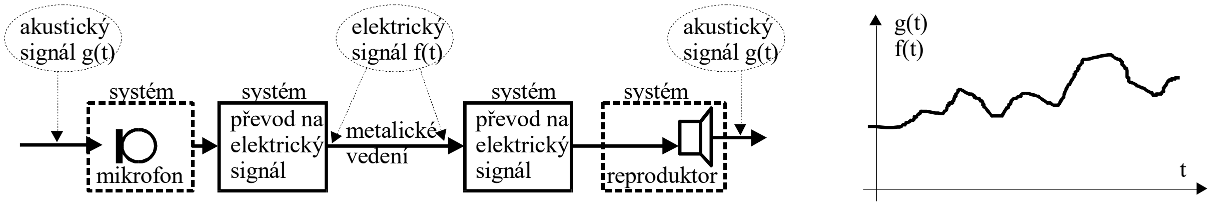
Signály a systémy

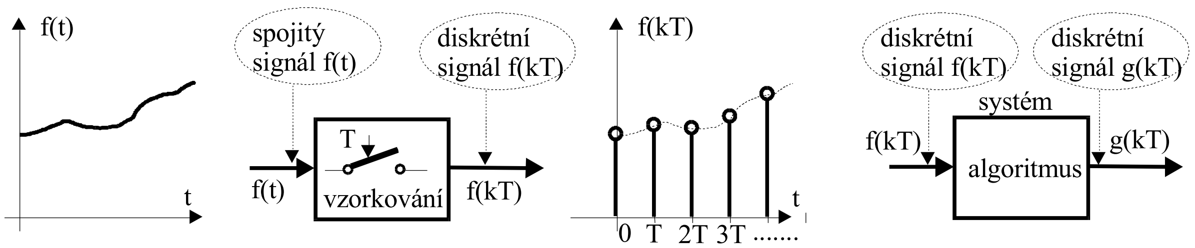
1.1 Úvod a motivace

S pojmem „signál“ a „systém“ se setkáváme téměř denně aniž si to nějak uvědomujeme. Když například telefonujeme, potom náš hlas (což je akustický signál) je převeden mikrofonem (tj. systémem) na signál elektrický. Tento elektrický signál je pak dále přenášen např. po metalickém vedení k protější stanici, kde je opět převeden reproduktorem (opět systém) zpět na signál akustický. Situace je ukázána v levé části obrázku **Obr. 2-1**. V pravé části obrázku je pak naznačen časový průběh akustického i elektrického signálu. Oba tyto signály jsou definovány pro všechny časové okamžiky (pro spojitý úsek na časové ose) a jsou proto nazývány ***signály se spojitým časem*** nebo zkráceně ***spojité signály***. Systémy, vyskytující se v tomto řetězci zpracovávají tyto spojité signály a jsou proto nazývány ***systémy se spojitým časem*** nebo zkráceně ***spojité systémy***.



Obr. 2-1: Signály a systémy se spojitým časem

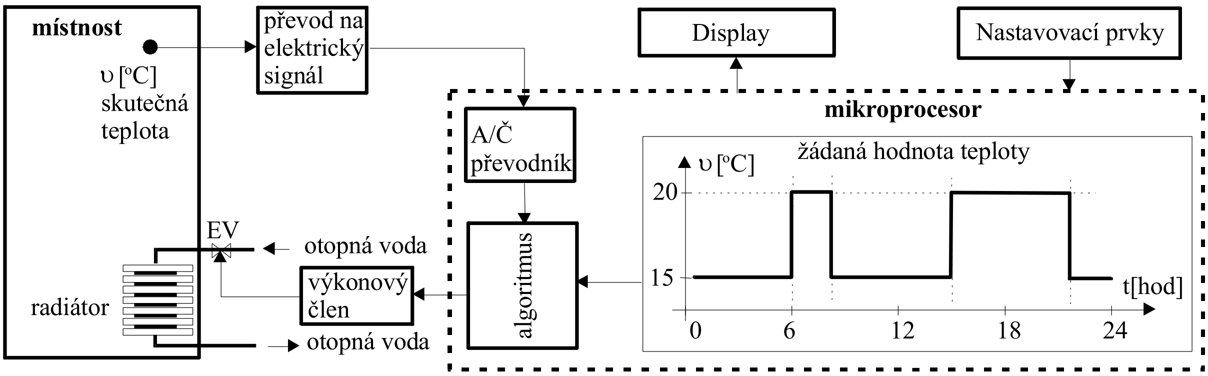
Často jsou spojité signály převáděny do diskrétní podoby pomocí tzv. vzorkování tj. ze spojitého signálu jsou v pravidelných časových intervalech T odebírány vzorky (spínač na **Obr. 2-2**spíná v pravidelných časových intervalech na krátký okamžik). Tyto vzorky mohou být dále zpracovávány, přenášeny nebo ukládány (např. v paměti počítače nebo na CD) v digitální podobě ve formě posloupnosti čísel. Situace je v tomto případě schematicky ukázána na **Obr. 2-2**. Takto vzorkované signály nejsou (na rozdíl od spojitých signálů) definovány na spojitém časovém úseku, ale jsou definovány jen na diskrétní množině vzorkovacích okamžiků $kT\ k = 0,1,2,...$ a jsou proto nazývány ***signály s diskrétním časem*** nebo zkráceně ***diskrétní signály***. Systémy, pomocí kterých jsou tyto diskrétní signály zpracovávány, se potom nazývají ***systémy s diskrétním časem*** nebo zkráceně ***diskrétní systémy***.



