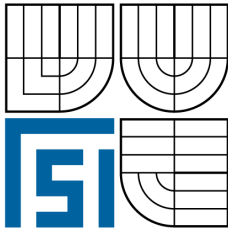


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

FIBONACCI ČÍSLA A JEJICH APLIKACE FIBONACCI NUMBERS WITH APPLICATIONS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

VIKTOR VÁŇA

VEDOUcí PRÁCE
SUPERVISOR

RNDr. JIŘÍ KLAŠKA, Dr.

BRNO 2011

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2010/2011

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Viktor Váňa

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Fibonacci čísla a jejich aplikace

v anglickém jazyce:

Fibonacci numbers with applications

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Hlavním úkolem práce je vytvořit ucelený přehled aplikací Fibonacci čísel. Práce by se měla zaměřit na zajímavé, ale méně známé aplikace. Sepsání závěrečné práce vyžaduje samostatnou práci s anglicky psanou literaturou.

Cíle bakalářské práce:

Cílem práce je vytvořit ucelený přehled aplikací Fibonacci čísel.

Seznam odborné literatury:

1. Thomas Koshy, Fibonacci and Lucas Number with Applications
2. The Fibonacci Quarterly

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jiří Klaška, Dr.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2010/2011.

V Brně, dne 10.11.2009

L.S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.
Děkan fakulty

Abstrakt

Bakalářská práce se zabývá vybranými aplikacemi Fibonacci čísel a zlatého řezu. Práce je rozdělena na dvě hlavní části.

První část zkoumá výskyt zlatého řezu v chemii. Konkrétně jde o poměr poloměrů atomů ve sloučeninách halogenidů alkalických kovů, asymetrické rysy chemických procesů, stabilitu transuranových prvků, energetickou hladinu elektronů plynů a spinové stavy subatomárních částic.

V druhé části se zabývá simulací elektrické sítě napájené ze dvou stran a výpočtem jejích parametrů. Na okraj, jako ukázka rozmanitosti výskytu Fibonacci čísel, je uveden odstavec o zlatém řezu ve vztahu rostlin a hmyzu.

Summary

This bachelor thesis deals with golden ratio, its appearance and possible use in technical practice. It is divided into two main parts.

First part deals with golden ratio appearance in chemistry. Specifically inquire into distance between centers of atoms in a halide salts compounds, asymmetric features of chemical processes, stability of transuranic elements, energy levels of gas electrons and spin number of subatomic elements.

Another part takes an interest in simulation of electrical power lines supplied by two sides and calculation of its parameters. Last section is included in order to present variety of Fibonacci numbers appearance. It shows us relations between insects and flower, where insect live.

Klíčová slova

Fibonacci čísla, zlatý řez

Keywords

Fibonacci numbers, golden ratio

VÁŇA, V. *Fibonacci čísla a jejich aplikace*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2011. 32 s. Vedoucí RNDr. Jiří Klaška, Dr.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Fibonacci čísla a jejich aplikace* vypracoval samostatně pod vedením RNDr. Jiřího Klašky, Dr., s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Viktor Váňa

Velice rád bych poděkoval svému vedoucímu bakalářské práce RNDr. Jiřímu Klaškovi, Dr. za jeho obětavou práci a přínosné připomínky a rady.

Viktor Váňa

Cíle, obsah a struktura práce

Hlavním přínosem mé bakalářské práce je zpracování vybraných témat o výskytu a aplikacích Fibonacci čísel ve fyzice, chemii a biologii.

Základem pro její zpracování bylo nastudování a analýza anglických originálů článků [1], [2], [3], [6]-[13] publikovaných v *The Fibonacci Quarterly*.

Bližší představu o rozsahu a různorodosti aplikací Fibonacci čísel lze získat z práce [4], která zahrnuje odkazy na nejdůležitější publikace od roku 1638 do současnosti.

Do září 2010 byla většina článků velmi obtížně dostupná (publikace nebyly k dispozici v knihovnách ČR). Nyní lze publikace volně získat na internetové stránce Fibonacci asociace: www.fq.math.ca.

Obsah

1	Úvod	9
1.1	Fibonacci posloupnost a zlatý řez	11
2	Aplikace Fibonacci čísel v chemii	12
2.1	Fibonacci posloupnost a periodická tabulka	12
2.2	Fibonacci čísla ve světě atomů	14
2.3	Předpokládaný konec periodické tabulky	15
2.4	Fibonacci a energetické hladiny elektronů plynů	17
2.5	Zlatý řez a elementární částice	18
3	Ostatní aplikace Fibonacci čísel	20
3.1	Výskyt Fibonacci a Lucas čísel v simulaci elektrické sítě napájené dvěma zdroji	20
3.1.1	Úvod do problému	20
3.1.2	Modelování sítě elektrického vedení	20
3.1.3	Rozbor žebříkové sítě	21
3.1.4	Praktický příklad	25
3.1.5	Speciální hodnoty napětí zdrojů	26
3.2	Hmyz a rostliny	27
4	Závěr	29
5	Seznam použitých zkratk a symbolů	31
6	Příloha	32

1. Úvod



Leonardo Pisano Bigollo (1170-1250)

V úvodu své práce bych rád uvedl fakta ze života Leonarda Pisánského, jednoho z nejvýznačnějších matematiků středověké Evropy. Podrobnosti z jeho života nejsou známy až na vyjímky, které o sobě sám uvedl ve svých matematických spisech. Kupodivu se nedochovalo ani žádné dílo napsané jeho současníky, které by se o Leonardovi zmiňovalo.

Fibonacci se narodil okolo roku 1170 v rodině Bonacci v Pise, tou dobou prosperující obchodní centrum. (Přezdívka "Fibonacci" je zkratkou "Filius Bonacci," syn Bonacciho.) Jeho otec Guglielmo byl úspěšným obchodníkem, který chtěl, aby jeho syn pokračoval v rodinné tradici.

Okolo roku 1190 byl Guglielmo jmenován výběřčím daní ve městě Bėjaja v Alžírsku. Přivezl s sebou Leonarda, aby se naučil umění počtů. V Bėjaja se Fibonacci dostalo prvního vzdělání od muslimského učence, který jej zasvětil do indo-arabského číslicového systému a indo-arabské počítací techniky. Také Fibonacci poskytl knihu *Hisabal – jabr w'almuqabalah* perského matematika al-Khowarizma, od které je odvozen název algebra.

V dospělosti Fibonacci často obchodně cestoval do Egypta, Sýrie, Řecka, Francie a Konstantinopole, kde studoval různé aritmetické systémy tehdy používané a vyměňoval si názory s tamními učiteli. Někdy také žil na dvoře římského císaře Frederika II, kde vedl vědecké debaty s císařem a jeho filosofy.

Kolem roku 1200, ve věku asi 30 let, se Fibonacci vrátil domů do Pisy. Byl přesvědčen o eleganci a praktické nadřazenosti indo-arabského číslicového systému nad římským, tou dobou v Itálii používaným. V roce 1202 vydal svou první práci, *Liber Abaci* (Kniha počtů). *Liber Abaci* se věnovala aritmetice a základní algebře. Tímto byl Evropě představen indo-arabský číslicový systém a aritmetické algoritmy. Fibonacci v knize *Liber Abaci* demonstroval sílu indo-arabského systému mnohem důrazněji než kterákoliv matematická práce do té doby napsaná. O šest let později Fibonacci *Liber Abaci* přepracoval a věnoval ji Michaelu Scottovi, nejslavnějšímu astrologovi na dvoře Frederika II.

Po knize *Liber Abaci* napsal Fibonacci další tři významné knihy. *Practica Geometriae* (Geometrie v praxi), napsanou v roce 1220. Je rozdělena do osmi kapitol a je věnována Mistru Dominokovi, o kterém se také nedochovali podrobnější zprávy. Tato kniha zkušeně představuje geometrii a trigonometrii s euclidovskou přesností a Fibonacciho vlastními poznatky. Fibonacci použil algebru k řešení geometrických problémů a geometrii k řešení problému algebraických, což byl významný pokrok pro tehdejší Evropu.

Jeho další dvě knihy, *Flos* (Květenství nebo Květina) a *Liber Quadratorum* (Kniha čtverců nad čísly), byly vydány v roce 1225. Přestože obě pojednávali o teorii čísel, *Liber Quadratorum* získala Fibonaccimu pověst hlavního učence v oblasti teorie čísel od řeckého matematika Diophanta (cca roku 250) až po francouzského matematika Pierra de Fermanta (1601-1665). *Flos* a *Liber Quadratorum* doložily Fibonacciho genialitu a originalitu nápadů, které převyšovaly schopnosti většiny učenců té doby.

