



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

## VÝPOČTOVÉ ŘEŠENÍ DEFORMACE A NAPJATOSTI PRVKŮ TLAKOVÝCH NÁDOB

NUMERICAL SOLUTION OF STRAIN AND STRESS COMPONENTS OF PRESSURE VESSELS

### BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

### AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Martin Ševčík

### VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Zdeněk Florian, CSc.

BRNO 2016



# Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	<b>Martin Ševčík</b>
Studijní program:	Strojírenství
Studijní obor:	Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce:	<b>doc. Ing. Zdeněk Florian, CSc.</b>
Akademický rok:	2015/16

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## **Výpočtové řešení deformace a napjatosti prvků tlakových nádob**

### **Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

Cílem bakalářské práce je seznámení se základními pojmy a nařízeními v oblasti tlakových nádob. Dále s řešením deformace a napjatosti vybraných prvků a uzlů tlakových nádob.

### **Cíle bakalářské práce:**

1. Provedení rešerše dostupné literatury v oblasti řešeného problému.
2. Seznámení se se základními pojmy, rozdělením tlakových nádob. (normou ČSN 690010-1-1)
3. Výpočtové řešení deformace a napjatosti vybraných prvků.

### **Seznam literatury:**

ČSN 690010-1-1

Křupka V., Schneider P.: Stavba chemických zařízení I, SNTL Praha, 1982

Vejvoda S., Vlk M.: Stavba chemických zařízení II, SNTL Praha, 1982

Schneider P.: Základy konstruování provozních zařízení, Brno: PC – DIR Real, 1999

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2015/16

V Brně, dne

L. S.

---

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## **Abstrakt**

Předložená bakalářská práce se zabývá tlakovými nádobami z hlediska jejich vymezení a kategorizace. V navazující části je provedeno posouzení jednotlivých typů tlakových nádob z hlediska jejich využití v technické praxi, tato část má charakter rešeršní studie.

Dále je pozornost věnovaná řešení deformace a napjatosti tlakových nádob analytickým a numerickým způsobem. V části analytického řešení je pozornost věnovaná jak momentové, tak bezmomentové teorii skořepin. Numerická řešení jsou provedena MKP ve výpočtovém systému Ansys Workbench 16.2.

## **Abstract**

The bachelor thesis deals with pressure vessels in terms of their definition and categorization. In the following part is carried out an assessment of various types of pressure vessels in terms of their using in engineering, this part is a research study.

Further part is focused on solution of deformation and stress of pressure vessel by analytical and numerical way. The part of analytical solution is focused on both membrane and momentum shell. Numerical solutions are made by FEM in calculation software Ansys Workbench 16.2.

## **Klíčová slova**

Tlaková nádoba  
Skladovací nádrže  
Rotačně symetrická skořepina  
Deformace a napjatost tlakových nádob

## **Keywords**

Pressure vessel  
Storage tanks  
Rotatory symmetric shell  
Deformation and stress of pressure vessel

## **Bibliografická citace**

ŠEVČÍK, M. *Výpočtové řešení deformace a napjatosti prvků tlakových nádob*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2016. 48 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Zdeněk Florian, CSc.



## Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval sám pod vedením vedoucího bakalářské práce pana doc. Ing. Zdeňka Floriana, CSc. a použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu použitých zdrojů.

V Brně dne 26. 5. 2016



---

Podpis



## **Poděkování**

Rád bych poděkoval svému vedoucímu bakalářské práce doc. Ing. Zdeňku Florianovi, CSc. za poskytnuté informace, rady a hlavně za trpělivost při konzultacích. Dále bych pak rád chtěl poděkovat své rodině a přátelům za podporu a pochopení.



# Obsah

1	Úvod.....	13
2	Kategorizace tlakových nádob.....	14
2.1	Kategorie 1.....	14
2.2	Kategorie 2 – 4.....	14
2.3	Kategorie 5.....	14
3	Typy tlakových nádob.....	15
3.1	Kulové nádrže.....	15
3.2	Kapkové a toroidální nádrže.....	16
3.3	Válcové nádrže.....	17
3.3.1	Části válcové nádrže.....	17
3.3.2	Typy válcových nádrží.....	19
4	Výpočtové řešení tlakových nádob.....	22
4.1	Teorie skořepin.....	22
4.1.1	Tvar rotačně symetrické skořepiny.....	22
4.2	Rotačně symetrická skořepina.....	23
4.3	Rovnice rovnováhy rotačně symetrické skořepiny.....	24
4.3.1	Rovnice rovnováhy skořepiny osově symetrického zatížení.....	24
4.3.2	Rovnice rovnováhy skořepiny při přetlaku či podtlaku.....	26
4.3.3	Rovnice rovnováhy skořepiny při hydrostatickém tlaku.....	26
4.3.4	Rovnice rovnováhy skořepiny zatížené vlastní tíhou.....	26
4.3.5	Rovnice rovnováhy skořepiny zatížené sněhem.....	27
4.4	Rovnice deformace.....	28
4.4.1	Stanovení základních rovnic deformace.....	28
4.4.2	Válcová skořepina s vnitřním přetlakem.....	29
4.4.3	Kulová nádoba s vnitřním přetlakem.....	29
4.4.4	Kulová skořepina zatížená vlastní tíhou.....	30
4.4.5	Kulová skořepina zatížená sněhem.....	31
4.5	Okrajové poruchy membránového stavu.....	32
4.5.1	Základní rovnice rovnováhy válcové momentové skořepiny.....	32
4.5.2	Styk dvou různých těles.....	35
5	Stanovení napjatosti ve vybraných částech nádoby.....	36
5.1	Analytické řešení.....	36
5.1.1	Stanovení napjatosti membránové části nádoby.....	36
5.1.2	Ploché dno.....	37
5.1.3	Kulové dno.....	39
5.2	Řešení pomocí MKP.....	40
5.2.1	Ploché dno.....	40
5.2.2	Kulové dno.....	42
5.3	Porovnání napětí v jednotlivých dnech a plášti nádoby.....	43
6	Závěr.....	44
	Seznam použitý zdrojů.....	45
	Seznam použitých zkratk a symbolů.....	46
	Seznam obrázků.....	48



# 1 Úvod

Nádoba je zařízení, které slouží k uchování nebo zpracování látek, které mohou být v plynném, kapalném nebo sytkém stavu. Z různých důvodů (technologických, objemových, hmotnostních) mohou být látky v nádobách pod tlakem. Ve všech případech tlak ovlivňuje funkčnost nádoby a mezní stavy pružnosti a pevnosti. Zvláště uchovávání plynných látek může být velmi nebezpečné, proto návrh, výroba a provozování tlakových nádob podléhá normám. Jednotlivé normy posuzují různé nádoby a jejich účel. Při stavbě procesních zařízení se používá norma ČSN 69 0010, pro provoz tlakových nádob se pak využívá norma ČSN 690012.

Mezi obdobné zahraniční normy patří:

ASME Boiler and Pressure Vessel Code, SECTION VIII, Div. 1 and 2.  
Vydavatel: American Society of Mechanical Engineers, New York

British code BS. 5500 Specification for unfired welded pressure vessels,  
British Standards Institution, London

Některé normy jednotlivých evropských zemí jsou momentálně nahrazovány normami platnými po celém území Evropské unie. Pro případ tlakových nádob se jedná o normu EN 13 445, avšak konkrétní normy států mohou pozůstat v platnosti.  
[1]

Vliv jednotlivých norem ke konstrukci případně užití těchto nádob posuzuje legislativa jednotlivých států. V ČR se jedná o vyhlášku č. 174/1968 v platném znění, která stanovuje technické požadavky na tlaková zařízení, a vyhlášku č. 18/1979 v platném znění, která určuje vyhrazená tlaková zařízení a stanovuje podmínky k zajištění jejich bezpečnosti. [2, 3]

## 2 Kategorizace tlakových nádob

Tlakové nádoby stabilní, které slouží primárně ke skladování plynů, kapalin nebo pevných látek, jsou děleny normou ČSN 69 0010. Toto dělení slouží především pro vymezení požadavků na konstrukci, výrobu a následného rozsahu kontrol. Kategorizace je prováděna na základě vlastností pracovní látky a pracovního přetlaku.

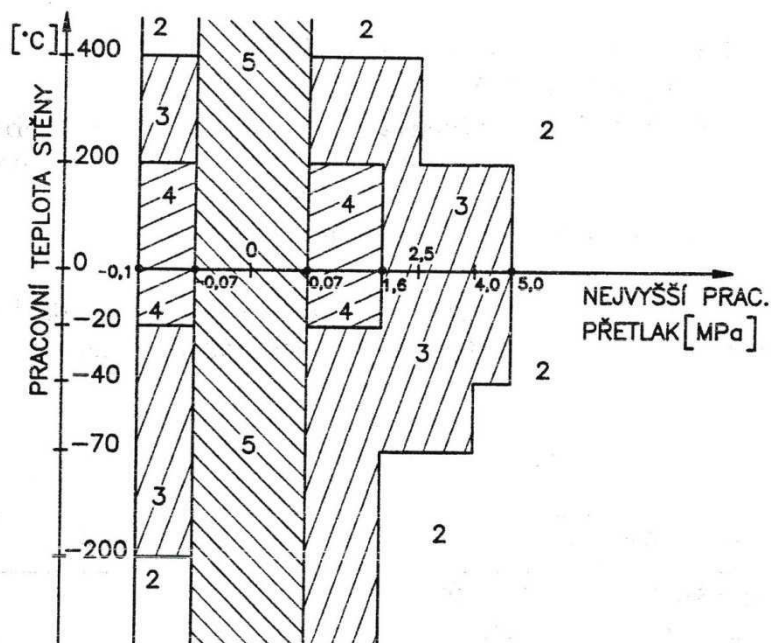
Norma dělí tlakové nádoby do pěti kategorií:

### 2.1 Kategorie 1

Do první kategorie patří nádoby s nejvyšším pracovním přetlakem větším než 0,07 MPa a pracovní látkou, která je po úniku z nádoby zdraví škodlivá nebo může způsobit závažné ekologické případně i ekonomické škody.

### 2.2 Kategorie 2 – 4

Do této kategorie spadají nádoby, které mají také pracovní přetlak větší než 0,07 MPa, ale nejsou uvažovány v kategorii 1. Patří zde také vakuové nádoby. Následné dělení do jednotlivých kategorií je zřejmé z obrázku 2.1.



Obrázek 2.1 Kategorizace nádob [4]

### 2.3 Kategorie 5

Nádoby pracující s vnitřním nebo vnějším přetlakem do 0,07 MPa, přičemž se na tuto kategorii nevztahuje norma ČSN 69 0010, ale norma ČSN 69 0015. Tato norma klade na konstrukci nádoby menší nároky.

Materiál, k výrobě nádob, jejichž přetlak je vyšší než 0,02 MPa, je dán normou ČSN 69 0010-3.1. Materiál nádoby je určen kromě tlaku také teplotou (okolí i skladovaného média), objemem nádoby a dalšími požadavky vyplývajícími z této normy. U nádob, u kterých přetlak nedosahuje hodnoty 0,02 MPa, je postačující podmínkou materiál se zaručenou svařitelností. [4]

## 3 Typy tlakových nádob

Výběr typu tlakové nádoby závisí především na předepsaném objemu, provozovaných podmínkách (hlavně na provozním přetlaku) a na vlastnostech pracovní látky. Každý tvar tlakové nádoby má své využití, proto na základě následujících informací a provozních parametrů je prováděn výběr typu.

### 3.1 Kulové nádrže

Používají se především ke skladování velkých objemů látek pod tlakem. Jejich využití je velmi výhodné, jelikož zabírají při daném objemu nejmenší povrch, tudíž dochází k úspoře materiálu. Největší předností je však napjatost pláště, která je v celém průběhu konstantní, což umožňuje využití plechů menších tloušťek.

Skladování kapalin v tomto typu nádrže je omezené jejím objemem, jelikož vlivem hydrostatického tlaku dochází k velkým membránovým napětím, což vede k použití tlustých plechů, které jsou ovšem z hlediska technologického procesu nežádoucí (trhliny, vměstky). Proto se kulové velkoobjemové nádrže využívají především na uskladňování plynů pod tlakem.

Nádrže jsou vytvářené z předem lisovaných dílců, které jsou následně svařeny k sobě. Jednotlivé dílce jsou částmi kulové skořepiny, která je rozdělena poledníky a rovnoběžkami. Póly této skořepiny jsou uzavřeny kulovými vrchlíky. Jedná se tedy o svařovanou nádobu, a proto je nutná následná kontrola svarů z důvodu těsnosti a kvality svarového spoje.