Obr. 2-2: Signály a systémy s diskrétním časem

Diskrétní systém představuje v podstatě nějaký algoritmus, pracující s posloupností čísel (navzorkovaných hodnot signálu $f(kT)\ k = 0,1,2,...$). Tento algoritmus bývá často realizován na nějakém počítači nebo mikroprocesoru a jeho výslednými hodnotami (výstupem diskrétního systému) je opět diskrétní signál tj. posloupnost čísel.

Teorie signálů i systémů má četné aplikace v různých oblastech. Často jsou systémy (jak spojité tak i diskrétní) používány pro řízení různých fyzikálních zařízení nebo soustav. Jeden takový příklad za všechny je uveden na následujícím **Obr. 2-3**. Tento příklad reprezentuje tzv. programovatelné řízení teploty v nějaké místnosti. Z ekonomických důvodů (místnost je využívána jen v určitých hodinách dne) je žádoucí, aby teplota v místnosti během dne měla časový průběh takový, jak je naznačeno na obrázku. Skutečná teplota v místnosti je měřena teploměrem, jehož signál (údaj o teplotě $\upsilon\left[{}^{o}C\right]$) je převeden na signál elektrický (opět systémem, který je tvořen převodníkem fyzikální veličiny). Tento signál je potom pomocí analogově- číslicového převodníku A/Č (bývá obvykle součástí mikropočítače) diskretizován (tj. převeden na číslo, uložené v počítači). Tato hodnota, měřená (přesněji řečeno diskretizovaná) v časových okamžicích $kT\ k = 0,1,2,...$ vstupuje do algoritmu (do diskrétního systému, realizovaného programem mikropočítače). Do algoritmu dále vstupuje ve stejných časových okamžicích i hodnota požadovaná (získaná pro daný časový okamžik $kT\ k = 0,1,2,...$ z požadovaného časového průběhu teploty). Výstup algoritmu (výstup diskrétního systému) potom ovládá pomocí výkonového členu elektromagnetický ventil EV a tím řídí množství otopné vody, procházející radiátorem.



Obr. 2-3: Programovatelné řízení teploty v místnosti

V následujícím textu jsou studovány základní vlastnosti jak spojitých a diskrétních signálů tak i spojitých a diskrétních systémů.

1.2 Zařazení předmětu ve studijním programu

Předmět *Signály a systémy* je zařazen ve třetím semestru bakalářského studijního programu *Elektrotechnika, elektronika, komunikační a řídicí technika*. Navazuje na předměty *Elektrotechnika 1* a *Elektrotechnika 2* a také částečně na předměty *Fyzika 1* a *Fyzika 2*. Předchozí znalosti, které jsou požadované pro studium tohoto předmětu, jsou především znalosti diferenciálního a integrálního počtu funkcí jedné proměnné, základní znalosti z Laplaceovy a Fourierovy transformace a dále elementární znalosti maticového počtu. Tyto znalosti jsou obsahem předmětů *Matematika 1, Matematika 2* a *Matematika 3* výše uvedeného studijního programu.

1.3 Úvod do předmětu

Student se naučí matematicky popsat jak signály spojité tak i diskrétní a provádět s těmito signály různé operace. Dále se seznámí nejen s časovým ale též s frekvenčním vyjádřením signálu. V dalších kapitolách se seznámí se systémy a to jak spojitými tak i diskrétními a také s tím, jak se změní vlastnosti signálu průchodem nějakým systémem.

1.4 Vstupní test (zatím není)

Vstupní test je určen k vyhodnocením samotným studentem a jeho účelem je ověření předchozích znalostí studenta, potřebných k úspěšnému zvládnutí studia předkládaného výukového textu. Výsledky vstupního testu musí být uvedeny v dodatcích v závěru tohoto textu.

2 Spojité signály a jejich analýza

2.1 Základní spojité signály a jejich vlastnosti

V úvodní kapitole jsme se seznámili s pojmem signál se spojitým časem nebo zkráceně spojitý signál. Pro další zpracování takového signálu jej musíme popsat nějakým matematickým prostředkem. Tímto matematickým prostředkem je pojem funkce definované na celé reálné ose. Ve skutečnosti žádný reálný signál nemůže začínat v mínus nekonečnu a trvat do plus nekonečna. Protože budeme signály dále zpracovávat matematicky je z hlediska matematiky vhodné uvažovat s tímto definičním oborem funkce $f(t)$. Je tedy matematickým modelem spojitého signálu funkce $f(t), t \in (-\infty,+\infty)$.