V roce 1225 chtěl Frederik II. otestovat Fibonacciho talent, tak jej pozval na matematický turnaj pořádaný na svém dvoře. Soutěž se skládala ze tří úkolů. První byl najít racionální číslo x takové, že $x^5 - 5$ a $x^5 + 5$ jsou čtverce nad racionálními čísli. Fibonacci správně odpověděl:

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 - 5 = \left(\frac{31}{12}\right)^2 \quad \text{a} \quad \left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{49}{12}\right)^2$$

Druhým úkolem bylo nalézt řešení kubické rovnice $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$. Fibonacci geometricky dokázal, že tato rovnice nemá řešení tvaru $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ a udal přibližné řešení 1,3688081075, které je správné na devět desetinných míst. Tato odpověď se objevuje v knize *Flos* bez jakéhokoliv vysvětlení.

Zadání třetího úkolu se také objevuje v knize *Flos*. Formulace problému je následující: Tři lidé si rozdělují měsíc peněz na 1/2, 1/3 a 1/6. Každý bere z měšce dokud není prázdný. První osoba pak navrátí polovinu z toho co vzala, druhá třetinu a třetí šestinu. Navrácenou částku si poté mezi sebe rozdělí rovným dílem, takže každý vlastní částku, která mu náleží.

Fibonacci dokázal, že tento problém není dobře podmíněn a udal řešení 47 jako nejmenší možné. Žádný z Fibonacciho konkurentů nebyl schopen vyřešit kterýkoliv z těchto problémů.

Fibonacciho přínos, jak pedagogický tak občanský, rodnému městu si uvědomoval nejen císař Frederik II., ale i významné osobnosti let následujících. Dnes stojí v Pise Fibonacciho socha poblíž Šikmé věže, na protějším břehu řeky Arno.

Nedlouho po Fibonacciho smrti, kolem roku 1240, začali italští obchodníci oceňovat praktičnost indo-arabského číslicového systému a postupně jej přijali. *Liber Abaci* pře-trvala jako evropský standard po více jak dvě století a sehrála významnou roli v nahrazení nepraktického římského číslicového systému.

1.1. Fibonacci posloupnost a zlatý řez

Fibonacciho posloupnost je rekurentně zadána vztahem

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 0, \\ 1 & \text{pro } n = 1, \\ F_{n-2} + F_{n-1} & \text{jinak.} \end{cases} \quad (1.1)$$

a její explicitní vyjádření má tvar

$$F_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}} \quad \text{pro } n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

Pokud uvažujeme limitu podílu předcházejícího a následujícího členu dostáme hodnotu zlatého řezu φ :

$$\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = 0,618\,033\,988\,749\,894\,848\dots$$

Pravděpodobně se zlatý řez vůbec poprvé vyskytl jako řešení Euklidovy úlohy o úsečce, jejíž formulace je následující: "Rozděl úsečku na dva díly tak, aby obdélník, jehož jedna strana je celá úsečka a druhá strana je jeden z dílů, měl stejný obsah jako čtverec nad druhým dílem." Zapsáním do rovnice dostaneme:

$$a(a - x) = x^2$$

Upravou rovnice a dosazením délky úsečky ($a = 1$) dostaneme jednoduchou kvadratickou rovnici

$$x^2 + x - 1 = 0$$

jejímž kořenem je

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0,618\dots$$

Záporný kořem

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} = -1,618\dots$$

neuvažujeme vzhledem k zadání, že hledaný kořen reprezentuje délku úsečky. Nazveme jej φ' . Číslo φ je jediné kladné číslo, které zvětšením o jedničku dává svoji převrácenou hodnotu (uvažujeme-li i čísla záporná má uvedenou vlastnost i φ'). Platí tedy

$$\varphi + 1 = \frac{1}{\varphi} = 1,618\dots \quad (1.3)$$

Zlatý řez φ se neobjevuje pouze v matematice, ale i v jiných oborech, jako je například chemie, fyzika, teorii umění, teorie hudby. Některými méně známými aplikacemi se budu zabývat ve své práci, upřesním v následujícím odstavci.

Konkrétně ve třetí kapitole budeme studovat souvislost Fibonacci čísel a periodické tabulky prvků. Základem pro vypracování této části práce jsou články [3], [5], [6], [8], [9], [10], [11], [12] a [13].

Třetí kapitola, mé práce se zabývá aplikací Fibonacci čísel v síťové analýze teorie elektrického vedení. K této části práce byli zpracovány články [1], [2], [5]. Jako názornou ukázkou rozmanitosti aplikací Fibonacci čísel jsem na závěr práce zpracoval článek o výskytu Fibonacciho čísel v biologii. Tato část vychází ze článku [7].

2. Aplikace Fibonacci čísel v chemii

V následující kapitole budeme studovat aplikace Fibonacci čísel a zlatého řezu v chemii. Tato část textu vychází z publikací E. H. Huntley [3], A. A. Morton [6] a J. Wlodarski [8, 9, 10, 12, 13] a informací z internetové adresy www.chemicool.com.

2.1. Fibonacci posloupnost a periodická tabulka

Existuje jistá analogie mezi Euklidovou úlohou o úsečce a vzdálenostmi středů atomů v sloučeninách. Jako příklad uveďme halogenidy alkalických kovů, které mají extrémní hodnoty reaktivity v každé řadě periodické tabulky na obou stranách. Kratší část Euklidovy úsečky označíme písmenem a a delší část písmenem b . Kratší část a reprezentuje kovalentní poloměr atomu halogenu X a delší část b značí poloměr atomu alkalického kovu M ve stejné řadě periodické tabulky. Průměrná hodnota poměru X/M je pro pět řad $0,605 \pm 0,043$ (s odchylkou 7%). Tento průměr se liší od zlatého poměru o 2,2%, což se dá považovat za chybu experimentu. Tento výsledek ovšem dávají pouze sloučeniny s kovalentní vazbou (tedy atomy s kovalentním poloměrem). Výpočty založené na iontových poloměrech dává poměr 2,27 s 36% poklesem od první řady po čtvrtou.

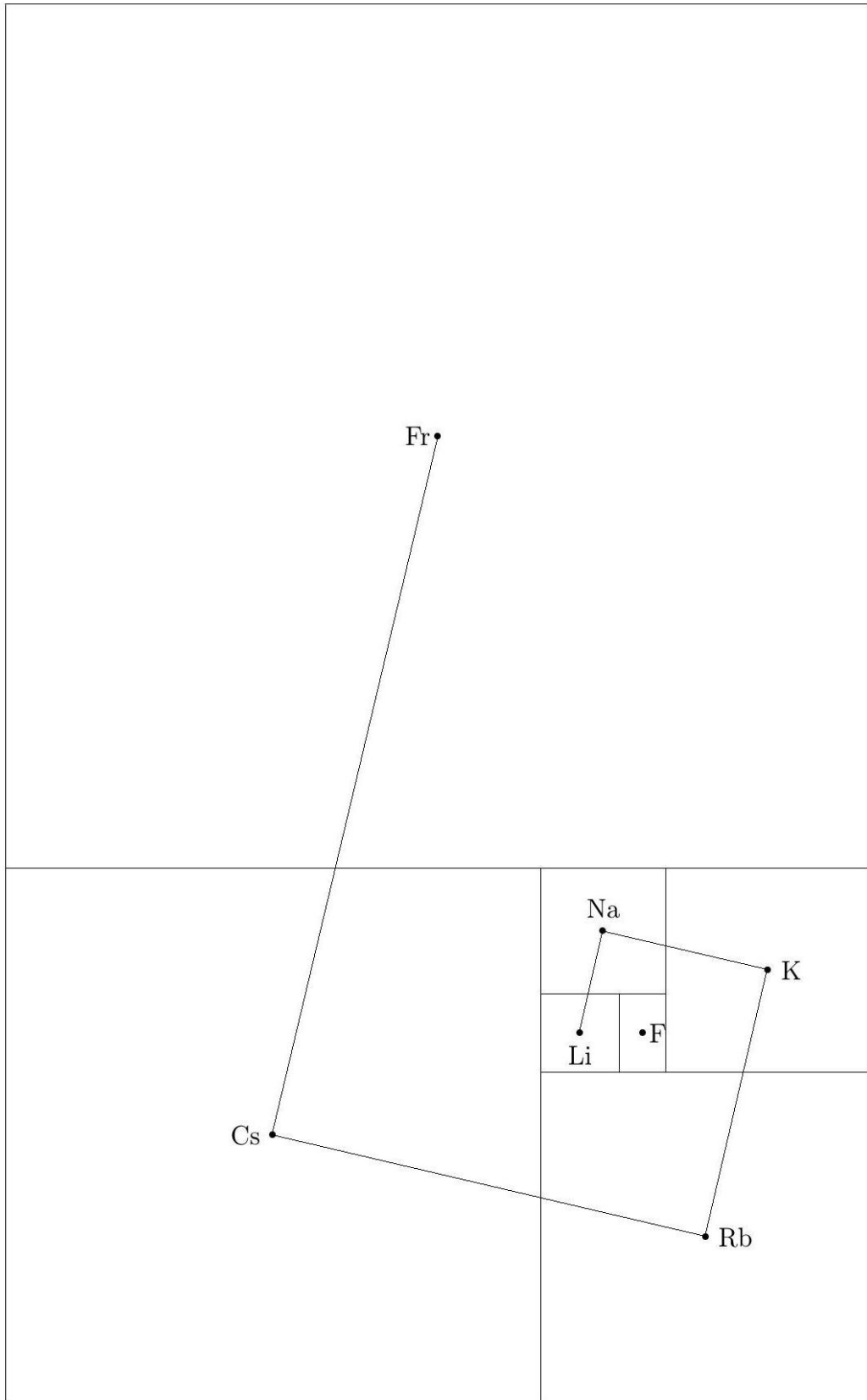
1	2		3	4		5	
Halogen	Pozorovaný kovalentní poloměr A		Poměr X/M	Součet pozorovaných poloměrů		Upravující faktor R , pozorovaný/součet	
	X	M		X	M	X	M
LiF	0,72	1,23	0,585				
NaCl	0,99	1,54	0,643	2,26	1,95	0,44	0,79
KBr	1,14	2,03	0,562	3,02	2,53	0,39	0,80
RbI	1,33	2,16	0,616	3,30	3,17	0,40	0,68
CsAt	1,45	2,35	0,618	3,68	3,49	0,39	0,67
Fr?					3,80		
		průměr	0,605		min	0,39	0,67
		teorie	0,618				
		vypočítáno					
Fr?	1,56	2,55	0,610				

