normálové rovině, tedy to, kde je zahrnut tah (nebo tlak) společně s ohybem, je zobrazeno na obrázku 78. Jsou zde vyznačeny extrémní napětí. Výsledky v okolí vazeb jsou zanedbány, protože je nelze považovat za odpovídající skutečnosti. Pro chování v místě vazeb by se mohlo použít řešení úlohy s kontaktem těles.

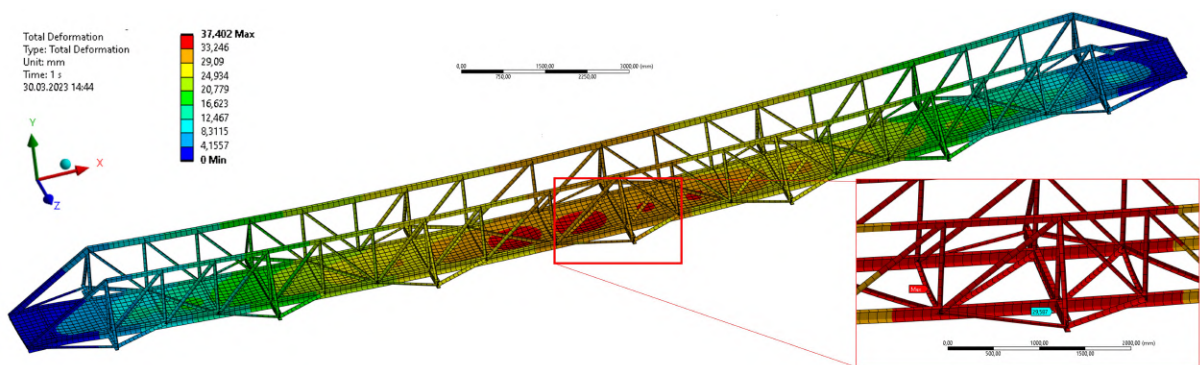


Obrázek 78: Normálové napětí (scénář 5)

Napětí jsou maximální na prutech AcC a SSc na levé straně, kde nabývají hodnot přibližně 112 MPa. Z toho bezpečnost je:

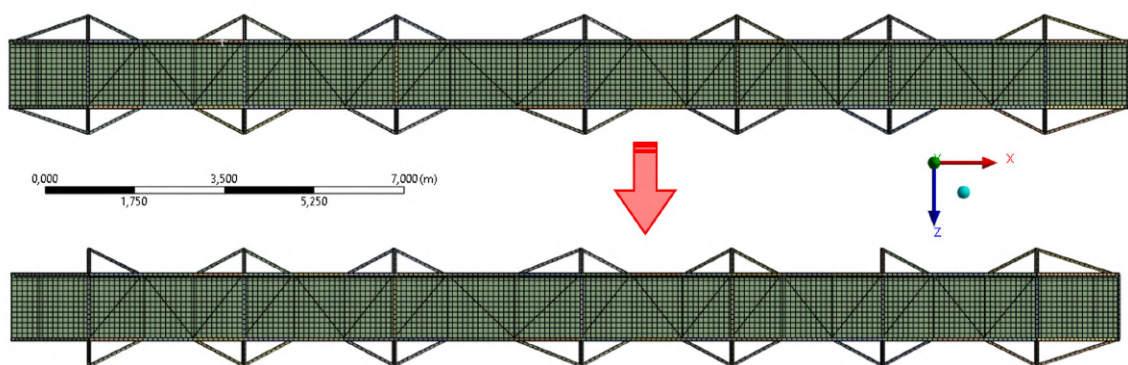
$$k_{k5} = \frac{R_e}{\sigma_{FSSCL}} = \frac{195}{112} = 1,74 \quad (6.7)$$

Deformace je na obrázku 79. Při zanedbání průhybu mostovky je maximální průhyb konstrukce 29,6 mm (červený rámeček). Deformace je 15× zvětšena.



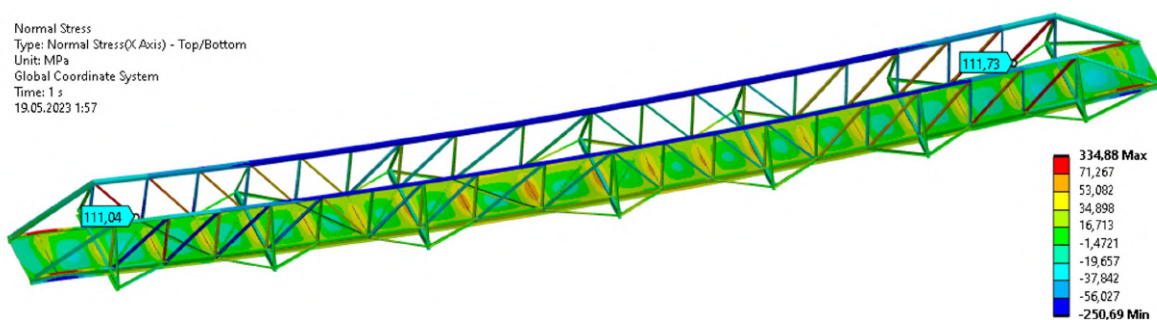
Obrázek 79: Deformace konstrukce (scénář 5)

Jak je ale zmíněno v kapitole 2.10, tak na lávce některé pruty chybí. Proto byly stejné simulace na 3D modelu provedeny bez těchto prutů. Změna geometrie je patrná z obrázku 80.



Obrázek 80: Změna geometrie (scénář 5 na scénář 5.5)

Napětí po odebrání prutů, které na reálné konstrukci chybí, je zobrazeno na obrázku 81.



Obrázek 81: Normálové napětí (scénář 5.5)

Hodnoty v kritických místech jsou téměř totožné. Takže z hlediska napětí v prutech, tedy i bezpečnosti, lze vliv jejich absence zanedbat.

Výsledky všech numerických hodnot byly ignorovány v místech vazeb, ať už se základovým tělesem nebo mezi samotnými pruty. A to z důvodu, že vazby neodpovídají spojům

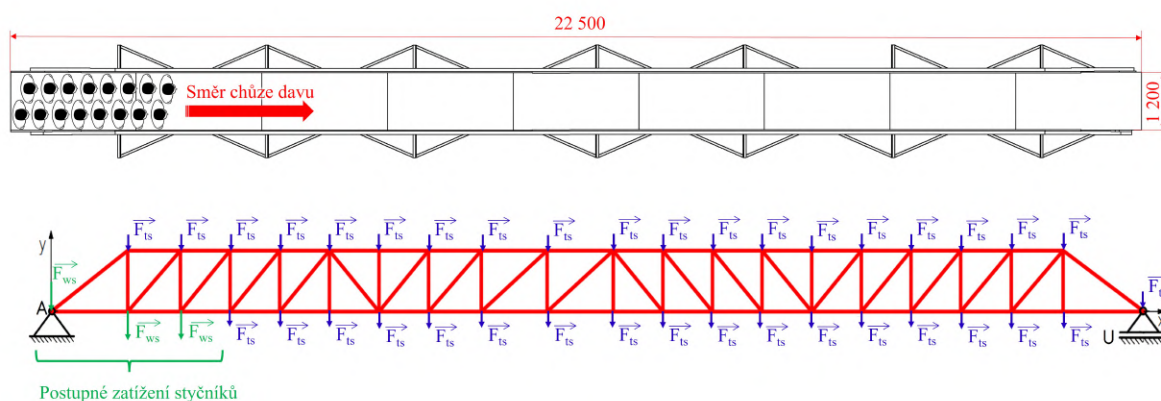
na reálné konstrukci. Tento problém by šel vyřešit například submodelingem daného uzlu (prvek Solid) s okrajovými podmínkami převzatými z prutové konstrukce (Beam). To ale už není obsahem této práce.

