

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ  
ÚSTAV VÝKONOVÉ ELEKTROTECHNIKY A ELEKTRONIKY

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION  
DEPARTMENT OF POWER ELECTRICAL AND ELECTRONIC ENGINEERING

VÝPOČET OPTIMÁLNÍHO ROTOROVÉHO KMITOČTU  
ASYNCHRONNÍHO MOTORU ZA ÚČELEM MINIMALIZACE  
ZTRÁT

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE  
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

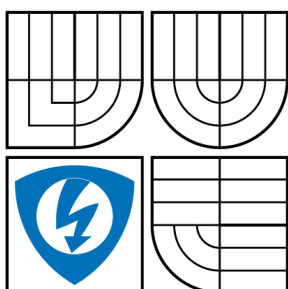
MARTIN PRUDÍK

BRNO 2009



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH  
TECHNOLOGIÍ

ÚSTAV VÝKONOVÉ ELEKTROTECHNIKY A  
ELEKTRONIKY

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION  
DEPARTMENT OF POWER ELECTRICAL AND ELECTRONIC  
ENGINEERING

## VÝPOČET OPTIMÁLNÍHO ROTOROVÉHO KMITOČTU ASYNCHRONNÍHO MOTORU ZA ÚČELEM MINIMALIZACE ZTRÁT

CALCULATION OF THE OPTIMUM SLIP FREQUENCY WITH RESPECT TO THE MINIMUM  
LOSSES OF AN INDUCTION MOTOR

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

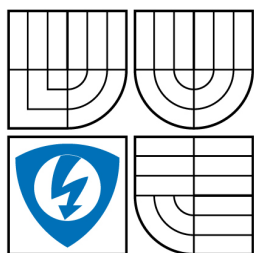
MARTIN PRUDÍK

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. PAVEL VOREL, Ph.D.

BRNO 2009



VYSOKÉ UČENÍ  
TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta elektrotechniky  
a komunikačních technologií

Ústav výkonové elektrotechniky a elektroniky

# Bakalářská práce

bakalářský studijní obor

Silnoproudá elektrotechnika a elektroenergetika

**Student:** Martin Prudík

**ID:** 103218

**Ročník:** 3

**Akademický rok:** 2008/2009

## NÁZEV TÉMATU:

### Výpočet optimálního rotorového kmitočtu asynchronního motoru za účelem minimalizace ztrát

## POKYNY PRO VYPRACOVÁNÍ:

1. Na základě SP a podle pokynů vedoucího sestavte přehledný dokument obsahující podrobné matematické odvození rovnic pro výpočet optimálního rotorového kmitočtu.
2. Vytvořte soubor v programu EXCEL nebo vytvořte jiný software pro řešení soustav nelineárních rovnic, které se v problematice vyskytují (iterační metodou).
3. Proveďte výpočet optimálního rotorového kmitočtu v širokém rozsahu momentu a otáček pro motor dodaný vedoucím práce.

## DOPORUČENÁ LITERATURA:

Dle doporučení vedoucího.

**Termín zadání:** 1.10.2008

**Termín odevzdání:** 29.5.2009

**Vedoucí práce:** doc. Ing. Pavel Vorel, Ph.D.

**doc. Ing. Čestmír Ondrůšek, CSc.**

*Předseda oborové rady*

## UPOZORNĚNÍ:

Autor bakalářské práce nesmí při vytváření bakalářské práce porušit autorská práva třetích osob, zejména nesmí zasahovat nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a musí si být plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení § 152 trestního zákona č. 140/1961 Sb.

## **ABSTRAKT**

V díle je odvozen matematický aparát popisující výpočet optimálního rotorového kmitočtu asynchronního motoru s kotvou nakrátko. Odvození je provedeno pomocí náhradního  $\Gamma$ -článku a je konstruováno pro široké rozmezí otáček a zátěžných momentů. Konstanty náhradního článku motoru, požadovaný moment a otáčky jsou vstupy optimalizace. Optimální rotorový kmitočet a velikost napájecího napětí jsou výstupy této optimalizace. Odvozený matematický aparát je prezentován výpočty na dvou asynchronních motorech pro různé otáčky a zatížení.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

Asynchronní motor, trakční pohon, optimální skluzový kmitočet, vysoká účinnost.

## **ABSTRACT**

A mathematical model describing the calculation of the optimal slip frequency of an Induction Motor with squirrel-cage is proposed in this work. The derivation is done using a replace  $\Gamma$ -network, and is designed for a wide range of speeds and torque. The requested torque, speed and constants of replacement network are the inputs of the optimization. Optimum slip frequency and corresponding line voltage are the outputs of this optimization. The results of the calculations are presented using two asynchronous machines for different speed and torque.

## **KEYWORDS**

Induction motor, high efficiency, traction drives, optimum slip frequency.

PRUDÍK Martin. *Výpočet optimálního kmitočtu rotorového proudu asynchronního motoru za účelem minimalizace ztrát*. Brno: Vysoké učení technické v Brně. Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií. Ústav výkonové elektrotechniky a elektroniky, 2009. 45 s. Vedoucí práce byl doc. Ing. Pavel Vorel, Ph.D.

## PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci na téma „Výpočet optimálního rotorového kmitočtu asynchronního motoru za účelem minimalizace ztrát“ jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené bakalářské práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této bakalářské práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení § 152 trestního zákona č. 140/1961 Sb.

V Brně dne .....

.....

(podpis autora)

## **Poděkování**

Děkuji vedoucímu bakalářské práce Doc. Ing. Pavlu Vorlovi, Ph.D. za účinnou metodickou, pedagogickou a odbornou pomoc a další cenné rady při zpracování mé bakalářské práce.

V Brně dne .....

Podpis autora .....

# OBSAH

Úvod	10
<b>1 Odvození výpočtu optimálního rotorového kmitočtu</b>	<b>12</b>
1.1 Analýza $\Gamma$ -článku asynchronního motoru . . . . .	12
1.2 Rozbor ztrát . . . . .	13
1.2.1 Ztráty v mědi statoru . . . . .	14
1.2.2 Ztráty v mědi rotoru . . . . .	14
1.2.3 Ztráty v železe statoru . . . . .	14
1.3 Vliv přesycování magnetického obvodu . . . . .	15
1.3.1 Lineární aproximace přesycování $L_1$ . . . . .	16
1.4 Nalezení vztahů pro jednotlivé ztráty jako funkce parametrů $\Gamma$ -článku, otáček, momentu a rotorového kmitočtu . . . . .	18
1.4.1 Moment a proud jako funkce $\Omega_r, \Omega_m, U$ . . . . .	18
1.4.2 Napětí jako funkce $M, \Omega_r, \Omega_m$ . . . . .	18
1.4.3 Proud jako funkce $M, \Omega_r, \Omega_m$ . . . . .	19
1.4.4 Ztráty v mědi statoru jako funkce $M, \Omega_r, \Omega_m$ . . . . .	19
1.4.5 Napětí $U_1$ jako funkce $M, \Omega_r, \Omega_m$ . . . . .	20
1.4.6 Ztráty v železe jako funkce $M, \Omega_r, \Omega_m$ . . . . .	21
1.5 Hledání optimálního rotorového kmitočtu . . . . .	22
1.5.1 Malé otáčky . . . . .	22
1.5.2 Velké otáčky . . . . .	28
<b>2 Modelování ztrát v programu Matlab</b>	<b>31</b>
2.1 Simulace konkrétních motorů . . . . .	31
2.1.1 Motor 1LA7063-4AB . . . . .	31
2.1.2 Motor 1LA5183-2AA . . . . .	34
2.2 srovnání výpočtů se simulací v MATLABu . . . . .	36
<b>3 Výpočty optimálního skluzového kmitočtu pro konkrétní motory</b>	<b>37</b>
3.1 Přepočítání T-článku na $\Gamma$ -článek . . . . .	37
3.2 Princip použití matematického aparátu . . . . .	39
3.3 Výpočet optimálního rotorového kmitočtu pro motor 1LA7 070-4AB .	39
3.4 Výpočet optimálního rotorového kmitočtu pro motor 1LA5 183-2AA .	41
<b>4 Závěr</b>	<b>43</b>
<b>Literatura</b>	<b>45</b>

# SEZNAM OBRÁZKŮ

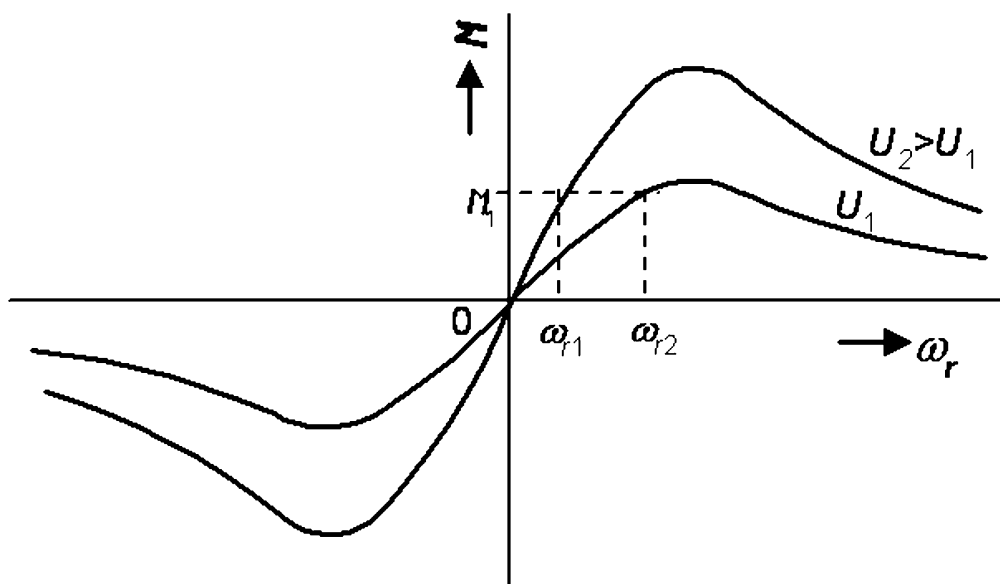
1	Momentová charakteristika asynchronního motoru . . . . .	10
1.1	Náhradní schéma asynchronního motoru ve tvaru článku $\Gamma$ . . . . .	12
1.2	Indukčnost při přesycování motoru naprazdno . . . . .	16
1.3	Indukčnost při přesycování motoru . . . . .	17
2.1	Blokové schéma simulace v MATLABu . . . . .	31
2.2	Závislost $\Omega_r = \Omega_r(T)$ měřených a vypočtených hodnot pro motor 1LA7063-4AB . . . . .	32
2.3	Výsledné grafy $P = P(\Omega_r)$ simulace motoru 1LA7063-4AB . . . . .	33
2.4	Výsledné grafy $P = P(\Omega_r)$ simulace motoru 1LA5183-2AA . . . . .	35
3.1	K přechodu mezi náhradními schémata . . . . .	37
3.2	Výpočet pro motor 1LA7 070-4AB . . . . .	40
3.3	Výpočet pro motor 1LA5 183 - 2AA . . . . .	42

# SEZNAM TABULEK

2.1	Jmenovité hodnoty motoru 1LA7063-4AB . . . . .	32
2.2	Parametry převinutého motoru 1LA7063-4AB . . . . .	32
2.3	Jmenovité hodnoty motoru 1LA5183-2AA . . . . .	34
2.4	Parametry motoru 1LA5183-2AA . . . . .	34
3.1	Optimální $\Omega_r$ [ <i>rad/s</i> ] pro různé otáčky a moment motoru 1LA7 070 -4AB . . . . .	41
3.2	Optimální $\Omega_r$ [ <i>rad/s</i> ] pro různé otáčky a moment motoru 1LA5 183- 2AA . . . . .	42
4.1	Přehled výpočtu . . . . .	43

# ÚVOD

Jmenovitý skluzový kmitočet asynchronního stroje je volen tak aby při jmenovitých otáčkách a jmenovitém mechanickém zatížení stroje byla účinnost nejvyšší. Nicméně jestliže budeme muset měnit otáčky nebo zatížení stroje v širokém rozsahu, budou se měnit podmínky ve stroji, které mají za následek, že jmenovitý skluzový kmitočet nemusí být zrovna nejvhodnější. Tedy optimální skluzový kmitočet je proměnný. Jak bude ukázáno později, optimální velikost skluzového kmitočtu lze vypočítat a většina těchto výpočtů lze použít při vektorovém řízení daného stroje. Na obrázku 1 je zobrazena známá závislost momentu asynchronního stroje na jeho skluzovém kmitočtu. Je vidět, že požadovaný moment  $M_1$  může být dosažen pomocí změny napájecího napětí (mění se magnetická indukce ve statoru stroje) a k tomu odpovídající změnou skluzového kmitočtu.



Obr. 1: Momentová charakteristika asynchronního motoru

Máme tak mnoho možností jak docílit požadovaný moment. Ovšem nejlepší účinnost, která se odvíjí od minimalizace všech ztrát, bude dosažena jen při jedné optimální kombinaci napájecího napětí a skluzového kmitočtu. Tato závislost může být v krátkosti vysvětlena následujícím způsobem:

## Malé mechanické otáčky

Jestliže požadujeme malý moment (menší než jmenovitý) je lepší použít sycení přibližné jmenovitému a velmi malý rotorový kmitočet. Protože statorové otáčky (synchronní) jsou malé a tak ztráty v železe statoru jsou zanedbatelné, ačkoliv sycení

ve statoru je velké. Dále díky malému skluzovému kmitočtu budou ztráty ve vinutí rotoru také minimalizovány.

Při zatížení jmenovitým momentem je vhodné použít skluzový kmitočet, udávaný výrobcem motoru (udávaný na jmenovitém momentu a otáčkách), ačkoliv otáčky jsou nižší než jmenovité. Pokud bychom chtěli nechat skluzový kmitočet malý kvůli minimalizaci rotorových ztrát, pak by magnetická indukce ve statoru byla zbytečně vysoká. Protože jsou malé otáčky, tak se ztráty v železe nejeví tak důležité, ale jsou důležité ztráty ve vinutí statoru, které jsou velmi velké, kvůli velkým magnetizačním proudům v přesyceném magnetickém obvodu.

Problém se ztrátami ve vinutí statoru, kvůli magnetizačním proudům, se stává obzvláště důležitý při mechanickém přetěžování stroje. V tomto případě není dobré přesycovat stroj tak moc (neúměrné ztráty ve vinutí statoru od magnetizačního proudu) a je lepší zvýšit rotorový kmitočet za účelem zvýšení momentu.