K přiblížení pozice periodické tabulky ve Fibonacciho posloupnosti použijí jednotku délky 1 angstrom ($1\text{Å}=100\text{pm}$). Pro kovalentní poloměry lithia a fluoru zkonstruujeme nejmenší obdelník o rozměrech a, b . Od tohoto obdelníku a čtverce $b \times b$ můžeme zkonstruovat stále větší obdelníky a čtverce stejným způsobem. Středů každého čtverce jsou vzestupně označeny značkou alkalického kovu od lithia (Li) k franciu (Fr). Tudíž vzor pro Fibonacciho posloupnost je zřejmý. Proložení středů čtverců křivkou dostáváme Fibonacciho spirálu, tedy spirálu kterou může nalézt například ve tveru galaxií, ulitě hlavonožců, rozích afrického kudu. Zpětný výpočet k 0A nás přivede k tomu, že první řada periodické tabulky přibližně odpovídá devátému členu Fibonacciho posloupnosti.

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$$

Uvedenou konstrukci můžeme názorně sledovat v následujícím obrázku 1.

2.1. FIBONACCI POSLOUPNOST A PERIODICKÁ TABULKA



Obrázek 1

součtem dvou předcházejících). Stejná situace je patrná i ve čtvrtém sloupci, kde je součet pro chlór 2,26 namísto 0,99 a pro sodík 1,95 místo 1,54. Taková odchylka pravděpodobně pramení z faktu, že přímka (součet dvou poloměrů) neprochází stejnorodým prostředím, měrný objem halogenu je mnohem menší a atomová hmotnost mnohem větší než měrný objem a atomová hmotnost kovu v každém páru. V pátém sloupci porovnáme pozorované hodnoty se součtovými pro každý poloměr každého prvku X a M . Ukáže se že hodnoty dosahují minim 0,39 pro halogeny a 0,67 pro kovy. Zapsáno vzorcem:

$$a_n = R(F_{n-2} + F_{n-1})$$

kde R nabývá hodnot 0,39 nebo 0,67 podle toho je-li F_n halogen nebo alkalický kov.

S těmito poměry můžeme předpovědět neznámý halogen, který by tvořil pár s franciem. Jeho poloměr by byl přibližně 1,56 a poloměr francie 2,55. Poměr X/M pro tuto neznámou sůl by byl 0,610. Tento prvek má atomové číslo 117. Jmenuje se ununseptium. Tato hypotetická sloučenina nebyla doposud vytvořena.

2.2. Fibonacci čísla ve světě atomů

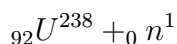
U atomů se setkáváme se čtyřmi základními nesouměrnostmi:

1. Ve skladbě protonů a neutronů v atomovém jádře.
2. V rozdělení štěpných fragmentů podle nukleonového čísla (A), při odstřelování těžkých jader pomalými neutrony.
3. V rozdělení izotopů stejných stabilních prvků.
4. V rozdělení vyzařovaných částic v opačných směrech při slabém mezijaderném působení.

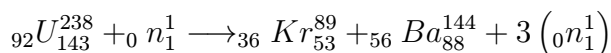
Ukázalo se, že číselné hodnoty všech těchto nesouměrností se přibližně rovnají zlatému řezu a čísla tvořící tuto číselnou hodnotu odpovídají Fibonacciho číslům nebo číslům jim blízkým:

1. Protonové číslo Z se u nejlehčích stabilních jader zpravidla rovná neutronovému číslu N . Pokud se neutronové číslo zvýší, podíl protonového a neutronového čísla Z/N se sníží, a to přibližně k hodnotě 0,6. U prvků s vyšším protonovým číslem, jako příklad vezměme uran ${}_{92}U^{238}$, tedy prvek s největším počtem protonů nacházející se v přírodě. Maximálně může mít 146 neutronů a poměr Z/N se rovná 0,630, což je číslo, které se liší od zlatého poměru pouze o 0,012 (pokud jej zaokrouhlíme na tři desetinná místa).

2. Je známo, že souměrné štěpení těžkých jader je velice vzácné. Vezměme případ štěpení uranu, který je bombardován proudem neutronů.



Uran se rozštěpí na dva prvky s nukleonovým číslem $A=118$ pouze v 1% případů. Daleko častěji se rozštěpí na dva prvky v nukleonovým číslem v rozmezí 89-99 a 144-134. Nukleonové čísla 89 a 144 jsou příkladem jaderné reakce, kde se uran rozštěpí na krypton, bariem a tři neutrony, které poslouží k štěpení dalšího jádra



a jsou rovna dvěma po sobě následujícím členům Fibonacciho posloupnosti. Jejich poměr $89/144=0,618056\dots$ dává velmi dobrou aproximaci zlatého poměru. Je zajímavé, že počty protonů a neutronů štěpných fragmentů ve výše uvedené reakci, jsou čísla blízká členům Fibonacciho posloupnosti, jak ukazuje následující tabulka.

2.3. PŘEDPOKLÁDANÝ KONEC PERIODICKÉ TABULKY

Částice	U	Kr	Ba	Členy Fib. posl.		
Protony	92	36	56	89	34	55
Neutrony	144	53	88	144	55	89
Nukleony	236	89	144	233	89	144

Z reakce mohou vzejít i kombinace jiných párů než Kr - Ba, ale tato dvojice se vyskytuje nejčastěji.

3. Když se protonové číslo Z prvku zvyšuje, zvyšuje se s ním i počet izotopů stejného stabilního prvku a dosáhne maxima (10 izotopů) pro $Z=50$. Pro Z rostoucí nad 50 se počet izotopů postupně zmenšuje. Tímto se celá řada stabilních prvků rozdělí na dvě části, které dávají poměr $32/50 = 0,640$. Tato hodnota se liší od zlatého řezu pouze o 0,022.

Výzkum parity slabé interakce ukázal, že:

a) β -rozpad polarizovaných neutronů je proces s asymetrickými rysy. Výsledek experimentu, který rozhodl o porušení principu parity při slabé interakci byl následující:

$$\frac{\text{Intenzita } \beta\text{-záření paralelního k neutronovému spinu}}{\text{Intenzita } \beta\text{-záření antiparalelního k neutronovému spinu}} = 0,62 \pm 0,10$$

V rozmezí tohoto poměru leží číselná hodnota zlatého řezu.

b) Různé typy hyperonového rozkladu jsou také procesy s asymetrickými rysy. Byla provedena řada pokusů v laboratořích za účelem prozkoumání rozdělení vyzařovaných částic. Tímto bylo zjištěno že vyzařování směrem vzhůru převažuje nad vyzařováním směrem dolů, jak ukazuje následující tabulka.

Pokus číslo	Vyzařované částice		Poměr ↓ / ↑	Odchylka poměru ↓ / ↑ od zlatého řezu
	Počet ve směru ↓	Počet ve směru ↑		
1	138	215	0,642	0,024
2	81	129	0,628	0,010
3	105	158	0,665	0,047

Což nám opět dává poměrně dobrou aproximaci zlatého poměru.

