VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY
INSTITUTE OF MATHEMATICS

TENSORY A JEJICH APLIKACE
TENSORS AND THEIR APPLICATIONS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE Filip Korbel
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.
SUPERVISOR

BRNO 2016

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav matematiky
Student:	**Filip Korbel**
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	**prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.**
Akademický rok:	2015/16

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Tensory a jejich aplikace

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Na základě studia odborné literatury podat přehled základních pojmů a výsledků tenzorového počtu. Podrobněji se věnovat některým speciálním případům z diferenciální geometrie popřípadě z mechaniky.

Cíle bakalářské práce:

Hlavním cílem práce je podat přehled základních pojmů a výsledků tenzorového počtu a uvést některé aplikace z diferenciální geometrie popř. z mechaniky.

Seznam literatury:

M. Doupovec: Diferenciální geometrie a tenzorový počet, skriptum VUT

I. Kolář: Úvod do globální analýzy, skriptum MU v Brně, 2003

L. Boček: Tenzorový počet, SNTL, Praha, 1976

B. Budinský, B. Kepr: Základy diferenciální geometrie s technickými aplikacemi, SNTL, Praha, 1970

M. A. Akivis, V. V. Goldberg: Tensornoje isčislenije, Moskva, 1972

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2015/16

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc. ředitel ústavu	doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D. děkan fakulty

Abstrakt
Cílem této práce je podat přehled základních pojmů a výsledků tenzorového počtu. Tensory zavedeme jako multilineární zobrazení a ukážeme základní tensorové operace. V další části uvedeme příklady tensorů, zejména z oblasti diferenciální geometrie.

Summary
The goal of this thesis is to provide an overview of basic terms and results of tensor calculus. We introduce tensors as multilinear mappings and introduce basic tensor operations. In the next section, we give some examples of tensors, especially from the field of differential geometry.

Klíčová slova
Tenzor, Tenzorový počet.

Keywords
Tensor, Tensor calculus.

KORBEL, F. *Tensory a jejich aplikace.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2016. 26 s. Vedoucí bakalářské práce prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc, dr. h. c..

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně dle pokynů vedoucího a za použití uvedené literatury.

Filip Korbel

Děkuji panu prof. RNDr. Miroslavu Doupovcovi, CSc., dr. h. c. za ochotu, odborné vedení a cenné rady při zpracování této bakalářské práce.

Filip Korbel

Obsah

1. Úvod

Ve své nejstarší podobě představovaly tensory jen určité množiny čísel označených více indexy. Za jejich předchůdce tak můžeme považovat vektory, tedy množiny čísel s jedním indexem. První pokusy o zavedení takových systémů se datují až do starověku, ale vektorový počet jak jej chápeme dnes se objevuje až v pracích holandského inženýra S. Selvina (1548-1620). Pojem *vektor* použil jako první irský matematik W. Hamilton (1805-1865), který se zasloužil o další rozvoj vektorového počtu, přišel mimo jiné s geometrickou představou vektoru jako orientované úsečky. Za další krok ve vývoji tensorů pak můžeme považovat matice. Na jejich vývoji se nejvíce podílel Angličan A. Cayley (1821-1895).

Systémy čísel s více indexy se začaly během 18. století objevovat v oblasti mechaniky pružných těles a v 19. století v algebře a geometrii. Problémům spojeným s pružností a napětím se věnovali např. L. Euler (1707-1783), P. Laplace (1749-1827) nebo O. Cauchy (1789-1857), z geometrie připomeňme K. F. Gausse (1777-1855), B. Riemanna (1826-1866) a E. B. Christoffela (1829-1900). V této době ale matematikům chyběl nástroj, jak s takovými systémy pracovat a matematické zápisy tak působily poněkud těžkopádně. S vhodným nástrojem pro práci s vektory přišel koncem 19. století americký matematik J. W. Gibbs (1839-1903), který položil základy vektorového počtu (za zakladatele vektorového počtu může být považován i britský matematik Oliver Heaviside (1850-1925), který přišel nezávisle na Gibbsovi s podobnými závěry). Zobecnění vektorového počtu na systémy čísel s více indexy vymyslel italský matematik G. Ricci (1853-1925), který je považován za zakladatele tenzorového počtu (ve své práci používal pojmenování *absolutní diferenciální počet*). Ricciho student T. Levi-Civita (1873-1942) pak absolutní diferenciální počet dále rozvíjel. Pojem „tensor“ zavedl až na přelomu 19. a 20. století německý fyzik W. Voigt (1850-1919).

Velmi důležitým krokem ve vývoji tenzorového počtu pak byla jeho aplikace na teorii relativity v roce 1913, za kterou stáli A. Einstein (1879-1955) a M. Grossmann (1878-1936). Einsteinovým cílem bylo v první řadě použít tensory jako nástroj pro práci na teorii relativity, ale jeho práce zároveň přinesla další rozvoj tenzorového počtu. Einsteinovým nejznámějším přínosem v oblasti tensorů je zavedení *sumační konvence* v roce 1916. Algebraický přístup k definici tensoru představili H. Weyl (1885-1955) a O. Veblen (1880-1960) a bezindexová podoba tensorů, která umožnila zapisovat fyzikální zákony nezávisle na souřadnicích se objevila v 50. letech 20. století v publikacích zaměřených na mechaniku kontinua.

První kapitola této práce je zaměřena na uvedení algebraických pojmů, které jsou nutné pro zavedení tensorů a tensorových operací. Jedním z nejdůležitějších je pojem lineární a bilineární formy. Zobecněním bilineární formy v následující kapitole představíme definici tensoru. K tensoru tedy přistupujeme jako k multilineárnímu zobrazení. Dále definujeme souřadnice tensoru a s jejich pomocí představíme alternativní, méně abstraktní, definici tensoru. V práci je uveden důkaz, že obě zmíněné definice tensoru vedou ke stejnému geometrickému objektu a jsou tedy ekvivalentní. Druhá část druhé kapitoly je věnována přehledu operací s tensory.

Cílem třetí kapitoly je ukázat příklady nejznámějších tensorů. V případě tensoru setrvačnosti a prvního základního tensoru plochy uvedeme i jejich odvození. Závěrečná kapitola pojednává o příkladu z moderní diferenciální geometrie, konkrétně o tensorech na diferencovatelných varietách. Nejprve připomeneme pojem křivky a plochy a varietu pak uvedeme jako jejich zobecnění. Ukážeme, jak se zavede tečný prostor diferencovatelné variety a podobně jako ve druhé kapitole zavedeme tensor a jeho souřadnice.

.

2. Algebraický základ

V této kapitole připomeneme některé základní pojmy a výsledky lineární algebry. Jedná se zejména o zavedení vektorového prostoru, duálního vektorového prostoru a bilineárního zobrazení. Pro zjednodušení některých algebraických výrazů je vhodné zavést Einsteinovu sumační konvenci, podle které se automaticky sčítá podle každého indexu, který se v daném vzorci vyskytuje u jednoho výrazu nahoře a u jiného výrazu dole. Místo $\sum_{i=1}^{n} x_i y^i$ tedy píšeme $x_i y^i$ apod.

Definice 2.1. Komutativní grupa V se nazývá *vektorový prostor (nad $\mathbb{R}$)*, jestliže pro každý prvek $\mathbf{v} \in V$ a každé reálné číslo $r \in \mathbb{R}$ je definován prvek $r \cdot \mathbf{v} = r\mathbf{v}$ z množiny V a přitom platí pro každé $\mathbf{u} \in V,\ \mathbf{v} \in V,\ r \in \mathbb{R},\ s \in \mathbb{R}:$

$$\begin{aligned} r \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= r \cdot \mathbf{u} + r \cdot \mathbf{v}, \\ (r+s) \cdot \mathbf{u} &= r \cdot \mathbf{u} + s \cdot \mathbf{u}, \\ (r \cdot s) \cdot \mathbf{u} &= r \cdot (s \cdot \mathbf{u}), \\ 1 \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Prvky množiny V nazýváme *vektory*.

Definice 2.2. Buďte V vektorový prostor a $\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_n} \in V$ $(n \in \mathbb{N})$. Řekneme, že vektor $\mathbf{v} \in V$ je *lineární kombinací* vektorů $\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_n}$, jestliže existují čísla $r^1, \dots, r^n \in \mathbb{R}$ tak, že platí

$$\mathbf{v} = r^1 \mathbf{v_1} + \dots + r^n \mathbf{v_n} = r^i \mathbf{v_i}.$$

Vektory $\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_n}$ se nazývají *lineárně závislé*, jestliže existují čísla $r^1, \dots, r^n \in \mathbb{R}$, z nichž alespoň jedno je různé od nuly tak, že platí

$$r^i \mathbf{v_i} = \mathbf{0}.$$

V opačném případě nazýváme vektory $\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_n}$ *lineárně nezávislé.*

Definice 2.3. Nechť V je vektorový prostor a $\mathbf{b_1}, ..., \mathbf{b_n} \in V$ $(n \in \mathbb{N})$. Soustava vektorů $\{\mathbf{b_1}, ..., \mathbf{b_n}\}$ se nazývá *báze vektorového prostoru V*, jestliže vektory $\mathbf{b_1}, ..., \mathbf{b_n}$ jsou lineárně nezávislé a každý vektor $\mathbf{v} \in V$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{b_1}, ..., \mathbf{b_n}$.

Věta 2.1. *Buď V vektorový prostor s bází $\{\mathbf{b_1}, ..., \mathbf{b_n}\}$. Pak každý vektor $\mathbf{v} \in V$ lze jednoznačně psát ve tvaru*

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{b_i},$$

kde v^i jsou reálná čísla.

[10, str. 51]

Čísla v^i nazýváme *souřadnice vektoru $\mathbf{v}$ vzledem k bázi* $\{\mathbf{b_1}, ..., \mathbf{b_n}\}$.

Definice 2.4. Jestliže vektory $\{\mathbf{b_1}, ..., \mathbf{b_n}\}$ tvoří bázi vektorového prostoru V, nazveme číslo n *dimenzí vektorového prostoru V* a píšeme

$$dim\, V = n.$$

Definice 2.5. Buďte V vektorový prostor s bází $\mathcal{B} = \{\mathbf{b_1}, \dots, \mathbf{b_n}\}$ a $\mathbf{v} \in V$ vektor se souřadnicemi v^i. Sloupcový vektor

$$C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix}$$

se nazývá *souřadnicový vektor vektoru* $\boldsymbol{v}$ *vzhledem k bázi* $\mathcal{B}$. Je-li $\{\mathbf{d_1}, \dots, \mathbf{d_n}\} = \mathcal{D}$ další báze vektorového prostoru V, položíme

$$A = \left[\mathcal{C}_{\mathcal{D}}(\mathbf{b_1}), \dots, \mathcal{C}_{\mathcal{D}}(\mathbf{b_n})\right].$$

A je čtvercová matice řádu n, která se nazývá *matice přechodu* od báze $\mathcal{B}$ k bázi $\mathcal{D}$. Každý vektor $\mathbf{d_i}$ druhé báze pak lze jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci prvků první báze:

$$\mathbf{d}_i = A_i^k \mathbf{b}_k. \tag{2.1}$$

Věta 2.2. *Nechť* $(u^1, ..., u^n)$ *jsou souřadnice vektoru* $\mathbf{u} \in V$ *v bázi* $\{\mathbf{b_1}, ..., \mathbf{b_n}\}$ *a* $(\bar{u}^1, ..., \bar{u}^n)$ *jsou souřadnice téhož vektoru v jiné bázi* $\{\mathbf{d_1}, ..., \mathbf{d_n}\}$*. Nechť dále* $A = (A^i_j)$ *je matice přechodu od první báze ke druhé a nechť* $\tilde{A} = A^{-1}$ *je matice k ní inverzní. Pak platí následující transformační vztahy:*

$$u^i = A^i_j \bar{u}^j, \;\; \bar{u}^i = \tilde{A}^i_j u^j, \;\; i = 1, \dots, n. \tag{2.2}$$

[7, str. 6]

Poznámka 2.1. *Z předchozí věty vyplývá, že je-li* A *matice přechodu od báze* $\mathcal{B}$ *k bázi* $\mathcal{D}$*, maticí přechodu od* $\mathcal{D}$ *do* $\mathcal{B}$ *je matice* $\tilde{A} = A^{-1}$*.*

Definice 2.6. Nechť V a W jsou vektorové prostory nad $\mathbb{R}$. Řekneme, že zobrazení $f : V \to W$ je lineární, pokud pro každé $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \in V$ a každé $a \in \mathbb{R}$ platí:

(i) $f(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}) = f(\mathbf{v_1}) + f(\mathbf{v_2})$

(ii) $f(a\mathbf{v_1}) = af(\mathbf{v_1})$.