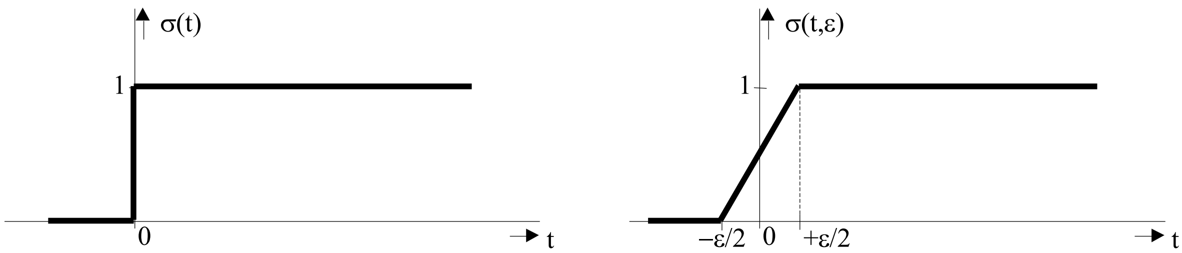
2.1.1 Základní spojité signály

Jedním ze základních spojitých signálů je tzv. ***jednotkový skok*** $\sigma(t)$. Je definován následujícím vztahem

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

a jeho průběh je ukázán v levé části **Obr. 2-1**. V pravé části tohoto obrázku je ukázán podobný signál $\sigma(t,\varepsilon)$, který je definován jako

$$\sigma(t,\varepsilon) = \begin{cases} 0 & t \leq -\varepsilon/2 \\ t/\varepsilon + 0{,}5 & t \in (-\varepsilon/2, +\varepsilon/2) \\ 1 & t \geq +\varepsilon/2 \end{cases} \tag{2.2}$$



Obr. 2-1: Jednotkový skok

Z obrázku je zřejmé, že bude-li se parametr ε blížit nulové hodnotě, přejde funkce $\sigma(t,\varepsilon)$ v jednotkový skok tj. ve funkci $\sigma(t)$. Vyjádřeno matematicky

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sigma(t,\varepsilon) = \sigma(t) \tag{2.3}$$

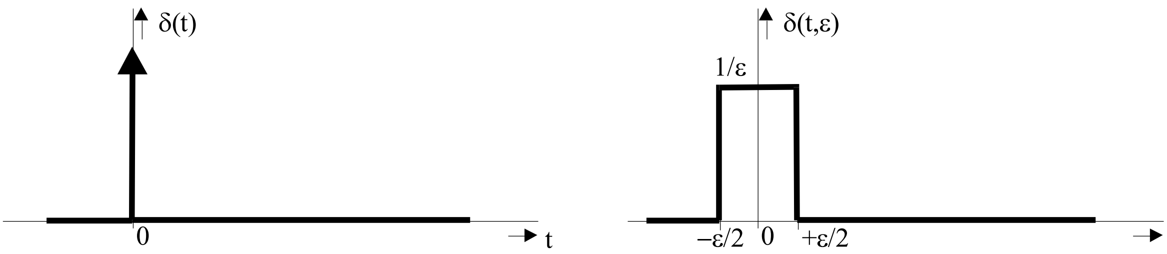
Příkladem signálu typu jednotkový skok může být připojení stejnosměrného zdroje napětí 1 volt k nějakému spotřebiči v čase $t = 0$.

Dalším základním signálem je tzv. ***Diracův impuls*** $\delta(t)$ (P.A.M.Dirac, 1902- 1984, anglický teoretický fyzik). Je definován následujícím vztahem

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ +\infty & t = 0 \end{cases} \quad \text{a současně} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 \tag{2.4}$$

tj. jeho plocha je rovna 1. Jeho průběh je ukázán v levé části **Obr. 2-2**. V pravé části tohoto obrázku je ukázán signál $\delta(t,\varepsilon)$, který má tvar úzkého a vysokého impulsu a který je definován jako

$$\delta(t,\varepsilon) = \begin{cases} 0 & t \notin \langle -\varepsilon/2, +\varepsilon/2 \rangle \\ 1/\varepsilon & t \in (-\varepsilon/2, +\varepsilon/2) \end{cases} \tag{2.5}$$



Obr. 2-2: Diracův impuls

Z obrázku je zřejmé, že bude-li se parametr ε blížit nulové hodnotě, přejde funkce $\delta(t,\varepsilon)$ v Diracův impuls tj. ve funkci $\delta(t)$. Vyjádřeno matematicky

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \delta(t,\varepsilon) = \delta(t) \tag{2.6}$$

Realizace Diracova impulsu není možná. Můžeme ale realizovat signál $\delta(t,\varepsilon)$. Příkladem signálu tohoto typu by bylo připojení stejnosměrného zdroje vysokého napětí k nějakému spotřebiči na velmi krátkou dobu tak, aby plocha takového impulsu byla jednotková.