7 Změna statického zatížení

Ve všech scénářích doposud bylo použito maximální možné zatížení stanovené v kapitole 3.3. Toto řešení bylo nejvíce konzervativní. Následující scénáře řeší další možnosti zatížení.

7.1 Analytický výpočet (scénář 6)

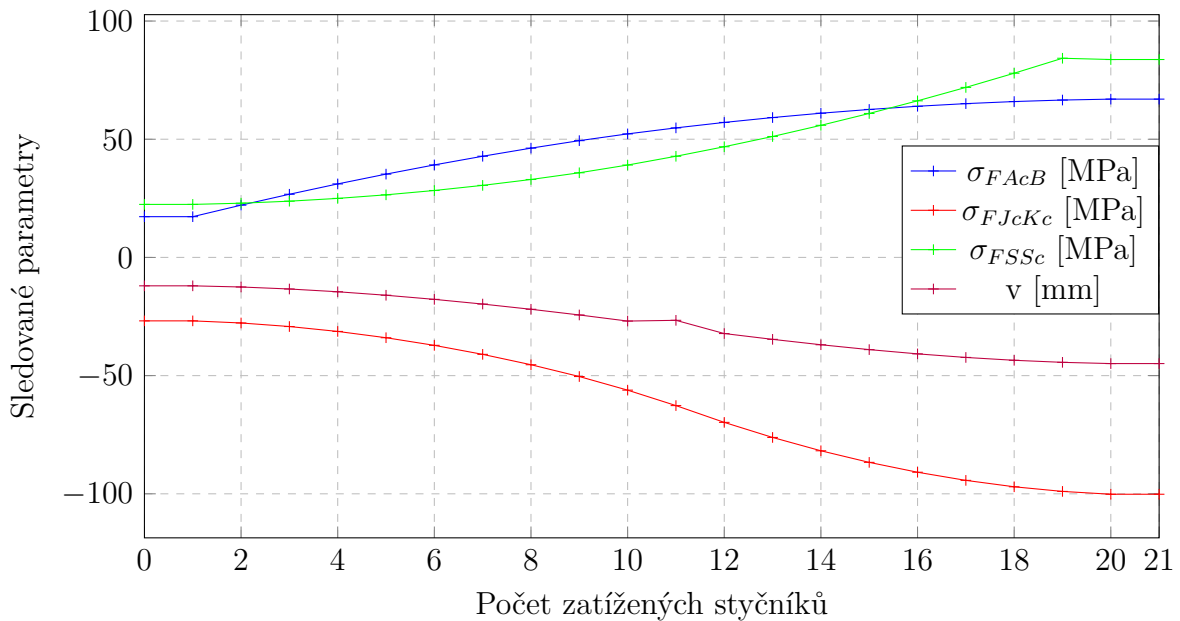
Tento scénář představuje situaci, kde dav lidí zmíněný v kapitole 3.3, vchází na most a postupně zatěžuje styčníky. Vize scénáře je znázorněna na obrázku 82. Zatížení se mění podle počtu lidí na mostovce a s přibývajícím počtem lidí se zároveň zatěžuje více styčnicků. Mostovku drží celkem 21 styčnicků, které se budou postupně zatěžovat. Model odpovídá modelu ze scénáře 1, jedná se tedy o staticky určitou prutovou soustavu.



Obrázek 82: Dav lidí vcházející na lávku (scénář 6)

Zatěžování způsobí síla F_{ws} , která se bude přičítat k síle F_{gs} . Síla F_{gs} zohledňuje vlastní váhu konstrukce a působí stále na všechny styčníky. Sledované parametry jsou napětí ve vybraných¹ prutech AcB, JcKc a SSc. Dále je sledován posuv styčnicku K, kde je při maximálním zatížení největší průhyb (kapitola 6.1).

¹Z předchozích výpočtů vyplývá, že právě v těchto prutech vzniká největší napětí.



Obrázek 83: Sledované parametry při postupném zatěžování

Výsledků v obrázku 83 bylo docíleno použitím upraveného skriptu ze scénáře 3 v kapitole 6.3, kde se vazba v bodě K změnila na sílu $FKv_y = 0\text{ N}$ a pomocí Castiglianovy věty v rovnici 7.1 byl dopočítán posuv v styčnicku K v ose y. Rovnice vychází z kapitoly 2.8. Napětí pak byly počítány stejným postupem jako ve všech předchozích scénářích. V rámečku je v Matlabu upravená část scénáře 3.

$$v = \frac{\partial W}{\partial FKv_y} = \sum_{i=1}^{77} \frac{\sqrt{F_{ix}^2 + F_{iy}^2}}{E_i \cdot S_i} \cdot \frac{\partial \sqrt{F_{ix}^2 + F_{iy}^2}}{\partial FKv_y} L_i \quad (7.1)$$

```
syms v
Etah=205000
CastiglianLeva=Etah*v;

Castiglian=solve([CastiglianPrava==CastiglianLeva],v)

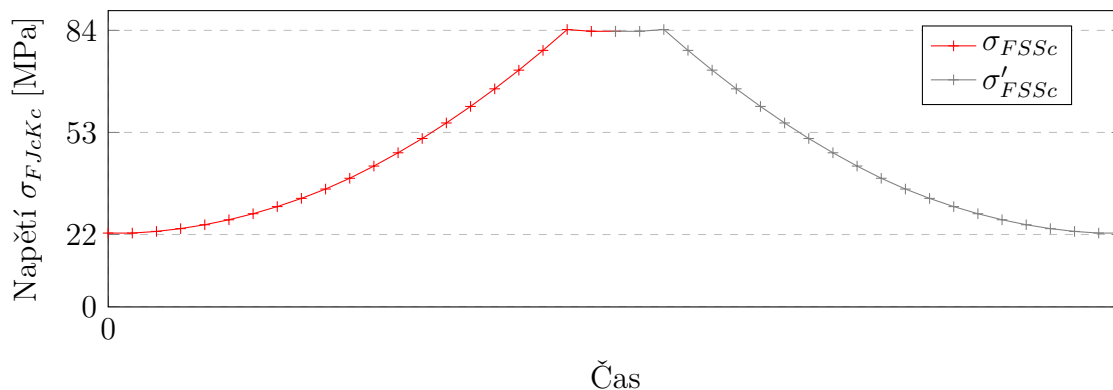
CastSub = subs(Castiglian,[FKv1,FKv2],[0,0])

v=round(CastSub,5)
```

Z obrázku 83 jde vidět, že při vstupu davu chodců na mostovku napětí v prutech ani posuv styčnicku K neroste lineárně. Vlevo, pro počet zatížených styčnicků 0, lze odečíst maximální napětí v konstrukci zatížené pouze vlastní tíhou. To je v prutu JcKc -27 MPa. V porovnání s napětím plně obsazeného mostu ($\sigma_{FJcKc} = -100\text{ MPa}$) se jedná o pokles o 73,2 %. U ostatních sledovaných prutů je tento pokles podobný. Posuv styčnicku K také poklesne o 73,2 %.