Příklad 2.1. *(a) Definujme zobrazení* $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *vztahem*

$$\psi(\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}.$$

Pro libovolné $v^1, v^2, v^3, u^1, u^2, u^3, c \in \mathbb{R}$ *platí:*

$$\psi(\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}) = \psi(\begin{pmatrix} v^1 + u^1 \\ v^2 + u^2 \\ v^3 + u^3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} v^1 + u^1 \\ v^2 + u^2 \end{pmatrix} = \psi(\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}) + \psi(\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix})$$

$$\psi(c\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}) = \psi(\begin{pmatrix} cv^1 \\ cv^2 \\ cv^3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} cv^1 \\ cv^2 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = c\psi(\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}).$$

Tedy zobrazení ψ *je lineární.*

(b) Pro libovolné vektorové prostory V a W můžeme definovat nulové lineární zobrazení $\varphi : V \to W$ vztahem $\varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ pro každé $\mathbf{v} \in V$.

Lineární zobrazení $f : V \to W$ nazveme *izomorfismus* vektorových prostorů V a W pokud je bijektivní. Potom píšeme $V \cong W$.

Věta 2.3. *Nechť $\dim V = n$. Pak $V \cong \mathbb{R}^n$.*

[7, str. 6]

Množinu všech lineárních zobrazení $f, g, \ldots : V \to W$ označme $L(V; W)$. Součet lineárních zobrazení f a g pro každé $\mathbf{v} \in V$ definujeme vztahem

$$(f + g)(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v})$$

a násobení zobrazení f skalárem $a \in \mathbb{R}$ vztahem

$$(af)(\mathbf{v}) = af(\mathbf{v}).$$

Je zřejmé, že $f + g$ a af jsou opět lineární zobrazení, a že $L(V; W)$ s těmito operacemi tvoří vektorový prostor.

Definice 2.7. Vektorový prostor $L(V; \mathbb{R})$ nazýváme *vektorovým prostorem duálním* k V. Značíme ho V^*. Jeho prvky nazýváme *lineární formy.*

Příklad 2.2. *Příkladem lineární formy může být zobrazení $\varrho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ určené předpisem*

$$\varrho(\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}) = v^1 + v^2.$$

Je zřejmé, že pro všechna $v^1, v^2, u^1, u^2, c \in \mathbb{R}$ platí

$$\varrho(\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}) = \varrho(\begin{pmatrix} v^1 + u^1 \\ v^2 + u^2 \end{pmatrix}) = v^1 + u^1 + v^2 + u^2 = \varrho(\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}) + \varrho(\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix})$$

$$\varrho(c\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}) = \varrho(\begin{pmatrix} cv^1 \\ cv^2 \end{pmatrix}) = cv^1 + cv^2 = c\varrho(\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix})$$

a zobrazení ϱ je skutečně lineární.

Definice 2.8. Nechť $\{\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_n}\}$ je báze V. Pak lineární formy $\{f^1, \ldots, f^n\}$ definované vztahy $f^i(\mathbf{b_j}) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{pro } i = j \\ 0, & \text{pro } i \neq j \end{cases}$ tvoří bázi V^*. Nazýváme ji *duální báze.* Symbol δ^i_j se nazývá *Kroneckerovo delta.*

Definice 2.9. Buďte V vektorový prostor s bází $\{\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_n}\}$ a V^* prostor duální k V. Pro každé $\mathbf{v} = v^i\mathbf{b_i} \in V$ a každé $f \in V^*$ platí $f(\mathbf{v}) = f(v^i\mathbf{b_i}) = v^i f_i$, kde $f_i = f(\mathbf{b_i})$. Čísla f_i nazýváme *souřadnice lineární formy f* vzhledem k bázi $\{\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_n}\}$.

Věta 2.4. *Nechť $(f_1, ..., f_n)$ jsou souřadnice lineární formy $f : V \to \mathbb{R}$ vzhledem k bázi $\{\mathbf{b_1}, ..., \mathbf{b_n}\}$ prostoru V a $(\bar{f}_1, ..., \bar{f}_n)$ jsou souřadnice téže lineární formy vzhledem k jiné bázi $\{\mathbf{d_1}, ..., \mathbf{d_n}\}$. Nechť dále $A = (A^i_j)$ je matice přechodu od první báze ke druhé. Pak platí následující transformační vztahy:*

$$\bar{f}_i = A^j_i f_j, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.3}$$

[7, str. 7]

Definice 2.10. Řekneme, že zobrazení $f : V \times V \to \mathbb{R}$ je *bilineární forma*, pokud pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ a $c \in \mathbb{R}$ splňuje tyto vlastnosti:

(i) $f(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{x}, \mathbf{z})$

(ii) $f(\mathbf{x}, c \cdot \mathbf{y}) = c \cdot f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

(iii) $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{z})$

(iv) $f(c \cdot \mathbf{x}, \mathbf{y}) = c \cdot f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Definice 2.11. Buď g bilineární forma na vektorovém prostoru V a $\{\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_n}\}$ báze V. Pak pro $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(x^i \mathbf{b}_i, y^j \mathbf{b}_j) = x^i y^j g(\mathbf{b_i}, \mathbf{b_j}) = g_{ij} x^i y^j$. Čísla

$$g_{ij} = g(\mathbf{b_i}, \mathbf{b_j})$$

nazýváme *souřadnice bilineární formy* g vzhledem k bázi $\{\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_n}\}$. Matice $G = (g_{ij})$ se nazývá *matice bilineární formy* g.

Definice 2.12. Řekneme, že bilineární forma $f : V \times V \to \mathbb{R}$ je

(I) *symetrická*, jestliže: $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$;

(II) *pozitivně definitní*, jestliže: $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ pro každý nenulový vektor $\mathbf{x} \in V$.

Pozitivně definitní a symetrickou bilineární formu na vektorovém prostoru V nazýváme *skalární součin* na V.

Nechť g je skalární součin na V. Číslo $\|x\| = \sqrt{g(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ se nazývá *velikost vektoru* $\mathbf{x}$. Pro každý vektor $\mathbf{a} \in V$ je funkce $\tilde{g}_\mathbf{a} : V \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem:

$$\tilde{g}_\mathbf{a}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{a}, \mathbf{x})$$

lineární forma na V. Pomocí skalárního součinu tedy můžeme každému vektoru $\mathbf{a} \in V$ přiřadit lineární formu $\tilde{g}_\mathbf{a} \in V^*$. V následující větě ukážeme, že toto zobrazení je izomorfismus vektorových prostorů.

Věta 2.5. *Skalární součin g na vektorovém prostoru konečné dimenze V určuje izomorfismus $F : V \to V^*$, $F(\mathbf{a}) = \tilde{g}_\mathbf{a}$.*

[7, str.8]

Důkaz. Je zřejmé, že zobrazení F je lineární. Je-li $\tilde{g}_\mathbf{a} = \tilde{g}_\mathbf{b}$, pro každé $\mathbf{x} \in V$ platí

$$g(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = g(\mathbf{b}, \mathbf{x}) \Rightarrow g(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{x}) = 0.$$

Pro $\mathbf{x} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ dostaneme $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = 0$, a proto $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Zobrazení F je tedy prosté. Zbývá ověřit, že libovolná lineární forma $f : V \to \mathbb{R}$ je tvaru $f = \tilde{g}_\mathbf{a}$ pro nějaké $\mathbf{a} \in V$. Položme $L = \{\mathbf{w} \in V, f(\mathbf{w}) = 0\}$. Je-li $L = V$, tak stačí položit $\mathbf{a} = 0$ a důkaz je ukončen. Předpokládejme tedy, že $L \neq V$ a označme $\bar{L} = \{\mathbf{v} \in V;\ g(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0,\ \mathbf{w} \in L\}$. Pak existuje $0 \neq \mathbf{v} \in \bar{L}$. Z linearity f dále plyne, že $f(\mathbf{x} - \frac{f(\mathbf{x})}{f(\mathbf{v})}\mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = 0$, neboli $\mathbf{w} = \mathbf{x} - \frac{f(\mathbf{x})}{f(\mathbf{v})}\mathbf{v} \in L$ pro libovolné $\mathbf{x} \in V$. Položme nakonec $\mathbf{a} = \frac{f(\mathbf{v})}{g(\mathbf{v},\mathbf{v})}\mathbf{v}$. Pak platí $g(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = g(\mathbf{w} + \frac{f(\mathbf{x})}{f(\mathbf{v})}\mathbf{v}, \frac{f(\mathbf{v})}{g(\mathbf{v},\mathbf{v})}\mathbf{v}) = \frac{f(\mathbf{v})}{g(\mathbf{v},\mathbf{v})}g(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \frac{f(\mathbf{x})}{f(\mathbf{v})}\frac{f(\mathbf{v})}{g(\mathbf{v},\mathbf{v})}g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \frac{f(\mathbf{v})}{g(\mathbf{v},\mathbf{v})} \cdot 0 + f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$. $\square$

3. Tensory

3.1. Definice tensoru

Definice 3.1. Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze a F multilineární forma

$$F : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{\text{k krát}} \to \mathbb{R},$$

tedy pro libovolné $\mathbf{v_i}, \bar{\mathbf{v}}_\mathbf{i} \in V, c \in \mathbb{R}$ platí

(i) $F(\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_{i-1}}, \mathbf{v_i} + \bar{\mathbf{v}}_\mathbf{i}, \mathbf{v_{i+1}}, \ldots, \mathbf{v_k}) = F(\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_{i-1}}, \mathbf{v_i}, \mathbf{v_{i+1}}, \ldots, \mathbf{v_k}) +$
$+ F(\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_{i-1}}, \bar{\mathbf{v}}_\mathbf{i}, \mathbf{v_{i+1}}, \ldots, \mathbf{v_k})$

(ii) $F(\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_{i-1}}, \mathbf{c} \cdot \mathbf{v_i}, \mathbf{v_{i+1}}, \ldots, \mathbf{v_k}) = c \cdot F(\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_{i-1}}, \mathbf{v_i}, \mathbf{v_{i+1}}, \ldots, \mathbf{v_k})$.

Pak F se nazývá *k-krát kovariantním tensorem* na V.

Množinu multilineárních forem $F : V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$ značíme $L(V, \ldots, V; \mathbb{R})$. V definici duálního prostoru (2.7) jsme uvedli, že $V^* = L(V; \mathbb{R})$, takže každá lineární forma z V^* je 1-krát kovariantním tensorem na V.