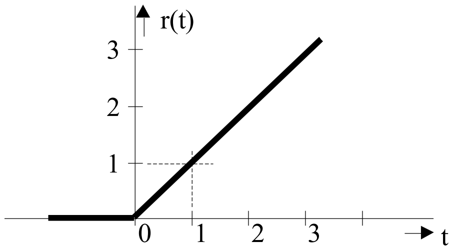
Lineárně rostoucí signál je dalším základním signálem. Jeho časový průběh je ukázán na **Obr. 2-3** vlevo. Tento signál je definován jako

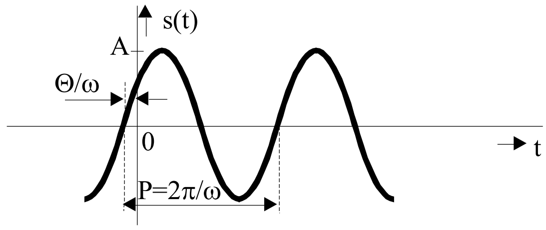
$$r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Rychlost nárůstu tohoto signálu (derivace $f'(t)$ $t > 0$) je jednotková. Signál $ar(t)$ bude mít rychlost nárůstu rovnu a. Podobně je možno definovat kvadraticky rostoucí signál t^2 pro $t \geq 0$ a 0 pro $t < 0$. V obecném případě můžeme definovat signál polynomem

$$f(t) = \begin{cases} b_0 + b_1 t + \ldots + b_n t^n & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

Je zřejmé, že jak jednotkový skok tak lineárně rostoucí signál i kvadraticky rostoucí signál jsou zvláštními případy tohoto obecného signálu.





Obr. 2-3: Lineárně rostoucí signál (vlevo) a sinusový signál (vpravo)

Sinusový signál je jedním z periodických signálů, které tvoří důležitou skupinu signálů. Signál se spojitým časem (spojitý signál) $s(t)$ se nazývá ***periodický*** s ***periodou*** P jestliže

$$s(t) = s(t + P) \tag{2.9}$$

pro všechna t. Platí-li tento vztah potom také platí

$$s(t) = s(t + P) = s(t + 2P) = ... = s(t + nP) \tag{2.10}$$

pro libovolné celé n. Je-li tedy signál periodický s periodou P, potom je také periodický s periodou $2P, 3P....$ Nejmenší hodnota periody P se nazývá ***základní perioda*** a funkce se potom opakuje každých P sekund.

Nejdůležitějším periodickým signálem je ***sinusový signál***. Matematicky je popsán funkcí

$$s(t) = A\sin(\omega t + \Theta) \tag{2.11}$$

a je ukázán na **Obr. 2-3** vpravo. Sinusový signál je periodický se základní periodou

$$P = 2\pi / \omega \tag{2.12}$$

Základní perioda je nejmenší časový interval, ve kterém se sinusoida opakuje a vytváří tím kompletní cyklus. Převratná hodnota této periody $f = 1/P$ tedy určuje počet těchto cyklů za jednu sekundu a nazývá se ***kmitočet*** nebo ***frekvence*** a jednotkou je ***hertz*** $[Hz]$. Jeden hertz je jeden cykl za sekundu. Veličina

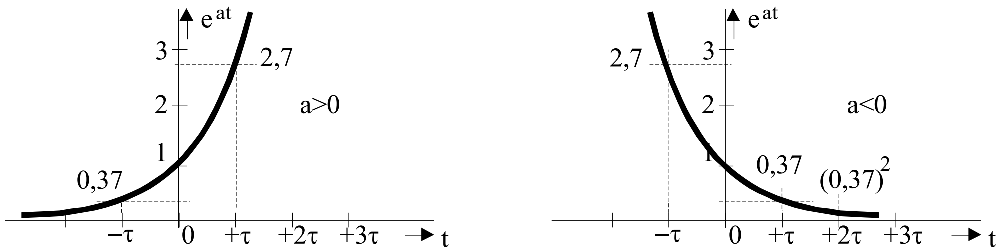
$$\omega = 2\pi f \tag{2.13}$$

se nazývá ***úhlová frekvence*** a její jednotkou je radián za sekundu $[rad/\mathrm{sec}]$. Sinusový signál o kmitočtu 1000 Hz má základní periodu 1/1000=1 milisekunda a úhlový kmitočet $2.\pi.1000 = 6282\ rad/\mathrm{sec}$.

Reálná exponenciální funkce je definována jako

$$f(t) = e^{at} \quad t \in (-\infty, +\infty) \tag{2.14}$$

kde a je reálné číslo. Jestliže $a > 0$ potom exponenciální funkce roste od 0 nade všechny meze jak t roste od $-\infty$ do $+\infty$ jak je ukázáno v levé části **Obr. 2-4**. Jestliže $a < 0$ potom exponenciální funkce klesá od $-\infty$ k 0 jak t roste od $-\infty$ do $+\infty$ jak je ukázáno v pravé části **Obr. 2-4**.



Obr. 2-4: Reálná exponenciální funkce

Míra růstu nebo poklesu reálné exponenciální funkce je dána hodnotou čísla a. Převratná hodnota absolutní hodnoty tohoto čísla se nazývá časová konstanta $\tau = 1/|a|$. Její fyzikální rozměr je sekunda. Naroste-li čas právě o tuto časovou konstantu potom reálná exponenciální funkce vzroste (pro $a > 0$) nebo klesne (pro $a < 0$) takto

$$\frac{f(t+\tau)}{f(t)} = \frac{e^{a(t+\tau)}}{e^{at}} = e^{a\tau} = e^{\frac{a}{|a|}} = \begin{cases} e^{+1} = 2{,}7 & a > 0 \\ e^{-1} = 0{,}37 & a < 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

To znamená, že např. pro $a < 0$ klesne funkce na 37% své původní hodnoty.

