

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ENERGETICKÝ ÚSTAV

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
ENERGY INSTITUTE

TLUMENÍ TLAKOVÝCH PULSACÍ V PRUŽNÝCH POTRUBÍCH

DAMPING OF PRESSURE PULSATIONS IN ELASTIC PIPES

DIPLOMOVÁ PRÁCE
DIPLOMA THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

MARTIN PANKO

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

Ing. VLADIMÍR HABÁN, Ph.D.

BRNO 2008



Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá numerickým modelováním tlakových pulsací v pružných potrubích. V práci je odvozena rovnice kontinuity tekutiny v pružné trubici s uvažováním tlumení v materiálu trubice. Reologický model trubice odpovídá Voigtovu (Kelvinovu) modelu. K řešení dynamických jevů v časovém prostoru jsou použity numerické metody pro řešení proudění stlačitelné tekutiny: FTCS, Lax-Friedrichs a Lax-Wendroff. Numerické výsledky jsou v závěru konfrontovány s experimentem. Při modelování experimentu byla uvažována rychlost zvuku v kapalině jako funkce tlaku. Tato práce pokládá dílčí základy k zjišťování materiálových konstant popisujících dynamické vlastnosti pružných trubíc z měření tlakových pulsací.

Klíčová slova

FTCS, Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff, pulsace, tlak, pružné potrubí, tlumení, rovnice kontinuity, Voigtův (Kelvinův) model, rychlost zvuku, materiálové konstanty

Abstract

This diploma thesis deals with numerical simulation of pressure pulsations in elastic pipes. Continuity relation of fluid in elastic pipes, when calculating some damping in pipe material, is derived into practice. Rheological model of such a pipe corresponds to Voigt (Kelvin) model. For analysing dynamic effects in time periods are used numerical methods that deal with flow of compressible fluid: FTCS, Lax-Friedrichs and Lax-Wendroff method. The numerical results are confronted with the experiment. During the experiment simulation the method considers speed of sound in liquid like a function of pressure. This diploma thesis lays partial principles for finding elastic constants for describing dynamic characteristics of elastic pipes by measuring the pressure pulsations.

Keywords

FTCS, Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff, pulsation, pressure, elastic pipe, damping, continuity relation, Voigt (Kelvin) model, speed of sound, elastic constants



Bibliografická citace

PANKO, M. *Tlumení tlakových pulsací v pružných potrubích*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2008. 62 s. Vedoucí diplomové práce Ing. Vladimír Habán, Ph.D.



Tlumení tlakových pulsací v pružných potrubích

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením Ing. Vladimíra Habána, Ph.D. Vycházel jsem přitom ze svých znalostí, odborných konzultací a literatury uvedené v seznamu.

V Brně dne 23. 5. 2008

.....
podpis



Poděkování

Na tomto místě bych chtěl poděkovat všem lidem, kteří mi byli při vzniku mé diplomové práce nápomocni. Především bych chtěl poděkovat vedoucímu své práce Ing. Vladimíru Habánovi, Ph.D. za profesionální a věcnou pomoc při vytváření této diplomové práce a celkově vstřícný přístup během jejího vzniku.



Obsah

Obsah	8
1 Úvod.....	10
2 Matematický model	11
2.1 Nestacionární proudění v pružné trubici.....	11
2.2 Rovnice kontinuity.....	11
2.2.1 Účinky tekutiny na pružnou trubici	12
2.2.2 Voigtův (Kelvinův) model tělesa.....	14
2.2.3 Rychlost deformace tělesa	14
2.2.4 Rovnice kontinuity pro tekutinu v pružné trubici.....	15
2.3 Rovnice silové rovnováhy	17
3 Numerické metody řešení	18
3.1 FTCS.....	19
3.2 Lax-Friedrichs.....	20
3.3 Lax-Wendroff	22
3.4 Pravá strana v rovnici kontinuity	27
3.5 Počáteční a koncový uzlový bod	28
3.6 Porovnání numerických schémat	29
3.6.1 Grafické porovnání schémat FTCS, Lax-Friedrichs a Lax-Wendroff....	32
3.6.2 Posouzení numerických schémat	33
3.7 Vliv paměťové funkce	34
3.7.1 Vyhodnocení vlivu paměťové funkce.....	36
3.7.2 Grafické vyhodnocení vlivu konvoluce	38
3.8 Hustota výpočetní sítě.....	40
3.8.1 Vyhodnocení hustoty sítě.....	42
3.8.2 Grafické vyhodnocení hustoty sítě	43
3.9 Tlumení v materiálu trubice.....	44
3.9.1 Vyhodnocení tlumení v materiálu trubice	46
3.9.2 Grafické vyhodnocení tlumení v materiálu trubice	48
4 Experiment.....	51
4.1 Popis zkušební tratě	51



DIPLOMOVÁ PRÁCE

VUT-EU-ODDI-13303-07-08

Obor fluidního inženýrství
Viktora Kaplana

4.2	Postup experimentu.....	52
4.3	Ověření matematického modelu	52
4.4	Grafické vyhodnocení experimentu a matematického modelu.....	54
5	Závěr	57
	Literatura.....	59
	Seznam použitých symbolů a veličin.....	60
	Seznam příloh	62



1 Úvod

Tato diplomová práce navazuje na poznatky z diplomových prací Ing. Jaroslava Šebesty (rok 2003), Ing. Jana Medlíka (rok 2006) a Ing. Jána Koyše (rok 2007).

Problematika pulsací v pružném potrubí není doposud pro praktické použití dostatečně zpracována. Zkušenosti plynoucí z experimentů ukazují, že modely použité v literatuře neodpovídají skutečnosti. Naměřené hodnoty amplitud tlaku jsou nižší než vypočtené. Toto je způsobeno zanedbáním vlivu trubice na velikost tlakových a průtokových pulsací při výpočtu. Model trubice je založen pouze na tuhosti trubice, je zcela opomíjen vliv vnitřního tlumení, který je neopomenutelný právě u pryžových a plastových trubic. V tomto případě je poddajnost trubice mnohem větší než kapaliny a tedy vnitřní tlumení je podstatně větší, než jak je tomu například u ocelových potrubí podobných geometrických velikostí.

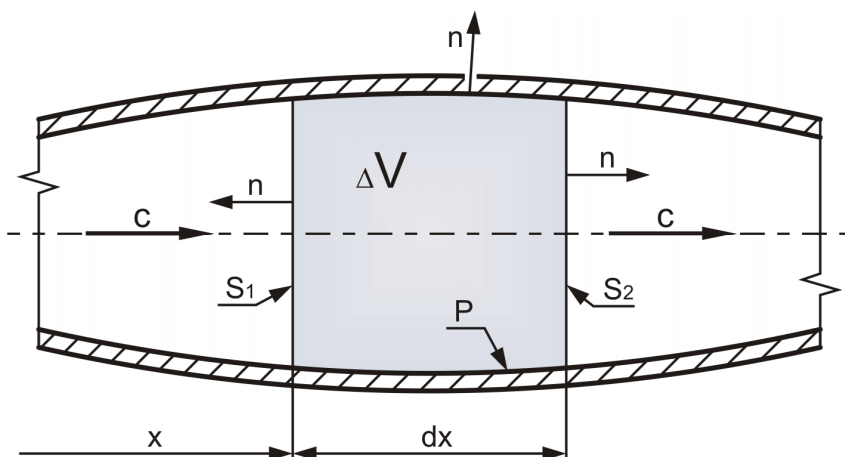
Zjišťování materiálových konstant, které mají význačný vliv na dynamické chování pružného potrubí, se stalo podnětem pro vznik této práce. Tématem práce je navržení matematického modelu pružného potrubí s uvažováním tlumení pro řešení tlakových pulsací v časovém prostoru a stanovení materiálových konstant potrubí. V práci je rozpracována metodika výpočtu navrženého matematického modelu numerickými metodami FTCS, Lax-Friedrichs a Lax-Wendroff. Pomocí metody Lax-Wendroffa je matematický model posléze podrobněji rozebrán a v závěru práce konfrontován s experimentem.

2 Matematický model

2.1 Nestacionární proudění v pružné trubici

Při řešení tlakových a průtokových pulsací kapaliny v pružné trubici se vychází z tzv. jednorozměrného modelu proudění, do kterého se v podstatě uměle zavádí buď lineární, nebo nelineární model vnitřního tlumení kapaliny, který má popisovat nestacionární hydraulické ztráty.

Matematický model nestacionárního proudění v pružné trubici, která je uvažována jako jednorozměrná, tvoří rovnice kontinuity a rovnice silové rovnováhy.



Obr. 2.1. Model trubice

2.2 Rovnice kontinuity

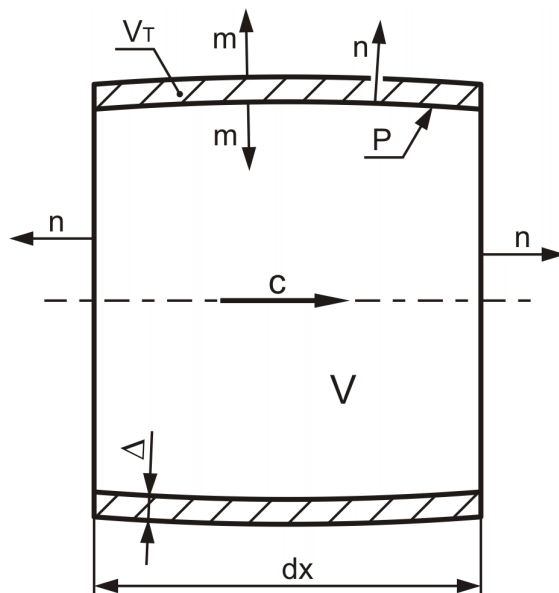
Při odvození budeme vycházet z rovnice kontinuity a uvažovat ji ve tvaru, jenž je odvozena v [2]

$$\frac{1}{v_0^2} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot S(x,t) + r \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} + r \cdot \frac{\int_P c \cdot n \cdot dS}{dx} = 0 \quad (2.2.1)$$

Poslední člen v tomto výrazu souvisí s deformací trubice. Je-li její povrch absolutně tuhý, je $c = 0 \quad \forall x \in P$ a příspěvek od pružnosti se neuplatní. Tento člen se musí určit z analýzy deformace pružné trubice.

2.2.1 Účinky tekutiny na pružnou trubici

Budeme předpokládat, že účinky setrvačných sil trubice jsou zanedbatelné vůči silám elastickým. V obecném případě tomu tak není a je nutno řešit vázanou úlohu hydroelasticity – současné kmitání trubice a tekutiny. Důsledkem zákona zachování hmotnosti dochází ke změně tloušťky trubice. Tuto změnu v odvození budeme zanedbávat.



Obr. 2.2. Element pružné trubice

Zavedeme napětí v pružné trubici Σ_{ij} a za výše uvedených předpokladů lze psát rovnici rovnováhy pružného tělesa ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \Sigma_{ij} = 0 \quad ; \quad \forall x_j \in V_t \quad (2.2.1.1)$$

Vynásobením skalárně rychlosti trubice v_i získáme výkon vnitřních sil. Poté provedeme integraci přes objem trubice a využijeme věty Gauss-Ostrogradského, čímž obdržíme:

$$\int_P \Sigma_{ij} \cdot v_i \cdot m_j \cdot dS - \int_{V_T} \Sigma_{ij} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot dV = 0 \quad (2.2.1.2)$$

Tenzor $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ lze rozložit na symetrickou a antisymetrickou část. Vezmeme-li v úvahu,

že součin symetrického a antisymetrického tenzoru je roven nule, pak je možné psát

$$\int_P \Sigma_{ij} \cdot v_i \cdot m_j \cdot dS - \int_{V_T} \Sigma_{ij} \cdot v_{ij} \cdot dV = 0 \quad (2.2.1.3)$$

Přičemž v_{ij} představuje tenzor rychlosti deformace

$$v_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.2.1.4)$$

Zanedbáme-li účinky smykových napětí od kapaliny na výslednou deformaci, lze psát vazbové podmínky na vnitřním povrchu P , pro něž platí

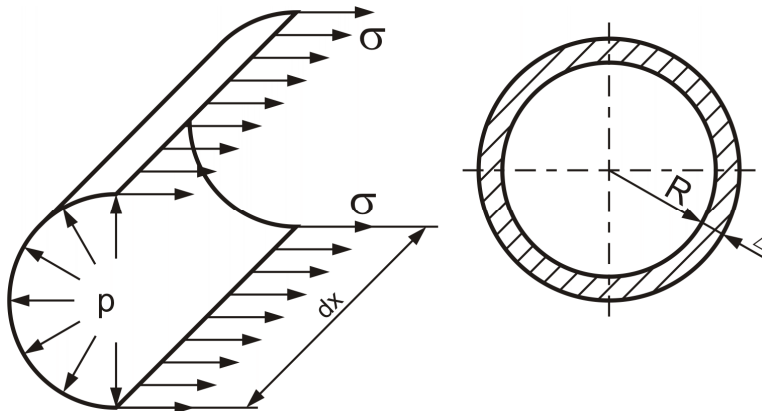
$$\Sigma_{ij} \cdot m_j = -p \cdot d_{ij} \cdot m_j = p \cdot n_i \quad ; \quad \forall x_j \in P \quad (2.2.1.5)$$

Dosaďme tento vztah do (2.2.1.3). Užitím věty o střední hodnotě integrálního počtu pro součin funkcí a předpokladu o ulpívání tekutiny na povrchu trubice $v = c$ získáme

$$p \cdot \int_P c \cdot n \cdot dS = \int_{V_T} \Sigma_{ij} \cdot v_{ij} \cdot dV \quad (2.2.1.6)$$

Předpokládejme, že se jedná o tenkostěnnou trubici kruhového průřezu dle obr. 2.2., pak je zřejmé, že vnitřní tlak vyvolá v trubici jednoosou napjatost, pro niž platí

$$\Sigma_{ij} \cdot v_{ij} = \Sigma_{11} \cdot v_{11} = s \cdot \frac{de}{dt} \quad (2.2.1.7)$$



Obr. 2.2. Napětí v trubici

Z rovnice rovnováhy tenkostěnné trubice zatížené pouze vnitřním tlakem stanovíme normálového napětí s ze vztahu

$$2 \cdot s \cdot \Delta \cdot dx - 2 \cdot R \cdot p \cdot dx = 0 \Rightarrow s = \frac{R}{\Delta} \cdot p \quad (2.2.1.8)$$

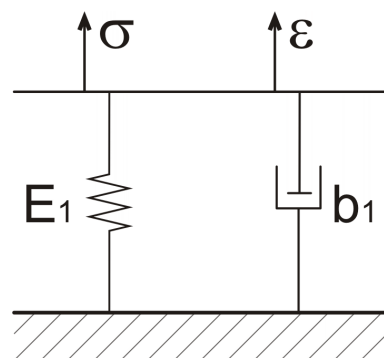
Dosažením (2.2.1.8) do (2.2.1.6) a provedením integrace přes objem trubice $V_i = 2 \cdot p \cdot R \cdot \Delta \cdot dx$ bude

$$\int_P c \cdot n \cdot dS = 2 \cdot p \cdot R^2 \cdot \frac{de}{dt} \cdot dx \quad (2.2.1.9)$$

2.2.2 Voigtův (Kelvinův) model tělesa

Těleso trubice budeme modelovat jako Voigtův (Kelvinův) model a dále budeme uvažovat pouze jednoosou napjatost.

Při návrhu tohoto modelu jsme již vyšli z poznatků, které byly zmíněny v diplomových pracích Ing. J. Šebesty a Ing. J. Medlíka. Jako model trubice tam bylo voleno standardní těleso, přičemž se ukázalo, že tuhost E_0 má na výpočet malý vliv. Z uvedených příčin je zde zvolen model materiálu trubice Voigtův (Kelvinův).



Obr. 2.4. Voigtův (Kelvinův) model

Matematický popis Voigtova (Kelvinova) modelu

$$s = E_1 \cdot e + b_1 \cdot \dot{e} \quad (2.2.2.1)$$

Provedeme Laplaceovu transformaci podle času

$$\tilde{s} = E_1 \cdot \tilde{e} + s \cdot b_1 \cdot \tilde{e} \quad (2.2.2.2)$$

Vyjádříme \tilde{e} a získáme vztah pro Laplaceovu transformaci celkové poměrné deformace

$$\tilde{e} = \frac{\tilde{s}}{E_1 + s \cdot b_1} \quad (2.2.2.3)$$

Zpětnou Laplaceovou transformací s využitím konvolučního integrálu získáme výsledný vztah pro poměrnou deformaci Voigtova (Kelvinova) modelu

$$e = L^{-1} \left\{ \frac{\tilde{s}}{E_1 + s \cdot b_1} \right\}$$

$$e = \frac{1}{b_1} \cdot \int_0^t s(t-t) \cdot e^{-\frac{E_1}{b_1} t} \cdot dt \quad (2.2.2.4)$$

2.2.3 Rychlost deformace tělesa

Uplatněním věty o derivaci konvoluce (Duhamelův vzorec) na (2.2.2.4), je možné získat vztah pro rychlost deformace

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{b_1} \cdot \left(\int_0^t \frac{ds(t-t)}{dt} \cdot e^{-\frac{E_1}{b_1} t} \cdot dt + s(0) \cdot e^{-\frac{E_1}{b_1} t} \right) \quad (2.2.3.1)$$

Uvážíme-li ještě (2.2.1.8) získáme rychlost deformace jako funkci vnitřního tlaku v tekutině

$$\frac{de}{dt} = \frac{R}{\Delta \cdot b_1} \cdot \left(\int_0^t \frac{dp(t-t)}{dt} \cdot e^{-\frac{E_1 \cdot t}{b_1}} \cdot dt + p(0) \cdot e^{-\frac{E_1 \cdot t}{b_1}} \right) \quad (2.2.3.2)$$

Rovnici (2.2.3.2) bude výhodné upravit tak, že rozložíme konvoluční integrál na součet dvou integrálů

$$\frac{de}{dt} = \frac{R}{\Delta \cdot b_1} \cdot \left(\int_0^{\Delta t} \frac{dp(t-t)}{dt} \cdot e^{-\frac{E_1 \cdot t}{b_1}} \cdot dt + \int_{\Delta t}^t \frac{dp(t-t)}{dt} \cdot e^{-\frac{E_1 \cdot t}{b_1}} \cdot dt + p(0) \cdot e^{-\frac{E_1 \cdot t}{b_1}} \right) \quad (2.2.3.3)$$

Zavedeme-li předpoklad konstantní derivace tlaku podle času v časové proměnné t na krátkém intervalu $\langle 0, \Delta t \rangle$, pak lze tuto derivaci vytknout před integrál a psát

$$\frac{de}{dt} = \frac{R}{\Delta \cdot b_1} \cdot \left(\frac{dp}{dt} \cdot \int_0^{\Delta t} e^{-\frac{E_1 \cdot t}{b_1}} \cdot dt + \int_{\Delta t}^t \frac{dp(t-t)}{dt} \cdot e^{-\frac{E_1 \cdot t}{b_1}} \cdot dt + p(0) \cdot e^{-\frac{E_1 \cdot t}{b_1}} \right) \quad (2.2.3.4)$$