I když je pro výpočet použit dynamický součinitel δ zohledňující to, že chodci se po mostovce pohybují a pouze na ní nestojí, tak nezohledňuje vliv frekvence kroků na konstrukci.

Kdyby pak dav opustil lávku druhým koncem, tak by se napětí opět snižovalo. Snižování napětí by neprobíhalo po stejné zatěžovací křivce jako při vstupu chodců na mostovku, ale po jiné, velmi podobné křivce, a to z důvodu nesymetrie konstrukce. Zatěžování prutu SSc, který je podle obrázku 83 nejvíce namáhaným prutem na tah, by pak mohlo vypadat přibližně takto (obrázek 84). Na obrázku 84 je σ_{FSSc} vypočítaný průběh napětí, a σ'_{FSSc} odhadovaný průběh napětí.



Obrázek 84: Závislost napětí prutu SSc na čase

Zatěžováním konstrukce je získána časově² proměnná napjatost. Jelikož se napětí i deformace mění v průběhu času, tak může dojít k únavovému poškození. To je nebezpečné zejména u prutů namáhaných tahem z důvodu tvorby a šíření trhlin. Zde se jedná o pulzující cyklus v tahu. Další řešení však není náplní této práce.

²Jednotka času není důležitá, jde pouze o ilustraci napětí, které se mění v čase

8 Vlastní frekvence mostních konstrukcí

8.1 Vlastní frekvence řešené lávky (scénář 7)

Jak je zmíněno v předchozí kapitole, tak při průchodu chodců vzniká vynucené kmitání. Kdyby nastala situace, kde by všichni lidé šli stejným krokem, tak mohou rozkmitat celou konstrukci. Kdyby toto kmitání bylo na stejné frekvenci jako vlastní frekvence konstrukce, tak může dojít k jejímu zřícení.

Na dobrovolnících bylo provedeno měření frekvence chůze. To spočívalo v měření počtu kroků (impulzů), který byl podělen časovým úsekem, za který se tento počet kroků uskutečnil. Čím delší by tento úsek byl, tím více by bylo měření přesnější. Zde bylo dostačující měření, které u každé osoby trvalo přibližně 60 s. Příklad měření a výpočtu je uveden v rovnici 8.1.

$$f_{kroky_p} = \frac{99}{60,76} = 1,63 \text{ s}^{-1} = 1,63 \text{ Hz} \quad (8.1)$$

Z dalších obdobných měření vznikla tabulka 3.

Tabulka 3: Měřené frekvence dotázaných osob

Osoba č. (19 - 54 let)	1	2	3	4	5	6
frekvence kroků [Hz]	1,63	1,50	1,65	1,58	1,42	1,60

Z tabulky 3 vyplývá, že frekvence kroků se může vyskytovat přibližně v intervalu f_{kroky} .

$$f_{kroky} = \langle 1,42; 1,65 \rangle \text{ Hz} \quad (8.2)$$

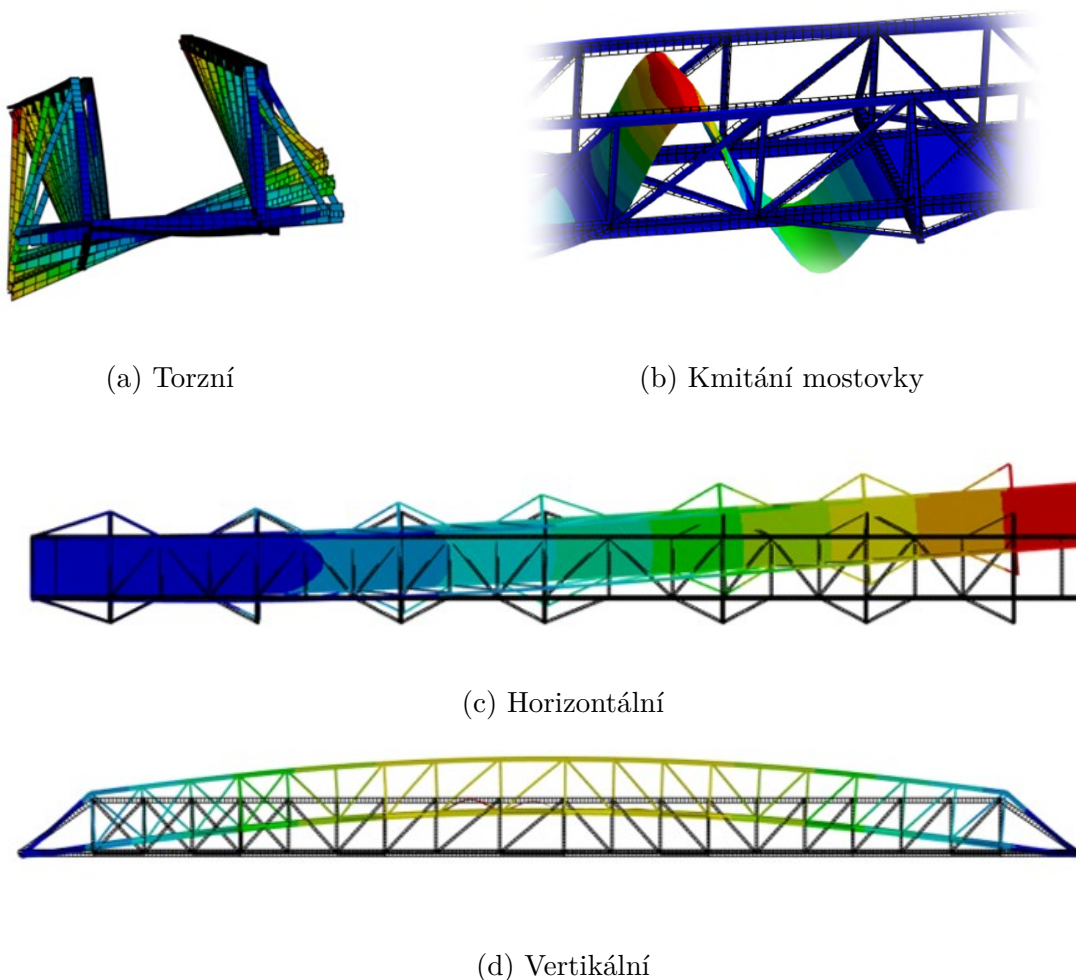
Nyní je potřeba ještě určit vlastní frekvenci konstrukce. K tomu poslouží opět program Ansys a jeho modul Modal, místo v předchozích kapitolách používaného Static Structural. Pro modální analýzu byl použit model ze scénáře 5.5, tedy ten nejvíce se přibližující realitě. Vazby zůstaly také stejné. Lávce však bylo nutné omezit posuv i ve směru osy z, ale z reálného uložení nelze stanovit na jakém konci tento posuv zamezit. Z toho důvodu je provedena simulace pro všechny tři možné varianty. Konstrukce je tvořena prvky Beam (mostovka Shell) a nemá žádné stupně volnosti, tudíž má nekonečně mnoho vlastních frekvencí, zajímavých je však pouze několik prvních¹. Konkrétně v tabulce 4 jsou uvedeny první 3.

¹Další vlastní frekvence už mají nižší výchylku při vyšší vlastní frekvenci kmitání, a proto nejsou tak nebezpečné.