Dalším problémem je kotvení těchto nádrží. Provádí se několika způsoby. A to například sloupovým systémem, který se skládá z několika trubkových sloupů přivařených ke skořepině nádrže. Tento systém může být buď svislý, nebo šikmý. Ve svislém systému prochází rovina podepření rovníkem skořepiny. U tohoto systému je potřeba následného zavětrování sloupů, kdežto šikmý systém má zavětrování součástí konstrukčního řešení a jeho sloupy jsou přivařovány k rovnoběžkové kružnici. Oba tyto způsoby kotvení vedou k porušení membránové napjatosti a tím k momentovému stavu napjatosti, který však s rostoucí vzdáleností pomíjí. Některé typy nádob jsou kotveny souvislým podepřením na spodním pólu. Tento způsob kotvení lze použít jen tehdy, pokud nevznikne v okolí podepření příliš velká koncentrace napětí od vlastní náplně či působení vnějších vlivů. [1]



Obrázek 3.1 Kulová nádrž [5]

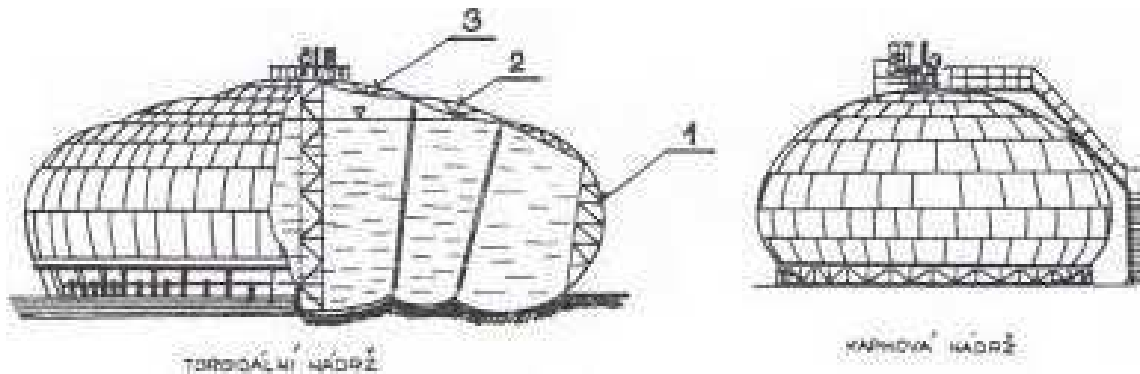
### 3.2 Kapkové a toroidální nádrže

Tento typ nádrží byl vyvinut v USA pro skladování velkých objemů lehkého benzínu, který se skladuje pod tlakem. Tudíž využití tohoto typu nádrží je podobné jako u nádrží kulového tvaru.

Tvar těchto nádob vychází z tvaru kapky vody v přírodě, jelikož kapka zaujímá takový tvar, aby měla co nejmenší možnou napjatost. U takového typu nádrží se využívají tenké plechy o tloušťkách 6–8 mm. Objem této nádrže je omezený únosností základu. Proto se tyto nádrže využívají do objemu cca 6500 m<sup>3</sup>.

Použitím toroidálního typu nádrže dosáhneme možnosti využití větších objemů. Doposud byly realizovány nádrže tohoto typu až do objemu 16 000 m<sup>3</sup>. Tato nádrž se skládá z toroidálních – anuloidních ploch. Například na obr. 3.2 se skládá z vnějšího anuloidu (1), přechodové anuloidové sekce (2) a střední kulové části (3).

Tato nádrž již sice nemá konstantní napjatost v celém plášti, jako u kapkového tvaru, ale také se jedná o téměř čistě membránovou napjatost. Nádrž se skládá z tenkých plechů svařených k sobě a v místě tvarových přechodů je vyztužena prstenci k dosažení tvarové stability nádrže. [1]



Obrázek 3.2 Toroidální a kapková nádrž [1]

### 3.3 Válcové nádrže

Válcové nádrže jsou nádoby, jejichž plášť je tvořen válcovou skořepinou, ke které je přivařené dno a případně střecha. Tyto nádrže se využívají především v chemickém průmyslu k uskladňování pohonných hmot, zkapalněných plynů a různých chemických látek.

#### 3.3.1 Části válcové nádrže

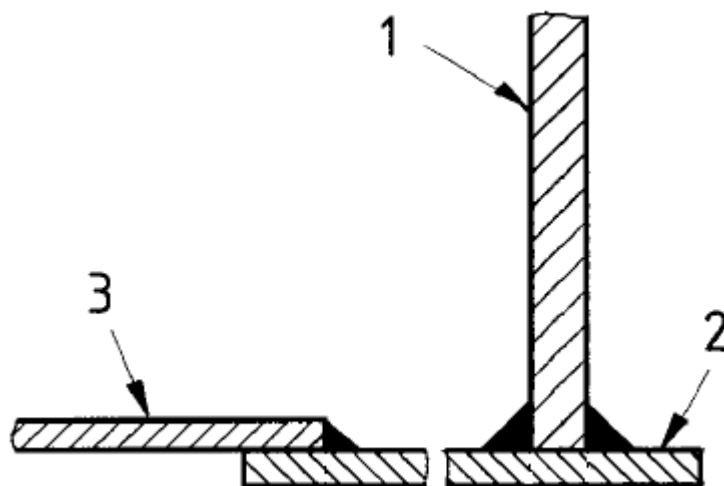
##### Plášť

Pláště se zhotovují z jednotlivých lubů, přičemž je dbáno na to, aby bylo zabezpečeno co nejmenší množství svarových spojů. Luby jsou pak tvořeny jednotlivými zakruženými plechy o dané tloušťce. U horizontálních nádrží je tloušťka po celém průběhu lubu stejná, kdežto u vertikálních se tloušťka směrem ode dna snižuje, jelikož dochází ke snižování hydrostatického tlaku média. Dále vlivem tlakových napětí (působením vlastní hmotnosti, větrem, případně jiným vnějším zatížením) má plášť tendenci k vyboulení, což může vést ke zhroucení celé konstrukce. Proto součástí statického výpočtu je vždy potřeba posoudit stabilitu pláště. [1, 6]

##### Dno

Dna těchto nádrží mohou mít různé tvary. V praxi se využívají dna plochá, kulová a anuloidová.

Plochá dna se používají především u vertikálních nádrží, jelikož tyto nádrže bývají umístěny přímo na podloží. Přechod pláště (1) a dna (2) je velice problematický, a to z důvodu ostrého přechodu, při kterém dochází ke koncentraci napětí. Proto se tento přechod vyztužuje okolkem (3), který má větší tloušťku plechu než zbylé plechy dna (viz obr. 3.3). V některých případech bývají využita dvojitá dna, u kterých lze jejich těsnost kontrolovat pomocí vakuování. [1]



Obrázek 3.3 Spoj pláště, dno a okolek [7]

V případě horizontálních nádrží je problémem přechod mezi pláštěm a deskovým dnem, kde dochází ke vzniku ohybového momentu. Tento ohybový moment závisí na poměru tuhosti dna a pláště. Pro snížení ohybového momentu, působícího na plášť nádrže, bývá ve dně vyfrézován žlábek. V závislosti na velikosti dna je žlábek vytvořen na soustruhu nebo v případě větších dnů na karuselu.

Kulová dna se používají ve velkém množství, i když v případě jejich konstrukcí je potřeba také dbát pozornosti v místech přechodu pláště a dna. V tomto místě je nutné zaručit co nejplynulejší přechod a zamezit tedy ostrému přechodu, jehož vlivem by došlo ke vzniku špičkového ohybového napětí. Pro zaručení tohoto přechodu je podstatné, aby poloměr pláště byl shodný s poloměrem dna. V případě, že je tento přechod plynulý, pak převládá membránový účinek nad ohybovým.

Anuloidová dna se využívají hlavně pro zmírnění klenutosti dnů a ušetření množství materiálu vzhledem k tomu, že jsou tvořena anuloidovou a kulovou částí. I zde je kritickým místem přechod pláště a dna, který je závislý na poloměru válcového pláště a poloměru anuloidu. [6]

### **Střecha**

Používá se pouze u vertikálních nádrží. Nádrže se staví většinou v provedení s pevnou střechou nebo se střechou plovoucí. Využití je závislé zejména na druhu skladované kapaliny. Pro skladování netěkavých kapalin a těžkých olejových produktů se používají střechy pevné. Pro těkavé látky se používají střechy plovoucí, aby došlo k minimalizaci parního prostoru, a tím snížení nebezpečí vznícení skladované látky. [1]

### 3.3.2 Typy válcových nádrží

Jedná se zejména o rozdělení dle polohy osy těchto nádrží, podle níž rozlišujeme nádrže vertikální (svislé) a horizontální (vodorovné).

#### Horizontální

Vodorovné nádrže se využívají zejména ke skladování menších objemů médií. Horizontálního typu jsou také mobilní nádrže, např. cisterny pro dopravu PHM po cestách a železnici. Nádrže mohou být na místo určení dodány v kuse a pomocí jeřábu ustaveny, ale jsou zde i případy nádrží, které jsou smontovány z jednotlivých dílců na místě určení. U horizontálních nádob k problémům s přechodem mezi pláštěm a dnem přistupují ještě problémy s uložením nádrže.

Uložení sedlovou podporou je využíváno u krátkých zařízení. V místě podpor nastává největší namáhání pláště, proto bývá nádrž v místě podpor vyztužena. Vyztužení způsobí rozložení silového působení mezi podporou a pláštěm nádoby. Velkou nevýhodou tohoto uložení je zejména prohnutí pláště mezi jednotlivými podporami, které nesmí způsobit ztrátu stability nádoby. Pokud je nádoba umístěna v prostředí s proměnlivou teplotou, pak je nutné, aby alespoň jedna z podpor byla posuvná, a tím nezamezí teplotní namáhání nádrže. [6]



Obrázek 3.4 Horizontální válcová nádrž se sedlovou podporou [8]

Dalším způsobem uložení vodorovných nádrží je v pískovém loži. K mechanické interakci mezi nádrží a podložím dochází ve velké ploše, bez koncentrátorů napětí. Nádrže s uložením tohoto typu mohou být celé umístěny pod povrchem terénu. U těchto nádrží je nutné, vedle provozního zatížení, uvažovat vliv tíhy zeminy. Změny okolní teploty nádrží pod povrchem jsou mnohem menší než u nádrží umístěných na povrchu země, což je velmi příznivé u nádrží na skladování chemikálií s nízkou teplotou varu. Nevýhody tohoto uložení souvisí s kontrolou svarových spojů a izolace nádrží. [9]



Obrázek 3.5 Horizontální válcová nádrž zasypaná [10]

### **Vertikální**

Nádoby tohoto typu se využívají pro velkoobjemové skladování kapalin různého stupně těkavosti bez provozního přetlaku. Namáhání těchto nádob je způsobeno především hydrostatickým tlakem skladované kapaliny. Při provozu může dojít ke kolísání tlaku uvnitř nádoby, například při vypouštění a napouštění nádoby, vlivem změny teploty okolí, apod. Tento provozní tlak nádoby je udržován pomocí ventilů na nízké hodnotě. [9]



Obrázek 3.6 Vertikální válcová nádrž [11]

Dále se můžeme také setkat s vertikálními nádržemi pro izometrické skladování zkapalněných plynů. Tyto nádrže jsou převážně dvouplášťové a dokonale izolované. Teplotu zkapalněného plynu je nutné udržet na hodnotě teploty odpovídající teplotě nasycených par při atmosférickém tlaku, která je nízká. Z důvodu nízkých teplot je třeba použít oceli se zaručenou vrubovou houževnatostí i při nízkých teplotách. Nízká teplota média se udržuje silnou vrstvou izolace, která je především v prostoru mezi pláští nádoby. [1]

## 4 Výpočtové řešení tlakových nádob

Tlakové nádoby, které jsou předmětem předložené práce, mají charakter skořepin. Jedná se tedy o nádoby, jejichž jeden rozměr (tloušťka stěny) je podstatně menší, než zbylé dva rozměry (průměr a délka nádoby). Při řešení deformace a napjatosti se vychází z rovnic rovnováhy uvolněných prvků pro jednotlivé typy zatížení.

V následující části jsou využity zdroje [6, 9, 12].

### 4.1 Teorie skořepin

Skořepiny jsou tělesa, u kterých je tloušťka stěny podstatně menší než průměr a délka tělesa. Předložená práce se zabývá rotačně symetrickými skořepinami. Plocha, která púlí vnější a vnitřní plochu skořepiny, se nazývá střednicová plocha. Průsečnice střednicové plochy s meridiánovou rovinou se nazývá střednicová křivka.

#### 4.1.1 Tvar rotačně symetrické skořepiny

Sestrojíme-li v libovolném bodě A střednicové plochy tečnou rovinu, pak kolmice na tečnou rovinu v bodě A je normálou střednicové plochy v bodě A. Proložíme-li normálou všechny možné roviny, pak tyto roviny protínají střednicovou plochu v prostorových křivkách. Křivky s maximálním a minimálním poloměrem křivosti se nazývají hlavními křivkami a příslušné křivosti hlavními křivostmi ( $k_1$  a  $k_2$ ). Veličina  $K_G$  určená vztahem:

$$K_G = k_1 * k_2 = \frac{1}{r_1} * \frac{1}{r_2} \quad (4.1)$$

se nazývá Gaussova křivost. Z tohoto hlediska lze skořepiny rozdělit do dvou hlavních skupin a to: Skořepiny s nulovou Gaussovou křivostí a Skořepiny s nenulovou Gaussovou křivostí.