U prvního členu provedeme integraci ve vyznačených mezích a po drobných úpravách získáme vztah pro rychlost deformace s částečnou separací derivace tlaku

$$\frac{de}{dt} = \frac{R}{\Delta \cdot E_1} \cdot \left[1 - e^{-\frac{E_1 \cdot \Delta t}{b_1}} \right] \cdot \frac{dp}{dt} + \frac{R}{\Delta \cdot b_1} \cdot \left(\int_{\Delta t}^t \frac{dp(t-t)}{dt} \cdot e^{-\frac{E_1 \cdot t}{b_1}} \cdot dt + p(0) \cdot e^{-\frac{E_1 \cdot t}{b_1}} \right) \quad (2.2.3.5)$$

2.2.4 Rovnice kontinuity pro tekutinu v pružné trubici

Dosažením rychlosti deformace z Voigtova (Kelvinova) modelu ve tvaru (2.2.3.5) do (2.2.1.9) a uvážením (2.2.1) obdržíme rovnici kontinuity

$$\frac{1}{v_0^2} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot S(x,t) + r \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} + r \cdot 2 \cdot p \cdot R^2 \cdot \left\{ \frac{R}{\Delta \cdot E_1} \cdot \left[1 - e^{-\frac{E_1 \cdot \Delta t}{b_1}} \right] \cdot \frac{dp}{dt} + \int_{\Delta t}^t \frac{dp(t-t)}{dt} \cdot e^{-\frac{E_1 \cdot t}{b_1}} \cdot dt + p(0) \cdot e^{-\frac{E_1 \cdot t}{b_1}} \right\} = 0 \quad (2.2.4.1)$$



Při kmitání trubice neuvažujeme změnu její tloušťky stěny, a proto můžeme položit

$S(x,t) = S(x) = p \cdot R^2$. Rovnici (2.2.4.1) vydělíme r a S

$$\frac{1}{r \cdot v_0^2} \cdot \frac{dp}{dt} + \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} + 2 \cdot \left\{ \frac{R}{\Delta \cdot E_1} \cdot \left[1 - e^{-\frac{E_1 \cdot \Delta t}{b_1}} \right] \cdot \frac{dp}{dt} + \frac{R}{\Delta \cdot b_1} \cdot \left(\int_{\Delta t}^t \frac{dp(t-t)}{dt} \cdot e^{-\frac{E_1}{b_1} t} \cdot dt + p(0) \cdot e^{-\frac{E_1}{b_1} t} \right) \right\} = 0 \quad (2.2.4.2)$$

Rovnici kontinuity roznásobíme a upravíme

$$\left(\frac{1}{r \cdot v_0^2} + \frac{2 \cdot R}{\Delta \cdot E_1} \cdot \left[1 - e^{-\frac{E_1 \cdot \Delta t}{b_1}} \right] \right) \cdot \frac{dp}{dt} + \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} = - \frac{2 \cdot R}{\Delta \cdot b_1} \cdot \left(\int_{\Delta t}^t \frac{dp(t-t)}{dt} \cdot e^{-\frac{E_1}{b_1} t} \cdot dt + p(0) \cdot e^{-\frac{E_1}{b_1} t} \right) \quad (2.2.4.3)$$

Pro zjednodušení výrazu zavedeme

$$\frac{1}{k} = \left(\frac{1}{r \cdot v_0^2} + \frac{2 \cdot R}{\Delta \cdot E_1} \cdot \left[1 - e^{-\frac{E_1 \cdot \Delta t}{b_1}} \right] \right) \quad (2.2.4.4)$$

$$l = - \frac{2 \cdot R}{\Delta \cdot b_1} \cdot \left(\int_{\Delta t}^t \frac{dp(t-t)}{dt} \cdot e^{-\frac{E_1}{b_1} t} \cdot dt + p(0) \cdot e^{-\frac{E_1}{b_1} t} \right) \quad (2.2.4.5)$$

Po zjednodušení zápisu získáme

$$\frac{1}{k} \frac{dp}{dt} + \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} = l \quad (2.2.4.6)$$

Úpravou s využitím substanciální derivace bude rovnice kontinuity ve tvaru

$$\frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{Q}{S} + \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} = l \quad (2.2.4.7)$$

Se souvislostí podélného šíření informací v systému, lze pro první dva členy v rovnici (2.2.4.7) odvodit výraz

$$\frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{Q}{S} \approx \frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \cdot \left(1 + \frac{c}{v} \right) ; \quad M = \frac{c}{v} \quad (2.2.4.8)$$



Z (2.2.4.8) je patrné, že při malých Machových číslech $M \ll 1$, lze v (2.2.4.7) zanedbat nelineární člen. Rovnice kontinuity můžeme psát

$$\left(\frac{1}{r \cdot v_0^2} + \frac{2 \cdot R}{\Delta \cdot E_1} \cdot \left[1 - e^{-\frac{E_1 \cdot \Delta t}{b_1}} \right] \right) \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} = - \frac{2 \cdot R}{\Delta \cdot b_1} \cdot \left(\int_{\Delta t}^t \frac{dp(t-t)}{dt} \cdot e^{-\frac{E_1}{b_1} t} \cdot dt + p(0) \cdot e^{-\frac{E_1}{b_1} t} \right) \quad (2.2.4.9)$$

Zjednodušený zápis rovnice kontinuity

$$\frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} = l \quad (2.2.4.10)$$

Pro výpočet numerickými metodami si ještě (2.2.4.10) upravíme a dostaneme konečný tvar rovnice kontinuity

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{k}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} = k \cdot l \quad (2.2.4.11)$$

2.3 Rovnice silové rovnováhy

Rovnici silové rovnováhy budeme uvažovat ve tvaru

$$\frac{\partial p}{\partial x} + r \cdot \frac{\partial c}{\partial t} + r \cdot \frac{l}{2 \cdot D} \cdot |c| \cdot c = 0 \quad (2.3.1)$$

Tvar rovnice (2.3.1) byl odvozen z pohybové rovnice Navier-Stokes pro trubici s uvažováním tření na jejím povrchu, přičemž bylo předpokládáno, že ztráty třením jsou při dynamickém i statickém ději totožné. S ohledem k předpokládaným Machovým číslům $M \ll 1$ není zde uvažován nelineární člen.

Po dosazení průtoku za rychlost $c = \frac{Q}{S}$ a podělením (2.3.1) hustotou r získáme výsledný tvar rovnice silové rovnováhy

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{S}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{l}{2 \cdot D \cdot S} \cdot |Q| \cdot Q = 0 \quad (2.3.2)$$



3 Numerické metody řešení

Matematický model byl definován rovnicí kontinuity a rovnicí silové rovnováhy. Jedná se o soustavu parciálních diferenciálních rovnic hyperbolického typu. U takovýchto rovnic nelze očekávat řešení v exaktním tvaru, protože řešení je velmi závislé na počátečních a okrajových podmínkách.

Numerické řešení uvedeného systému rovnic určíme metodou sítí nazývanou též metodou konečných diferencí. Zavádí se na ose x prostorová souřadnice a na ose t časová souřadnice. Na osách se zvolí rovnoměrně rozložené body $x_j = j \cdot \Delta x$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ a $t_k = k \cdot \Delta t$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, přičemž Δx je krok v prostorové souřadnici a Δt je krok v časové souřadnici. Tak vznikne síť bodů, ve kterých hledáme řešení užitím některého z numerických schémat. Při výpočtu tlakových pulsací hledáme v každém bodě řešení pro tlak a průtok.

Jednorozměrné nestacionární proudění v pružné trubici s uvažováním tlumení v materiálu trubice je popsáno soustavou dvou rovnic

rovnicí silové rovnováhy (2.3.2)

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{S}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{I}{2 \cdot D \cdot S} \cdot |Q| \cdot Q = 0$$

rovnicí kontinuity (2.2.4.11)

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{k}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} = k \cdot l$$

Uvedenou soustavu rovnic je nutné řešit současně, proto si je zapíšeme v jedinou maticovou rovnici. Nejprve zavedme

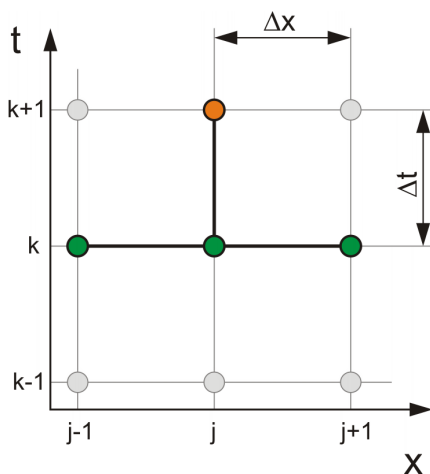
$$w = \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & \frac{S}{r} \\ \frac{k}{S} & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{I}{2 \cdot D \cdot S} \cdot |Q| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 \\ k \cdot l \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

a obdržíme maticový zápis rovnice kontinuity a rovnice silové rovnováhy

$$\frac{\partial}{\partial t} w + K \cdot \frac{\partial}{\partial x} w + B \cdot w = L \quad (3.2)$$

3.1 FTCS

Základní numerická metoda k výpočtu parciálních diferenciálních rovnic spočívá ve vyjádření časové derivace funkce w z pohybových rovnic pomocí ostatních členů a v postupném přičítání k počátečním hodnotám w_0 v každém bodě přírůstků $\Delta t \cdot \frac{\partial}{\partial t} w$



odpovídajících konstantnímu časovému kroku Δt . Prostorové derivace se nahradí konečnými diferencemi (odtud název *forward time – centered space*).

Obr. 3.1. Grafické znázornění k metodě FTCS

Pro schéma typu FTCS a rovnici (3.2) dostaneme vztah ve tvaru

$$\frac{w_{x_j}^{t_{k+1}} - w_{x_j}^{t_k}}{\Delta t} + K \cdot \frac{w_{x_{j+1}}^{t_k} - w_{x_{j-1}}^{t_k}}{2 \cdot \Delta x} + B \cdot w_{x_j}^{t_k} = L_{x_j}^{t_k} \quad (3.1.1)$$

Z rovnice (3.1.1) si vyjádříme matici neznámých $w_{x_j}^{t_{k+1}}$

$$w_{x_j}^{t_{k+1}} = w_{x_j}^{t_k} - \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta x} \cdot K \cdot (w_{x_{j+1}}^{t_k} - w_{x_{j-1}}^{t_k}) - \Delta t \cdot B \cdot w_{x_j}^{t_k} + \Delta t \cdot L_{x_j}^{t_k} \quad (3.1.2)$$

Po rozepsání do matic

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}_{x_j}^{t_{k+1}} &= \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}_{x_j}^{t_k} - \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta x} \cdot \begin{pmatrix} 0 & S \\ k & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}_{x_{j+1}}^{t_k} - \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}_{x_{j-1}}^{t_k} \right) - \\ &- \Delta t \cdot \begin{pmatrix} I & 0 \\ 2 \cdot D \cdot S & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}_{x_j}^{t_k} + \Delta t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ k \cdot l \end{pmatrix}_{x_j}^{t_k} \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Výraz (3.1.3) rozepíšme na složky a dostaneme

Vztah pro průtok

$$Q_{x_j}^{t_{k+1}} = Q_{x_j}^{t_k} - \frac{\Delta t \cdot S}{2 \cdot \Delta x \cdot r} \cdot (p_{x_{j+1}}^{t_k} - p_{x_{j-1}}^{t_k}) - \frac{\Delta t \cdot I}{2 \cdot D \cdot S} \cdot |Q_{x_j}^{t_k}| \cdot Q_{x_j}^{t_k} + 0 \quad (3.1.4)$$

Vztah pro tlak

$$p_{x_j}^{t_{k+1}} = p_{x_j}^{t_k} - \frac{\Delta t \cdot k}{2 \cdot \Delta x \cdot S} \cdot (Q_{x_{j+1}}^{t_k} - Q_{x_{j-1}}^{t_k}) - \Delta t \cdot 0 + \Delta t \cdot k \cdot I_{x_j}^{t_k} \quad (3.1.5)$$

Pro zjednodušení zápisu zavedeme konstanty

pro Q

$$a_Q = \frac{\Delta t \cdot S}{2 \cdot \Delta x \cdot r}$$

pro p

$$c_p = \frac{\Delta t \cdot k}{2 \cdot \Delta x \cdot S}$$

$$b_Q = \frac{\Delta t \cdot I}{2 \cdot D \cdot S}$$

Po dosazení konstant dostaneme výpočtové vztahy pro vnitřní uzlové body

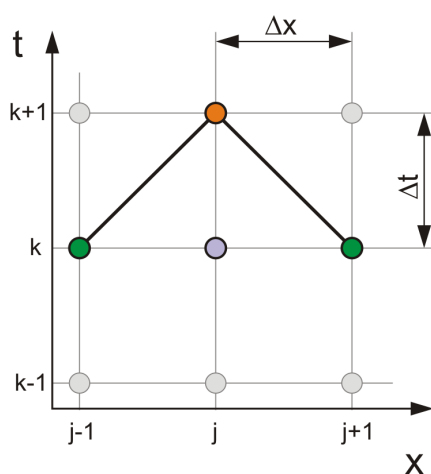
Vztah pro průtok

$$Q_{x_j}^{t_{k+1}} = Q_{x_j}^{t_k} - a_Q \cdot (p_{x_{j+1}}^{t_k} - p_{x_{j-1}}^{t_k}) - b_Q \cdot |Q_{x_j}^{t_k}| \cdot Q_{x_j}^{t_k} \quad (3.1.6)$$

Vztah pro tlak

$$p_{x_j}^{t_{k+1}} = p_{x_j}^{t_k} - c_p \cdot (Q_{x_{j+1}}^{t_k} - Q_{x_{j-1}}^{t_k}) + \Delta t \cdot k \cdot I_{x_j}^{t_k} \quad (3.1.7)$$

3.2 Lax-Friedrichs



Obr. 3.2. Grafické znázornění

k metodě Lax-Friedrichs

Lax-Friedrichsovo numerické schéma vychází ze základní metody FTCS, u které se člen, v němž vystupuje časová derivace $w(t)$, vypočítá ze střední hodnoty bodů v síti $(j+1)$ a $(j-1)$.



Pro schéma typu Lax-Friedrichs a rovnici (3.2) dostaneme vztah ve tvaru

$$\frac{w_{x_j}^{t_{k+1}} - \left(\frac{w_{x_{j+1}}^{t_k} + w_{x_{j-1}}^{t_k}}{2} \right)}{\Delta t} + K \cdot \frac{w_{x_{j+1}}^{t_k} - w_{x_{j-1}}^{t_k}}{2 \cdot \Delta x} + B \cdot w_{x_j}^{t_k} = L_{x_j}^{t_k} \quad (3.2.1)$$

Z rovnice (3.2.1) si vyjádříme matici neznámých $w_{x_j}^{t_{k+1}}$

$$w_{x_j}^{t_{k+1}} = \frac{1}{2} \cdot (w_{x_{j+1}}^{t_k} + w_{x_{j-1}}^{t_k}) - \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta x} \cdot K \cdot (w_{x_{j+1}}^{t_k} - w_{x_{j-1}}^{t_k}) - \Delta t \cdot B \cdot w_{x_j}^{t_k} + \Delta t \cdot L_{x_j}^{t_k} \quad (3.2.2)$$

Po rozepsání do matic

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{x_j}^{t_{k+1}} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{x_{j+1}}^{t_k} + \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{x_{j-1}}^{t_k} \right) - \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta x} \cdot \begin{pmatrix} 0 & S \\ k & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{x_{j+1}}^{t_k} - \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{x_{j-1}}^{t_k} \right) \\ &\quad - \Delta t \cdot \begin{pmatrix} I & |Q| \\ 2 \cdot D \cdot S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{x_j}^{t_k} + \Delta t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ k \cdot l \end{pmatrix}_{x_j} \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Maticový zápis (3.2.3) rozepíšeme na složky a dostaneme

Vztah pro průtok

$$Q_{x_j}^{t_{k+1}} = \frac{1}{2} \cdot (Q_{x_{j+1}}^{t_k} + Q_{x_{j-1}}^{t_k}) - \frac{\Delta t \cdot S}{2 \cdot \Delta x \cdot r} \cdot (p_{x_{j+1}}^{t_k} - p_{x_{j-1}}^{t_k}) - \frac{\Delta t \cdot I}{2 \cdot D \cdot S} \cdot |Q_{x_j}^{t_k}| \cdot Q_{x_j}^{t_k} + 0 \quad (3.2.4)$$

Vztah pro tlak

$$p_{x_j}^{t_{k+1}} = \frac{1}{2} \cdot (p_{x_{j+1}}^{t_k} + p_{x_{j-1}}^{t_k}) - \frac{\Delta t \cdot k}{2 \cdot \Delta x \cdot S} \cdot (Q_{x_{j+1}}^{t_k} - Q_{x_{j-1}}^{t_k}) - \Delta t \cdot 0 + \Delta t \cdot k \cdot l_{x_j}^{t_k} \quad (3.2.5)$$

Pro zjednodušení zápisu zavedeme konstanty

pro Q

$$a_Q = \frac{\Delta t \cdot S}{2 \cdot \Delta x \cdot r}$$

$$b_Q = \frac{\Delta t \cdot I}{2 \cdot D \cdot S}$$

pro p

$$c_p = \frac{\Delta t \cdot k}{2 \cdot \Delta x \cdot S}$$

Po dosazení konstant dostaneme výpočtové vztahy pro vnitřní uzlové body

Vztah pro průtok

$$Q_{x_j}^{t_{k+1}} = \frac{1}{2} \cdot (Q_{x_{j+1}}^{t_k} + Q_{x_{j-1}}^{t_k}) - a_Q \cdot (p_{x_{j+1}}^{t_k} - p_{x_{j-1}}^{t_k}) - b_Q \cdot |Q_{x_j}^{t_k}| \cdot Q_{x_j}^{t_k} \quad (3.2.6)$$

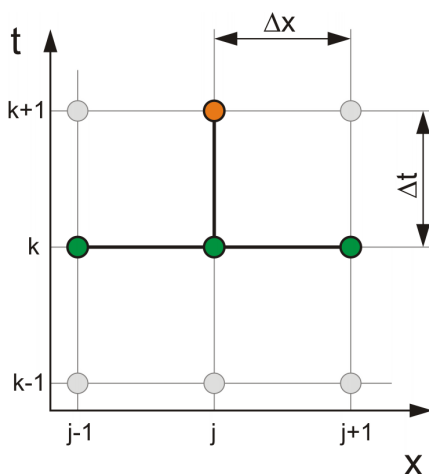
Vztah pro tlak

$$p_{x_j}^{t_{k+1}} = \frac{1}{2} \cdot (p_{x_{j+1}}^{t_k} + p_{x_{j-1}}^{t_k}) - c_p \cdot (Q_{x_{j+1}}^{t_k} - Q_{x_{j-1}}^{t_k}) + \Delta t \cdot k \cdot I_{x_j}^{t_k} \quad (3.2.7)$$

3.3 Lax-Wendroff

Mezi nejdůležitější numerické metody vyšších řádů přesnosti patří schémata typu Lax-Wendroffa. Řešení pohybových rovnic je založeno na myšlence rozvoje do

Taylorovy řady v čase a na nahrazení časové derivace prostorovou.