### **Velké mechanické otáčky**

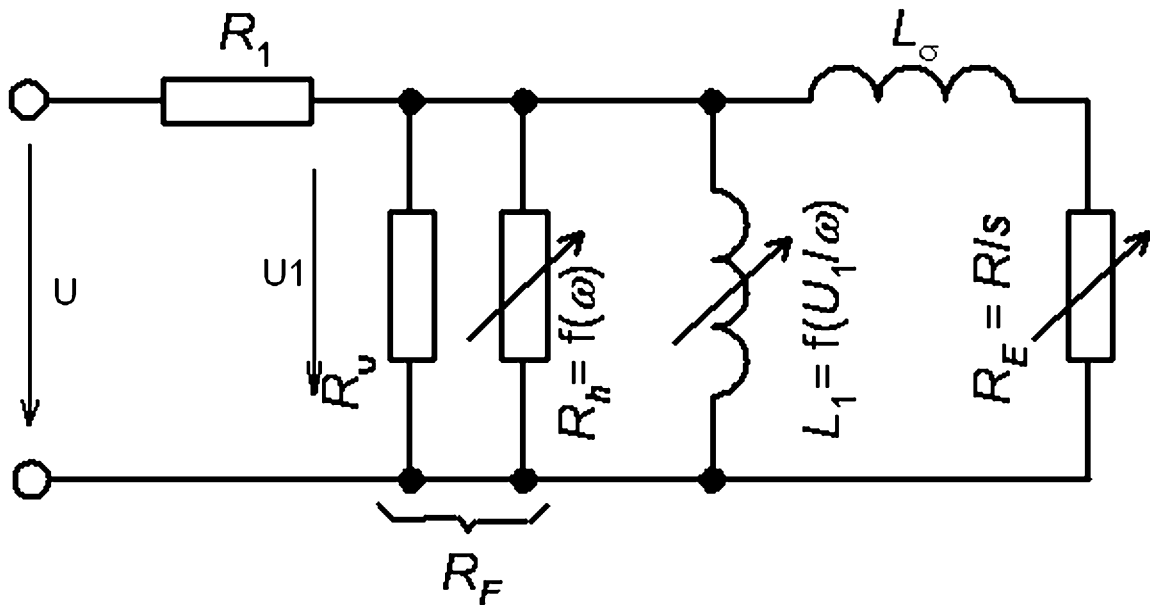
Při malém momentu není moc vhodné použít vyšší sycení a menší rotorový kmitočet, protože dominantní ztráty v železe tím jsou negativně ovlivněny. Při velkém momentu se tento problém projeví ještě více.

Výše uvedený problém bude matematicky popsán v tomto článku. Princip řešení spočívá v analytickém vyjádření všech významných ztrát stroje v závislosti na momentu, otáčkách a rotorovém kmitočtu. Moment a otáčky jsou vstupní požadované parametry a optimální rotorový kmitočet je výstup matematického aparátu. Bude tedy hledán vztah pro lokální minimum součtu všech ztrát. Skutečný asynchronní stroj si musíme nahradit nějakým modelem. Musíme proto zvolit náhradní schéma, pomocí kterého se dají jednoznačně popsat všechny ztráty. Z hlediska řešitelnosti je pro tyto účely nejvhodnější schéma ve tvaru  $\Gamma$ -článku, i když výrobci udávají katalogové hodnoty pro  $T$ -článek (odůvodnění v [3], str. 155). Dále bych rád podotknul, že veškeré teoretické odvození vypracoval doc. Ing. Pavel Vorel, Ph.D a je popsáno v [1] a [2].

# 1 ODVOZENÍ VÝPOČTU OPTIMÁLNÍHO ROTOROVÉHO KMITOČTU

## 1.1 Analýza $\Gamma$ -článku asynchronního motoru

Výrobci asynchronních motorů obvykle udávají hodnoty pro model zakládající se na T-článku. Náš matematický aparát se zakládá na  $\Gamma$ -článku (viz. obr. 1.1). Hodnoty v našem náhradním schématu dostaneme buď pomocí přepočtu nebo měřením.



Obr. 1.1: Náhradní schéma asynchronního motoru ve tvaru článku  $\Gamma$

Kde:

- $R_1$  odpor primárního vinutí
- $L_1$  hlavní magnetizační indukčnost
- $R_v$  odpor reprezentující ztráty vířivými proudy
- $R_h$  odpor reprezentující hysterézní ztráty
- $L_\sigma$  rozptylová indukčnost vinutí
- $R_E$  odpor nahrazující mechanickou zátěž

Pro tento článek napíšeme základní rovnice. Vycházíme přitom z [3], kde jsou odvozeny základní potřebné vztahy pro  $\Gamma$ -článek uvažovaného stroje:

$$M = \frac{3U^2 R p \Omega_r}{\left[ \left(1 + \frac{L_\sigma}{L_1}\right) R_1 \Omega_r + \left(1 + \frac{R_1}{R_F}\right) R \omega \right]^2 + \left[ \left(1 + \frac{R_1}{R_F}\right) \omega L_\sigma \Omega_r - \frac{R_1}{L_1} R \right]^2} \quad (1.1)$$

$$I = U \sqrt{\frac{\left[ \frac{\omega}{R_F} + \left(1 + \frac{L_\sigma}{L_1}\right) \frac{\Omega_r}{R} \right]^2 + \left[ \frac{\omega L_\sigma}{R_F R} \Omega_r - \frac{1}{L_1} \right]^2}{\left[ \left(1 + \frac{R_1}{R_F}\right) \omega + \left(1 + \frac{L_\sigma}{L_1}\right) \frac{R_1}{R} \Omega_r \right]^2 + \left[ \left(1 + \frac{R_1}{R_F}\right) \frac{\omega L_\sigma}{R} \Omega_r - \frac{R_1}{L_1} \right]^2}} \quad (1.2)$$

$$U_1 = U \frac{\omega L_1 R_F \sqrt{R_E^2 + (\omega L_\sigma)^2}}{\sqrt{\left( R_1 R_E R_F - \omega^2 L_1 L_\sigma (R_1 + R_F) \right)^2 + \left( \omega (L_1 + L_\sigma) R_1 R_F + \omega L_1 R_E (R_1 + R_F) \right)^2}} \quad (1.3)$$

Kde:

- $I$  je efektivní fázový proud tekoucí statorovým vinutím
- $U_1$  je efektivní hodnota napětí na indukčnosti  $L_1$

Pro skus  $s$  platí:

$$s = 1 - \frac{p \Omega_m}{\omega} = 1 - \frac{p \Omega_m}{p \Omega_m + \Omega_r} \quad (1.4)$$

Tedy:

$$\omega = p \Omega_m + \Omega_r \quad (1.5)$$

Pro odpor reprezentující mechanickou zátěž platí:

$$R_E = \frac{R}{s} = R \frac{p \Omega_m + \Omega_r}{\Omega_r} \quad (1.6)$$

Kde:

- $p$  počet pólpárů
- $\Omega_r$  skluzový kmitočet [rad/s]
- $\Omega_m$  otáčky na hřídeli [rad/s]
- $\omega$  synchronní otáčky [rad/s]

## 1.2 Rozbor ztrát

Pro nalezení minima ztrát je nutné znát závislosti jednotlivých ztrát na známých veličinách. Proto nejprve uděláme základní rozbor ztrát v asynchronním motoru.

### 1.2.1 Ztráty v mědi statoru

Ve statoru jsou Joulovy ztráty způsobeny procházejícím proudem.

$$P_{Cu} = 3RI^2 \quad (1.7)$$

### 1.2.2 Ztráty v mědi rotoru

Ve vinutí rotoru jsou Joulovy ztráty závislé na kmitočtu rotorového proudu, a na zatížení podle vztahu:

$$P_{rot} = M \frac{\Omega_r}{p} \quad (1.8)$$

### 1.2.3 Ztráty v železe statoru

V  $\Gamma$ -článku jsou celkové ztráty v železe reprezentovány paralelní kombinací  $R_h$  a  $R_v$ . Každý z odporů tak reprezentuje jeden princip vzniku ztrát.

#### Hysterézní ztráty

Jsou to ztráty provázející působení střídavého magnetizačního napětí  $U_1$  na plechy magnetického obvodu. Jsou vlastně úměrné obsahu hysterézní smyčky a protože plocha smyčky je úměrná kvadrátu magnetické indukce<sup>1</sup>, můžeme psát  $P_h \approx B^2\omega$ . Pro zachování konstantního sycení platí vztah<sup>2</sup>  $B \approx \frac{U_1}{\omega}$ . Můžeme tedy psát:

$$P_h \approx \frac{U_1^2}{\omega} \quad (1.9)$$

Je však nutné ztráty vyjádřit pomocí parametru  $R_h$  z náhradního schématu.

$$P_h = \frac{U_1^2}{R_h} \approx \frac{U_1^2}{\omega} \quad (1.10)$$

Z toho je jasné, že poměr  $R_h$  a  $\omega$  je konstantní. Velikost odporu se tedy bude měnit přímo úměrně kmitočtu napájení. Danou závislost jde zapsat následně pomocí známých nominálních hodnot  $R_{h0}$  a  $\omega_0$ .

$$R_h = \frac{R_{h0}}{\omega_0} \omega \quad (1.11)$$

---

<sup>1</sup>Při přesycování to není pravda, to ovšem ignorujeme. Protože sycení není v každém místě stejné. To znamená, že plocha smyčky by byla zhruba konstantní. Takže  $P_h = \frac{U_1^2}{R_h} \approx \omega$  ( $R_h$  by bylo nepřímo úměrné  $\omega$ ).

<sup>2</sup>Vychází se ze vztahu, že mag. tok je roven časovému integrálu z napětí.

## Ztráty vířivými proudy

Vznikají vlivem průchodu proudu feromagnetikem. Jsou závislé na  $\omega^2$  a  $B^2$ .

$$P_v \approx B^2 \omega^2 \approx \frac{U_1^2}{\omega^2} \omega^2 \approx U_1^2 \quad (1.12)$$

Tyto ztráty lze z náhradního schématu vyjádřit pomocí rovnosti:

$$P_v = 3 \frac{U_1^2}{R_v} \quad (1.13)$$

Je vidět, že „vířivý odpor“ je konstantní veličina nezávislá na kmitočtu.

Ztráty v železe rotoru zanedbáváme, neboť vlivem skluzového kmitočtu jsou poměrně malé a ventilační ztráty považujeme za mechanickou zátěž a proto je nepočítáme jako ztráty.

Fiktivní odpory  $R_h$  a  $R_v$  se při výpočtech nahrazují jejich paralelní kombinací označenou  $R_F$ :

$$R_F = \frac{R_v \frac{R_{h0}}{\omega_0} \omega}{R_v + \frac{R_{h0}}{\omega_0} \omega} \quad (1.14)$$

Potom pro celkové ztráty v železe platí vztah:

$$P_{Fe} = \frac{U_1^2}{R_F} \quad (1.15)$$

## 1.3 Vliv přesycování magnetického obvodu

Pro malé hodnoty sycení je v náhradním schématu  $L_1$  konstantní hodnota. Avšak v bodě kdy se magnetický obvod začíná nasycovat (zpravidla už při nižším sycení než jmenovitě) začne velikost  $L_1$  klesat. Zmenšení  $L_1$  má za následek zvětšení proudu<sup>3</sup> podle rovnice  $i = \frac{N\Phi}{L}$ . Do výpočtu je tak potřeba zahrnout vliv skutečnosti, že velikost  $L_1$  je závislá na poměru  $U_1/\omega$ .

---

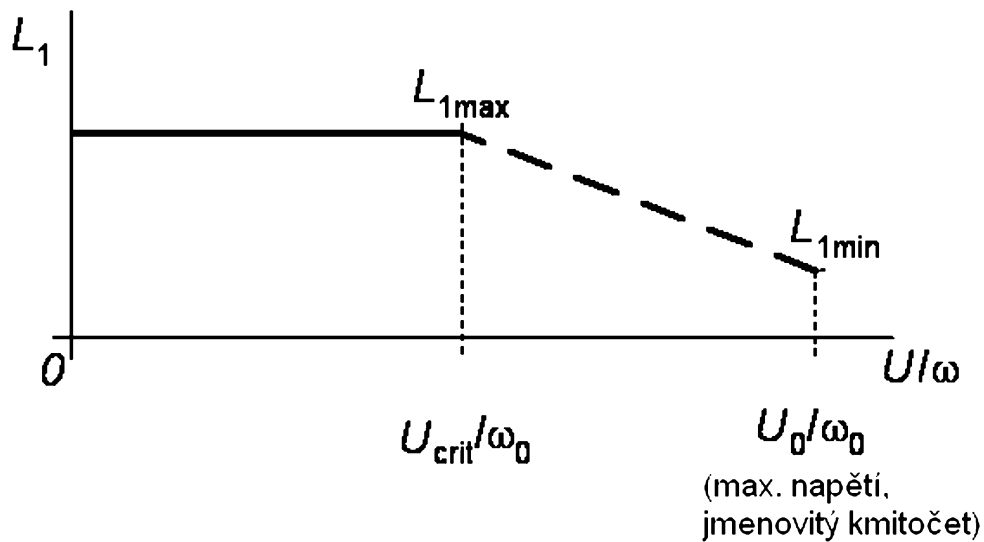
<sup>3</sup>Přesycení v mag. obvodu nastává jen v místě průchodu hlavního magnetického toku, takže nepříznivé zvětšení proudu nastane jen v tomto místě. Na celkový proud odebíraný ze zdroje nemá tento lokální výskyt podstatný vliv.