Tabulka 4: Vlastní frekvence a změna uložení lávky

Vazba	Možné varianty		č. vlastní frekvence [Hz] (tvar kmitání)		
	A	U	1	2	3
Posuv z	0 mm	volný	1,6 (horizontální)	5,7 (torzní)	6,2 (vertikální)
	volný	0 mm	2,3 (horizontální)	5,0 (torzní)	6,2 (vertikální)
	0 mm	0 mm	4,9 (torzní)	6,2 (vertikální)	10,3 z (mostovka)

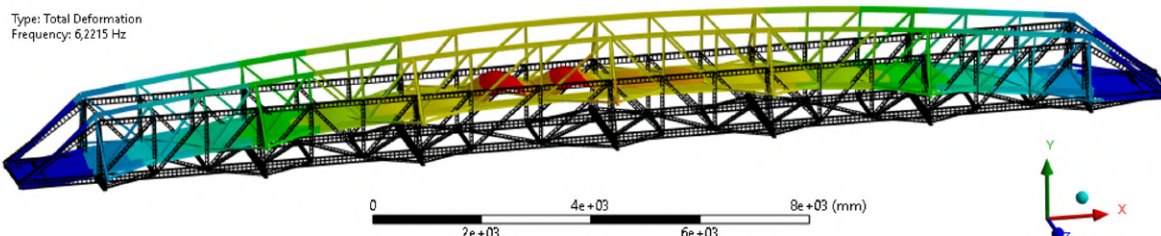
Z tabulky 4 lze pozorovat, že se změnou uložení se liší i vlastní frekvence. Je však nutné si uvědomit, že chodci působí na mostovku vertikálně a některé vlastní tvary lávky není možné vybudit od harmonických sil vyvolaných chodci. Z toho důvodu je v tabulce 4 u každé frekvence i její tvar. Jak jednotlivé tvary vypadají je zobrazeno na obrázku 85 (černou barvou je nedeformovaná konstrukce). Jediný možný vlastní tvar, který by mohl být vyvolán od chodců, je vertikální na obrázku 85d.



Obrázek 85: Vlastní tvary kmitání lávky (názvy použité v tabulce)

Ačkoliv se vertikální vlastní tvar nachází prve na pozici 3. vlastní frekvence a pak na 2. vlastní frekvenci, což je způsobeno právě změnou vazeb, jedná se o stejný vlastní

tvar se stejnou vlastní frekvencí kmitání $f_0 = 6,2Hz$. Toto je hledaný nebezpečný stav konstrukce. Na hmotnosti chodců v této úloze nezáleží, protože vlastní frekvence je vlastnost této konstrukce. Hmotnost ovlivní pouze statickou výchylku a maximální výchylku při vlastní frekvenci 6,2 Hz, čímž se tato práce nezabývá. Vlastní tvar při frekvenci $f_0 = 6,2Hz$ je zobrazen na obrázku 86 (konstrukce kmitá nahoru a dolů ve směru y kolem své rovnovážné polohy).



Obrázek 86: Vlastní tvar při frekvenci $f_0 = 6,2Hz$

Při porovnání $f_0 = 6,2Hz$ a intervalu $f_{krokky} = \langle 1,42; 1,65 \rangle Hz$ je patrné, že hodnota f_0 v intervalu nenáleží. Z toho důvodu chodci lávku rozkmitáním nemohou ohrozit. Jinak by tomu však mohlo být u běžců. U běžců na větší vzdálenost se frekvence kroků pohybuje kolem 4,2 Hz.² Takže i zde je nepravděpodobné ohrožení konstrukce.

²Odměřeno ze záznamu maratonu, jedná se pouze o přibližnou hodnotu.

9 Porovnání řešených variant

Pro porovnání všech řešených scénářů byly vypracovány tabulky 5 a 6. První z nich, tedy tabulka 5, porovnává scénář 1, který se věnuje staticky určité prutové soustavě řešené ve 2D. Jedná se o model pravé strany lávky. V práci bylo řešení provedeno analyticky metodou obecnou styčnickovou i numericky metodou konečných prvků. Dále se v tabulce nachází scénář 2, zde se jedná také o staticky určitou prutovou soustavu řešenou ve 2D, ale tentokrát je to model levé strany lávky. Tyto scénáře se liší ve skladbě prvních prutů, o tom pojednává podkapitola 5.2.5. Zde je porovnáván vliv na celkovou bezpečnost konstrukce. V neposlední řadě je přidán scénář 4, který je řešen pouze numericky a jedná se o rámovou konstrukci pravé strany lávky. První dvě prutové soustavy byly simulovány pomocí prvků Link, rámová konstrukce pak pomocí prvků Beam.

Tabulka 5: Porovnání scénářů 1, 2 a 4

Řešeno	Scénář 1		Scénář 2		Scénář 4
Analyticky / Numericky	An	Num	An	Num	Num
FAv_x [N]	0	0	0	0	0
FAv_y [N]	31 888	31 888	31 888	31 888	31 942
FUv_y [N]	31 880	31 880	31 880	31 880	31 827
Max. síla (tah) [N]	157 752	157 750	157 752	157 750	141 500
Prut (průřez)	KL a JK (U140)	KL a JK (U140)	KL (U140)	KL (U140)	JK (U140)
Min. síla (tlak) [N]	-156 360	-156 360	-156 360	-156 361	-140 060
Prut (průřez)	JcKc (L100)	JcKc (L100)	JcKc (L100)	JcKc (L100)	JcKc (L100)
Max. napětí (tah) [MPa]	84	84	84	84	92
Prut (Průřez)	SSc (L45)	SSc (L45)	AcC (L45)	AcC (L45)	SSc (L45)
Min. napětí (tlak) [MPa]	-100	-101	-100	-101	-92
Prut (průřez)	JcKc a IcJc (L100)	JcKc a IcJc (L100)	JcKc (L100)	JcKc (L100)	BBc (L45)
Max. napětí (celkové) ¹ [MPa]	-	-	-	-	100
Prut (průřez)	-	-	-	-	SSc (L45)
Bezpečnost k_k [-]	1,95	1,93	1,95	1,93	1,95
Největší deformace [mm]	44,9	45,2	46,2	46,4	43,5
Místo deformace	Styčnick K	Styčnick K	Styčnick K	Styčnick K	Uzel K

Druhou tabulku (6) tvoří scénář 5 a scénář 3. Scénář 5 je 3D model v programu Ansys, který využívá prvků Beam. Mostovka je prvek typu Shell a je zatížena spojitým zatížením po celé své ploše. Scénář 3 je pak externě staticky neurčitá prutová soustava, kde byla přidána jedna vazba se základovým tělesem. Byla řešena analyticky a poté verifikována numericky.

¹Celkové normálové napětí v krajních vláknech, tedy tah (tlak) a k němu přičtený ohyb.