Komplexní exponenciální funkce. Doposud jsme se zabývali signály, jejichž hodnoty byly reálná čísla. Nyní se budeme zabývat signálem, jehož hodnoty jsou čísla komplexní. Takovým základním signálem je komplexní exponenciální funkce

$$f(t) = e^{j\omega t} \quad t \in (-\infty, +\infty) \tag{2.16}$$

kde ω je reálné číslo (úhlový kmitočet) a $j = \sqrt{-1}$ je komplexní jednotka. Platí tzv. ***Eulerův vztah*** (podle švýcarského matematika Eulera, 1707-1783)

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \quad t \in (-\infty, +\infty) \tag{2.17}$$

Vzhledem k tomu, že

$$\left|e^{j\omega t}\right| = \sqrt{(\cos \omega t)^2 + (\sin \omega t)^2} = 1 \tag{2.18}$$

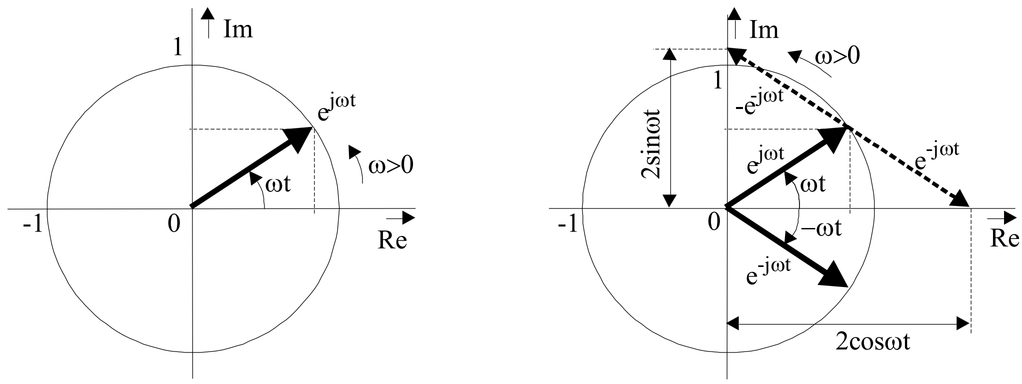
lze si výraz $e^{j\omega t}$ představit jako jednotkový vektor rotující v komplexní rovině s úhlovou rychlostí ω. Průměty tohoto vektoru do reálné a imaginární osy představují reálnou a imaginární část komplexního signálu $e^{j\omega t}$. Situace je ukázána na **Obr. 2-5** vlevo. Vytvořme k tomuto vektoru (signálu) vektor, který rotuje v komplexní rovině v obráceném směru (tento signál má tedy ***záporný kmitočet***) tj.

$$e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t \quad t \in (-\infty, +\infty) \tag{2.19}$$

Sečtením příp. odečtením těchto dvou vektorů obdržíme důležité vztahy

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \qquad \sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \tag{2.20}$$

Situace je ukázána na **Obr. 2-5** vpravo.



Obr. 2-5: Komplexní exponenciální signál

Příklad 2.1: *Komplexní exponenciální signál*

Vykreslete v komplexní rovině vektor e^{j2t} pro $t = 0, 1, \pi/2, \pi, 4$. Nakreslete tentýž vektor pro stejné ale záporné kmitočty.

2.1.2 Ohraničenost signálu v amplitudě a čase

Spojitý signál $f(t)$ se nazývá ***ohraničený v amplitudě*** v časovém intervalu (a,b) jestliže existuje reálná konstanta M taková, že

$$|f(t)| < M \quad t \in (a,b) \tag{2.21}$$

Specifikace časového intervalu je důležitá. Například reálný exponenciální signál $e^{\alpha t}$ s parametrem $\alpha < 0$ je ohraničený v intervalu $(0,+\infty)$ ale není ohraničený v intervalu $(-\infty,+\infty)$.

V reálném světě jsou všechny signály ohraničené. Například operační zesilovač může generovat i lineárně narůstající signál nebo exponenciální signál. Ale takový zesilovač je vždy napájen konečným napětím např. $\pm 15\,[V]$ a proto jím generovaný signál je omezen právě touto hodnotou $M = 15$. Při generování lineárně narůstajícího nebo exponenciálního signálu dojde k ***saturaci*** operačního zesilovače.

V předchozím textu jsme často užívali pro naše signály definiční interval $(-\infty,+\infty)$. Nekonečno je matematický pojem, velmi užitečný v matematice. V reálném světě každý signál začíná i končí v konečném časovém okamžiku tj. je ***ohraničený v čase***. Např. časový interval 10^{100} sekund (to je přibližně 3.10^{92} let) je jistě mnohem menší než matematické nekonečno přesto z hlediska pozorovatele je možno ho považovat za nekonečno. V inženýrských aplikacích často pracujeme s intervaly, které jsou číselně mnohem menší než toto astronomické číslo a přesto je možno je považovat za nekonečno. Například klesající exponenciální signál $e^{-t/\tau}$ klesne za dobu pěti časových konstant τ na hodnotu $(0{,}37)^5 = 0{,}007$ což lze již považovat za nulovou hodnotu, a tedy v tomto případě $\infty \approx 5\tau$.