- Skořepiny s nulovou Gaussovou křivostí

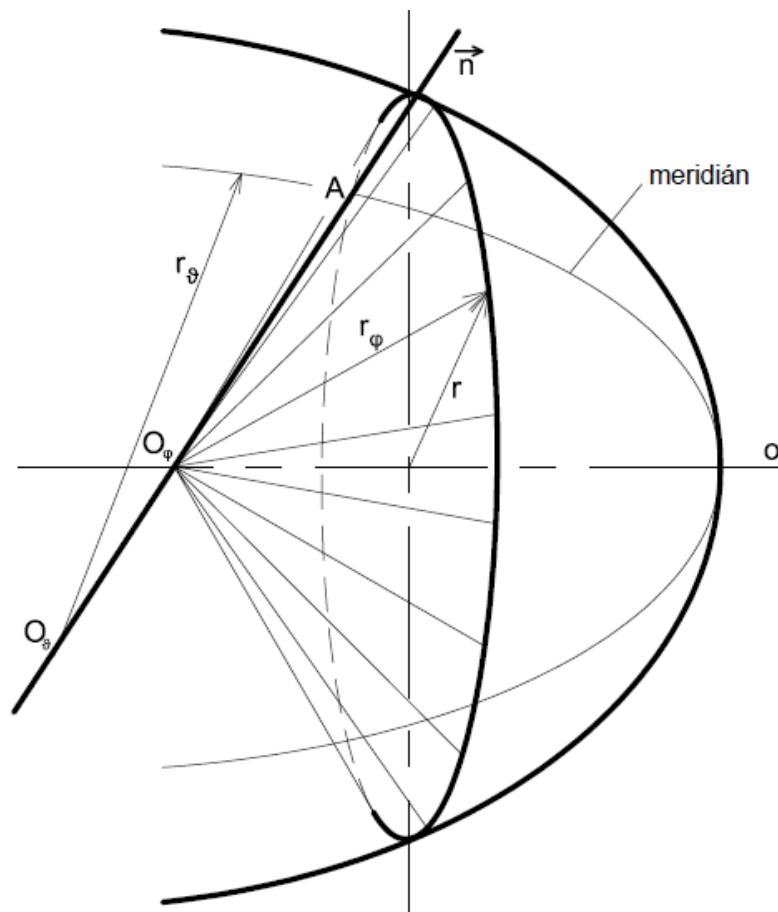
Pro tyto skořepiny platí, že  $K_G = 0$ , tedy jedna z hlavních křivosti musí být rovna 0. Patří zde například kužel nebo válec.

- Skořepiny s nenulovou Gaussovou křivostí

Tyto skořepiny lze rozlišit do dvou hlavních podskupin:

- A. Plochy s kladnou Gaussovou křivostí, které mají oba středy hlavních křivosti na stejné straně vůči hlavní ose.
- B. Plochy se zápornou Gaussovou křivostí mají středy hlavních křivosti na odlišných stranách (jeden ve vnitřní straně a druhý ve vnější).

Velmi častým případem skořepin jsou rotačně symetrické skořepiny, jejichž střednicová plocha je vytvořena rotací křivky kolem osy rotace. Mezi tyto skořepiny patří právě většina tlakových nádob a zásobníků. Obecný tvar této skořepiny je znázorněn na obr. 4.1.



Obrázek 4.1 Obecný tvar rotačně symetrické skořepiny [9]

## 4.2 Rotačně symetrická skořepina

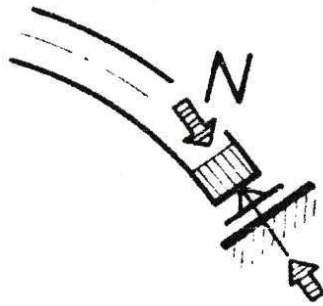
Vzhledem k velmi malé tloušťce stěny vůči ostatním rozměrům skořepiny je složka napětí ve směru kolmém na střednicovou rovinu zanedbatelně malá. Z čehož vyplývá, že u těchto těles bývají uvažovány pouze 2 složky napětí.

Z hlediska napjatosti konstrukce je nejvýhodnějším řešením docílit membránového stavu napjatosti, což znamená, že je průběh napětí po celé tloušťce konstantní. Pak se tedy vliv zatížení projevuje pouze ve významu vnitřních sil. Tyto síly jsou pak nazývány membránovými silami.

Membránový stav skořepiny je možné docílit pouze tehdy, pokud je rovnováha mezi zatížením skořepiny a jejím uložením dosažena pouze za vzniku membránových sil. Z tohoto důvodu je potřeba zachovat jisté konstrukční zásady:

- A. Vyhýbat se v konstrukčním řešení náhlých lomů a nespojitostí.
- B. Uložení skořepiny musí být provedeno tak, aby tato rovnováha sil mohla vzniknout pouze vlivem těchto membránových sil, což vede ke konstrukci uložení v tečném směru (kolmo na střednici), viz obrázek 4.2.
- C. Potřeba zachování volné deformace pláště skořepiny, aby v jednotlivých podporách a výztuhách nedocházelo, vlivem deformace, ke vzniku ohybových momentů a tímto k porušení membránového stavu (využití kluzných podpor).

- D. Potřeba přenášet zatížení pouze ve směru tečny ke střednici, všechny ostatní směry zatížení vedou ke vzniku ohybového momentu.

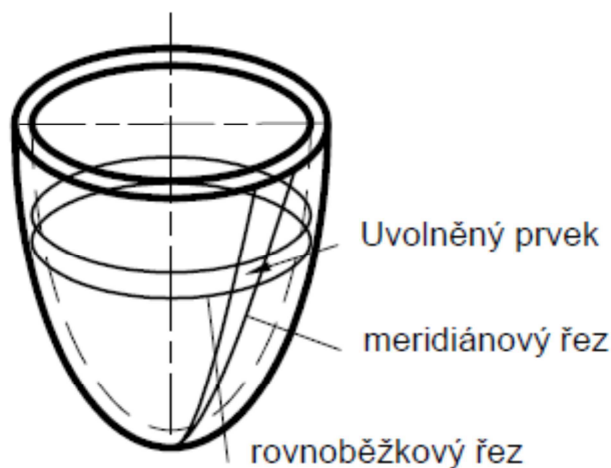


Obrázek 4.2 Vazba v tečném směru vůči skořepině [9]

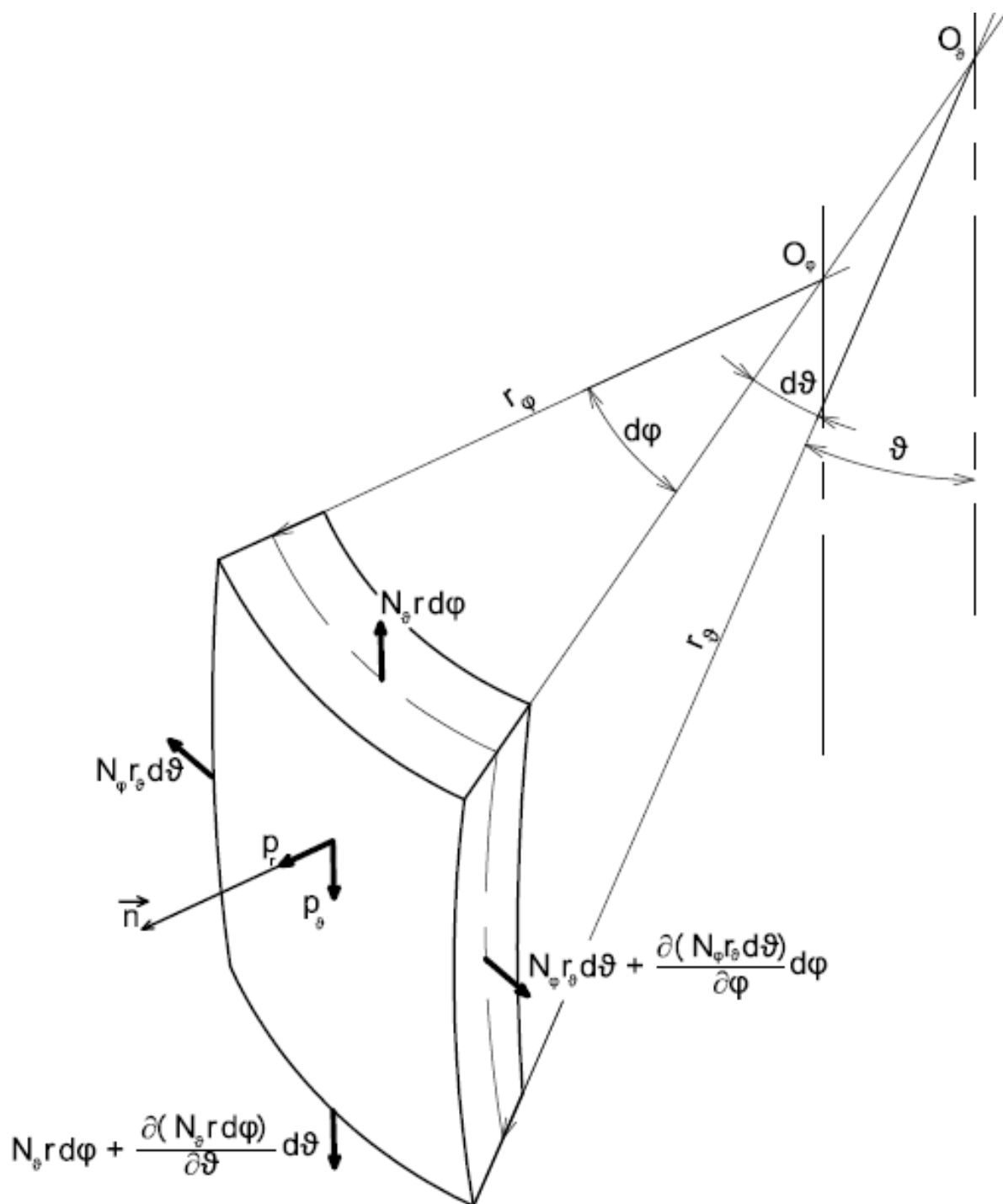
### 4.3 Rovnice rovnováhy rotačně symetrické skořepiny

#### 4.3.1 Rovnice rovnováhy skořepiny osově symetrického zatížení

K určení namáhání skořepiny je nutné vyjádření vnitřních sil z rovnic rovnováhy uvolněného prvku (viz obr. 4.4) a následně určení odpovídajících napětí. Což následně vede k možnosti dimenzování skořepin. Pro zjištění vnitřních sil jsou zapotřebí rovnice rovnováhy v jednotlivých směrech (směr radiální ve směru normály ( $r$ ), směr meridiánový ( $\vartheta$ ) a směr rovnoběžkový ( $\varphi$ )). Ke zjištění těchto rovnic je zapotřebí uvolnění prvku skořepiny (obrázek 4.4), což provedeme jednotlivými řezy této skořepiny (obrázek 4.3).



Obrázek 4.3 Řezy skořepinou [12]



Obrázek 4.4 Uvolněný prvek skořepiny [9]

A. Rovnice rovnováhy v normálovém směru uvolněného prvku

$$N_\varphi r_\varphi \sin \vartheta d\varphi d\vartheta + N_\vartheta r_\vartheta d\varphi d\vartheta - p_r r_\vartheta d\varphi d\vartheta = 0 \quad (4.2)$$

Následným dosazením za  $r = r_\varphi \sin \vartheta$  dostaneme výsledný tvar rovnice:

$$\frac{N_\varphi}{r_\varphi} + \frac{N_\vartheta}{r_\vartheta} = p_r \quad (4.3)$$

Tento vztah (4.3) je označován jako Laplaceova rovnice.

B. Z rovnice rovnováhy uvolněného prvku ve směru osy skořepiny obdržíme následující vztah pro membránovou sílu ve směru meridiánu

$$N_{\vartheta} = \frac{Q}{2\pi r \sin \vartheta} \quad (4.4)$$

Kde Q je výsledná síla působící v ose skořepiny<sup>1</sup>.

Po dosazení  $N_{\vartheta}$  do vztahu 4.3 lze zjistit velikost  $N_{\varphi}$ . Pro zjištění velikosti napětí způsobených silou Q stačí výsledné hodnoty membránových sil dosadit do rovnice 4.5.

$$\sigma_i = \frac{N_i}{\delta} \quad (4.5)$$

Kde:

$\sigma$  je normálové napětí

$i$  je index napětí, které je vyvoláno silou působící v daném směru ( $\vartheta$  a  $\varphi$ )

$\delta$  je tloušťka stěny

#### 4.3.2 Rovnice rovnováhy skořepiny při přetlaku či podtlaku

V případě zatížení pouze vnitřním přetlakem či podtlakem se složky zatížení, působící na elementární prvek, redukují, jelikož je složka  $p_{\vartheta}$  rovna 0. Zůstává pouze složka  $p_r$ , která je konstantní a rovna danému přetlaku či podtlaku. Přetlak má smysl působení stejný jako směr působení  $p_r$  v obrázku 4.4, tudíž je uvažován jako kladný.

#### 4.3.3 Rovnice rovnováhy skořepiny při hydrostatickém tlaku

Také v případě hydrostatického tlaku je složka zatížení  $p_{\vartheta}$  rovna 0, avšak složka  $p_r$  není konstantní, ale mění se zvyšující se výškou hladiny kapaliny. Platí pro ni vztah 4.6.

$$p_r = \gamma_h h \quad (4.6)$$

Kde  $\gamma_h$  je měrná tíha kapaliny [ $\text{N/m}^3$ ] a  $h$  je výška hladiny kapaliny [m]. Dále pak, stejně jako v případě přetlaku platí, že se hodnota považuje za kladnou, protože má smysl vnější normály.