Obř. 3.3. Grafické znázornění
k metodě Lax-Wendroff

Schéma metody Lax-Wendroffa s uvažováním rozvoje funkce do Taylorovy řady druhého stupně

$$f_{x_j}^{t_{k+1}} = f_{x_j}^{t_k} + \Delta t \cdot \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{x_j}^{t_k} + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \left. \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right|_{x_j}^{t_k} \quad (3.3.1)$$

Z maticového zápisu rovnice (3.2) lze vyjádřit potřebné derivace

$$\frac{\partial}{\partial t} w = -K \cdot \frac{\partial}{\partial x} w - B \cdot w + L \quad (3.3.2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} w = -K \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \cdot \partial t} w - B \cdot \frac{\partial}{\partial t} w + \frac{\partial}{\partial t} L \quad (3.3.3)$$



V (3.3.3) si člen na pravé straně rovnice s derivací w podle času nejprve upravíme

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} w = -K \cdot \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial t} - B \cdot \frac{\partial}{\partial t} w + \frac{\partial}{\partial t} L \quad (3.3.4)$$

a po nahrazení z (3.3.2) získáme výraz pro výpočet druhé derivace w podle času

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} w &= -K \cdot \frac{\partial \left(-K \cdot \frac{\partial}{\partial x} w - B \cdot w + L \right)}{\partial x} - B \cdot \left(-K \cdot \frac{\partial}{\partial x} w - B \cdot w + L \right) + \frac{\partial}{\partial t} L \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} w &= K \cdot K \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} w + K \cdot B \cdot \frac{\partial}{\partial x} w - K \cdot \frac{\partial}{\partial x} L + B \cdot K \cdot \frac{\partial}{\partial x} w + B \cdot B \cdot w - B \cdot L + \frac{\partial}{\partial t} L \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Po dosazení rovnic (3.3.5) a (3.3.2) do základního schématu Lax-Wendroffa (3.3.1) získáme

$$\begin{aligned} w_{x_j}^{t_{k+1}} &= w_{x_j}^{t_k} - \Delta t \cdot \left(K \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x_j}^{t_k} + B \cdot w_{x_j}^{t_k} - L_{x_j}^{t_k} \right) + \\ &+ \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \left(K \cdot K \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x_j}^{t_k} + K \cdot B \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x_j}^{t_k} + B \cdot K \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x_j}^{t_k} + \right. \\ &\left. + B \cdot B \cdot w_{x_j}^{t_k} - K \cdot \frac{\partial L}{\partial x} \Big|_{x_j}^{t_k} - B \cdot L_{x_j}^{t_k} + \frac{\partial L}{\partial t} \Big|_{x_j}^{t_k} \right) \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Všechny prostorové derivace nahradíme centrálními diferencemi ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x_j}^{t_k} &= \frac{1}{2 \cdot \Delta x} \cdot (w_{x_{j+1}}^{t_k} - w_{x_{j-1}}^{t_k}) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x_j}^{t_k} &= \frac{1}{\Delta x^2} \cdot (w_{x_{j+1}}^{t_k} - 2 \cdot w_{x_j}^{t_k} + w_{x_{j-1}}^{t_k}) \\ \frac{\partial L}{\partial x} \Big|_{x_j}^{t_k} &= \frac{1}{2 \cdot \Delta x} \cdot (L_{x_{j+1}}^{t_k} - L_{x_{j-1}}^{t_k}) \end{aligned}$$

Časovou derivaci pravé strany (3.2) lze počítat pomocí zpětných diferencí

$$\frac{\partial L}{\partial t} \Big|_{x_j}^{t_k} = \frac{1}{\Delta t} \cdot (L_{x_j}^{t_k} - L_{x_j}^{t_{k-1}})$$



Po rozepsání diferencí získáme

$$w_{x_j}^{t_{k+1}} = w_{x_j}^{t_k} - \Delta t \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot \Delta x} \cdot K \cdot (w_{x_{j+1}}^{t_k} - w_{x_{j-1}}^{t_k}) + B \cdot w_{x_j}^{t_k} - L_{x_j}^{t_k} \right] +$$
$$+ \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \left[\frac{1}{\Delta x^2} \cdot K \cdot K \cdot (w_{x_{j+1}}^{t_k} - 2 \cdot w_{x_j}^{t_k} + w_{x_{j-1}}^{t_k}) + \frac{1}{2 \cdot \Delta x} \cdot K \cdot B \cdot (w_{x_{j+1}}^{t_k} - w_{x_{j-1}}^{t_k}) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2 \cdot \Delta x} \cdot B \cdot K \cdot (w_{x_{j+1}}^{t_k} - w_{x_{j-1}}^{t_k}) + B \cdot B \cdot w_{x_j}^{t_k} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2 \cdot \Delta x} \cdot K \cdot (L_{x_{j+1}}^{t_k} - L_{x_{j-1}}^{t_k}) - B \cdot L_{x_j}^{t_k} + \frac{1}{\Delta t} \cdot (L_{x_j}^{t_k} - L_{x_j}^{t_{k-1}}) \right]$$

(3.3.7)

Ze vztahu (3.3.7) je potřeba určit násobení matic

$$K \cdot K = \begin{pmatrix} 0 & \frac{S}{r} \\ \frac{k}{S} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{S}{r} \\ \frac{k}{S} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k}{r} & 0 \\ 0 & \frac{k}{r} \end{pmatrix}$$

$$K \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{S}{r} \\ \frac{k}{S} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{I}{2 \cdot D \cdot S} \cdot |Q| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k \cdot I}{2 \cdot D \cdot S^2} \cdot |Q| & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot K = \begin{pmatrix} \frac{I}{2 \cdot D \cdot S} \cdot |Q| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{S}{r} \\ \frac{k}{S} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{I}{2 \cdot r \cdot D} \cdot |Q| \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{I}{2 \cdot D \cdot S} \cdot |Q| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{I}{2 \cdot D \cdot S} \cdot |Q| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{I}{2 \cdot D \cdot S} \cdot |Q| \right)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rovnici (3.3.7) převedeme do maticového zápisu

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{x_j}^{t_{k+1}} &= \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{x_j}^{t_k} - \Delta t \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot \Delta x} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{S}{r} \\ \frac{k}{S} & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{x_{j+1}}^{t_k} - \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{x_{j-1}}^{t_k} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \begin{pmatrix} \frac{I}{2 \cdot D \cdot S} \cdot |Q| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{x_j}^{t_k} - \begin{pmatrix} 0 \\ k \cdot l \end{pmatrix}_{x_j}^{t_k} \right] + \\
 &\quad \left[\frac{1}{\Delta x^2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{k}{r} & 0 \\ 0 & \frac{k}{r} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{x_{j+1}}^{t_k} - 2 \cdot \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{x_j}^{t_k} + \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{x_{j-1}}^{t_k} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2 \cdot \Delta x} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k \cdot I}{2 \cdot D \cdot S^2} \cdot |Q| & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{x_{j+1}}^{t_k} - \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{x_{j-1}}^{t_k} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot \Delta x} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{I}{2 \cdot r \cdot D} \cdot |Q| \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{x_{j+1}}^{t_k} - \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{x_{j-1}}^{t_k} \right) + \begin{pmatrix} \left(\frac{I}{2 \cdot D \cdot S} \cdot |Q| \right)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{x_j}^{t_k} - \right. \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2 \cdot \Delta x} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{S}{r} \\ \frac{k}{S} & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ k \cdot l \end{pmatrix}_{x_{j+1}}^{t_k} - \begin{pmatrix} 0 \\ k \cdot l \end{pmatrix}_{x_{j-1}}^{t_k} \right) - \begin{pmatrix} \frac{I}{2 \cdot D \cdot S} \cdot |Q| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ k \cdot l \end{pmatrix}_{x_j}^{t_k} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\Delta t} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ k \cdot l \end{pmatrix}_{x_j}^{t_k} - \begin{pmatrix} 0 \\ k \cdot l \end{pmatrix}_{x_j}^{t_{k-1}} \right) \right]
 \end{aligned}
 \tag{3.3.8}$$

Výraz (3.3.8) rozepíšeme na složky a dostaneme

Vztah pro průtok

$$\begin{aligned}
 Q_{x_j}^{t_{k+1}} &= Q_{x_j}^{t_k} - \Delta t \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot \Delta x} \cdot \frac{S}{r} \cdot (p_{x_{j+1}}^{t_k} - p_{x_{j-1}}^{t_k}) + \frac{I}{2 \cdot D \cdot S} \cdot |Q_{x_j}^{t_k}| \cdot Q_{x_j}^{t_k} - 0 \right] + \\
 &\quad + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \left[\frac{1}{\Delta x^2} \cdot \frac{k}{r} \cdot (Q_{x_{j+1}}^{t_k} - 2 \cdot Q_{x_j}^{t_k} + Q_{x_{j-1}}^{t_k}) + \frac{1}{2 \cdot \Delta x} \cdot 0 + \frac{1}{2 \cdot \Delta x} \cdot \frac{I}{2 \cdot r \cdot D} \cdot |Q_{x_j}^{t_k}| \cdot (p_{x_{j+1}}^{t_k} - p_{x_{j-1}}^{t_k}) \right] \\
 &\quad \left[+ \left(\frac{I}{2 \cdot D \cdot S} \right)^2 \cdot (Q_{x_j}^{t_k})^3 - \frac{1}{2 \cdot \Delta x} \cdot \frac{S}{r} \cdot (k \cdot l_{x_{j+1}}^{t_k} - k \cdot l_{x_{j-1}}^{t_k}) - 0 + 0 \right]
 \end{aligned}
 \tag{3.3.9}$$



Vztah pro tlak

$$p_{x_j}^{t_{k+1}} = p_{x_j}^{t_k} - \Delta t \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot \Delta x} \cdot \frac{k}{S} \cdot (Q_{x_{j+1}}^{t_k} - Q_{x_{j-1}}^{t_k}) + 0 - k \cdot l_{x_j}^{t_k} \right] +$$
$$+ \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \left[\frac{1}{\Delta x^2} \cdot \frac{k}{r} \cdot (p_{x_{j+1}}^{t_k} - 2 \cdot p_{x_j}^{t_k} + p_{x_{j-1}}^{t_k}) + \frac{1}{2 \cdot \Delta x} \cdot \frac{k \cdot l}{2 \cdot D \cdot S^2} \cdot |Q_{x_j}^{t_k}| \cdot (Q_{x_{j+1}}^{t_k} - Q_{x_{j-1}}^{t_k}) \right]$$
$$\left[+ \frac{1}{2 \cdot \Delta x} \cdot 0 + 0 - \frac{1}{2 \cdot \Delta x} \cdot 0 - 0 + \frac{\partial(k \cdot l)}{\partial t} \Big|_{x_j}^{t_k} + \frac{1}{\Delta t} \cdot (k \cdot l_{x_j}^{t_k} - k \cdot l_{x_j}^{t_{k-1}}) \right]$$

(3.3.10)

Pro zjednodušení zápisu zavedeme konstanty

pro Q

$$a_Q = \frac{S}{2 \cdot \Delta x \cdot r}$$

$$b_Q = \frac{l}{2 \cdot D \cdot S}$$

$$c_Q = \frac{k}{\Delta x^2 \cdot r}$$

$$d_Q = \frac{l}{4 \cdot \Delta x \cdot r \cdot D}$$

$$e_Q = \left(\frac{l}{2 \cdot D \cdot S} \right)^2$$

pro p

$$f_p = \frac{k}{2 \cdot \Delta x \cdot S}$$

$$g_p = \frac{k}{\Delta x^2 \cdot r}$$

$$h_p = \frac{k \cdot l}{4 \cdot \Delta x \cdot D \cdot S^2}$$

Po dosazení konstant dostaneme výpočtové vztahy pro vnitřní uzlové body

Vztah pro průtok

$$Q_{x_j}^{t_{k+1}} = Q_{x_j}^{t_k} - \Delta t \cdot [a_Q \cdot (p_{x_{j+1}}^{t_k} - p_{x_{j-1}}^{t_k}) + b_Q \cdot |Q_{x_j}^{t_k}| \cdot Q_{x_j}^{t_k}] +$$
$$+ \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \left[c_Q \cdot (Q_{x_{j+1}}^{t_k} - 2 \cdot Q_{x_j}^{t_k} + Q_{x_{j-1}}^{t_k}) + d_Q \cdot |Q_{x_j}^{t_k}| \cdot (p_{x_{j+1}}^{t_k} - p_{x_{j-1}}^{t_k}) + \right]$$
$$\left[+ e_Q \cdot (Q_{x_j}^{t_k})^3 - a_Q \cdot (k \cdot l_{x_{j+1}}^{t_k} - k \cdot l_{x_{j-1}}^{t_k}) \right]$$

(3.3.11)

Vztah pro tlak

$$p_{x_j}^{t_{k+1}} = p_{x_j}^{t_k} - \Delta t \cdot [f_p \cdot (Q_{x_{j+1}}^{t_k} - Q_{x_{j-1}}^{t_k}) - k \cdot l_{x_j}^{t_k}] +$$
$$+ \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \left[g_p \cdot (p_{x_{j+1}}^{t_k} - 2 \cdot p_{x_j}^{t_k} + p_{x_{j-1}}^{t_k}) + h_p \cdot |Q_{x_j}^{t_k}| \cdot (Q_{x_{j+1}}^{t_k} - Q_{x_{j-1}}^{t_k}) + \frac{1}{\Delta t} \cdot (k \cdot l_{x_j}^{t_k} - k \cdot l_{x_j}^{t_{k-1}}) \right]$$

(3.3.12)

3.4 Pravá strana v rovnici kontinuity

Při odvozování numerických schémat jsme se doposud nezabývali jak se v jednotlivých uzlech výpočetní sítě stanoví člen l vystupující na pravé straně rovnice kontinuity. Jeho explicitní vyjádření bylo stanoveno vztahem (2.2.4.5).

$$l = -\frac{2 \cdot R}{\Delta \cdot b_1} \cdot \left(\int_{\Delta t}^t \frac{dp(t-t)}{dt} \cdot e^{-\frac{E_1}{b_1}t} \cdot dt + p(0) \cdot e^{-\frac{E_1}{b_1}t} \right)$$

Vezmeme-li v úvahu, že integrál lze určit jako sumu diskrétních veličin, pak velikost tohoto konvolučního integrálu je možné počítat jako součin tlakových diferencí a střední hodnoty exponenciální funkce v příslušných časových okamžicích. Výsledek bude následující

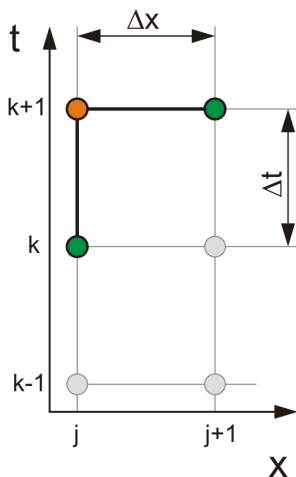
$$l_{x_j}^{t_k} = -\frac{2 \cdot R}{\Delta \cdot b_1} \cdot \left(\sum_{i=0}^k \frac{p_{x_j}^{t^{(k-i)}} - p_{x_j}^{t^{(k-i-1)}}}{\Delta t} \cdot \frac{\int_{(i+1)\Delta t}^{(i+2)\Delta t} e^{-\frac{E_1}{b_1}t} \cdot dt}{\Delta t} \cdot \Delta t + p_{x_j}^{t_0} \cdot e^{-\frac{E_1}{b_1}t_k} \right) \quad (3.4.1)$$

Po integraci exponenciální funkce a jednoduchých úpravách získáme vztah vhodný k numerickému výpočtu

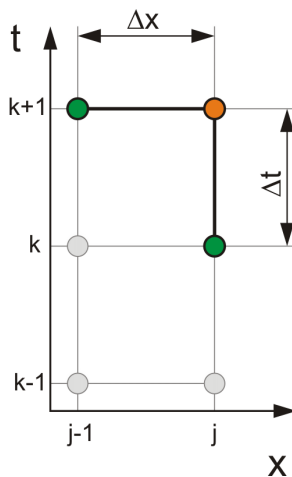
$$l_{x_j}^{t_k} = -\frac{2 \cdot R}{\Delta \cdot b_1} \cdot \left\{ \frac{b_1}{E_1} \cdot \left(\sum_{i=0}^k \left[\frac{p_{x_j}^{t^{(k-i)}} - p_{x_j}^{t^{(k-i-1)}}}{\Delta t} \right] \cdot \left[e^{-\frac{E_1}{b_1}(i+1)\Delta t} - e^{-\frac{E_1}{b_1}(i+2)\Delta t} \right] \right) + p_{x_j}^{t_0} \cdot e^{-\frac{E_1}{b_1}t_k} \right\} \quad (3.4.2)$$

3.5 Počáteční a koncový uzlový bod

Pro všechna numerická schémata stanovíme výpočet počátečního a koncového bodu ze známých (navolených) okrajových podmínek a z jedné rovnice vyjadřující nestacionární proudění v pružné trubici.