Tabulka 6: Porovnání scénářů 5 a 3

Řešeno	Scénář 5		Scénář 3	
	Analytický / Numerický	Num	An	Num
FAv_x [N]		0	0	0
FAv_y [N]		31 558	13 619	13 611
FUv_y [N]		30 997	12 537	12 528
FKv_y [N]		–	37 612	37 629
Max. síla (tah) [N]		56 638	28 872	28 837
Prut (průřez)		LM (L) (U140)	DE (U140)	DE (U140)
Min. síla (tlak) [N]		-137 450	-28 872	-28 837
Prut (průřez)		IcJc (P) (L100)	DcEc (L100)	DcEc (L100)
Max. napětí (tah) [MPa]		–	61	61
Prut (Průřez)		–	JJc (L45)	JJc (L45)
Min. napětí (tlak) [MPa]		–	–81	–81
Prut (průřez)		–	JcK (L45)	JcK (L45)
Max. napětí (celkové) ² [MPa]		112	–	–
Prut (průřez)		AcC (L) (L45)	–	–
Bezpečnost k_k [-]		1,74	2,41	2,41
Největší deformace [mm]		29,6	3,55	3,58
Místo deformace		Uzel K	Styčnick F	Styčnick F

V první části je vidět porovnání sil ve vazbách, tedy sil FAv_x , FAv_y a FUv_y (případně FKv_y pro scénář 3). Tyto síly jsou ve všech variantách výpočtu téměř stejné. Liší se scénář 4, to z důvodu použití prvků Beam, ale součet sil ve vazbách zůstává zachován. O něco výrazněji se pak liší scénář 5 (3D), to v důsledku použití tíhového zrychlení přímo v programu Ansys místo náhrady silami působícími pouze do styčnicků. Scénář 3 v této kategorii nelze porovnávat, protože má zcela jiné uložení se základovým tělesem (pilíři). V následujících obrázcích je pak místo, kde se nachází vazba, která je nejvíce zatížena vyznačeno modrou šipkou vzhůru (↑).

Dalším aspektem pro porovnání jsou maximální síly v prutech. U scénáře 1 a 2 jsou hodnoty sil shodné jak v tahu tak tlaku. Ve scénáři 4 pak síly ve směru osy prutu mírně klesají. U scénáře 5 jsou pak ještě menší, a to z důvodu zcela odlišné³ spodní části konstrukce. Je zde více prutů a síly se do nich lépe rozloží, tento model nejvíce odpovídá skutečnosti. Úplně nejmenší jsou pak síly ve scénáři 3, kde klesly téměř o 80 % oproti scénářům se dvěma pilíři. Tyto pruty, v nichž jsou maximální síly, jsou na obrázcích vyznačeny zeleně.

Třetí část tvoří porovnání napětí způsobeného tlakem či tahem. Tato část slouží zejména k porovnání analytických scénářů. U numerických se už vyskytuje i ohyb, který dané napětí zvyšuje v krajních vláknech profilu. Výsledky napětí i pruty, ve kterých toto napětí působí, jsou téměř totožné mezi scénářem 1 a 2. U scénáře 3 pak z důvodu nižších sil jsou i nižší napětí. Verifikace numerickým řešením se liší o 1 MPa, to je nejspíš způsobeno výpočtem ploch příčných průřezů. Prut s maximálním napětím od tahu a tlaku je vykreslen modře, pokud se jedná zároveň i o prut s největším napětím v celé konstrukci, pak je vykreslen červeně.

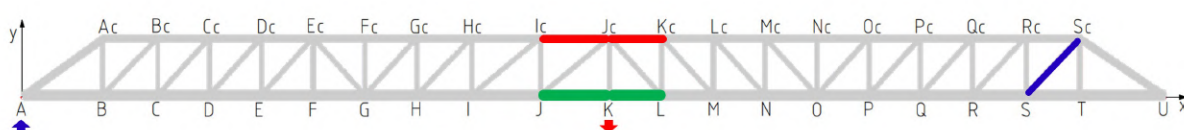
²Celkové normálové napětí v krajních vláknech, tedy tah (tlak) a k němu přičtený ohyb.

³Oproti jiným scénářům.

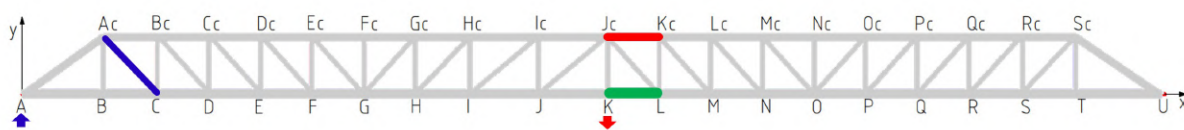
Další část už porovnává největší celková napětí v normálové rovině, tedy i s připočtením ohybu. U scénářů 1, 2 a 3, kde se ohyb nevyskytuje, se bere jako největší napětí od tahu či tlaku. Zatímco u analytických výpočtů se maximální napětí nachází v prutech s průřezy L100 (obrázky 87, 88 a 89), tak při přidání napětí od ohybu se kritické místo přeneso na krajní pruty s průřezem L45. Jak je vidět například na obrázku 90 a 91. Kritické pruty s maximálním napětím jsou zobrazeny červeně.

Porovnání bezpečnosti pak vychází z maximálních napětí. Bezpečnost vzhledem k MSP se pohybuje okolo 1,94. U scénáře 5 však poklesne na 1,74, a to z důvodu velkého zatížení krajních prutů s průřezem L45 ohybem. Pro scénář 3 je bezpečnost největší (2,41).

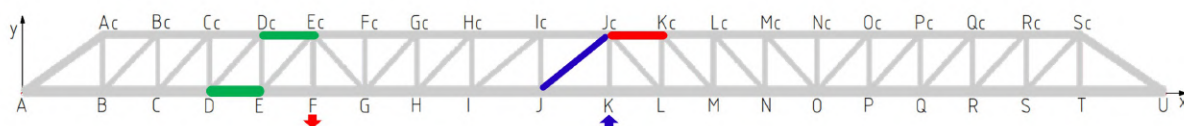
Poslední část porovnává deformace. Pro scénáře v tabulce 5 se pohybuje kolem 45 mm. Pro 3D model pak průhyb poklesl na 30 mm, z důvodu již zmíněného přidání prutů pod mostovku. Nejmenší průhyb je pak u scénáře 3, kde mu brání přidaná vazba. Místo největšího průhybu je na obrázcích znázorněno červenou šipkou dolů (↓).



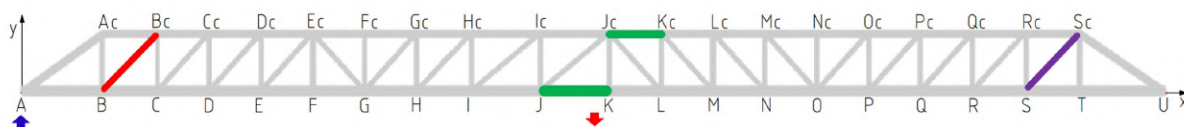
Obrázek 87: Nebezpečná místa pro scénář 1 (Analytický, Link)



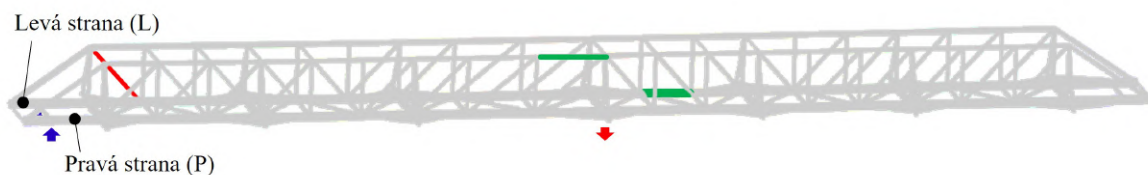
Obrázek 88: Nebezpečná místa pro scénář 2 (Analytický, Link)



Obrázek 89: Nebezpečná místa pro scénář 3 (Analytický, Link)



Obrázek 90: Nebezpečná místa pro scénář 4 (Beam)



Obrázek 91: Nebezpečná místa pro scénář 5 (3D, Beam)

Z těchto porovnání vyplývá, že kritická oblast (obrázek 92), kde jsou síly i napětí největší, se nachází uprostřed konstrukce. Kritické jsou zde především pruty průřezů L100 a U140. Naopak na okrajích konstrukce jsou nejvíce zatíženy pruty s průřezy L45 (na obrázku 92 červeně). Tyto pruty jsou zatíženy srovnatelným napětím s pruty uprostřed.