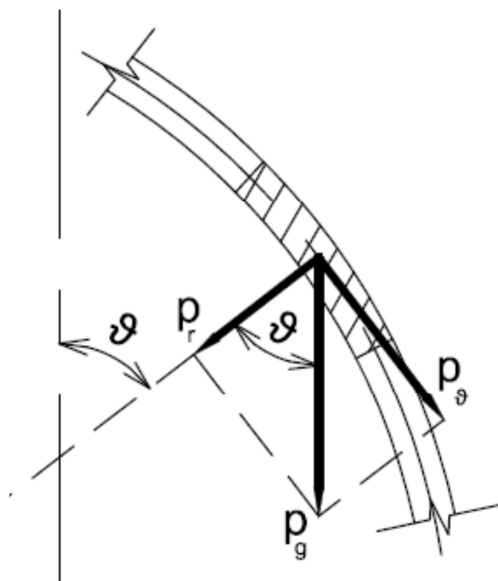
#### 4.3.4 Rovnice rovnováhy skořepiny zatížené vlastní tíhou

Pokud je podstatný vliv vlastní tíhy skořepiny, tak je nutno gravitační zrychlení rozložit do jednotlivých směrů. Jestliže je osa skořepiny totožná se směrem gravitačního zrychlení, pak je potřeba rozložit tíhu do směru normálového a meridiánového, jak je patrné z obrázku 4.5.

<sup>1</sup> Pro Q dále platí:  $Q = Q_1 + Q_2$ , kde

$Q_1 = \int 2\pi r_{\vartheta} (p_r \cos \vartheta - p_{\vartheta} \sin \vartheta) d\vartheta$ , pak  $Q_1$  je průmět všech vnějších sil působící na plášť do osy skořepiny

$Q_2 = 2\pi C$ , pak  $Q_2$  je součet všech vnějších sil působící na horní okraj, v případě uzavřené horní části je tato hodnota rovna 0.



Obrázek 4.5 Rozklad směru zatížení od gravitačních sil [6]

Výsledné hodnoty jednotlivých směrů zatížení jsou

$$\begin{aligned} p_r &= -p_g \cos \vartheta \\ p_\vartheta &= p_g \sin \vartheta \end{aligned} \quad (4.7)$$

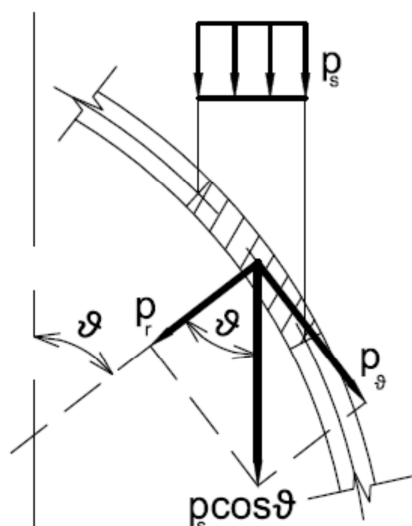
Kde  $p_g$  je tíha jedné plošné jednotky skořepiny [ $\text{N/m}^2$ ].

#### 4.3.5 Rovnice rovnováhy skořepiny zatížené sněhem

Řešení silových účinků skořepiny zatížené sněhem je posuzováno obdobně jako zatížení vlastní tíhou skořepiny. U zatížení vlastní tíhou skořepiny je uvažována tíha na plošnou jednotku skořepiny, kdežto u zatížení sněhem je nutné uvažovat tíhu sněhu, vztahující se na jednotku plochy. Tíha sněhu pak, oproti zatížení vlastní tíhou, působí na půdorys plochy, což vyjadřuje závislost na sklonu plochy (na ploché stěně je větší vrstva sněhu než na šikmé ploše). Toto zatížení lze rozložit (viz obr. 4.6) do působení ve směru normály a meridiánu následovně

$$\begin{aligned} p_r &= -p_s (\cos \vartheta)^2 \\ p_\vartheta &= p_s \sin \vartheta \cos \vartheta \end{aligned} \quad (4.8)$$

Kde  $p_s$  je tíha sněhu, připadající na jednotku plochy [ $\text{N/m}^2$ ].



Obrázek 4.6 Rozklad zatížení tíhou sněhu do normál. a merid. směru [6]

#### 4.4 Rovnice deformace

Ve většině konstrukcí je potřeba zjistit deformace v jednotlivých směrech v závislosti na jeho zatížení. Velikost deformací může mít totiž vliv na funkčnost zařízení. Pro zjištění těchto velikostí je nutné vyjádřit deformaci střednicové plochy.

##### 4.4.1 Stanovení základních rovnic deformace

Z Hookova zákona lze určit velikost deformací  $\varepsilon$  (délkové) a  $\gamma$  (úhlové). Na technické rozlišovací úrovni je  $\sigma_r \approx 0$ . Poté úpravou Hookova zákona lze stanovit hodnoty deformací.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\vartheta} &= \frac{1}{E\delta} (N_{\vartheta} - \mu N_{\varphi}) \\ \varepsilon_{\varphi} &= \frac{1}{E\delta} (N_{\varphi} - \mu N_{\vartheta}) \\ \gamma &= \frac{2(1 + \mu)}{E\delta} * T\end{aligned}\quad (4.9)$$

Kde  $E$  je modul pružnosti v tahu,  $\delta$  tloušťka stěny skořepiny,  $\mu$  je Poissonova konstanta a  $T$  jsou smykové síly.

Vztahy mezi deformací a posuvy střednice skořepiny ve všech směrech jsou značeny následovně:

- $w$  posuv ve směru normály
- $v$  posuv ve směru meridiánu
- $u$  posuv ve směru rovnoběžky

Pro osově symetrické zatížení mají vztahy pro přetvoření následující tvar<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\vartheta} &= \frac{1}{r_{\vartheta}} \left( w + \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right) \\ \varepsilon_{\varphi} &= \frac{1}{r_{\varphi}} (w + v \cdot \cot \vartheta) \\ \gamma &= 0\end{aligned}\tag{4.10}$$

#### 4.4.2 Válcová skořepina s vnitřním přetlakem

Tomuto případu zatížení odpovídá kapitola 4.3.2, tedy jediným zatížením je  $p_r$ . Tato hodnota je shodná s hodnotou přetlaku v nádobě.

Válcové nádobě pak odpovídají tyto hodnoty poloměrů křivosti:

$$r_{\vartheta} = \infty, r_{\varphi} = r$$

Z rovnice statické rovnováhy (4.3 a 4.4)

$$\begin{aligned}\frac{N_{\varphi}}{r_{\varphi}} + \frac{N_{\vartheta}}{r_{\vartheta}} &= p_r \\ N_{\vartheta} &= \frac{p_r \pi r^2}{2\pi r}\end{aligned}$$

Obdržíme vztahy pro membránové síly:

$$\begin{aligned}N_{\vartheta} &= \frac{p_r r}{2} \\ {}^3N_{\varphi} &= p_r r\end{aligned}\tag{4.11}$$

Pro výpočet  $\Delta r$  postačí dosadit membránové síly do vztahu 4.9 pro  $\varepsilon_{\varphi}$  a vynásobit poloměrem válce  $r$ . Po algebraické úpravě<sup>4</sup> obdržíme vztah:

$$\Delta r = \frac{p_r r^2}{E\delta} \left( 1 - \frac{\mu}{2} \right)\tag{4.12}$$

#### 4.4.3 Kulová nádoba s vnitřním přetlakem

Pokud má tlaková nádoba tvar koule zatížené vnitřním přetlakem či podtlakem, pak je postup pro výpočet membránových sil a deformace obdobný jako v případě válce. Zatížením je  $p_r$  působící v normálovém směru.

Pro kouli pak platí tyto vztahy mezi jednotlivými poloměry křivosti:

$$r_{\vartheta} = r_{\varphi} = r_0$$

<sup>2</sup> Odvození vztahů pro deformaci v závislosti na přemístění střednice:

$$\varepsilon_{\vartheta} = \frac{\Delta ds_{\vartheta}}{ds_{\vartheta}} = \frac{ds_{\vartheta} - ds_{\vartheta}}{ds_{\vartheta}} = \frac{\left(1 + \frac{w}{r_{\vartheta}}\right)(r_{\vartheta} d\vartheta + \frac{\partial v}{\partial \vartheta} d\vartheta) - r_{\vartheta} d\vartheta}{r_{\vartheta} d\vartheta} = \frac{1}{r_{\vartheta}} \left( \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + w + \frac{w}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right) = \frac{1}{r_{\vartheta}} \left[ w + \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \left( 1 + \frac{w}{r} \right) \right] = \frac{1}{r_{\vartheta}} \left( w + \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right)$$

U tlakových nádob je posuv vzhledem k poloměru malý a poměr  $\frac{w}{r}$  vzhledem k 1 nepodstatný.

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{\Delta ds_{\varphi}}{ds_{\varphi}} = \frac{ds_{\varphi} - ds_{\varphi}}{ds_{\varphi}} = \frac{(rd\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} d\varphi) \left( 1 + \frac{v}{r} \cos \vartheta + \frac{w}{r} \sin \vartheta \right) - rd\varphi}{rd\varphi} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} + v \cos \vartheta + w \sin \vartheta \right) = \frac{1}{r_{\varphi}} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} + v \cot \vartheta + w \right)$$

<sup>3</sup> Odvozeno z rovnice 4.3, jelikož hodnota  $\lim_{r_{\vartheta} \rightarrow \infty} \frac{N_{\vartheta}}{r_{\vartheta}} = 0$ .

<sup>4</sup> Odvození výsledného vztahu deformace válcové nádoby s vnitřním přetlakem:

$$\Delta r = \varepsilon_{\varphi} r = \frac{r}{E\delta} (N_{\varphi} - \mu N_{\vartheta}) = \frac{r}{E\delta} (p_r r - \frac{\mu p_r r}{2}) = \frac{p_r r^2}{E\delta} \left( 1 - \frac{\mu}{2} \right)$$

Vnitřní síly určíme z Laplaceovy rovnice a rovnice rovnováhy v osovém směru:

$$\frac{N_\varphi}{r_0} + \frac{N_\vartheta}{r_0} = p_r$$

$$N_\vartheta = \frac{p_r \pi r_0^2}{2\pi r_0}$$

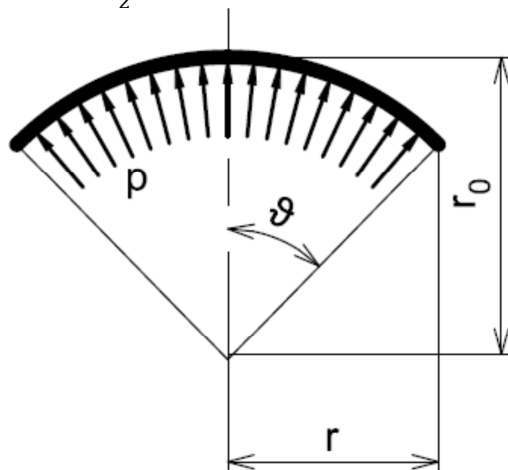
Pro membránové síly platí:

$$N_\varphi = N_\vartheta = \frac{p r_0}{2} \quad (4.13)$$

Následné stanovení deformace kulové skořepiny obdržíme obdobně jako v předchozím případě. Výsledný vztah má tvar<sup>5</sup>:

$$\Delta r = \frac{p r^2}{2E\delta \sin \vartheta} (1 - \mu) \quad (4.14)$$

Kde  $r$  je vzdálenost od osy symetrie (poloměr vrchlíku) a  $\vartheta$  je úhel patrný z obrázku 4.7. Pokud  $r = r_0$  ( $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ), pak lze stanovit deformaci na poloměru koule.



Obrázek 4.7 Kulová nádoba s vnitřním přetlakem

#### 4.4.4 Kulová skořepina zatížená vlastní tíhou

Zatížení vlastní tíhou a rozložení jeho působení do směru normálového a meridiánového bylo stanoveno v kapitole 4.3.4. Jednotlivé vztahy pro zatížení v těchto směrech jsou dány rovnicemi 4.7. Stanovení membránových sil je následující:

Soustava pro řešení membránových sil z rovnic 4.3 a 4.4 má následující tvar<sup>6</sup>:

$$\frac{N_\varphi}{r_0} + \frac{N_\vartheta}{r_0} = -p_g \cos \vartheta$$

$$N_\vartheta = \frac{-p_g 2\pi r_0^2 (1 - \cos \vartheta)}{2\pi r \sin \vartheta}$$

<sup>5</sup> Odvození výsledného vztahu deformace kulové nádoby s vnitřním přetlakem:

$\Delta r = \varepsilon_\varphi r = \frac{r}{E\delta} (N_\varphi - \mu N_\vartheta) = \frac{r}{E\delta} \left( \frac{p r_0}{2} - \mu \frac{p r_0}{2} \right) = \frac{p r_0 r}{E\delta} \left( 1 - \frac{\mu}{2} \right)$ , po dosazení za  $r_0 = \frac{r}{\sin \vartheta}$  dostaneme výsledný tvar rovnice 4.14

<sup>6</sup> Odvození vnitřní meridiánové síly, rovnice 4.4:

$$N_\vartheta = \frac{Q}{2\pi r \sin \vartheta}$$

$Q = -p_g * U$ , kde  $U$  je plocha, na které působí zatížení (pro kulový vrchlík  $U = 2\pi r_0^2 (1 - \cos \vartheta)$ ).