Obr. 3.4. Počáteční uzlový bod



Obr. 3.5. Koncový uzlový bod

Výpočtové vztahy pro počáteční uzlový bod

Zanedbáme rovnici silové rovnováhy a můžeme psát vztah pro rovnici kontinuity. Prostorové a časové derivace nahradíme diferencemi podle obr. 3.4. a dostaneme

$$\frac{p_{x_j}^{t_{k+1}} - p_{x_j}^{t_k}}{\Delta t} + \frac{k}{S} \cdot \frac{(Q_{x_{j+1}}^{t_{k+1}} - Q_{x_j}^{t_{k+1}})}{\Delta x} = k \cdot l_{x_j}^{t_k} \quad (3.5.1)$$

Uvažováním okrajové podmínky pro tlak získáme vztah pro výpočet průtoku

$$Q_{x_j}^{t_{k+1}} = Q_{x_{j+1}}^{t_{k+1}} + \frac{S \cdot \Delta x}{k \cdot \Delta t} \cdot (p_{x_j}^{t_{k+1}} - p_{x_j}^{t_k}) - S \cdot \Delta x \cdot l_{x_j}^{t_k} \quad (3.5.2)$$

Uvažováním okrajové podmínky pro průtok získáme vztah pro výpočet tlaku

$$p_{x_j}^{t_{k+1}} = p_{x_j}^{t_k} - \frac{k \cdot \Delta t}{S \cdot \Delta x} \cdot (Q_{x_{j+1}}^{t_{k+1}} - Q_{x_j}^{t_{k+1}}) + \Delta t \cdot k \cdot l_{x_j}^{t_k} \quad (3.5.3)$$

Výpočtové vztahy pro koncový uzlový bod

Obdobně jako v případě počátečního uzlu zanedbáme rovnici silové rovnováhy a je možné psát vztah pro rovnici kontinuity. Prostorové a časové derivace nahradíme diferencemi podle obr. 3.5. a dostaneme

$$\frac{p_{x_j}^{t_{k+1}} - p_{x_j}^{t_k}}{\Delta t} + \frac{k}{S} \cdot \frac{(Q_{x_j}^{t_{k+1}} - Q_{x_{j-1}}^{t_{k+1}})}{\Delta x} = k \cdot l_{x_j}^{t_k} \quad (3.5.4)$$

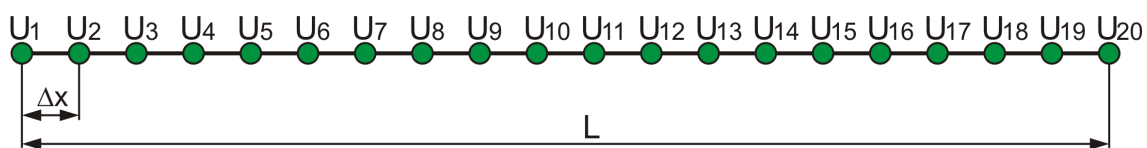
Uvažováním okrajové podmínky pro tlak získáme vztah pro výpočet průtoku

$$Q_{x_j}^{t_{k+1}} = Q_{x_{j-1}}^{t_{k+1}} - \frac{S \cdot \Delta x}{k \cdot \Delta t} \cdot (p_{x_j}^{t_{k+1}} - p_{x_j}^{t_k}) + S \cdot \Delta x \cdot l_{x_j}^{t_k} \quad (3.5.5)$$

Uvažováním okrajové podmínky pro průtok získáme vztah pro výpočet tlaku

$$p_{x_j}^{t_{k+1}} = p_{x_j}^{t_k} - \frac{k \cdot \Delta t}{S \cdot \Delta x} (Q_{x_j}^{t_{k+1}} - Q_{x_{j-1}}^{t_{k+1}}) + \Delta t \cdot k \cdot l_{x_j}^{t_k} \quad (3.5.6)$$

3.6 Porovnání numerických schémat



Obr. 3.6. Numerický model potrubí

Model potrubí

Délka potrubí	$L = 380 \text{ m}$
Průměr potrubí	$D = 0,3 \text{ m}$
Tloušťka stěny potrubí	$\Delta = 5 \text{ mm}$
Rychlost zvuku v kapalině	$v_0 = 1000 \text{ m/s}$
Hustota kapaliny	$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$
Koeficient tření	$\lambda = 0,02$
Modul pružnosti potrubí	$E_1 = 1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$
Tlumení v materiálu trubice	$b_1 = 4 \cdot 10^9 \text{ Pa.s}$
Počet uzlových bodů	20
Vzdálenost mezi uzlovými body	$\Delta x = 20 \text{ m}$



Počáteční podmínky

Vycházejí z ustáleného řešení pro okrajové podmínky – tlak na počátku a průtok na konci potrubí.

Počátek potrubí (uzel 1)	$p_1 = 1 \text{ MPa}$
	$Q_1 = 100 \text{ l/s}$
Konec potrubí (uzel 20)	$p_{20} = 0,9775 \text{ MPa}$
	$Q_{20} = 100 \text{ l/s}$

Okrajové podmínky

Počátek potrubí (uzel 1)	$p_1 = 1 \text{ MPa}$
Konec potrubí (uzel 20)	$Q_{20} = Q_{20}(t)$

Časový krok

S velikostí časového kroku Δt úzce souvisí stabilita uvedených numerických schémat. Jelikož předmětem této práce není vyšetřování stability schémat aplikovaných na uvedený systém rovnic, omezíme se pouze na nutnou podmínku stability

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|v|} \quad (3.6.1)$$

Z uvedené podmínky je již patrné, že volba časového kroku není libovolná a její stanovení na počátku úlohy v podstatě odhadujeme, protože neznáme rychlost zvuku v systému. Volba malých hodnot sice zlepšuje stabilitu (jen po určitou mez), ale naopak může neúměrně zvyšovat výpočetní čas. Proto je třeba při volbě časového kroku hledat kompromis mezi stabilitou a dobou výpočtu.

Numerickým modelováním bylo zjištěno, že na poddajnost tekutiny a pružné trubice s uvažováním tlumení má vliv nejen výraz (2.2.4.4), ale i pravá strana rovnice kontinuity (2.2.4.5). Při prvotním návrhu časového kroku lze přibližnou hodnotu rychlosti zvuku v systému \tilde{v} určit z (2.2.4.4) a navolených modelových konstant potrubí a kapaliny.

Nejprve si výraz (2.2.4.4) upravíme

$$k = \left(\frac{1}{r \cdot v_0^2} + \frac{2 \cdot R}{\Delta \cdot E_1} \cdot \left[1 - e^{-\frac{E_1 \cdot \Delta t}{b_1}} \right] \right)^{-1}$$



Jelikož uvažujeme $k = r \cdot \tilde{v}^2$, pak můžeme psát vztah pro \tilde{v}

$$\tilde{v} = \sqrt{\frac{1}{r} \cdot \left(\frac{1}{r \cdot v_0^2} + \frac{2 \cdot R}{\Delta \cdot E_1} \cdot \left[1 - e^{-\frac{E_1 \cdot \Delta t}{b_1}} \right] \right)^{-1}} \quad (3.6.2)$$

Velikost Δt odhadneme dosazením této rovnice do podmínky (3.6.1) a získáme

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\tilde{v}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{\frac{1}{r} \cdot \left(\frac{1}{r \cdot v_0^2} + \frac{2 \cdot R}{\Delta \cdot E_1} \cdot \left[1 - e^{-\frac{E_1 \cdot \Delta t}{b_1}} \right] \right)^{-1}}} \quad (3.6.3)$$

Iterativním způsobem řešení rovnice (3.6.3) pro uvedené parametry modelu potrubí zjistíme velikost $\Delta t \leq 0,0224s$

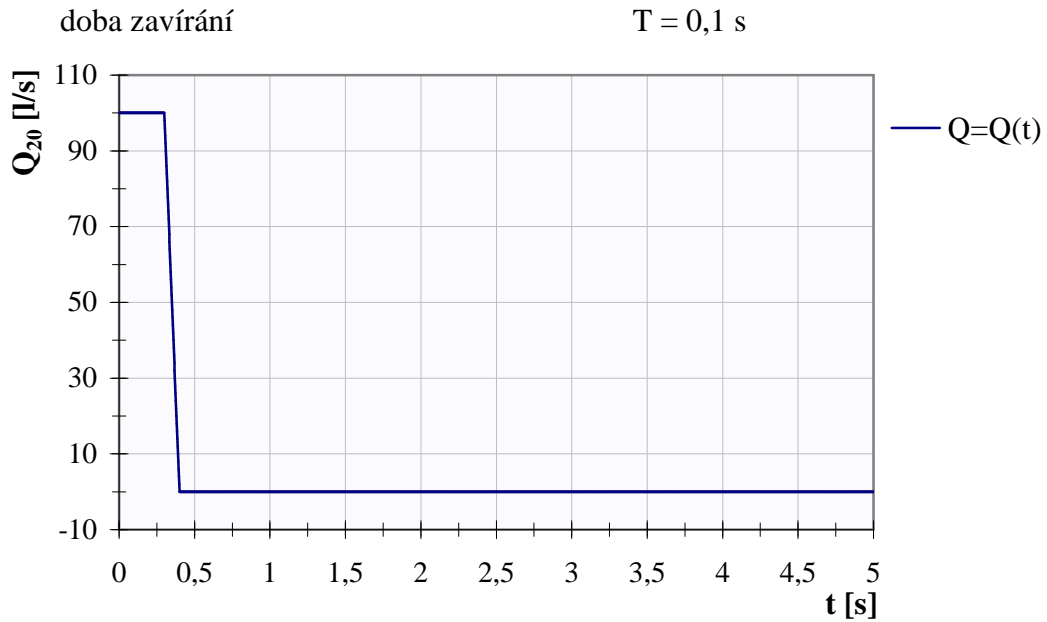
Schéma typu Lax-Wendroffa vykazuje stabilitu blížíící se podmínce (3.6.3), zatímco schémata FTCS a Lax-Friedrichs se ukázala jako velice nestabilní. Skutečný časový krok byl tedy pro porovnání numerických metod volen podstatně menší.

FTCS	$\Delta t_{\text{FTCS}} = 0,002 s$
Lax-Friedrichs	$\Delta t_{\text{L.F.}} = 0,001 s$
Lax-Wendroff	$\Delta t_{\text{L.W.}} = 0,002 s$

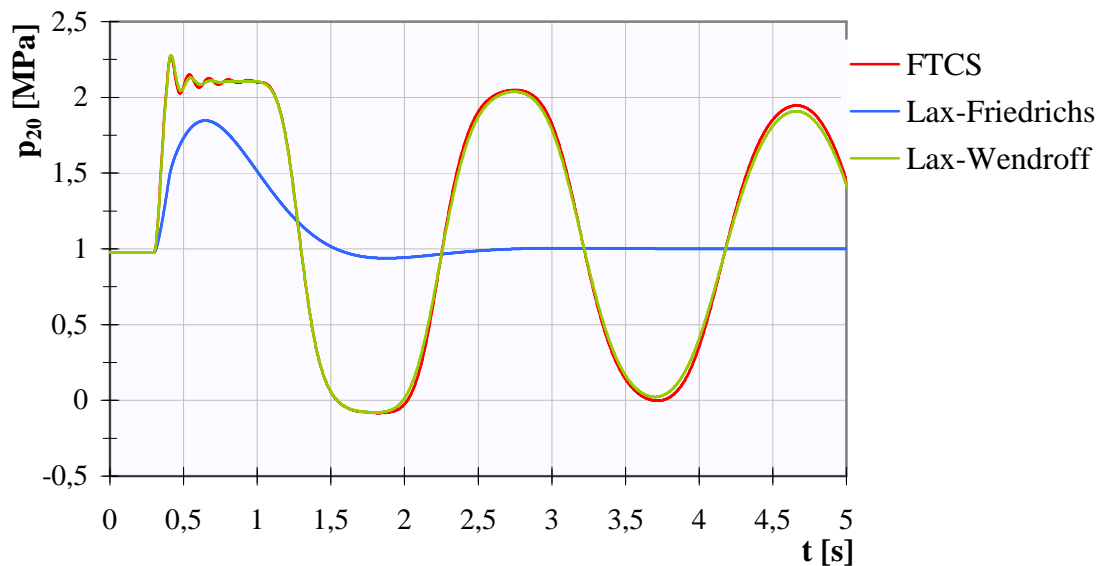
Počáteční a koncový bod

Při výpočtu koncových bodů jsme zanedbali rovnici silové rovnováhy a pro řešení jsme použili pouze rovnici kontinuity, kterou jsme aproximovali diferenčními vztahy.

3.6.1 Grafické porovnání schémat FTCS, Lax-Friedrichs a Lax-Wendroff



Graf 3.1. $Q_{20}(t)$, porovnání metod FTCS, L.-F. a L.-W.



Graf 3.2. $p_{20}(t)$, porovnání metod FTCS, L.-F. a L.-W.



3.6.2 Posouzení numerických schémat

Schémata prvního řádu

Numerická schémata FTCS a Lax-Friedrichs jsou patrně nejjednodušší na porozumění, z tohoto důvodu jsou diskutována jako první. Obecně schémata prvního řádu se vyznačují svou robustností, (tj. je možné je použít pro velmi širokou škálu problémů) mají nízkou přesnost a tudíž je potřeba používat velmi jemné sítě.

Schéma FTCS je v literatuře uváděno jako základní, ale pro svou omezenou stabilitu není doporučováno, např. lze nalézt v [8]. Při řešení daného systému rovnic se nestabilita záhy potvrdila, protože konvergence numerického řešení bylo dosaženo až při velmi nízkém časovém kroku. V této práci bylo toto schéma voleno jako porovnávací k schématu Lax-Wendroffa. Svým přístupem jsou obě schémata obdobné, jelikož využívají rozvoje do Taylorových řad a i jejich výsledky při stejných vstupních parametrech tomu odpovídají.

Schémata typu Lax-Friedrichs vykazují velmi silný vliv umělé vazkosti, která výrazně vyhlazuje numerické řešení, viz např. [7]. Toto vyhlazování je ale natolik silné, že veškeré oscilace při dynamickém chování pružných hadic jsou okamžitě utlumeny a proto ani tato metoda není dále rozvíjena.

Lax-Wendroff

Významný milník ve vývoji schémat pro numerické řešení úloh proudění je Lax-Wendroffovo schéma. Je odvozeno na základě rozvoje řešení do Taylorových řad a jeho odvození je tedy korektní jen pro případ dostatečně hladkého řešení. Pokud řešíme problémy s nespojitostmi, vznikají kolem těchto nespojitostí oscilace. Ty je možné pozorovat např. při modelování vodního rázu v oblastech maximálních tlaků. Schéma se obecně vyznačuje dobrou přesností umožňující výpočet i na hrubších sítích a dostatečnou konvergencí numerického řešení. Z uvedených vlastností bude toto schéma dále diskutováno.



3.7 Vliv paměťové funkce

Matematický model pružného potrubí s uvažováním tlumení v materiálu trubice se liší od modelů pro pružná potrubí uváděných v literatuře především rovnicí kontinuity. Zcela nově v ní vystupuje člen na pravé straně (2.2.4.5), který se významně podílí na chování celého systému. V tomto členu vystupuje konvoluční integrál, jehož výpočet musí být realizován v každém bodě sítě. V kap. 3.4 byl uveden předpis pro jeho výpočet. Ten je prováděn jako součin časových diferencí tlaku a paměťové funkce z celé časové historie. V praxi je možné tento způsob výpočtu realizovat, ale z hlediska dlouhých výpočetních časů není takovýto výpočet vhodný. Z analytického vyjádření konvolučního integrálu lze vyzorovat, že se zvětšující se časovou souřadnicí lineárně narůstá doba výpočtu, ale zároveň paměťová funkce se rychle zmenšuje, a tudíž i samotný součin již tolik neovlivňuje člen na pravé straně.

Abychom ověřili jak velký vliv má délka časové historie, přes kterou se počítá konvoluční integrál, bylo pomocí metody Lax-Wendroff namodelováno osm úloh. Všechny úlohy byly počítány pro stejné parametry potrubí, pouze výpočet konvolučního integrálu byl uskutečněn přes rozdílné časové intervaly. Délky těchto intervalů byly voleny z hlediska velikosti sumy paměťové funkce, přičemž u výchozí porovnávací úlohy se konvoluce počítala z celé časové historie.

Model potrubí

Délka potrubí	$L = 380 \text{ m}$
Průměr potrubí	$D = 0,3 \text{ m}$
Tloušťka stěny potrubí	$\Delta = 5 \text{ mm}$
Rychlost zvuku v kapalině	$v_0 = 1000 \text{ m/s}$
Hustota kapaliny	$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$
Koeficient tření	$\lambda = 0,02$
Modul pružnosti potrubí	$E_1 = 6 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$
Tlumení v materiálu trubice	$b_1 = 5 \cdot 10^9 \text{ Pa.s}$
Počet uzlových bodů	20
Vzdálenost mezi uzlovými body	$\Delta x = 20 \text{ m}$



Počáteční podmínky

Vycházejí z ustáleného řešení pro okrajové podmínky – tlak na počátku a průtok na konci potrubí.

Počátek potrubí (uzel 1)	$p_1 = 1 \text{ MPa}$ $Q_1 = 100 \text{ l/s}$
Konec potrubí (uzel 20)	$p_{20} = 0,9746 \text{ MPa}$ $Q_{20} = 100 \text{ l/s}$

Okrajové podmínky

Počátek potrubí (uzel 1)	$p_1 = 1 \text{ MPa}$
Konec potrubí (uzel 20)	$Q_{20} = Q_{20}(t)$

Časový krok

Velikost časového kroku odhadneme z podmínky (3.6.3) a pro navržené parametry potrubí obdržíme: $\Delta t \leq 0,0222 \text{ s}$

zvolený časový krok	$\Delta t = 0,01 \text{ s}$
---------------------	-----------------------------

Počáteční a koncový bod

Počáteční a koncové body byly řešeny z rovnice kontinuity, rovnice silové rovnováhy byla zanedbána.