### 1.3.1 Lineární aproximace přesycování $L_1$

Pro získání potřebné závislosti  $L_1 = f(U_1/\omega)$ , musíme nejprve změřit závislost  $U$  na  $I$  pro motor mechanicky naprázdno. A to v rozsahu, v jakém hodláme daný stroj zatěžovat. Pro chod naprázdno lze uvažovat  $\Omega_r = 0rad$ . Rovnici (1.2) lze tedy podle tohoto předpokladu zjednodušit a vyjádřením  $L_1$  dostaneme:

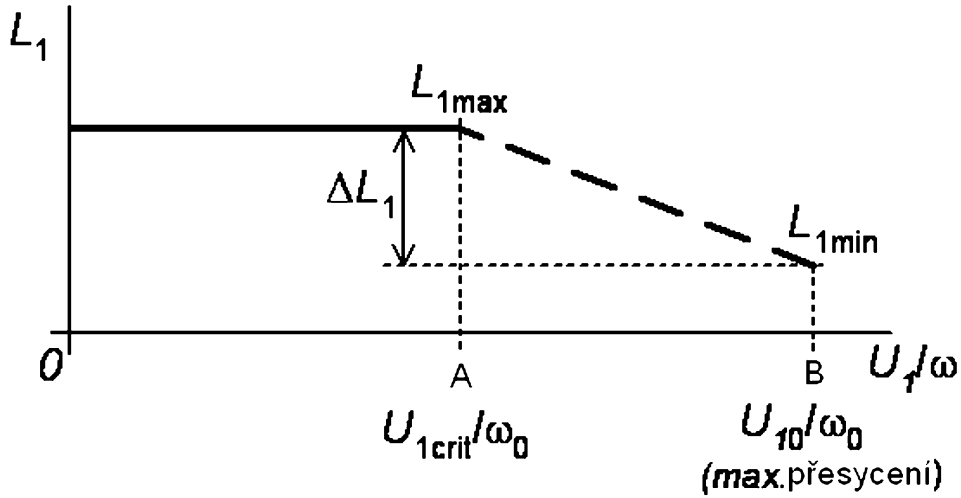
$$L_1 = \frac{U}{I\omega} \sqrt{\frac{1 - R_1^2 \left(\frac{I}{U}\right)^2}{1 - \frac{U^2}{R_F^2 I^2}}} \quad (1.16)$$

Lze spočítat  $L_1$  pro každou naměřenou dvojici  $I$  a  $U$ . Tím obdržíme závislost  $L_1 = f(U)$  za podmínky  $\omega_0$  odpovídající 50Hz. Ve vynesené závislosti na obrázku 1.2 je důležitý bod  $L_{1max}$ , je to indukčnost při nepřesyceném magnetickém obvodu. Indukčnost zůstane konstantní až do začátku přesycování  $U_{krit}/\omega_0$ . Při přesycení indukčnost lineárně klesá až do bodu maximálního přesycení  $U_0/\omega_0$ , kde je  $L_{1min}$  (viz. obr.1.2). To je ovšem platné pouze za podmínky motoru naprázdno.



Obr. 1.2: Indukčnost při přesycování motoru naprazdno

Při zatížení už na  $L_1$  bude napětí  $U_1$ , které je oproti  $U$  zmenšené o úbytek  $RI$ , způsobený proudem procházející statorovým vinutím. Takže musíme dostat závislost  $L_1 = f(U_1)$ . Tedy musíme zjistit závislost  $U_1$  na  $U$ . To už pak bude odpovídat skutečné velikosti přesycování a linearizace bude správná při jakémkoliv zatěžovacím momentu (obr.1.3). Při chodu motoru naprázdno uvažujeme nulový skluz, takže  $R_E$  a  $L_\sigma$  v náhradním schématu (obr.1.1) nebude procházet proud. Dále zanedbáme ztráty v železe, přes  $R_F$  poteče menší proud než přes  $L_1$  ( $R_F$  uvažujeme nekonečno). Za těchto podmínek lze  $\Gamma$ -článek považovat za napěťový  $R_1 - L_1$  dělič. Ve změřené závislosti jsou důležité body  $U_{krit}/\omega_0$  a  $U_0/\omega_0$ . Stačí tedy přepočítat tyto dvě napětí a máme naši požadovanou závislost  $L_1$  na sycení.



Obr. 1.3: Indukčnost při přesycování motoru

$$U_{1krit} = U_{krit} \frac{\omega_0 L_{1max}}{\sqrt{R_1^2 + \omega_0^2 L_{1max}}} \quad ; \quad U_{10} = U_0 \frac{\omega_0 L_{1min}}{\sqrt{R_1^2 + \omega_0^2 L_{1min}}} \quad (1.17)$$

Pro hodnoty  $A$  a  $B$  v obr.1.3 (kde  $A$  je bod nasycení a  $B$  bod maximálního přesycení) platí:

$$A = \frac{U_{1krit}}{\omega_0} = U_{krit} \frac{L_{1max}}{\sqrt{R_1^2 + \omega_0^2 L_{1max}}} \quad ; \quad B = \frac{U_{10}}{\omega_0} = U_0 \frac{L_{1min}}{\sqrt{R_1^2 + \omega_0^2 L_{1min}}} \quad (1.18)$$

V úseku A-B aproximujeme průběh  $L_1$  lineární závislostí na  $U_1/\omega$ . V této závislosti už nejsme závislí na  $\omega_0$  ale na obecném  $\omega$ , takže lze aproximaci použít pro obecný kmitočet.

$$L_1 = L_{1max} - \frac{\Delta L_1}{B - A} \left( \frac{U_1}{\omega} - A \right) \quad (1.19)$$

## 1.4 Nalezení vztahů pro jednotlivé ztráty jako funkce parametrů $\Gamma$ -článku, otáček, momentu a roto-rového kmitočtu

### 1.4.1 Moment a proud jako funkce $\Omega_r$ , $\Omega_m$ , $U$

#### Malé otáčky:

Vycházíme z rovnic (1.1) a (1.2) do kterých dosadíme podle vztahu (1.5). Přitom za  $1 + R_1/R_F$  dosadíme jedničku, protože odpor mědi  $R_1$  je mnohem menší než fiktivní odpor reprezentující ztráty v železe  $R_F$ .

$$M = \frac{3U^2 R p \Omega_r}{\left[ \left(1 + \frac{L_\sigma}{L_1}\right) R_1 \Omega_r + R (p \Omega_m + \Omega_r) \right]^2 + \left[ (p \Omega_m + \Omega_r) L_\sigma \Omega_r - \frac{R_1}{L_1} R \right]^2} \quad (1.20)$$

$$I = U \sqrt{\frac{\left[ \frac{(p \Omega_m + \Omega_r)}{R_F} + \left(1 + \frac{L_\sigma}{L_1}\right) \frac{\Omega_r}{R} \right]^2 + \left[ \frac{(p \Omega_m + \Omega_r) L_\sigma \Omega_r}{R_F R} - \frac{1}{L_1} \right]^2}{\left[ (p \Omega_m + \Omega_r) + \left(1 + \frac{L_\sigma}{L_1}\right) \frac{R_1}{R} \Omega_r \right]^2 + \left[ \frac{(p \Omega_m + \Omega_r) L_\sigma \Omega_r}{R} - \frac{R_1}{L_1} \right]^2}} \quad (1.21)$$

#### Velké otáčky:

Vlivem velkých otáček lze zanedbat  $\Omega_r$  oproti  $p \Omega_m$ . Dále člen  $(1 + L_\sigma/L_1)R_1/R$  je blízký jedné. Tedy rovnice (1.20) a (1.21) dále zjednodušíme:

$$M = \frac{3U^2 R p \Omega_r}{[R p \Omega_m]^2 + \left[ p \Omega_m L_\sigma \Omega_r - \frac{R_1}{L_1} R \right]^2} \quad (1.22)$$

$$I = U \sqrt{\frac{\left[ \frac{p \Omega_m}{R_F} + \left(1 + \frac{L_\sigma}{L_1}\right) \frac{\Omega_r}{R} \right]^2 + \left[ \frac{p \Omega_m L_\sigma \Omega_r}{R_F R} - \frac{1}{L_1} \right]^2}{[p \Omega_m]^2 + \left[ \frac{p \Omega_m L_\sigma \Omega_r}{R} - \frac{R_1}{L_1} \right]^2}} \quad (1.23)$$

### 1.4.2 Napětí jako funkce $M$ , $\Omega_r$ , $\Omega_m$

#### Malé otáčky:

Z rovnice (1.20) vyjádříme napětí  $U$ :

$$U = \sqrt{\frac{M \left[ \left[ \left(1 + \frac{L_\sigma}{L_1}\right) R_1 \Omega_r + R (p \Omega_m + \Omega_r) \right]^2 + \left[ (p \Omega_m + \Omega_r) L_\sigma \Omega_r - \frac{R_1}{L_1} R \right]^2 \right]}{3 R p \Omega_r}} \quad (1.24)$$

### Velké otáčky:

Z rovnice (1.22) vyjádříme napětí  $U$ :

$$U = \sqrt{\frac{M \left[ [Rp\Omega_m]^2 + \left[ p\Omega_m L_\sigma \Omega_r - \frac{R_1}{L_1} R \right]^2 \right]}{3Rp\Omega_r}} \quad (1.25)$$

### 1.4.3 Proud jako funkce $M$ , $\Omega_r$ , $\Omega_m$

#### Malé otáčky:

Do rovnice (1.21) dosadíme (1.24):

$$I = \sqrt{\frac{MR}{3\Omega_r} \left[ \left[ \frac{(p\Omega_m + \Omega_r)}{R_F} + \left( 1 + \frac{L_\sigma}{L_1} \right) \frac{\Omega_r}{R} \right]^2 + \left[ \frac{(p\Omega_m + \Omega_r) L_\sigma \Omega_r}{R_F R} - \frac{1}{L_1} \right]^2 \right]} \quad (1.26)$$

#### Velké otáčky:

Do rovnice (1.23) dosadíme (1.25):

$$I = \sqrt{\frac{MR}{3\Omega_r} \left[ \left[ \frac{p\Omega_m}{R_F} + \left( 1 + \frac{L_\sigma}{L_1} \right) \frac{\Omega_r}{R} \right]^2 + \left[ \frac{p\Omega_m L_\sigma \Omega_r}{R_F R} - \frac{1}{L_1} \right]^2 \right]} \quad (1.27)$$

### 1.4.4 Ztráty v mědi statoru jako funkce $M$ , $\Omega_r$ , $\Omega_m$

#### Malé otáčky:

Do vztahu pro ztráty v mědi (1.7) dosadíme za  $I$  proud pro malé otáčky podle vztahu (1.26):

$$P_{Cu} = R_1 \frac{MR}{\Omega_r} \left[ \left[ \frac{(p\Omega_m + \Omega_r)}{R_F} + \left( 1 + \frac{L_\sigma}{L_1} \right) \frac{\Omega_r}{R} \right]^2 + \left[ \frac{(p\Omega_m + \Omega_r) L_\sigma \Omega_r}{R_F R} - \frac{1}{L_1} \right]^2 \right] \quad (1.28)$$

Z rovnosti je patrný vliv  $R_F$  na velikost procházejícího proudu. Při změně ztrát v železe se totiž mění proud procházející vinutím, který následně způsobuje ztráty v mědi. Nicméně  $R_F$  je tvořen paralelní kombinací prvků podle (1.14). Kde  $R_h$  je přímo závislé na statorovém kmitočtu. Při nominálním kmitočtu  $f=50\text{Hz}$  jsou vířivé a hysterezní ztráty, při plném sycení, zhruba stejné ( $R_v = R(h0)$ ). Na malých otáčkách se podle vztahu (1.11) bude  $R_h$  snižovat, tj.  $R_v \gg R_h$ . Takže ve vztahu pro paralelní kombinaci zanedbáme vliv  $R_v$ . Toto zjednodušení je přípustné pouze zde při výpočtu ztrát v mědi, tedy ve výpočtu vlivu ztrát v železe na změnu proudu statoru. Při výpočtu ztrát v železe už budeme uvažovat celé  $R_F$ . Podle tohoto zjednodušení

lze (1.28) modifikovat a s přihlédnutím k rovnosti (1.5) pro  $\omega$  nalezneme konečný vztah pro ztráty v mědi:

$$P_{Cu} = R_1 \frac{MR}{\Omega_r} \left[ \left[ \frac{\omega_0}{R_{h0}} + \left( 1 + \frac{L_\sigma}{L_1} \right) \frac{\Omega_r}{R} \right]^2 + \left[ \frac{\omega_0 L_\sigma}{R_{h0} R} \Omega_r - \frac{1}{L_1} \right]^2 \right] \quad (1.29)$$

### Velké otáčky:

Postup odvození je stejný jako pro malé otáčky. Proud podle vztahu (1.27), ovšem ve velkých otáčkách není možné zanedbat vliv ztrát vířivých ani hysterezních, tj. za  $R_F$  dosadíme celý vztah (1.14). Za  $\omega$  opět dosadíme (1.5), přičemž díky velkým otáčkám zanedbáme  $\Omega_r$  ( $\Omega_r \ll p\Omega_m$ ). Po dosazení je konečný vztah:

$$P_{Cu} = R_1 \frac{MR}{\Omega_r} \left[ \left[ \frac{\left( R_v + \frac{R_{h0}}{\omega_0} p\Omega_m \right)}{R_v \frac{R_{h0}}{\omega_0}} + \left( 1 + \frac{L_\sigma}{L_1} \right) \frac{\Omega_r}{R} \right]^2 + \left[ \frac{L_\sigma \left( R_v + \frac{R_{h0}}{\omega_0} p\Omega_m \right)}{R_v \frac{R_{h0}}{\omega_0} R} \Omega_r - \frac{1}{L_1} \right]^2 \right] \quad (1.30)$$

### 1.4.5 Napětí $U_1$ jako funkce $M$ , $\Omega_r$ , $\Omega_m$

Pro získání vztahu pro ztráty v železe je potřeba vyjádřit napětí  $U_1$  na  $L_1$  a  $R_F$

### Malé otáčky:

Při uvažování  $\omega L_\sigma = 0$  se rovnice (1.3) zjednoduší takto:

$$U_1 = U \frac{\omega L_1 R_F R_E}{\sqrt{(R_1 R_E R_F)^2 + (\omega L_1 R_1 R_F + \omega L_1 R_E (R_1 + R_F))^2}} \quad (1.31)$$

Za  $\omega$  dosadíme podle (1.5) a za  $R_E$  podle (1.6). Ve vztahu (1.5) zanedbáme  $\Omega_r$  a to proto, že na velmi malých otáčkách bude  $U$  tak malé, že ztráty v železe budou zanedbatelné a přesnost vztahu pro dělicí poměr není nijak důležitá. Ve větších „malých“ otáčkách již chceme přesnost rovnice pro  $U_1$  lepší, ale zde si také smíme dovolit zanedbat  $\Omega_r$ . V ostatních výpočtech si tyto zjednodušení dovoluujeme až u velkých otáček. Zde to provedeme nyní, protože ztráty v železe jsou i u větších „malých“ otáček nepříliš podstatné. Dosadíme dále za  $U$  podle (1.24), ve kterém také zanedbáme  $\Omega_r$  oproti  $p\Omega_m$  a to jen proto, že by nám nakonec vyšla složitá rovnice 4. řádu, její řešení je problematické, což nechceme. Nakonec tedy dostaneme vztah:

$$U_1 = \sqrt{\frac{M \left[ \left(1 + \frac{L_\sigma}{L_1}\right) R_1 \Omega_r + R p \Omega_m \right]^2 + \left[ p \Omega_m L_\sigma \Omega_r - \frac{R_1}{L_1} R \right]^2}{3 R p \Omega_r}} \frac{p \Omega_m L_1 R_F R}{\sqrt{(R_1 R R_F)^2 + (p \Omega_m L_1 R (R_1 + R_F))^2}} \quad (1.32)$$

