



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND
BIOMECHANICS

VLIV RYCHLOSTI DEFORMACE NA DEFORMAČNĚ-NAPĚŤOVÉ ZÁVISLOSTI TKÁNÍ AORTY

INFLUENCE OF STRAIN RATE ON STRESS-STRAIN DEPENDENCIES OF AORTIC TISSUES

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

MARTIN SLAŽANSKÝ

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

PROF. ING JIŘÍ BURŠA, PH.D.

BRNO 2012

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Akademický rok: 2011/2012

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student: Martin Slažanský

který studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Mechatronika (3906R001)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č. 111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Vliv rychlosti deformace na deformačně-napět'ové závislosti tkání aorty

v anglickém jazyce:

Influence of strain rate on stress-strain dependencies of aortic tissues

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Měkké živočišné tkáně představují složitý kompozitní materiál, jehož chování není ryze elastické, projevují se u něj mj. viskoelastické efekty, které mají za následek závislost deformačně napět'ových charakteristik na rychlosti zatěžování. Práce je zaměřena na zhodnocení vlivu rychlosti zatěžování na tyto charakteristiky u tkání aorty, aby bylo možné odhadnout možnou chybu hyperelastických modelů, které tyto vlivy zanedbávají.

Cíle bakalářské práce:

- 1) Provést rešerši literatury v oblasti mechanického chování měkkých živočišných tkání se zaměřením na vliv rychlosti zatěžování na mechanickou odezvu tkání arteriální stěny.
- 2) Provést experimentální vyhodnocení vlivu rychlosti zatěžování na mechanické chování stěny prasečí aorty při různých deformačně napět'ových stavech.
- 3) Navrhnout způsoby výpočtového modelování chování aortální stěny minimalizující vliv různé rychlosti zatěžování na deformačně-napět'ovou odezvu a posoudit je z hlediska nepřesnosti.

Seznam odborné literatury:

Janíček, Ondráček, Vrbka, Burša: Mechanika těles. Pružnost a pevnost I. Cerm Brno, 2004.
Ondráček, Vrbka, Janíček, Burša: Mechanika těles. Pružnost a pevnost II. Cerm Brno, 2006.
Fung: Biomechanics. Mechanical properties of living tissues. Springer, 1993.

Vedoucí bakalářské práce: prof. Ing. Jiří Burša, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akad. roku 2011/2012.

V Brně, dne 18.11.2011

L.S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.
Děkan fakulty

Abstrakt

Práce se zabývá zhodnocením vlivu rychlosti zatěžování na deformačně napět'ovou charakteristiku tkáně aorty, aby tak bylo možné odhadnout chybu hyperelastických modelů, které zanedbávají viskoelastické efekty, jež jsou typické pro měkké živočišné tkáně.

Pomocí experimentu a následného vyhodnocení bylo zjištěno, že v rozsahu rychlosti zatěžování od 0,167 do 5,000 mm.s⁻¹ je vliv rychlosti zatěžování zanedbatelný. Odchylka při přechodu na konstitutivní model byla výrazně větší než odchylka mezi soubory dat lišících se různými rychlostmi deformace, což znamená, že použití deformačně napět'ových křivek lišících se různými rychlostmi zatěžování v daném rozsahu na výsledný model nemá vliv. Jako nejlepší z uvedených výpočtových modelů se jeví hyperelastický model Yeoh za použití MKP.

Klíčová slova

aorta, měkká živočišná tkáň, deformačně napět'ová charakteristika, viskoelasticita, rychlost zatěžování, výpočtový model

Abstract

The thesis deals with the influence of strain rate on stress-strain dependencies of aortic tissues to estimate the error of hyperelastic models, which are neglecting the viscoelastic effects that are typical for soft biological tissues.

It was found by the experiment and the subsequent evaluation that in the range of the strain rate from 0,167 to 5,000 mm.s⁻¹ the influence of strain rate on stress-strain dependencies is negligible. The deviation by transition from experimental data to a constitutive model was significantly larger than the deviation between the data sets varying at different strain rates, which means that the use of stress-strain curves varying at different strain rates in given range of the strain rate has no effect on the resulting model. The best of analysis models that were examined in this thesis appears to be the Yeoh hyperelastic model using the FEM.

Keywords

aorta, soft biological tissue, stress-strain characteristic, viscoelasticity, strain rate, analysis model

Bibliografická citace:

SLAŽANSKÝ, M. *Vliv rychlosti deformace na deformačně-napět'ové závislosti tkání aorty*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2012. 48 s.
Vedoucí bakalářské práce prof. Ing. Jiří Burša, Ph.D.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně, pod vedením vedoucího bakalářské práce prof. Ing. Jiřího Burši, Ph.D. a s použitím uvedené literatury a zdrojů.
V Brně dne 24. května 2012

.....

Martin Slažanský

Poděkování

Rád bych poděkoval prof. Ing. Jiřímu Buršovi Ph.D. za odborné vedení, věnovaný čas, cenné rady a připomínky k této bakalářské práci. Dále děkuji Ing. Stanislavu Polzerovi, Ing. Pavlu Skácelovi, Ph.D. a Bc. Vojtěchovi Manovi za pomoc a rady při tvorbě této práce. Děkuji rodině a přátelům za podporu v dosavadním studiu, bez které by tato práce nemohla vzniknout.

OBSAH

1 ÚVOD	9
1.1 Cíle práce	9
2 LÉKAŘSKÉ MINIMUM	10
3 ZÁKLADY MECHANIKY KONTINUA	11
3.1 Teorie velkých deformací, nelineární mechanika	11
3.2 Tenzory velkých přetvoření	11
3.3 Tenzory napětí pro velká přetvoření	12
3.4 Měrná energie napjatosti hyperelastických materiálů	12
3.5 Odvození měrné deformační energie pro biaxiální tahovou zkoušku	14
3.6 Základy viskoelastického chování	15
4 REŠERŠE	17
5 EXPERIMENTY NA BILOGICKÉ TKÁNI	18
5.1 Použitá měřicí technika	18
5.2 Získání a úprava vzorku aorty	19
5.3 Postup a vyhodnocení měření	20
5.4 Technické údaje měření	22
5.5 Chyby a nepřesnosti měření	22
6 ZPRACOVÁNÍ NAMĚŘENÝCH DAT	23
6.1 Zpracování snímků programem Tibixus	23
6.2 Zpracování programem MATLAB, korekce naměřených dat	24
6.2.1 Grafy pro vizuální porovnání deformačně napěťových křivek	24
6.2.2 Grafy hodnot měrných deformačních energií	24
6.2.3 Data pro konstitutivní model v programu Hyperfitu	24
6.3 Proložení experimentálních dat konstitutivním modelem	25

7 VYHODNOCENÍ VLIVU RYCHLOSTI DEFORMACE	26
7.1 Vizuální porovnání deformačně napěťových křivek	26
7.2 Vyhodnocení měrné deformační energie numerickou integrací	27
7.3 Identifikace a porovnání konstitutivního modelu	29
7.3.1 Identifikace konstitutivního modelu	29
7.3.2 Porovnání modelu Demiray vs. Yeoh	30
7.3.3 Metodika porovnávání souborů dat	30
7.3.4 Vliv použití deformačně napěťových křivek různých rychlostí zatěžování na výsledný model	31
8 VÝPOČTOVÝ MODEL	32
8.1 Analytické řešení	32
8.1.1 Výpočet pro neměnnou geometrii	33
8.1.2 Výpočet přírůstkovou metodou	33
8.1.2.1 Model s konstantním modulem pružnosti	34
8.1.2.2 Model s proměnlivým modulem pružnosti	35
8.1.3 Výsledky z analytických výpočtových modelů	37
8.2 Řešení pomocí MKP	38
8.2.1 Výpočet pro neměnnou geometrii	39
8.2.2 Výpočet pro proměnlivou geometrii	39
8.2.2.1 Model s konstantním modulem pružnosti	39
8.2.2.2 Model s proměnlivým modulem pružnosti	39
8.3 Porovnání analytického řešení a řešení pomocí MKP	40
9 ZHODNOCENÍ VÝSLEDKŮ	42
10 ZÁVĚR	43
11 SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY A ZDROJŮ	44
12 SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ	47
13 SEZNAM PŘÍLOH	48

1 ÚVOD

Simulování mechanických procesů uvnitř lidského těla pomocí výpočtových modelů je jedním z aktuálních témat oblasti biomechaniky. Zásadní výhodou této metody je, že na základě naměřených dat a výpočtového modelu je možné například neinvazivně sestavit lékařskou prognózu, která je běžnými neinvazivními postupy obtížně stanovitelná.

Při sestavování výpočtových modelů je potřeba mít k dispozici geometrii, materiálové charakteristiky, tedy definované mechanické vlastnosti tkáně, a zatížení dané části lidského těla. Geometrii lze získat např. z rentgenových snímků, zatížení z naměřeného krevního tlaku a materiálové charakteristiky dané tkáně na základě mechanických zkoušek statisticky významného souboru vzorků různých jedinců z populace. Poté lze vytvořit model, který pomáhá lékařům při rozhodování o dalším postupu léčby.

Práce se konkrétně zabývá mechanickými vlastnostmi tkáně aorty. Všeobecně platí, že měkké živočišné tkáně představují složitý kompozitní materiál, jehož chování není čistě elastické. Projevují se u něj mimo jiné i viskoelastické efekty, které mají za následek závislost deformačně napěťových charakteristik na rychlosti zatěžování. Práce je zaměřena na zhodnocení vlivu rychlosti zatěžování na tyto charakteristiky u tkání aorty, aby bylo možné odhadnout možnou chybu hyperelastických modelů, které tyto vlivy zanedbávají.

Práce sestává z experimentu, díky kterému získáme potřebná data k sestavení deformačně napěťových charakteristik, zpracování naměřených dat a vyhodnocení vlivu rychlosti deformace na deformačně napěťové charakteristiky. Následně je vytvořen výpočtový model chování břišní aorty při zatížení tlakem pomocí analytické metody a pomocí MKP.

1.1 Cíle práce

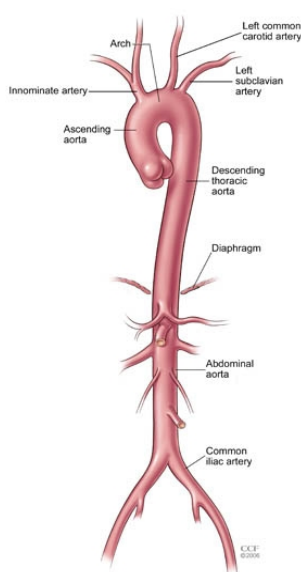
Cíle bakalářské práce:

- 1) Provést rešerši literatury v oblasti mechanického chování měkkých živočišných tkání se zaměřením na vliv rychlosti zatěžování na mechanickou odezvu tkání arteriální stěny.
- 2) Provést experimentální vyhodnocení vlivu rychlosti zatěžování na mechanické chování stěny prasečí aorty při různých deformačně napěťových stavech.
- 3) Navrhnout způsoby výpočtového modelování chování aortální stěny minimalizující vliv různé rychlosti zatěžování na deformačně-napěťovou odezvu a posoudit je z hlediska nepřesnosti.

2 LÉKAŘSKÉ MINIMUM

Zde je uvedeno jen nejzákladnější lékařské minimum nutné k orientaci v této bakalářské práci. Obsáhlejší popis problematiky kardiovaskulárního systému, aorty a aneurysmat je možné nalézt v literatuře [1], bakalářských a diplomových pracích [2-4], v online podkladech pro výuku biomechaniky [5], na webu se studijními materiály lékařských fakult v ČR a SR [6] a na webu FTVS UK [7]. Uvedené zdroje tvoří podklady pro tuto kapitolu.

Práce se zabývá deformačně napěťovými charakteristikami tkáně aorty. Je proto nutné vědět, jaké napěťové vlivy na aortu v těle působí, jak na ně stěna aorty reaguje a jak se přitom deformuje. Dále je pro pochopení některých jevů, jako např. viskoelasticity, potřeba znát histologii a anatomii cévy a její vlastnosti.



Obr. 1 – Aorta [26]

Činností srdce proudí krev tepnami. Největší cévou je aorta. Vede ze srdce až do oblasti kyčlí. Aorta rozvádí okysličenou krev do orgánů těla. Její dysfunkce v důsledku úrazu či únavy proto přímo ohrožuje život a často končí smrtí.

Břišní část aorty má průsvit v průměru 25 mm a tloušťku stěny 2 mm.

Stěna aorty se skládá ze tří vrstev:

- vnitřní vrstva (*tunica intima*): tvořena epitelem; zabraňuje prosakování krve,
- střední vrstva (*tunica media*): tvořena převážně hladkou svalovinou, částečně vazivem; působí proti krevnímu tlaku, udržuje cévu průchozí,
- vnější vrstva (*tunica adventicia*): nejtlustší vrstva, především vazivo, z malé části hladká svalovina; spojuje cévu s okolím, zvyšuje pružnost stěny.

Ve stěně břišní aorty je elastická složka zastoupena přibližně 50 %; svalovina, která je zodpovědná za viskoplastické chování, pak jen z 20 % [8]. Díky poměru těchto složek je možné viskoplastické jevy zanedbat. Svalovina může do měření vnášet nepřesnosti, jelikož na ni mohly působit různé posmrtné změny – chemické, fyziologické či mechanické.

Na vnitřní stěnu aorty působí tlak způsobený systolou srdečních komor a na vnější stranu tlak okolních orgánů v dutině břišní. Deformace stěny probíhá ve směru osy aorty a především pak ve směru obvodovém. Rychlosti deformace se pohybují v řádech jednotek $\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$ a přetvoření v řádech desítek procent.

Při zatěžování a následné deformaci tlakem se ve tkáni aorty nejdříve natahují především vlákna elastinu, při pokročilejší deformaci pak i postupně kolagenu. Vzhledem k rozdílné tuhosti těchto dvou materiálů se výsledný modul pružnosti v tahu mění v závislosti na velikosti deformace. Nejdříve je jeho hodnota vyjádřena v řádu stovek kPa, po zapojení kolagenu pak v řádu tisíců kPa.

3 ZÁKLADY MECHANIKY KONTINUA

V problematice deformačně napět'ových vlastností a chování měkkých biologických tkání se využívají komplexní znalosti mechaniky kontinua. Vzhledem k typu této práce předpokládáme znalosti z předmětů Pružnost a pevnost I a II [10,11]. Tyto znalosti musíme rozšířit o základní vědomosti z teorie velkých deformací, nelineární mechaniky, měrné energie napjatosti a viskoelastivity, abychom tak vyhověli nárokům, které si problematika biomechaniky klade. Zdroj [9] tvoří podklad pro tuto kapitolu.

3.1 Teorie velkých deformací, nelineární mechanika

Jako velké deformace označujeme procesy, při kterých je přetvoření větší jak 1 %. V oblasti velkých deformací je závislost mezi napětím a deformací vždy nelineární, což je nutné zahrnout do výpočtových modelů (viz kap. 8). Měkké biologické tkáně dosahují přetvoření desítek až stovek procent, je proto nutné používat obecné tenzory přetvoření a napětí.

3.2 Tenzory velkých přetvoření

Při velkých deformacích se výrazně mění i geometrie tělesa. Tensor smluvních přetvoření, který je používán v oblasti malých deformací, zanedbává nelineární členy, které ovšem při velkých deformacích hrají svou roli, musíme proto použít obecný tenzor přetvoření. Jako základní vztažnou geometrii považujeme nedeformovanou geometrii, zvolíme proto Lagrangeův přístup, který se v mechanice těles uplatňuje více než Eulerův přístup. Green-Lagrangeův tenzor přetvoření zapsaný pomocí Einsteinova sumačního pravidla má tvar

$$E_{ij}^L = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right] \quad (1)$$

kde u je vektor posuvů a X je vektor Lagrangeovských souřadnic.