Pro její řešení pak platí:

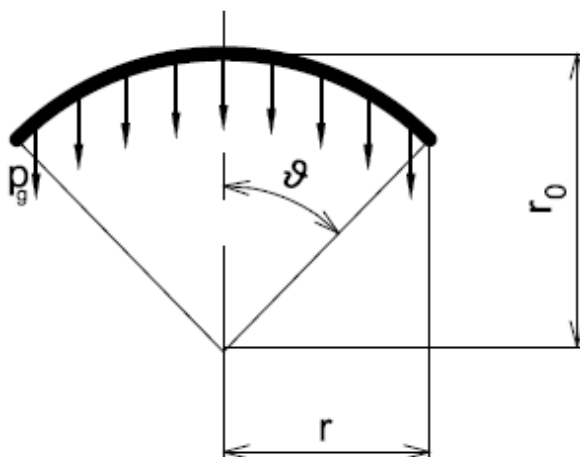
$$N_{\vartheta} = \frac{-p_g r_0}{1 + \cos \vartheta}$$

$$N_{\varphi} = -p_g r_0 \left( \cos \vartheta - \frac{1}{1 + \cos \vartheta} \right) \quad (4.15)$$

Výsledný vztah pro deformaci po obdobných úpravách jako v minulých případech je tento:

$$\Delta r = \frac{p_g r r_0}{E \delta} \left( \cos \vartheta - \frac{\mu + 1}{1 + \cos \vartheta} \right) \quad (4.16)$$

Kde  $r$  je vzdálenost od osy symetrie (poloměr vrchlíku) a úhel  $\vartheta$  je patrný z obrázku 4.8. Dosazením za  $r = r_0$ , se stanoví deformace poloměru koule.



Obrázek 4.8 Kulová nádoba zatížená vlastní tíhou

#### 4.4.5 Kulová skořepina zatížená sněhem

Tento typ zatížení byl popsán v kapitole 4.3.5 a rozložení zatížení do meridiánového a normálového směru popisují vztahy 4.10. U kulové skořepiny jsou poloměry křivosti meridiánu i rovnoběžky shodné a jejich hodnota je  $r_0$ .

Soustava rovnic využitím 4.3 a 4.4 vypadá následovně:

$$\frac{N_{\varphi}}{r_0} + \frac{N_{\vartheta}}{r_0} = -p_s (\cos \vartheta)^2$$

$$N_{\vartheta} = \frac{-p_s \pi r^2}{2\pi r \sin \vartheta}$$

Řešení této soustavy rovnic lze odvodit<sup>7</sup> takto:

$$N_{\vartheta} = -\frac{p_s r_0}{2}$$

$$N_{\varphi} = -p_s r_0 \left( \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right) \quad (4.17)$$

<sup>7</sup> Odvození membránových sil pro kouli zatíženou sněhem:

$Q = p_s * U$ , kde  $U$  je plocha, na které působí zatížení, pak z rovnice 4.4 vyplývá:

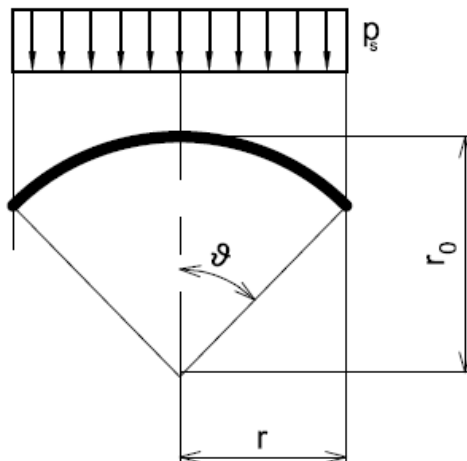
$N_{\vartheta} = \frac{-p_s \pi r^2}{2\pi r \sin \vartheta}$  dosazením za  $r = r_0 \sin \vartheta$  obdržíme výsledný vztah udaný v 4.17

Vztah pro  $N_{\varphi}$  pak obdržíme dosazením  $N_{\vartheta}$  do první rovnice.

Velikost deformace pak plyne z tohoto vztahu<sup>8</sup>:

$$\Delta r = \frac{p_s r r_0}{2E\delta} (1 + \mu - 2 \cos^2 \vartheta) \quad (4.18)$$

Kde jednotlivé symboly jsou patrné z obrázku 4.9 (obdobné jako v předchozích případech).



Obrázek 4.9 Kulová nádoba zatížená sněhem

#### 4.5 Okrajové poruchy membránového stavu

Tlakové nádoby se skládají z pláště a den. V důsledku napojení těchto prvků s různou tuhostí dochází v jejich přechodu k porušení membránového stavu. Vedle membránových sil vznikají v přechodové oblasti i momenty. Z funkčního hlediska jsou skořepiny opatřeny vstupními a výstupními hrdly s přírubami, kontrolními otvory a jinými prvky, které také způsobují porušení membránového stavu.

##### 4.5.1 Základní rovnice rovnováhy válcové momentové skořepiny

Uvolněný prvek válcové momentové skořepiny je znázorněn na obrázku 4.10. Výsledné vnitřní účinky určíme z použitelných rovnic rovnováhy, kterými jsou: Silová rovnice rovnováhy v osovém a normálovém směru a momentová rovnice k ose x. Pro odvození základních rovnic rovnováhy je potřeba nejprve zavést osový systém:

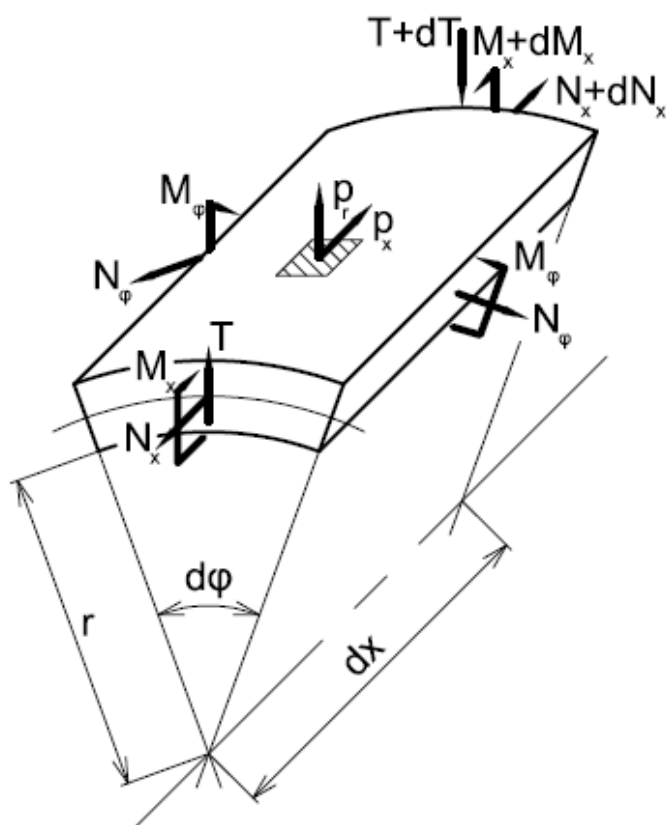
- x ve směru osy válce
- $\varphi$  ve směru obvodu
- r ve směru normály

Z hlediska osové symetrie pak vyplývá, že síla  $N_\varphi$  a moment  $M_\varphi$  budou konstantní.

<sup>8</sup> Odvození vztahu pro deformaci:

$$\Delta r = \varepsilon_\varphi r = \frac{r}{E\delta} (N_\varphi - \mu N_\vartheta) r = \frac{r}{E\delta} \left[ -p_s r_0 \left( \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right) + \mu \frac{p_s r_0}{2} \right] = \frac{p_s r r_0}{E\delta} \left( \frac{1}{2} - \cos^2 \vartheta + \frac{\mu}{2} \right)$$

Následným vytknutím 1/2 získáme konečný vztah rovnice 4.18.



Obrázek 4.10 Uvolněný elementární prvek válcové momentové skořepiny [12]  
Pak ve směru normály a osy lze napsat tyto rovnice<sup>9</sup> rovnováhy:

$$\frac{N_\varphi}{r} - \frac{dT}{dx} = p_r(x) \quad (4.19)$$

$$\frac{dN_x}{dx} = -p_x$$

Pro momentovou rovnici pak platí vztah:

$$\frac{dM_x}{dx} = T \quad (4.20)$$

Rovnice 4.19 a 4.20 lze, využitím vztahů pro přetvoření<sup>10</sup> (obvodové a osové) a napětí<sup>11</sup> (osové a obvodové) a zavedením ohybové tuhosti skořepiny K a konstanty  $\beta$ <sup>12</sup>, stanovit jako závislost mezi osovým posuvem w a vnitřními účinky.

$$\frac{d^4w}{dx^4} + 4\beta^4w = \frac{p(x)}{K} \quad (4.21)$$

<sup>9</sup> Rovnice rovnováhy ve směru normály:

$Trd\varphi - (T + dT)rd\varphi - N_\varphi dx d\varphi + prd\varphi dx = 0$ , následným vydělením rovnice hodnotou  $rd\varphi dx$  a jednoduchou úpravou získáme výsledný tvar rovnice 4.19.

<sup>10</sup>  $\varepsilon_\varphi = \frac{w}{r}$  přetvoření ve směru obvodovém,  $\varepsilon_r = \frac{dw}{dr}$  přetvoření ve směru normály,

$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} - \frac{\delta}{2} \frac{d^2w}{dx^2}$  přetvoření ve směr osy, kde u je posuv střednicové plochy ve směru osy x.

<sup>11</sup>  $\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_\varphi)$  je vztah pro napětí ve směru osy skořepiny,

$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_\varphi + \mu\varepsilon_x)$  je vztah pro napětí ve směru obvodovém.

<sup>12</sup> Ohybová tuhost skořepiny K:  $K = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$  [Nmm<sup>2</sup>], konstanta  $\beta$ :  $\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{r^2\delta^2}}$  [mm<sup>-1</sup>].

Rovnice 4.21 je nehomogenní lineární diferenciální rovnicí čtvrtého řádu, pro kterou platí, že její řešení se skládá ze součtu homogenního tvaru řešení a partikulárního řešení. Řešení této rovnice je pak následující:

$$w = e^{-\beta x}(C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x) + e^{\beta x}(C_3 \sin \beta x + C_4 \cos \beta x) + \frac{pr^2}{E\delta} \quad (4.22)$$

Kde  $p$  je tlak působící uvnitř nádoby, který je konstantní anebo lineárně závislý na  $x$ .

### Krátká a dlouhá skořepina

Změna membránové napjatosti vlivem okrajové poruchy je omezena na určitou délku skořepiny. Pokud se změny membránové napjatosti dvou okrajových poruch protínají, mluvíme o krátké skořepině, pokud se neprotínají, nazýváme skořepinu dlouhou. Délka ovlivněné oblasti okrajovou poruchou je přibližně určena vztahem 4.23a. Minimální délka dlouhé skořepiny je určena vztahem 4.23b. Pro dlouhou skořepinu pak platí, že jsou konstanty  $C_3$  a  $C_4$  v rovnici 4.22 nulové a obecné řešení pak bude dáno rovnicí 4.24

$$x = 1,56\sqrt{r\delta} \quad l > 3\sqrt{r\delta} \quad (4.23)$$

$$w = e^{-\beta x}(C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x) + \frac{pr^2}{E\delta} \quad (4.24)$$

Pak pro ohybové momenty v jednotlivých směrech platí následující rovnice:

$$M_x = K \left[ \frac{d^2 w}{dx^2} \right] \quad (4.25)$$

$$M_\varphi = K \left[ \mu \frac{d^2 w}{dx^2} \right] \quad (4.26)$$

Z těchto ohybových momentů lze pak využitím rovnice 4.27 získat vyvolaná jednotlivá normálová ohybová napětí.

$$\sigma_i = \frac{M_i z}{J} \quad (4.27)$$

Kde  $z$  je vzdálenost od střednice a  $J$  je osový kvadratický moment setrvačnosti příčného průřezu jednotkové délky a výšky  $\delta$  pruhu skořepiny<sup>13</sup>. Ohybové napětí pak má maximum v  $z = \frac{\delta}{2}$ .

Vliv ohybového napětí od místa okrajové poruchy prudce klesá a ve vzdálenosti  $x$  (viz rovnice 4.23a) je jeho velikost již zanedbatelně malá. Ve větší vzdálenosti než  $x$  je ve skořepině pouze membránová napjatost.

<sup>13</sup> Osový kvadratický moment setrvačnosti příčného průřezu jednotkové délky a výšky  $\delta$  pruhu skořepiny je dán touto rovnicí:

$J = \frac{1 \cdot \delta^3}{12}$ , kde  $\delta$  je tloušťka skořepiny.

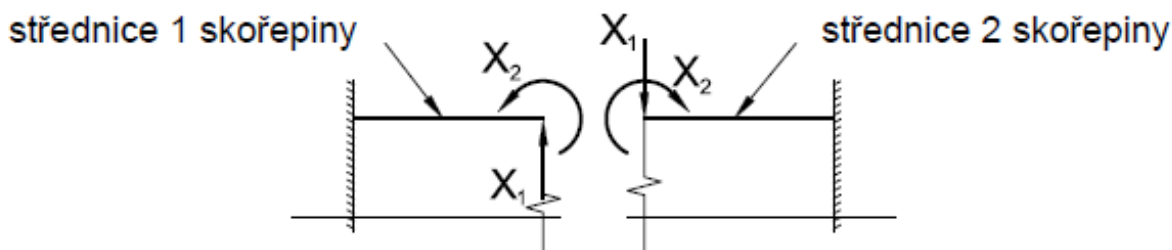
#### 4.5.2 Styk dvou různých těles

Pokud je zdrojem ohybového momentu spojení dvou těles s různou tuhostí (spojení dvouválcových plášťů různé tuhosti, přivaření dna k plášti apod.), pak je nutné k vyšetření výsledných vnitřních účinků nejprve v místě styku provést uvolnění těles (obr. 4.11) a následně stanovit deformační podmínky spojitosti a hladkosti v místě styku těles. Podmínky spojitosti a hladkosti můžeme vyjádřit pomocí kanonických rovnic ve tvaru 4.28.

$$\begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \delta_{1p} &= 0 \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \delta_{2p} &= 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Kde první rovnice vyjadřuje spojitost ve svislém směru deformace a druhá spojitost ve smyslu plynulého přechodu (společnou hladkost).