### Velké otáčky:

Ve vztahu (1.3) pro  $U_1$  nelze nic zanedbat. Dosadíme tedy za  $\omega$  vztah (1.5) a za  $R_E$  podle (1.6). Přitom v obou dosazeních zanedbáme  $\Omega_r$  oproti  $p \Omega_m$ , protože máme velké otáčky. Dále vlivem velkých otáček budou velké ztráty v železe, tj.  $R_F \gg R_1$ . Takže v (1.3) člen  $(R_F + R_1)$  je přibližně roven  $R_F$ . A dosadíme-li dále za napětí podle (1.25), dostaneme konečný vztah:

$$U_1 = \sqrt{\frac{M \left[ [R p \Omega_m]^2 + \left[ p \Omega_m L_\sigma \Omega_r - \frac{R_1}{L_1} R \right]^2 \right]}{3 R p \Omega_r}} \frac{p \Omega_m L_1 \sqrt{\frac{R^2}{\Omega_r^2} + L_\sigma^2}}{\sqrt{\left( \frac{R_1 R}{\Omega_r} - p \Omega_m L_1 L_\sigma \right)^2 + \left( (L_1 + L_\sigma) R_1 + \frac{p \Omega_m}{\Omega_r} L_1 R \right)^2}} \quad (1.33)$$

### 1.4.6 Ztráty v železe jako funkce $M$ , $\Omega_r$ , $\Omega_m$

Pro tyto ztráty platí vztah (1.15). Za  $R_F$  dosadíme podle (1.14), kde  $\omega$  rozepíšeme podle vztahu (1.5). Opět zanedbáme  $\Omega_r$  oproti  $p \Omega_m$ , a to pro malé i velké otáčky. Pro malé otáčky opět z důvodů řešitelnosti.

$$P_{Fe} = U_1^2 \frac{R_v \frac{R_{h0}}{\omega_0} p \Omega_m}{\left( R_v + \frac{R_{h0}}{\omega_0} p \Omega_m \right)} \quad (1.34)$$

### Malé otáčky:

Do vztahu (1.34) dosadíme za  $U_1$  vztah (1.32) a dostaneme:

$$P_{Fe} = \frac{M \left[ \left(1 + \frac{L_\sigma}{L_1}\right) R_1 \Omega_r + R p \Omega_m \right]^2 + \left[ p \Omega_m L_\sigma \Omega_r - \frac{R_1}{L_1} R \right]^2}{3 \Omega_r} \frac{p \left( \Omega_m L_1 \right)^2 R \frac{R_v + \frac{R_{h0}}{\omega_0} p \Omega_m}{R_v \frac{R_{h0}}{\omega_0} p \Omega_m}}{\left( R_1 R \right)^2 + \left( p \Omega_m L_1 R \right)^2 \left( \frac{R_1 \left( R_v + \frac{R_{h0}}{\omega_0} p \Omega_m \right)}{R_v \frac{R_{h0}}{\omega_0} p \Omega_m} + 1 \right)^2} \quad (1.35)$$

## Velké otáčky:

Postup je stejný jako u malých otáček pouze za  $U_1$  dosadíme (1.33) a dostaneme:

$$P_{Fe} = \frac{M \left[ [Rp\Omega_m]^2 + \left[ p\Omega_m L_\sigma \Omega_r - \frac{R_1}{L_1} R \right]^2 \right]}{3Rp\Omega_r} \frac{p\Omega_m L_1 \sqrt{\frac{R^2}{\Omega_r^2} + L_\sigma^2}}{\sqrt{\left( \frac{R_1 R}{\Omega_r} - p\Omega_m L_1 L_\sigma \right)^2 + \left( (L_1 + L_\sigma) R_1 + \frac{p\Omega_m}{\Omega_r} L_1 R \right)^2}} \frac{\left( R_v + \frac{R_{h0}}{\omega_0} p\Omega_m \right)}{R_v \frac{R_{h0}}{\omega_0} p\Omega_m} \quad (1.36)$$

## 1.5 Hledání optimálního rotorového kmitočtu

Je jasné, že nejlepší účinnost stroje při daných otáčkách, bude při minimálním součtu všech ztrát stroje. Jelikož hledáme nastavení optimálního  $\Omega_r$  tak nejsnadnější způsob, jak se dopracovat k výsledku bude zderivovat ztráty podle skluzového kmitočtu a jejich součet položit roven nule, jak ukazuje následující vztah:

$$\frac{dP_{celk.}}{d\Omega_r} = \frac{dP_{Cu}}{d\Omega_r} + \frac{dP_{Fe}}{d\Omega_r} + \frac{dP_{rot}}{d\Omega_r} = 0 \quad (1.37)$$

### 1.5.1 Malé otáčky

Pro malé otáčky byly odvozeny vztahy pro jednotlivé ztráty. Dosadíme-li tedy do (1.37) vztahy jednotlivých ztrát (1.29), (1.35) a (1.8) dostaneme následným řešením pro neznámou  $\Omega_r$  konečný obecný vztah:

$$\Omega_r = \sqrt{\frac{R_1 R \left( \frac{\omega_0^2}{R_{h0}^2} + \frac{1}{L_1^2} \right) + \frac{\frac{1}{3} p R \frac{R_v + \frac{R_{h0}}{\omega_0} p \Omega_m}{R_v \frac{R_{h0}}{\omega_0} p \Omega_m} (\Omega_m^4 L_1^2 p^2 + \Omega_m^2 R_1^2)}{R_1 + (p\Omega_m L_1)^2 \left( \frac{R_1 \left( R_v + \frac{R_{h0}}{\omega_0} p \Omega_m \right)}{R_v \frac{R_{h0}}{\omega_0} p \Omega_m} + 1 \right)^2}}{\frac{R_1}{R} \left[ \left( 1 + \frac{L_\sigma}{L_1} \right)^2 + \frac{\omega_0^2 L_\sigma^2}{R_{h0}^2} \right] + \frac{p(\Omega_m L_1)^2 \frac{R_v + \frac{R_{h0}}{\omega_0} p \Omega_m}{R_v \frac{R_{h0}}{\omega_0} p \Omega_m} \left( \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{L_\sigma}{L_1} \right)^2 R_1^2 + \frac{1}{3} p^2 \Omega_m^2 L_\sigma^2 \right)}{R_1^2 R + (p\Omega_m L_1)^2 R \left( \frac{R_1 \left( R_v + \frac{R_{h0}}{\omega_0} p \Omega_m \right)}{R_v \frac{R_{h0}}{\omega_0} p \Omega_m} + 1 \right)^2} + \frac{1}{p}}} \quad (1.38)$$

Ve vztahu se vykrátí moment (všechny ztráty jsou mu totiž přímo úměrné). Takže optimální skluzový kmitočet nezávisí přímo na momentu. Nicméně  $L_1$  ano, musíme tedy uvažovat závislost  $L_1$  na  $U_1$  (při přesycení).

Dále odvozená rovnice nemá příjemný tvar (nechtěl bych jí potkat v noci na liduprázdné ulici), proto rozdělíme malé otáčky do 4 následujících rozsahů:

1. Extrémně malé otáčky ( $p\Omega_m \ll \Omega_r$ ), malý moment ( $M < M_1$ )
2. Extrémně malé otáčky ( $p\Omega_m \ll \Omega_r$ ), velký moment ( $M > M_1$ )
3. Větší malé otáčky ( $\Omega_r < p\Omega_m < 20\Omega_r$ ), malý moment ( $M < M_1$ )
4. Větší malé otáčky ( $\Omega_r < p\Omega_m < 20\Omega_r$ ), velký moment ( $M > M_1$ )

Kde  $M_1$  je hraniční hodnota momentu. Její velikost odvodíme a graficky koresponduje s bodem  $A$  v obr.1.3.

### Extrémně malé otáčky ( $p\Omega_m \ll \Omega_r$ ) a malý moment ( $M < M_1$ )

Pro tyto otáčky jdoucí k nule, jde druhý sčítanec v čitateli a prostřední sčítanec ve jmenovateli (1.38) k nule. Takže výraz se zjednoduší:

$$\Omega_r = \sqrt{\frac{R_1 R \left( \frac{\omega_0^2}{R_{h0}^2} + \frac{1}{L_1^2} \right)}{\frac{R_1}{R} \left[ \left( 1 + \frac{L_\sigma}{L_1} \right)^2 + \frac{\omega_0^2 L_\sigma^2}{R_{h0}^2} \right] + \frac{1}{p}}} \quad (1.39)$$

Při takto malých otáčkách a malém momentu (také bude malé napětí a sycení) lze zcela zanedbat ztráty v železe ( $R_{h0} \Rightarrow \infty$ ). Při menším momentu než je  $M_1$ , což je hraniční hodnota do které je  $L_1$  konstantní, platí  $L_1 = L_{1max}$ . Můžeme tak rovnici (1.39) přeformulovat na konečný vztah:

$$\Omega_r = \sqrt{\frac{R_1 R \frac{1}{L_{1max}^2}}{\frac{R_1}{R} \left( 1 + \frac{L_\sigma}{L_{1max}} \right)^2 + \frac{1}{p}}} \quad (1.40)$$

Vztah (1.40) bude platný od nulového momentu po hraniční moment  $M_1$  při němž sycení dosáhne hodnoty  $A$  (obr.1.3). Pro malé otáčky  $p\Omega_m < 20\Omega_r$  musíme použít původní vztah (1.31) pro napětí  $U_1$ , ve kterém za  $\omega$  dosadíme podle (1.5), za  $R_E$  podle (1.6) a za  $U$  podle (1.24). Přitom z důvodu malých otáček můžeme zanedbat vliv ztrát v železe, tj.  $R_F \Rightarrow \infty$ . Dostaneme tedy:

$$U_1 = \sqrt{\frac{M \left[ \left[ \left( 1 + \frac{L_\sigma}{L_{1max}} \right) R_1 \Omega_r + R (p\Omega_m + \Omega_r) \right]^2 + \left[ (p\Omega_m + \Omega_r) L_\sigma \Omega_r - \frac{R_1}{L_{1max}} R \right]^2 \right]}{3R p \Omega_r}} \quad (1.41)$$

$$\frac{(p\Omega_m + \Omega_r) L_{1max} R}{\sqrt{(R_1 R)^2 + (\Omega_r L_{1max} R_1 + (p\Omega_m + \Omega_r) L_{1max} R)^2}}$$

Nyní  $U_1$  dle (1.41) podělíme  $\omega$  uvažovanou podle (1.5). Tak se dostaneme k funkci  $U_1/\omega = f(M)$ , která v sobě skrývá závislost sycení na momentu. Vzniklý vztah pro  $U_1/\omega$  položíme roven známému bodu nasycení magnetického obvodu stroje  $A$  (obr.1.3).

$$\frac{U_1}{\omega} = \sqrt{\frac{M \left[ \left(1 + \frac{L_\sigma}{L_{1max}}\right) R_1 \Omega_r + R (p\Omega_m + \Omega_r) \right]^2 + \left[ (p\Omega_m + \Omega_r) L_\sigma \Omega_r - \frac{R_1}{L_{1max}} R \right]^2}{3Rp\Omega_r}} \cdot \frac{L_{1max} R}{\sqrt{(R_1 R)^2 + (\Omega_r L_{1max} R_1 + (p\Omega_m + \Omega_r) L_{1max} R)^2}} = A \quad (1.42)$$

Odtud zbývá už jen vyjádřit hraniční hodnotu momentu  $M_1$ :

$$M_1 = \frac{A^2}{L_{1max}^2 R} \cdot \frac{3Rp\Omega_r \left[ (R_1 R)^2 + (\Omega_r L_{1max} R_1 + (p\Omega_m + \Omega_r) L_{1max} R)^2 \right]}{\left[ \left(1 + \frac{L_\sigma}{L_{1max}}\right) R_1 \Omega_r + R (p\Omega_m + \Omega_r) \right]^2 + \left[ (p\Omega_m + \Omega_r) \Omega_r L_\sigma - \frac{R_1 R}{L_{1max}} \right]^2} \quad (1.43)$$

Přitom  $\Omega_r$  uvažujeme podle (1.40)!

### **Extrémně malé otáčky ( $p\Omega_m \ll \Omega_r$ ) a velký moment ( $M > M_1$ )**

Jedná se opět o extrémně malé otáčky a proto zůstává v platnosti konečný vztah pro optimální rotorový kmitočet (1.40). Ovšem nyní se pohybujeme v oblasti přesyčeného magnetického obvodu.  $L_1$  není konstanta. Musíme proto do vztahu (1.40) zapracovat závislost  $L_1$  na sycení.

$$\Omega_r = \sqrt{\frac{R_1 R \frac{1}{L_1^2}}{\frac{R_1}{R} \left(1 + \frac{L_\sigma}{L_1}\right)^2 + \frac{1}{p}}} \quad (1.44)$$

Kdybychom při větších momentech než  $M_1$  předpokládali konstantní  $L_1$ , byl by výpočet  $\Omega_r$  chybný. Protože při předpokladu vyšší  $L_1$  by bylo vyšší i vypočtené napájecí napětí, které na skutečné proměnné  $L_1$  protlačí větší magnetizační proud, který má za následek větší ztráty ve vinutí statoru i v železe.