Obrázek 92: Kritická oblast a pruty

Závěr

Tato bakalářská práce se zabývala napjatostně deformační analýzou lávky u Jedovského mlýna nacházející se přes řeku Oslavu.

Před řešením problematiky konkrétní konstrukce bylo nutné shrnout teoretické znalosti k výpočtům, které byly použity. Jednalo se především o teorii ze statiky a pružnosti. Konkrétně pak o předpoklady pro lineární pružnost a pevnost, Saint-Venantův princip, prutové předpoklady, VVÚ, Charakteristiky příčných průřezů a napjatost v prutu. Také byly zmíněny předpoklady pro speciální druh soustav prutů a to prutové soustavy. Dále pro řešení staticky neurčitých soustav či deformací byla zapotřebí znalost Castiglianovy věty. Pro vyhodnocení bezpečnosti pak byla nutná znalost mezních stavů. Jelikož se jednalo pouze o výpočet modelu reálné konstrukce, tak zde byly také uvedeny rozdíly výpočtového modelu a reálné konstrukce. Vzhledem k tomu, že byla použita metoda konečných prvků, byla zde nastíněna i její podstata.

Protože lávky a mosty patří do skupiny mostních objektů, které spadají pod české a evropské normy, tak zde bylo nutné objasnit základní názvosloví. Bylo zde stanoveno maximální přípustné zatížení konstrukce dle normy.

Dále se pozornost zaměřila už na konkrétní lávku. Byla zjištěna veškerá dochovaná historie k této lávce. Jednalo se především o ústní sdělení, protože lávka je stará a neexistuje k ní žádná dokumentace. Z důvodu absence výkresové či materiálové dokumentace bylo nutné si tyto informace obstarat vlastní cestou. K tomu bylo provedeno měření na reálné konstrukci a následně vymodelování modelu v CAD programu. Stále ale chyběla materiálová data. Tato data byla určena z ČSN norem, které byly nalezeny podle odměřených profilů. Zvolen byl nejhorší možný materiál, který vyhovoval pro použití na tuto konstrukci, a zároveň byl používán pro výrobu těchto profilů. Tato volba byla z důvodu zachování co nejkonzervativnějšího řešení.

Následovalo vytvoření výpočtových modelů. Konkrétně pro obecnou metodu styčnickovou tak, aby model splňoval předpoklady pro prutové soustavy. Pro analytické řešení byl použit program Matlab. Odchylkou od klasického řešení touto metodou byl zápis rovnic pomocí vektorů namísto souřadnic, a použití kolinearity vektorů místo úhlů, které svírají jednotlivé pruty. Díky tomuto je skript lépe editovatelný a dokáže reagovat na lehkou změnu geometrie bez nutnosti úpravy rovnic. Toto řešení bylo provedeno pro tři verze modelů (v práci nazýváno scénáře). První scénář byl modelem pravé strany konstrukce. V případě druhého se jednalo o model levé strany, a třetí scénář porovnával změnu napětí a deformace po přidání středového pilíře. Přidáním pilíře, tedy vazby, se soustava stala jedenkrát externě staticky neurčitá.

Pravá a levá strana se lišila ve skladbě prutů, oba scénáře byly porovnány, a jako vhodnější pro použití se jeví skladba na pravé straně konstrukce. Velikost napětí se příliš neměnila, ale měnilo se jeho znaménko. Na levé straně bylo více prutů namáhaných tahem, což je z hlediska možného šíření trhlin nebezpečnější. Ostatně toto potvrdila i simulace 3D modelu (scénář 5).

Protože modely prutových soustav příliš dobře nepopisovaly chování reálné lávky, tak bylo přidáno řešení metodou konečných prvků v programu Ansys. První tři scénáře pouze verifikovaly analytické řešení za pomoci prvků Link. Čtvrtý scénář použil stejnou geometrii jako první, ale byly použity prvky Beam, které přenášejí i ohyb. Pátý scénář byl nejreálnějším modelem, byl prostorový, zatížen tíhovým zrychlením a tlakem na mostovku od chodců. Tvořily ho prvky Beam a Shell.

Další úsek této práce se zabýval průchodem chodců přes mostovku. V první části byl použit model ze scénáře 1 a bylo analyticky vypočítáno, jak se konstrukce chová při postupném zatěžování styčnicků. Toto zatěžování mělo simulovat právě zmíněný průchod chodců. Druhá část byla zaměřena na frekvenci kroků procházejících lidí a její porovnání s vlastní frekvencí konstrukce.

Na konci byly porovnány scénáře zmíněné v předchozích odstavcích. Z tohoto porovnání vyplývalo, že ačkoliv je styčnicková metoda zastaralá, tak poměrně přesně dokáže určit kritická místa na konstrukci. S hodnotami napětí v těchto místech už je to mírně horší a nejsou natolik přesné jako u 3D modelu. O tomto svědčila bezpečnost $k_{k1} = 1,95$ u analytického výpočtu oproti bezpečnosti $k_{k5} = 1,74$ u 3D modelu. Ačkoli při porovnání 2D modelu s prvky Beam a prutovou soustavou jsou hodnoty podobné. Bezpečnost, kterou udával 3D model je nižší a přesnější, z tohoto důvodu se dnes používá výhradně numerických metod. Pro snadné zjištění kritických oblastí byla však styčnicková metoda na 2D modelu shledána stále vhodnou.

Bylo zjištěno, že kritická místa se nachází uprostřed konstrukce. Jejich přesné umístění bylo popsáno v této práci. Obecně se jednalo o pruty spodních a horních nosníků, které byly nejvíce zatíženy uprostřed své délky (uprostřed lávky). Pro zvýšení bezpečnosti vzhledem k meznímu stavu pružnosti v tomto místě by bylo nutné zvětšit příčné průřezy nosníků, ale vzhledem k délce nosníků by se tímto velice zvedla hmotnost celé konstrukce. Vhodnějším řešením na zlepšení této bezpečnosti se zdá zvětšení malých průřezů prutů na okraji konstrukce (jejich konkrétní umístění je zobrazeno v této práci), ve kterých je napětí ještě o něco větší než u prutů uprostřed, konkrétně 112 MPa (tah). Pruty jsou krátké a zvětšením jejich průřezu by se příliš nezvýšila hmotnost konstrukce. Kdyby se touto změnou eliminovaly extrémní napětí v těchto krátkých prutech a zůstaly by pouze v prutech horních, kde se napětí pohybuje okolo -95 MPa (tlak), tak by bezpečnost z 1,74 narostla na hodnotu 2,05. Navíc v prutech zatížených tlakem je daleko menší nebezpečí z hlediska šíření trhlin.

Byl také hledán vliv poškozených či chybějících prutů na celkovou bezpečnost konstrukce. Za tímto účelem byl porovnán 3D model, kde se nacházely všechny pruty s modelem, kde poškozené či chybějící pruty byly odebrány. Simulace ukázaly, že absence těchto prutů nemá žádný vliv na bezpečnost, nejedná se totiž o nosné pruty.