Duální prostor V^* je rovněž vektorový prostor. Proto můžeme v definici 3.1 nahradit vektorový prostor V duálním prostorem V^*. Dostaneme tak k-lineární formu

$$F : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{\text{k krát}} \to \mathbb{R},$$

kterou nazýváme *k-krát kontravariantní tensor.* Je zřejmé, že platí $L(V^*; \mathbb{R}) = V$, takže každý vektor z V je lineární formou na V^* a je tedy 1-krát kontravariantním tensorem na V. Z výše uvedeného je dále patrné, že platí identita

$$V^{**} = V.$$

Tensory k-krát kovariantní nebo kontravariantní nazýváme souhrnně *čisté*, jejich zobecněním je tensor smíšený.

Definice 3.2. Buď V vektorový prostor konečné dimenze. *Smíšeným tensorem typu* (s, r) na V rozumíme multilineární formu

$$F : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{\text{r krát}} \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{\text{s krát}} \to \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

F nazýváme také r-krát kovariantní a s-krát kontravariantní tensor na V. Množinu všech takových tensorů značíme $T^r_s V$. Číslo $r + s$ nazýváme *stupněm tensoru.*

Příkladem smíšeného tensoru typu $(1, 1)$ je zobrazení, které každému vektoru $\mathbf{v} \in V$ a každé lineární formě $f \in V^*$ přiřadí číslo $f(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}$. Tensorem typu $(0, 0)$ rozumíme reálné číslo, platí tedy $T^0_0 V = \mathbb{R}$.

Poznámka 3.1. *Snadno se ukáže, že množina $T^r_s V$ všech tensorů typu (s, r) tvoří vektorový prostor. Vektorový prostor $T^0_s V = L(V^*, \ldots, V^*; \mathbb{R})$ rovněž značíme symbolem $\otimes^s V$ a nazýváme ho s-*tou tensorovou mocninou vektorového prostoru* V. Analogicky značíme vektorový prostor*

$$T^r_s V = L(\underbrace{V, \ldots, V}_{r \text{ krát}}, \underbrace{V^*, \ldots, V^*}_{s \text{ krát}}; \mathbb{R})$$

symbolem $\otimes^s V \otimes \otimes^r V^*$.

Vzhledem k výše uvedenému označení tedy máme následující zřejmé identity

$$
\begin{aligned}
T^0_s V &= L(\underbrace{V^*, \dots, V^*}_{\text{s krát}}; \mathbb{R}) = \otimes^s V \\
T^0_1 V &= L(V^*; \mathbb{R}) = \otimes^1 V = V \\
T^r_s V &= L(\underbrace{V, \dots, V}_{\text{r krát}}, \underbrace{V^*, \dots, V^*}_{\text{s krát}}; \mathbb{R}) = \otimes^s V \otimes \otimes^r V^* \\
T^2_0 V &= L(V, V; \mathbb{R}) = \otimes^2 V^* = V^* \otimes V^*.
\end{aligned}
$$

Příklad 3.1.

(a) *Tensorem typu* $(0, 2)$ *je libovolná bilineární forma, tedy např. skalární součin. Již jsme uvedli, že pomocí skalárního součinu se definuje norma vektoru, proto se skalární součin někdy nazývá metrický tensor.*

(b) *Z vlastností determinantu (viz např. [9]) plyne, že determinant matice řádu* n*, jejíž řádky jsou souřadnice vektorů* $\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_n} \in V$ *je multilineární zobrazení z* V^n *do* $\mathbb{R}$ *a tedy tensor typu* $(0, n)$ *na* V*.*

Poznámka 3.2. *Tensory a tensorový součin* $\otimes$ *vektorových prostorů je možné zavést i jiným způsobem. Například v [1] se zavádí tensorový součin dvou vektorových prostorů pomocí tzv.* univerzálního prvku.

Poznámka 3.3. *Vektorový prostor* $T^r_1 V$ *můžeme ztotožnit s vektorovým prostorem všech multilineárních zobrazení*

$$K : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{r\ krát} \to V.$$

Každému tensoru

$$F : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{r\ krát} \times V^* \to \mathbb{R}$$

z prostoru $T^r_1 V$ *lze totiž přiřadit multilineární zobrazení* K *vztahem*

$$\langle K(\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_r}), f\rangle = F(\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_r}, f), \quad \mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_r} \in V,\ f \in V^*,$$

kde $\langle \mathbf{v}, f\rangle = f(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}$*, tedy* $\langle \mathbf{v}, f\rangle$ *značí hodnotu lineární formy* $f \in V^*$ *na vektoru* $\mathbf{v} \in V$*. Například prostor* $T^1_1 V$ *tak můžeme pomocí výše uvedeného ztotožnit s prostorem všech lineárních zobrazení z* V *do* V*, tj.* $T^1_1 V = V \otimes V^* = L(V; V)$*.*

Obdobným způsobem můžeme každému tensoru typu (s, r) *přiřadit multilineární zobrazení* $K : V^r \times (V^*)^{s-1} \to V$ *a* $\bar{K} : V^{r-1} \times (V^*)^s \to V^*$ *(viz např. [3, str. 30]). Obvykle pak nerozlišujeme mezi tensorem* F *a zobrazeními* K *a* $\bar{K}$*.*

Nyní nechť $\{\mathbf{b_1}, \dots, \mathbf{b_n}\}$ je báze vektorového prostoru V a $\{f^1, \dots, f^n\}$ je báze duálního prostoru V^*. Pak r vektorů $\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_r} \in V$ a s lineárních forem $h^1, \dots, h^s \in V^*$ můžeme v těchto bázích vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{v_i} = v^p_i \mathbf{b_p}\ (i = 1, \dots, r),\ h^j = \xi^j_q f^q\ (j = 1, \dots, s)$$

a pro tensor $F \in T^r_s V$ platí:

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_r}, h^1, \dots, h^s) &= F(v^{p_1}_1 \mathbf{b_{p_1}}, \dots, v^{p_r}_r \mathbf{b_{p_r}}, \xi^1_{q_1} f^{q_1}, \dots, \xi^s_{q_s} f^{q_s}) = \\
&= v^{p_1}_1 v^{p_2}_2 \dots v^{p_r}_r \xi^1_{q_1} \xi^2_{q_2} \dots \xi^s_{q_s} F(\mathbf{b_{p_1}}, \dots, \mathbf{b_{p_r}}, f^{q_1}, \dots, f^{q_s}).
\end{aligned}
$$

Definice 3.3. Čísla
$$a^{q_1 \dots q_s}_{p_1 \dots p_r} = F(\mathbf{b_{p_1}}, \dots, \mathbf{b_{p_r}}, f^{q_1}, \dots, f^{q_s}),$$
kde indexy $q_1, \dots, q_r, p_1, \dots, p_s$ nabývají hodnot $1, \dots, n$, se nazývají *souřadnice tensoru* F vzhledem k bázi $\{\mathbf{b_1}, \dots, \mathbf{b_n}\}$.

Pomocí souřadnic $a^{q_1 \dots q_s}_{p_1 \dots p_r}$ dovedeme spočítat hodnotu tensoru pro libovolné vektory $\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_r} \in V$ a lineární formy $h^1, \dots, h^s \in V^*$. Můžeme tedy říci, že tensor F je svými souřadnicemi jednoznačně určen a stručněji o něm mluvit jako o tensoru $a^{q_1 \dots q_s}_{p_1 \dots p_r}$. Horní indexy nazýváme kontravariantní indexy a dolní kovariantní indexy. Následující věta popisuje chování souřadnic tensoru při změně báze.

Věta 3.1. *Nechť* $a^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}$ *jsou souřadnice tensoru* $F \in T^r_s V$ *vůči bázi* $\{\mathbf{b_1}, \dots, \mathbf{b_n}\}$, $\bar{a}^{q_1, \dots, q_s}_{p_1, \dots, p_r}$ *jsou souřadnice téhož tensoru vzledem k bázi* $\{\mathbf{d_1}, \dots, \mathbf{d_n}\}$, *$A$ je matice přechodu od první báze ke druhé a* $\tilde{A} = A^{-1}$. *Pak platí vztah*
$$\bar{a}^{q_1 \dots q_s}_{p_1 \dots p_r} = A^{i_1}_{p_1} \dots A^{i_r}_{p_r} \tilde{A}^{q_1}_{j_1} \dots \tilde{A}^{q_s}_{j_s} a^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}.$$

[7, str. 10]

Důkaz. Buď $\{f^1, \dots, f^n\}$ duální báze k bázi $\{\mathbf{b_1}, \dots, \mathbf{b_n}\}$ a $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ duální báze k $\{\mathbf{d_1}, \dots, \mathbf{d_n}\}$. Pak platí
$$\begin{aligned}\bar{a}^{q_1 \dots q_s}_{p_1 \dots p_r} = F(\mathbf{d_{p_1}}, \dots, \mathbf{d_{p_r}}, \varphi^{q_1}, \dots, \varphi^{q_s}) = F(A^{i_1}_{p_1} \mathbf{b_{i_1}}, \dots, A^{i_r}_{pr} \mathbf{b_{i_r}}, \tilde{A}^{q_1}_{j_1} f^{j_1}, \dots, \tilde{A}^{q_s}_{j_s} f^{j_s}) = \\ = A^{i_1}_{p_1} \dots A^{i_r}_{p_r} \tilde{A}^{q_1}_{j_1} \dots \tilde{A}^{q_s}_{j_s} a^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}.\end{aligned}$$
□

Většina literatury zabývající se tensorovým počtem zavádí tensory pomocí následující definice, která využívá vztahy z věty 3.1. K tensoru se tak nepřistupuje jako k multilineárnímu zobrazení, ale jako k nějakému objektu, jehož souřadnice se při změně báze chovají předepsaným způsobem. Tento přístup k tensorům nevyžaduje znalost pojmů jako duální vektorový prostor nebo multilineární forma a pro použití v inženýrských aplikacích je tedy jednodušší.

Definice 3.4. Řekneme, že množina n^{r+s} čísel $a^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}$ udává souřadnice tensoru řádu $r+s$, pokud se tato čísla při změně báze vektorového prostoru V transformují vztahy
$$\bar{a}^{q_1 \dots q_s}_{p_1 \dots p_r} = A^{i_1}_{p_1} \dots A^{i_r}_{p_r} \tilde{A}^{q_1}_{j_1} \dots \tilde{A}^{q_s}_{j_s} a^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}, \tag{3.2}$$
kde A je matice přechodu od první báze ke druhé a $\tilde{A} = A^{-1}$.

Dokažme nyní, že takto zadaná čísla $a^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}$ skutečně představují souřadnice nějakého tensoru F zavedeného definicí 3.2.