Použijeme rovnici (1.42) pro  $U_1/\omega$ , přitom musíme uvažovat obecnou indukčnost  $L_1$ . Otáčky motoru  $\Omega_m$  budeme pro jednoduchost uvažovat nulové a jelikož má být výraz obecný, nebudeme výraz pokládat hodnotě  $A$ . Tak po úpravách dostaneme:

$$\frac{U_1}{\omega} = \sqrt{\frac{M \left[ \Omega_r^2 \left[ \left(1 + \frac{L_\sigma}{L_1}\right) R_1 + R \right]^2 + \left[ \Omega_r^2 L_\sigma - \frac{R_1 R}{L_1} \right]^2 \right]}{3Rp\Omega_r \left[ R_1^2 + \Omega_r^2 L_1^2 \left(1 + \frac{R_1}{R}\right)^2 \right]}} L_1 \quad (1.45)$$

Nyní si poměr  $U_1/\omega$  vyjádříme pomocí lineární aproximace (1.19):

$$\frac{U_1}{\omega} = Q - SL_1 \quad (1.46)$$

Kde  $Q$  a  $S$  jsou substituce:

$$Q = A + L_{1max} \frac{B - A}{\Delta L_1} \quad (1.47)$$

$$S = \frac{B - A}{\Delta L_1} \quad (1.48)$$

Je vidět, že vztah (1.45) se musí rovnat vztahu (1.46):

$$Q - SL_1 = \sqrt{\frac{M \left[ \Omega_r^2 \left[ \left( 1 + \frac{L_\sigma}{L_1} \right) R_1 + R \right]^2 + \left[ \Omega_r^2 L_\sigma - \frac{R_1 R}{L_1} \right]^2 \right]}{3Rp\Omega_r \left[ R_1^2 + \Omega_r^2 L_1^2 \left( 1 + \frac{R_1}{R} \right)^2 \right]}} L_1 \quad (1.49)$$

Dostali jsme tak soustavu dvou rovnic (1.44, 1.67) o dvou neznámých, optimální  $\Omega_r$  a  $L_1$ . Aby se rovnice daly řešit provedeme základní zjednodušení a to, že člen  $(1 + L_\sigma/L_1)$  je konstanta 1, 2. Nicméně i při tomto zjednodušení by vyšla kubická rovnice, proto provedeme nějaké další zjednodušení<sup>4</sup> a výsledkem bude kvadratická rovnice pro optimální skluzový kmitočet, která má následující řešení:

$$\begin{aligned} \Omega_r = & \frac{\beta + M \frac{R_1^2 R^2}{K^2} + 2\alpha \frac{SQ}{K}}{2 \left( \left( \frac{Q}{K} \right)^2 \alpha + 2ML_\sigma \frac{R_1 R}{K} \right)} \pm \\ & \pm \frac{\sqrt{\left( \beta + M \frac{R_1^2 R^2}{K^2} + 2\alpha \frac{SQ}{K} \right)^2 - 4 \left( \left( \frac{Q}{K} \right)^2 \alpha + 2ML_\sigma \frac{R_1 R}{K} \right) S^2 \alpha}}{2 \left( \left( \frac{Q}{K} \right)^2 \alpha + 2ML_\sigma \frac{R_1 R}{K} \right)} \end{aligned} \quad (1.50)$$

Ve vztahu (1.50) jsme užili následující substituce:

$$K = \sqrt{\frac{R_1 R}{1, 4 \frac{R_1}{R} + \frac{1}{p}}} \quad (1.51)$$

$$\alpha = 3Rp \left[ R_1^2 + K^2 \left( 1 + \frac{R_1}{R} \right)^2 \right] \quad (1.52)$$

$$\beta = M (1, 2R_1 + R)^2 \quad (1.53)$$

---

<sup>4</sup>Porovnáváním jednotlivých členů rovnice (1.67) pro skutečný motor.

Obě řešení dávají kladný výsledek. Nejedná se tedy o motorický nebo generátorický režim, ale o dvojznačnost výsledku způsobenou neekvivalentními úpravami rovnic s odmocninami. Konkrétní výpočty s praktickými čísly ukazují, že **správně je pouze řešení s kladným znaménkem**.

Dále lze stanovit vztah pro maximální možný moment, kterým lze při extrémně malých otáčkách zatěžovat motor, aby sycení dosáhlo maximálního přesycení, tj. hodnotu  $B$  na obr.1.3. Výraz bude odpovídat vztahu (1.43) jen namísto  $A$  dosadíme  $B$  a namísto  $L_{1max}$  zase  $L_{1min}$ :

$$M_{max} = \frac{B^2}{L_{1max}^2 R} \frac{3Rp\Omega_r \left[ (R_1 R)^2 + (\Omega_r L_{1min} R_1 + (p\Omega_m + \Omega_r) L_{1min} R)^2 \right]}{\left[ \left( 1 + \frac{L_\sigma}{L_{1min}} \right) R_1 \Omega_r + R (p\Omega_m + \Omega_r) \right]^2 + \left[ (p\Omega_m + \Omega_r) \Omega_r L_\sigma - \frac{R_1 R}{L_{1min}} \right]^2} \quad (1.54)$$

### Větší malé otáčky ( $\Omega_r < p\Omega_m < 20\Omega_r$ ) a malý moment ( $M < M_1$ )

Otáčky motoru jsou sice malé ale ne tolik, že bychom si mohli dovolit zanedbat ztráty v železe statoru nebo vlastní otáčky motoru oproti  $\Omega_r$ , jak jsme to udělali u extrémně malých otáček. Optimální skluzový kmitočet budeme počítat pomocí základního vztahu (1.38). Díky malému momentu se mag. obvod nepřesytí (nacházíme se před bodem  $A$  (obr.1.3) a platí, že  $L_1 = L_{1max}$ ).

$$\Omega_r = \sqrt{\frac{R_1 R \left( \frac{\omega_0^2}{R_{h0}^2} + \frac{1}{L_{1max}^2} \right) + \frac{\frac{1}{3} p R G (\Omega_m^4 L_{1max}^2 p^2 + \Omega_m^2 R_1^2)}{R_1^2 + (p\Omega_m L_{1max})^2 (R_1 G + 1)^2}}{\frac{R_1}{R} \left[ \left( 1 + \frac{L_\sigma}{L_{1max}} \right)^2 + \frac{\omega_0^2 L_\sigma^2}{R_{h0}^2} \right] + \frac{p(\Omega_m L_{1max})^2 G \left( \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{L_\sigma}{L_{1max}} \right)^2 R_1^2 + \frac{1}{3} p^2 \Omega_m^2 L_\sigma^2 \right)}{R_1^2 R + (p\Omega_m L_{1max})^2 R (R_1 G + 1)^2} + \frac{1}{p}}} \quad (1.55)$$

Kde jsme pro zjednodušení užili substituci:

$$G = \frac{R_v + \frac{R_{h0}}{\omega_0} p \Omega_m}{R_v \frac{R_{h0}}{\omega_0} p \Omega_m} \quad (1.56)$$

Vztah (1.55) lze za cenu drobné nepřesnosti zjednodušit<sup>5</sup> do méně komplikované podoby:

$$\Omega_r = \sqrt{\frac{R_1 R \left( \frac{\omega_0^2}{R_{h0}^2} + \frac{1}{L_{1max}^2} \right) + \frac{\Omega_m^2 R G}{3(R_1 G + 1)^2}}{\frac{R_1}{R} \left[ \left( 1 + \frac{L_\sigma}{L_{1max}} \right)^2 + \frac{\omega_0^2 L_\sigma^2}{R_{h0}^2} \right] + \frac{1}{p}}} \quad (1.57)$$

<sup>5</sup>Zjednodušení se zakládají na vyčíslování jednotlivých sčítanců pro skutečné motory a porovnávání jejich velikosti mezi sebou.

Hraniční moment  $M_1$  je počítán opět pomocí vzorce (1.43), protože odvození hraničního momentu bylo provedeno pro obecně malé otáčky bez zanedbání  $p\Omega_m$  nebo  $\Omega_r$ . S tím, že za  $\Omega_r$  dosazujeme podle (1.57).

### Větší malé otáčky ( $\Omega_r < p\Omega_m < 20\Omega_r$ ) a velký moment ( $M > M_1$ )

Pro optimální  $\Omega_r$  bude opět platit vztah (1.57), ale protože se pohybujeme ve velkých momentech, které způsobují přesycování stroje, musíme uvažovat proměnnou magnetizační indukčnost  $L_1$ .

$$\Omega_r = \sqrt{\frac{R_1 R \left( \frac{\omega_0^2}{R_{h0}^2} + \frac{1}{L_1^2} \right) + \frac{\Omega_m^2 R G}{3(R_1 G + 1)^2}}{\frac{R_1}{R} \left[ \left( 1 + \frac{L_\sigma}{L_1} \right)^2 + \frac{\omega_0^2 L_\sigma^2}{R_{h0}^2} \right] + \frac{1}{p}}} \quad (1.58)$$

Opět musíme do tohoto vztahu zapracovat závislost  $L_1$  na sycení. Vycházíme opět z rovnice (1.41), která platí pro obecně malé otáčky. Opět podělíme (1.41)  $\omega$  uvažovanou dle (1.5). Dostaneme tak funkční závislost sycení na momentu. Dále platí aproximační rovnice (1.46). Porovnáním těchto dvou rovnic dostaneme:

$$\begin{aligned} Q - SL_1 &= \\ &= \sqrt{\frac{M \left[ \left[ \left( 1 + \frac{L_\sigma}{L_1} \right) R_1 \Omega_r + R(p\Omega_m + \Omega_r) \right]^2 + \left[ (p\Omega_m + \Omega_r) L_\sigma \Omega_r - \frac{R_1}{L_1} R \right]^2 \right]}{3Rp\Omega_r \left[ (R_1 R)^2 + (\Omega_r L_1 R_1 + (p\Omega_m + \Omega_r) L_1 R)^2 \right]}} L_1 R \end{aligned} \quad (1.59)$$

V tomto vztahu nahradíme výraz  $(1 + L_\sigma/L_1)$  konstantou 1, 2 a provedeme některé další zanedbání<sup>6</sup>. Dostaneme tak více přehledný vztah:

$$L_1^2 = \left( Q - \sqrt{\frac{MR}{3\Omega_r} \frac{1, 2R_1\Omega_r + R(p\Omega_m + \Omega_r)}{\Omega_r R_1 + R(p\Omega_m + \Omega_r)}} \right)^2 \frac{1}{S^2} \quad (1.60)$$

Rovnice (1.58) a (1.60) tvoří systém dvou rovnic o dvou neznámých  $\Omega_r$  a  $L_1$ . Řešením těchto rovnic bychom dospěli k řešení rovnice 4. řádu. Proto je vhodnější použít některou z iteračních metod.

---

<sup>6</sup>Zjednodušení se zakládá na vyčíslování jednotlivých součtů pro skutečný motor a porovnávání jich mezi sebou.

## 1.5.2 Velké otáčky

Do vztahu (1.37) dosadíme vztahy pro odpovídající ztráty (1.30), (1.36) a (1.8). Po derivaci takto získané obludné rovnice a následném zjednodušení<sup>7</sup>, dostaneme následující vztah pro optimální skluzový kmitočet na velkých otáčkách ( $p\Omega_m > 20\Omega_r$ ):

$$\Omega_r = \sqrt{\frac{R_1 R \left( \varphi^2 + \frac{1}{L_1^2} \right) + \frac{R}{3p^2 \Omega_m} \varphi \left( p^2 \Omega_m^2 + \frac{R_1^2}{L_1^2} \right)}{\frac{R_1}{R} \left[ \left( 1 + \frac{L_\sigma}{L_1} \right)^2 + (L_\sigma \varphi)^2 \right] + \frac{1}{p} + \frac{\Omega_m L_\sigma^2}{3R} \varphi}} \quad (1.61)$$

Substituci  $\varphi$  jsme použili jen pro přehlednost, a platí pro ní:

$$\varphi = \frac{\left( R_v + \frac{R_{h0}}{\omega_0} p \Omega_m \right)}{R_v \frac{R_{h0}}{\omega_0}} \quad (1.62)$$

Pro (1.61) platí stejně jako tomu bylo u (1.38), že rovnice je nezávislá na zatěžovacím momentu, nicméně hlavní magnetizační indukčnost  $L_1$  ano. Proto opět musíme do vztahu (1.61) zahrnout vliv  $L_1$  na sycení, tj. na momentu. Proto rozdělíme řešení optimálního  $\Omega_r$  na dvě skupiny:

1. Velké otáčky ( $p\Omega_m > 20\Omega_r$ ), malý moment ( $M < M_2$ )
2. Velké otáčky ( $p\Omega_m > 20\Omega_r$ ), velký moment ( $M > M_2$ )

Kde  $M_2$  je hodnota hraničního momentu pro velké otáčky, opět korespondující s bodem  $A$  v obr.1.3.

### Velké otáčky ( $p\Omega_m > 20\Omega_r$ ), malý moment ( $M < M_2$ )

Nacházíme se v oblasti nepřesyceného mag. obvodu, proto místo  $L_1$  uvažujeme  $L_{1max}$ . Dále ve velkých otáčkách lze zanedbat člen  $R_1^2/L_1^2$ . Můžeme tak podle rovnice (1.61) psát vztah:

$$\Omega_r = \sqrt{\frac{R_1 R \left( \varphi^2 + \frac{1}{L_{1max}^2} \right) + \frac{R}{3} \varphi \Omega_m}{\frac{R_1}{R} \left[ \left( 1 + \frac{L_\sigma}{L_{1max}} \right)^2 + (L_\sigma \varphi)^2 \right] + \frac{1}{p} + \frac{\Omega_m L_\sigma^2}{3R} \varphi}} \quad (1.63)$$

Vztah (1.63) bude platný od nulového momentu po hraniční moment  $M_2$ , při němž sycení dosáhne hodnoty  $A$ . Odvození hraničního momentu  $M_2$  vychází z prvního

<sup>7</sup>Opět se zakládají na vyčíslování jednotlivých sčítanců a porovnávání mezi sebou.

zlomku vztahu (1.36), který reprezentuje kvadrát napětí  $U_1$  na  $L_1$ . Tento vztah rozdělíme  $\omega$  aby jsme dostali závislost na sycení a tu položíme rovno známé hodnotě sycení  $A$ . Můžeme tedy psát:

$$\frac{U_1}{\omega} = \sqrt{\frac{M \left[ [Rp\Omega_m]^2 + \left[ p\Omega_m L_\sigma \Omega_r - \frac{R_1}{L_{1max}} R \right]^2 \right]}{3Rp^3\Omega_r\Omega_m}} = A \quad (1.64)$$

Nyní už jen vyjádříme hraniční moment  $M_2$ :

$$M_2 = \frac{3Rp^3\Omega_r\Omega_m^2 A^2}{[Rp\Omega_m]^2 + \left[ p\Omega_m L_\sigma \Omega_r - \frac{R_1}{L_{1max}} R \right]^2} \quad (1.65)$$

### Velké otáčky ( $p\Omega_m > 20\Omega_r$ ), velký moment ( $M > M_2$ )

Opět bude platit rovnice (1.63) ale namísto  $L_{1max}$  musíme uvažovat proměnné  $L_1$ :

$$\Omega_r = \sqrt{\frac{R_1 R \left( \varphi^2 + \frac{1}{L_1^2} \right) + \frac{R}{3} \varphi \Omega_m}{\frac{R_1}{R} \left[ \left( 1 + \frac{L_\sigma}{L_1} \right)^2 + (L_\sigma \varphi)^2 \right] + \frac{1}{p} + \frac{\Omega_m L_\sigma^2}{3R} \varphi}} \quad (1.66)$$

Větší moment než  $M_2$ , způsobí přesycení a velikost  $L_1$  se mění podle aproximační rovnice (1.46):

$$\frac{U_1}{\omega} = Q - SL_1 \quad (1.67)$$

Za sycení dosadíme podle (1.64) a dostaneme:

$$Q - SL_1 = \sqrt{\frac{M \left[ [Rp\Omega_m]^2 + \left[ p\Omega_m L_\sigma \Omega_r - \frac{R_1}{L_1} R \right]^2 \right]}{3Rp^3\Omega_r\Omega_m}} \quad (1.68)$$

Tento vztah lze, při dosazení praktických čísel a porovnání, zjednodušit na:

$$Q - SL_1 = \sqrt{\frac{T R 1}{3 p \Omega_r}} \quad (1.69)$$

Rovnice (1.66) a (1.69) vytváří systém dvou rovnic o dvou neznámých, optimální  $\Omega_r$  a  $L_1$ . Pro řešitelnost soustavy by jsme museli zavést další zjednodušení, které by vedly k velké chybě výpočtu. Proto je vhodné danou soustavu řešit pomocí některé z iteračních metod.