Pro popis transformace mezi aktuální a výchozí geometrickou konfigurací se používá tenzor deformačního gradientu definovaný jako

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (2)$$

Jeho diagonální složky mají význam poměrných protažení λ . Na příkladu tyče počáteční délky l_0 a konečné délky l by se jednalo o

$$\lambda = \frac{l}{l_0} \quad (3)$$

V případě, že je nalezena jeho hlavní souřadnice, je deformační gradient orientován ve směru hlavních os a má tvar

$$F_{ij} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} \quad \text{kde} \quad \lambda_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_i} \quad i = 1, 2, 3 \quad (4)$$

Předchozí tenzory přetvoření byly vztaženy k počáteční nebo konečné geometrické konfiguraci. Cauchyho logaritmický tenzor přetvoření vztahuje každý přírůstek k aktuální geometrii. Tento tenzor je v praxi jeden z nejpoužívanějších. Lze jej zapsat ve tvaru

$$E_{ij}^C = \ln \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right) = \ln \lambda_{ij} \quad (5)$$

3.3 Tenzory napětí pro velká přetvoření

K dispozici máme několik tenzorů napětí, např. Cauchyho tenzor napětí, vztahující se na aktuální plochu elementárního hranolu nebo 1. Piola-Kirchhoffův (Lagrangeův) tenzor napětí, který vyjadřuje vztah elementární síly k ploše elementárního hranolu v počáteční nedeformované konfiguraci, pracuje tedy se smluvními napětími. Lze ho zapsat v sumačním tvaru jako

$$\tau_i = \frac{dF_i}{dS_j} \quad (6)$$

Výhodou 1. Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí je dobrá fyzikální představivost. K výpočtu měrné energie napjatosti (viz následující kapitola) se však z důvodu energetické sdruženosti ve spojení s Green-Lagrangeovým tenzorem deformace používá 2. Piola-Kirchhoffův tenzor napětí, definovaný jako

$$S_i = \frac{dF_{0i}}{dX_j \cdot dX_k} \quad (7)$$

3.4 Měrná energie napjatosti hyperelastických materiálů

Materiál nazýváme hyperelastickým, pokud existuje elastická potenciální funkce Λ (měrná deformační energie), která je skalární funkcí některého z tenzorů přetvoření (resp. deformace) E , a jejíž derivace podle některé složky přetvoření pak určuje odpovídající složku napětí S . To lze vyjádřit následovně

$$S_{ij} = \frac{\partial \Lambda}{\partial E_{ij}} \quad (8)$$

kde S_{ij} jsou složky 2. Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí
 Λ je funkce měrné energie napjatosti na jednotku nedeformovaného objemu
 E_{ij} jsou složky Green-Lagrangeova tenzoru přetvoření

Lineárně elastické materiály, se kterými se pracuje ve výpočtech PPI a PPII jsou jen speciálním případem hyperelastického materiálu.

Pro malé deformace si můžeme zvolit libovolnou složku deformace, například smluvní přetvoření ε . Funkce měrné energie napjatosti lineárně elastického materiálu pro jednoosou napjatost je pak s pomocí Hookeova zákona definována jako

$$\Lambda_{el,lin} = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x = \frac{1}{2} E \varepsilon_x^2 \quad (9)$$

Derivací energie napjatosti dle přetvoření dostaneme odpovídající složku napětí, jak ukazuje následující výraz:

$$S_{ij} = \frac{\partial \Lambda_{el,lin}}{\partial E_{ij}} = \frac{\partial \Lambda_{el,lin}}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2} E \varepsilon_x^2 \right)}{\partial \varepsilon_x} = \frac{2}{2} E \varepsilon_x = \sigma_x \quad (10)$$

Podobně lze vyjádřit napětí i pro víceosou napjatost. Tensor napětí a tensor přetvoření v klasickém tvaru (a) a ve tvaru dle Einsteinova sčítacího pravidla (b):

$$(a) \quad T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$(b) \quad T_{\varepsilon_{ij}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{\varepsilon_{12}}{2} & \frac{\varepsilon_{13}}{2} \\ \frac{\varepsilon_{21}}{2} & \varepsilon_{22} & \frac{\varepsilon_{23}}{2} \\ \frac{\varepsilon_{31}}{2} & \frac{\varepsilon_{32}}{2} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad T_{\sigma_{ij}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad i,j = 1,2,3 \quad (12)$$

$$\text{Měrná energie napjatosti má pak tvar} \quad \Lambda = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{\sigma_{ij}} T_{\varepsilon_{ij}} \quad (13)$$

Budeme-li těleso zatěžovat pouze hlavním napětím v jednom směru, pak můžeme volit $i = 1$, $j = 1$, po dosazení

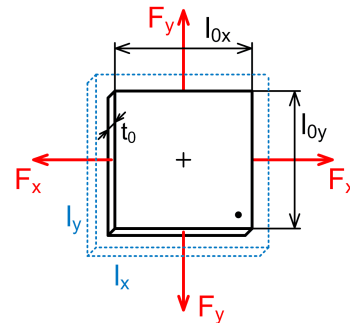
$$T_{\sigma_{11}} = \frac{\partial \Lambda}{\partial T_{\varepsilon_{11}}} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x \right)}{\partial \varepsilon_x} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2} E \varepsilon_x^2 \right)}{\partial \varepsilon_x} = \frac{2}{2} E \varepsilon_x = \sigma_x \quad (14)$$

Výsledek potvrzuje výše uvedený výpočet.

3.5 Odvození měrné deformační energie pro biaxiální tahovou zkoušku

Z experimentálních dat, která získáme pomocí biaxiální tahové zkoušky, potřebujeme pro vyhodnocení vlivu rychlosti deformace na deformačně napět'ovou charakteristiku tkáňe aorty vypočítat měrnou deformační energii. Budeme při tom využívat vztahů v kap. 3.4 pro hyperelastický materiál. Předpokládáme tedy, že energie napjatosti a deformační energie jsou stejné. Měrnou deformační energii si je nutné vyjádřit ve vhodném tvaru s využitím veličin, které jsme schopni změřit. Jedná se o :

- síly ve směru x a y : F_x, F_y ,
- počáteční rozměry vzorku: t_0, l_{0x} a l_{0y} , z nichž vypočítáme počáteční průřezy S_{0x} a S_{0y} a počáteční objem V_0 ,
- poměrná protažení λ_x a λ_y .



Předpokládáme, že materiál je nestlačitelný, a proto platí

$$\lambda_x \lambda_y \lambda_z = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad \rightarrow \quad \lambda_z = \frac{1}{\lambda_x \lambda_y} \quad (15)$$

Budeme vycházet ze vzorce pro měrnou energii napjatosti (8). Pak platí, že

$$\partial \Lambda = S_{ij} \partial E_{ij}^L \quad (16)$$

Ze známých veličin jsme schopni určit složky 1. Piola-Kirchhoffova (6) a po přepočtu i 2. Piola-Kirchhoffova (7) tenzoru napětí a složky Green-Lagrangeova tenzoru přetvoření, které potřebujeme pro výpočet měrné deformační energie dle (16). Nejprve určíme složky 1. Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí

$$\tau_i = \frac{dF_i}{dS_j} \quad \rightarrow \quad \tau_x = \frac{F_x}{S_{0y}} \quad \text{a analogicky} \quad \tau_y = \frac{F_y}{S_{0x}} \quad (17)$$

Přepočítáme na složky 2. Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí

$$S_i = \frac{1}{\lambda_i} \tau_i \quad \rightarrow \quad S_x = \frac{1}{\lambda_x} \tau_x \quad \text{a analogicky} \quad S_y = \frac{1}{\lambda_y} \tau_y \quad (18)$$

Nyní potřebujeme složky Green-Lagrangeova tenzoru přetvoření. Vypočítáme je jako

$$E_i^L = \frac{1}{2} (\lambda_i^2 - 1) \quad \rightarrow \quad E_x^L = \frac{1}{2} (\lambda_x^2 - 1) \quad \text{a analogicky} \quad E_y^L = \frac{1}{2} (\lambda_y^2 - 1) \quad (19)$$

Po integraci vztahu pro měrnou deformační energii (16) dostaneme výraz

$$\Lambda = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int S_{ij} dE_{ij}^L \quad (20)$$

V našem případě jsou nenulové složky napětí pouze normálová napětí v osách x a y . Výsledný tvar má podobu

$$\Lambda = \int S_x dE_x^L + \int S_y dE_y^L \quad (21)$$

Posledním krokem je určení mezí integrace. Jelikož naměřené hodnoty přetvoření nemají na počátku nulovou hodnotu, je nutné tento fakt zahrnout do výsledného vzorce:

$$\Lambda = \int_{E_{x0}^L}^{E_{x1}^L} S_x dE_x^L + \int_{E_{y0}^L}^{E_{y1}^L} S_y dE_y^L \quad (22)$$

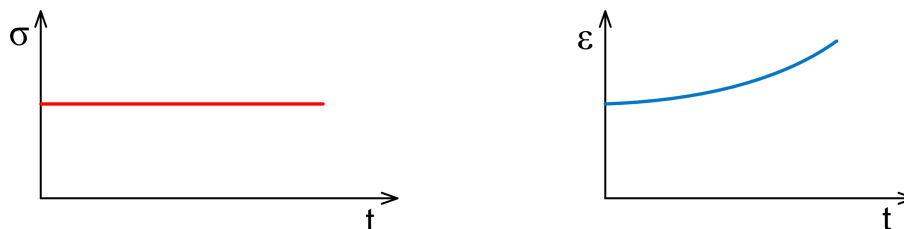
Výsledný předpis pro měrnou deformační energii má charakter plochy pod deformačně napěťovou křivkou. Díky numerické integraci lze spočítat z naměřených dat měrnou deformační energii, což využijeme k dosažení vytyčených cílů (viz kap. 6.2.2 a 7.2).

3.6 Základy viskoelastického chování

Charakteristické chování viskoelastické látky vzniklo spojením vlastností tekutiny (viskozita) a tuhé látky (elasticita). Díky této kombinaci nemusí být napětí lineární funkcí přetvoření, takže deformačně napěťové charakteristiky mohou být nelineární. Nejdůležitějšími projevy, typickými pro viskoelastické materiály, jsou creep (tečení), relaxace napětí a hysterese.

Creep (tečení)

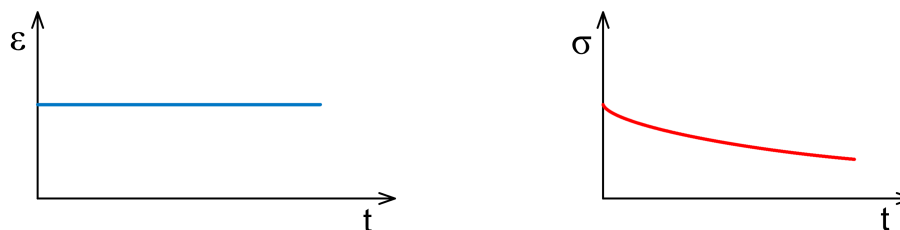
Jedná se o tendenci materiálu se při zatížení konstantním napětím v průběhu času pomalu deformovat, přetvoření tudíž nezůstává konstantní, ale roste. Materiál se „roztéká“, odtud pojem creep – tečení (obr. 2).



Obr. 2 – Creep: zatížení napětím, odezva deformace

Relaxace napětí

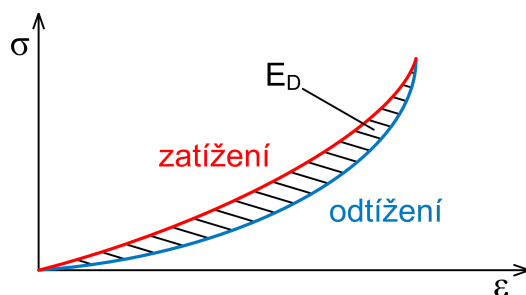
Při zachování konstantní celkové deformace dochází k poklesu působícího napětí – dojde k relaxaci napětí (obr. 3).



Obr. 3 – Relaxace napětí: zatížení deformací, odezva napětí

Hystereze

Vykreslíme-li deformačně napěťovou křivku zatěžování a odtěžování (obr. 4), můžeme vidět, že křivky nejsou stejné, došlo tedy k hysterezi. Obě křivky tvoří hysterezní smyčku. Plocha mezi křivkou zatěžování a křivkou odtěžování vyjadřuje disipační energii, způsobenou viskózní složkou materiálu. Tato disipační energie je rozdílem mezi celkovou deformační energií a vratnou energií napjatosti.



Obr. 4 – Hystereze: deformačně napěťové křivky zatěžování a odtěžování

Dalším projevem viskoelasticity je změna tuhosti v závislosti na rychlosti zatěžování, což je předmětem této práce.

4 REŠERŠE

V dnešní době je všeobecně známé, že měkké živočišné tkáně, konkrétně tkáň aorty, se vyznačují viskoelastickým chováním, jak je uvedeno například v [12-22]. Zahnutí viskoelastického chování do výpočtového modelu či vytvoření takového modelu je možné najít kupříkladu v článcích [16] a [19,20]. Běžně používané výpočtové modely však viskoelastické jevy zanedbávají, jelikož by se tím výpočty staly velmi složité. Dochází tak k určité chybě, která je považována za zanedbatelnou. Programy používající MKP sice podporují hyperviskoelastické modely, ale vzhledem tomu, že je složité s nimi pracovat a že je potřeba definovat určité materiálové parametry, které je velmi obtížné změřit nebo nejsou k dispozici, tak se v běžné praxi nepoužívají.

Do jaké míry se ve výpočtovém modelu projeví vliv viskoelastivity, závisí na frekvenci zatěžování (v Hz), což při známé geometrii odpovídá určité rychlosti zatěžování (v mm.s⁻¹). Podle [23] je vliv viskoelastivity v rozsahu 0,004 až 0,100 Hz při přetvoření 30 % zanedbatelný. Více informací nám poskytuje článek [12], který při 60 % přetvoření a rozsahu frekvence zatěžování 0,049 až 0,29 Hz (0,2 až 6,5 mm.s⁻¹) potvrdil, že v daném rozsahu jsou viskoelastické jevy zanedbatelné. Při mnohem vyšších frekvencích zatěžování, jako je uvedeno v [13], tedy v rozsahu 0,1 až 20 Hz, mají viskoelastické jevy velký vliv na výslednou deformačně napěťovou charakteristiku. Bohužel z článku není možné určit zatěžování v mm.s⁻¹.

Významný vliv na následné viskoelastické chování tkáně mají také podmínky, za kterých je tkáň měřena a za kterých byla skladována. Z článků [24,25] plyne, že dlouhodobější skladování zmražením změni mechanické vlastnosti tkáně, je proto nutné tkáň měřit v krátké době po odebrání.

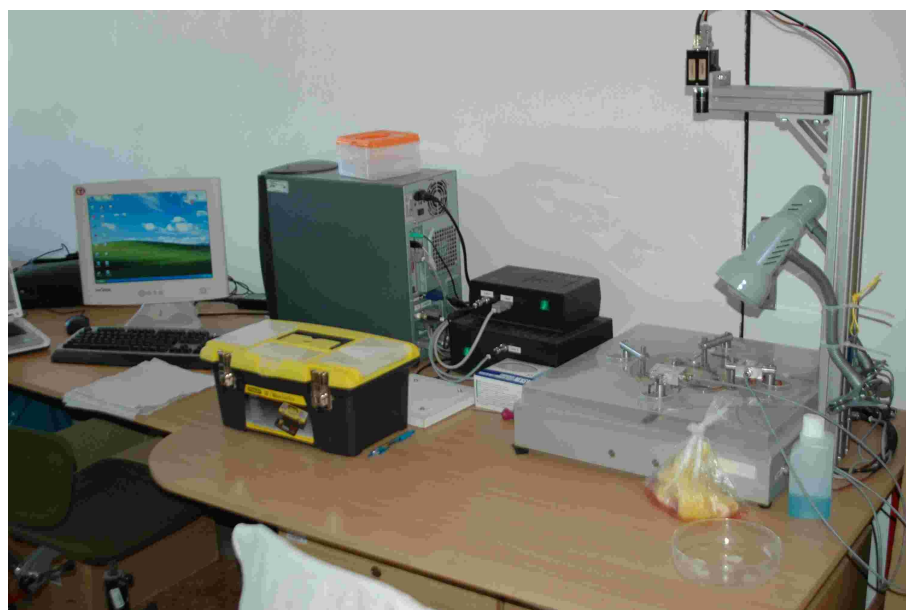
Navíc je nutné při měření udržet teplotu fyziologického roztoku, ve kterém je vzorek ponořen, na 37 °C. Odchylka několika stupňů již ovlivňuje výsledky, jak je doloženo v [23]. Celkově lze považovat měření měkkých živočišných tkání za komplikované [1].