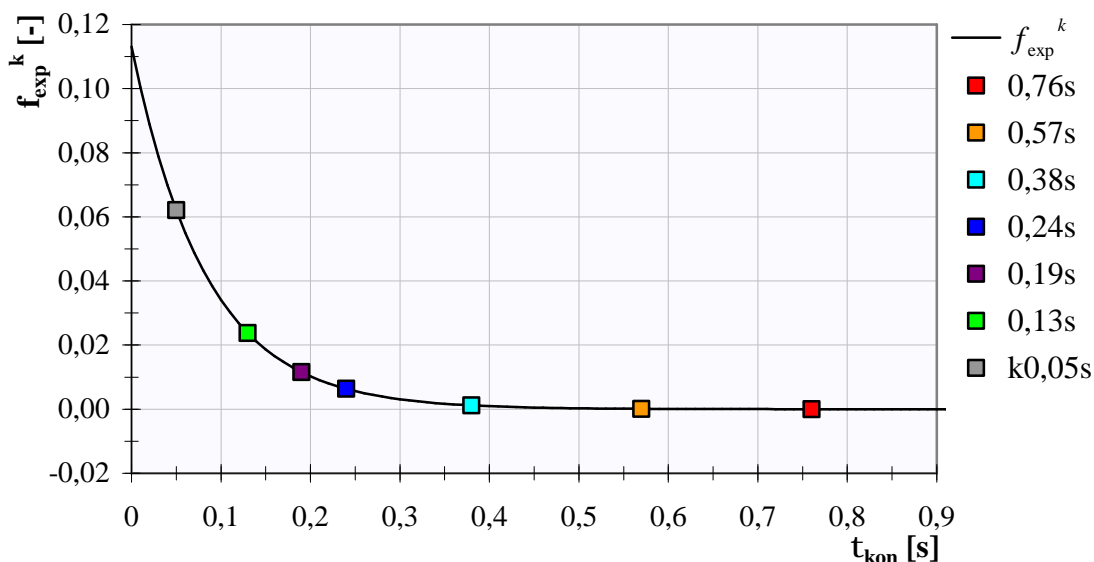
Časové intervaly konvoluce

Paměťová funkce z pravé strany rovnice kontinuity pro porovnání

$$f_{\text{exp}}^k = \sum_{i=0}^k \left[e^{-\frac{E_1 \cdot i \cdot \Delta t}{b_1}} - e^{-\frac{E_1 \cdot (i+1) \cdot \Delta t}{b_1}} \right] \quad (3.7.1)$$

Číslo úlohy	Časová souřadnice k	Konvoluce	f_{exp}^k	$\frac{100}{f_{\text{exp}}^{1300}} \cdot f_{\text{exp}}^k$
		$t_{\text{kon}} = k \cdot \Delta t$ [s]	[-]	[%]
1	1300	13,00	1,000000	100,000
2	76	0,76	0,999903	99,9903
3	57	0,57	0,999051	99,9051
4	38	0,38	0,990721	99,0721
5	24	0,24	0,950213	95,0213
6	19	0,19	0,909282	90,9282
7	13	0,13	0,813626	81,3626
8	5	0,05	0,513248	51,3248

Tab. 3.1. Parametry úloh pro porovnání časového intervalu konvoluce



Graf 3.3. $f_{\text{exp}}^k(t)$, zadání úloh pro porovnání časového intervalu konvoluce

3.7.1 Vyhodnocení vlivu paměťové funkce

K vyhodnocení vlivu časového intervalu výpočtu konvolučního integrálu byl zvolen logaritmický dekrement útlumu popisující kmitavý tlumený pohyb. Podíl dvou po sobě jdoucích amplitud stejného směru A_n a A_{n+1} , které jsou od sebe časově vzdáleny o dobu kmitu T , se nazývá útlum Λ , tedy

$$\Lambda = \frac{A_n(t)}{A_{n+1}(t+T)} \quad (3.7.2.1)$$

Logaritmický dekrement útlumu d je přirozený logaritmus útlumu Λ

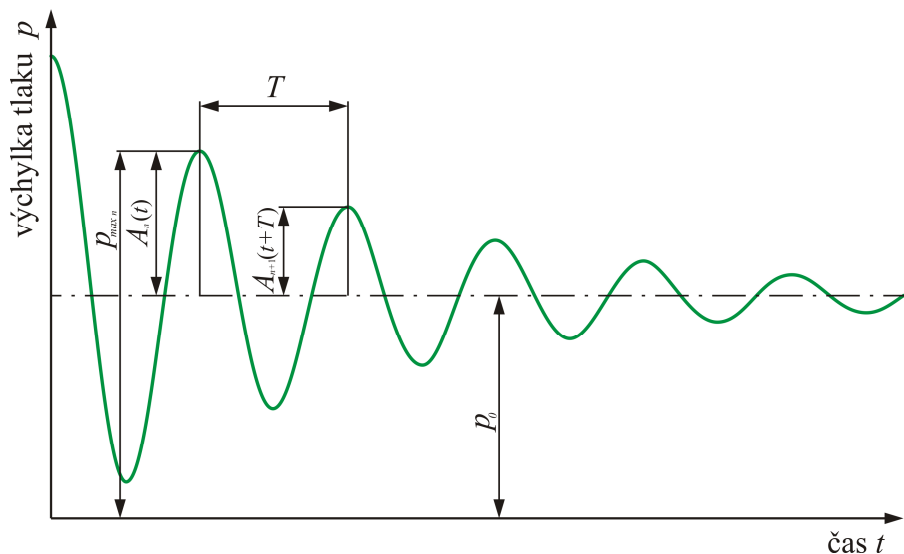
$$d = \ln \Lambda \quad \text{dosazením za } \Lambda: \quad d = \ln \frac{A_n(t)}{A_{n+1}(t+T)} \quad (3.7.2.2)$$

Velikost amplitud lze určit z maxima tlaku a z její ustálené hodnoty

$$A_n = p_{\max n} - p_0 \quad (3.7.2.3)$$

Kde

p_0 je ustálená hodnota tlaku, která zároveň odpovídá okrajové podmínce pro tlak v počátečním uzlu 1.



Obr. 3.7. Tlumený kmitavý pohyb

Pro logaritmický dekrement útlumu stanovíme absolutní chybu $(e)_d$ v závislosti na době konvoluce ze vztahu

$$(e)_d = d^{1300} - d^k \quad (3.7.2.3)$$

Kde d^{1300} je výchozí hodnota logaritmického dekrementu útlumu, u níž byla konvoluce počítána z intervalu 13s.

Pro relativní chybu $(f)_d$ vyjádřenou v procentech vztáženou k výchozí hodnotě lze psát

$$(f)_d = \frac{(e)_d}{d^{1300}} \cdot 100 \quad (3.7.2.3)$$

Ve vztahu (3.7.1) vystupuje podíl tlumení b_1 a tuhosti E_1 jehož převrácená hodnota $\frac{b_1}{E_1}$ má rozměr času. Protože argument exponenciální funkce musí být

bezrozměrový, nazývá se podíl $\frac{b_1}{E_1}$ časová konstanta exponenciální funkce a označme ji symbolem $t_{b_1 E_1}$.



Můžeme tedy zavést bezrozměrnou poměrnou konvoluci T_p , která bude nezávislá na b_1 a E_1 . Určíme ji jako podíl vyhodnocované konvoluce $t_{kon} = k \cdot \Delta t$ a $t_{b_1 E_1}$:

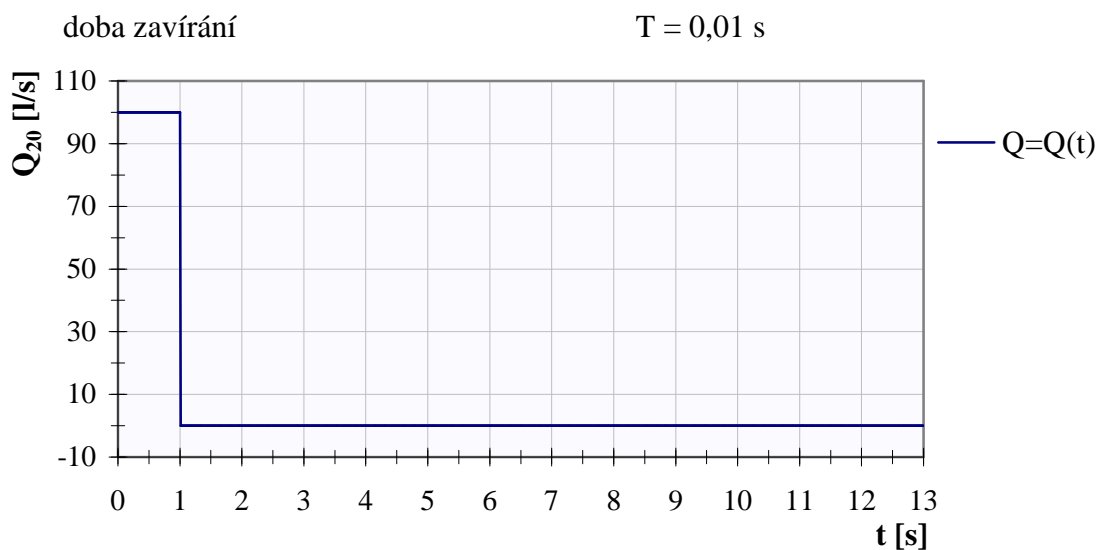
$$T_p = \frac{t_{kon}}{t_{b_1 E_1}} \quad \text{dosazením za konstanty: } T_p = \frac{E_1 \cdot k \cdot \Delta t}{b_1} \quad (3.7.2.4)$$

První amplitudy těsně po vyvolání vodního rázu jsou deformovány dobou reflexe rázové vlny, a proto pro vyhodnocení byla vybrána pátá a šestá amplituda tlaku, kde jsou již vyšší tvary kmitu utlumeny.

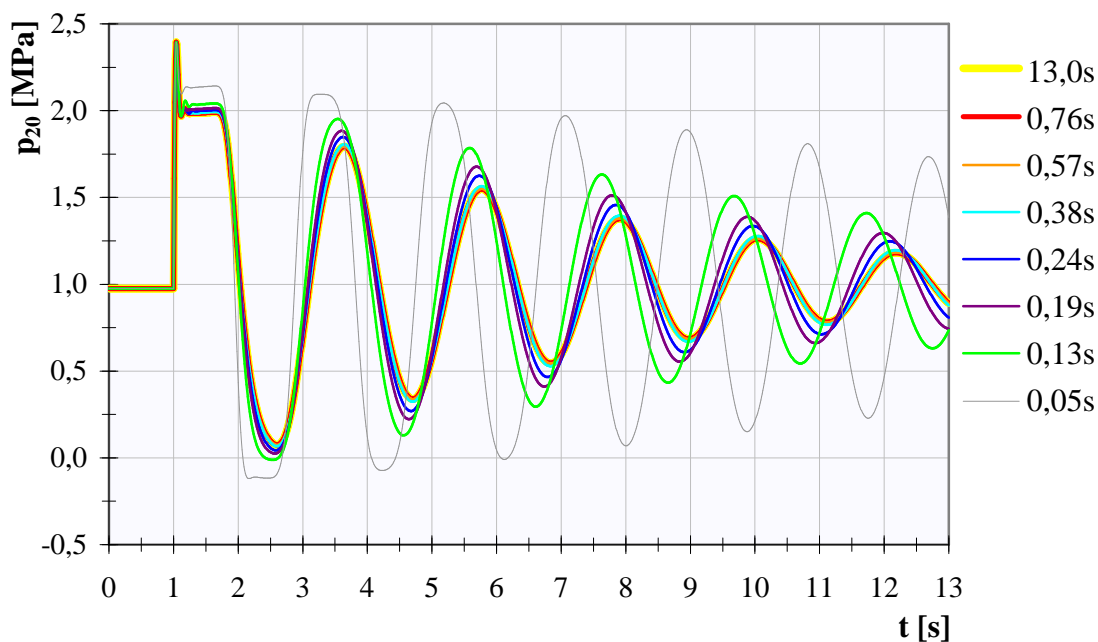
t_{kon}	T_p	A_5	A_6	d	$(e)_d$	$(f)_d$
[s]	[-]	[Pa]	[Pa]	[-]	[-]	[%]
13,00	156	262095,111	182293,540	0,363089	-	-
0,76	9,12	262218,179	182402,302	0,362962	0,000127	0,03498
0,57	6,84	263734,509	183725,325	0,361501	0,001588	0,43739
0,38	4,56	277909,606	196055,361	0,348899	0,014190	3,90824
0,24	2,88	335603,069	247289,464	0,305370	0,057720	15,8968
0,19	2,28	388540,404	295762,056	0,272842	0,090247	24,8554
0,13	1,56	508775,789	410300,199	0,215118	0,147971	40,7533
0,05	0,6	889777,336	809667,920	0,094347	0,268742	74,0155

Tab. 3.2. Vyhodnocení vlivu konvoluce

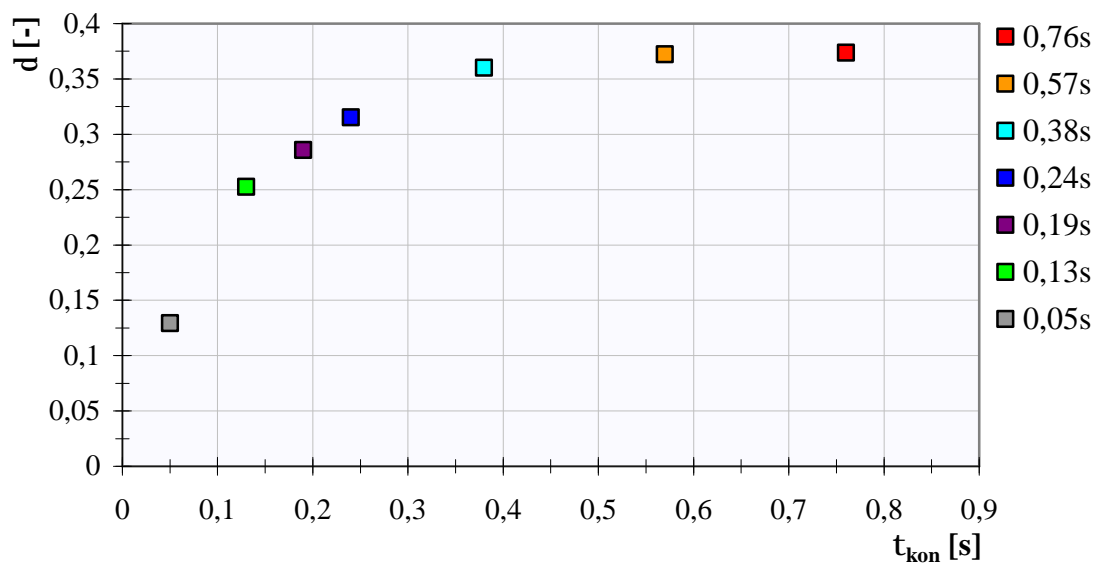
3.7.2 Grafické vyhodnocení vlivu konvoluce



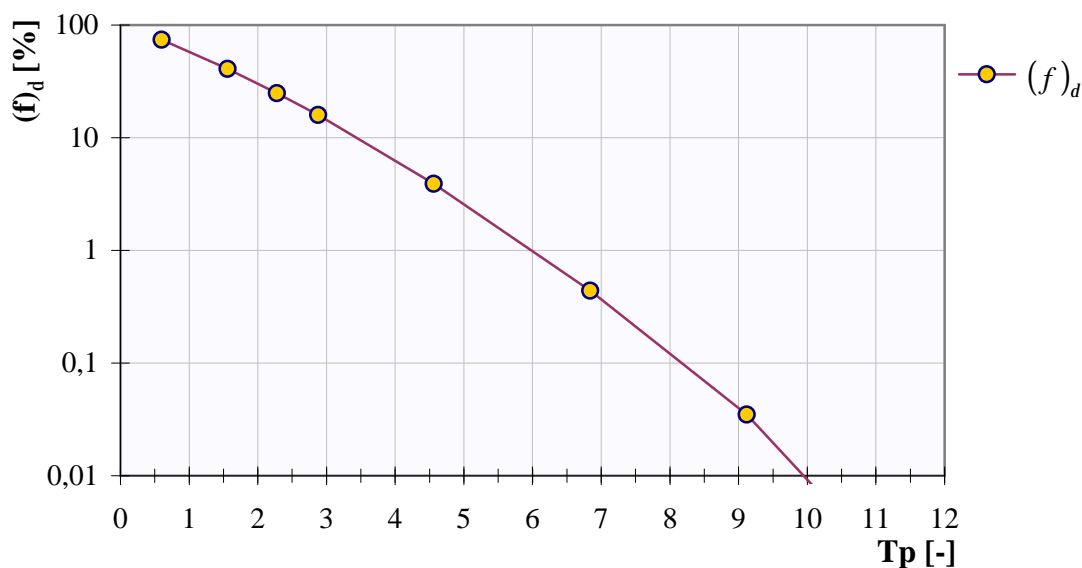
Graf 3.4. $Q_{20}(t)$, porovnání vlivu konvoluce



Graf 3.5. $p_{20}(t)$, porovnání vlivu konvoluce



Graf 3.6. Logaritmičeský dekrement útlumu $d(t_{kon})$



Graf 3.7. Relativní chyba logaritmického dekrementu útlumu $(f)_d$

3.8 Hustota výpočetní sítě

Numerický model, který je v této práci využíván, pracuje se sítí s 20 uzlovými body. Při volbě sítě jsme vycházeli z předpokladu, že vlastní řešení je nezávislé na velikosti výpočetní sítě. Počáteční a koncové body sítě jsou počítány pouze z rovnice kontinuity. Zanedbáním rovnice silové rovnováhy při jejich výpočtu znamená, že na délce $2\Delta x$ zanedbáváme vliv tření a setrvačných sil na celkový výsledek. Nezávislost volby počtu uzlových bodů v síti a zjednodušení, kterých se dopouštíme při výpočtu okrajových bodů, bylo nutné potvrdit. Mimo síť s 20 uzlovými body byly namodelovány úlohy s 10 a 40 uzlovými body, přičemž každá síť byla počítána pro dva různé časové kroky.

Model potrubí

Délka potrubí	$L = 400$ m
Průměr potrubí	$D = 0,3$ m
Tloušťka stěny potrubí	$\Delta = 5$ mm
Rychlost zvuku v kapalině	$v_0 = 1000$ m/s
Hustota kapaliny	$\rho = 1000$ kg/m ³
Koeficient tření	$\lambda = 0,02$
Modul pružnosti potrubí	$E_1 = 6 \cdot 10^{10}$ Pa
Tlumení v materiálu trubice	$b_1 = 5 \cdot 10^9$ Pa.s
Počet uzlových bodů	20



Vzdálenost mezi uzlovými body	$\Delta x_1 = 10 \text{ m}$
	$\Delta x_2 = 20 \text{ m}$
	$\Delta x_3 = 40 \text{ m}$

Počáteční podmínky

Vycházejí z ustáleného řešení pro okrajové podmínky – tlak na počátku a průtok na konci potrubí.

Počátek potrubí (uzel 1)	$p_1 = 1 \text{ MPa}$
	$Q_1 = 100 \text{ l/s}$
Konec potrubí (uzel 20)	$p_{20} = 0,9746 \text{ MPa}$
	$Q_{20} = 100 \text{ l/s}$

Okrajové podmínky

Počátek potrubí (uzel 1)	$p_1 = 1 \text{ MPa}$
Konec potrubí (uzel 20)	$Q_{20} = Q_{20}(t)$

Časový krok

Velikost časového kroku pro jednotlivé úlohy odhadneme z podmínky (3.6.3) a pro navržené parametry potrubí dostaneme

$\Delta x_1 = 10 \text{ m}$	$\Delta t_1 \leq 0,0106 \text{ s}$
$\Delta x_2 = 20 \text{ m}$	$\Delta t_2 \leq 0,0222 \text{ s}$
$\Delta x_3 = 40 \text{ m}$	$\Delta t_3 \leq 0,0480 \text{ s}$

Zadání úloh

Označení úloh	Δx	Δt
	[m]	[s]
1a	10	0,005
1b	10	0,01
2a	20	0,01
2b	20	0,02
3a	40	0,02
3b	40	0,04

Tab. 3.3. Parametry zadání pro porovnání hustoty sítě



3.8.1 Vyhodnocení hustoty sítě

Pro porovnání výsledků řešení s rozdílnými délkami mezi uzlovými body výpočetní sítě využijeme tzv. Courantova čísla C v závislosti na logaritmickém dekrementu útlumu d .