Už zbývá pouze stanovit maximální možný zatěžovací moment při velkých otáčkách. Vycházíme z rovnice pro sycení (1.64), kterou ovšem nepoložíme rovnu bodu nasycení  $A$  ale bodu maximálního přesycení  $B$ . Namísto  $L_{1max}$  použijeme  $L_{1min}$  (viz. obr.1.3).

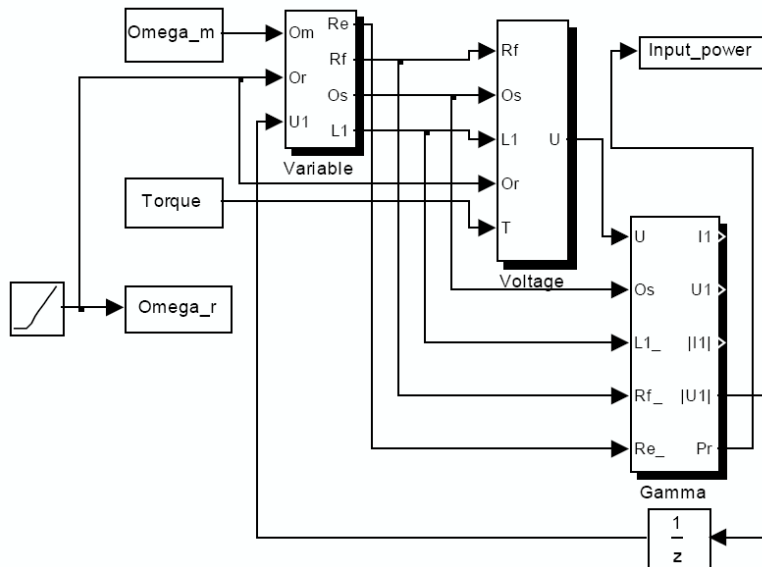
$$\frac{U_1}{\omega} = \sqrt{\frac{M_{max} \left[ [Rp\Omega_m]^2 + \left[ p\Omega_m L_\sigma \Omega_r - \frac{R_1}{L_{1min}} R \right]^2 \right]}{3Rp^3\Omega_r\Omega_m}} = B \quad (1.70)$$

Odtud už jen vyjádříme maximální moment  $M_{max}$ :

$$M_{max} = \frac{3Rp^3\Omega_r\Omega_m^2 B^2}{[Rp\Omega_m]^2 + \left[ p\Omega_m L_\sigma \Omega_r - \frac{R_1}{L_{1min}} R \right]^2} \quad (1.71)$$

## 2 MODELOVÁNÍ ZTRÁT V PROGRAMU MATLAB

Tato kapitola je věnována přesnosti odvozených vztahů. Asynchronní motor (respektive náhradní  $\Gamma$ -článek) byl namodelován pomocí programu Matlab Simulink. Model byl sestaven tak, že jeho výstupem je závislost příkonu motoru na jeho rotorovém kmitočtu  $\Omega_r$ , a je znázorněna na obrázku 2.1.



Obr. 2.1: Blokové schéma simulace v MATLABu

Rád bych podotkl, že tato simulace nebyla v náplně práce a uvádím jí zde jen pro představu jak jsou či nejsou přesné rovnice této optimalizace.

V uvedeném schématu blok "Variable" přepočítává proměnné parametry motoru jako jsou odpory  $R_1$ ,  $R_f$  a indukčnost  $L_1$  v závislosti na sycení. Blok "Voltage" ze vstupních hodnot podle vzorce (1.1) počítá potřebnou efektivní hodnotu napětí  $U$ . Úkolem posledního složeného bloku "Gamma" je ze vstupních hodnot  $\Gamma$ -článu vypočítat velikost příkonu motoru (Input\_power) a také velikost indukovaného napětí  $U_1$ , které je přivedeno zpět na blok "Variable" (vytvoříme tak algebraickou smyčku). Z obrázku je dále zřejmé, že model je vytvořen tak aby byly zadávány pouze nastavené parametry momentu (Torque) a otáček stroje v  $rad/s$  ( $\Omega_m$ ). Rotorový kmitočet  $\Omega_r$  je nadefinován jako proměnná s daným rozsahem a jak už jsme uvedli výše, výstupem bude příkon motoru.

### 2.1 Simulace konkrétních motorů

#### 2.1.1 Motor 1LA7063-4AB

Tento motor byl použit jako pohon elektrického kola [2] a jeho základní katalogové hodnoty jsou uvedeny v následující tabulce 2.1.

Počet pólových dvojic	2
Jmenovitý moment	1,3Nm
Jmenovité otáčky(při 50Hz)	1350min <sup>-1</sup>
Jmenovitý výkon	180W
Účinnost při jmen. výkonu	60%

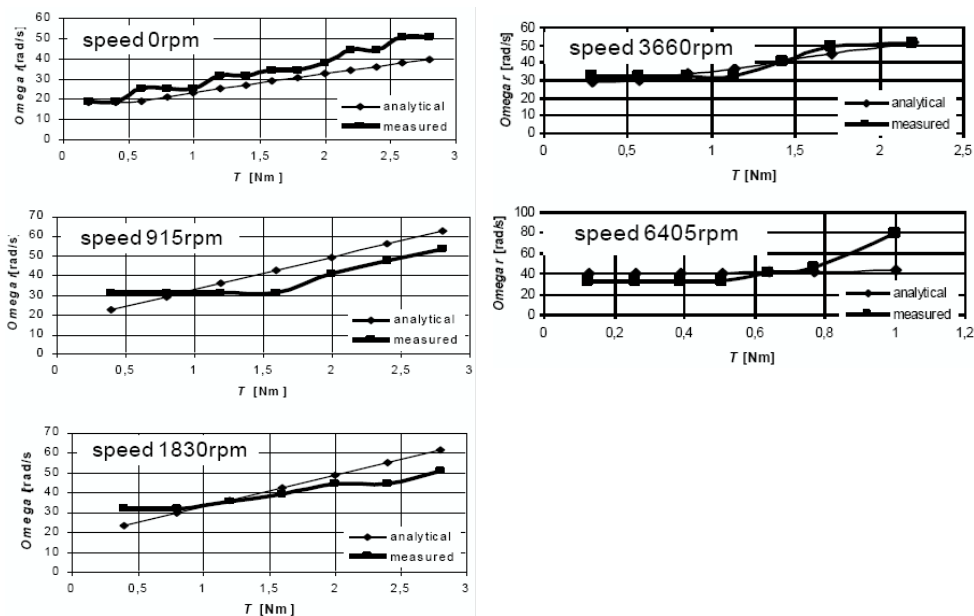
Tab. 2.1: Jmenovité hodnoty motoru 1LA7063-4AB

Motor byl, kvůli jeho použití, převinut pro nízké napětí. U převinutého motoru byl dosažený výkon 500W při nových jmenovitých otáčkách 4050ot/min, jeho konečné hodnoty  $\Gamma$ -článku jsou seřazeny v tabulce 2.2.

$R_1 = 43m\Omega$	$L_{1max} = 1,7mH$
$R = 40m\Omega$	$L_{1min} = 0,4mH$
$R_v = 3\Omega$	$A = 0,0143Vs/rad$
$R_{h0} = 3\Omega$	$B = 0,0257Vs/rad$
$\omega_0 = 314rad/s$	$L_\sigma = 150\mu H$

Tab. 2.2: Parametry převinutého motoru 1LA7063-4AB

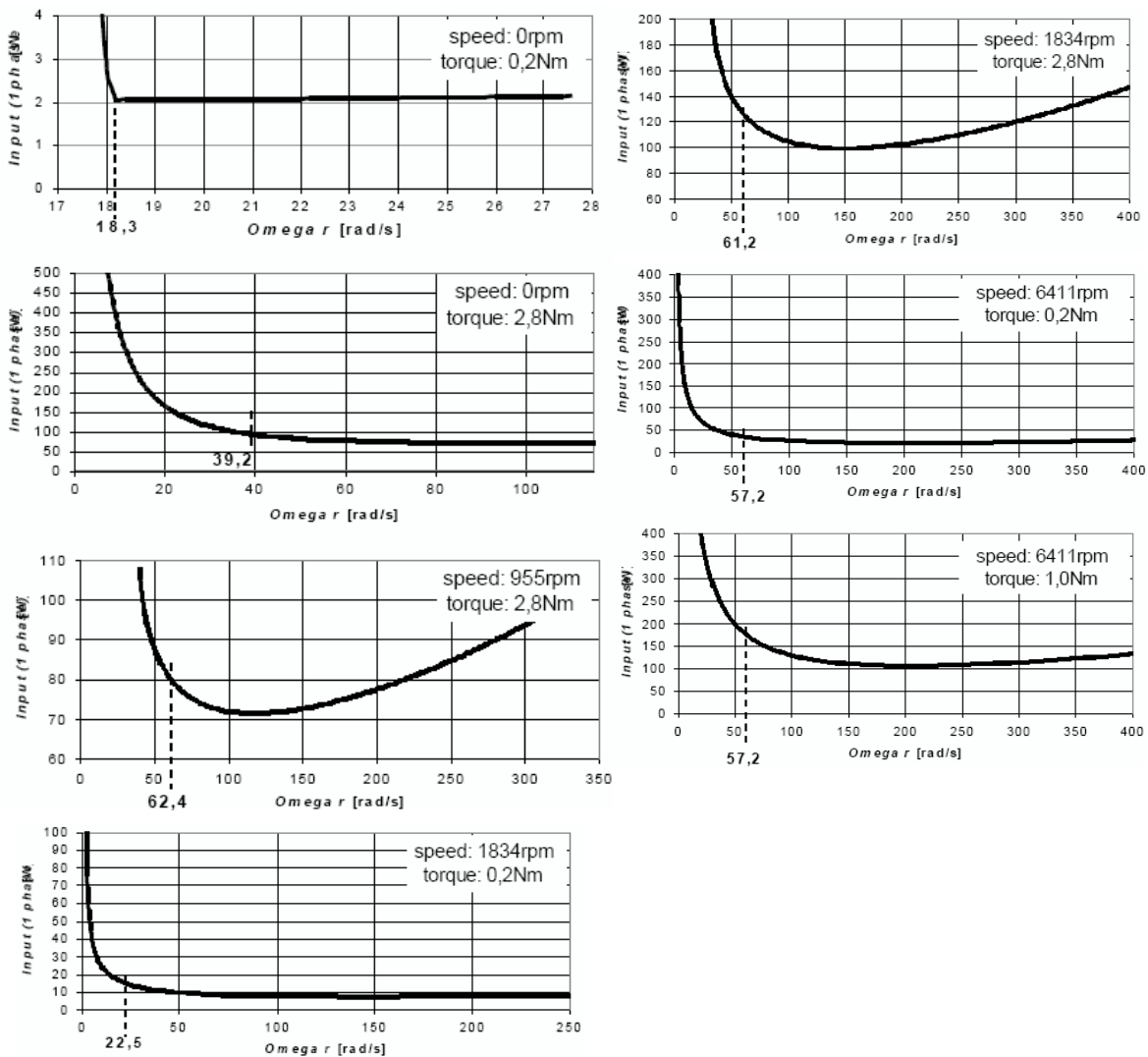
Tento motor byl experimentálně měřen. Parametrem měření byl zatěžovací moment a otáčky stroje. V daném pracovním bodě se měnilo napájecí napětí tzn. měnil se skluzový kmitočet, a měřil se příkon stroje. Získané výsledky můžeme vidět na následujících grafech 2.2.



Obr. 2.2: Závislost  $\Omega_r = \Omega_r(T)$  měřených a vypočtených hodnot pro motor 1LA7063-4AB

Můžeme vidět, že naměřená křivka  $\Omega_r = \Omega_r(T)$  (measured) kopíruje směr přímky získané výpočty. V některých částech jsou rozdíly značné, to je pravděpodobně způsobeno zjednodušováním v odvozování rovnic ale i dalšími faktory. Nejvýznamnější je faktor teploty a to hlavně v oblasti přetěžování stroje. Pro vysoké teploty se podstatně mění hodnoty odporu vinutí což znamená, že zadávané parametry  $R_1$  a  $R$  (v tab. 2.2) jsou odlišné od skutečných. Však i přes tyto nedostatky přináší podobnost měřených a vypočtených hodnot hřejivě uspokojující pocit z dobře odvedené práce.

Parametry motoru byly vloženy do simulace v programu Matlab. Získáván byl příkon stroje v závislosti na  $\Omega_r$  při parametrech momentu a otáček. Ve výsledných průbězích je zakreslen analyticky vypočítaný  $\Omega_r$ .



Obr. 2.3: Výsledné grafy  $P = P(\Omega_r)$  simulace motoru 1LA7063-4AB

### 2.1.2 Motor 1LA5183-2AA

V porovnání s předchozím, je tento motor podstatně větší a většího výkonu. Základní katalogové parametry jsou v tabulce 2.3.