5 EXPERIMENTY NA BIOLOGICKÉ TKÁNI

Cílem experimentálního měření je získat hodnoty potřebné pro určení deformačně napěťových křivek, které charakterizují chování tkáně aorty. Nejvhodnějším typem měření vzhledem k simulaci reálného zatížení a vzhledem k samotné realizaci je dvouosá tahová zkouška se čtvercovým zkušebním vzorkem. Veličiny, které jsme schopni měřit, jsou posuvy a síly v daných osách. Za předpokladu homogenní napjatosti v celém zkušebním vzorku je pak možné vypočítat smluvní napětí (případně skutečné), čímž získáme potřebná data pro sestavení příslušných deformačně napěťových křivek. Přetvoření se počítá z posuvů referenčních bodů umístěných na vzorku. Tyto posuvy jsme schopni určit ze snímků pořízených kamerou po zpracování v programu Tibixus.

5.1 Použitá měřicí technika

Měření bylo prováděno na speciálně upravené dvouosé tahové zkoušečce Camea s příslušnou měřicí technikou a softwarem (obr. 5), která se nachází na Fakultě strojního inženýrství VUT.



Obr. 5 – Měřicí zařízení pro dvouosou tahovou zkoušku Camea

Celé zařízení sestává z následujících součástí:

1. Prostor pro vzorek, termoregulace, čelisti, tenzometry, krokové motory, lampy
→ fyzické provedení zkoušky a sběr dat (síla),
2. Kamera
→ sběr dat (snímky, zpracování na posuv),
3. Hardware pro zpracování dat
→ zpracování dat z kamery, termoregulace a tenzometrů a z ovládacího softwaru,
4. Software pro zpracování dat a ovládání hardwaru
→ zpracování dat, ovládání hardwaru.

5.2 Získání a úprava vzorku aorty

Pro účely měření je nutné mít přesně definovaný zkušební vzorek. Prasečí aorta, kterou dostaneme jako výchozí materiál, je nahrubo vyříznutý kus živočišné tkáně, často i se zbytky jiných orgánů, které se nacházejí v její blízkosti anebo jsou s aortou jakkoli spojené, např. srdce či jícn. Proto je nutné provést především pomocí chirurgických nástrojů a za sterilních podmínek řadu procedur, díky kterým daný vzorek připravíme pro následné měření. Celý postup preparace a úpravy zkušebního vzorku lze shrnout do několika zásadních bodů:



Odstranění velkých přívěsků
Odříznutí nadbytečných částí aorty

Odstranění menších
tkání, přirostlých k aortě



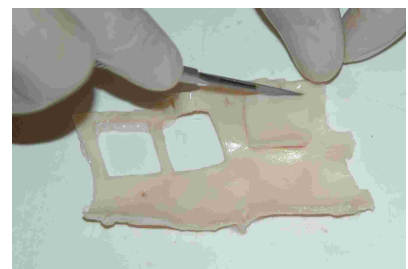
Podélné rozříznutí aorty

Jemné vyčištění stěny
aorty od přebytečných
vrstev (tuk, vazivo)



Vyseknutí čtvercového
vzorku pomocí raznice

Případné ruční vyříznutí
a začištění vzorku



Označení míst pro svorky,
Nakreslení referenčních bodů

Výsledný vzorek má velikost cca 18 x 18 x 2 mm a je připraven na měření.

5.3 Postup a vyhodnocení měření

Po přípravě vzorku můžeme provést samotné měření. Nejprve je nutné si připravit měřící zařízení, tzn. zapnout a překontrolovat všechnu potřebnou techniku a software, obzvláště termoregulaci, osvětlení a funkčnost tenzometrů a kamery. Dále naplníme měřící prostor fyziologickým roztokem tak, aby byl celý vzorek ponořen. Poté zadáme do ovládacího programu výchozí nastavení.

Nastavení

Všeobecně platné zásady ohledně základního nastavení jsou následující:

- nastavit předpětí (0,2 N),
- nastavit posuv hlav tenzometrů (40 % rozměru vzorku),
- zkontrolovat optimální obraz kamery a teplotu 37 °C,
- nastavit rychlost posuvu podle konkrétní zkoušky.

Rychlosti posuvu jsme volili v obou osách stejné a v plném rozsahu měřícího zařízení Camea:
0,167 – 0,303 – 0,625 – 1,000 – 1,429 – 2,000 – 3,333 – 5,000 [mm.s⁻¹]

Celé měření se skládá ze tří částí:

- a) Předcyklování,
- b) Získání referenčního snímku a rozměrů vzorku po předcyklování,
- c) Měření a export dat.

a) Předcyklování

Kvůli viskoelastickým jevům je nutné vzorek před samotným měřením nejdříve několikrát vystavit podmínkám měření, abychom tak docílili ustálení hysterezní smyčky. V praxi to znamená čtyři krát vzorek změřit „nanečisto“ tedy cyklicky natahovat na předepsané smluvní přetvoření určitou rychlostí posuvu.

b) Získání referenčního snímku a rozměrů vzorku po předcyklování

Po předcyklování je nutné pro další výpočty i nastavení měřící techniky změřit rozměry vzorku, a to pomocí digitálního posuvného měřítka a mikrometru. Jelikož se jedná o biologický vzorek s nerovnými hranami a plochami, který je navíc obtížně uchopitelný, bylo nutné měření opakovat vícekrát, výsledná délka, šířka a tloušťka byla vypočítána aritmetickým průměrem z naměřených hodnot. Vzorek byl při měření vložen mezi dvě laboratorní sklíčka známé tloušťky kvůli lepší manipulaci.



Obr. 6 – Vzorek připravený pro referenční snímek, digitální posuvné měřítko a mikrometr

K určení poměrného protažení je nutné vzorek vybavit referenčními body. Po předcyklování bylo někdy nezbytné body znovu přemalovat, jelikož se kvůli rozmočení či manipulaci znehodnotily.

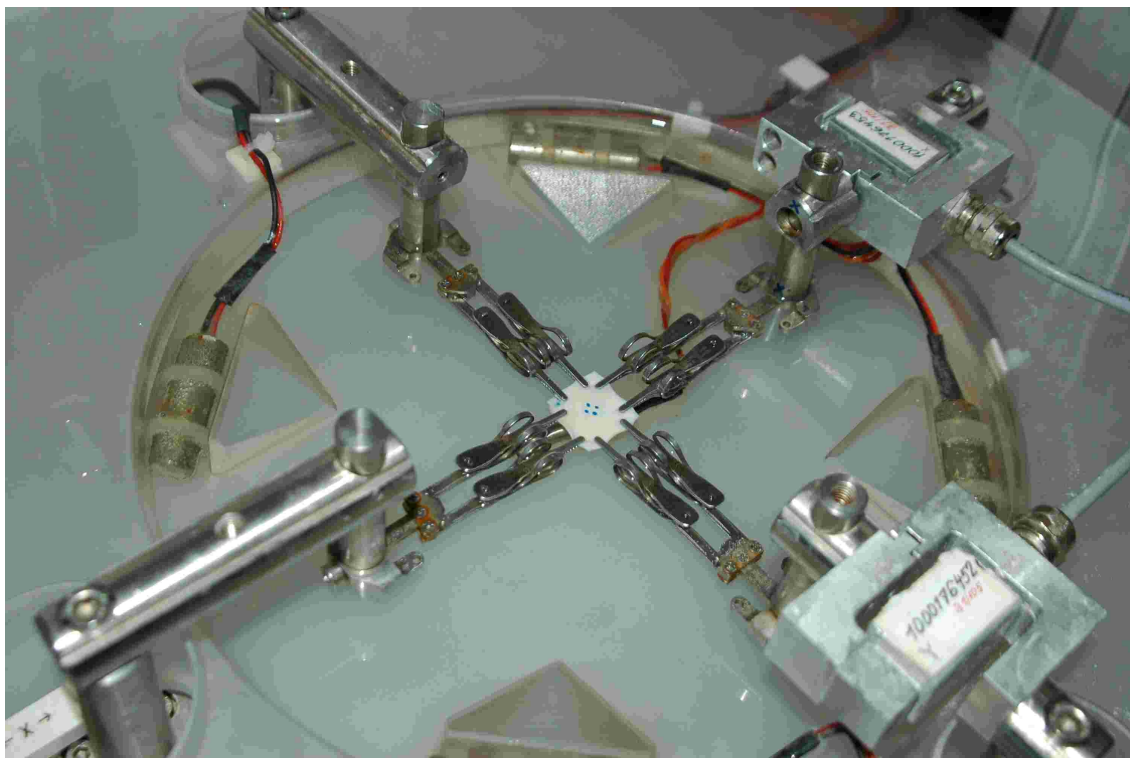
Vzorek byl položen na speciální podstavec, uložen mezi laboratorní sklička a postaven pod kameru. Po optimálním nastavení kamery jsme vytvořili referenční snímek. Následně jsme jej upnuli zpět do svorek, aby mohlo proběhnout měření.

Doba, po kterou trvá celý proces změření rozměru a získání referenčního snímku, musí být co nejkratší, aby se neztratil účinek předcyklování.

c) Měření a export dat

Každý měřicí cyklus zahrnuje přenastavení příslušné velikosti či rychlosti posuvu a exportem dat ve formátu .tif do samostatného souboru. Začíná se nejmenší rychlostí posuvu a končí se největší, jelikož při větších rychlostech je větší pravděpodobnost poškození vzorku svorkami a jelikož bylo cyklování prováděno na nejmenší rychlost posuvu.

Naměřená data se dále zpracovávají v programu Tibixus, který je popsán níže.



Obr. 7 – Měřicí prostor, vzorek je předeprnut

5.4 Technické a časové údaje měření

Nejdříve byla autorem práce provedena cvičná měření s rozmraženými prasečími aortami v průběhu přibližně tří měsíců, aby mohl být na základě zkušeností sestaven vhodný protokol měření a zjištěna případná úskalí metody měření. Celkem při tom bylo spotřebováno více než 40 vzorků. Poté byly k měření použity čerstvé vzorky, jejichž měření byla prováděna autorem práce a Bc. Vojtěchem Manem. Jeden experimentátor vždy ovládal software a druhý manipuloval se vzorkem. Měření jednoho vzorku i s přípravou trvalo průměrně 40 minut. První měření bylo neúspěšné, jelikož nastala u měřícího zařízení porucha. Potřebná data jsme získali až o měsíc později při dalším měření, kdy bylo změřeno sedm vzorků v průběhu necelých pěti hodin. Jeden vzorek byl vyloučen jako vadný, pro další vyhodnocení jsme proto použili data ze šesti vzorků.

5.5 Chyby a nepřesnosti měření

Měření biologických tkání se všeobecně potýká s velkou komplikovaností měření v důsledku mnoha ovlivňujících faktorů [1].

Při měření jsme se setkali s následujícími problémy, které jsme rozdělili dle charakteru:

Vlastnosti vzorku:

- při preparaci vzorku stačí velmi malé poškození, aby se vzorek znehodnotil,
- obtížné určení rozměrů, obtížná manipulace,
- měkkost tkáňe; svorky svým stiskem a ostrými zoubky mohou vzorek poškodit.

Podmínky, které se při měření musí dodržet:

- vzorek je ponořený do fyziologického roztoku s konstantní teplotou 37 °C,
- referenční body, tzn. namalované tečky, se postupně rozpíjí, což zhoršuje následnou detekci a tudíž určení přetvoření,
- při měření čerstvých aort se musí stihnout více měření v rozsahu několika málo hodin, díky čemuž jsou experimentátoři vystaveni časovému stresu.

V neposlední řadě je nutné zmínit, že jsme při zkušebním měření nanečisto zjistili, že při určité rychlosti posuvu, konkrétně 1,667 mm.s⁻¹, můžeme narazit na vlastní frekvence měřícího zařízení Camea, což výrazně ovlivňuje výsledky. Na základě tohoto poznatku jsme byli nuceni měřit mírně jinou rychlostí posuvu, než jsme původně měli v plánu. Namísto 1,667 mm.s⁻¹ jsme použili 1,429 mm.s⁻¹.

Na základě všech těchto poznatků byl protokol měření často inovován, aby bylo měření co nejpřesnější. Přes všechny snahy lze z výše uvedeného usuzovat, že se není možné vyhnout výsledné nepřesnosti, která se pohybuje v řádu jednotek až desítek procent.

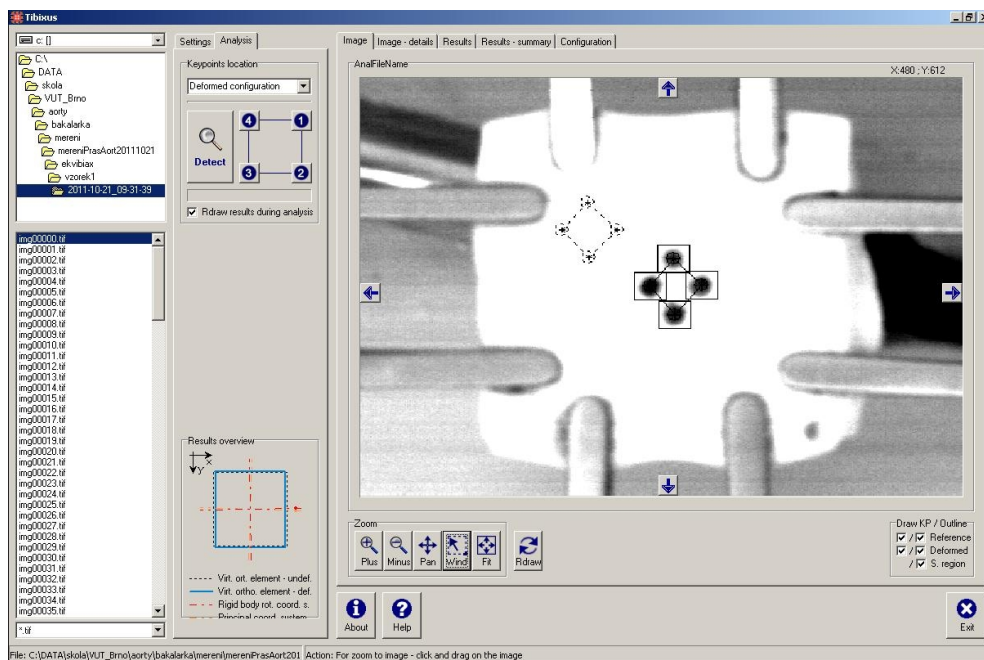
6 ZPRACOVÁNÍ NAMĚŘENÝCH DAT

Výstupní data z měření jsou série obrázků zkoušeného vzorku seřazené v závislosti na čase. V daném obrázku jsou uloženy údaje i o síle z tenzometrů, což nám umožňuje další zpracování v programu Tibixus, díky kterému získáme potřebná data k vytvoření deformačně napěťové křivky. Veličiny z programu Tibixus, které nás zajímají, jsou síly z tenzometrů, poměrné protažení v osách x a y a počáteční rozměry vzorku. Tyto veličiny přepočítáme na smluvní napětí a smluvní přetvoření.

Dále je nutné křivky zkontrolovat a korigovat zjevně poškozená data, např. jeden bod úplně mimo křivku vzniklý šumem při detekci referenčních bodů. Z těchto dat se v programu MATLAB zpracují grafy pro určení závislosti deformačně-napěťové křivky na rychlosti zatěžování a deformační energie daných rychlostí. Pro konečné zpracování se pro všechny křivky použijí níže uvedené postupy, které mají za cíl co nejkvalitnější proložení experimentálních dat teoretickým modelem (Yeoh 5-param., Demiray) v programu Hyperfit. Experimentální data z Tibixu, zdrojové soubory s programy a výsledky a grafy se nacházejí na příloženém CD.

6.1 Zpracování snímků programem Tibixus

Po měření je na řadě zpracování snímků pořízených kamerou. Program Tibixus umožňuje pomocí algoritmů na rozeznávání polohy referenčních bodů zjistit poměrné protažení daného vzorku na základě změny polohy teček v průběhu měření.



Obr. 8 – Program Tibixus

Výsledné textové soubory, v nichž jsou zaznamenány hodnoty posuvů, sil a některých z nich vypočítaných veličin, se pak sériově načtou pomocí skriptu v MATLABu k dalšímu

zpracování.

6.2 Zpracování programem MATLAB, korekce naměřených dat

Ke zpracování máme velké množství souborů s numerickými daty, které jsou formálně stejné, tzn. stejné struktury dat, systematického názvu a obsahu. Je proto vhodné použít prostředí MATLAB, které v našem případě zaručuje následující výhody:

- automatické načítání a zpracování jednotlivých souborů experimentálních dat,
- flexibilní zpracování jednotlivých dat, např. při nestejném počtu naměřených hodnot,
- velký výpočetní výkon,
- možnost užití nejrůznějších filtrů ke korekci dat – propustě, plovoucí průměr, apod.,
- automatické vykreslování, nastavování a ukládání grafů,
- automatický export zpracovaných dat ve zvoleném formátu – použití pro Hyperfit.