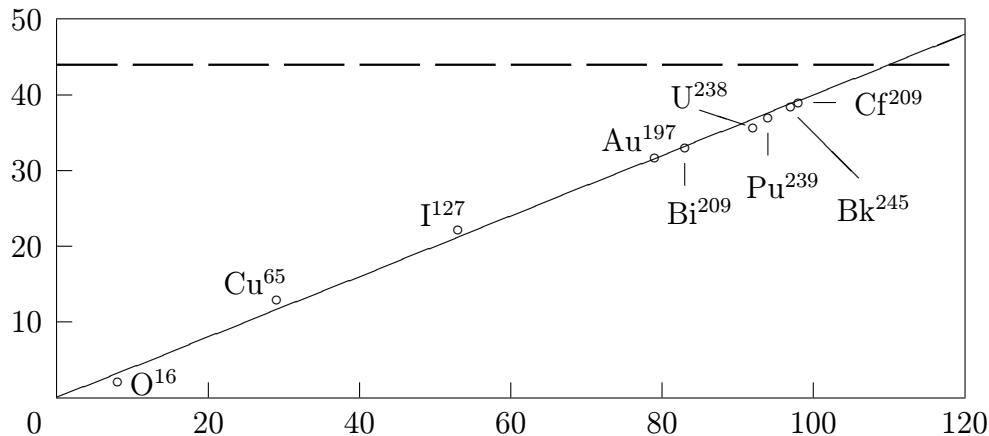
2.3. Předpokládaný konec periodické tabulky

Dlouhou dobu obýval konec periodické tabulky uran s protonovým číslem $Z=92$. Od poloviny třicátých let minulého století se prováděly experimenty s bombardováním uranu neutrony, které vyústily ve vznik transuranových prvků, tedy prvků s protonovým číslem vyšším než 92. Tyto prvky podléhají samovolnému štěpení a poločasy rozpadu jsou v rozmezí milionů let (izotop plutonia ${}_{94}\text{Pu}^{244}$ -80 milionů let) až jednotky milisekund (izotop rutherfordia ${}_{104}\text{Rf}^{256}$ - 6,2 ms). Poločasy rozpadu izotopů stejného prvku jsou různé. Dnes obsahuje periodická tabulka 118 prvků. Poslední prvek, ununoctium, byl připraven v roce 2002. Předpokládáme-li, že je periodická tabulka konečná, naskytá se nám otázka, který prvek ji uzavírá.

Musíme vzít na vědomí, že vytvoření transuranových prvků, kromě naplnění všech ostatních požadavků, závisí na hodnotě štěpného parametru Z^2/A (kde A je nukleonové

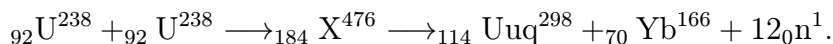
2.3. PŘEDPOKLÁDANÝ KONEC PERIODICKÉ TABULKY

číslo) pro každé jádro. Tento parametr je kritériem nestability s rostoucí tendencí pro zvětšující se : ${}_{92}\text{U}^{238} = 35,6$; ${}_{94}\text{Pu}^{239} = 37,0$; ${}_{98}\text{Cf}^{246} = 39,0$; atd. Limitní hodnota štěpného parametru, kdy je ještě prvek relativně stabilní, je 44. Následující tabulka znázorňuje vybrané prvky a jejich štěpný parametr (na ose x protonové číslo Z , na ose y štěpný parametr Z^2/A).

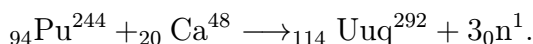


Na začátku sedmdesátých let, kdy měla periodická tabulka 104 prvků, se na základě teoretických úvah předpokládalo, že posledním členem tabulky bude prvek s protonovým číslem 114, konkrétně izotop ${}_{114}\text{Uuq}^{298}$, jehož štěpný parametr je 43,6, což je číslo velmi blízké limitní hodnotě. Jeho poměr protonů a neutronů $Z/N = 0,6195\dots$, tedy číslo dobře aproximující zlatý poměr.

Původní představa o přípravě prvku byla, že se bude uran bombardovat svými ionty (ted atomy se stejnám protonovým i nukleonovým číslem, lišící se o jeden nebo více elektronů), za vzniku hypotetické sloučeniny ${}_{184}\text{X}^{476}$, která se asymetricky rozpadne na jádro se 114 protony (ununquadium Uuq), ytterbium a 12 neutronů:



Tento prvek se podařilo vytvořit, avšak jinou reakcí, v roce 1998 vědcům v jaderné laboratoři v Dubně v Rusku. Místo reakce uranu se svým iontem, byl použito plutonium ${}_{94}[\text{Pu}]^{244}$, které bylo bombardováno ionty vápníku ${}_{20}[\text{Ca}]^{48}$:

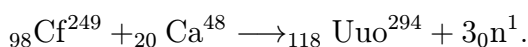


Jeho poločas rozpadu je 18 ms.

Fakt, že není poslední, vyšel na jevo několik let později, kdy se opět v Dubně podařilo připravit prvky s větším protonovým číslem. V roce 2000 byla publikována příprava prvku ununhexia ${}_{116}\text{Uuh}^{296}$, jako reakce curia s vápníkem:



V současné době poslední prvek periodické tabulky byl objeven v roce 2002. Ununoctium ${}_{118}\text{Uuo}^{294}$ bylo připraveno jako reakce california a vápníku:



Poločas rozpadu byl vypočten na 0,89 ms.

Následující tabula znázorňuje celkový počet atomů a počet atomů na jednotlivých energetických hladinách.

Hladina energie	1	2	3	5	8	13	21
0	1	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{5}{8}$	0	$\frac{13}{21} \rightarrow 0$ nebo φ
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{8}{21} \rightarrow 1 - \varphi$
2	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{8}{13}$	$0 \rightarrow \varphi$ nebo 0

2.5. Zlatý řez a elementární částice

V následující části se budu zabývat subatomárními částicemi, které se skládají z částic elementárních. Za současného stavu poznání jsou za elementární částice považovány fermiony a bosony. Fermiony jsou kvarky (u, p, c, s, t, b) a leptony (elektron a neutrino). Pro tento článek si vystačíme s fermiony, konkrétně kvarky. Proto se dále nebudu zabývat bosony ani leptony. Z kvarků jsou tvořeny mezony a baryony. Společně tvoří skupinu zvanou hadrony.

Baryony jsou částice složené ze tří kvarků. Jako příklad baryonu uvedu proton, který se skládá ze dvou kvarků u a jednoho kvarku d (uud) a odpovídající antičástice, antiproton, který se skládá z odpovídajících antikvarků ($\bar{u}\bar{u}\bar{d}$).

Mezony jsou částice, které se skládají z jednoho kvarku a jednoho antikvarku. Mezony jsou částice velmi nestabilní (životnost 10^{-8} sekund). Nabité mezony se rozpadají za vzniku elektronů a z nenabitých mezonů vznikají fotony.

Dalším pojmem potřebným k pochopení této části je spin, základní vlastnost elementárních i složených částic. Spin je kvantová vlastnost částic, pro kterou není ekvivalentu v klasické fyzice. Vyjadřuje vnitřní moment hybnosti a nabývá celočíselných nebo poločíslných násobků redukované Planckovy konstanty ($\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Js).

Mezony i baryony se seskupují za účelem větší stability. Ukázalo se že nejstabilnější jsou skupiny s počtem částic 35 a 56.

Skupina o 35 členech může být zformována ze 17 známých mezonů, které mají negativní paritu. Osm z těchto částic má nulový spin, tudíž mohou nabývat pouze jednoho spinového stavu, a to nuly (0). Jsou to částice: pion (π) (skládá se ze tří mezonů), kaon (κ) (4 mezony), eta (η) (1 mezon).

Zbývajících 9 mezonů: ro (ρ) (složen ze tří mezonů), fi (ϕ) (jeden mezon), omega (ω) (jeden mezon) a další kaon mají spinové číslo 1, tudíž můžou nabývat tří spinových stavů (-1, 0, +1).

Což celkem dává $8 \times 1 + 9 \times 3 = 35$ spinových stavů.

Skupina s 56 členy se skládá z 56 baryonů nebo 56 antibaryonů, které mají pozitivní paritu. Osm z těchto částic: nukleon (dva baryony), lambda (λ) (jeden baryon), sigma (σ) (tři baryony), chí (χ) (dva baryony) mají spinové číslo 1/2. Můžou se tedy nacházet ve dvou spinových stavech (-1/2, +1/2). Dalších deset částic: delta (δ) (čtyři baryony), další sigma (σ) a chí (χ), omega (jeden baryon) mají spin 3/2, tedy se můžou nacházet ve čtyřech spinových stavech (-3/2, -1/2, 1/2, 3/2).