Příklad 2.2: *Reálné nekonečno*

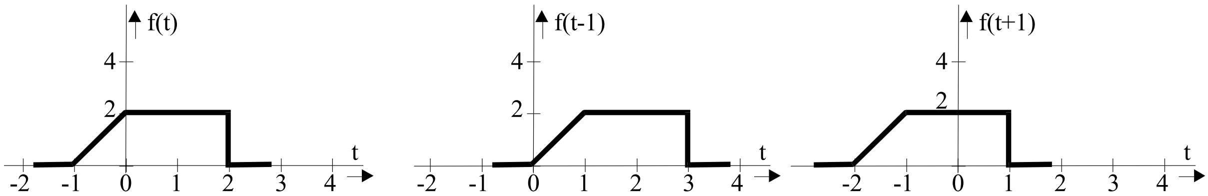
Předpokládejme, signál $e^{-t/\tau}$ dosáhne nulové hodnoty za 5 časových konstant τ. Který časový okamžik je možno považovat za nekonečno bude-li $\tau = 100, 1, 0{,}01$ sekund?

Odpověď: 500, 5, 0,05 sec.

2.1.3 Manipulace se spojitými signály

V této kapitole se seznámíme se dvěma jednoduchými manipulacemi se spojitými signály.

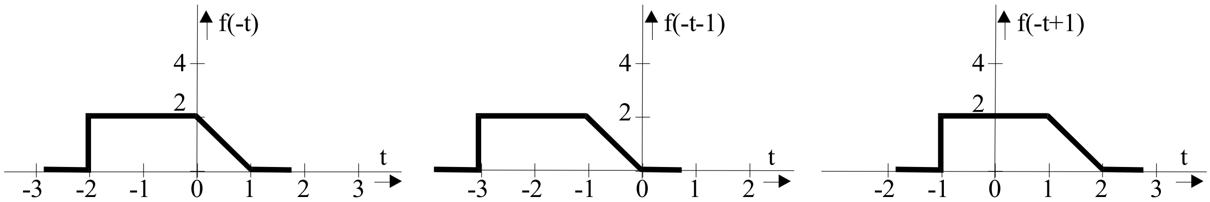
Posun signálu v čase (shifting). Nechť je dán nějaký signál $f(t)$ a kladné reálné číslo T. Potom signál $f(t-T)$ je signál, který má stejný průběh jako původní signál $f(t)$, ale je v čase posunut o T sekund doprava (tento nový signál je zpožděn o T sekund). Situace je ukázána uprostřed **Obr. 2-6** pro $T=1$.



Obr. 2-6: Posun signálu v čase

Podobně signál $f(t+T)$ je signál, který má stejný průběh jako původní signál $f(t)$, ale je v čase posunut o T sekund doleva (tento nový signál předbíhá o T sekund). Situace je ukázána v pravé části **Obr. 2-6** pro $T=1$.

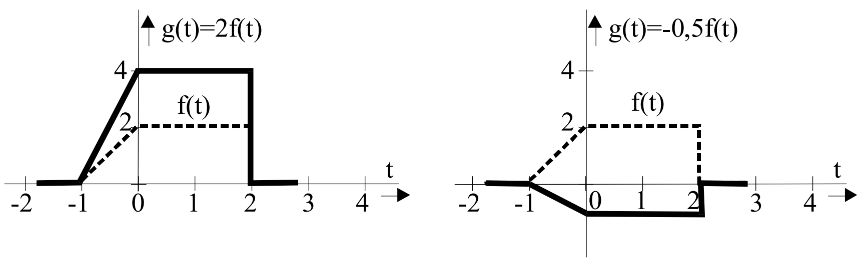
Otočení časové osy (flipping). Nechť $f(t)$ je stejný signál jako na **Obr. 2-6** vlevo. Potom $f(-t)$ je otočený signál vzhledem počátku časové osy $t=0$ a je ukázán na **Obr. 2-7** vlevo.



Obr. 2-7: Otočení časové osy a posun v čase

Jestliže $T>0$ potom $f(-t-T)$ posouvá signál $f(-t)$ doleva o T sekund neboť $f(-t-T)=f[-(t+T)]$ viz **Obr. 2-7** uprostřed. A naopak $f(-t+T)$ posouvá signál $f(-t)$ doprava o T sekund neboť $f(-t+T)=f[-(t-T)]$ viz **Obr. 2-7** vpravo.

Násobení signálů (multiplication). Uvažme dva signály $f(t)$ a $h(t)$ definované pro všechna $t\in(-\infty,+\infty)$. Potom součin těchto signálů vytváří nový signál $g(t)=f(t)h(t)$. Jestliže $h(t)$ je konstantní signál $h(t)=A$ pro všechna $t\in(-\infty,+\infty)$ kde A je reálné kladné číslo větší než 1, potom signál $g(t)$ je zesíleným signálem $f(t)$. Příklad je uveden na **Obr. 2-8** vlevo pro $A=2$. Původní signál $f(t)$ je signál z **Obr. 2-6** vlevo, výsledný signál $g(t)$ je dvakrát zesílen. Bude-li A kladné číslo ale menší jak 1 bude signál zeslaben. Bude-li A záporné číslo dojde k inverzi hodnot signálu (viz. **Obr. 2-8** vpravo).