Počet pólových dvojic	1
Jmenovitý moment	71Nm
Jmenovité otáčky(při 50Hz)	2940min <sup>-1</sup>
Jmenovitý výkon	122kW
Účinnost při jmen. výkonu	91,7%

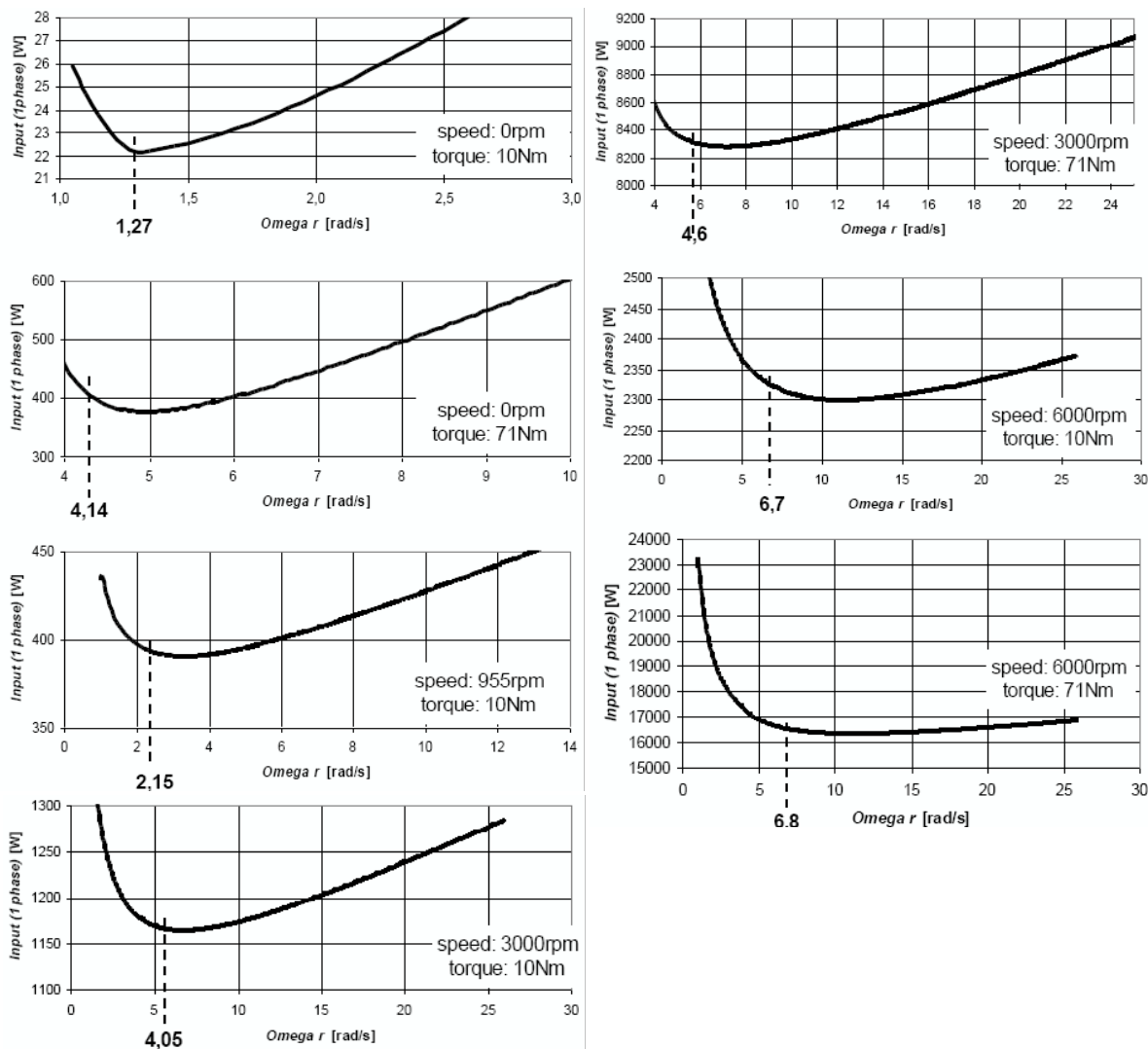
Tab. 2.3: Jmenovité hodnoty motoru 1LA5183-2AA

Parametry  $\Gamma$ -článku jsou počítány pro standardní vinutí (napájení 400V při 50Hz), viz. tabulka 2.4.

$R_1 = 176,4m\Omega$	$L_{1max} = 80mH$
$R = 131,5m\Omega$	$L_{1min} = 25mH$
$R_v = 236\Omega$	$A = 0,5729Vs/rad$
$R_{h0} = 236\Omega$	$B = 0,8910Vs/rad$
$\omega_0 = 314rad/s$	$L_\sigma = 2,97mH$

Tab. 2.4: Parametry motoru 1LA5183-2AA

Stejně porovnání výpočtů a simulace v MATLABu, jako pro předchozí motor, byly provedeny i pro tento motor. Výsledky jsou zobrazeny v následujících grafech 2.4.



Obr. 2.4: Výsledné grafy  $P = P(\Omega_r)$  simulace motoru 1LA5183-2AA

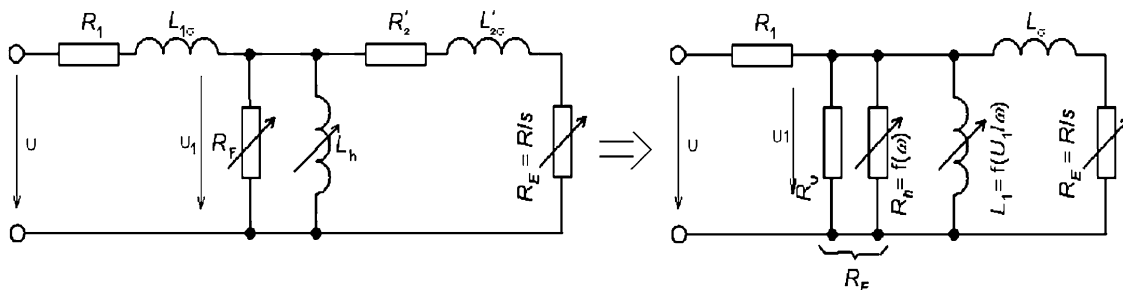
## 2.2 srovnání výpočtů se simulací v MATLABu

Výsledné průběhy jsou na obrázcích 2.3 a 2.4. Jak víme výstupem simulace je závislost příkonu motoru na skluzovém kmitočtu. Analyticky vypočítaný optimální  $\Omega_r$  by tedy měl odpovídat lokálnímu minimu křivky pro daný pracovní bod. Při studiu přesnosti se dostaneme k závěru, že odvozené rovnice vždy udávají o něco menší výsledek než jaký by byl správný. To je pravděpodobně dáno nesčetnými zjednodušeními, kterých jsme se během odvozování dopustili. Z obrázků je patrné, že nejpřesnějších výsledků se nám dostává při malých otáčkách a malých momentech (téměř se shoduje se simulací). Ovšem při vzrůstajících momentech i otáčkách je vypočítaný kmitočet vždy o něco menší než kmitočet odpovídající minimu příkonu.

# 3 VÝPOČTY OPTIMÁLNÍHO SKLUZOVÉHO KMITOČTU PRO KONKRÉTNÍ MOTORY

## 3.1 Přepoččet T-článek na $\Gamma$ -článek

Všichni výrobci asynchronních motorů, ve svých katalozích, udávají hodnoty prvků pro T-článek. T-článek je nevhodný k řešení, protože je oproti  $\Gamma$ -člátku všeobecně komplikovanější<sup>1</sup>. Proto si nejprve katalogové hodnoty T-člátku ( $R_1, R_2', X_{1\sigma}, X_{2\sigma}', X_h$ ) přepočteme na hodnoty  $\Gamma$ -člátku ( $R_1, R, L_1, L_\sigma$ ).



Obr. 3.1: K přechodu mezi náhradními schématy

Použijeme k tomu následující vztahy vycházející z [3]:

$$L_{1\sigma} = \frac{X_{1\sigma}}{2\pi\omega_0} \quad ; \quad L_h = \frac{X_h}{2\pi\omega_0} \quad ; \quad L_{2\sigma}' = \frac{X_{2\sigma}'}{2\pi\omega_0} \quad (3.1)$$

$$L_1 = L_{1\sigma} + L_h \quad (3.2)$$

$$k = 1 - \frac{L_{1\sigma}}{L_1} \quad (3.3)$$

$$L_\sigma = L_1 \frac{1 - k^2}{k^2} \quad (3.4)$$

$$R = \frac{R_2'}{k^2} \quad (3.5)$$

kde:

- $k$  je součinitel vazby
- $\omega_0$  je úhlový kmitočet (zpravidla 50Hz)

<sup>1</sup> $\Gamma$ -článek má o jednu proměnou méně než T-článek, viz. [3]

Odpor  $R_F$  reprezentující ztráty v železe statoru lze buď odhadnout nebo pro přesnější výsledky je vhodné ho určit měřením. Měření spočívá v měření motoru naprázdno, nejlépe při synchronních otáčkách při kterých budou ventilační ztráty nulové a výsledné ztráty naprázdno jsou přímo ztráty v železe  $\Delta P_{Fe}$ . Potom platí:

$$R_{Fe} = \frac{U^2}{\Delta P_{Fe}} \quad (3.6)$$

$R_{Fe}$  je paralelní kombinací  $R_v$  a  $R_{h0}$  jak ukazuje vztah (1.14). V praxi, pro jmenovitý kmitočet 50Hz, jsou tyto odpory zhruba stejné. Proto lze psát:

$$\frac{R_{Fe}}{2} \doteq R_v \doteq R_{h0} \quad (3.7)$$

Tímto máme vyřešené náhradní schéma  $\Gamma$ -článku asynchronního stroje. Ovšem ještě si musíme uvědomit, že  $R_h$  je závislý na kmitočtu napájení podle vztahu (1.11) (tj. pro nominální otáčky 50Hz platí  $R_h = R_{h0}$ ) a  $L_1$  je parametrická, viz. kapitola 1.3.1. Uvažovaná lineární aproximace se opírá o body  $A$  a  $B$  (obr.1.3) stanovené z výsledků měření. Měření je založeno na měření naprázdno (nejlépe při nulovém skluzovém kmitočtu). Měníme velikost napájecího napětí  $U$  a odečítáme proud jedné fáze statorového vinutí  $I$ . Za podmínky minimálního až nulového skluzového kmitočtu uplatníme vztah (1.16), který si připomeneme:

$$L_1 = \frac{U}{I\omega} \sqrt{\frac{1 - R_1^2 \left(\frac{I}{U}\right)^2}{1 - \frac{U^2}{R_F^2 I^2}}} \quad (3.8)$$

Dostaneme tak závislost zobrazenou na obr.1.3. Ve vynesené charakteristice jsou důležité body  $A$  a  $B$ , které lze vypočítat pomocí vztahů (1.18), které si rovněž připomeneme:

$$A = \frac{U_{1krit}}{\omega_0} = U_{krit} \frac{L_{1max}}{\sqrt{R_1^2 + \omega_0^2 L_{1max}}} \quad ; \quad B = \frac{U_{10}}{\omega_0} = U_0 \frac{L_{1min}}{\sqrt{R_1^2 + \omega_0^2 L_{1min}}} \quad (3.9)$$

kde  $U_{1krit}$  je napětí při kterém je magnetický obvod nasycen ( $L_1$  přestává být konstantní) a  $U_{10}$  je napětí maximálního nasycení. Pomocí vypočtených bodů a změřené charakteristiky (obr.1.3) získáme aproximaci danou vztahem (1.19):

$$L_1 = L_{1max} - \frac{\Delta L_1}{B - A} \left( \frac{U_1}{\omega} - A \right) \quad (3.10)$$

## 3.2 Princip použití matematického aparátu

Řešení optimálního rotorového kmitočtu jsme celkem rozdělili na šest případů. Stanovit který vzorec použít není zrovna jednoduché, protože rozdělení podle otáček (extrémně malé otáčky, větší malé otáčky a velké otáčky) je přímo závislé na počítaném optimálním skluzovém kmitočtu. Rovněž momentové členění se zakládá na spočítání hranice, mezi malým a velkým momentem, pomocí optimálního skluzového kmitočtu. Pro ruční počítání to znamená nejprve se rozhodnout který případ je nejvhodnější pro zadané podmínky a po vypočtení optimálního rotorového kmitočtu zkontrolovat zda naše volba byla správná (spočítat hraniční nebo i maximální moment a hraniční otáčky).

Je bezpochyby lepší pro výpočet použít výpočetní techniku. Pro tyto účely byl vytvořen program `ideal_skluz.exe`, který byl pro tyto účely naprogramován v jazyce C. V programu si nadefinujeme celý motor pomocí  $\Gamma$  - článku a jeho provozních podmínek jako je zátěžný moment a požadované otáčky. Program řeší zadání pro všech šest případů zároveň. Vypočítá optimální rotorový kmitočet  $\Omega_r$  pro každý případ, stejně tak spočte i hraniční a maximální momenty. Také podle vypočtených hodnot rozhodne, který řešící rozsah je správný nebo zda je zadání neřešitelné (při velkém přetížení na daných otáčkách). Program taky dopočte potřebné napájecí napětí podle vztahu (1.24).

Pro ukázkou zde provedeme výpočet dvou motorů. K řešení nám poslouží už výše zmiňovaný program. Motory budeme řešit pro různé otáčky a různé zatížení tak, abychom ukázali univerzálnost a rozsah použití optimalizace.