2.5. ZLATÝ ŘEZ A ELEMENTÁRNÍ ČÁSTICE

Celkem dostáváme $8 \times 2 + 10 \times 4 = 56$ spinových stavů.

Na tomto příkladu je názorně vidět, že poměr spinových stavů dvou nejstabilnějších seskupení elementárních částic dává dobrou aproximaci zlatého řezu. Poměr $35/56 = 0,625$, což je hodnota, která se od zlatého řezu (zaokrouhlené hodnoty na 0,618) liší pouze o 0,007.

3. Ostatní aplikace Fibonacci čísel

V následující kapitole budeme studovat aplikace Fibonacci čísel a zlatého řezu v simulaci elektrické sítě a u vztahu hmyzu a rostlin. Tato část textu vychází z publikací S. L. Basin [1], G. Ferri [2], J. De Vita [7] a J. Wlodarski [11].

3.1. Výskyt Fibonacci a Lucas čísel v simulaci elektrické sítě napájené dvěma zdroji

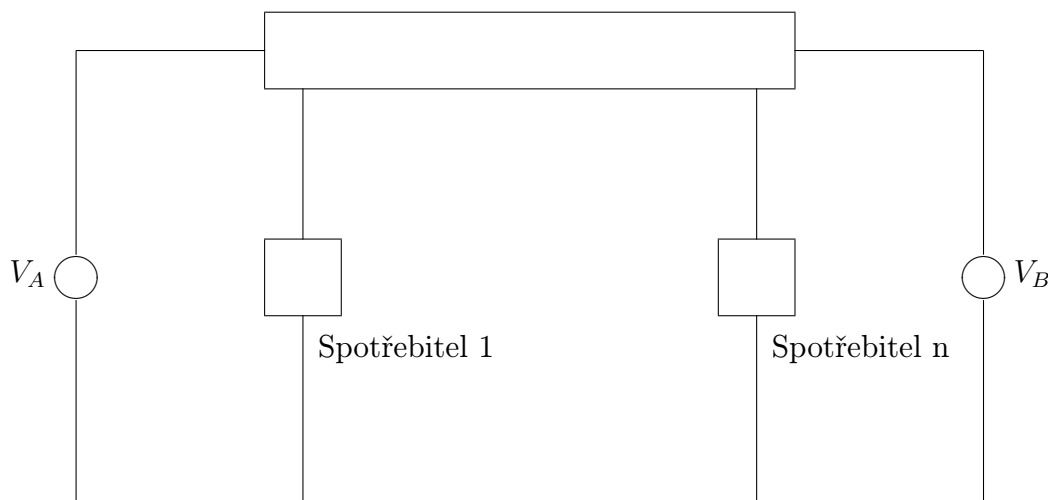
3.1.1. Úvod do problému

Při rozboru některých fyzikálních struktur je obzvláště důležitá možnost vymodelovat je za pomoci elektrického obvodu, protože to umožňuje určit charakteristické chování ve smyslu jednoduché obvodové analýzy. Kromě toho je zajímavé porovnávat různé metody nepřímého měření s metodou přímou, která nemusí být vždy jednoduchá nebo vyžaduje použití počítačových programů, které v některých případech nemusí konvergovat. Z matematického pohledu může být modelování elektrických obvodů přínosné ve věci testování softwareových algoritmů pro řešení soustav lineárních rovnic.

Jako model pro napodobení elektrického vedení použijeme symetrickou žebříkovou síť. Fibonacciho a Lucasova čísla vystoupí z analýzy distribuce energie ke spotřebitelům.

3.1.2. Modelování sítě elektrického vedení

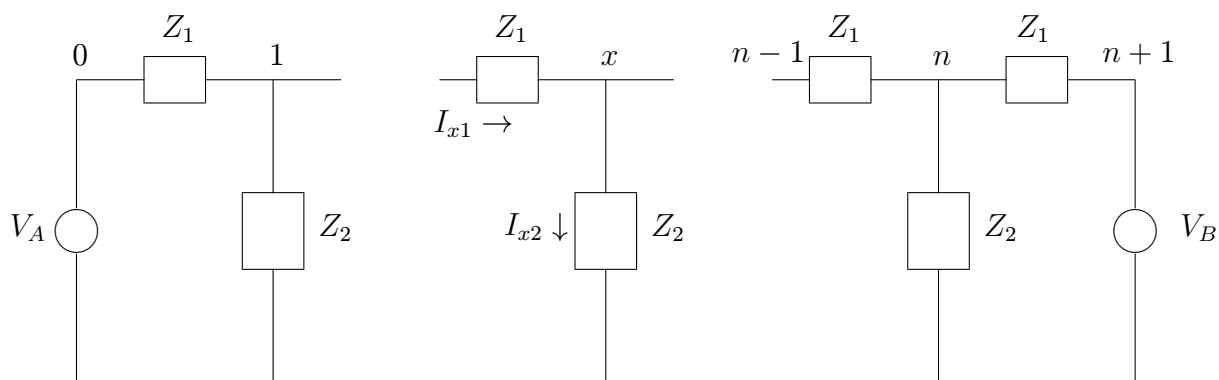
Uvažujme vedení vysokého napětí napájeného ze dvou zdrojů, které dodává energii spotřebitelům podél vedení, jak ukazuje Obrázek 1.



Obrázek 1: Elektrické vedení napájené dvěma zdroji

Žebříková struktura (Obrázek 2) může být použita jako diskrétní model elektrického vedení. Kvůli zjednodušení uvažujme n spotřebitelů, kteří mají stejnou spotřebu energie, realizovanou za pomoci n stejně velkých vertikálních odporů Z_2 , umístěných ve stejných vzdálenostech, charakterizovaných stejně velkými horizontálními odpory Z_1 .

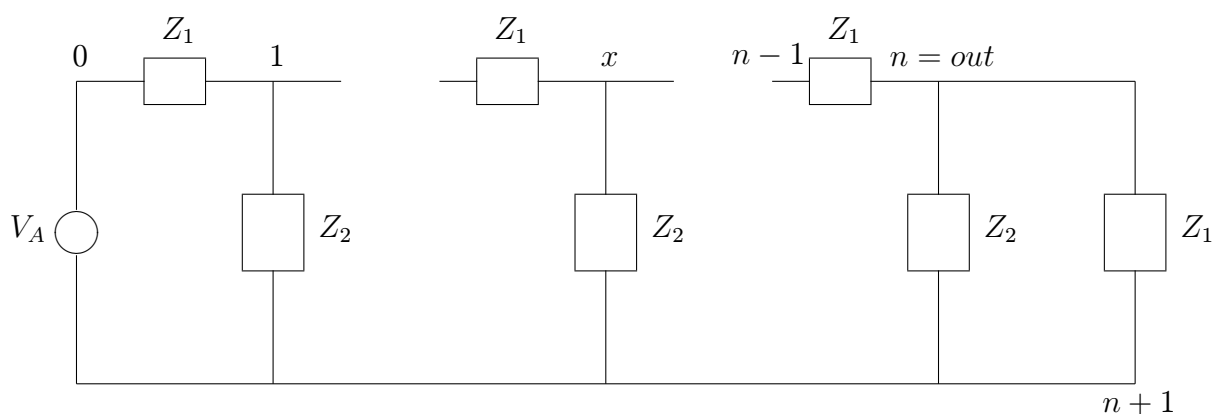
3.1. VÝSKYT FIBONACCI A LUCAS ČÍSEL V SIMULACI ELEKTRICKÉ SÍŤE NAPÁJENÉ DVA



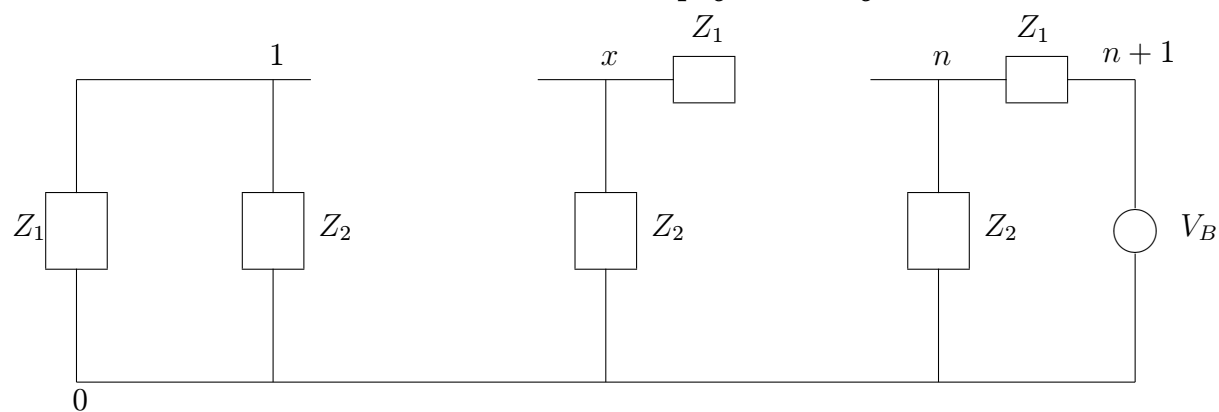
Obrázek 2: Žebříková síť jako model elektrického vedení