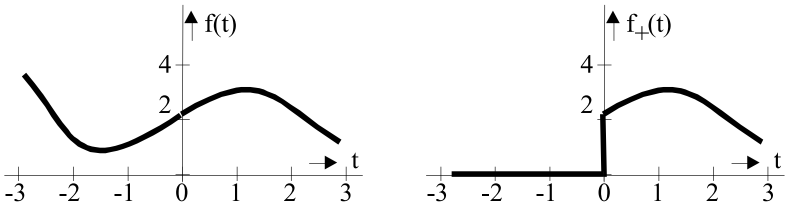


Obr. 2-8: Zesílení signálu (vlevo) a inverze signálu (vpravo)

Bude-li signál $h(t)$ roven jednotkovému skoku tj. $h(t)=\sigma(t)$ bude výsledkem násobení signál $f_+(t)=f(t)\sigma(t)$. Bude-li signál $h(t)$ roven otočenému jednotkovému skoku tj. $h(t)=\sigma(-t)$ bude výsledkem násobení signál $f_-(t)=f(t)\sigma(-t)$ tedy

$$f_+(t)=\begin{cases} f(t) & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases} \qquad f_-(t)=\begin{cases} f(t) & t\leq 0 \\ 0 & t>0 \end{cases} \tag{2.22}$$

Situace je ukázána na **Obr. 2-9**. Operace násobení „vyřezává" (*truncation*) v tomto případě z původního signálu $f(t)$ jeho kladnou nebo zápornou část.

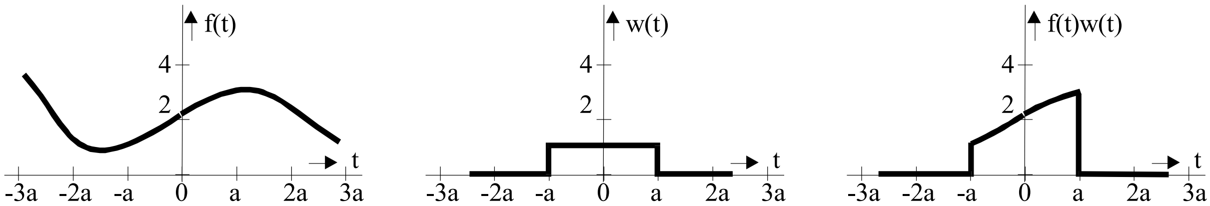


Obr. 2-9: Vyříznutí kladné a záporné části signálu

Bude-li mít signál $h(t)$ tvar pravoúhlého impulsu o jednotkové amplitudě tj.

$$h(t)=\begin{cases} 1 & t\in\langle -a,+a\rangle \\ 0 & t\notin\langle -a,+a\rangle \end{cases} \tag{2.23}$$

dojde k vyříznutí jen té části signálu $f(t)$, která se nachází v intervalu $\langle -a,+a\rangle$. Situace je ukázána na **Obr. 2-10**. Takový tvar signálu $h(t)$ se nazývá ***okno*** (***window***) a označuje se obvykle $w(t)$. V tomto případě se jedná o tzv. pravoúhlé okno. Okna jsou při zpracování signálu často používána a bude o nich ještě pojednáno v dalším textu.



Obr. 2-10: Vyříznutí části signálu pravoúhlým oknem

Vraťme se na tomto místě ještě k jedné vlastnosti Diracovy funkce. Posuňme Diracův impuls doprava o τ sekund. Nechť je dána nějaká spojitá funkce $f(t), t\in(-\infty,+\infty)$. Jelikož

$$f(t)\delta(t-\tau)=f(\tau)\delta(t-\tau)$$

bude integrál

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-\tau)dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)dt=f(\tau)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-\tau)dt=f(\tau).$$

Obdrželi jsme tedy následující výsledek

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-\tau)dt=f(\tau). \tag{2.24}$$

Tento vztah se nazývá ***filtrační vlastnost*** Diracovy funkce. Filtrační proto, že Diracova funkce $\delta(t-\tau)$ vyfiltruje ze všech hodnot funkce $f(t)$ jen hodnotu v bodě $t=\tau$. Tuto vlastnost budeme v dalším často používat.

Součet (rozdíl) signálů. Uvažme dva signály $f(t)$ a $h(t)$ definované pro všechna $t\in(-\infty,+\infty)$. Potom součet (rozdíl) těchto signálů vytváří nový signál $g(t)=f(t)+h(t)$ resp. $g(t)=f(t)-h(t)$.

V následujících příkladech vytvořte požadované signály užitím předchozích operací se signály.