- $X_1$  síla v místě styku
- $X_2$  moment v místě styku
- $\delta_{11}$  součet posuvů obou volných konců vlivem jednotkových sil
- $\delta_{12} = \delta_{21}$  součet svislých posuvů vlivem momentů/pootočení vlivem sil
- $\delta_{1p}$  posuv ve směru síly  $X_1$  vlivem zatížení
- $\delta_{22}$  součet pootočení obou volných konců vlivem jednotkového momentu
- $\delta_{2p}$  natočení ve směru momentu  $X_2$  vlivem zatížení



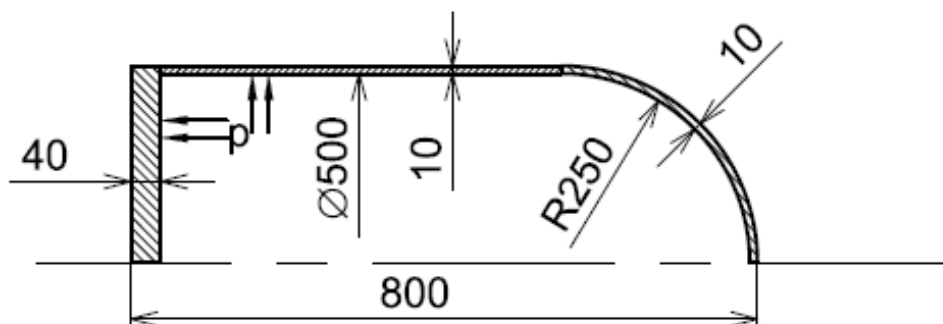
Obrázek 4.11 Uvolněná skořepina

## 5 Stanovení napjatosti ve vybraných částech nádoby

Bude-li uvažována válcová nádoba rozměrů daných tabulkou 1, pak ke stanovení výsledných hodnot napětí a deformace je zapotřebí nejprve vyřešit velikost vnitřních silových účinků.

Tabulka 1: *Parametry tlakové nádoby*

Parametry tlakové nádoby a zatížení			
Délka	L	[mm]	800
Vnitřní průměr	D	[mm]	500
Tloušťka stěny pláště a kulového dna	t	[mm]	10
Tloušťka plochého dna	t <sub>1</sub>	[mm]	40
Vnitřní přetlak	p	[PN] [MPa]	40 4



Obrázek 5.1 Náčrt tvaru nádoby

### 5.1 Analytické řešení

#### 5.1.1 Stanovení napjatosti membránové části nádoby

Ze zadaných parametrů a vztahu 4.23b vyplývá, že těleso má charakter dlouhé skořepiny. V důsledku nestejných tuhostí pláště a dna jsou v místě jejich spojení okrajové poruchy.

$$l > 151,5 \text{ mm}$$

Dále pak vlivem vnitřního přetlaku lze stanovit pomocí rovnic 4.11 tyto vnitřní účinky:

$$N_{\theta} = \frac{p_r r}{2} = 510 \text{ N/mm} \qquad N_{\varphi} = p_r r = 1020 \text{ N/mm}$$

Tyto vnitřní účinky pak způsobí tato napětí (rovnice 4.5):

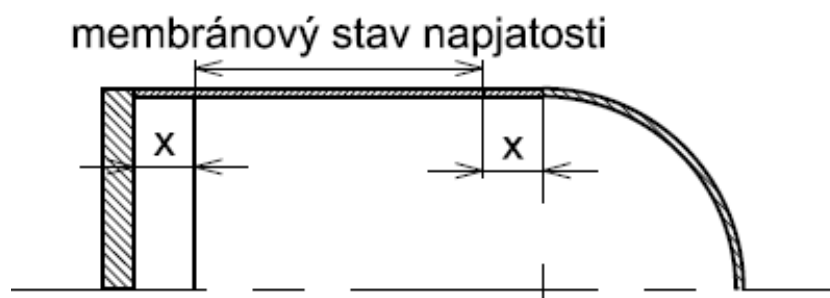
$$\sigma_{\theta} = \frac{N_{\theta}}{t} = 51 \text{ MPa} \qquad \sigma_{\varphi} = \frac{N_{\varphi}}{t} = 102 \text{ MPa}$$

Výsledné přetvoření nádoby vlivem přetlaku pak lze získat ze vztahu 4.12. Nádoba se roztáhne o 0,103 mm (za předpokladu využití oceli a dosazením za  $\mu = 0,33$  a  $E = 210$  GPa).

$$\Delta r = \frac{p r^2}{E t} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) = 0,103 \text{ mm}$$

Tato velikost napětí a přetvoření platí pouze v úseku nádoby, kde je zachován membránový stav napjatosti. Tedy na válcovém plášti ve vzdálenosti nejméně 79 mm ode dna. Tato vzdálenost byla určena ze vztahu 4.23a. Tento úsek je pak znázorněn na obrázku 5.2.

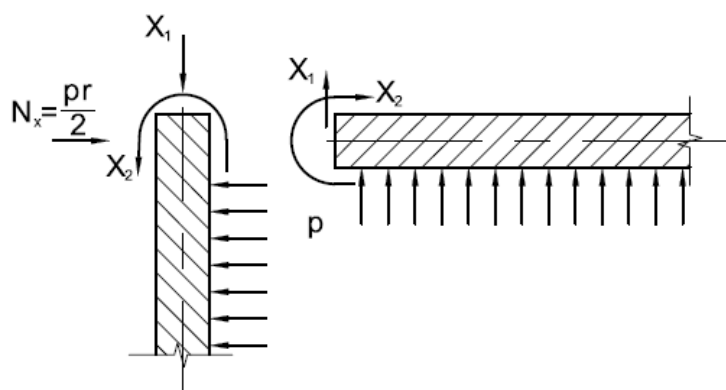
$$x = 1,56\sqrt{r t} = 79 \text{ mm}$$



Obrázek 5.2 Znázornění oblasti membránové napjatosti

### 5.1.2 Ploché dno

V přechodu válcového pláště a plochého dna vzniká ohybový moment. Dle kapitoly 4.5.2 je nutné nejprve provést uvolnění a sestavení kanonických rovnic (4.28). Pokud ploché dno považujeme za dostatečně tuhé, pak lze jeho stlačitelnost působením síly  $X_1$  považovat za nepodstatnou.



Obrázek 5.3 Uvolnění plochého dna [9]

Soustava kanonických rovnic pro toto uvolnění má následující tvar:

$$X_1 \frac{1}{2K\beta^3} + X_2 \frac{1}{2K\beta^2} + \frac{pr^2}{Et} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) = 0$$

$$X_1 \frac{1}{2K\beta^2} + X_2 \left(\frac{1}{K\beta} + \frac{r}{B(1 + \mu)}\right) - \frac{pr^3}{8B(1 + \mu)} = 0$$

Tuhost skořepiny (K) a tuhost desky (B) lze stanovit následovně:

$$\begin{aligned} \text{Tuhost pláště:} & & \text{Tuhost dna:} \\ K = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} = 19,639 * 10^7 \text{ Nmm} & & B = \frac{Et_1^3}{12(1-\mu^2)} = 1,257 * 10^9 \text{ Nmm} \end{aligned}$$

Konstanta  $\beta$  má pak tuto hodnotu:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{r^2 t^2}} = 0,025 \text{ mm}^{-1}$$

Výsledné řešení soustavy kanonických rovnic je:

$$\begin{aligned} X_2 &= \frac{\frac{p(1-\frac{\mu}{2})}{4\beta^3} + \frac{pr^3}{8(1+\mu)} * \frac{t^3}{t_1^3}}{\frac{1}{2\beta} + \frac{r}{(1+\mu)} * \frac{t^3}{t_1^3}} = 6,544 * 10^3 \text{ Nmm/mm} \\ X_1 &= -\beta \left[ X_2 + \frac{p}{2\beta^2} \left( 1 - \frac{\mu}{2} \right) \right] = -231,665 \text{ N/mm} \end{aligned}$$

Pak dosazením do rovnic 4.24, 4.25 a 4.26 lze stanovit průběhy posuvů a momentů:

$$w = \frac{1}{2K\beta^2} \left[ X_2 * e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x) + \frac{1}{\beta} X_1 e^{-\beta x} (\cos \beta x) \right] + \frac{r^2}{Et} \left( p - \mu \frac{N_x}{r} \right)$$

$$M_x = X_2 e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) + \frac{1}{\beta} X_1 e^{-\beta x} (\sin \beta x)$$

$$M_\varphi = \mu \left[ X_2 e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) + \frac{1}{\beta} X_1 e^{-\beta x} (\sin \beta x) \right]$$

Maximální ohybový moment je ve vzdálenosti  $x \approx 0,248 \text{ mm}$ . Tato hodnota byla zjištěna pomocí hledání extrému předchozí funkce  $M_x$ . V této vzdálenosti jsou tato maximální normálová napětí pláště:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{t} + \frac{6M_x}{t^2} = 443,262 \text{ MPa}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{N_\varphi}{t} + \frac{6M_\varphi}{t^2} = 231,447 \text{ MPa}$$

Ještě je však nutné zjistit velikost napětí v deskovém dně. V tomto případě lze vycházet ze vztahů pro rotačně symetrickou desku. V desce bude maximální moment na ose symetrie ( $r = 0 \text{ mm}$ ) a jeho hodnota bude:

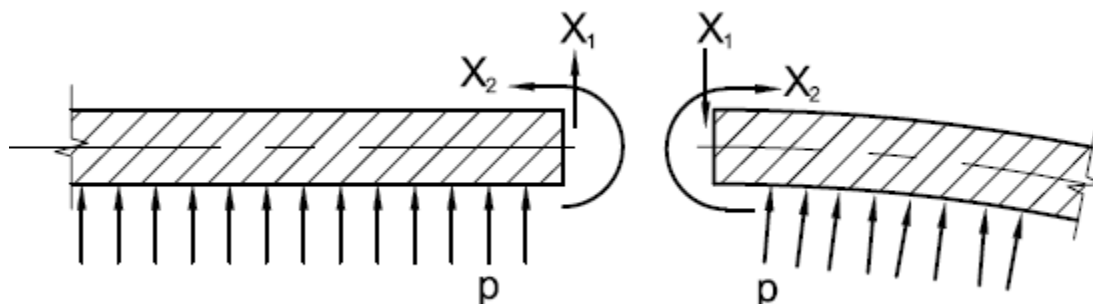
$$M_r = \frac{pr^2}{16} (3 + \mu) - X_2 = 4,759 * 10^4 \text{ N} \quad [9]$$

Poté z tohoto momentu je výsledné ohybové napětí:

$$\sigma_r = \frac{6M_r}{t_1^2} = 178,459 \text{ MPa}$$

### 5.1.3 Kulové dno

I v případě přechodu kulového dna a pláště je potřeba tento spoj uvolnit (viz obr. 5.4) a následně sestavit soustavu kanonických rovnic, která zaručí shodnou deformaci a natočení v místě styku. Dno je půlkruhového typu, což znamená, že poloměr dna je shodný s poloměrem pláště.



Obrázek 5.4 Uvolnění kulového dna [9]

Soustava kanonických rovnic má následující tvar:

$$X_1 \frac{1}{2K_p \beta_p^3} + X_2 \left( \frac{1}{2K_p \beta_p^2} - \frac{1}{2K_D \beta_D^2} \right) + \frac{pr^2}{Et} \left( 1 - \frac{\mu}{2} \right) - \frac{pr^2(1-\mu)}{2Et} = 0$$

$$X_1 \left( \frac{1}{2K_p \beta_p^2} - \frac{1}{2K_D \beta_D^2} \right) + X_2 \left( \frac{1}{K_p \beta_p} + \frac{1}{K_D \beta_D} \right) = 0$$

Jelikož je stejná tloušťka dna jako pláště, bude tuhost pláště ( $K_p$ ) a dna ( $K_D$ ) stejná, shodné budou také konstanty  $\beta$ . Soustavu tedy lze upravit do následujícího tvaru:

$$X_1 \frac{1}{2K\beta^3} + \frac{pr^2}{2Et} = 0$$

$$X_2 \left( \frac{2}{K\beta} \right) = 0$$

Jelikož závorka ve druhé rovnici je číslo nerovné 0, pak moment  $X_2$  musí být roven 0. Pro sílu  $X_1$  pak platí:

$$X_1 = -\frac{p}{8\beta} = 19,746 \text{ N/mm}$$

Dosazením  $X_1$  a  $X_2$  do 4.24, 4.25 a 4.26 lze stanovit průběhy posuvu a ohybových momentů následovně:

$$w = \frac{1}{2K\beta^3} X_1 e^{-\beta x} (\cos \beta x) + \frac{r^2}{Et} \left( p - \mu \frac{N_x}{r} \right)$$

$$M_x = \frac{1}{\beta} X_1 e^{-\beta x} (\cos \beta x)$$

$$M_\varphi = \mu \frac{1}{\beta} X_1 e^{-\beta x} (\cos \beta x)$$

Maximální ohybový moment má maximum ve vzdálenosti  $x$  danou následující rovnicí:

$$x = \frac{\pi}{4\beta} = 31,017 \text{ mm}$$

[9]

Výsledná maximální napětí budou mít tyto hodnoty:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{t} + \frac{6M_x}{t^2} = 66,084 \text{ MPa}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{N_\varphi}{t} + \frac{6M_\varphi}{t^2} = 106,978 \text{ MPa}$$