I když na lávce nebude provedena ani jedna z výše zmíněných úprav, tak stále má vzhledem k meznímu stavu pružnosti bezpečnostní rezervu.

Seznam použitých zdrojů

- [1] GOULD, P.L. *Introduction to Linear Elasticity*. Springer New York, 2013. SpringerLink : Bücher. ISBN 9781461448334. Dostupné také z: <https://books.google.cz/books?id=HVVDAAAQBAJ>.
- [2] JANÍČEK, Přemysl. *Mechanika těles: pružnost a pevnost I*. První vydání. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2004. ISBN 80-214-2592-X.
- [3] ŠEBEK, František. *Přednášky z pružnosti a pevnosti I: (4PP) Letní semestr, akad. rok 2021/2022, Základy strojního inženýrství*. 2022. vyd. VUT FSI Brno, 2022. Dostupné také z: https://www.youtube.com/watch?v=W9EtkVHJxIk%20,%20https://www.youtube.com/watch?v=_Ettk4s60eQ.
- [4] FLORIAN, Zdeněk; PŘIKRYL, Karel; ONDRÁČEK, Emanuel. *Mechanika těles - statika*. Vyd. 3. Brno: PC-DIR, 1995. ISBN 80-214-0694-1.
- [5] MEGSON, T. H. G. *Structural and stress analysis*. 2nd ed. Boston: Elsevier Butterworth Heineman, 2005. ISBN 07-506-6221-2.
- [6] PETRUŠKA, Jindřich. *Přednášky z pružnosti a pevnosti I: (4PP) Letní semestr, akad. rok 2021/2022, Základy strojního inženýrství*. 2022. vyd. VUT FSI Brno, 2022. Č. 2/26. Dostupné také z: <https://www.youtube.com/watch?v=u3FycxMRejk>.
- [7] *Wikipedia: Mostní ložisko* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001 [cit. 2022-12-10]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Mostn%C3%AD_lo%C5%BEisko.
- [8] *Vlečky, vlečkové systémy, důlní dráhy*. Kralupy nad Vltavou: Společnost přátel kolejové dopravy, [b.r.]. Dostupné také z: <https://www.k-report.net/diskuse/archiv2011/28/1716.html%5C#POST2351976>.
- [9] NÁVRAT, Tomáš. *Přednášky z řešení základních úloh mechaniky těles pomocí MKP: 5KP, Zimní semestr, akad. rok 2022/2023, Základy strojního inženýrství*. 2022. vyd. VUT FSI Brno, 2022. Dostupné také z: https://www.youtube.com/watch?v=_51U9UMZW9A.
- [10] *List of finite element software packages* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001 [cit. 2023-01-23]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_finite_element_software_packages.
- [11] *ČSN 73 6200: Mosty - Terminologie a třídění*. Praha: Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, 2011.
- [12] *Most přes Svratku v Jimramově* [online]. Praha: Business Media One, s. r. o., 2015 [cit. 2023-01-25]. Dostupné z: https://www.imaterialy.cz/rubriky/zajimava-stavba/most-pres-svratku-v-jimramove_42500.html.
- [13] *King post* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2023 [cit. 2023-03-31]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/King_post#cite_note-6.
- [14] *King post: Architecture* [online]. Fandom [cit. 2023-03-31]. Dostupné z: https://wikidwelling.fandom.com/wiki/King_post.

- [15] LEONI, John; ALBERTI, Leon Battista. *The ten books of architecture (Bks. I-X) (De re aedificatoria)*. London: Printed by Edward Owen, 1755. Dostupné také z: <https://ia801406.us.archive.org/2/items/TheArchitectureOfLeonBatista%20Alberti1785English/The%5C%20Architecture%5C%20of%5C%20Leon%5C%20Batista%5C%20Alberti%5C%20-%5C%201785%5C%20-%5C%20English.pdf>.
- [16] *Lucerne's landmarks: the Chapel Bridge and its Water Tower* [online]. Luzern Tourismus AG [cit. 2023-01-30]. Dostupné z: <https://www.luzern.com/en/highlights/the-city/lucernes-landmarks-the-chapel-bridge/>.
- [17] *KAPELLBRÜCKE: Vor 20 Jahren brannte die Kapellbrücke* [online]. 2013. [cit. 2023-01-30]. Dostupné z: <https://www.luzernerzeitung.ch/nachrichten/zentralschweiz/luzern/Vor-20-Jahren-brannte-die-Kapellbruecke;art92,283526>.
- [18] *Bridge of lucerne: The Water Tower is a special monument* [online]. City of Lucerne [cit. 2023-03-31]. Dostupné z: <https://chapel-bridge.ch/hintergruende/water-tower/>.
- [19] *Truss bridge* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2023 [cit. 2023-01-30]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Truss_bridge.
- [20] *Truss bridge: engineering* [online]. Encyclopædia Britannica, Inc., 2023 [cit. 2023-01-30]. Dostupné z: <https://www.britannica.com/technology/truss-bridge>.
- [21] *ČSN 73 6205: Navrhování ocelových mostů*. Praha: Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, 1999.
- [22] *ČSN 10025-1: Výrobky válcované za tepla z konstrukčních ocelí*. Praha: Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, 2005.
- [23] *ČSN 41 1375: Ocel 11 375*. Praha: Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, 1977.
- [24] LEINVEBER, Jan; VÁVRA, Pavel. *Strojnické tabulky: pomocná učebnice pro školy technického zaměření*. 4., dopl. vyd. Úvaly: Albra, 2008. ISBN 978-80-7361-051-7.
- [25] *ČSN 73 6222: Zatížitelnost mostů pozemních komunikací*. Praha: Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, 2013.
- [26] KUČEROVÁ, Lucie. *Před tříadvaceti lety odnášela voda i auta* [online]. VLTAVA LABE MEDIA a.s., 2008 [cit. 2023-02-18]. Dostupné z: https://zdarsky.denik.cz/zpravy_region/pred-triadvaceti-lety-odnasela-voda-i-auta20081223.html.
- [27] Povodňové přívaly: Vydatné dešťové srážky na českomoravské vrchovině. *Rudé právo*. 1985, č. 5/23, s. 3. ISSN 0032-6569.
- [28] *Říční kilometr* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2022 [cit. 2023-01-27]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/%C5%98%C3%AD%C4%8Dn%C3%AD_kilometr.
- [29] *Řeka Oslava* [online]. [cit. 2023-01-27]. Dostupné z: https://www.raft.cz/morava/oslava.aspx?ID_reky=96.
- [30] *Mapy.cz: Jedovský mlýn* [online]. Seznam.cz a.s. [cit. 2023-01-30]. Dostupné z: <https://mapy.cz/zakladni?l=0%5C&x=16.1575469%5C&y=49.2165856%5C&z=16>.