Nechť $\{\mathbf{b_1}, \dots, \mathbf{b_n}\}$ je báze vektorového prostoru V odpovídající číslům $a^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}$ a $\{\mathbf{d_1}, \dots, \mathbf{d_n}\}$ jiná báze téhož prostoru odpovídající číslům $\bar{a}^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}$, která jsou dána vztahem 3.2. Zavedeme zobrazení F, které r vektorům $\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_r} \in V$ ($\mathbf{v_k} = v^{i_k}_k \mathbf{b_{i_k}}$ pro $k = 1, 2, \dots, r$) a s lineárním formám $h^1, \dots, h^s \in V^*$ ($h^l = \xi^l_{j_l} f^{j_l}$ $(l = 1, \dots, s)$) přiřadí čísla $v^{i_1}_1 \dots v^{i_r}_r \xi^1_{j_1} \dots \xi^s_{j_s} a^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}$. Zobrazení $F : V \times \dots \times V \times V^* \times \dots \times V^* \to \mathbb{R}$ je zřejmě multilineární. Zbývá ukázat jeho nezávislost na volbě báze prostoru V. Pro jinou bázi $\{\mathbf{d_1}, \dots, \mathbf{d_n}\}$ platí $\mathbf{v_k} = \bar{v}^{i_k}_k \mathbf{d_{i_k}}$ pro $k = 1, 2, \dots, r$ a $h^l = \bar{\xi}^l_{j_l} \varphi^{j_l}$ $(l = 1, \dots, s)$ a musíme ukázat, že $v^{i_1}_1 \dots v^{i_r}_r \xi^1_{j_1} \dots \xi^s_{j_s} a^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r} =$

$\bar{v}_1^{i_1} \dots \bar{v}_r^{i_r} \bar{\xi}_{j_1}^1 \dots \bar{\xi}_{j_s}^s \bar{a}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$. Ze vztahu 3.2 a vztahů pro transformaci souřadnic vektorů (2.1) a lineárních forem (2.3) dostaneme

$$\begin{aligned} &\bar{v}_1^{i_1} \dots \bar{v}_r^{i_r} \bar{\xi}_{j_1}^1 \dots \bar{\xi}_{j_s}^s \bar{a}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} = \bar{v}_1^{i_1} \dots \bar{v}_r^{i_r} \bar{\xi}_{j_1}^1 \dots \bar{\xi}_{j_s}^s A_{i_1}^{c_1} \dots A_{i_r}^{c_r} \tilde{A}_{d_1}^{j_1} \dots \tilde{A}_{d_s}^{j_s} a_{c_1 \dots c_r}^{d_1 \dots d_s} = \\ &= v_1^{c_1} \dots v_r^{c_r} \xi_{d_1}^1 \dots \xi_{d_s}^s \tilde{A}_{c_1}^{i_1} \dots \tilde{A}_{c_r}^{i_r} A_{j_1}^{d_1} \dots A_{j_s}^{d_s} A_{i_1}^{c_1} \dots A_{i_r}^{c_r} \tilde{A}_{d_1}^{j_1} \dots \tilde{A}_{d_s}^{j_s} a_{c_1 \dots c_r}^{d_1 \dots d_s} = \\ &= v_1^{c_1} \dots v_r^{c_r} \xi_{d_1}^1 \dots \xi_{d_s}^s a_{c_1 \dots c_r}^{d_1 \dots d_s}. \end{aligned}$$

Tento důkaz je převzat z [7, str. 10].

3.2. Operace s tensory

Definice 3.5. Mějme dva tensory $S, T \in T_s^r V$. *Součet* $H = S + T$ tensorů S a T definujeme jako tensor $H \in T_s^r V$:

$$H(\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_r}, h^1, \dots, h^s) = S(\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_r}, h^1, \dots, h^s) + T(\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_r}, h^1, \dots, h^s).$$

.

Poznámka 3.4. *Jsou-li čísla $s_{p_1 \dots p_r}^{q_1 \dots q_s}$ souřadnice tensoru S vzhledem k nějaké bázi $\mathcal{B}$ a čísla $t_{p_1 \dots p_r}^{q_1 \dots q_s}$ souřadnice tensoru T v téže bázi, tak pro souřadnice $h_{p_1 \dots p_r}^{q_1 \dots q_s}$ tensoru $H = S + T$ vzhledem k bázi $\mathcal{B}$ platí:*

$$\begin{aligned} h_{p_1 \dots p_r}^{q_1 \dots q_s} = H(\mathbf{b_{p_1}}, \dots, \mathbf{b_{p_r}}, f^{q_1}, \dots, f^{q_s}) = S(\mathbf{b_{p_1}}, \dots, \mathbf{b_{p_r}}, f^{q_1}, \dots, f^{q_s}) + \\ + T(\mathbf{b_{p_1}}, \dots, \mathbf{b_{p_r}}, f^{q_1}, \dots, f^{q_s}) = s_{p_1 \dots p_r}^{q_1 \dots q_s} + t_{p_1 \dots p_r}^{q_1 \dots q_s}. \end{aligned}$$

Součin čísla $c \in \mathbb{R}$ a tensoru F je tensor $cF \in T_s^r V$ definovaný vztahem

$$(cF)(\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_r}, h^1, \dots, h^s) = c \cdot F(\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_r}, h^1, \dots, h^s).$$

Poznámka 3.5. *Operace sčítání tensorů a násobení tensoru skalárem jsou asociativní, proto můžeme mluvit o lineární kombinaci tensorů téhož typu.*

Definice 3.6. Pro libovolné tensory $S \in T_s^r V$, $T \in T_p^o V$ definujeme *tensorový součin* $S \otimes T \in T_{s+p}^{r+o} V$ předpisem

$$\begin{aligned} &(S \otimes T)(\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_{r+o}}, h^1, \dots, h^{s+p}) = \\ &= S(\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_r}, h^1, \dots, h^s) \cdot T(\mathbf{v_{r+1}}, \dots, \mathbf{v_{r+o}}, h^{s+1}, \dots, h^{s+p}). \end{aligned}$$

V souřadnicích vzhledem k nějaké bázi $\mathcal{B}$ máme

$$\begin{aligned} (s \otimes t)_{j_1, \dots, j_{r+o}}^{i_1, \dots, i_{s+p}} = (S \otimes T)(\mathbf{b_{j_1}}, \dots, \mathbf{b_{j_{r+o}}}, f^{i_1}, \dots, f^{i_{s+p}}) = S(\mathbf{b_{j_1}}, \dots, \mathbf{b_{j_r}}, f^{i_1}, \dots, f^{i_s}) \cdot \\ \cdot T(\mathbf{b_{j_{r+1}}}, \dots, \mathbf{b_{j_{r+o}}}, f^{i_{s+1}}, \dots, f^{i_{s+p}}) = s_{j_1, \dots, j_r}^{i_1, \dots, i_s} \cdot t_{j_{r+1}, \dots, j_{r+o}}^{i+s1, \dots, i_{s+p}}. \end{aligned}$$

Poznámka 3.6. *Tensor $(T \otimes S)$ definovaný vztahem*

$$\begin{aligned} &(T \otimes S)(\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_{r+o}}, h^1, \dots, h^{s+p}) = \\ &= T(\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_o}, h^1, \dots, h^p) \cdot S(\mathbf{v_{o+1}}, \dots, \mathbf{v_{o+r}}, h^{p+1}, \dots, h^{p+s}) \end{aligned}$$

je obecně různý od tensoru $(S \otimes T)$. Tensorový součin tedy není komutativní.

Definice 3.7. Nechť S je tensor typu (s, r), $s \geq 1$, $r \geq 1$, $\{\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_n}\}$ je báze vektorového prostoru V a $\{f^1, \ldots, f^n\}$ je báze k ní duální. *Zúžení* neboli *kontrakce* tensoru S podle indexů i_α $(\alpha \in 1, \ldots, r)$ a j_β $(\beta \in 1, \ldots, s)$ definujeme jako tensor T typu $(s-1, r-1)$:

$$\begin{aligned} &T(\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_{r-1}}, h^1, \ldots, h^{s-1}) = \\ &\quad = S(\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_{\alpha-1}}, \mathbf{b_k}, \mathbf{v_{\alpha+1}}, \ldots, \mathbf{v_r}, h^1, \ldots, h^{\beta-1}, f^k, h^{\beta+1}, \ldots, h^s) \end{aligned}$$

(na pravé straně se sčítá přes k).

Pro takto definovanou operaci je nutné dokázat, že T nezávisí na zvolené bázi vektorového prostoru V. Zvolíme jinou bázi $\{\mathbf{d_1}, \ldots, \mathbf{d_n}\}$. Báze k ní duální je $\{g^1, \ldots, g^n\}$, A je matice přechodu od původní báze k nové a $\tilde{A} = A^{-1}$ je matice k ní inverzní. Potom platí:

$$\begin{aligned} &S(\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_{\alpha-1}}, \mathbf{d_k}, \mathbf{v_{\alpha+1}}, \ldots, \mathbf{v_r}, h^1, \ldots, h^{\beta-1}, g^k, h^{\beta+1}, \ldots, h^s) = \\ &= S(\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_{\alpha-1}}, A^r_k \mathbf{b_r}, \mathbf{v_{\alpha+1}}, \ldots, \mathbf{v_r}, h^1, \ldots, h^{\beta-1}, \tilde{A}^k_t f^t, h^{\beta+1}, \ldots, h^s) = \\ &= A^r_k \tilde{A}^k_t S(\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_{\alpha-1}}, \mathbf{b_r}, \mathbf{v_{\alpha+1}}, \ldots, \mathbf{v_r}, h^1, \ldots, h^{\beta-1}, f^t, h^{\beta+1}, \ldots, h^s) = \\ &= \delta^r_t S(\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_{\alpha-1}}, \mathbf{b_r}, \mathbf{v_{\alpha+1}}, \ldots, \mathbf{v_r}, h^1, \ldots, h^{\beta-1}, f^t, h^{\beta+1}, \ldots, h^s) = \\ &= S(\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_{\alpha-1}}, \mathbf{b_r}, \mathbf{v_{\alpha+1}}, \ldots, \mathbf{v_r}, h^1, \ldots, h^{\beta-1}, f^r, h^{\beta+1}, \ldots, h^s). \end{aligned}$$

Úžení tensoru tedy na zvolené bázi nezávisí.

Jak vypadá úžení tensoru v souřadnicích ukážeme na příkladě.

Příklad 3.2. *Buď $A = (a^{mn}_{st})$ tensor typu $(2, 2)$. Provedeme jeho zúžení podle druhého horního a druhého dolního indexu. Dostaneme tensor $H = (h^m_s)$ daný vztahem*

$$H(\mathbf{v}_1, h^1) = A(\mathbf{v_1}, \mathbf{b_i}, h^1, f^i).$$

V souřadnicích vůči bázi $\mathcal{B}$ platí:

$$h^m_s = H(\mathbf{b}_s, f^m) = A(\mathbf{b_s}, \mathbf{b_i}, f^m, f^i) = a^{mi}_{si}.$$

Dalším úžením tensoru $H = (h^m_s)$ dostaneme tensor typu $(0, 0)$, tedy reálné číslo $h^j_j = h^1_1 + \cdots + h^n_n$.

Pro tensory na vektorovém prostoru V se skalárním součinem g můžeme definovat operace spouštění a zvedání indexů: Jak jsme ukázali ve větě 2.5, skalární součin nám dává izomorfismus mezi V a V^*, který každému $\mathbf{a} \in V$ přiřazuje lineární formu $\tilde{g}_\mathbf{a} \in V^*$. Operaci spouštění indexu na tensoru S typu (s, r) pak definujeme následujícím způsobem.

Definice 3.8. Řekneme, že tensor T typu $(s-1, r+1)$ definovaný vztahem

$$T(\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_{r+1}}, h^1, \ldots, h^{i-1}, h^{i+1}, \ldots, h^s) = S(\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_r}, h^1, \ldots, h^{i-1}, \tilde{g}_{\mathbf{v}_{r+1}}, h^{i+1}, \ldots, h^s) \tag{3.3}$$

vznikl z tensoru S typu (s, r) *spuštěním indexu.*

Je třeba specifikovat, že i-tý horní index přešel v $r+1$. dolní. Z toho, že přiřazení $\mathbf{z} \to g_\mathbf{z}$ je izomorfismus vyplývá, že T je skutečně tensor. V souřadnicích vzhledem k bázi

$\{\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_n}\}$ prostoru V a k ní duální bázi $\{f^1, \ldots, f^n\}$ vypadá spouštění indexu tensoru S takto:

$$\begin{aligned} t^{q_1,\ldots,q_{s-1}}_{p_1,\ldots,p_{r+1}} &= T(\mathbf{b_{p_1}}, \ldots, \mathbf{b_{p_r}}, \mathbf{b_o}, f^{q_1}, \ldots, f^{q_{s-1}}) = \\ &= S(\mathbf{b_{p_1}}, \ldots, \mathbf{b_{p_r}}, f^{q_1}, \ldots, f^{q_{i-1}}, \tilde{g}_{\mathbf{b_o}}, f^{q_{i+1}}, \ldots, f^{q_s}) = \\ &= S(\mathbf{b_{p_1}}, \ldots, \mathbf{b_{p_r}}, f^{q_1}, \ldots, f^{q_{i-1}}, g_{ok}f^k, f^{q_{i+1}}, \ldots, f^{q_s}) = s^{q_1,\ldots,q_k,\ldots,q_s}_{p_1,\ldots,p_r} g_{ok}. \end{aligned}$$

Operaci zvedání indexu můžeme definovat pomocí vztahu 3.3. Ze zadaného tensoru T typu $(s-1, r+1)$ vznikne zvednutím indexu tensor S typu (s, r).