Ve zbylé části dna platí rovnice pro kulovou nádobu s vnitřním přetlakem (4.13). Tedy výsledné silové vnitřní účinky a jim odpovídající napětí jsou:

$$N_\vartheta = N_\varphi = \frac{p_r r}{2} = 510 \text{ N/mm}$$

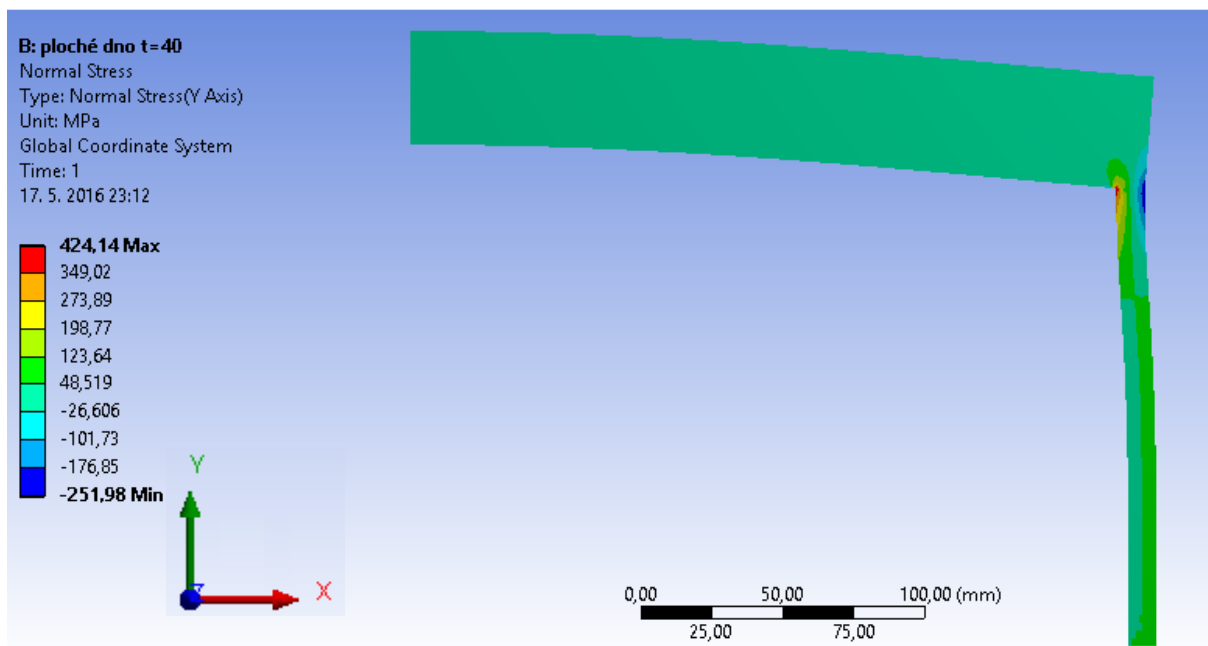
$$\sigma_\vartheta = \sigma_\varphi = \frac{N_\vartheta}{t} = 51 \text{ MPa}$$

Z výsledných hodnot je tedy patrné, že při využití kulového dna dochází ke vzniku mnohem menšího ohybového napětí. Z tohoto důvodu jsou tato dna v praxi mnohem více využívána, zejména při velkém zatížení nádob.

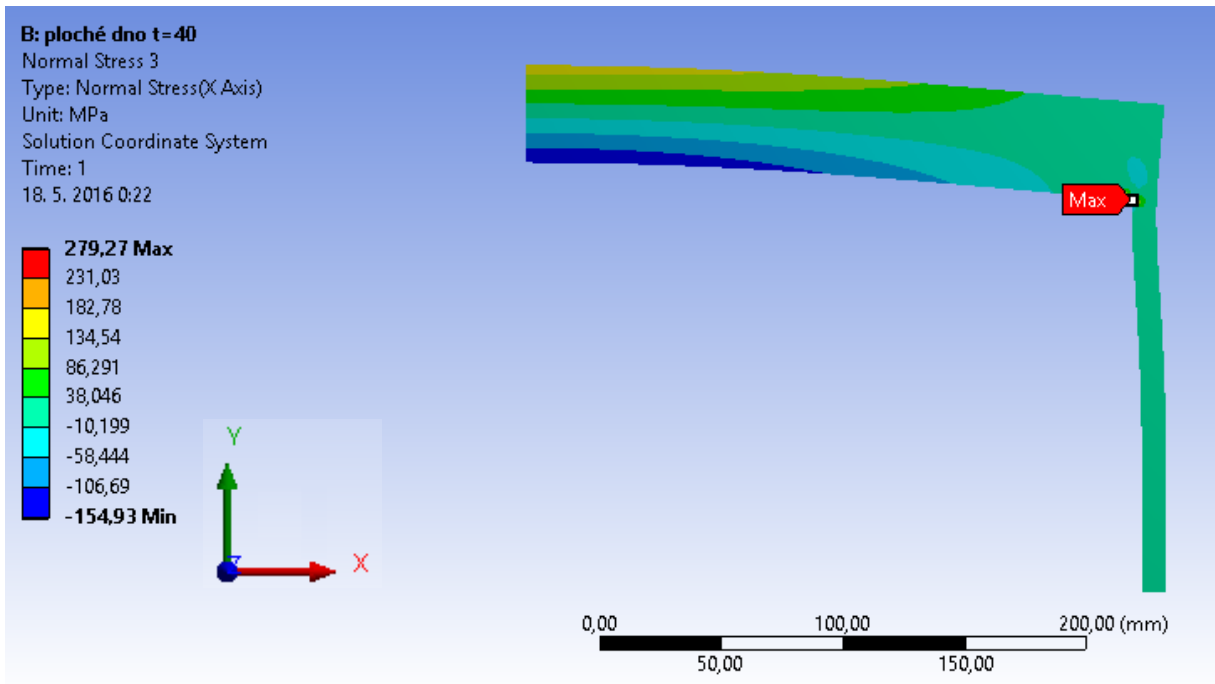
## 5.2 Řešení pomocí MKP

Toto řešení bylo provedeno v programu Ansys Workbench 16.2 pomocí metody konečných prvků (MKP). Při modelování byla využita symetrie nádoby, proto byla nádoba řešena ve 2D s využitím axisymetrie. Síť byla ve všech případech vytvořena pro velikost elementu 1 mm. Pomocí MKP byl řešen pouze přechod dna a pláště.

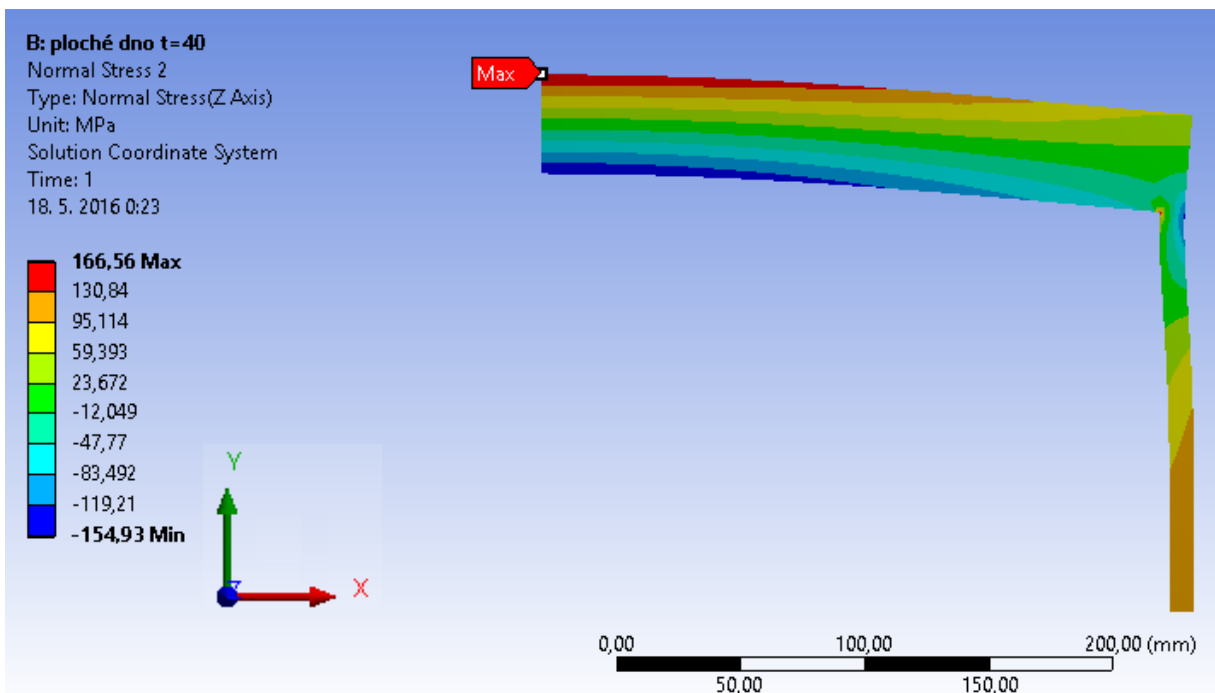
### 5.2.1 Ploché dno



Obrázek 5.5 Přechod pláště a plochého dna, průběh napětí  $\sigma_x$

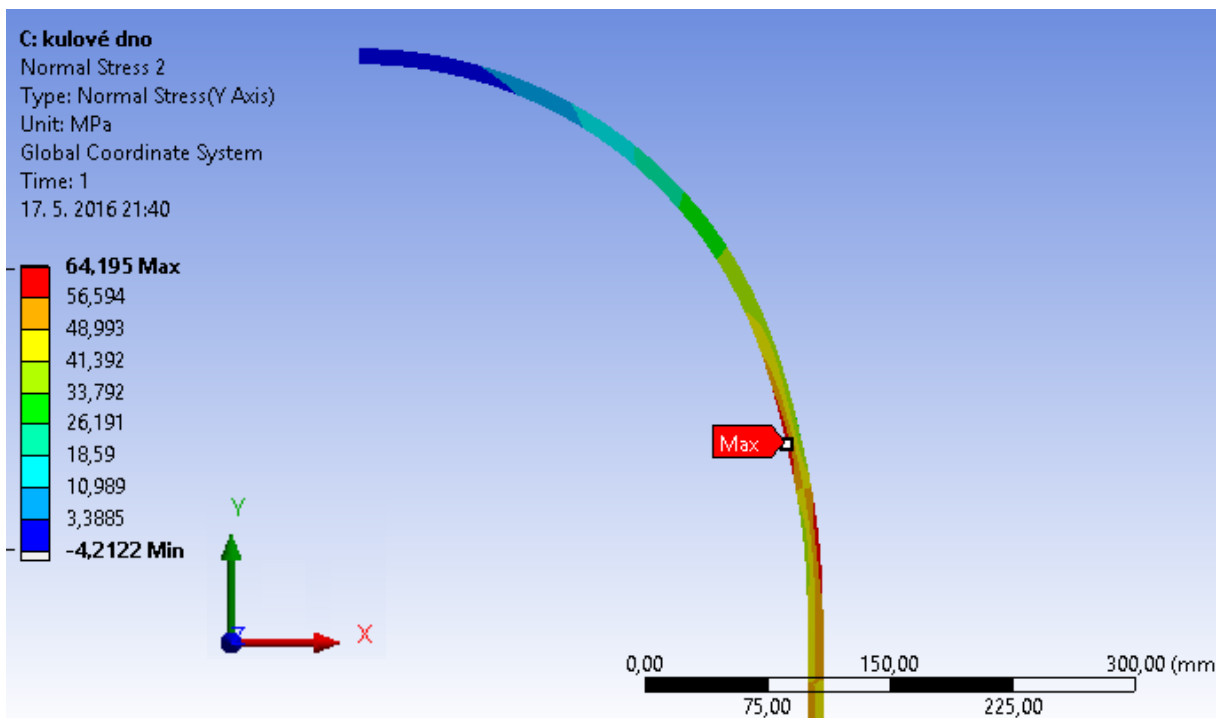


Obrázek 5.6 Přechod pláště a plochého dna, průběh napětí  $\sigma_\phi$

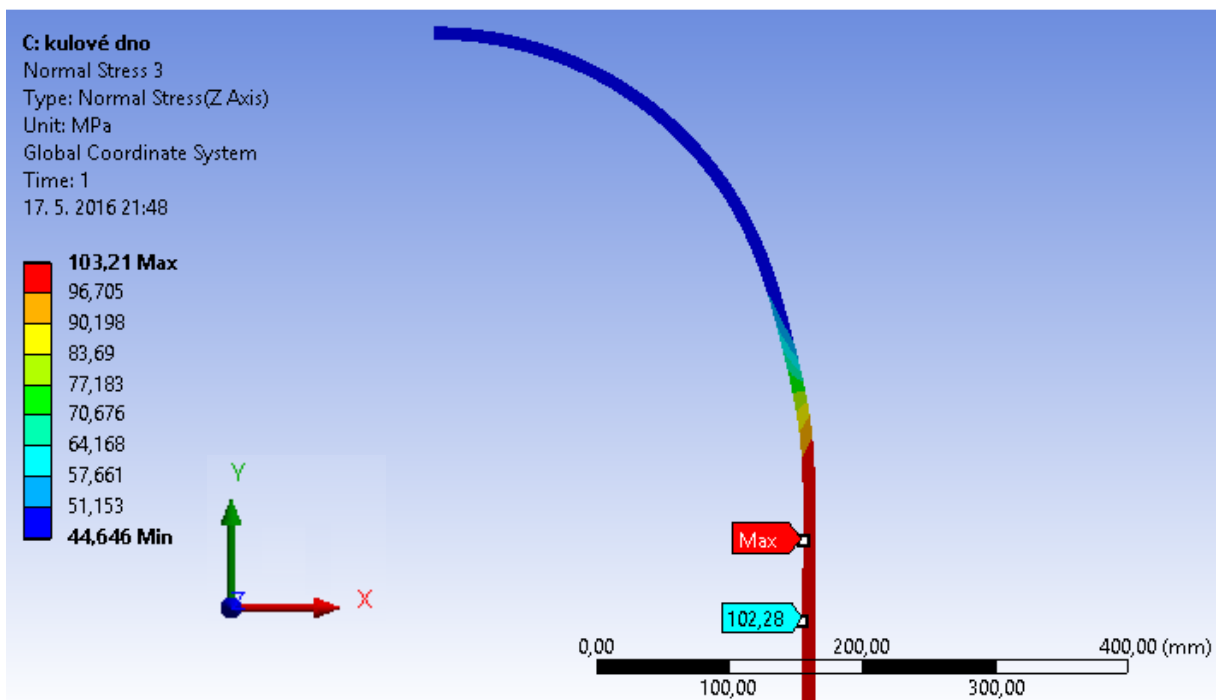


Obrázek 5.7 Přechod pláště a plochého dna, průběh napětí  $\sigma_r$  v desce

## 5.2.2 Kulové dno



Obrázek 5.8 Přechod pláště a kulového dna, průběh napětí  $\sigma_x$



Obrázek 5.9 Přechod pláště a kulového dna, průběh napětí  $\sigma_\varphi$

### 5.3 Porovnání napětí v jednotlivých dnech a plášti nádoby

V následujících tabulkách jsou vyobrazeny maximální hodnoty jednotlivých složek napětí v částech nádoby.