Nutnou podmínku stability (3.6.1) s použitím bezrozměrného čísla Courantova lze zapsat následovně

$$C = |v| \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (3.8.1)$$

Době kmitu T pro trubici délky L s jedním otevřeným koncem odpovídá vztah

$$T = \frac{4 \cdot L}{v} \quad (3.8.2)$$

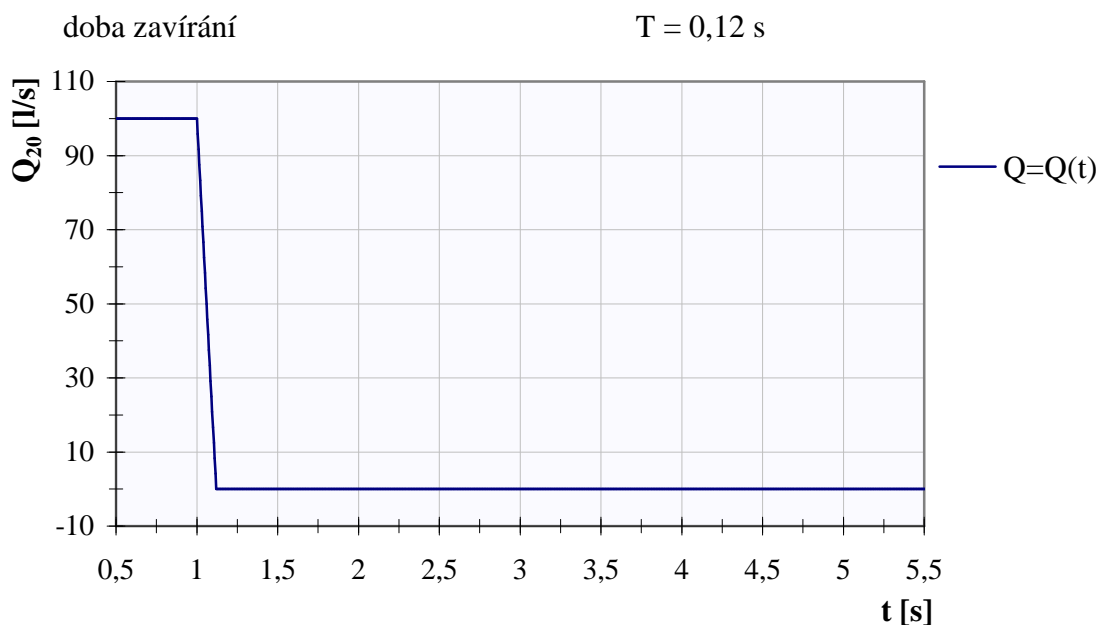
Z časové vzdálenosti dvou po sobě jdoucích amplitud stanovíme dobu kmitu T , pak skutečnou rychlost zvuku v systému zjistíme z výrazu (3.8.2) a ze vztahu (3.8.1) pro zvolený Δt a Δx vypočítáme Courantovo číslo pro každou z úloh.

Logaritmický dekrement útlumu určíme analogicky s kapitolou 3.7.1.

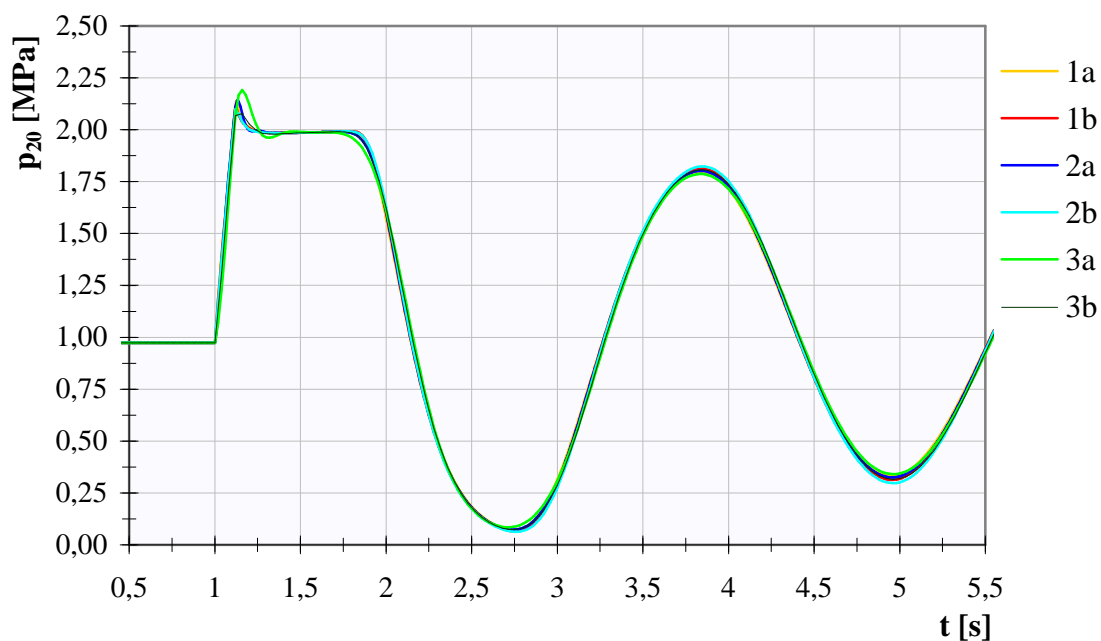
Označení úloh	Δx	Δt	A_8	A_9	T	d	v	C
	[m]	[s]	[Pa]	[Pa]	[s]	[-]	[m/s]	[-]
1a	10	0,005	1094656,23	1066878,09	2,255	0,347380	709,53	0,35477
1b	10	0,01	1106569,30	1076564,75	2,25	0,330659	711,11	0,71111
2a	20	0,01	1099646,25	1070930,28	2,26	0,339929	707,96	0,35398
2b	20	0,02	1118878,20	1086756,01	2,26	0,315000	707,96	0,70796
3a	40	0,02	1092388,15	1065102,18	2,26	0,350041	707,96	0,35398
3b	40	0,04	1108590,79	1078229,54	2,24	0,327939	714,29	0,71429

Tab. 3.4. Vyhodnocení hustoty sítě

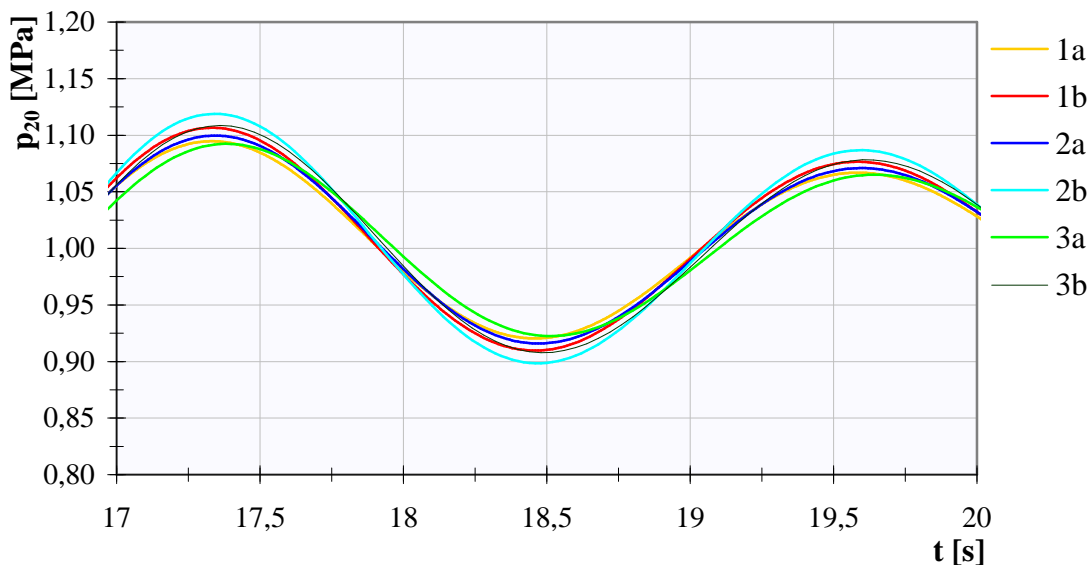
3.8.2 Grafické vyhodnocení hustoty sítě



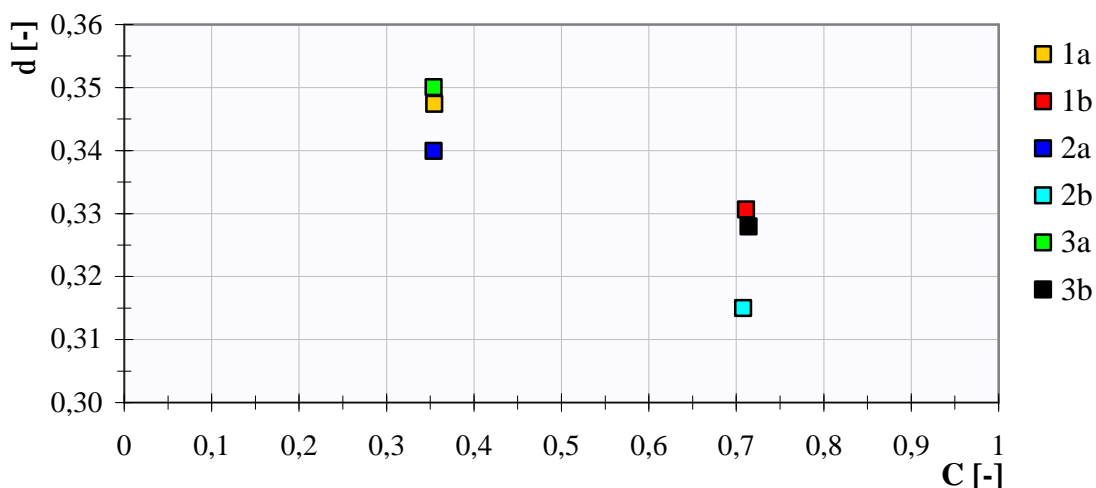
Graf 3.8. $Q_{20}(t)$, vyhodnocení hustoty sítě



Graf 3.9. $p_{20}(t)$, vyhodnocení hustoty sítě



Graf 3.10. $p_{20}(t)$, vyhodnocení hustoty sítě – detail



Graf 3.11. Logaritmický dekrement útlumu $d(C)$

3.9 Tlumení v materiálu trubice

Nově zavedená konstanta tlumení v materiálu trubice b_1 má zásadní vliv na chování při nestacionárním proudění v poddajném potrubí. Jak se dále ukazuje, velikost tlumení b_1 ovlivňuje nejenom samotný útlum Λ (či logaritmický dekrement útlumu d) ale i dobu kmitu pulsací tlaku v kapalině, respektive rychlost zvuku v systému kapalina trubice. K vyšetření působení tlumení v materiálu trubice byly sestaveny úlohy pro případ konstantního modulu pružnosti potrubí E_1 a proměnného tlumení b_1 .



Model potrubí

Délka potrubí	$L = 380 \text{ m}$
Průměr potrubí	$D = 0,3 \text{ m}$
Tloušťka stěny potrubí	$\Delta = 5 \text{ mm}$
Rychlost zvuku v kapalině	$v_0 = 1000 \text{ m/s}$
Hustota kapaliny	$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$
Koeficient tření	$\lambda = 0,02$
Modul pružnosti potrubí	$E_1 = 6 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$
Tlumení v materiálu trubice	

Číslo úlohy	b_1	Δt
	[Pa.s]	[s]
1	$1 \cdot 10^{12}$	0,0200
2	$5 \cdot 10^{11}$	0,0200
3	$1 \cdot 10^{11}$	0,0201
4	$5 \cdot 10^{10}$	0,0202
5	$1 \cdot 10^{10}$	0,0212
6	$5 \cdot 10^9$	0,0222
7	$1 \cdot 10^9$	0,0268
8	$5 \cdot 10^8$	0,0280
9	$1 \cdot 10^8$	0,0283

Tab. 3.5. Tlumení v materiálu trubice, časový krok

Počet uzlových bodů	20
Vzdálenost mezi uzlovými body	$\Delta x = 20 \text{ m}$

Počáteční podmínky

Vycházejí z ustáleného řešení pro okrajové podmínky – tlak na počátku a průtok na konci potrubí.

Počátek potrubí (uzel 1)	$p_1 = 1 \text{ MPa}$ $Q_1 = 100 \text{ l/s}$
Konec potrubí (uzel 20)	$p_{20} = 0,9746 \text{ MPa}$ $Q_{20} = 100 \text{ l/s}$



Okrajové podmínky

Počátek potrubí (uzel 1)

$$p_1 = 1 \text{ MPa}$$

Konec potrubí (uzel 20)

$$Q_{20} = Q_{20}(t)$$

Časový krok

Pro navržené parametry potrubí je velikost časového kroku Δt vypočtená z podmínky (3.6.3) uvedena v tab. 3.4. Pro všechny úlohy byla vybrána stejná velikost Δt , pro které je řešení dostatečně stabilní.

zvolený časový krok

$$\Delta t = 0,01 \text{ s}$$

3.9.1 Vyhodnocení tlumení v materiálu trubice

K vyhodnocení opět využijeme logaritmický dekrement útlumu d a rychlost zvuku v systému v v závislosti na tlumení v materiálu trubice b_1 . Oba parametry jsou stanovené shodně s kapitolami 3.7.1 a 3.8.1.

K porovnání účinku pravé strany rovnice kontinuity na řešení určíme i odhadnutou rychlost zvuku \tilde{v} dle vztahu (3.6.2). Rychlost \tilde{v} je stanovena pouze ze vstupních parametrů a z časového kroku Δt uvedeného v tab. 3.5.

číslo úlohy	b_1	A_n	A_{n+1}	T	d	v	\tilde{v}
	[Pa.s]	[Pa]	[Pa]	[s]	[-]	[m/s]	[m/s]
1	$1 \cdot 10^{12}$	1289249,12	1270477,00	1,52	0,067101	1000,0	999,40
2	$5 \cdot 10^{11}$	1117830,86	1105635,18	1,52	0,109259	1000,0	998,80
3	$1 \cdot 10^{11}$	1022043,34	1013955,43	1,54	0,457142	987,01	994,05
4	$5 \cdot 10^{10}$	1001245,09	1000520,46	1,66	0,872251	915,66	988,21
5	$1 \cdot 10^{10}$	1031269,94	1015280,88	2,10	0,716055	723,81	945,24
6	$5 \cdot 10^9$	1126714,27	1088499,31	2,14	0,358940	710,28	900,20
7	$1 \cdot 10^9$	1351213,34	1327038,21	2,15	0,071317	706,98	745,33
8	$5 \cdot 10^8$	1407273,17	1390518,19	2,15	0,042010	706,98	713,30
9	$1 \cdot 10^8$	1464760,09	1450153,26	2,16	0,031933	703,70	707,11

Tab. 3.6. Vyhodnocení tlumení v materiálu trubice



Model potrubí s proměnným tlumením b_1 v materiálu trubice byl také modelován v programu „*F - A char*“, který využívá matematický model chování kapaliny v pružné trubici odvozený v [2]. Jedná se o výpočet ve frekvenční oblasti pomocí přenosových matic. Model trubice v programu „*F - A char*“ používá model standardního tělesa. Tuhost E_0 z modelu standardního tělesa má na výpočet malý vliv a pokud ji budeme pokládat řádově vyšší než E_1 , čili platí $E_0 \gg E_1$, pak lze materiálové konstanty E_1 a b_1 chápat ve smyslu Voigtova (Kelvinova) modelu.

Výstupem z programu „*F - A char*“ pro porovnání řešení byly vlastní čísla. Vlastní čísla jsou čísla komplexní a skládají se z reálné a imaginární složky. Jejich základní tvar je tedy $s_v = a \pm i \cdot \Omega_t$. Stanovení vlastního čísla plyne z nulové hodnoty determinantu matice soustavy.

S využitím vlastních čísel lze odvodit vztah pro logaritmický dekrement útlumu $d_{F-A \text{ char}}$ ve tvaru

$$d_{F-A \text{ char}} = \frac{2 \cdot p \cdot a}{\Omega_t} \quad (3.9.1.1)$$

Z imaginární části vlastního čísla Ω_t se vypočte doba kmitu T , pro niž platí

$$T_{F-A \text{ char}} = \frac{2 \cdot p}{\Omega_t} \quad (3.9.1.2)$$

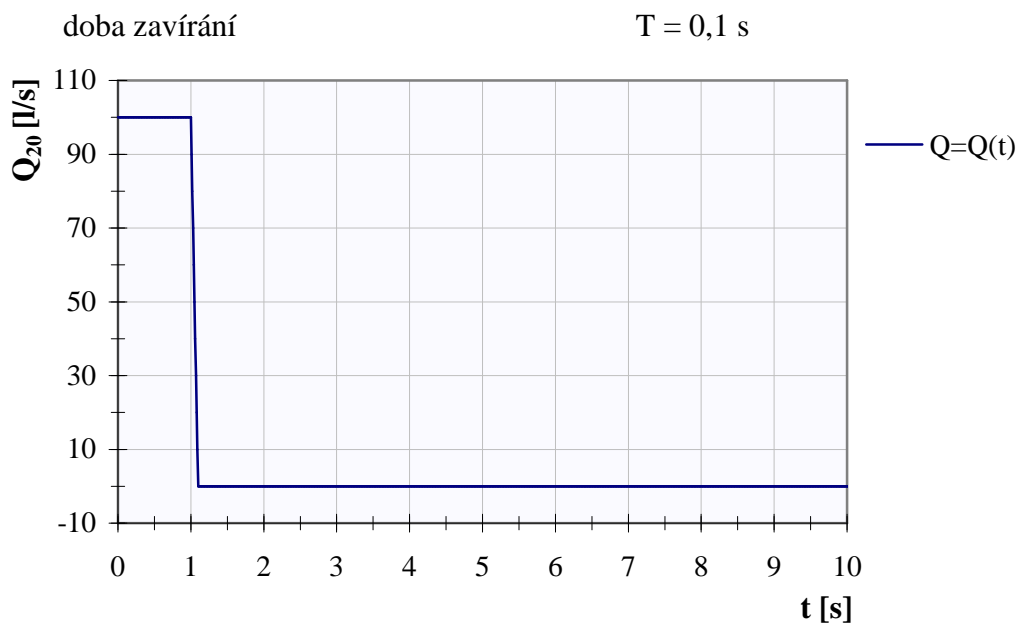
Dosazením (3.9.1.2) do (3.8.2) a vyjádřením rychlosti zvuku v trubici pro první tvar kmitu obdržíme

$$v_{F-A \text{ char}} = \frac{2 \cdot L \cdot \Omega_t}{p} \quad (3.9.1.3)$$

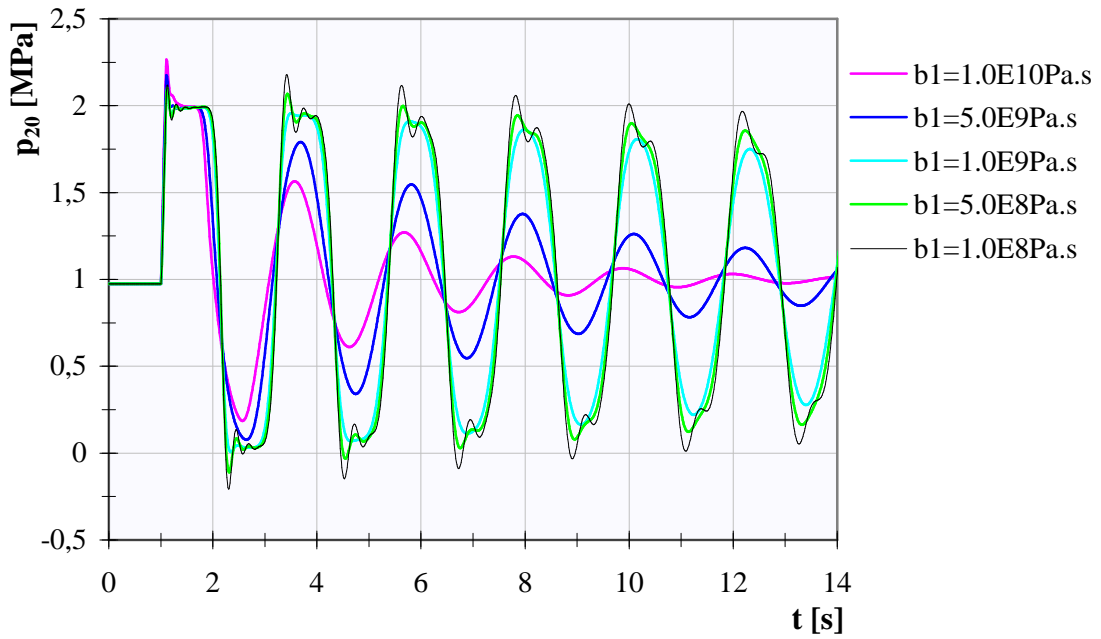
číslo úlohy	b_1	d	$d_{F-A \text{ char}}$	v	$v_{F-A \text{ char}}$
	[Pa.s]	[-]	[-]	[m/s]	[m/s]
1	$1 \cdot 10^{12}$	0,067101	0,060394	1000,0	997,56
2	$5 \cdot 10^{11}$	0,109259	0,106145	1000,0	997,17
3	$1 \cdot 10^{11}$	0,457142	0,468767	987,01	984,58
4	$5 \cdot 10^{10}$	0,872251	0,893599	915,66	945,79
5	$1 \cdot 10^{10}$	0,716055	0,762243	723,81	721,47
6	$5 \cdot 10^9$	0,358940	0,397569	710,28	708,95
7	$1 \cdot 10^9$	0,071317	0,093811	706,98	705,28
8	$5 \cdot 10^8$	0,042010	0,055614	706,98	705,18
9	$1 \cdot 10^8$	0,031933	0,025054	703,70	705,15