Konkrétní postupy zpracování a korekce dat jsou určeny požadovaným výstupem. V našem případě máme tři výstupy, které jsou dány metodami vyhodnocení vlivu rychlosti deformace. Jejich typ, obsah a charakter je popsán v následujících podkapitolách.

Na začátku každého zpracování se hodnoty z programu Tibixus přepočítají na smluvní napětí σ_{sml} , případně na smluvní přetvoření ϵ . Poměrné protažení λ není potřeba počítat, je již obsaženo v souboru z Tibixu. Pro vyhodnocení měrné deformační energie je nutné dopočítat členy tenzoru napětí (2. Piola-Kirchhoff) a přetvoření (Green-Lagrange).

6.2.1 Grafy pro vizuální porovnání deformačně napěťových křivek

Výstupem je graf deformačně napěťových křivek všech rychlostí posuvu pro daný jeden vzorek. Křivky jednotlivých rychlostí jsou znázorněny přes sebe, díky čemuž je možné vizuálně porovnat, zda a v jaké míře se od sebe liší. Každé křivce je přiřazena barva dle zvolené barevné škály. Díky tomu je lze od sebe rozeznat, což je důležité pro následné vyhodnocení.

6.2.2 Grafy hodnot měrných deformačních energií

Výstupem je graf hodnot měrných deformačních energií pro danou rychlost či pro daný vzorek. Deformační energie se získá numerickou integrací lichoběžníkovou metodou. Body se proloží křivkou lineární regrese (přímkou), díky které můžeme určit trend růstu či poklesu deformačních energií v závislosti na rychlosti.

6.2.3 Data pro konstitutivní model v programu Hyperfit

Výstupem je jednoduchý textový soubor (.txt) s číselnými daty, který je poté použit v programu Hyperfit pro vytvoření konstitutivního modelu. Soubor obsahuje hodnoty smluvního přetvoření a smluvního napětí.

Zpracování spočívá v přepočítání poměrného protažení na smluvní přetvoření a exportu dat ve formátu přizpůsobeném pro Hyperfit do jednoduchého textového souboru (.txt).

6.3 Proložení experimentálních dat konstitutivním modelem

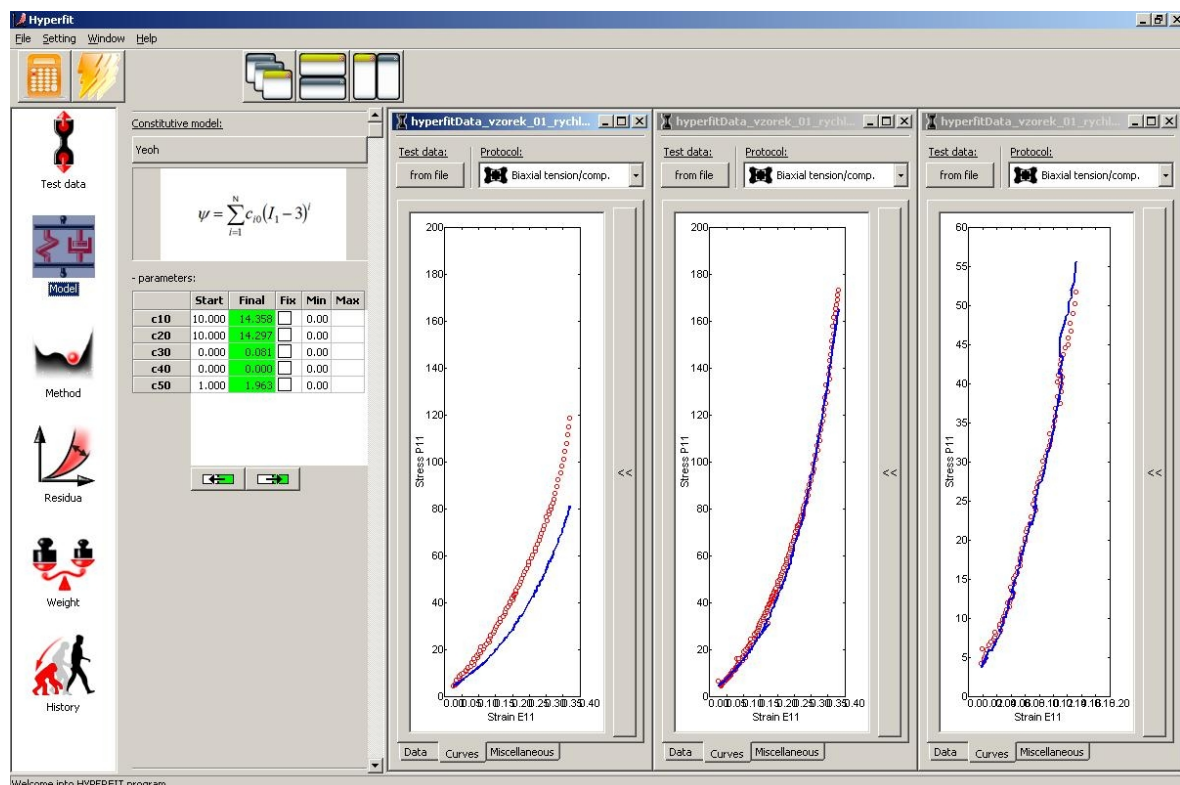
Z naměřených dat je možné pomocí programu Hyperfit vytvořit pro daný vzorek konstitutivní model. Tento model můžeme použít jako referenční k porovnávání křivek. Zvolili jsme dva izotropní modely, a to pětiparametrický Yeoh (polynomický) a Demiray (exponenciální).

Pro získání konstitutivního modelu potřebujeme celkem tři soubory dat z různých zkoušek pro daný vzorek, aby byl výsledný model dostatečně robustní. Konkrétně to znamená:

- 1x ekvibiaxiální, tedy poměr rychlostí a velikostí posuvů v osách x a y je 1:1,
- 2x proporcionální, poměr je 2:1 a 1:2.

Pro další vyhodnocení vlivu rychlosti na deformačně napěťovou charakteristiku byly pro daný vzorek vytvořeny vždy dva různé modely. Tyto modely se liší souborem z ekvibiaxiální zkoušky – jsou použita data ze zatěžování rychlostí 0,167 mm.s⁻¹ a 3,333 mm.s⁻¹.

Jednotlivé soubory dat nemají stejný počet hodnot. Je tudíž nutné v programu nastavit váhy, které zaručí, že se soubory podílejí na výsledném modelu stejnou měrou. Stejně tak je nutné u modelu Yeoh omezit parametry c_{0i} tak, aby byly kladné, což vychází z fyzikálního předpokladu, že deformačně napěťová charakteristika je rostoucí funkce.



Obr. 9 – Program Hyperfit

Kvalita proložení experimentálních dat konstitutivním modelem je vyjádřena čtyřmi odchylkami a koeficienty. Jsou to normalizovaná odchylka (NE), normalizovaná střední odchylka (NRMSE), korelační koeficient (r) a koeficient determinace (R²).

7 VYHODNOCENÍ VLIVU RYCHLOSTI DEFORMACE

Po zpracování naměřených dat je možné přejít k vyhodnocení vlivu rychlosti deformace na deformačně napět'ové závislosti tkáně aorty pomocí různých metod. Rozsah rychlosti zatěžování byl dán limity měřicího zařízení Camea, a to od $0,167 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$ do $5,000 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$.

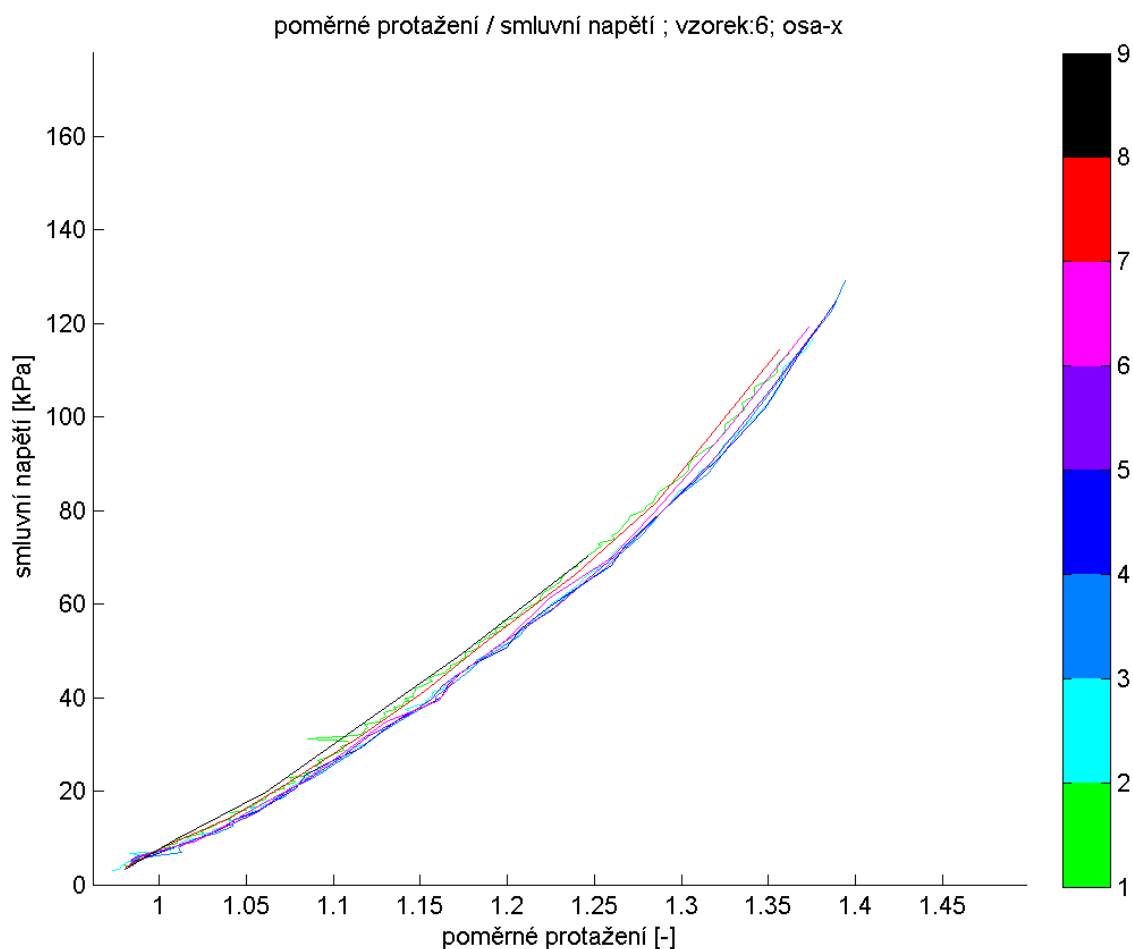
Celkem bylo použito osm rychlostí $[\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}]$:

$0,167 - 0,303 - 0,625 - 1,000 - 1,429 - 2,000 - 3,333 - 5,000$.

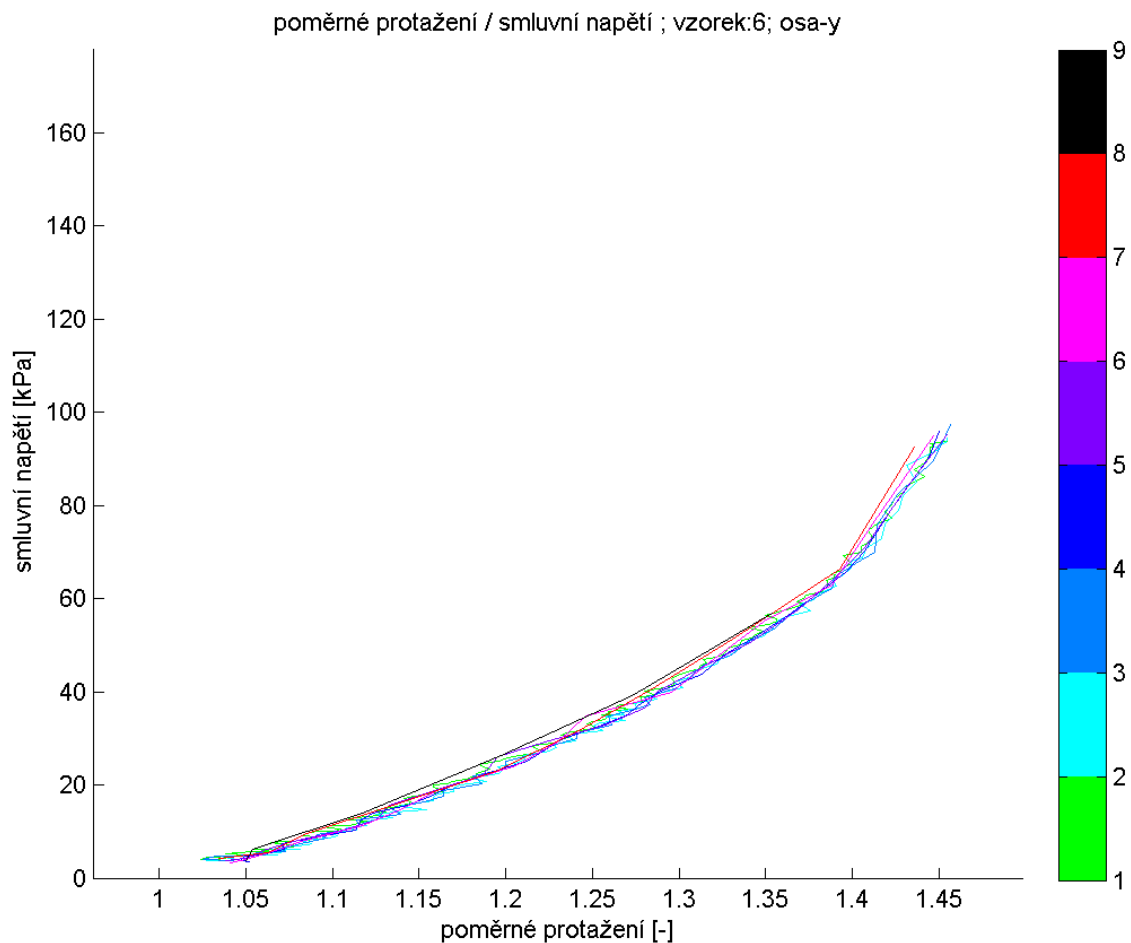
V následujících kapitolách jsou uvedeny vždy vybrané grafy, celý soubor všech grafů se nachází v příloze.

7.1 Vizuální porovnání deformačně napět'ových křivek

Nejjednodušší metodou je porovnat jednotlivé deformačně napět'ové křivky od příslušných rychlostí zatěžování, do jaké míry se překrývají. Graf platí pro jeden vzorek v ose x nebo y. Následující grafy ukazují průběh napětí v závislosti na deformaci pro vzorek č. 6. Křivka nejvyšší rychlosti má černou barvu, nejnižší pak zelenou.



Obr. 10 – Graf deformačně napět'ové charakteristiky pro vzorek č. 6, všechny rychlosti (barevně rozlišené), osa x

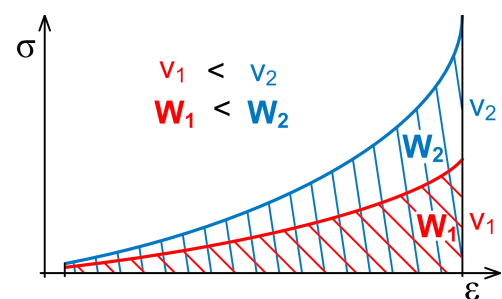


Obr. 11 – Graf deformačně napěťové charakteristiky pro vzorek č. 6, všechny rychlosti (barevně rozlišené), osa y

Z grafů je zřejmé, že deformačně napěťová charakteristika nezávisí na rychlosti zatěžování. V případě závislosti by se křivky neměly překrývat a měly by dodržet pořadí dle škály.