3.1.3. Rozbor žebříkové sítě

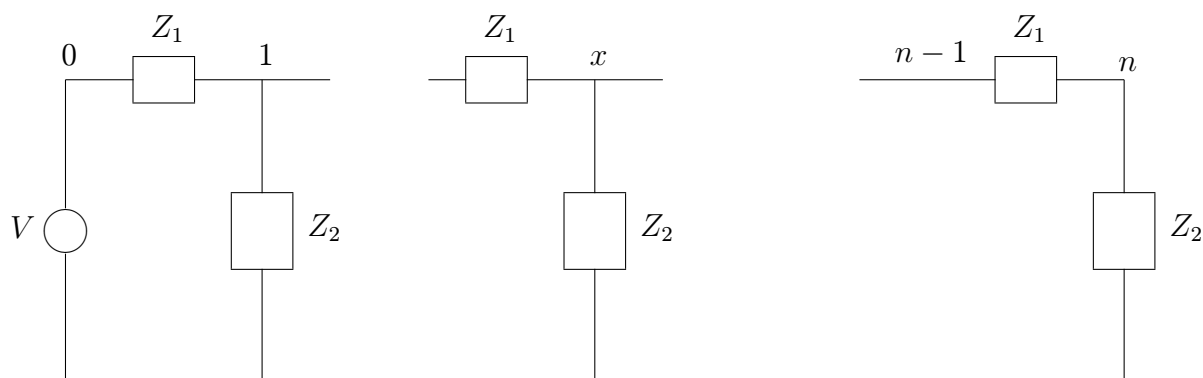
S využitím principu superpozice můžeme síť z Obrázku 2 získat jako složení sítí z Obrázků 3 a 4. Analýza těchto sítí (3 a 4) je založena na studiu sítě na Obrázku 5, přidáním zátěžného odporu.



Obrázek 3: Žebříková síť napájená zdrojem V_A



Obrázek 4: Žebříková síť napájená zdrojem V_B



Obrázek 5: Žebříková síť o n identických buňkách

Všechny elektrické parametry žebříkové sítě, skládající se z n identických buněk, mohou být zapsány jako podíl obou parametrů, které charakterizují každou buňku [faktor buňky $K(s) = Z_1(s)/Z_2(s)$] a polynomy v K , jejichž koeficienty jsou vstupy dvou číselných trojúhelníků zvaných DFF a DFFz:

n	K^0	K^1	K^2	K^3
0	1			
1	1	1		
2	1	3	1	
3	1	6	5	1
\vdots	\dots			

DDF trojúhelník

$$Vstupy = \begin{pmatrix} n + K \\ n - K \end{pmatrix}$$

n	K^0	K^1	K^2	K^3
0	1			
1	2	1		
2	3	4	1	
3	4	10	6	1
\vdots	\dots			

DDFz trojúhelník

$$Vstupy = \begin{pmatrix} n + K + 1 \\ n - K \end{pmatrix}$$

Označme b_n a B_n polynomy jejichž koeficienty jsou vstupy trojúhelníků DFF a DFFz. Tyto polynomy se shodují s Morgan-Voyce polynomy.

Pozn: Morgan-Voyce polyom je rekurentně zadán vztahy

$$b_n(x) = xB_{n-1} + b_{n-1}(x) \quad \text{pro } x \geq 1$$

$$B_n(x) = (x + 1)B_{n-1} + b_{n-1}(x) \quad \text{pro } x \geq 1$$

3.1. VÝSKYT FIBONACCI A LUCAS ČÍSEL V SIMULACI ELEKTRICKÉ SÍTĚ NAPÁJENÉ DVE

kde $b_0 = B_0 = 1$.

Rekurentní zadání Fibonacci polynomu:

$$F_{n+1}(x) = xF_n(x) + F_{n-1}(x)$$

kde $F_1(x) = 1$ a $F_2(x) = x$. Morgan-Voyce polynom je s Fibonacci polynomem v následujícím vztahu:

$$\begin{aligned} b_n(x^2) &= F_{2n+1}(x) \\ B_n(x^2) &= \frac{1}{x} F_{2n+2}(x) \end{aligned}$$

Lucas polynom má explicitní předpis

$$L_n(x) = 2^{-2} \left[\left(x - \sqrt{x^2 - 4} \right)^n + \left(x + \sqrt{x^2 - 4} \right)^n \right]$$

Všechny elektrické charakteristiky sítě zobrazené na Obrázku 5 mohou být vyjádřeny přímo, v uzavřené formě, za pomoci těchto polynomů, pokud jsou všechny buňky stejné.

Sítě nakreslené na Obrázcích 3 a 4 jsou velmi podobné síti z Obrázku 5. Jediný rozdíl je ve skutečnosti, že poslední buňka sítě na Obrázku 5 má zátěžný odpor nekonečné hodnoty. Můžeme nyní napsat elektrické charakteristiky pro síť na Obrázcích 3 a 4 stejně jednoduše jako pro síť na Obrázku 5, také v uzavřené formě.

Nechť je pro síť na Obrázku 3 zadána funkce přenosu vztahem

$$G'_n(K) = \frac{V_{out}}{V_A} = \frac{1}{B'_n(K)} \quad (3.1)$$

napětí v x -tém uzlu je dáno vztahem

$$V'_x = V_A \frac{B_{n-x}(K)}{B_n(K)} \quad (0 \leq x \leq n+1) \quad (3.2)$$

pro $B_{-1}(K) = 0$ Průběh napětí pro síť z Obrázku 4 je symetrický. Z tohoto důvodu můžeme napsat

$$V''_x = V_B \frac{B_{x-1}(K)}{B_n(K)} \quad (0 \leq x \leq n+1) \quad (3.3)$$

S využitím superpozice můžeme napsat vztah pro napětí v x -tém uzlu sítě z Obrázku 2:

$$V_x = V'_x + V''_x = V_A \frac{B_{n-x}(K)}{B_n(K)} + V_B \frac{B_{x-1}(K)}{B_n(K)} \quad (0 \leq x \leq n+1) \quad (3.4)$$

Označíme I_{x1} proud tekoucí do x -tého horizontálního odporu a I_{x2} proud tekoucí do x -tého vertikálního odporu. Můžeme nyní napsat stejné vyjádření pro proud užitím vlastnosti Morgan-Voyce polynomů $b_x = B_x - B_{x-1}$

$$I_{x1} = \frac{1}{Z_1} [V_x - V_{x-1}] = \frac{1}{Z_1} \left[-V_A \frac{b_{n-x+1}(K)}{B_n(K)} + V_B \frac{b_{x-1}(K)}{B_n(K)} \right] \quad (0 \leq x \leq n+1) \quad (3.5)$$

$$I_{x2} = \frac{V_x}{Z_2} = \frac{1}{Z_2} \left[V_A \frac{B_{n-x}(K)}{B_n(K)} + V_B \frac{B_{x-1}(K)}{B_n(K)} \right] \quad (0 \leq x \leq n) \quad (3.6)$$

3.1. VÝSKYT FIBONACCI A LUCAS ČÍSEL V SIMULACI ELEKTRICKÉ SÍTĚ NAPÁJENÉ DVA

Uvažujme na síti případ lichých n , pro která existuje střední bod pro napětí a vertikální proud a je definován pro $x = m = (n + 1)/2$. V tomto bodě, z (3.4), můžeme psát

$$V_m = (V_A + V_B) \frac{B^{(n-1)/2}}{B_n} \quad (3.7)$$

U prostředního vertikálního odporu máme

$$I_{m2} = \frac{1}{Z_2} (V_A + V_B) \frac{B^{(n-1)/2}}{B_n} \quad (3.8)$$

V případě sudých n můžeme analogicky uvažovat hodnotu prostředního horizontálního proudu

$$I_{m1} = \frac{1}{Z_1} (-V_A + V_B) \frac{b_{n/2}}{B_n} \quad (3.9)$$

pro $x = m = (n + 2)/2$, vztahy (3.4)-(3.6) stále platí.