## 3.3 Výpočet optimálního rotorového kmitočtu pro motor 1LA7 070-4AB

Jedná se o asynchronní motor s kotvou nakrátko od firmy Siemens. Statorové vinutí je spojeno do hvězdy a při jmenovitých hodnotách napájené fázovým napětím  $U_f = 230V$  a proudem jedné fáze  $I_f = 0,76A$ . Je to čtyřpólový stroj, který při jmenovitých otáčkách  $n = 1350min^{-1}$  dává jmenovitý moment  $M = 1,8Nm$ . Za těchto podmínek je účinnost  $\eta = 60\%$ ,  $\cos\varphi = 0,79$  a výkon  $80W$ . Výrobce dále udává hodnoty pro náhradní  $T$ -článek motoru:

$$R_1 = 60,6\Omega ; R_2' = 33,75\Omega ; X_{1\sigma} = 54,7\Omega ; X_{2\sigma}' = 10,91\Omega ; X_h = 383,4\Omega$$

Nejprve si musíme vytvořit náhradní schéma as. motoru ve tvaru  $\Gamma$ -článku. Postup přepočtu je popsán v kapitole 3.1. Přepočtem jsme získali následující hodnoty:

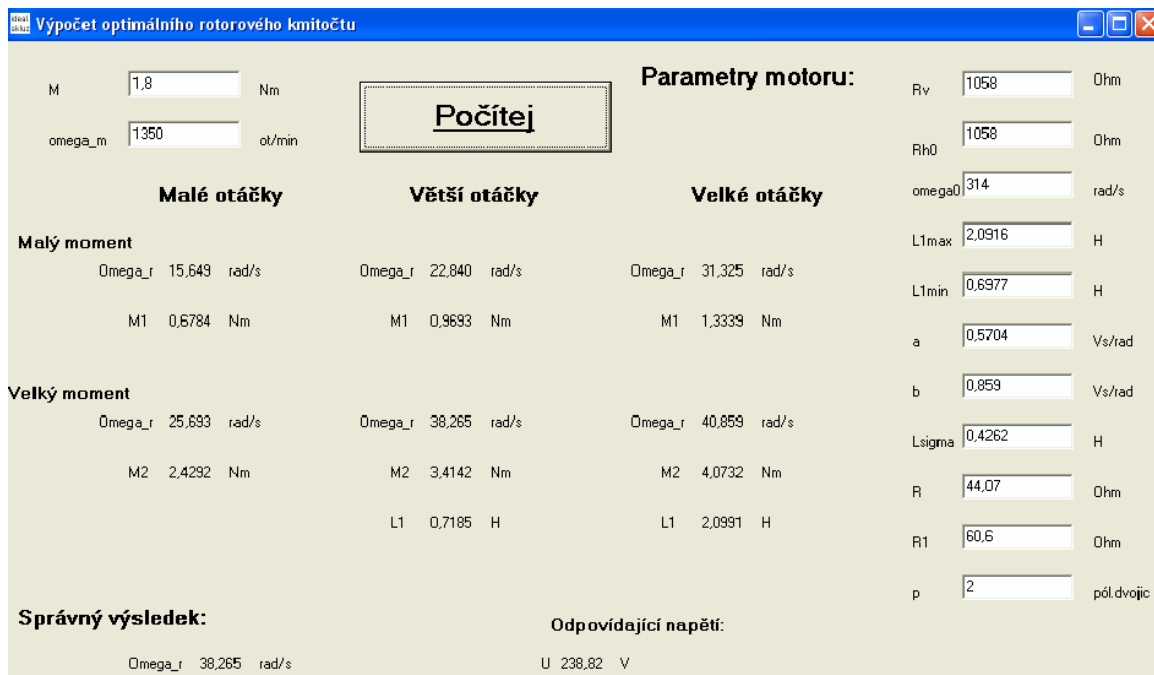
$$R_1 = 60,6\Omega ; R = 44,07\Omega ; L_1 = 1,3941H ; L_\sigma = 0,4262H ;$$

$$R_v = R_{h0} = 1058\Omega ; L_{1max} = 2,0916H ; L_{1min} = 0,6977H ;$$

$$A = 0,5704Vs/rad ; B = 0,859Vs/rad$$

Nyní máme všechny vstupní konstanty naší optimalizace. Další potřebné vstupní hodnoty jsou dány pracovním bodem motoru, proměnnými otáčkami a momentem.

Motor budeme řešit už ve zmíněném programu `ideal_skluz.exe`, viz. obr.3.2. Můžeme vidět, jak výsledky všech skupin otáček o momentů, tak velikost korepondujícího napětí. Pro větší malé otáčky a velké otáčky při velkém momentu se optimální  $\Omega_r$  počítá pomocí jednoduché iterační metody<sup>2</sup>. Program vybere správné řešení podle tabulky 4.1 a dále dopočte korespondující napájecí napětí podle rovnice (1.24).



**Výpočet optimálního rotorového kmitočtu**

M: 1,8 Nm; omega\_m: 1350 ot/min

**Počítej**

**Parametry motoru:**

Rv: 1058 Ohm; Rh0: 1058 Ohm; omega0: 314 rad/s; L1max: 2,0916 H; L1min: 0,6977 H; a: 0,5704 Vs/rad; b: 0,859 Vs/rad; Lsigma: 0,4262 H; R: 44,07 Ohm; R1: 60,6 Ohm; p: 2 pól dvojic

	Malé otáčky	Větší otáčky	Velké otáčky
<b>Malý moment</b>			
Omega_r	15,649 rad/s	22,840 rad/s	31,325 rad/s
M1	0,6784 Nm	0,9693 Nm	1,3339 Nm
<b>Velký moment</b>			
Omega_r	25,693 rad/s	38,265 rad/s	40,859 rad/s
M2	2,4292 Nm	3,4142 Nm	4,0732 Nm
L1		0,7185 H	2,0991 H

**Správný výsledek:** Omega\_r 38,265 rad/s

**Odpovídající napětí:** U 238,82 V

Obr. 3.2: Výpočet pro motor 1LA7 070-4AB

<sup>2</sup>Algoritmus se založen na dosažení zadané  $L_1$  do potřebných rovnic. Pokud se výsledek mezi volenou a vypočtenou hodnotou  $L_1$  bude lišit o více než 0,1mH, tak se krok provádí znova pro větší hodnotu  $L_1$ . Výpočet se ukončí při shodě volené a vypočtené  $L_1$  o méně než 0,1mH nebo pokud se při dosazování dosáhne  $L_{1max}$  (v tom případě daný rozsah není vhodný pro řešení a není třeba správné iterace).

Motor byl vyřešen pro široký rozsah otáček a zatěžovacích momentů a výsledky řešení jsou zobrazeny v následující tabulce.

$n [min^{-1}]$	$M [Nm]$			
	0,2	1	1,8	2
0	15,64	19,11	25,69	27,24
50	15,64	19,11	25,69	27,24
200	18,59	35,92	35,92	35,93
1000	21,26	36,86	36,86	36,86
1350	22,8	37,4	<b>38,26</b>	38,86
3000	32,08	32,08	41,58	41,83

Tab. 3.1: Optimální  $\Omega_r [rad/s]$  pro různé otáčky a moment motoru 1LA7 070 -4AB

### 3.4 Výpočet optimálního rotorového kmitočtu pro motor 1LA5 183-2AA

Opět máme asynchronní motor s kotvou nakrátko od firmy Siemens, ale tento motor je podstatně větší. Jeho jmenovitý výkon je 22kW, statorové vinutí je spojeno do hvězdy napájené fázovým napětím  $U_f = 230V$  a proudem jedné fáze  $I_f = 39A$ . Jmenovité otáčky jsou  $n = 2940min^{-1}$ , jedná se tedy o dvojpólový stroj. Jmenovitý moment je  $M = 71Nm$ , účinnost  $\eta = 91,7\%$ , a účinník  $cos\varphi = 0,88$ . Výrobce dále udává hodnoty pro náhradní  $T$ -článek motoru:

$$R_1 = 0,1764\Omega ; R_2' = 0,1246\Omega ; X_{1\sigma} = 0,45\Omega ; X_{2\sigma}' = 0,487\Omega ; X_h = 16,48\Omega$$

Opět si převedeme model  $T$ -článku na  $\Gamma$ -článek podle kapitoly 3.1, dostaneme tak:

$$R_1 = 0,1764\Omega ; R = 0,1315\Omega ; L_1 = 53,9mH ; L_\sigma = 2,97mH ;$$

$$R_v = R_{h0} = 236\Omega ; L_{1max} = 80mH ; L_{1min} = 25mH ;$$

$$A = 0,5729Vs/rad ; B = 0,8910Vs/rad$$

Jak už víme, nyní vše záleží na pracovním bodě motoru. Postup výpočtu je stejný jako u předešlého motoru. Zadané parametry a vypočtené hodnoty pro jmenovitý pracovní bod můžeme vidět na obrázku 3.3.

Výsledky výpočtu  $\Omega_r$  pro různé otáčky a různé momenty jsou seřazeny v tabulce 3.2. Silně vyznačená hodnota ukazuje optimální skluzový kmitočet pro jmenovité hodnoty. Pro jmenovité hodnoty je výpočet zachycen na obrázku 3.3.

Výpočet optimálního rotorového kmitočtu

M: 71 Nm  
omega\_m: 2940 ot/min

**Počítej**

**Parametry motoru:**  
 Rv: 236 Ohm  
 Rh0: 226 Ohm  
 omega0: 314 rad/s  
 L1max: 0,08 H  
 L1min: 0,025 H  
 a: 0,5729 Vs/rad  
 b: 0,891 Vs/rad  
 Lsigma: 0,003 H  
 R: 0,1318 Ohm  
 R1: 0,176 Ohm  
 p: 1 pól.dvojc

	Malé otáčky	Větší otáčky	Velké otáčky
<b>Malý moment</b>			
Omega_r	1,2194 rad/s	4,0508 rad/s	4,0470 rad/s
M1	9,1031 Nm	30,015 Nm	30,017 Nm
<b>Velký moment</b>			
Omega_r	4,1493 rad/s	4,5995 rad/s	4,5819 rad/s
M2	74,332 Nm	82,240 Nm	82,250 Nm
L1		0,0361 H	0,0363 H

**Správný výsledek:** Omega\_r 4,5819 rad/s  
**Odpovídající napětí:** U 264,26 V

Obr. 3.3: Výpočet pro motor 1LA5 183 - 2AA

$n [min^{-1}]$	$M [Nm]$			
	5	10	30	71
—				
0	1,22	1,27	2,27	4,14
50	1,27	1,37	2,33	4,14
200	1,43	1,43	2,26	4,2
1000	2,23	2,23	2,55	3,97
2940	4,1	4,1	4,1	<b>4,56</b>
6000	6,81	6,81	6,81	8,96

Tab. 3.2: Optimální  $\Omega_r [rad/s]$  pro různé otáčky a moment motoru 1LA5 183-2AA

## 4 ZÁVĚR

Teoretické řešení uvedené v této práci přináší odpověď, jak vypočítat optimální rotorový kmitočet třífázového asynchronního stroje s kotvou nakrátko s požadavkem na minimální ztráty v ustáleném stavu. Vstupní proměnné jsou požadovaný mechanický moment, požadované otáčky a vlastnosti daného stroje, reprezentované náhradním schématem ve tvaru  $\Gamma$ -článku. Je jasné, že tuto optimalizaci nevyužijeme u strojů připojených na síť a pracujících při konstantních otáčkách a zatížení. Využijeme jí u trakčního řízení. Například u zařízení s akumulátorem, střídačem a asynchronním motorem je vhodné použít výsledné vztahy. Přínosem nám pak bude lepší účinnost a práce schopnost zařízení.

Výsledné vztahy pro výpočet optimálního rotorového kmitočtu jsou shrnuty v tabulce 4.1. Pro tento optimální  $\Omega_r$  je vždy nutné dopočítat korespondující napájecí napětí, které lze uvažovat podle vztahu (1.24).

extrémně malé otáčky ( $p\Omega_m \ll \Omega_r$ )	větší malé otáčky ( $\Omega_r < p\Omega_m < 20\Omega_r$ )	velké otáčky ( $p\Omega_m \geq 20\Omega_r$ )
malý moment ( $M \leq M_1$ )	malý moment ( $M \leq M_1$ )	malý moment ( $M \leq M_2$ )
$\Omega_r$ (1.40)	$\Omega_r$ (1.57)	$\Omega_r$ (1.63)
$M_1$ (1.43)	$M_1$ (1.43)	$M_1$ (1.65)
velký moment ( $M > M_1$ )	velký moment ( $M > M_1$ )	velký moment ( $M > M_2$ )
$\Omega_r$ (1.50)	$\Omega_r$ (1.58)	$\Omega_r$ (1.66)
	$L_1$ (1.60)	$L_1$ (1.69)

Tab. 4.1: Přehled výpočtu

### Zhodnocení výpočtů zadaných motorů

V práci byly provedeny výpočty dvou typů asynchronních motorů. Při pohledu na výsledky výpočtů je vidět souhlasnost vypočtených optimálních rotorových kmitočtů s teoretickými předpoklady. Při malých otáčkách a malém momentu je dobré zmenšit skluzový kmitočet, větší sycení není vhodné ale díky malým otáčkám jsou ztráty v železe minimální, magnetizační proud nemá větší vliv na ztráty ve vinutí a ztráty v rotoru jsou menší díky malému  $\Omega_r$ . Při větších momentech už je vhodnější zvětšit  $\Omega_r$ , protože zvětšením skluzového kmitočtu a snížením sycení klesnou i ztráty v železe a ztráty ve vinutí statoru klesnou také, díky menšímu magnetizačnímu proudu. A při větších momentech nejsou ztráty v rotoru tak významné oproti ostatním.

Pro vysoké otáčky je rovněž vidět, že je lepší zvolit větší skluzový kmitočet aby sycení v motoru nebylo zbytečně vysoké. Menším sycením totiž zmenšíme dominantní ztráty v železe.

Ve výsledcích jsou uvedeny výsledky pro jmenovité hodnoty motorů. U malého motoru 1LA7 070-4AB vyšel optimální rotorový kmitočet  $\Omega_r = 38,2 \text{ rad/s}$  tj. 6Hz. Skluzový kmitočet udávaný výrobcem je 5Hz (pro otáčky  $1350 \text{ min}^{-1}$  a moment 1,8Nm). Lze tedy říci, že tento motor pracuje při jmenovitých hodnotách v poměrně úsporném režimu. U motoru velkého výkonu 1LA7 070 -4AB výrobce udává jmenovitý rotorový kmitočet 1Hz (při otáčkách  $2940 \text{ min}^{-1}$  a momentu 71Nm). Vypočtený optimální rotorový kmitočet je 0,75Hz ( $\Omega_r = 4,56 \text{ rad/s}$ ). Opět se jedná o přibližně stejné hodnoty, při kterých má motor dobrou účinnost.

# LITERATURA

- [1] Vorel, P. *Maximum Efficiency of an Induction Machine Operating in Wide Range of Speed and Torque - Part 1 (Theoretical Analysis)*. připraveno k vydání v IEEE Transaction on Industry Applications.
- [2] Vorel, P., Huták, P. Procházka, P. *Maximum Efficiency of an Induction Machine Operating in Wide Range of Speed and Torque - Part 2 (Calculation, Simulation and Measurement Results)*. připraveno k vydání v IEEE Transaction on Industry Applications.
- [3] Patočka, M. *Střídavé stroje*. čtvrtá upravená školní verze, Skriptum FEKT VUT Brno, Brno 2008.