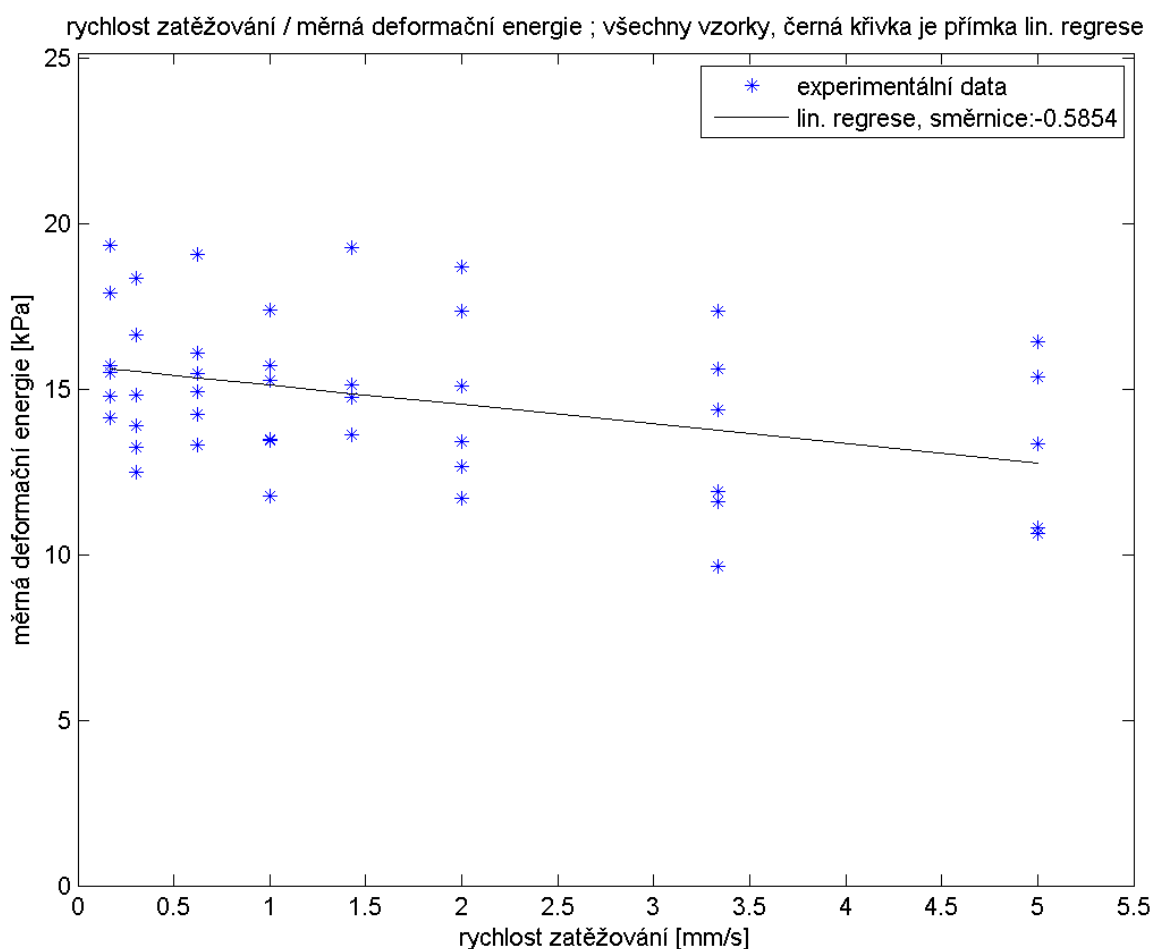
7.2 Vyhodnocení měrné deformační energie numerickou integrací

Z naměřených dat lze vypočítat měrnou deformační energii pro daný vzorek a danou rychlost posuvu. Předpokládáme, že u viskoelastických materiálů je deformační energie W při zatěžování vyšší rychlostí v_2 větší jak při zatěžování nižší rychlostí v_1 (obr. 12), protože s vyšší rychlostí zatěžování je materiál tužší. Při výpočtu měrné deformační energie vycházíme z rovnice (22).



Obr. 12 – Graf závislosti $W(v)$ pro viskoelastické materiály

Jednotlivým rychlostem zatěžování můžeme přiřadit měrné deformační energie, získané z naměřených dat, viz obr. 13.



Obr. 13 – Graf závislosti měrné deformační energie na rychlosti zatěžování
Trend vyjádřen pomocí křivky lineární regrese – její směrnici

Z grafu je zřejmé, že předpokládaná závislost, tzn. čím vyšší rychlost zatěžování, tím větší měrná deformační energie, se zde nepotvrdila, naopak se ukazuje spíše opačná závislost.

Výpočet měrné deformační energie pomocí numerické integrace lichoběžníkovou metodou je u vyšších rychlostí, kde je počet naměřených hodnot velmi malý (5 až 6 u nejvyšší rychlosti) zatížen určitou chybou, což by mohlo být jedním z důvodů, proč závislost měrné deformační energie na rychlosti zatěžování vyšla jinak, než jsme předpokládali.

Z výpočtu, kde nebyly dvě největší rychlosti posuvu zahrnuty, však vyšlo, že směrnice přímky při lineární regresi je nejen stejně jako v předchozím případě záporná, ale že má i větší absolutní hodnotu, a to 1,543.

Rozdíly ve středních hodnotách způsobené změnou rychlosti zatěžování jsou hluboko pod hodnotou rozptylu, takže trend změny deformační energie s rostoucí rychlostí deformace nelze považovat za průkazný.

7.3 Identifikace a porovnání konstitutivního modelu

Cílem experimentů je vytvoření kvalitního konstitutivního modelu, který se dále použije v různých simulacích a výpočtech. Pro každý materiál je výhodné použít takový model, který co nejvíce vystihuje průběh experimentálně zjištěné deformačně napěťové křivky.

Měkkou biologickou tkáň považujeme za hyperelastický nestlačitelný materiál. Ačkoliv se tkáň aorty chová jako anizotropní materiál, pro jednoduchost je v práci použit izotropní model. Ze zástupců těchto modelů jsme vybrali model Demiray, který je exponenciální, a pětiparametrický Yeoh, který je polynomický.

Model vždy vystihuje chování materiálu s určitou chybou, která může být kvantifikována pomocí různých reziduí (odchylek nebo koeficientů). Nejčastěji se používá normalizovaná střední odchylka (Normalized Root-Mean-Square Error/Deviation: NRMSE) a koeficient determinace (Coefficient of Determination: R^2). Dále je možné použít korelační koeficient (r) a normalizovanou odchylku (NE). U odchylek je ideální shoda vyjádřena hodnotou 0, zatímco u koeficientů je ideální shoda vyjádřena hodnotou 1.

7.3.1 Identifikace konstitutivního modelu

V následujících tabulkách jsou uvedeny parametry obou použitých modelů a jejich rezidua. Při vytváření modelu byla vedle proporcionálních zkoušek použita ekvibiaxiální zkouška rychlostí $0,167 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$.

Demiray – 0,167 mm/s

vzorek	Parametry		Rezidua			
	a	b	NE	NRMSE	r	R^2
1	30,159	2,588	0,1307	0,1754	0,9964	0,8953
2	21,946	1,987	0,1590	0,2173	0,9929	0,8629
3	19,164	2,401	0,2045	0,2619	0,9883	0,8265
4	28,454	2,176	0,1968	0,2547	0,9930	0,7994
5	26,646	2,165	0,1730	0,2215	0,9954	0,8588
6	16,934	2,452	0,2320	0,2982	0,9889	0,7735

Tab. 1 – Parametry a rezidua modelu Demiray

Yeoh – 0,167 mm/s

vzorek	Parametry					Rezidua			
	c10	c20	c30	c40	c50	NE	NRMSE	r	R^2
1	14,544	12,515	2,290	1,584	0,000	0,1316	0,1851	0,9962	0,8913
2	9,446	10,446	0,000	0,000	0,112	0,1354	0,1772	0,9976	0,9066
3	8,176	11,023	0,023	0,196	0,162	0,1747	0,2175	0,9951	0,8480
4	13,141	12,780	0,000	0,074	0,000	0,1942	0,2435	0,9966	0,8071
5	12,227	12,082	0,000	0,000	0,044	0,1652	0,2041	0,9980	0,8653
6	6,965	10,748	0,056	0,000	0,000	0,2106	0,2494	0,9973	0,8164

Tab. 2 – Parametry a rezidua modelu Yeoh-5param.

7.3.2 Porovnání modelu Demiray vs. Yeoh

Jako vhodnější model se jeví pětiparametrický Yeoh, jelikož má menší NRMSE a větší R^2 než Demiray. Proložení experimentálních dat modelem můžeme považovat za velmi dobré, jelikož se R^2 pohybuje mezi 0,8 až 0,91.

Vzhledem k velmi malým koeficientům c_{30} , c_{40} a c_{50} lze prozkoumat možnost použití méněparametrického modelu Yeoh, který by se tak stal mnohem jednodušším, což by mohlo v dalších aplikacích najít využití. Hlavní výhodou jednoduššího modelu je, že u deformačně napěťových stavů, pro které nemáme experimentální data, má lepší predikční schopnost.

7.3.3 Metodika porovnávání souborů dat

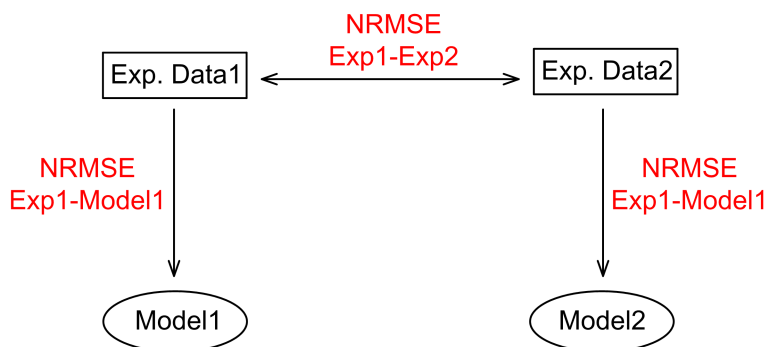
Cílem experimentů je získání kvalitního konstitutivního modelu, který je vždy aplikován s určitou odchylkou. Rozdílnost modelu od naměřených dat dobře vystihuje normalizovaná střední odchylka NRMSE.

NRMSE se dá použít na srovnání jakýchkoliv dvou souborů dat, tedy i na porovnání experimentálních dat mezi sebou. V takovém případě nám určuje, jak se křivky od sebe liší. Největší odlišnost deformačně napěťových křivek předpokládáme mezi nejmenší a nejvyšší rychlostí zatěžování.

Využití lze nalézt v následující úvaze: Bude-li odchylka při přechodu na model výrazně větší, než odchylka jednotlivých experimentálních dat, ze kterých jsou tvořeny modely, tzn.

$$\text{NRMSE}(\text{Exp-Model}) \gg \text{NRMSE}(\text{Exp1-Exp2})$$

bude možné vliv použití různých experimentálních dat, která se liší rychlostí zatěžování, považovat za zanedbatelný.



Obr. 14 – Schéma $\text{NRMSE}(\text{Exp-Model})$ vs. $\text{NRMSE}(\text{Exp1-Exp2})$

Potvrdí-li se výše uvedená úvaha, bude praktický důsledek ten, že výsledný jeden konstitutivní model můžeme používat pro celý rozsah rychlostí zatěžování. Jinak řečeno není nutné započítat vliv rychlosti deformace na deformačně napěťovou charakteristiku.

7.3.4 Vliv použití deformačně napět'ových křivek různých rychlostí zatěžování na výsledný model

Výše uvedenou metodiku použijeme pro naměřené soubory dat. Aby měla NRMSE dobrou výpovědní hodnotu, je vhodné, aby soubory dat, které porovnáváme, měly dostatečný počet hodnot a výrazně se od sebe lišily pozorovanou veličinou, tedy rychlostí zatěžování. Soubor dat s nejvyšší rychlostí zatěžování, tedy $5,000 \text{ mm.s}^{-1}$, má velmi málo hodnot (5-6). Volíme tudíž data s nejnižší a druhou nejvyšší rychlostí zatěžování, tedy $0,167 \text{ mm.s}^{-1}$ a $3,333 \text{ mm.s}^{-1}$, u kterých máme k dispozici nejméně devět naměřených hodnot.

Zásadní je poměr mezi $NRMSE(\text{Exp-Model})$ a $NRMSE(\text{Exp1-Exp2})$. Vzhledem k tomu, že model Yeoh lépe vystihuje naměřená data, tzn. má v průměru menší NRMSE než Demiray, je výsledný poměr počítán pouze z hodnot pro model Yeoh a nikoliv z obou modelů.

Výsledky jsou pro lepší názornost uvedeny v následující tabulce:

NRSME – Normalizovaná střední odchylka							
Vzorek	Přechod na model					0,167 [mm/s] vs. 3,333 [mm/s]	Model vs. Exp. Poměr
	Demiray		Yeoh				
	0,167 mm/s	3,333 mm/s	0,167 mm/s	3,333 mm/s	průměr		
1	0,1754	0,2187	0,1851	0,1956	0,1904	0,0540	3,53
2	0,2173	0,1930	0,1772	0,1809	0,1791	0,0433	4,14
3	0,2619	0,2600	0,2175	0,2505	0,2340	0,0489	4,79
4	0,2547	0,2506	0,2435	0,2444	0,2440	0,0322	7,58
5	0,2215	0,2314	0,2041	0,2254	0,2148	0,0486	4,42
6	0,2982	0,2746	0,2494	0,2422	0,2458	0,0311	7,9
Průměr	0,2382	0,2381	0,2128	0,2232	0,2180	0,0430	5,39

Tab. 3 – $NRMSE(\text{Exp-Model})$ vs. $NRMSE(\text{Exp1-Exp2})$ pro $0,167$ až $3,333 \text{ [mm.s}^{-1}]$

Z výše uvedené tabulky lze vyčíst, že chyba přechodu na model je oproti vzájemné odchylce mezi soubory dat s různými rychlostmi zatěžování více než pětinasobná. Ačkoliv by bylo korektní provést ještě statistické testování hypotézy, lze vzhledem k velikosti poměru prohlásit, že z naměřených dat plyne, že vliv použití deformačně napět'ových křivek různých rychlostí v rozsahu $0,167 \text{ mm.s}^{-1}$ až $3,333 \text{ mm.s}^{-1}$ na výsledný model je zanedbatelně malý.

8 VÝPOČTOVÝ MODEL

Naměřená data a jejich vyhodnocení lze pro názornost aplikovat na výpočtovém modelu. Jako model je použita tenkostěnná trubka (bezmomentová skořepina), která svými rozměry kopíruje reálnou aortu. Zatížením je vnitřní tlak. Deformace probíhá pouze v obvodovém směru (zvětšuje se poloměr, a tedy i obvod trubky), v axiálním směru je nulová. Materiál považujeme za izotropní.

V analytické části porovnáváme případ s neměnnou geometrií a s postupně se měnící geometrií. Dále pak model s konstantním modulem pružnosti a model, kdy se modul pružnosti mění v závislosti na aktuálním přetvoření, což zjistíme z naměřených dat.

V části, kde model řešíme pomocí MKP, budeme pozorovat rozdíly mezi výpočty, které zahrnují geometrickou nelinearitu a výpočty, které ji nezahrnují. Jako materiálový model použijeme výše uvedený konstitutivní model Yeoh, který nemá konstantní modul pružnosti a poté pro srovnání pro výpočet použijeme průměrnou hodnotu modulu pružnosti.

Zadané hodnoty:	p_0	= 0	kPa	počáteční zátěžný tlak
	p_{end}	= 40	kPa	konečný zátěžný tlak
	r_{i0}	= 12,5	mm	střední poloměr trubky
	t_0	= 2	mm	tloušťka stěny
	ε_{i0}	= 0		smluvní přetvoření v obvodovém směru
	ε_z	= 0		smluvní přetvoření v axiálním směru
	μ	= 0,5		Poissonův poměr

8.1 Analytické řešení

Při řešení analytickým způsobem vycházíme z Laplaceova vztahu pro bezmomentovou skořepinu (23) [11], z Hookeova zákona (24) [11] a ze zákona zachování objemu stěny trubky (25).

$$\frac{\sigma_m}{r_m} + \frac{\sigma_t}{r_t} = \frac{p}{t} \quad (23)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu \sigma_t) \quad \varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \mu \sigma_z) \quad (24)$$

$$V_0 = h \pi [(r_t + t)^2 - r_t^2] = konst. \quad (25)$$

Vzhledem k tomu, že $\sigma_m = \sigma_z$ a vzhledem k předpokladu, že $\varepsilon_z = 0$, můžeme z rovnice (24) dokázat, že platí

$$\sigma_z = \mu \sigma_t \quad (26)$$

Pak lze pro výpočet ε_t použít následující vztah

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} \sigma_t (1 - \mu^2) \quad (27)$$

Jako model jsme si zvolili trubku, poloměr r_m je tudíž nekonečně velký. Z rovnice (23) pak vyplývá, že obvodové napětí σ_t lze spočítat z následujícího vztahu

$$\sigma_t = \frac{p r_t}{t} \quad (28)$$

Tloušťka stěny je závislá pouze na změně poloměru, jelikož platí zákon zachování objemu a jelikož se výška skořepiny nemění. Závislost mezi r_t a t lze popsat vztahem

$$t = \frac{r_{t0} t_0}{r_t} \quad (29)$$

Veličiny, které nás především zajímají, jsou obvodové smluvní přetvoření ε_t a obvodové napětí σ_t v závislosti na zatěžujícím tlaku p .