Tab. 3.7. Porovnání řešení z programu „F - A char“

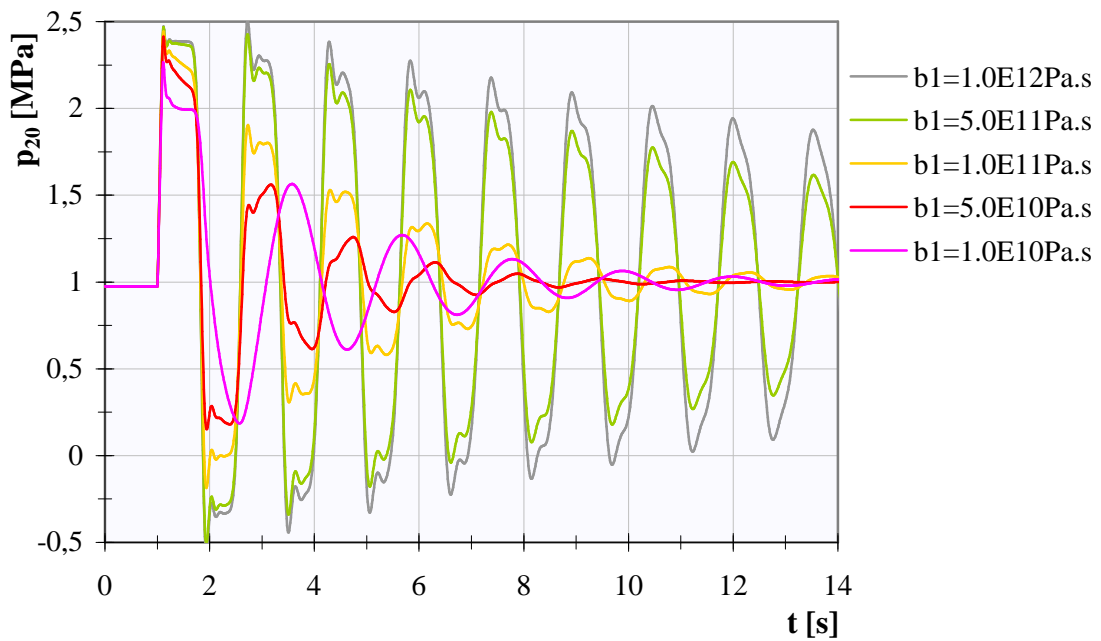
3.9.2 Grafické vyhodnocení tlumení v materiálu trubice



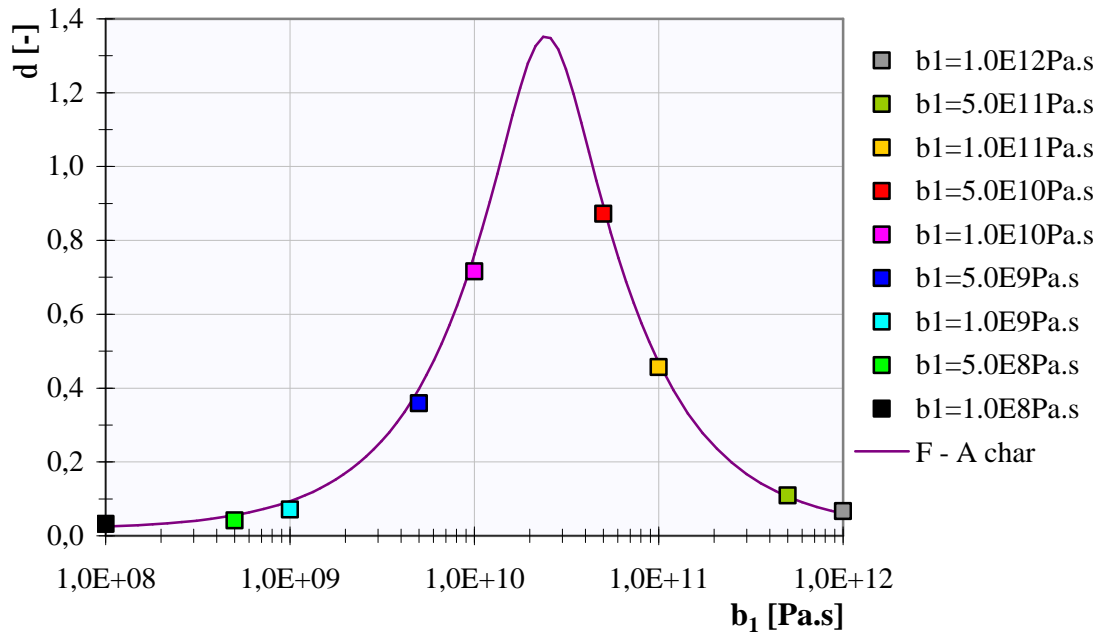
Graf 3.12. $Q_{20}(t)$, tlumení v materiálu trubice



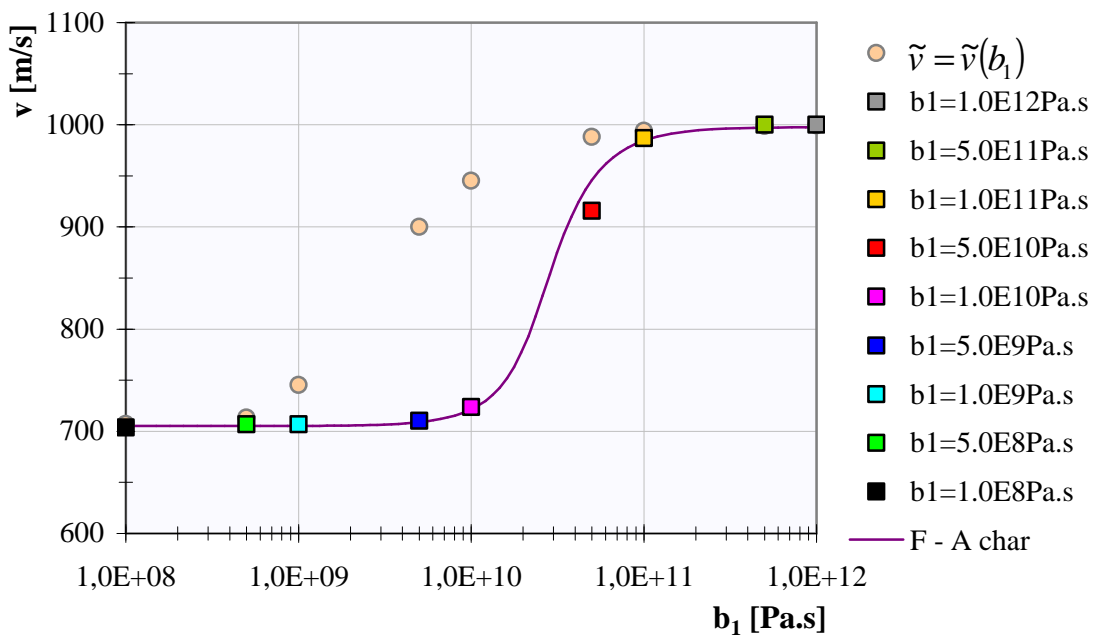
Graf 3.13. $p_{20}(t)$, tlumení v materiálu trubice



Graf 3.14. $p_{20}(t)$, tlumení v materiálu trubice



Graf 3.15. Logaritmický dekrement útlumu $d(b_1)$



Graf 3.16. Rychlost zvuku v systému $v(b_1)$ a $\tilde{v}(b_1)$



4 Experiment

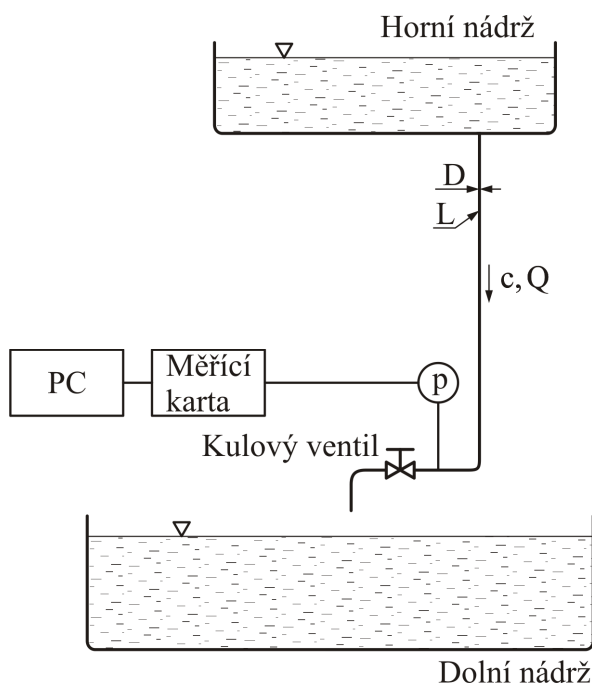
Nedílnou součástí teoretického výzkumu je i výzkum experimentální. Teoretický výzkum využívá známých, obecně platných zákonů k popsání dané problematiky, čímž se vytváří matematicko-fyzikální modely ve tvaru rovnic, funkcí atd. Správnost a přesnost výsledků těchto modelů však podléhá volbě vhodných metod řešení, stupni zjednodušení řešení a na výběru okrajových a počátečních podmínek.

K ověření správnosti formulace matematických modelů je nezbytné provádět i experimentální výzkum. Získané výsledky jednak věrohodněji popisují chování sledovaného modelu, jednak umožňují zjišťovat neznámé číselné konstanty. Porovnáním teoretických a experimentálních výsledků lze také odstranit možné nedostatky teoretického řešení. Pokud tedy dosáhneme dobré shody mezi oběmi řešeními, můžeme k pozdějšímu chování zkoumaného děje využívat pouze simulace matematickým modelem místo drahého experimentálního výzkumu.

4.1 Popis zkušební tratě

Pro experimentální ověření matematického modelu pružného potrubí s uvažováním tlumení bylo využito již uskutečněného experimentu, který byl proveden pro diplomovou práci ing. J. Koyše. Práce se týkala modelování tlakových pulsací v pružném potrubí, kde v matematickém modelu nebyly uvažovány materiálové konstanty, ale pouze proměnná rychlost zvuku v systému.

Zkušební obvod se skládal z horní nádrže, na kterou bylo připojené polyetylenové potrubí o vnitřním průměru $D = 0,29 \text{ m}$ a délce $L = 58,26 \text{ m}$. Na konci potrubí byl připevněn kulový uzávěr, kterým lze regulovat velikost gravitačního průtoku Q do spodní nádrže. Těsně před kulovým uzávěrem byl umístěn tlakový snímač. Výstupní signál z tlakového snímače byl přiveden na měřicí kartu zapojenou do počítače, na kterém se zaznamenával snímáný tlak. Podrobnosti o použité měřicí technice lze nalézt v uvedené diplomové práci.



Obr. 4.1. Schéma zkušební tratě

4.2 Postup experimentu

Připravenou hadicí protékala voda účinkem gravitačního zrychlení z horní nádrže do dolní nádrže. Obtokem pomocí čerpadla se voda vracela zpět do horní nádrže. Obě nádrže byly otevřené, takže tlak vody dosahoval v těchto místech hodnoty atmosférického tlaku. Voda protékala hadicí dostatečně dlouhou dobu, aby došlo k odvzdušnění měřící tratě. Velikost průtoku Q v hadici při plně otevřeném kulovém uzávěru byla zjištěna objemovým způsobem. Náhlým uzavřením kulového uzávěru byl vyvolán vodní ráz v kapalině a pomocí snímače tlaku byl zaznamenán do počítače průběh tlaku kapaliny v hadici. Pro ověření správnosti měření byl tento postup několikrát opakován.

4.3 Ověření matematického modelu

Matematický model pružného potrubí s uvažováním materiálových konstant E_1 a b_1 odvozený v této práci nerespektuje skutečnost, že v reálném systému dochází ke změně rychlosti zvuku v systému v závislosti na tlaku. Uvedené konstanty nejsou schopny



tuto změnu postihnout, a proto je zde volena závislost rychlosti zvuku v kapalině na tlaku $v_0 = v_0(p)$ dle vztahu

$$v_0 = B_1 - B_2 \cdot e^{-B_3 \cdot p} \quad (4.3.1)$$

Z experimentálních zkoušek bylo vybráno jedno měření, které bylo následně modelováno metodou Lax-Wendroffa s využitím proměnné rychlosti v_0 dle vztahu (4.3.1). Minimalizací čtverců odchylek řešení a měření byly pomocí nástroje řešitel v programu Microsoft Excel vyhledávány konstanty vystupující v matematickém modelu. Těmito konstantami, které bylo nutné určit, jsou konstanty B_1, B_2 a B_3 z funkční závislosti rychlosti v_0 , materiálové konstanty E_1 a b_1 a dále pak doba zavírání T , která vystupuje v okrajové podmínce pro průtok. Velikost těchto konstant stanovených z experimentálního měření je uvedena v modelu potrubí, jenž slouží jako vstupní údaje pro výpočet matematického modelu.

Model potrubí

Délka potrubí $L = 58,26$ m

Průměr potrubí $D = 0,29$ m

Tloušťka stěny potrubí $\Delta = 5$ mm

Rychlost zvuku v kapalině

$$v_0 = B_1 - B_2 \cdot e^{-B_3 \cdot p} = 1799,14 + 1799,14 \cdot e^{-9,29 \cdot 10^{-7} \cdot p} \text{ m/s}$$

Hustota kapaliny $\rho = 1000$ kg/m³

Koeficient tření $\lambda = 0,028$

Modul pružnosti potrubí $E_1 = 3,323 \cdot 10^9$ Pa

Tlumení v materiálu trubice $b_1 = 1,733 \cdot 10^8$ Pa.s

Počet uzlových bodů 20

Vzdálenost mezi uzlovými body $\Delta x = 3,066316$ m

Počáteční podmínky

Počátek potrubí (uzel 1) $p_1 = 0,117926$ MPa

$Q_1 = 0,5447$ l/s

Konec potrubí (uzel 20) $p_{20} = 0,098788$ MPa

$Q_{20} = 0,5447$ l/s



Okrajové podmínky

Počátek potrubí (uzel 1)

$$p_1 = 0,117926 \text{ MPa}$$

Konec potrubí (uzel 20)

$$Q_{20} = Q_{20}(t)$$

Časový krok

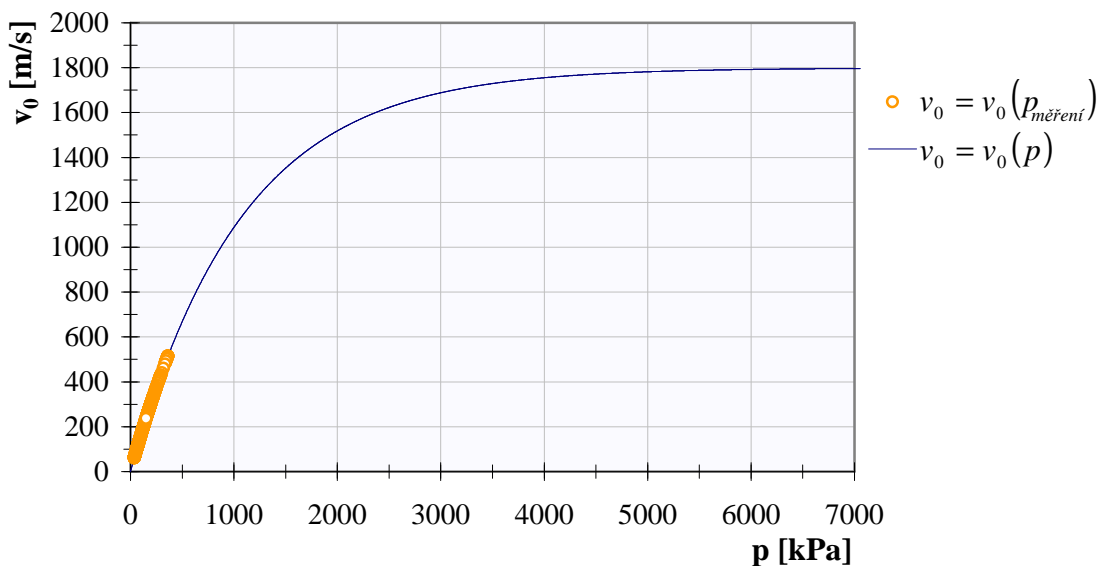
Kritéria pro volbu velikosti časového kroku:

- Řešení matematického modelu musí být stabilní v širokém rozsahu vyhledávaných konstant.
- Pro minimalizaci chyb řešení je žádoucí, aby vypočtený tlak a tlak z měření odpovídali stejnému časovému okamžiku.