Definice 3.9. Řekneme, že dva tensory $R, S \in T^r_s V$ se sobě rovnají, právě když se sobě rovnají všechny odpovídající si souřadnice těchto tensorů, tedy pro všechny hodnoty $1, \ldots, n$ indexů $q_1, \ldots, q_r, p_1, \ldots, p_s$ platí

$$s^{q_1\ldots q_s}_{p_1\ldots p_r} = r^{q_1\ldots q_s}_{p_1\ldots p_r}.$$

Při ověřování rovnosti dvou tensorů, které mají souřadnice s různě umístěnými indexy, musíme nejdříve provést vhodná zvedání a spouštění indexů a teprve pak můžeme porovnat souřadnice. Například dva tensory c^i_l a c^j_k se sobě rovnají pokud platí rovnice

$$c^i_l = g^{ik} g_{lj} c^j_k.$$

3.3. Symetrické a antisymetrické tensory

Pro zjednodušení budeme symetrii a antisymetrii definovat jen na kovariantních tensorech. Pro tensory kontravariantní se následující pojmy definují stejným způsobem.

Definice 3.10. Kovariantní tensor $S \in T^r_0 V$ nazveme *symetrický*, jestliže vztah

$$S(\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_{i-1}}, \mathbf{v_i}, \mathbf{v_{i+1}}, \mathbf{v_{i+2}}, \ldots, \mathbf{v_r}) = S(\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_{i-1}}, \mathbf{v_{i+1}}, \mathbf{v_i}, \mathbf{v_{i+2}}, \ldots, \mathbf{v_r})$$

platí pro každé $i \in (1, \ldots, r-1)$ a libovolné vektory $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_r} \in V$.

Souřadnicově definice 3.10 znamená

$$s_{i_1\ldots i_r} = s_{i_{\sigma(1)}\ldots i_{\sigma(r)}},$$

pro libovolnou permutaci σ z grupy P_r všech permutací r prvků. Hodnota symetrického tensoru se tedy nemění, když libovolně změníme pořadí vektorů $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_r}$. Příkladem takového tensoru je skalární součin.

Definice 3.11. Kovariantní tensor $S \in T^r_0 V$ nazveme *antisymetrický*, jestliže vztah

$$S(\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_{i-1}}, \mathbf{v_i}, \mathbf{v_{i+1}}, \mathbf{v_{i+2}}, \ldots, \mathbf{v_r}) = -S(\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_{i-1}}, \mathbf{v_{i+1}}, \mathbf{v_i}, \mathbf{v_{i+2}}, \ldots, \mathbf{v_r})$$

platí pro každé $i \in (1, \ldots, r-1)$ a libovolné vektory $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_r} \in V$.

V souřadnicích máme

$$s_{i_1\ldots i_r} = sgn(\sigma) s_{i_{\sigma(1)}\ldots i_{\sigma(r)}},$$

pro každé $\sigma \in P_r$. Při sudé permutaci vektorů $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_r}$ se tedy hodnota antisymetrického tensoru nemění, zatímco při liché permutaci změní hodnota znaménko. Již jsme zmínili, že vezmeme-li matici B řádu n takovou, že každý její řádek je tvořen souřadnicemi nějakého vektoru z V, tak determinant $|B|$ matice B představuje tensor typu $(0, n)$ na V. Další vlastností determinantu je, že při záměně dvou řádků matice změní hodnota jejího determinantu znaménko [9, str. 320]. Z toho plyne, že determinant matice je antisymetrický tensor.

Poznámka 3.7. *Množina všech symetrických tensorů tvoří vektorový podprostor $S^rV \subseteq T_0^rV$, množina všech antisymetrických tensorů tvoří podprostor $\Lambda^rV \subseteq T_0^rV$.*

Každému kovariantnímu tensoru $S \in T_0^rV$ můžeme přiřadit symetrický tensor $Sym(S) \in S^rV$ definovaný vztahem

$$Sym(S)(\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_r}) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in P_r} S(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{v}_{\sigma(r)})$$

a antisymetrický tensor $Alt(S) \in \Lambda^rV$ definovaný vztahem

$$Alt(S)(\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_r}) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in P_r} sgn(\sigma) S(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{v}_{\sigma(r)}).$$

Definice 3.12. Zobrazení $Sym : T_0^rV \to S^rV$ nazýváme *symetrizace tensorů.* Zobrazení $Alt : T_0^rV \to \Lambda^rV$ nazýváme *alternace tensorů.*

Příklad 3.3. *Pro tensor $F \in T_0^3V$ je*

$$\begin{aligned} Sym(F)(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \frac{1}{6}[&F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) + F(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}) + F(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{z}) + \\ &+ F(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}) + F(\mathbf{z}, \mathbf{y}, \mathbf{x}) + F(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y})]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Alt(F)(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \frac{1}{6}[&F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) - F(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}) - F(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{z}) + \\ &+ F(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}) - F(\mathbf{z}, \mathbf{y}, \mathbf{x}) + F(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y})]. \end{aligned}$$

Je zřejmé, že pro $F \in S^rV$ je $Sym(F) = F$ a pro $F \in \Lambda^rV$ je $Alt(F) = F$.

Poznámka 3.8. *Pro každý kovariantní tensor 2. stupně F platí*

$$Sym(F)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + Alt(F)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}[F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + F(\mathbf{y}, \mathbf{x})] + \frac{1}{2}[F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - F(\mathbf{y}, \mathbf{x})] = F(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Tedy jsme dokázali následující větu.

Věta 3.2. *Každý tensor F typu $(0, 2)$ se dá rozložit na součet symetrického a antisymetrického tensoru, tedy platí $F = Sym(F) + Alt(F)$.*

Poznamenejme, že pro tensory vyšších stupňů předchozí věta neplatí.

Zatímco sčítání tensorů zachovává vlastnosti symetrie a antisymetrie, tensorový součin tyto vlastnosti obecně zachovat nemusí. Zavedeme proto nové operace.

Definice 3.13. *Vnější součin* $S \wedge T$ antisymetrických tensorů S typu $(0, p)$ a T typu $(0, q)$ definujeme předpisem

$$S \wedge T = \frac{(p+q)!}{p!\, q!} Alt(S \otimes T) \in \Lambda^{(p+q)} V.$$

Definice 3.14. Pro symetrické tensory K typu $(0, p)$ a L typu $(0, q)$ definujeme *symetrický součin* $K \odot L$ vztahem

$$K \odot L = \frac{(p+q)!}{p!\, q!} Sym(K \otimes L) \in S^{(p+q)} V.$$

Příklad 3.4. *Pro tensory $R \in S^2 V$, $S \in \Lambda^2 V$ a $T \in T_0^1 V$ bude*

$$\begin{aligned}(R \odot T)(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \frac{1}{2}[&R(\mathbf{x}, \mathbf{y})T(\mathbf{z}) + R(\mathbf{y}, \mathbf{x})T(\mathbf{z}) + R(\mathbf{x}, \mathbf{z})T(\mathbf{y}) + R(\mathbf{z}, \mathbf{x})T(\mathbf{y}) + \\ &+ R(\mathbf{y}, \mathbf{z})T(\mathbf{x}) + R(\mathbf{z}, \mathbf{y})T(\mathbf{x})] = R(\mathbf{x}, \mathbf{y})T(\mathbf{z}) + R(\mathbf{x}, \mathbf{z})T(\mathbf{y}) + R(\mathbf{y}, \mathbf{z})T(\mathbf{x})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(S \wedge R)(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \frac{1}{2}[&R(\mathbf{x}, \mathbf{y})T(\mathbf{z}) - R(\mathbf{y}, \mathbf{x})T(\mathbf{z}) - R(\mathbf{x}, \mathbf{z})T(\mathbf{y}) + R(\mathbf{z}, \mathbf{x})T(\mathbf{y}) + \\ &+ R(\mathbf{y}, \mathbf{z})T(\mathbf{x}) - R(\mathbf{z}, \mathbf{y})T(\mathbf{x})] = R(\mathbf{x}, \mathbf{y})T(\mathbf{z}) - R(\mathbf{x}, \mathbf{z})T(\mathbf{y}) + R(\mathbf{y}, \mathbf{z})T(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Věta 3.3. *Pro libovolné tensory $S \in T_0^p V$ a $T \in T_0^q V$ platí $S \wedge T = (-1)^{pq}\, T \wedge S$.*

[12, str. 45]

3.4. Příklady tensorů

Již jsme uvedli, že příkladem tensoru je vektor nebo lineární forma. V této podkapitole ukážeme odvození dvou významných tensorů z mechaniky a diferenciální geometrie a bez odvození uvedeme některé další typické příklady tensorů.

Příklad 3.5. *Napjatost je v každém bodě A nějakého tělesa L definována jako množina obecných napětí působících ve všech řezech vedených bodem A. Dá se ukázat, že napjatost je jednoznačně určena symetrickým tensorem druhého řádu, který nazýváme tensorem napětí a značíme $\mathbf{T}_\sigma$. Tento tensor má 9 souřadnic, které zapisujeme do matice takto:*

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Symboly σ značí normálové složky napětí a symboly τ složky smykové. Podrobné odvození souřadnicového vyjádření tohoto tensoru je možné najít v [14], jako multilineární zobrazení je odvozen v [3].

Příklad 3.6. *Smíšený neboli vnější součin vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ představuje tensor E typu $(0, 3)$ na $\mathbb{R}^3$, který je definován vztahem $E(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$, kde symbol $\cdot$ značí skalární součin a symbol $\times$ značí vektorový součin. Souřadnicemi tohoto tensoru jsou čísla ε_{ijk} definovaná vztahy*

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } (i, j, k) \text{ je sudá permutace čísel } (1, 2, 3), \\ -1 & \text{jestliže } (i, j, k) \text{ je lichá permutace čísel } (1, 2, 3), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \tag{3.4}$$

Tensor (ε_{ijk}) *se nazývá Levi-Civitův nebo také permutační tensor a má široké uplatnění v matematice a fyzice. Například vektorový součin dvou vektorů* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V = \mathbb{R}^3$, $\mathbf{u} = u_i \mathbf{b}^i, \mathbf{v} = v_i \mathbf{b}^i$, *kde* $\{\mathbf{b^1}, \mathbf{b^2}, \mathbf{b^3}\}$ *je báze* V *můžeme zapsat jako*

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \varepsilon_{ijk} \mathbf{b}^i u^j v^k.$$

Analogicky můžeme definovat Levi-Civitův tensor ve vyšších dimenzích. Například tensor $(\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma})$, *typu* $(0,4)$, *se souřadnicemi určenými vztahy*

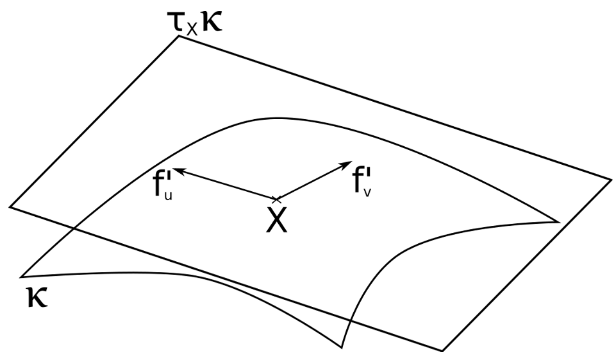
$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{když } \mu\nu\rho\sigma \text{ je sudá permutace } 0,1,2,3, \\ -1 & \text{když } \mu\nu\rho\sigma \text{ je lichá permutace } 0,1,2,3, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

má uplatnění v obecné teorii relativity (viz [5]).