8.1.1 Výpočet pro neměnnou geometrii

Jako první případ si volíme nejjednodušší model, tedy s neměnnou geometrií, která je jedním ze základních předpokladů lineární pružnosti [PPI]. Pro zjištění σ_t stačí dosadit do (28):

$$\sigma_t = \frac{p r_t}{t} = \frac{p_{end} r_{t0}}{t_0} = 250 \text{ kPa} \quad (30)$$

Vidíme, že σ_t nezávisí na materiálu, pouze na zátěžném tlaku p , a to lineárně. Pro určení přetvoření dle (27) volíme modul pružnosti $E = 825 \text{ kPa}$. Volba této konkrétní hodnoty je vysvětlena v následující kapitole. Výsledné přetvoření v obvodovém směru je pak

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} \sigma_t (1 - \mu^2) = 0,23 \quad (31)$$

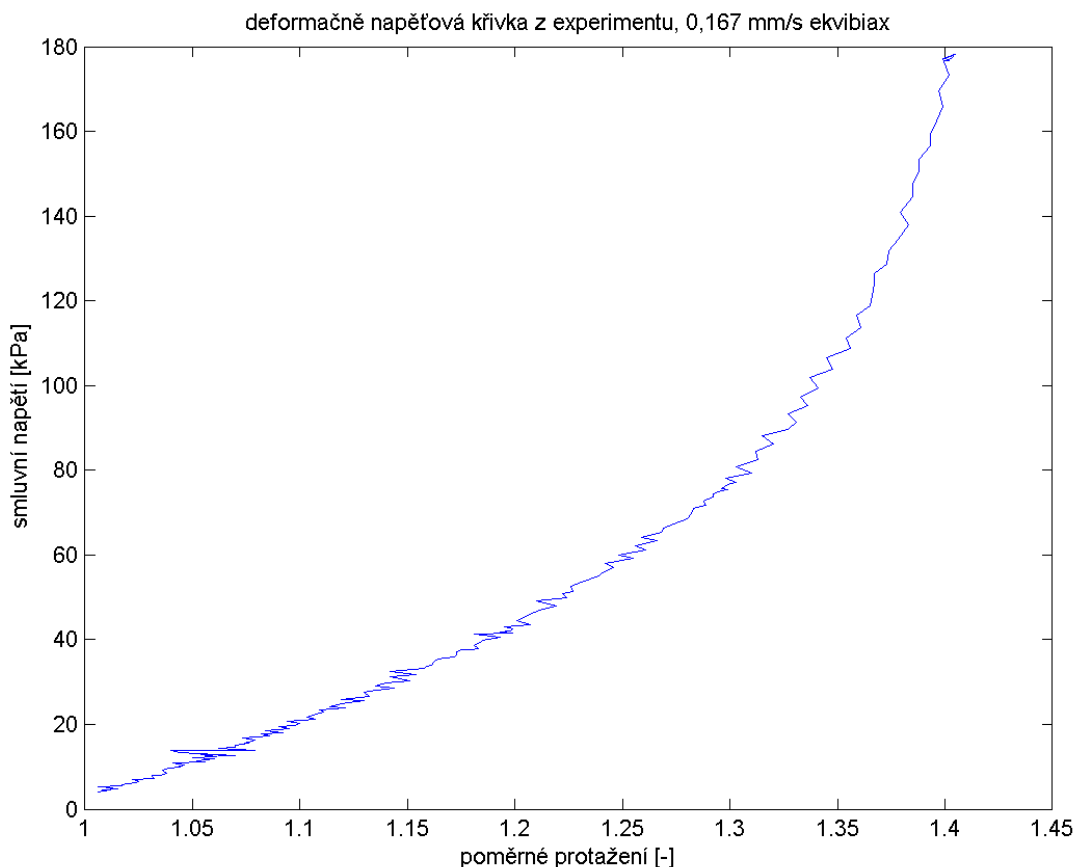
8.1.2 Výpočet přírůstkovou metodou

Přírůstková metoda výpočtu v sobě zahrnuje velkou geometrickou nelinearitu, která má velký vliv na výsledné napětí a přetvoření. Základní princip spočívá v tom, že se skořepina zatěžuje postupně, po přírůstcích tlaku Δp . Napětí σ_t a přetvoření ε_t se tedy v každém kroku, tzn. po přičtení přírůstku tlaku, vypočítá z aktuální geometrie – r_t a t . Počet kroků závisí na počátečním tlaku p_0 , koncovém tlaku p_{end} a na velikosti přírůstku tlaku Δp . Na základě optimálního výpočtu a výsledných grafů jsme zvolili $\Delta p = 0,01 \text{ kPa}$.

Logickou úvahou lze dojít k závěru, že při určitém zátěžném tlaku p_{max} poroste napětí i přetvoření nade všechny meze. Důvodem je neustále se měnící geometrie – postupně větší tlak působí na čím dál menší tloušťku stěny na čím dál větším poloměru a následně způsobuje vzrůstající deformaci v obvodovém směru, která zpětně zmenšuje tloušťku stěny.

Veličinou, která výrazně ovlivňuje velikost přetvoření, je modul pružnosti E , viz (24). Tento vliv se projeví jak při výpočtu a průběhu σ_t v závislosti na p , tak i ve výsledném p_{max} ,

narozdíl od lineární pružnosti a pevnosti. Určujícím prvkem při určování modulu pružnosti je příslušná deformačně napěťová křivka, viz následující obr. 15:



Obr. 15 – Graf deformačně napěťové křivky, použité pro výpočtový model

Z naměřených deformačně napěťových křivek je jasné, že materiál je nelineární, takže E není jednoznačnou materiálovou charakteristikou, ale že se v průběhu zatěžování mění, a to v závislosti na velikosti přetvoření. Dá se určit různými způsoby, které jsou rozebrány v následujících podkapitolách.

8.1.2.1 Model s konstantním modulem pružnosti

Díky přírůstkové metodě již v modelu máme zahrnutou geometrickou nelinearitu. Materiál se však vyznačuje i modulem pružnosti závislým na velikosti deformace. Otázkou však je, zda nelze použít průměrnou hodnotu, kterou lze snadno zjistit i aplikovat, a dosáhnout tím stejných výsledků jako při zahrnutí proměnlivého modulu pružnosti. Průměrnou hodnotu E_{aver} lze spočítat jako podíl konečného napětí a přetvoření, tedy jako sečný modul pružnosti:

$$E_{aver} = \frac{\sigma_{end}}{\varepsilon_{end}} = 436 \text{ kPa} \quad (32)$$

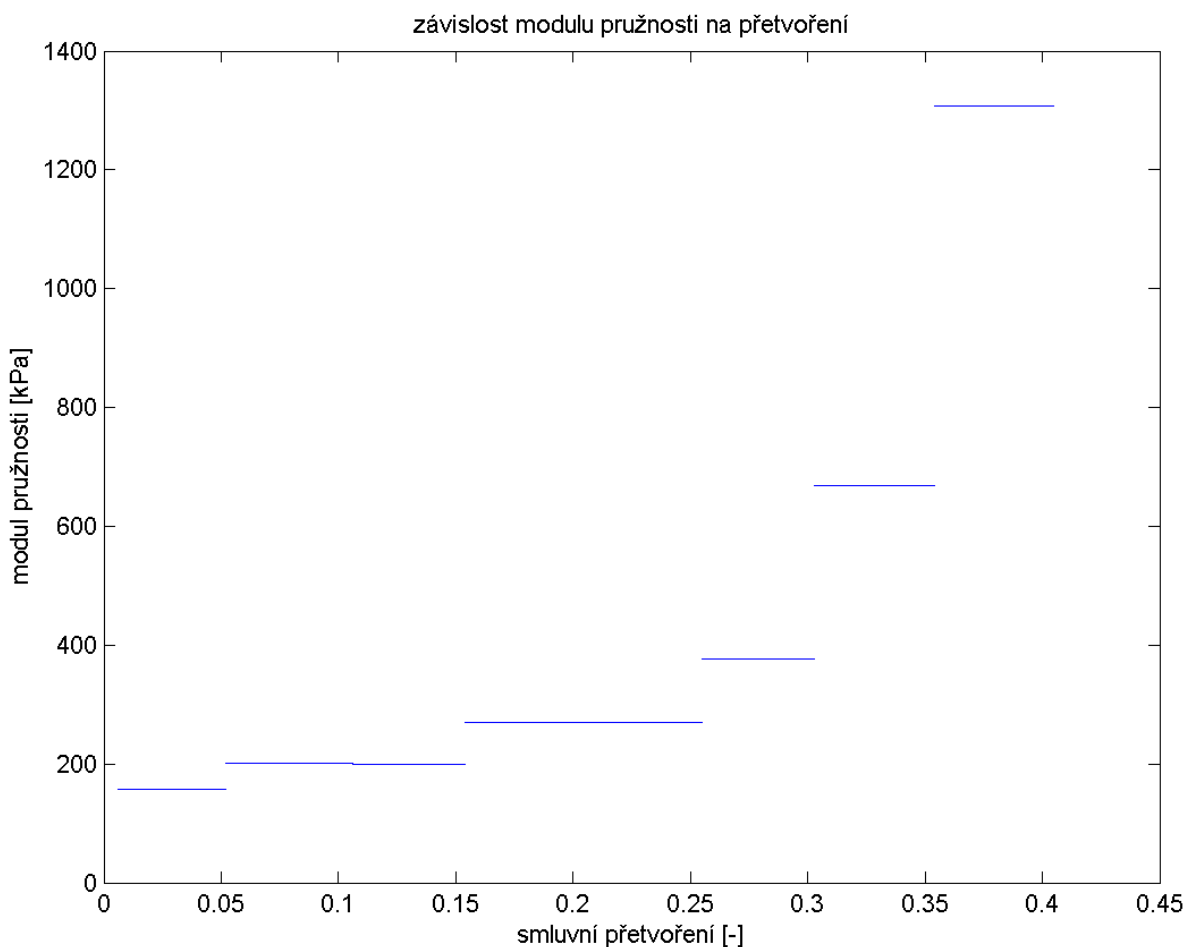
Průběh obvodového napětí σ_t a přetvoření ε_t v závislosti na zátěžném tlaku p je vyneseno v grafech na obr. 17 a na obr. 18.

8.1.2.2 Model s proměnlivým modulem pružnosti

V následujícím modelu je zahrnuta jak geometrická nelinearita, tak i proměnlivý modul pružnosti. Ten získáme podobnou metodou jako při určování průměrného modulu pružnosti. Deformačně napěťovou křivku si rozdělíme na n úseků (volíme $\Delta\varepsilon \approx 0,05$, z čehož $n = 8$), které jsou ohraničeny příslušnými σ_i a ε_i . Na těchto úsecích je daný E_i konstantní. Hodnoty σ_i a ε_i odečítáme z grafu na obr. 15 a E_i počítáme jako

$$E_i = \frac{\Delta\sigma_i}{\Delta\varepsilon_i} = \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i} \quad (33)$$

Výsledný graf závislosti modulu pružnosti na smluvním přetvoření získaný z naměřených dat v rozsahu ε od 0,006 do 0,405 je na obr. 16

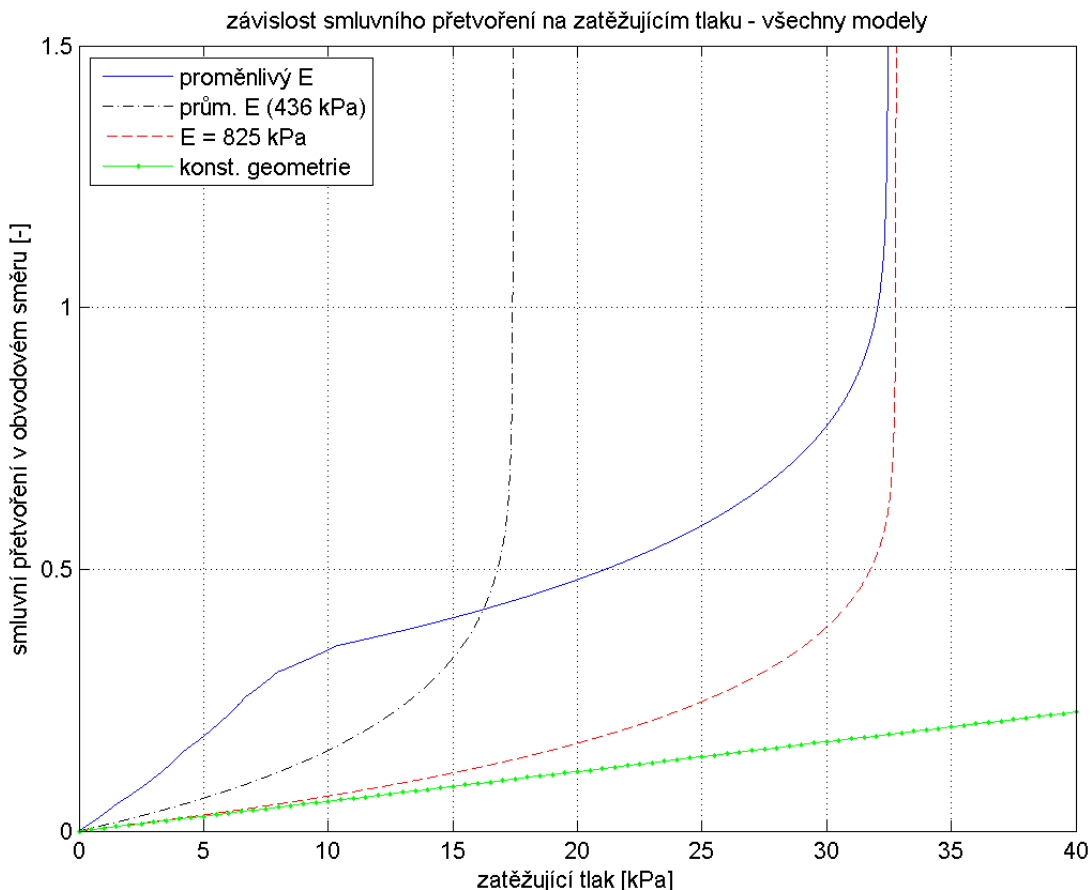


Obr. 16 – Graf závislosti modulu pružnosti E na smluvním přetvoření ε_i

Z grafu je zřejmé, že s rostoucí deformací je materiál tužší, modul pružnosti se zvyšuje. Protože nemáme experimentální hodnoty pro celý rozsah deformace, volíme pro úsek $\varepsilon < 0,006$ nejmenší E , a pro úsek $\varepsilon < 0,405$ největší E .

Při výpočtu přetvoření pomocí přírůstkové metody se skoková změna modulu pružnosti projeví zmenšením přírůstku přetvoření (27).

Výsledná závislost přetvoření na zatěžujícím tlaku pro průměrný E a pro proměnlivý E je znázorněna v grafu na obr. 17. Křivky se liší svým p_{max} , tedy zátěžným tlakem, při kterém jde ε_t a tím i σ_t nade všechny meze. Pro porovnání byly do grafu zakresleny ještě křivky pro model nezahrnující ani geometrickou a ani materiálovou nelinearitu (kap. 8.1.1) a pro model zahrnující geometrickou nelinearitu s $E = 825$ kPa, která má stejný p_{max} jako křivka s proměnlivým E . Hodnota 825 kPa byla určena metodou pokus-omyl použitím různých hodnot modulu pružnosti při výpočtu a následným vizuálním porovnáním křivek.