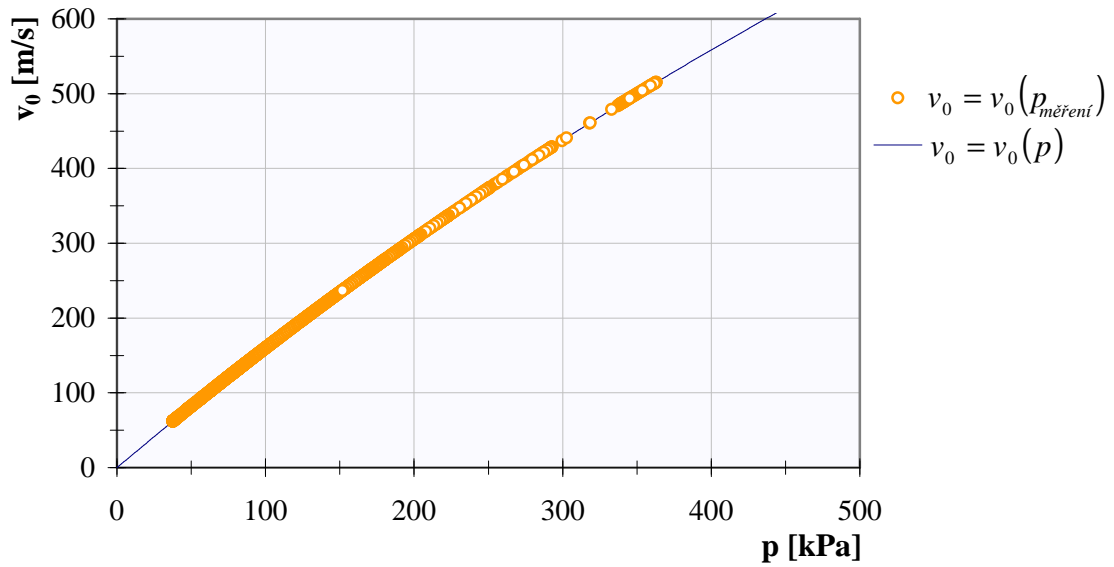
zvolený časový krok

$$\Delta t = 0,005003432 \text{ s}$$

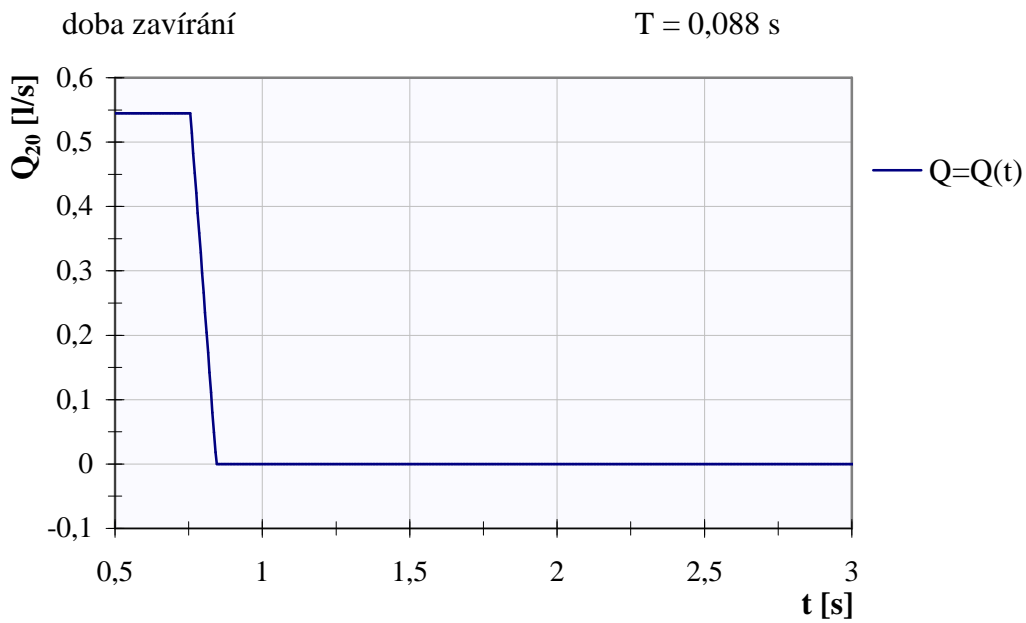
4.4 Grafické vyhodnocení experimentu a matematického modelu



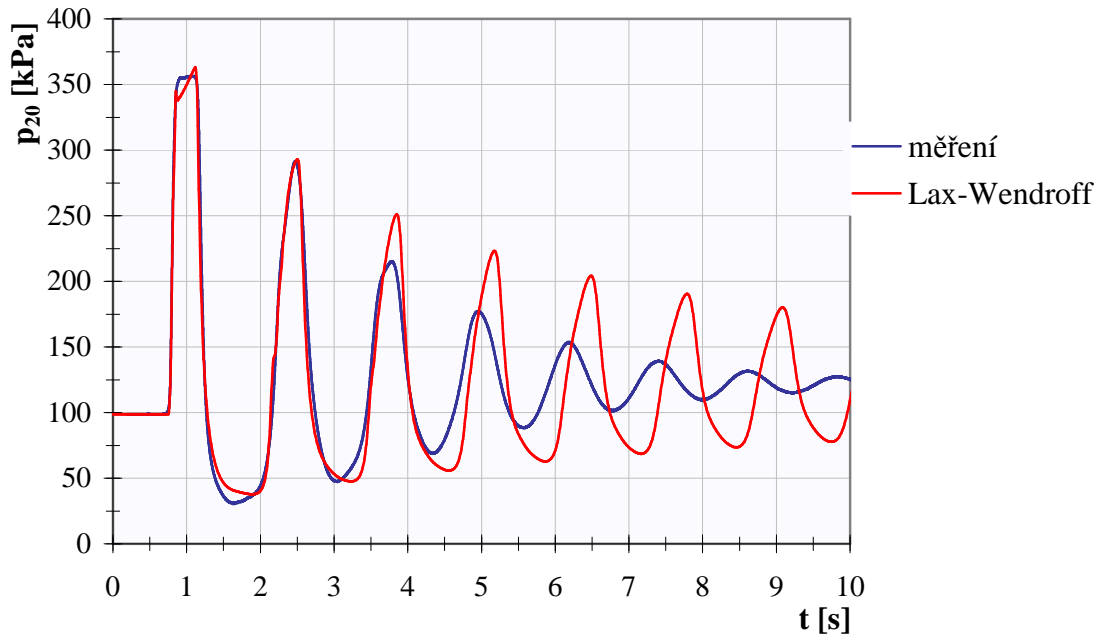
Graf 4.1. Rychlost zvuku v kapalině $v_0 = v_0(p)$



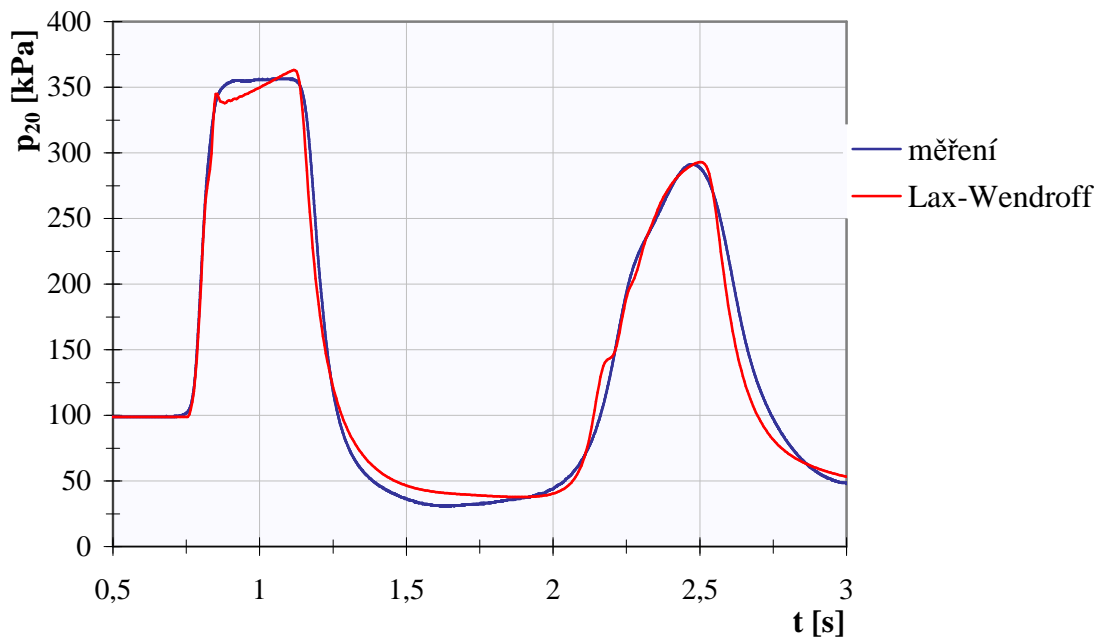
Graf 4.2. $v_0 = v_0(p)$ - detail v oblasti naměřených tlaků



Graf 4.3 $Q_{20}(t)$, okrajová podmínka pro průtok



Graf 4.4 $p_{20}(t)$, porovnání měření a teoretického řešení



Graf 4.5 $p_{20}(t)$, porovnání měření a teoretického řešení – detail



5 Závěr

Pro rozvodné systémy kapalin (vody) jsou v dnešní době stále více používané plastové nebo pryžové potrubí (hadice). Poddajnost těchto hadic je výrazně vyšší než samotné kapaliny. Tato práce pokládá dílčí základy k řešení tlakových a průtokových pulsací v poddajných potrubích, ve kterých hlavní tlumící prvek představuje materiál potrubí. Jednou z metod ke stanovení materiálových konstant popisujících dynamické vlastnosti pružných potrubí se jeví možnost určit tyto konstanty z měření tlakových pulsací. Pokud budeme znát materiálové konstanty a metodiku řešení pulsací v poddajném potrubí, je možné toto potrubí použít např. k tlumení tlakových pulsací.

V této práci je navržen matematický model k řešení tlumených tlakových pulsací v časovém prostoru. Od modelů uváděných v literatuře (např. v [5]) se liší především rovnicí kontinuity (2.2.4.9). Při volbě materiálu modelu tělesa trubice byly uváženy poznatky z diplomových prací zabývajících se touto tematikou [2] a [3] a pro těleso trubice byl zvolen Voigtův (Kelvinův) model.

V kapitole 3.6 je řešení matematického modelu konfrontováno s použitím numerických schémat pro řešení proudění stlačitelné tekutiny: FTCS, Lax-Friedrichs a Lax-Wendroff. Schémata prvního řádu přesnosti FTCS a Lax-Friedrichs se ukázala patrně díky své nízké přesnosti jako značně nestabilní. Kvůli vysoké výpočetní náročnosti vyplývající z nízkých časových kroků nejsou tyto metody vhodné pro řešení dané problematiky. Schéma typu Lax-Friedrichson navíc řešení neúnosně vyhlazuje. Řešení metodou Lax-Wendroffa lze charakterizovat dobrou přesností i konvergencí. Další posuzování matematického modelu je diskutováno pouze touto metodou.

V rovnici kontinuity z matematického modelu vystupuje integrální člen vyjadřující paměťové vlastnosti materiálu. Tento člen není výhodné počítat přímo z jeho exaktního tvaru, protože výpočet v každém bodě sítě by zahrnoval celou tlakovou historii. V kapitole pojednávající o vlivu paměťové funkce byla sestrojena závislost poměrné konvoluce a relativní chyby logaritmického dekrementu útlumu (graf 3.7). Z tohoto grafu je možné nezávisle na volbě materiálových konstant zjistit chybu logaritmického dekrementu útlumu, které se dopustíme při uvažované délce časové historie vstupující do výpočtu.



Teoretický rozbor zahrnuje také ověření nezávislosti numerického řešení na volbě hustoty výpočetní sítě a velikosti časového kroku. Nezávislost této volby se potvrdila a výsledky řešení v grafické podobě jsou uvedeny v grafu 3.11.

K podchycení vlivu tlumení v materiálu trubice b_1 na nestacionárním proudění v poddajném potrubí byly sestaveny modelové úlohy. Vyhodnocované charakteristiky tlumeného systému byly posléze porovnány s výsledky počítané ve frekvenční oblasti využívající matematický model použitý v diplomové práci Ing. J. Šebesty [2]. Výsledky obou řešení si výrazně odpovídaly jak pro logaritmický dekrement útlumu (graf 3.15) tak i pro rychlost zvuku v systému (graf 3.16).

Pro experimentální ověření matematického modelu bylo nutné jej rozšířit o proměnnou rychlost zvuku. Byla zvolena závislost rychlosti zvuku v kapalině na tlaku dle rovnice (4.3.1). Konstanty vstupující do modelu byly vyhledávány pomocí nástroje řešitel v programu Microsoft Excel. Porovnáním řešení a experimentálního měření bylo dosaženo shody pro první dva tvary amplitud tlaku (graf 4.4). K této shodě došlo pro materiálové konstanty modul pružnosti měřeného potrubí E_1 nabývající hodnotu $3,323 \cdot 10^9$ Pa a tlumení v materiálu trubice b_1 pro hodnotu $1,733 \cdot 10^8$ Pa.s. Vyhledané materiálové konstanty potrubí budou pravděpodobně pouze orientační, protože zavedená rychlost zvuku v kapalině se pohybuje v rozmezí hodnot 60 až 520 m/s (graf 4.2), což neodpovídá vlastnostem vody.

Téma pulsací v poddajném potrubí není nepochybně touto prací uzavřeno. Pro zlepšení popsání průběhu tlaku by patrně bylo nezbytné materiálové charakteristiky tuhost E_1 a tlumení b_1 rozumět ve smyslu proměnných v závislosti na vnějším zatížení nebo místo jednoduchého Voigtova (Kelvinova) modelu užít model s více členy, čímž bychom zvýšili počet konstant, kterým by se chování materiálu lépe vystihlo. V prvním případě by bylo možné zavést závislost buď jedné či obou charakteristik na vnitřním tlaku v potrubí. Řešení takového modelu by se opět více komplikovalo a je to možné brát jako námět pro příští vývoj k tématu řešení tlumených pulsací v poddajném potrubí.



Literatura

- [1] HABÁN, V. *Disertační práce – Tlumení tlakových a průtokových pulzací*. Brno 2001.
- [2] ŠEBESTA, J. *Diplomová práce – Stanovení dynamických vlastností plastových trubíc*. Brno 2003. VUT-EU-ODDI-3303-08-03.
- [3] MEDLÍK, J.: *Diplomová práce – Modelování tlakových pulsací v pružných potrubích*. Brno 2006. VUT-EU-ODDI-13303-14-06.
- [4] KOYŠ, J. *Modelování tlakových pulsací v pružných potrubích*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2006. 58 s. Vedoucí diplomové práce Ing. Vladimír Habán, Ph.D.
- [5] POCHYLÝ, F. *Dynamika tekutinových systémů*. 1. vydání, Brno: VUT, 1990, 110 s. ISBN 80-214-0139-7
- [6] WENDT, J., F.(EDITOR), ANDERSON, J., D., DEGREGZ, G., DICK, E., GRUNDMANN, R. *Computational Fluid Dynamics – An Introduction*, 2. vydání, Berlin Heidelberg, Springer- Verlag, 1996. ISBN 3-540-59471-x.
- [7] KOZEL, K., FÜRST, J. *Numerické metody řešení problému proudění I*. 1. vydání, Praha: ČVUT, 2001, 64 s.
- [8] HOFFMAN, J., D. *Numerical Methods for Engineers and Scientists*, 1. vydání, New York, Marcel Dekker, 1992. ISBN 0-8247-0443-6.



Seznam použitých symbolů a veličin

Symbol	Jednotka	Popis
A_n	[Pa]	amplituda tlaku
B_1, B_2	[m·s ⁻¹]	konstanty pro výpočet rychlosti $v_0(p)$
B_3	[Pa ⁻¹]	konstanta pro výpočet rychlosti $v_0(p)$
b_1	[Pa·s]	tlumení v materiálu trubice
C	[1]	Courantovo číslo
c	[m·s ⁻¹]	rychlost kapaliny v trubici
D	[m]	průměr trubice
f_{exp}^k	[1]	paměťová funkce
k	[Pa]	modul objemové pružnosti
L	[m]	délka potrubí
L^{-1}		zpětná Laplaceova transformace
l	[s ⁻¹]	pravá strana rovnice kontinuity
E_1	[Pa]	modul pružnosti potrubí
M	[1]	Machovo číslo
m	[1]	vektor vnější normály k trubici
n	[1]	vektor vnější normály ke kapalině
P	[m ²]	vnitřní povrch trubice
p	[Pa]	tlak
Q	[m ³ ·s ⁻¹]	průtok
R	[m]	poloměr trubice
S	[m ²]	plocha průřezu trubice
s	[1]	parametr Laplaceovy transformace
s_v	[s ⁻¹]	vlastní číslo
T	[s]	doba zavírání
T_p	[s]	poměrná konvoluce
t	[s]	časová souřadnice
V_t	[m ³]	elementární objem trubice
\tilde{v}	[m·s ⁻¹]	odhadnutá rychlost zvuku
v	[m·s ⁻¹]	rychlost zvuku v trubici
v_0	[m·s ⁻¹]	rychlost zvuku v kapalině



v_{ij}	$[\text{m}\cdot\text{s}^{-1}]$	tenzor rychlosti deformace
x	$[\text{m}]$	prostorová souřadnice
Δ	$[\text{m}]$	tloušťka stěny trubice
Δt	$[\text{s}]$	krok v časové souřadnici
ΔV	$[\text{m}^3]$	elementární objem kapaliny v trubici
Δx	$[\text{m}]$	krok v prostorové souřadnici
a	$[\text{s}^{-1}]$	reálná část vlastního čísla
d	$[1]$	logaritmický dekrement útlumu
d_{ij}		kroneckerův tenzor
e	$[1]$	poměrná deformace
$\&$	$[\text{s}^{-1}]$	rychlost deformace
\tilde{e}	$[1]$	Laplaceův obraz poměrné deformace
Λ	$[1]$	útlum
l	$[1]$	koeficient délkových ztrát
p		Ludolfovo číslo
r	$[\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}]$	hustota
Σ_{ij}	$[\text{Pa}]$	napětí v trubici
s	$[\text{Pa}]$	normálové napětí v trubici
\tilde{s}	$[\text{Pa}]$	Laplaceův obraz normálového napětí v trubici
t	$[\text{s}]$	integrační proměnná
$t_{b_1 E_1}$	$[\text{s}]$	časová konstanta exponenciální funkce
t_{kon}	$[\text{s}]$	interval pro výpočet konvolučního integrálu
Ω_t	$[\text{s}^{-1}]$	vlastní úhlová rychlost tlumeného systému
$(e)_d$	$[1]$	absolutní chyba logaritmického dekrementu útlumu
$(f)_d$	$[1]$	relativní chyba logaritmického dekrementu útlumu



Seznam příloh

Příloha 1. CD