Odvození následujícího příkladu je převzato z [4].

3.4.1. První základní tensor plochy

Buď κ nějaká plocha a $f = f(u,v) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{E}^3$ její parametrické vyjádření. Tečny všech křivek na ploše κ v bodě $X \in \kappa$ tvoří tečnou rovinu plochy κ v bodě X, kterou značíme $\tau_X \kappa$. Množinu $T_X \kappa = \{\overrightarrow{AB}; A, B \in \tau_X \kappa\}$ nazveme tečným prostorem plochy κ v bodě X. $T_X \kappa$ je vektorový prostor. Požadavkem v definici plochy je lineární nezávislost vektorů f'_u a f'_v (viz např. [7, str. 44]). Za bázi prostoru $T_X \kappa$ tak můžeme vzít vektory $\mathbf{b_1} = f'_u$, $\mathbf{b_2} = f'_v$. Každý vektor $\mathbf{u}$ ležící v $T_X \kappa$ pak můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci těchto bázových tečných vektorů, tedy platí $\mathbf{u} = u^i \mathbf{b_i}$, $i = 1, 2$.



Obrázek 3.1: Tečná rovina plochy

Pro skalární součin g libovolných vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_X \kappa$ tak platí

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g(u^i \mathbf{b_i}, v^j \mathbf{b_j}) = u^i v^j g(\mathbf{b_i}, \mathbf{b_j}).$$

Použijeme označení

$$g_{ij} = g(\mathbf{b_i}, \mathbf{b_j}) \tag{3.5}$$

a definujeme číslo G vztahem

$$G = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}. \tag{3.6}$$

Označíme-li

$$
\begin{aligned}
g^{11} &= \frac{g_{22}}{G}, \qquad g^{22} = \frac{g_{11}}{G}, \\
g^{12} &= g^{21} = -\frac{g_{12}}{G} = -\frac{g_{21}}{G},
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

můžeme zavést pojem prvního základního tensoru plochy.

Věta 3.4. *Čísla g_{kl} definovaná vztahy 3.5 a čísla g^{ij} definovaná vztahy 3.7 jsou kovariantní, resp. kontravariantní souřadnice téhož tensoru druhého řádu. Nazýváme ho* první základní tensor plochy *nebo též* metrický tensor plochy.

[4, str. 176]

Důkaz. Nejprve ukážeme, že čísla g_{kl} skutečně představují souřadnice nějakého tensoru. Vyjdeme z rovnic

$$g_{kl} = g(\mathbf{b_k}, \mathbf{b_l}), \;\; \bar{g}_{pq} = g(\mathbf{d_p}, \mathbf{d_q}),$$

kde vektory $\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}$ tvoří jinou bází $T_X\kappa$. Buď A matice přechodu od první báze ke druhé a $\tilde{A}$ matice k ní inverzní. Pak zřejmě platí

$$\bar{g}_{pq} = g(\mathbf{d_p}, \mathbf{d_q}) = g(A^k_p \mathbf{b_k}, A^l_q \mathbf{b_l}) = A^k_p A^l_q g(\mathbf{b_k}, \mathbf{b_l}) = A^k_p A^l_q g_{kl},$$

což je vztah pro transformaci souřadnic 2-krát kovariantního tensoru a první část věty je tak dokázána. Dále musíme ověřit tensorový charakter čísel g^{ij}. Pro libovolný tensor prvního řádu A jehož souřadnice vůči druhé bázi jsou $\bar{a}_n$ platí

$$\bar{g}^{mn}\bar{a}_n = \bar{a}^m = \tilde{A}^m_i a^i = \tilde{A}^m_i g^{ij} a_j = \tilde{A}^m_i \tilde{A}^n_j g^{ij} \bar{a}_n.$$

Platí tedy vztah

$$\bar{g}^{mn} = \tilde{A}^m_i \tilde{A}^n_j g^{ij},$$

což je vztah pro transformaci souřadnic 2-krát kontravariantního tensoru. Druhá část věty je tedy dokázána. Zbývá ukázat, že g^{ij} a g_{kl} jsou souřadnice stejného tensoru. Vyjdeme z rovnic

$$g^{ij} g_{ik} = \delta^i_j. \tag{3.8}$$

Správnost těchto rovnic ověříme jejich rozepsáním a dosazením ze vztahu 3.6:

$$
\begin{aligned}
g^{ij} g_{ik} &= g^{1j} g_{1k} + g^{2j} g_{2k} = \\
&= \begin{cases}
g^{11}g_{11} + g^{21}g_{21} = \frac{g_{22}}{G} g_{11} - \frac{g_{12}}{G} g_{21} = \frac{g_{22}g_{11} - g_{12}g_{21}}{G} = \frac{g_{22}g_{11} - g_{12}g_{21}}{g_{22}g_{11} - g_{12}g_{21}} = 1, & j = k = 1 \\
g^{11}g_{12} + g^{21}g_{22} = \frac{g_{22}}{G} g_{12} - \frac{g_{12}}{G} g_{22} = \frac{g_{22}g_{12} - g_{22}g_{12}}{G} = 0, & j = 1, k = 2 \\
g^{12}g_{11} + g^{22}g_{21} = -\frac{g_{12}}{G} g_{11} + \frac{g_{11}}{G} g_{21} = \frac{g_{11}g_{12} - g_{11}g_{12}}{G} = 0, & j = 2, k = 1 \\
g^{12}g_{12} + g^{22}g_{22} = -\frac{g_{21}}{G} g_{12} + \frac{g_{11}}{G} g_{22} = \frac{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}}{G} = \frac{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}} = 1, & j = k = 2.
\end{cases}
\end{aligned}
$$

Pomocí rovnic 3.8 se snadno dokáže, že platí

$$g^{ij} g_{ik} g_{jl} = \delta^i_k g_{jl} = g_{kl}.$$

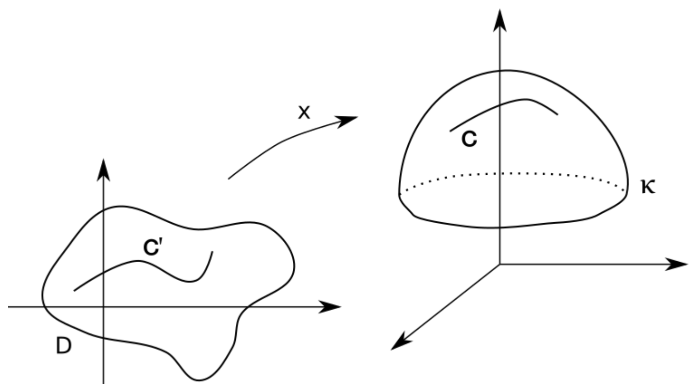
Z tohoto vztahu a z definice rovnosti tensorů plyne rovnost tensorů g^{ij} a g_{kl} a věta je tím dokázána.

□

Skalární součin jsme definovali jako symetrickou bilineární formu, platí tedy $g_{ij} = g_{ji}$ a z rovnic 3.7 víme, že $g^{ij} = g^{ji}$. První základní tensor plochy je tedy symetrický.

Mějme nyní plochu κ zadanou vektorovou rovnicí $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2)$ a křivku c ležící na ploše κ zadanou v oblasti parametrů $D \subseteq \mathbb{R}^2$ plochy κ rovnicemi

$$u^i = u^i(t).$$



Obrázek 3.2: Křivka na ploše

Označíme-li $\mathbf{y} = \mathbf{x}(u^1(t), u^2(t))$ vektorovou rovnici křivky k, můžeme dosadit do vzorce pro délku křivky známého z integrálního počtu:

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{\mathbf{y}}(t) \cdot \dot{\mathbf{y}}(t)} dt,$$

kde $\dot{\mathbf{y}}(t) \cdot \dot{\mathbf{y}}(t)$ značí skalární součin $g(\dot{\mathbf{y}}(t), \dot{\mathbf{y}}(t))$. Když skalární součin rozepíšeme vztahem

$$g(\dot{\mathbf{y}}(t), \dot{\mathbf{y}}(t)) = g(\mathbf{x}_i \dot{u}^i, \mathbf{x}_j \dot{u}^j) = g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j,$$

získáme vzorec pro délku s křivky k na ploše κ

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{g_{ij}\, du^i\, du^j}, \tag{3.9}$$

kde $du^i = \dot{u}^i\, dt$ značí diferenciál funkce $u^i(t)$. Ukázali jsme tak, že pokud v každém bodě křivky k známe souřadnice prvního základního tensoru plochy, můžeme délku s křivky k na intervalu $\langle t_0, t \rangle$ spočítat pomocí vzorce 3.9.

Výraz

$$\varphi_1 = g_{ij}\, du^i\, du^j \tag{3.10}$$

nazýváme *první základní forma plochy*. Pokud známe první základní formu plochy, umíme vždy vyjádřit první základní tensor plochy a obráceně. Kromě délky křivky na ploše existují další vlastnosti, které můžeme určit ze znalosti prvního základního tensoru plochy. Říkáme o nich, že patří do vnitřní geometrie plochy (viz [7, str. 73]).

3.4.2. Tensor setrvačnosti

Než přistoupíme k odvození tensoru setrvačnosti, připomeňme, že zobrazení $g : V \to \mathbb{R}$, kde V je vektorový prostor, nazýváme *kvadratická forma*, jestliže existuje symetrická bilineární forma $f : V \times V \to \mathbb{R}$ taková, že pro každé $\mathbf{v} \in V$ platí

$$g(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

Nechť $\{P, \mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}\}$ je kartézská soustava souřadnic na euklidovském prostoru $\mathbb{E}^3$. Uvažujeme rotaci tělesa L upevněného v bodě P kolem nějaké osy, která prochází bodem P. Předokládáme, že těleso L je absolutně tuhé. Označíme-li $\omega = \omega^i \mathbf{b_i}$ vektor úhlové rychlosti a $\mathbf{x} = x^i \mathbf{b_i}$ průvodič bodu $M \in L$, platí pro vektor rychlosti $\mathbf{v}$ v bodě M vztah $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{x}$ známý z mechaniky (symbol $\times$ značí vektorový součin). Kinetická energie dT elementu tělesa L v okolí bodu M se pak spočítá vztahem $dT = \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 dm$, kde dm značí hmotnost elementu a $\mathbf{v}^2$ je skalární součin $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$. Vztah pro kinetickou energii celého tělesa L pak má tvar

$$T = \frac{1}{2} \int_L (\omega \times \mathbf{x})^2 dm. \tag{3.11}$$

Z vlastností vektorového součinu pak přímo plyne

$$\begin{aligned}(\omega \times \mathbf{x})^2 = {} & (\omega_2 x_3 - \omega_3 x_2)^2 + (\omega_3 x_1 - \omega_1 x_3)^2 + (\omega_1 x_2 - \omega_2 x_1)^2 = (\omega_2 x_3)^2 + (\omega_3 x_2)^2 + \\ & + (\omega_3 x_1)^2 + (\omega_1 x_3)^2 + (\omega_1 x_2)^2 + (\omega_2 x_1)^2 - 2(\omega_2 x_3 \omega_3 x_2) - 2(\omega_3 x_1 \omega_1 x_3) - \\ & - 2(\omega_1 x_2 \omega_2 x_1) = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3)^2 = \\ & = \boldsymbol{\omega^2 \mathbf{x}^2} - (\omega \cdot \mathbf{x})^2.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Za použití souřadnicového vyjádření vektorů ω a $\mathbf{x}$ pak můžeme psát $\omega^2 = \delta_{ij}\omega^i \omega^j$, $\mathbf{x}^2 = \delta_{lk} x^l x^k$, $\omega \cdot \mathbf{x} = \delta_{ik}\omega^i x^k = \delta_{jl}\omega^j x^l$. Dosazením do 3.12 dostaneme $(\omega \times \mathbf{x})^2$ ve tvaru

$$(\omega \times \mathbf{x})^2 = (\delta_{ij}\omega^i\omega^j)(\delta_{kl}x^k x^l) - (\delta_{ik}\omega^i x^k)(\delta_{jl}\omega^j x^l) = (\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{jl})\omega^i\omega^j x^k x^l.$$

Dosadíme do 3.11, souřadnice vektoru ω, které považujeme za konstanty, vytkneme před integrál a dostaneme výraz

$$T = \frac{1}{2}(\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{jl})\omega^i\omega^j \int_L x^k x^l dm.$$

Tento výraz není závislý na souřadnicích x^i vektoru $\mathbf{x}$, protože se vzhledem k nim integruje. Výraz pro kinetickou energii je tedy kvadratickou formou vzhledem k souřadnicím ω^i vektoru ω a koeficienty této formy představují 2-krát kovariantní symetrický tensor. Tensorem setrvačnosti tělesa L pak rozumíme dvojnásobek tohoto tensoru.