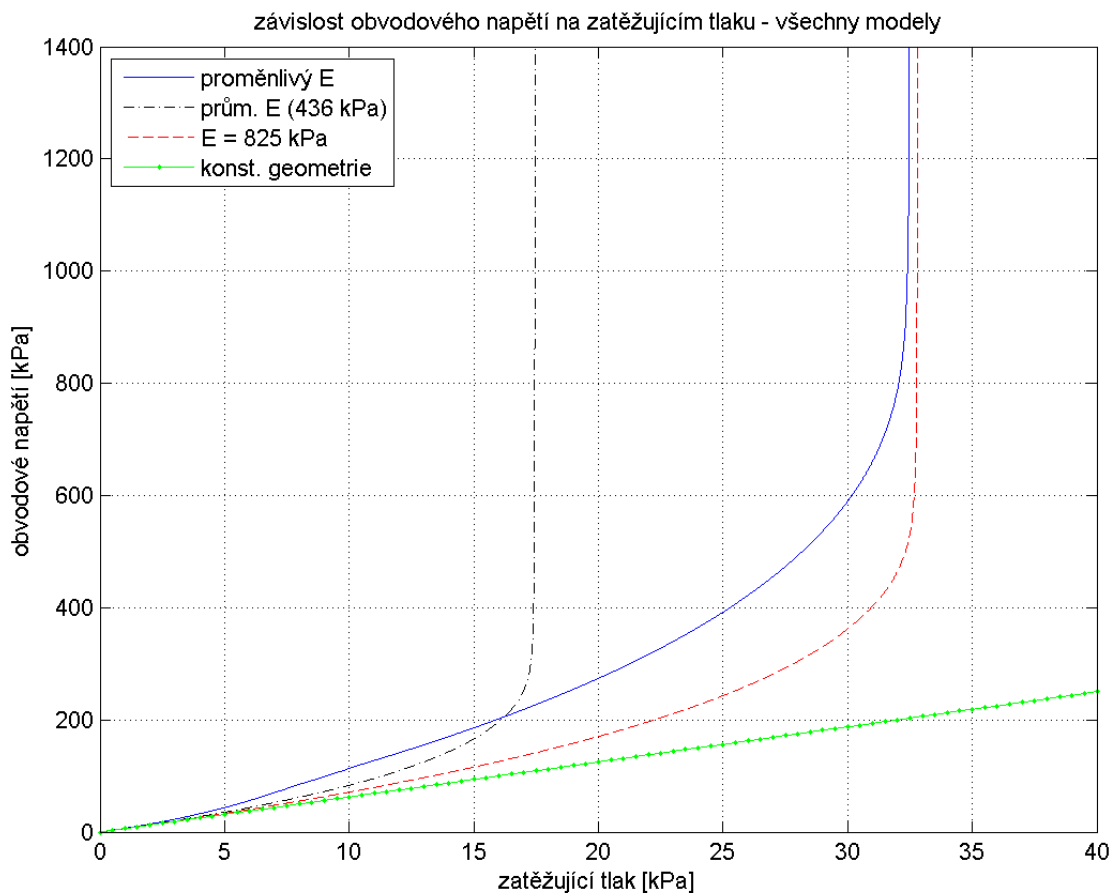


Obr. 17 – Graf závislosti smluvního přetvoření ε_t na zátěžném tlaku p

Z grafu vyplývá, že nelze použít průměrný modul pružnosti E_{avers} , jelikož se závislost ε_t na p výrazně liší od průběhu při proměnlivém E . Nelze použít ani model s konstantní geometrií, který má závislost ε_t na p lineární, jak vyplývá z lineární pružnosti. Navíc se výrazně liší od modelu, který zahrnuje geometrickou i materiálovou nelinearitu.

Srovnáme-li průběh při $E = 825$ kPa a při proměnlivém E , které mají společný p_{max} , tak se zřetelně projeví nestálý E . Největší rozdíl můžeme pozorovat v oblasti, kde se E mění, tedy do přetvoření přibližně 0,4. Křivku lze interpretovat tak, že se vzorek nejdříve při malém zatížení výrazně deformuje, s přibývajícím deformací se však stává tužším (E roste, křivka se stává méně strmou), je proto potřeba většího tlaku p na stejně velkou deformaci jako na počátku. Od $\varepsilon_t \approx 0,35$ zůstává E konstantní, a to cca 1300 kPa, průběh je proto podobný jako u jiných konstantních E .

Závislost σ_t na p je znázorněna v grafu na obr. 18. V grafu je zřetelněji vidět p_{max} . Napětí σ_t pro proměnlivý E sice roste nade všechny meze při stejném p_{max} jako při $E = 825$ kPa, v průběhu zatěžování je ovšem větší. Je to způsobeno tím, že při proměnlivém E je od počátku ε_t větší než při $E = 825$ kPa. Model s konstantní geometrií nemá p_{max} , protože napětí σ_t je lineárně závislé na zátěžném tlaku p .



Obr. 18 – Graf závislosti obvodového napětí σ_t na zátěžném tlaku p

8.1.3 Výsledky z analytických výpočtových modelů

Jako referenční model bereme výpočtový model přírůstkovou metodou s proměnlivým modulem pružnosti, jelikož nejlépe vystihuje skutečné chování reálné aorty.

Při zjednodušeném výpočtu, kdy jsme do modelu nezahrnuli proměnlivý modul pružnosti, ale jen jeho průměrnou hodnotu, jsme došli k výrazně jiným výsledkům než u modelu s proměnlivým modulem pružnosti. Tyto nepřesnosti byly způsobeny výrazně nelineární deformačně napěťovou křivkou. Pro náš případ proto tento zjednodušený lineárně elastický model nelze použít.

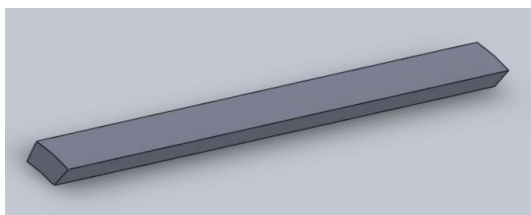
Při výpočtu, ve kterém jsme nezahrnuli geometrickou ani materiálovou nelinearitu, se výsledek ještě výrazněji neshodoval s modelem, kde obě nelinearity zahrnuty byly, proto jej také nelze použít.

8.2 Řešení pomocí MKP

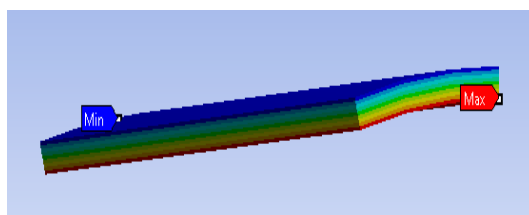
Výpočtový model, který byl v předchozí kapitole řešen analyticky, je možné vytvořit a řešit i pomocí MKP v příslušném software. Výsledkem budou závislosti obvodového napětí a přetvoření v závislosti na zátěžném tlaku a poté porovnání analytického řešení a řešení pomocí MKP. Použijeme stejný model jako v předchozí kapitole, tedy se stejnou geometrií, a zatížením. Analogicky rozdělíme modely podle toho, zda se geometrie a modul pružnosti v průběhu zatěžování mění či zůstává stejný.

Obvodové napětí σ_t a přetvoření ε_t však není počítáno z modelu bezmomentové skořepiny, ale jako maximální napětí z tlustostěnné skořepiny, tedy napětí na vnitřním poloměru, jelikož průběh napětí po tloušťce není lineární a jelikož nás vzhledem k meznímu stavu ruptury zajímá vždy maximální napětí a přetvoření.

Pro výpočet nám stačí vymodelovat jen výsek z celého tělesa, což jsme provedli v CAD systému Solidworks (obr. 19). Po importu do softwaru ANSYS jsme provedli řešení pomocí MKP (obr. 20). Výsledné hodnoty napětí a přetvoření v závislosti na zátěžném tlaku jsme exportovali do programu MATLAB, ve kterém byly pro porovnání do jednoho grafu spojeny výsledky řešení pomocí MKP a analytického řešení, viz kap. 8.3.



Obr. 19 – Model (Solidworks)



Obr. 20 – Model (Ansys)

Pro výpočty je nutné si nejdříve definovat materiál tkáně aorty. Pro modely s konstantním E platí, že je potřeba znát modul pružnosti, který volíme na základě analytického modelu $E = 825$ kPa či $E = 436$ kPa, a Poissonův poměr $\mu = 0,5$. Pro model s proměnlivým E definujeme materiál pomocí konstitutivního modelu Yeoh, jehož koeficienty jsme získali v kap. 7.3.1.

8.2.1 Výpočet pro neměnnou geometrii

Při výpočtu s neměnnou geometrií nastavíme řešič tak, aby nepočítal s aktuální geometrií, ale s původní. Jedná se o nastavení Large Deflection OFF. Vzhledem k tomu, že se modelují převážně objekty, u kterých se nepředpokládá větší deformace, tak se jedná o výchozí nastavení v programu.

8.2.2 Výpočet pro proměnlivou geometrii

Analogicky k výpočtu s neměnnou geometrií nastavíme řešič tak, aby počítal s velkými deformacemi, a tudíž vždy s aktuální geometrií, proto nastavíme Large Deflection ON. Při výpočtu s materiálem zadaným přes model Yeoh je automaticky počítáno s řešením pro velké deformace.

8.2.2.1 Model s konstantním modulem pružnosti

Pro model s proměnnou geometrií a konstantním modulem pružnosti byly použity stejné hodnoty E jako v analytickém řešení, a to 436 kPa a 825 kPa.

8.2.2.2 Nelineárně hyperelastický model

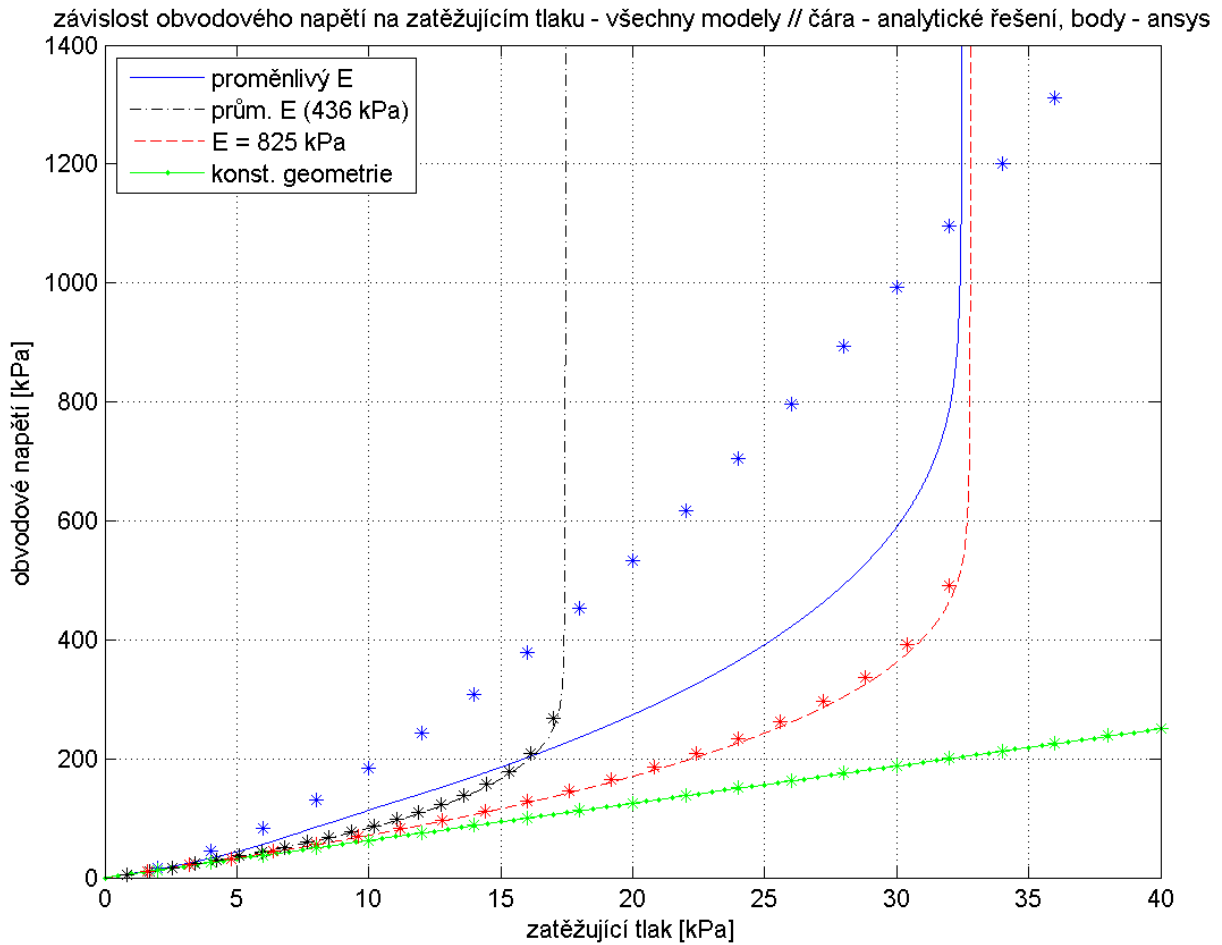
Model má materiál definovaný pomocí konstitutivního modelu Yeoh. Aktuální geometrie a napětí je vypočítáno na základě definice funkce měrné energie napjatosti.

Výsledné závislosti napětí a přetvoření na zátěžném tlaku z modelů řešených pomocí MKP jsou zobrazeny a vyhodnoceny v následující části spolu s výsledky analytického řešení.

8.3 Porovnání analytického řešení a řešení pomocí MKP

Výsledky z analytického modelu a z modelu vytvořeného pomocí MKP jsou znázorněny na následujících dvou grafech (obr. 21 a obr. 22), které vyjadřují závislost obvodového napětí σ_t a přetvoření ε_t v závislosti na zatěžujícím tlaku p . Analytické řešení je vždy znázorněno čarou určité barvy a stylu, řešení pomocí MKP body příslušné barvy.

V grafech jsou vyneseny analytické výpočtové modely, které se liší proměnlivostí geometrie a modulu pružnosti, viz legenda v grafu.

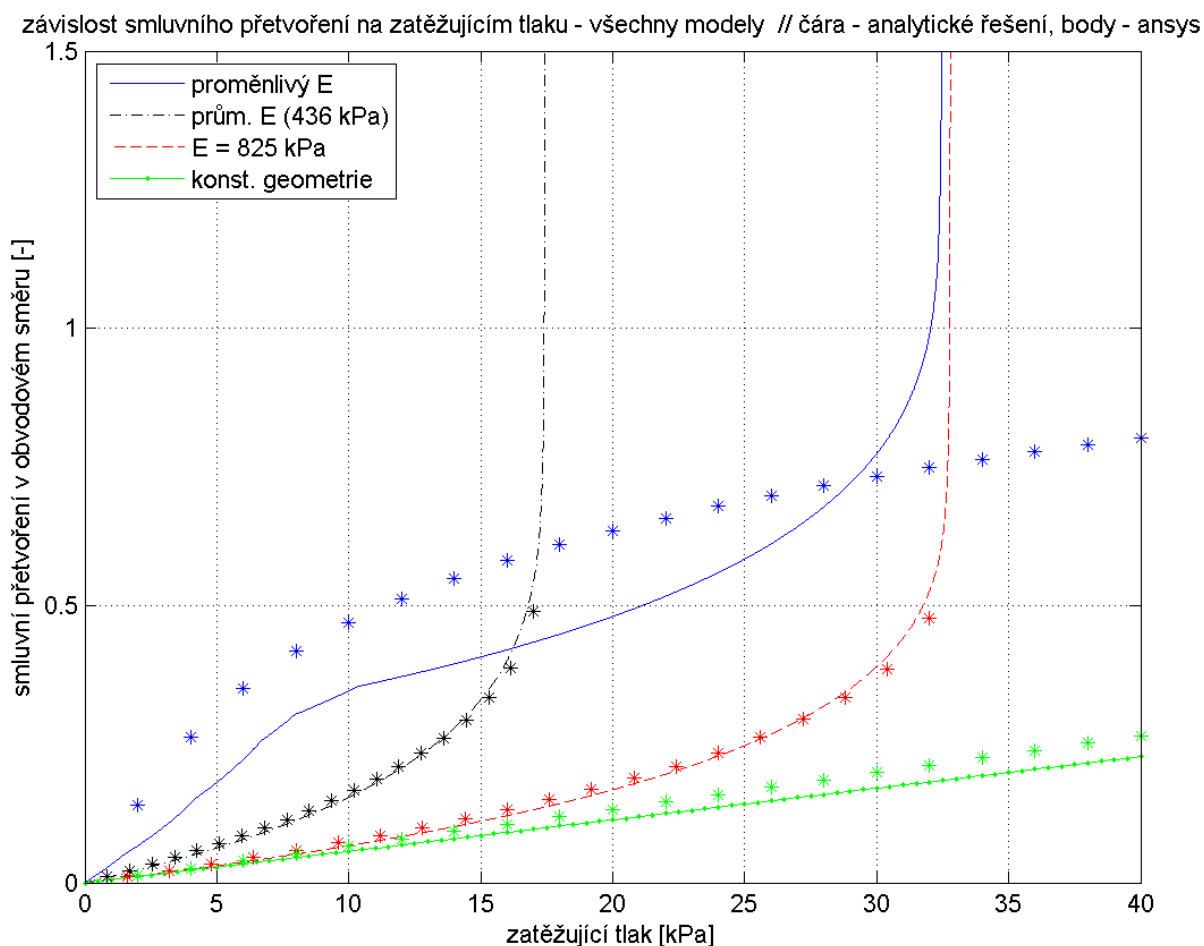


Obr. 21 – Graf závislosti obvodového napětí σ_t na zátěžném tlaku p - všechny modely

Z grafu je zřejmé, že modely s neměnným modulem pružnosti se výrazně shodují, a to i přes odlišné pojetí modelu – tenkostěnná vs. tlustostěnná skořepina. Napětí u modelů vytvořených pomocí MKP je větší než u analytických modelů, což je dáno tím, že bylo bráno maximální napětí v tlustostěnné skořepině, kdežto u analytického modelu průměrné napětí vyplývající z lineárního průběhu napětí po tloušťce tenkostěnné skořepiny.