Tabulka 2 Hodnoty napětí a deformace v membránové části nádoby

Membránová část pláště		
Napětí $\sigma_\varphi$	[MPa]	51
Napětí $\sigma_\vartheta$	[MPa]	102
Deformace $\Delta r$	[mm]	0,103

Tabulka 3 Hodnoty napětí v plochém dně a styku s pláštěm

		Deskové dno		Momentová část pláště	
		Analytické řešení	MKP analýza	Analytické řešení	MKP analýza
Napětí $\sigma_\varphi$	[MPa]	-	-	231,447	279,27
Napětí $\sigma_x$	[MPa]	-	-	443,262	424,14
Napětí $\sigma_r$	[MPa]	178,459	166,56	-	-

Tabulka 4 Hodnoty napětí v kulovém dně a styku s pláštěm

		Kulové dno		Momentová část pláště	
		Analytické řešení	MKP analýza	Analytické řešení	MKP analýza
Napětí $\sigma_\varphi$	[MPa]	51	44,646	106,978	103,21
Napětí $\sigma_x$	[MPa]	-	-	66,084	64,195
Napětí $\sigma_\vartheta$	[MPa]	51	44,646	-	-

Z tabulek 3 a 4 vyplývá, že se mnohem větší napětí objevuje v přechodu pláště a plochého dna, proto bych doporučil, pokud je to v technických možnostech, využít kulová dna. Protože v případě kulového dna postačí plech tloušťky 10 mm, což je z hlediska spotřeby materiálu lepší a pravděpodobně i levnější řešení (záleží ovšem na ceně výroby tohoto typu dna).

Hodnoty v analýze pomocí MKP a analytickém řešení se liší o cca 10%, což je způsobeno nepřesnostmi v jednotlivých případech řešení.

## 6 Závěr

Cílem předložené bakalářské práce bylo seznámení s vymezením a kategorizací tlakových nádob podle platných předpisů. V bakalářské práci je dále posouzení jednotlivých typů tlakových nádob z hlediska použití v technické praxi, jejich přednosti a využití. Dále je pozornost věnovaná řešení deformace a napjatosti tlakových nádob analytickým a numerickým způsobem. V části analytického řešení je pozornost věnovaná jak momentové, tak bezmomentové teorii skořepin, pro základní typy zatížení. Navazující část bakalářské práce je věnovaná řešení deformace a napjatosti vybraných prvků tlakových nádob analytickým a numerickým způsobem. Numerická řešení jsou provedena MKP ve výpočtovém systému Ansys Workbench 16.2.

Cíle bakalářské práce byly bezezbytku splněny.

## Seznam použitý zdrojů

- [1] SCHNEIDER, Petr. *Základy konstruování procesních zařízení*. Vyd. 1. Brno: PC-DIR Real, 1999. ISBN 80-214-1483-9
- [2] Zákon o státním odborném dozoru nad bezpečností práce. *Zákony pro lidi* [online]. [cit. 2016-04-20]. Dostupné z: <http://www.zakonyprolidi.cz/cs/1968-174>
- [3] Vyhláška Českého úřadu bezpečnosti práce a Českého báňského úřadu, kterou se určují vyhrazená tlaková zařízení a stanoví některé podmínky k zajištění jejich bezpečnosti. *Zákony pro lidi* [online]. [cit. 2016-04-20]. Dostupné z: <http://www.zakonyprolidi.cz/cs/1979-18>
- [4] ČSN 69 0010-1-1. *Tlakové nádoby stabilní. Technická pravidla. Část 1.1: Základní část. Všeobecná ustanovení a terminologie*. Praha: Český normalizační institut, 1993.
- [5] SFÉRIKÉ ZÁSObNÍKY. *Vitkovice.cz* [online]. 2014 [cit. 12. 4. 2016]. Dostupné z: [http://www.vitkovice.cz/image/journal/article?img\\_id=95076&t=1430475757478](http://www.vitkovice.cz/image/journal/article?img_id=95076&t=1430475757478)
- [6] KŘUPKA, Vlastimil a Petr SCHNEIDER. *Stavba chemických zařízení I.: skořepiny tlakových nádob a nádrží*. 3. vyd. Brno: PC DIR, 1994. ISBN 80-214-570-8.
- [7] ČSN EN 14015. *Specifikace pro navrhování a výrobu nadzemních vertikálních válcových svařovaných ocelových nádrží s plochým dnem, zhotovovaných na místě provozování, určených pro skladování kapalin při teplotě okolí a vyšší*. Praha: Český normalizační institut, 2005.
- [8] NÁDRŽE NA LPG. *Východočeské plynárenské strojírný, a.s.* [online]. 2015 [cit. 12. 4. 2016]. Dostupný na WWW: [http://www.vpsr.cz/editor/image/stranky3\\_galerie/tn\\_zoom\\_obrazek\\_354.jpg?063312](http://www.vpsr.cz/editor/image/stranky3_galerie/tn_zoom_obrazek_354.jpg?063312)
- [9] KŘUPKA, Vlastimil a Petr SCHNEIDER. *Konstrukce aparátů*. Vyd. 1. Brno: PC-DIR, 1998. ISBN 80-214-1124-4.
- [10] MONTOVANÉ VÁLCOVÉ ZÁSObNÍKY. *Vitkovice.cz* [online]. 2014 [cit. 12. 4. 2016]. Dostupný na WWW: [http://www.vitkovice.cz/image/journal/article?img\\_id=95005&t=1430475408597](http://www.vitkovice.cz/image/journal/article?img_id=95005&t=1430475408597)
- [11] SKLADOVACÍ NÁDRŽ. VAE CONTROLS [online]. 2013 [cit. 12. 4. 2016]. Dostupný na WWW: <http://www.vaecontrols.cz/files/images/refs/283/reference-prumysl-mondi-steti-2013.jpg>
- [12] ONDRÁČEK, Emanuel, Přemysl JANÍČEK a Jan VRBKA. *Mechanika těles. Pružnost a pevnost II*. 2. vyd. Brno: VUT Brno, 1991, 262 s. ISBN 80-214-0299-7

## Seznam použitých zkratek a symbolů

Symbol	Rozměr	Veličina
$\Delta r$	[mm]	Přírůstek deformace poloměru vlivem zatížení
B	[Nmm <sup>2</sup> ]	Ohybová tuhost plochého dna
D	[mm]	Vnitřní průměr nádoby
E	[MPa]	Modul pružnosti v tahu
h	[m]	Výška hladiny kapaliny
J	[mm <sup>3</sup> ]	Moment setrvačnosti pruhu skořepiny
K	[Nmm <sup>2</sup> ]	Ohybová tuhost skořepiny
$k_1$	[m <sup>-1</sup> ]	Hlavní křivost 1
$k_2$	[m <sup>-1</sup> ]	Hlavní křivost 2
$K_G$	[mm <sup>-2</sup> ]	Gaussova křivost
L	[mm]	Délka nádoby
$M_x$	[Nmm/mm]	Ohybový moment v ose skořepiny
$M_\varphi$	[Nmm/mm]	Ohybový moment směru rovnoběžky
$N_x$	[N/mm]	Liniová síla ve směru osy skořepiny
$N_\vartheta$	[N/mm]	Normálová síla ve směru meridiánu
$N_\varphi$	[N/mm]	Normálová síla ve směru rovnoběžky
$\rho_g$	[N/m <sup>2</sup> ]	Tíha jedné plošné jednotky skořepiny
$\rho_r$	[MPa]	Zatížení působící ve směru normály
$\rho_s$	[N/m <sup>2</sup> ]	Plošná jednotka tíhy sněhu připadající na jednu plošnou jednotku
$\rho_\vartheta$	[MPa]	Zatížení působící ve směru meridiánu
Q	[MPa]	Součet vnějších sil působících ve směru osy skořepiny
t	[mm]	Tloušťka pláště nádoby
T	[N/mm]	Posouvající síla
$t_1$	[mm]	Tloušťka plochého dna
U	[mm <sup>2</sup> ]	Plocha tělesa
w	[mm]	Přemístění střednice momentové skořepiny
x	[mm]	Vzdálenost porušení membránového stavu napjatosti
$X_1$	[N/mm]	Uvolněná síla
$X_2$	[Nmm/mm]	Uvolněný moment
$\beta$	[mm <sup>-1</sup> ]	Pomocná konstanta
$\gamma$	[-]	Smykový úhel deformace
$\gamma_h$	[N/m <sup>3</sup> ]	Měrná tíha kapaliny
$\delta$	[mm]	Tloušťka stěny
$\varepsilon_\vartheta$	[-]	Deformace ve směru meridiánu
$\varepsilon_\varphi$	[-]	Deformace v rovnoběžkovém směru
$\mu$	[-]	Poissonova konstanta
$\sigma$	[MPa]	Normálové napětí
$\sigma_x$	[MPa]	Normálové napětí ve směru osy skořepiny
$\sigma_\vartheta$	[MPa]	Normálové napětí ve směru meridiánu
$\sigma_\varphi$	[MPa]	Normálové napětí ve směru rovnoběžky

Zkratka	Význam
ASME	American Society of Mechanical Engineers
BS	The British Standard
ČSN	Česká státní norma
EN	Evropská norma
MKP	Metoda konečných prvků
PHM	Pohonné hmoty a maziva

## Seznam obrázků

Obrázek 2.1 Kategorizace nádob [4] .....	14
Obrázek 3.1 Kulová nádrž [5] .....	16
Obrázek 3.2 Toroidální a kapková nádrž [1] .....	17
Obrázek 3.3 Spoj pláště, dno a okolek [7] .....	18
Obrázek 3.4 Horizontální válcová nádrž se sedlovou podporou [8] .....	19
Obrázek 3.5 Horizontální válcová nádrž zasypaná [10] .....	20
Obrázek 3.6 Vertikální válcová nádrž [11] .....	20
Obrázek 4.1 Obecný tvar rotačně symetrické skořepiny [9] .....	23
Obrázek 4.2 Vazba v tečném směru vůči skořepině [9] .....	24
Obrázek 4.3 Řezy skořepinou [12] .....	24
Obrázek 4.4 Uvolněný prvek skořepiny [9] .....	25
Obrázek 4.5 Rozklad směru zatížení od gravitačních sil [6] .....	27
Obrázek 4.6 Rozklad zatížení tíhou sněhu do normál. a merid. směru [6] .....	28
Obrázek 4.7 Kulová nádoba s vnitřním přetlakem .....	30
Obrázek 4.8 Kulová nádoba zatížená vlastní tíhou .....	31
Obrázek 4.9 Kulová nádoba zatížená sněhem .....	32
Obrázek 4.10 Uvolněný elementární prvek válcové momentové skořepiny [9] .....	33
Obrázek 4.11 Uvolněná skořepina .....	35
Obrázek 5.1 Náčrt tvaru nádoby .....	36
Obrázek 5.2 Znázornění oblasti membránové napjatosti .....	37
Obrázek 5.3 Uvolnění plochého dna [9] .....	37
Obrázek 5.4 Uvolnění kulového dna [9] .....	39
Obrázek 5.5 Přechod pláště a plochého dna, průběh napětí $\sigma_x$ .....	40
Obrázek 5.6 Přechod pláště a plochého dna, průběh napětí $\sigma_\varphi$ .....	41
Obrázek 5.7 Přechod pláště a plochého dna, průběh napětí $\sigma_r$ v desce .....	41
Obrázek 5.8 Přechod pláště a kulového dna, průběh napětí $\sigma_x$ .....	42
Obrázek 5.9 Přechod pláště a kulového dna, průběh napětí $\sigma_\varphi$ .....	42