Zejména nás zajímá určení výkonu rozděleného ve vertikálních odporech (protože pouze tyto mají fyzikální význam), který je dán součinem proudu a napětí:

$$P_{x2} = \frac{1}{Z_2} \left[V_A \frac{B_{n-x}(K)}{B_n(K)} + V_B \frac{B_{x-1}(K)}{B_n(K)} \right]^2 \quad (0 \leq x \leq n) \quad (3.10)$$

$$P_{m2} = \frac{1}{Z_2} (V_A + V_B)^2 \left[\frac{B^{(n-1)/2}}{B_n} \right]^2 \quad (n - \text{lichá}) \quad (3.11)$$

Fibonacci a Lucas čísla se objevují v případě $K = 1$, což odpovídá $Z_1 = Z_2 = R$. V tomto případě, $B_x = F_{2x+2}$ a $b_x = F_{2x+1}$. Následně dostáváme

$$V_x = V_A \frac{F_{2(n+1-x)}}{F_{2(n+1)}} + V_B \frac{F_{2x}}{F_{2(n+1)}} \quad (0 \leq x \leq n) \quad (3.12)$$

$$V_m = (V_A + V_B) \frac{F_{(n+1)}}{F_{2n+2}} = (V_A + V_B) \frac{1}{L_{n+1}} \quad (n - \text{lichá}) \quad (3.13)$$

$$I_{x1} = \frac{1}{R} \left[-V_A \frac{F_{2(n+1-x)+1}}{F_{2(n+1)}} + V_B \frac{F_{2x-1}}{F_{2(n+1)}} \right] \quad (0 \leq x \leq n + 1) \quad (3.14)$$

$$I_{x2} = \frac{1}{R} \left[V_A \frac{F_{2(n+1-x)+1}}{F_{2(n+1)}} + V_B \frac{F_{2x}}{F_{2(n+1)}} \right] \quad (0 \leq x \leq n) \quad (3.15)$$

$$I_{m1} = \frac{1}{R} (-V_A + V_B) \left[\frac{1}{L_{n+1}} \right]^2 \quad (n - \text{sudá}) \quad (3.16)$$

$$I_{m2} = \frac{1}{R} (V_A + V_B) \left[\frac{1}{L_{n+1}} \right]^2 \quad (n - \text{lichá}) \quad (3.17)$$

pro které:

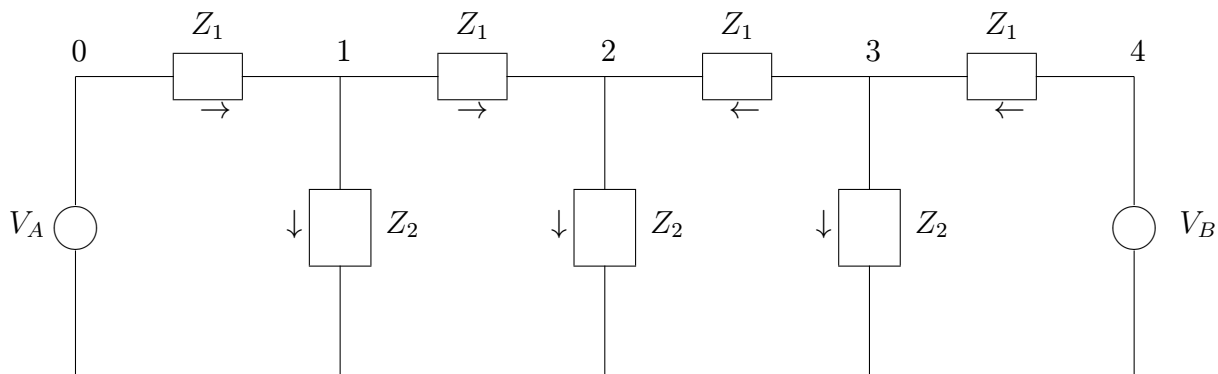
$$P_{x2} = \frac{1}{R} \left[V_A \frac{F_{2(n+1-x)+1}}{F_{2(n+1)}} + V_B \frac{F_{2x}}{F_{2(n+1)}} \right]^2 \quad (0 \leq x \leq n) \quad (3.18)$$

$$P_{m2} = \frac{1}{R} (V_A + V_B)^2 \left[\frac{1}{L_{n+1}} \right]^2 \quad (n - \text{lichá}) \quad (3.19)$$

Poslední dva vztahy ukazují, že spotřeba energie uživateli je také funkcí Fibonacci a Lucas čísel.

3.1.4. Praktický příklad

Uvažujme rozložení proudu ve vertikálních odporech pro případ $n = 3$, znázorněno na Obrázku 6.



Obrázek 6: Příklad $n = 3$

V obecném případě rozdílných hodnot horizontálního a vertikálního odporu dostáváme, z (3.10):

$$P_{x2} = \frac{1}{Z_2} \left[V_A \frac{B_{3-x}(K)}{B_3(K)} + V_B \frac{B_{x-1}(K)}{B_3(K)} \right]^2 \quad (0 \leq x \leq 3) \quad (3.20)$$

což je,

$$\begin{aligned} P_{12} &= \frac{1}{Z_2} \left[V_A \frac{B_2(K)}{B_3(K)} + V_B \frac{B_0(K)}{B_3(K)} \right]^2 = \frac{1}{Z_2} \left[\frac{V_A(K^2 + 4K + 3) + V_B}{K^3 + 6K^2 + 10K + 4} \right]^2 \\ P_{22} &= \frac{1}{Z_2} [V_A + V_B]^2 \left[\frac{B_1(K)}{B_3(K)} \right]^2 = \frac{1}{Z_2} [V_A + V_B]^2 \left[\frac{K + 2}{K^3 + 6K^2 + 10K + 4} \right]^2 \\ P_{32} &= \frac{1}{Z_2} \left[V_B \frac{B_2(K)}{B_3(K)} + V_A \frac{B_0(K)}{B_3(K)} \right]^2 = \frac{1}{Z_2} \left[\frac{V_B(K^2 + 4K + 3) + V_A}{K^3 + 6K^2 + 10K + 4} \right]^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Ve speciálním případě, kdy $z_1 = Z_2 = R$, dostáváme

$$P_{x2} = \frac{1}{R} \left[V_A \frac{F_{8-2x}(K)}{F_8(K)} + V_B \frac{F_{2x}(K)}{F_8(K)} \right]^2 \quad (0 \leq x \leq 3), \quad (3.22)$$

odkud:

$$\begin{aligned} P_{12} &= [8V_A + V_B]^2 / 441R \\ P_{22} &= [V_A + V_B]^2 / 49R \\ P_{32} &= [8V_A + 8V_B]^2 / 441R \end{aligned} \quad (3.23)$$

3.1.5. Speciální hodnoty napětí zdrojů

Při analýze symetrické žebříkové sítě, která modeluje vedení proudu, připouštíme konkrétní hodnoty napětí V_A a V_B .

1. Pokud $V_A = V_B > 0$, síť je symetrická a proud protéká, například, jak je naznačeno na Obrázku 6, pokud n je liché. Pokud je n sudé, prostředním vertikálním odporem neprotéká žádný proud.

2. Pokud $V_A = V_B$, tak z matematického hlediska, je zajímavý pouze případ kdy n je liché. Pak ve středu sítě jsou elektrické charakteristiky (napětí, vertikální proud a výkon) nulové.

3. Když $V_B = V_A + \Delta V$, kde ΔV může nabývat kladných i záporných hodnot a $\Delta V \ll V_B, V_A$, dostáváme mírně vychýlenou situaci a jako důsledek se projeví malé rozdíly v hodnotách elektrických parametrů. Toto je reálný případ a výpočet nabývá praktického významu: pokud jeden ze zdrojů nemá dostatečný výkon (kvůli nedostatku energie), musí jej poskytnout zdroj druhý. Můžeme zapsat takto:

$$V_x = V_A \frac{B_{n-x} + B_{x-1}}{B_n} + \Delta V \frac{B_{x-1}}{B_n}; \quad \Delta V_x = \Delta V \frac{B_{x-1}}{B_n} \quad (0 \leq x \leq n) \quad (3.24)$$

a

$$I_{x2} = \frac{1}{Z_2} \left[V_A \frac{B_{n-x} + B_{x-1}}{B_n} + \Delta V \frac{B_{x-1}}{B_n} \right]; \quad \Delta I_{x2} = \frac{1}{Z_2} \Delta V \frac{B_{x-1}}{B_n} \quad (0 \leq x \leq n) \quad (3.25)$$

pak máme

$$\Delta P_{x2} = \Delta V_x \Delta I_{x2} = \frac{1}{Z_2} \Delta V^2 \left[\frac{B_{x-1}}{B_n} \right]^2 \quad (0 \leq x \leq n) \quad (3.26)$$

což je pro případ $z_1 = Z_2 = R$ rovno

$$\Delta P_{x2} = \frac{1}{R} \Delta V^2 \left[\frac{F_{2x}}{F_{2n+2}} \right]^2 \quad (3.27)$$

a ve středu sítě pro n lichá, je

$$\Delta P_m = \frac{1}{R} \Delta V^2 \left[\frac{1}{L_{n+1}} \right]^2 \quad (3.28)$$

To znamená, že změna výkonu je silně závislá na počtu buněk n (počtu odběratelů elektrické energie), pro něž je vedení modelováno a je funkcí Fibonacci a Lucas čísel.