Největší rozdíl je možné pozorovat u modelu zahrnujícím geometrickou i materiálovou nelinearitu. Příčinu lze nalézt v modulu pružnosti, který je vždy příliš dlouhou část deformace ($\Delta\varepsilon \approx 0,05$) konstantní než se změní, viz graf závislosti modulu pružnosti na smluvním

přetvoření – obr. 22. Výrazně jiné chování modelu v pozdější fázi zatěžování způsobuje fakt, že od $p \approx 11$ kPa, tedy $\varepsilon_t \approx 0,4$, je modul pružnosti konstantní. Při výpočtu pomocí MKP se na rozdíl od analytického řešení geometrie a napětí počítá z konstitutivního modelu Yeoh, což má přímý vliv na výsledné obvodové napětí a přetvoření, jak je vidět na následujícím grafu závislosti přetvoření na zátěžném tlaku.



Obr. 22 – Graf závislosti přetvoření ε_t na zátěžném tlaku p - všechny modely

Z grafu je zřejmé, že modely s neměnným modulem pružnosti se stejně jako v předchozím případě shodují. Závislost přetvoření na zátěžném tlaku u analytického modelu zahrnujícího obě nelinearity vykazuje v oblasti do $p \approx 11$ kPa velmi podobný průběh jako u modelu řešeného pomocí MKP. Tato oblast odpovídá přetvoření, kde se modul pružnosti mění, tedy do $\varepsilon_t \approx 0,4$. Přetvoření u modelů vytvořených pomocí MKP je obecně větší, jelikož je bráno analogicky jako u napětí maximální přetvoření. Výraznou odlišnost mezi modely s proměnlivým modelem pružnosti způsobuje rozdílnost výpočtu aktuálního modulu pružnosti, jak bylo vysvětleno výše.

Obecně můžeme považovat model vytvořený pomocí MKP za lepší, protože lépe vystihuje reálný objekt – simulujeme tlustostěnnou skořepinu. Model, ve kterém byl použit konstitutivní model Yeoh a ne konstantní hodnota modulu pružnosti, lze považovat za nejlepší, jelikož svými vlastnostmi a výsledky nejlépe vystihuje skutečnost.

9 ZHODNOCENÍ VÝSLEDKŮ

Výsledky práce můžeme rozdělit na výsledky experimentu, zpracování a vyhodnocení naměřených dat a výpočtového modelu.

Výsledkem experimentálního měření jsou naměřená data. I přes komplikovanost a náročnější podmínky měření se úspěšně podařilo naměřit všechna potřebná data, a to ve vyhovující kvalitě. Protokol měření a zpracování dat by však bylo možné na základě lepší měřicí techniky a metody výrazně zlepšit, např. vysokorychlostní kamerou, přesnějšími tenzometry (a tím nižší hodnotou předpětí), jiným druhem referenčních bodů na vzorku, či přesnější metodou detekce referenčních bodů.

Z vyhodnocení vlivu rychlosti deformace na deformačně napěťovou charakteristiku tkáně aorty nám vyšlo, že v rozmezí rychlosti zatěžování od 0,167 do 5,000 mm.s⁻¹ nemá rychlost deformace na výslednou charakteristiku vliv. Vycházíme především z vizuálního porovnání jednotlivých deformačně napěťových křivek pro dané vzorky a rychlosti zatěžování. Vyhodnocení pomocí měrné deformační energie potvrdilo výše uvedenou nezávislost charakteristiky na rychlosti deformace. Autoři článku [12] pozorovali v prakticky stejném rozsahu zatěžování shodný výsledek, metoda měření se však lišila od metody použité v této práci.

Podařilo se nám s dobrou přesností proložit naměřenými daty konstitutivní model tkáně aorty. Pětiparametrický model Yeoh se osvědčil lépe než model Demiray. Vzhledem k velmi nízkým hodnotám třetích, čtvrtých a pátých koeficientů stojí za zvážení použití jednoduššího, dvouparametrického modelu Yeoh.

Z naměřených dat bylo zjištěno, že normalizovaná střední odchylka při přechodu na konstitutivní model byla v průměru 5,5 krát větší než odchylka mezi soubory dat s nejnižší a druhou nejvyšší rychlostí deformace. V praxi to znamená, že vliv použití deformačně napěťových křivek různých rychlostí v rozsahu 0,167-3,333 mm.s⁻¹ na výsledný model je zanedbatelně malý.

Z výsledků výpočtových modelů je zřejmé, že nejlepší model byl získán pomocí MKP za použití hyperelastického modelu Yeoh, který zohledňuje materiálovou i geometrickou nelinearitu po celou dobu zatěžování.

10 ZÁVĚR

Literatura, zabývající se vlivem rychlosti zatěžování na mechanickou odezvu tkání arteriální stěny, se shoduje v tom, že se tkáň aorty chová jako viskoelastický materiál a že tudíž existuje vliv rychlosti zatěžování na deformačně napěťovou charakteristiku tkáně aorty. Tento vliv při vyšších rychlostech zatěžování narůstá.

V práci bylo pomocí experimentu a následného vyhodnocení zjištěno, že v rozsahu rychlosti zatěžování $0,167$ až $5,000$ $\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$ je vliv rychlosti zatěžování zanedbatelný, a že mnohem důležitější při tvoření výpočtového modelu je zahrnutí geometrických a materiálových nelinearit, což bylo ověřeno porovnáním analytických a MKP modelů.

Odchylka při přechodu na konstitutivní model byla výrazně větší než odchylka mezi soubory dat různými rychlostmi deformace, což znamená, že použití deformačně napěťových křivek různých rychlostí v daném rozsahu na výsledný model nemá vliv. Jako nejlepší z uvedených výpočtových modelů se jeví hyperelastický model Yeoh za použití MKP.

11 SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY A ZDROJŮ

- [1] JANÍČEK, P.; ROSENBERG, J.; KŘEN, J. *Biomechanika*. 1. vyd. Plzeň: Vydavatelství Západočeské univerzity, Fakulta aplikovaných věd, 1997. 380 s. ISBN 80-7082-365-8.
- [2] CHOMICĚ, D. *Vliv mechanických vlastností cévních protéz na jejich klinické použití*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2010. 43 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Jiří Burša, Ph.D.
- [3] HOLUBÁŘ, O. *Analýza šíření tlakové vlny v aortě*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2011. 73 s. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Jiří Burša, Ph.D.
- [4] MUCHA, Petr. *Deformačně-napěťová analýza výdutí tepen*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2008. 59 s. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Jiří Burša, Ph.D.
- [5] BURŠA, Jiří. *Biomechanika III* [online]. [cit. 2012-03-19]. Elektronické opory. Dostupné z: <<http://www.umt.fme.vutbr.cz/cz/studium/studijni-materialy.html>>.
- [6] Web medicínských studijních podkladů, podporovaný lékařskými fakultami České a Slovenské republiky. *WikiSkripta* [online]. [cit. 2012-04-12]. Dostupné z: <<http://www.wikiskripta.eu/index.php/Home>>.
- [7] Web FTSV UK, kompendium biomechaniky. *Biomechanika* [online]. [cit. 2012-03-19]. Dostupné z: <<http://biomech.ftvs.cuni.cz/pbpb/kompendium/biomechanika/index.php>>.
- [8] KITTNAR, O., et al. *Lékařská fyziologie*. 1. vyd. Praha: Grada, 2011. 800 s. ISBN 978-80-247-3068-4.
- [9] PETRUŠKA, J.; BURŠA, J. *Nelineární úlohy mechaniky v MKP* [online]. [cit. 2012-03-19]. Elektornické opory. Dostupné z: <<http://www.umt.fme.vutbr.cz/cz/studium/studijni-materialy.html>>.
- [10] JANÍČEK, P.; ONDRÁČEK, E.; VRBKA, J.; BURŠA, J. *Mechanika těles : Pružnost a pevnost I*. 3. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2004. 287 s. ISBN 80-214-2592-X.
- [11] JANÍČEK, P.; ONDRÁČEK, E.; VRBKA, J.; BURŠA, J.. *Mechanika těles : Pružnost a pevnost II*. 4. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006. 262 s. ISBN 80-214-3260-8.
- [12] YANG, T., CHUI C.K., QIN, J., CHANG, S.K.Y. Quasi-linear viscoelastic modeling of arterial wall for surgical simulation. *International Journal of Computer Assisted Radiology and Surgery*, 2011, vol. 6, pp. 829-838. ISSN 1861-6429.

- [13] BAUER, R.D., BUSSE R., SCHABERT, A., WETTERER, E. The role of the elastic and the viscous wall properties in the mechanics of elastic and muscular arteries. *Cardiovascular System Dynamics*, ed. KENNER T., BUSSE R., HINGHOFER-SZALKAY H., Plenum Press, New York, 1982, pp. 373-382.
- [14] WESTERHOF, N., NOORDERGRAAF A. Arterial viscoelasticity: a generalized model. *Journal of Biomechanics*, 1970, vol. 3, pp. 357-379. ISSN 0021-9290.
- [15] FENION, T.R., CARTER, S.A., VAISHNAV, R.N. Collapse and viscoelasticity of diseased human arteries. *Journal of Biomechanics*, 1984, vol. 17, no. 10, pp. 789-793. ISSN 0021-9290.
- [16] HOFFMANN, A.H., MACWILLIAMS, B.A., SAVILONIS, B.J. Viscoelastic modeling of arterial behavior within a single cardiac cycle. *International Journal of Cardiovascular Medicine and Science*, 1997, vol. 1, no. 1, pp. 51. ISSN 1095-4910.
- [17] WU, S.G., LEE, G.C. On nonlinear viscoelastic properties of arterial tissue. *Journal of Biomechanical Engineering*, Feb. 1984, vol. 106, pp. 42-47. ISSN 0148-0731
- [18] SILVER, F.H., HORVATH, I., FORAN, D.J. Viscoelasticity of the vessel wall: the role of collagen and elastic fibers. *Critical Reviews in Biomedical Engineering*, 2001, vol. 29, no. 3, pp. 279-301. ISSN 0278-940X
- [19] WESSELING, K.H., WEBER, H., WIT, B. Estimated five component viscoelastic model parameters for human arterial walls. *Journal of Biomechanics*, 1973, vol. 6, pp. 13-24. ISSN 0021-9290.
- [20] SAITO, G.E., WERFF, T.J.V. The importance of viscoelasticity in arterial blood flow models. *Journal of Biomechanics*, 1973, vol. 6, pp. 13-24. ISSN 0021-9290.
- [21] BURŠA J., ZEMÁNEK M. Evaluation of Biaxial Tension Tests of Soft Tissues. *Studies in health technology and informatics*, IOS Press, 2008, vol. 133, pp. 45-55. ISBN 978-1-58603-828-1.
- [22] TREMBLAY, D., CARTIER, R., MONGRAIN, R., LEASK, R.L. Regional dependency of the vascular smooth muscle cell contribution to the mechanical properties of the pig ascending aortic tissue. *Journal of Biomechanics*, 2010, vol. 43, no. 12, pp. 2448-2451. ISSN 0021-9290.
- [23] ZEMÁNEK, M., BURŠA, J., DĚTÁK, M. Biaxial tension tests with soft tissues of arterial wall. *Engineering Mechanics*, 2009, vol. 16, no. 1, pp. 3-12. ISSN 1802-1484
- [24] CHOW, M.-J., ZHANG, Y. Changes in the Mechanical and biomechanical properties of aortic tissue due to cold storage. *Journal of Surgical Research*, 2011, vol. 171, no. 2, pp. 434-442. ISSN 0022-4804.

- [25] VENKATASUBRAMANIAN, R.T., GRASSL, E.D., BAROCAS, V.H., LEFONTAINE, D., BISCHOF, J.C. Effects of freezing and cryopreservation on the mechanical properties of arteries. *Annals of Biomedical Engineering*, May 2006, vol. 34, no. 5, pp. 823-832. ISSN 1573-9686.
- [26] Cleveland Clinic Web, Aorta Illustration [online]. [cit. 2012-03-25]. Dostupné z: <http://my.clevelandclinic.org/heart/disorders/aorta_marfan/aortaillust.aspx>

12 SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ

Symbol	Význam	Jednotka
E	Modul pružnosti v tahu	[MPa]
E_{ij}^C	Složka Cauchyho logaritmického tenzoru přetvoření	[-]
E_{ij}^L	Složka Green-Lagrangeova tenzoru přetvoření	[-]
F	Působící síla	[N]
F_{ij}	Složka tenzoru deformačního gradientu	[-]
l	Délka tyče	[mm]
p	Zatěžující tlak	[kPa]
r	Střední poloměr skořepiny	[mm]
S	Plocha, na kterou působí síla	[mm ²]
S_{ij}	Složka 2. Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí	[MPa]
t	Tloušťka stěny skořepiny	[mm]
$T_{\varepsilon ij}$	Složka tenzoru smluvních přetvoření	[-]
$T_{\sigma ij}$	Složka tenzoru smluvních napětí	[MPa]
u	Vektor posuvů	[mm]
V	Objem tělesa	[mm ³]
W	Energie napjatosti (deformační energie)	[J]
x	Vektor aktuální geometrie	[mm]
X	Vektor Lagrangeovských souřadnic	[mm]
ε	Smluvní přetvoření	[-]
λ	Poměrné protažení	[-]
Λ	Měrná energie napjatosti (měrná deformační energie)	[MPa]
μ	Poissonovo číslo	[-]
σ	Smluvní napětí	[MPa]
τ_{ij}	Složka 1. Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí	[MPa]

Dolní indexy u symbolů:

- 0 počáteční hodnota
- $aver$ průměrná hodnota
- end konečná hodnota
- i, j, k koeficienty při použití Einsteinova sumačního pravidla
- max maximální hodnota
- t, m složka v obvodovém a meridiánovém směru
- x, y, z složka ve směru osy x, y, z

13 SEZNAM PŘÍLOH

Na přiloženém CD se nachází soubory, které jsou rozčleněny následovně:

- adresář **PDF_bcPrace** – Obsahuje elektronickou verzi této práce.
- adresář **ansysModel** – Obsahuje data a výsledky výpočtového modelu, který byl vytvořen v programu ANSYS.
- adresář **program** – Obsahuje skripty, zdrojové soubory, výsledky a grafy vytvořené v programu MATLAB, Tibixus a Hyperfit. Dále se člení na:
 - adresář **hyperfitData** – Obsahuje jednoduché textové soubory se zpracovanými daty pro další zpracování v programu Hyperfit.
 - adresář **grafy** – Obsahuje grafy vytvořené v programu MATLAB. Je rozčleněn na podadresáře dle jednotlivých částí programu, viz zevrubný popis v souboru *info.txt*.