Toto odvození tensoru setrvačnosti je převzato z [7].

4. Tensory na diferencovatelné varietě

Pojem diferencovatelné variety představuje zobecnění křivek a ploch do vyšších dimenzí a do prostorů, které jsou obecnější než $\mathbb{R}^n$. Proto před uvedením definice diferencovatelné variety připomeneme definice křivky a plochy. Zjednodušeně se dá říct, že diferencovatelná varieta je topologický prostor, v němž každý bod může sloužit jako počátek lokálního souřadnicového systému pro otevřené okolí tohoto bodu. K diferencovatelné varietě můžeme definovat tečný vektorový prostor, na kterém pak již známým způsobem zavedeme tensory.

Definice 4.1. Množina $C \subset \mathbb{E}_n$ se nazývá *jednoduchá křivka*, jestliže existuje otevřený interval $I \subset \mathbb{R}$ a zobrazení $f : I \to \mathbb{E}_n$ takové, že $f(I) = C$ a $f'(t) \neq \mathbf{0}$ pro každé $t \in I$. Zobrazení f pak nazýváme *parametrizací* křivky C.

Věta 4.1. *Nechť I a J jsou intervaly z $\mathbb{R}$. Zobrazení $f(t) : I \to \mathbb{E}_n$ a $g(\tau) : J \to \mathbb{E}_n$ jsou dvě parametrizace téže jednoduché křivky právě tehdy, když existuje bijektivní zobrazení $\varphi : J \to I,\ t = \varphi(\tau)$ takové, že $\varphi'(\tau) \neq 0$ a $g = f \circ \varphi$ pro každé $\tau \in J$.*

[7, str. 25]

Definice 4.2. Zobrazení $\varphi : J \to I$ z věty 4.1 nazýváme *reparametrizací* křivky C.

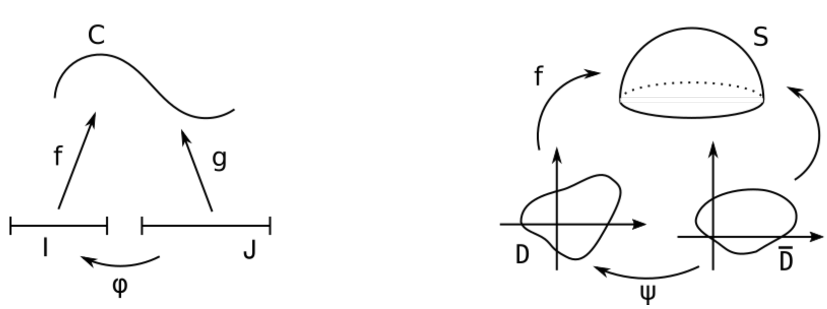
Definice 4.3. Řekneme, že množina $k \subset \mathbb{E}_n$ je *křivka*, jestliže pro každý bod $p \in k$ existuje jeho okolí U_p v $\mathbb{E}_n$ takové, že $k \cap U_p$ je jednoduchá křivka. Parametrizace průniků $k \cap U_p$ nazýváme *lokálními parametrizacemi* křivky k.

Definice 4.4. Množina $S \subset \mathbb{E}_3$ se nazývá *jednoduchá plocha*, jestliže existuje otevřená množina $D \subset \mathbb{R}^2$ a prosté zobrazení $f(u, v) : D \to \mathbb{E}_3$ takové, že $f(D) = S$ a vektory f'_u a f'_v jsou lineárně nezávislé ve všech bodech množiny D. Zobrazení f nazýváme *parametrizace plochy* S.

Věta 4.2. *Nechť $D, \bar{D} \subset \mathbb{R}^2$ jsou otevřené množiny. Zobrazení $f : D \to \mathbb{E}_3$ a $\bar{f} : \bar{D} \to \mathbb{E}_3$ jsou dvě parametrizace téže jednoduché plochy právě tehdy, když existuje bijektivní zobrazení $\psi : \bar{D} \to D$ takové, že pro každý bod $x \in \bar{D}$ platí $J(\psi) \neq 0$ a $\bar{f} = f \circ \psi$.*

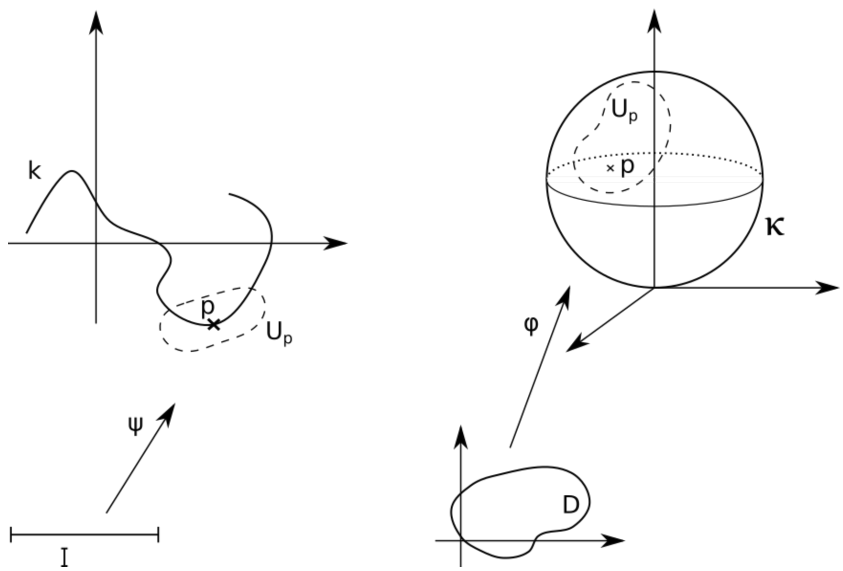
[7, str. 72]

Definice 4.5. Zobrazení $\psi : \bar{D} \to D$ z věty 4.2 nazýváme *reparametrizací* plochy S.



Obrázek 4.1: Reparametrizace křivky a plochy

Definice 4.6. Řekneme, že množina $\kappa \subset \mathbb{E}_3$ je *plocha*, jestliže pro každý bod $p \in \kappa$ existuje jeho okolí U_p v $\mathbb{E}_3$ takové, že $\kappa \cap U_p$ je jednoduchá plocha. Parametrizace průniků $\kappa \cap U_p$ nazýváme *lokálními parametrizacemi* plochy κ.



Obrázek 4.2: Lokální parametrizace křivky a plochy

Přirozeným zobecněním předchozích definic je zavedení diferencovatelné variety.

4.1. Diferencovatelná varieta

Definice 4.7. Buďte V_1, V_2 topologické prostory. Zobrazení $f : V_1 \to V_2$ nazveme *homeomorfismus*, pokud je spojité, bijektivní a jeho inverze je rovněž spojité zobrazení.

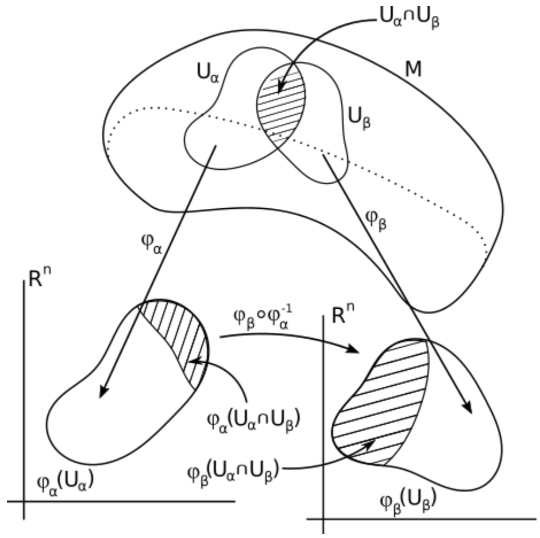
Definice 4.8. Topologický prostor M nazýváme *Hausdorffův prostor*, pokud pro každé dva body $K,\ L \in M$ existují otevřené množiny $U,\ V \subset M$ tak, že platí $K \in U,\ L \in V$, $U \cap V = \emptyset$. Každé dva body Hausdorffova prostoru lze tedy oddělit otevřenými množinami.

Definice 4.9. Řekneme, že Hausdorffův prostor M je *topologická varieta*, jestliže má spočetnou bázi a pro všechna $x \in M$ existuje otevřené okolí $U \subset M$ a homeomorfismus $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$. Dvojici (U, φ) pak nazveme *n-dimenzionální mapa na M*.

Definice 4.10. Jsou-li $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ a (U_β, φ_β) dvě mapy na M, zobrazení $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ definované na $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ nazýváme *přechodová funkce* mezi těmito mapami (viz obrázek 4.3).

Definice 4.11. Zobrazení $\psi : U \to \mathbb{R}^n$, kde $U \subset \mathbb{R}^n$, nazveme *difeomorfismus*, pokud je prosté na $\psi(U)$ a zobrazení ψ a ψ^{-1} jsou hladká, tedy třídy C^∞.

Definice 4.12. Řekneme, že mapy $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, (U_β, φ_β) jsou *kompatibilní*, jsou-li množiny $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ a $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ otevřené a přechodová funkce je difeomorfismus mezi nimi.



Obrázek 4.3: Přechodová funkce

Definice 4.13. Řekneme, že množina map $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ tvoří *atlas* na M, jestliže platí:

(i) každé dvě mapy atlasu jsou kompatibilní

(ii) $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.

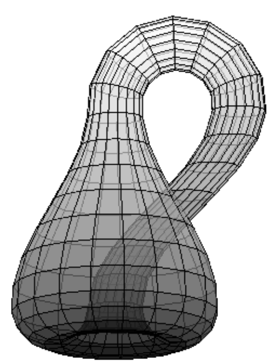
Definice 4.14. Řekneme, že mapa (U, φ) je *kompatibilní* s atlasem $\mathcal{A}$ na množině M, pokud je kompatibilní s každou mapou atlasu $\mathcal{A}$, tedy pokud $\mathcal{A} \cup \{(U, \varphi)\}$ je atlas na M. *Úplným atlasem* rozumíme atlas, který obsahuje všechny mapy s ním kompatibilní.

Definice 4.15. *Diferencovatelná varieta* je topologická varieta M spolu s úplným atlasem.