Pro případ kdy $n = 3$ a pro změnu 1% dostáváme

$$R \Delta P_m = 2,041 \mu W \Omega \quad (3.29)$$

zatímco pro změnu 10% dostáváme

$$R \Delta P_m = 0,204 m W \Omega \quad (3.30)$$

v případě 10 buněk máme pro $\Delta V = 10\%$

$$R \Delta P_m = 2,52 n W \Omega \quad (3.31)$$

a pro $\Delta V = 10\%$

$$R\Delta P_m = 0,25\mu W\Omega \quad (3.32)$$

Symetrická žebříková síť s velkým počtem buněk může být považována za dobrý model pro zkoumání chování elektrického vedení. Ve speciálním případě, pro stejné odpory, mohou být charakteristické vlastnosti vedení zapsány jako funkce Fibonacci a Lucas čísel.

3.2. Hmyz a rostliny

Členy Fibonacciho posloupnosti se objevují ve strukturách mnohých druhů vyšších rostlin. Počet okvětních lístků u většiny rostlin (až 89 u druhu astry Michaelmas daisy) odpovídá těmto členům popřípadě členům Lucasovy posloupnosti. Jiná souvislost se nachází v natočení sousedních listů na stonku. Úhel $137,5^\circ$ lze vyjádřit jako limitní podíl předcházejícího a následujícího členu Fibonacciho posloupnosti, tedy když zlatým řezem φ vynásobíme plný úhel, dostaneme

$$360^\circ\varphi = 222,5^\circ,$$

což je úhel větší než přímý, měli bysme jej tedy odečíst od plného úhlu.

$$360^\circ - 222,5^\circ = 137,5^\circ$$

Tento úhel se nazývá zlatý. Uplatnění Fibonacciho čísel ve fyloaxii je celkem známé, proto se budu zabývat tématem známým méně, a to vztahem Fibonacciho čísel k délce druhů hmyzu sídlícímu na rostlině (pcháč oset).

Tabulka ukazuje pět druhů hmyzu sídlícím na pcháči:

Hmyz	počet	délka(mm)	odchylka(mm)
<i>Diabrotica longicornius</i> (bázlivec)	15	6,0	0,58
<i>Plagiognathus</i> (klopuška)	13	3,7	0,23
<i>Olibrus semistriatus</i> (olibrus)	17	2,2	0,25
<i>Orius insidiosus</i> (hladěnka)	14	2,0	0,10
<i>Frankliniella tritici</i> (trásněnka)	15	0,9	0,12

Protože rostliny mají omezený objem, hmyz mezi sebou bojuje o prostar na ní. Jiná alternativa je, že bojují o potravu, ale vzhledem k tomu, že se jen zřídka setkáváme s rostlinami (v našem případě je to pcháč) zničenými hmyzem. Tuto alternativu zamítneme. Soutěžení o vlastní prostor na rostlině je dáno ekologickým a evolučním mechanismem zaměřeným na vyhýbání se fyzickému střetu s jinými druhy. Toto může být zrealizováno pokud každý druh hmyzu vlastní určité útočiště. Na rostlině se může menší hmyz vyhnout většímu vyhledáním štěrbin, do které větší nemůže vstoupit. Tímto se jednotlivé druhy rozdělily podle velikosti. Na příkladu jednoho páru hmyzu složeného ze dvou druhů - větší utlačuje menšího, který během evoluce zmenší svojí velikost. Předpokládáme tedy, co se střetu týče, že spíš se menší hmyz vyhýbá většímu než větší menšímu. Tímto způsobem bude největší hmyz sídlící na rostlině určovat celou posloupnost velikostí zbývajících druhů na rostlině.

Na základě těchto úvah použijeme Fibonacciho posloupnost neobvyklým způsobem. Pokud předpokládáme, že největší hmyz určuje celou posloupnost délek, začneme naši posloupnost pozpátku, nastavením prvního členu na délku největšího hmyzu. Pak můžeme nadefinovat naši posloupnost na základě prvního členu (u_1) takto:

$$u_n = u_1(\varphi)^{n-1}$$

kde φ je zaokrouhlená hodnota zlatého řezu: $\varphi=0,62$.

Z daného prvního členu a explicitního zadání posloupnosti jsme nyní schopni dopočítat zbylé členy řady. Hodnotu prvního členu (určenou největším druhem hmyzu) nastavíme na 6,0 mm a dopočítáme zbylé čtyři délky ostatních druhů.

Předpovězená řada	Naměřená hodnota
6,0	6,0
3,7	3,7
2,3	2,2
1,4	2,0
0,9	0,9

Z porovnání můžeme usoudit, že poměr délek dvou sousedních hmyzů v řadě, od většího k menšímu, aproximuje hodnotu 1,62. Tento poměr můžeme brát jako koeficient určující jak podobné mohou být délky hmyzu, ve využití prostoru na rostlině, než začne jedem vytlačovat druhý.

Pokud bereme porovnání řad jako nenáhodné, můžeme dojít k hypotéze, že velikost útočiště okupovaného těmito pěti druhy hmyzu, může být funkcí jejich délky. Pokud je velikost okupovaného prostoru svázáno s délkou hmyzu konstantou (k), můžeme zavést posloupnost velikosti prostoru (u'_n) takto:

$$u'_n = ku_1(\varphi)^{n-1}$$

což je vztah kvalitativně identický k vztahu pro posloupnost délek hmyzu. Tedy uvedené druhy hmyzu sídlí v úkrytech, které velikostí odpovídají Fibonacciho posloupnosti.

4. Závěr

V bakalářské práci byla prezentována zajímavá a méně známá fakta o aplikacích Fibonacci čísel a zlatého řezu v chemii a elektrotechnice. Rozmanitost výskytu Fibonacci čísel a zlatého řezu zůstává stále překvapující a můžeme očekávat, že jejich význam i nadále poroste.

Literatura

- [1] Basin, S. L.: The Appearance of Fibonacci Numbers and the Q-Matrix in Electrical Network Theory, *Mathematics Magazine*, **36.2** (1963), 84–97.
- [2] Ferri, G.: The appearance of Fibonacci and Lucas numbers in the simulation of electrical power lines supplied by two sides, *The Fibonacci Quarterly*, **35.2** (1997), 149–155.
- [3] Huntley, H. E.: Fibonacci and the atom, *The Fibonacci Quarterly*, **7.5** (1969), 523–524.
- [4] Klačka, J.: Applications of Fibonacci numbers and the golden ratio in physics, chemistry, biology and economy, 7th Conference on Mathematics and Physics on Technical Universities, Brno 2011.
- [5] Koshy, T.: *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, Wiley, New York, (2001)
- [6] Morton, A. A.: The Fibonacci series and the periodic table of elements, *The Fibonacci Quarterly*, **15.2** (1977), 173–175.
- [7] Vita, J. De: Fibonacci Insects and Flowers, **16.4** (1978), 315.
- [8] Wlodarski, J.: Achieving the "golden ratio" by grouping the "elementary" particles, *The Fibonacci Quarterly*, **5.2** (1967), 193–194.
- [9] Wlodarski, J.: The Fibonacci numbers and the "magic" numbers, *The Fibonacci Quarterly*, **3.3** (1965), 208.
- [10] Wlodarski, J.: The "Golden ratio" and the Fibonacci numbers in the world of atoms, *The Fibonacci Quarterly*, **1.4** (1963), 61–63.
- [11] Wlodarski, J.: The golden ratio in an electrical network, *The Fibonacci Quarterly*, **9.2** (1971), 188, 194.
- [12] Wlodarski, J.: More about the "Golden ratio" in the world of atoms, *The Fibonacci Quarterly*, **6.4** (1968), 244, 249.
- [13] Wlodarski, J.: The possible end of the periodic table of elements and the "golden ratio", *The Fibonacci Quarterly*, **9.1** (1971), 82, 92.

5. Seznam použitých zkratek a symbolů

φ	hodnota zlatého řezu
A	nukleonové číslo
B_n	n-tý člen Fibonacci posloupnosti
b_n	n-tý člen Morgan-Voyce posloupnosti
F_n	n-tý člen Morgan-Voyce posloupnosti
I	proud
L_n	n-tý člen Lucas posloupnosti
P	výkon
R	odpor
V	napětí
Z	protonové číslo