- [31] HUERTA, Santiago. *Arch bridge design in eighteenth-century France*. Madrid: Universidad Politécnica de Madrid, 2018. Dostupné také z: https://www.academia.edu/64945543/Arch_bridge_design_in_eighteenth_century_France_The_rule_of_Perronet.
- [32] DELONY, Eric. *Context for World Heritage Bridges* [online]. ICOMOS a TICCIH, 1996 [cit. 2023-04-16]. Dostupné z: <https://www.icomos.org/en/component/content/article/116-english-categories/resources/publications/234-context-for-world-h>.
- [33] WHIPPLE, Squire. *A Work on Bridge Building*. Utica: H. H. Curtiss, printer, Devereux block, 1847. Dostupné také z: https://www.google.cz/books/edition/A_Work_on_Bridge_Building/inwIAAAAMAAJ?hl=cs&gbpv=1.
- [34] *Scientific Programming Language* [online]. John W. Eaton, 2023 [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://octave.org>.
- [35] PETRUŠKA, Jindřich. *Přednášky z řešení základních úloh mechaniky těles pomocí MKP: 5KP, Zimní semestr, akad. rok 2022/2023, Základy strojního inženýrství*. 2022. vyd. VUT FSI Brno, 2022. Dostupné také z: <https://www.youtube.com/watch?v=1ZUh30k3Y24>.
- [36] M. J. TURNER R. W. Clough, H. C. Martin; TOPP, L. J. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. *Journal of the Aeronautical Sciences*. 1956, roč. 23, č. 9, s. 805–854. Dostupné z DOI: [10.2514/8.3664](https://doi.org/10.2514/8.3664).
- [37] MUELLER, Guenter. *50 years of ANSYS – the early years: from 1970 to 1994* [online]. cadfem.net, 2007 [cit. 2023-04-24]. Dostupné z: <https://www.cadfem.net/en/cadfem-informs/media-center/cadfem-journal/50-years-of-ansys.html>.
- [38] *Fe Grade Steels: Grade Fe360, Fe430, Fe510 steels* [online]. Geocentrix Ltd., 2004 [cit. 2023-02-04]. Dostupné z: https://www.geocentrix.co.uk/help/content/items/steels/fe_grade_steels.htm.
- [39] *Vlastnosti vlnitých kosočtvercových plechů* [online]. iBuilder, 2001 [cit. 2023-03-30]. Dostupné z: <https://ibuilder-cs.techinfus.com/metallicheskij-list/riflanye-rombicheskie/>.

Seznam použitých zkratek a symbolů

Zkratka	Význam
ČSN	česká státní norma
GOST	soubor norem obhospodařovaných nadnárodní Euroasijskou radou pro normalizaci, původně se jednalo o normy Sovětského svazu
ISO	mezinárodní organizace pro normalizaci (the International Organization for Standardization)
L100	označení průřezu profilu L 100 × 65 × 10 - ČSN 42 5545
L45	označení průřezu profilu L 45 × 4 - ČSN 42 5541
MKP	metoda konečných prvků
MSP	mezní stav pružnosti
U140	označení průřezu profilu U 140 - ČSN 42 5570
VVÚ	výsledné vnitřní účinky

Symbol	Veličina
\vec{A}	vektor, který označuje polohu styčnicku A se souřadnicemi x a y
\vec{Ac}	vektor, který označuje polohu styčnicku Ac se souřadnicemi x a y
\vec{B}	vektor, který označuje polohu styčnicku B se souřadnicemi x a y
$\vec{\chi} \dots$	vektor, který označuje polohu styčnicků χ , pro styčnicku A až U
\vec{AAc}	vektor označující rozměry prutu AAc
\vec{AB}	vektor označující rozměry prutu AB
$\vec{\chi\psi} \dots$	vektory označující rozměry prutů $\chi\psi$, pro pruty AAc až TU
E	modul pružnosti
f_0	vertikální vlastní frekvence lávky
\vec{FA}	síla působící na styčnick A
\vec{FAc}	síla působící na styčnick Ac
$\vec{F\chi} \dots$	síly působící na styčnick χ , pro styčnicku A až U
\vec{FAAc}	normálová síla v prutu AAc
\vec{FAB}	normálová síla v prutu AB
$\vec{F\chi\psi}$	normálová síla v prutu $\chi\psi$, pro pruty AAc až TU
FAv	síla ve vazbě A
$\vec{F_g}$	tíhová síla od hmotnosti celé lávky
$\vec{F_{gs}}$	tíhová síla od hmotnosti celé lávky rozpočítaná na jeden styčnick
f_{kroky}	interval možných frekvencí kroků
f_{kroky_p}	frekvence kroků první osoby
FKv	síla ve vazbě K

Symbol	Veličina
F_{ss}	výsledná síla působící na jeden spodní styčnick
F_{Uv}	síla ve vazbě U
\vec{F}_{ws}	síla od chodců rozpočítaná na jeden styčnick
\vec{g}	gravitační zrychlení
h	výška modelu lávky
J	kvadratický moment
k	počet styčnicků
k_c	celkový počet styčnicků na modelu lávky
k_k	bezpečnost k meznímu stavu pružnosti
k_s	počet spodních styčnicků na jedné straně
k_{sc}	celkový počet spodních styčnicků
L_{AAc}	délka prutu AAc
L_{AB}	délka prutu AB
$L_{\chi\psi} \dots$	délky prutů $\chi\psi$, pro pruty AAc až TU
M_K	krouticí moment
M_O	ohybový moment
m	hmotnost lávky
N	normálová síla
p	počet prutů
S_{lavka}	provozní plocha lávky (prostor pro chodce)
S_{L100}	Plocha průřezu L 100 × 65 × 10 - ČSN 42 5545
S_{L45}	Plocha průřezu L 45 × 4 - ČSN 42 5541
S_{U140}	Plocha průřezu U 140 - ČSN 42 5570
S_χ	Obsah dle indexu χ
s_e	vnější statická určitost
s_i	vnitřní statická určitost
F_w	celková síla od chodců stojících na mostovce
T	tečná síla
\mathbf{T}_ϵ	tenzor přetvoření
v_χ	posuv ve směru osy y v místě dle indexu χ
W	energie napjatosti
W_K	průřezový modul v krutu
W_O	průřezový modul v ohybu
w_1	zatížitelnost pro 1 ciklistu s jízdním kolem nacházejícího se na 1 m ²
w_4	zatížitelnost pro 4 osoby nacházející se na 1 m ²
w_f	normální zatížitelnost veřejných lávek pro chodce a ciklisty
w_m	mezní normální zatížitelnost veřejných lávek pro chodce a ciklisty

Symbol Veličina

w_{max}	největší zatížení od chodců na mostovku
x	osa x
y	osa y
z	osa z
β_{AAc}	úhel svírající prut AA _c s osou x souřadného systému
β_{AB}	úhel svírající prut AB s osou x souřadného systému
Γ	bezprostřední okolí silové náhrady
γ_χ	úhlové přetvoření hran dle indexů χ
δ	dynamický součinitel
ϵ_χ	přetvoření ve směru dle indexu χ
μ	Poissonovo číslo
μ_A	odebrané stupně volnosti vazbou A
μ_e	použitelné vnější rovnice statické rovnováhy
μ_i	použitelné vnitřní rovnice statické rovnováhy
μ_K	odebrané stupně volnosti vazbou K
μ_U	odebrané stupně volnosti vazbou U
ν	matice pohyblivosti
ν_e	počet vnějších neznámých parametrů
ν_i	počet vnitřních neznámých parametrů
ξ	počet odebraných stupňů volnosti
ρ	hustota oceli
σ_{FAAc}	napětí v prutu AA _c
σ_{FAB}	napětí v prutu AB
$\sigma_{F\chi\psi}$	napětí v prutech $\chi\psi$, pro pruty AA _c až TU
σ_χ	napětí v normálové rovině v místě dle indexu χ
σ_K	napětí od krouticího momentu
σ_O	napětí od ohybového momentu
τ_χ	napětí v tečné rovině v místě dle indexu χ
ϕ	odchylka vektoru