Dimenzí variety M rozumíme dimenzi map z atlasu na M. Zobrazení $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ je určeno n-ticí funkcí $(x^1, \ldots, x^n)$, které nazýváme *lokální souřadnice variety* M.

Příklad 4.1. *Kleinova lahev je varieta dimenze 2 určená parametrizací*

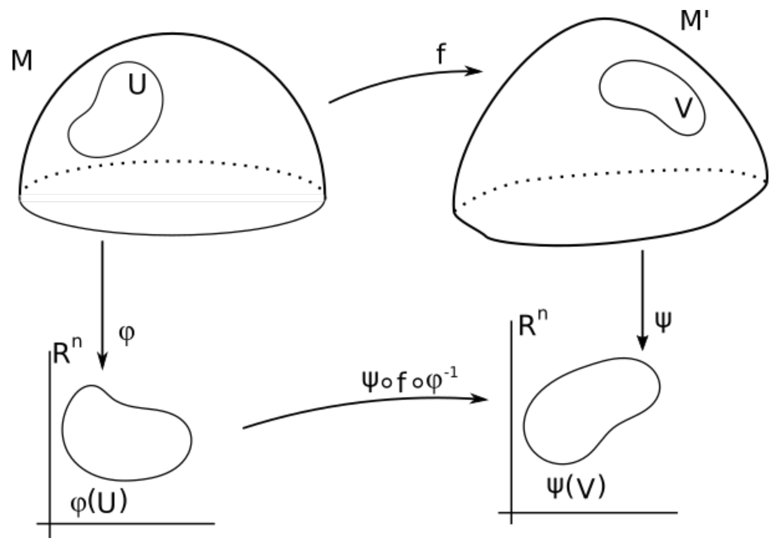
$$\begin{aligned} w &= r\sin(t)\sin(\tfrac{s}{2}) \\ x &= (R + r\cos(t))\cos(s) \\ y &= r\sin(t)\cos(\tfrac{s}{2}) \\ z &= (R + r\cos(t))\sin(s), \end{aligned}$$



$s, t \in (0, 2\pi)$ *[13, str. 46]. Na obrázku je její projekce do třírozměrného prostoru.*

4.2. Tensory na varietě

Definice 4.16. Nechť M a M' jsou dvě variety. Řekneme, že zobrazení $f : M \to M'$ je *hladké*, jestliže pro každé $x \in M$ a každou mapu (V, ψ) na M' takovou, že $f(x) \in V$, existuje mapa (U, φ) na M taková, že $x \in U$ a zobrazení $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ je hladké (viz obrázek 4.4). Funkce $f : M \to \mathbb{R}$ je hladká, pokud je to hladké zobrazení mezi varietami M a $\mathbb{R}$. Prostor všech hladkých funkcí na varietě M označujeme $C^\infty(M)$. Hladké zobrazení $f : I \to M$, kde $I \subset \mathbb{R}$, nazýváme *dráhou na varietě* M. Budeme předpokládat, že interval I vždy obsahuje nulu.



Obrázek 4.4: Hladká funkce

Definice 4.17. Řekneme, že dvě dráhy $f, g : I \to M$ splňující $f(0) = g(0) = m$ se dotýkají v bodě m variety M, jestliže existuje souřadnicové okolí U bodu m s lokálními souřadnicemi (x^i), pro které platí:

$$\frac{d(x^i \circ f)(0)}{dt} = \frac{d(x^i \circ g)(0)}{dt}.$$

Dá se ukázat, že předchozí definice nezávisí na volbě lokálních souřadnic.

Třídu ekvivalence drah $f(t)$ na varietě M, které splňují $f(0) = m$ a dotýkají se v bodě $m \in M$ nazýváme *tečný vektor variety* M *v bodě* m a značíme $\mathbf{u}_m = \frac{df(0)}{dt}$. Čísla ξ^i určená vztahem

$$\xi^i := \frac{d(x^i \circ f)(0)}{dt} \tag{4.1}$$

nazýváme *souřadnice vektoru* $\mathbf{u}_m$ v lokálních souřadnicích (x^i).

Pro libovolnou hladkou funkci $\gamma : M \to \mathbb{R}$ platí

$$\mathbf{u}_m(\gamma) := \frac{d(\gamma \circ f)(0)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \gamma(m)}{\partial x^i} \frac{d(x^i \circ f)(0)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \gamma(m)}{\partial x^i} \xi^i. \tag{4.2}$$

Hodnotu $\mathbf{u}_m(\gamma)$ z rovnice 4.2 nazýváme *derivace funkce* γ *podle vektoru* $\mathbf{u}_m$ a můžeme s ní zavést tečný vektor variety tímto ekvivalentním způsobem:

Definice 4.18. Nechť M je varieta a f je dráha na M taková, že $f(0) = m$, kde $m \in M$ je pevně zvolený bod. Lineární zobrazení $\mathbf{u}_m : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ nazveme *tečný vektor* ke křivce f v bodě m, pokud pro všechny funkce $\gamma \in C^\infty(M)$ platí

$$\mathbf{u}_m(\gamma) = \frac{d(\gamma \circ f)}{dt}(0).$$

Všechny tečné vektory $\mathbf{u}_m$ v bodě $m \in M$ ke všem křivkám f v M splňujícím $f(0) = m$ tvoří prostor, který značíme $T_m M$ a nazýváme *tečný prostor* k M v bodě m.

Příklad 4.2. *Příkladem tečného vektoru variety jsou operátory $(\frac{\partial}{\partial x^i})_m(\gamma) = \frac{\partial \gamma}{\partial x^i}$, které funkci $\gamma \in C^\infty(M)$ přiřadí její derivaci v bodě m podle x^i.*

Věta 4.3. *Tečný prostor $T_m M$ je vektorový prostor. Je-li (U, φ) mapa na M taková, že $m \in U$, pak bázi $T_m M$ tvoří vektory $\{(\frac{\partial}{\partial x^1})_m, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x^n})_m\}$.*

[13, str. 48]

Definice 4.19. Nechť $f \in C^\infty(M)$, $m \in M$. *Diferenciál funkce* f v bodě m je lineární zobrazení $(df)_m : T_m M \to M$ definované rovností

$$(df)_m(\mathbf{u}_m) = \mathbf{u}_m(f), \quad \mathbf{u}_m \in T_m M.$$

Prostor $T_m^* M := (T_m M)^*$ je duálním vektorovým prostorem k $T_m M$ a nazýváme ho *kotečný prostor* variety M v bodě m. Jeho bázi tvoří prvky $(dx^i)_m$, což jsou diferenciály lokálních souřadnic (x^i) na M.

Definice 4.20. Buď M diferencovatelná varieta. *Vektorovým polem* na M rozumíme zobrazení, které každému bodu $m \in M$ přiřadí tečný vektor $\mathbf{u}_m \in T_m M$.
Kovektorovým polem na M rozumíme zobrazení, které každému $m \in M$ přiřadí lineární formu h_m na $T_m M$.

Definice 4.21. Zobrazení F, které každému bodu m variety M přiřadí tensor typu (s, r) na $T_m M$ nazveme *tensorem typu (s, r) na varietě M.*

Zřejmě tensorem typu $(1, 0)$ na varietě M je vektorové pole, tensorem typu $(0, 1)$ je kovektorové pole a tensorem typu $(0, 0)$ je reálná funkce na M.

Definice 4.22. Nechť F je tensor typu (s, r) na varietě M a $(x^1, \ldots, x^n)$ jsou lokální souřadnice na M. Funkce $a^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}$ definované vztahy

$$a^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r} = F(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}, dx^{j_1}, \ldots, dx^{j_s})$$

se nazývají *souřadnice tensoru F* v souřadnicích $(x^1, \ldots, x^n)$.

Podobně jako v případě tensorů na vektorovém prostoru můžeme na varietách tensory násobit, tensory stejného typu sčítat a smíšené tensory úžit. V souřadnicích tyto operace vypadají na varietě stejně jako na vektorovém prostoru.

5. Závěr

Tato bakalářská práce je rozdělena do tří kapitol. V první kapitole jsme definovali nejdůležitější pojmy nezbytné pro zavedení tensorů, například vektorový a duální prostor a jejich báze. Na vektorových prostorech jsme poté zavedli bilineární formy. Zobecněním bilineárních forem na libovolný počet vektorových prostorů jsme ve druhé kapitole dospěli ke kovariantním tensorům. Obdobným způsobem jsme dále zavedli kontravariantní a smíšené tensory a s využitím tensorových souřadnic jsme ukázali jinou, „inženýrskou“, definici tensoru.

V části věnované tensorovým operacím jsme kromě základních operací (např. sčítání tensorů nebo tensorový součin) zavedli symetrické a antisymetrické tensory. Symetrické tensory se často vyskytují v inženýrských aplikacích, ve třetí kapitole jsou uvedeny příklady tensorů a většina z nich jsou právě tensory symetrické.

V poslední kapitole jsme představili diferencovatelné variety a tensory na nich. V úvodu této kapitoly jsme definovali křivky a plochy a s pomocí několika obrázků nastínili jejich souvislost s varietami. Poté jsme zavedli tečný vektor variety jako lineární zobrazení splňující určité vztahy a tečný prostor k varietě, což je prostor všech tečných vektorů. S využitím pojmu tečného prostoru k varietě jsme nakonec definovali tensor na diferencovatelné varietě.

Literatura

[1] BIRKHOFF, G. and MAC LANE, S.: *Algebra.* Providence: AMS Chelsea Publishing, 1991. 626 p. ISBN 0-8218-1646-2.

[2] BISHOP, R. L. and GOLDBERG, S. I.: *Tensor Analysis on Manifolds.* New York: Dover Publications, 1980. 280 p. ISBN 0-486-64039-6.

[3] BOČEK, L.: *Tenzorový počet.* Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1976. 152 p.

[4] BUDINSKÝ, M., KEPR, B.: *Základy diferenciální geometrie s technickými aplikacemi.* Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1970. 344 p.

[5] CARROLL, S. M.: *Lecture Notes on General Relativity.* Santa Barbara, 1997.
Dostupné z: http://arxiv.org/pdf/gr-qc/9712019.pdf

[6] DIMITRIENKO, Yu. I.: *Tensor Analysis and Nonlinear Tensor Functions.* Dordrecht: Springer Science+Business Media, 2002. 662 p. ISBN 978-94-017-3221-5.

[7] DOUPOVEC, M.: *Diferenciální geometrie a tenzorový počet.* Brno: VUTIUM, 1999. 86 p.

[8] DOUPOVEC, M.: *Jety a konexe v diferenciální geometrii.* Brno: VUTIUM, 2009. 29 p. ISBN 978-80-214-3850-7.

[9] HEFFERON, J.: *Linear Algebra.*
Dostupné z: http://joshua.smcvt.edu/linalg.html/book.pdf

[10] KARÁSEK, J., SKULA, L.: *Lineární Algebra.* Brno: AKADEMICKÉ NAKLADATELSTVÍ CERM, 2005. 179 p. ISBN 80-214-3100-8.

[11] KAY, D. C.: *Schaum's outline of theory and problems of tensor calculus.* New York: McGraw-Hill, 1988. 224 p. ISBN 0-07-033484-6.

[12] KOLÁŘ, I.: *Úvod do globální analýzy.* Brno: Masarykova univerzita, 2003. 124 p. ISBN 80-210-3205-7.

[13] KRUMP, L., SOUČEK, V., TĚŠÍNSKÝ, J.A.: *Matematická analýza na varietách.* Praha: Karolinum, 1998. 93 p. ISBN 807184635X.
Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/ krump/anvar.pdf

[14] VRBKA, J.: *Pružnost a pevnost I.* Brno, 2012. 280 p.