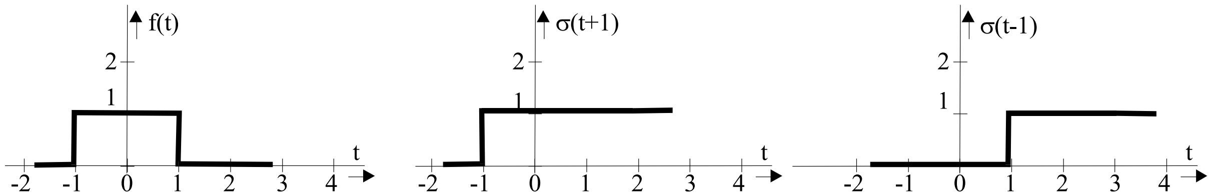
Příklad 2.3: *Manipulace se základními signály 1*

Časovým posunem jednotkového skoku $\sigma(t)$ vytvořte impuls $f(t)$

$$f(t)=\begin{cases}1 & t\in(-1,+1)\\ 0 & t\notin(-1,+1)\end{cases}$$

o jednotkové amplitudě a době trvání 2 sekundy, který je zobrazen v levé části **Obr. 2-11**. Z obrázku je zřejmé, že platí

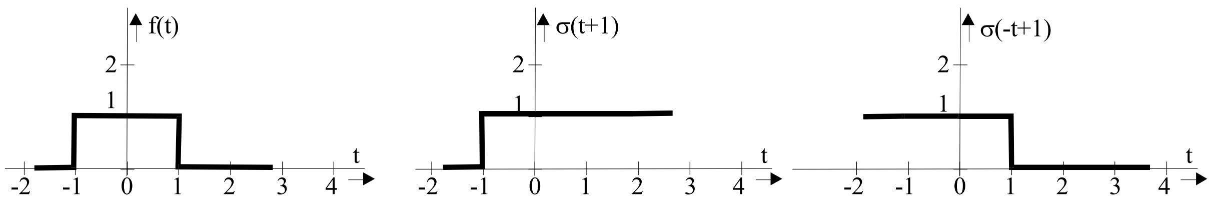
$$f(t)=\sigma(t+1)-\sigma(t-1).$$



Obr. 2-11: Jednotkový impuls a jeho konstrukce pomocí posunutého $\sigma(t)$

Příklad 2.4: *Manipulace se základními signály 2*

S pomocí jednotkového skoku $\sigma(t)$, otočení časové osy a operace násobení vytvořte tentýž signál jako v předchozím příkladu. Z **Obr. 2-12** je zřejmé, že platí $f(t)=\sigma(t+1)\sigma(-t+1)$.



Obr. 2-12: Jednotkový impuls- konstrukce pomocí násobení otočeného a posunutého $\sigma(t)$

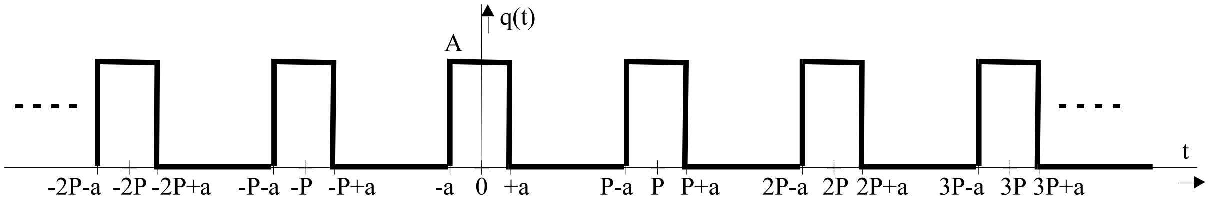
Příklad 2.5: *Manipulace se základními signály 3*

Vytvořte periodický signál $q(t)$ s periodou P, dobou trvání $2a$ a amplitudou A, ukázaný na **Obr. 2-13**. Využijeme výsledku předchozího příkladu. Jednotkový impuls $f(t)$, získaný v předchozím příkladu, vynásobíme amplitudou A a vytvoříme jeho kopii posunutou o $i\ (i=\pm1,\pm2,\pm3,\ldots)$ period P

$$f_i(t)=Af(t-iP)=A\left[\sigma(t+a+iP)-\sigma(t-a+iP)\right].$$

Všechny takto vytvořené kopie potom sečteme s původním impulsem $(i = 0)$ a obdržíme

$$q(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_i(t) = A \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[\sigma(t + a + iP) - \sigma(t - a + iP)\right].$$



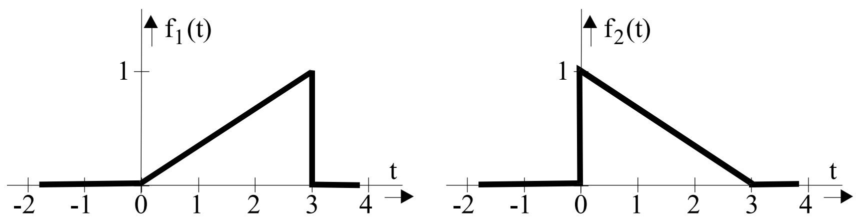
Obr. 2-13: Periodický impuls o amplitudě A, době trvání $2a$ a s periodou P

2.1.4 Shrnutí kapitoly 2.1

1. Signály se spojitým časem (spojité signály) jsou definovány pro všechna $t \in (-\infty, +\infty)$. Samotná funkce $f(t)$ popisující signál ale nemusí být spojitá z matematického hlediska (viz např. jednotkový skok $\sigma(t)$ je funkce, která není spojitá v bodě $t = 0$). Jedna jediná hodnota signálu v izolovaném bodě nenese žádnou informaci. Proto např. hodnotu jednotkového skoku $\sigma(t)$ v bodě $t = 0$ můžeme definovat jako 1nebo 0.
2. Mezi všemi spojitými signály můžeme vytipovat základní signály, ke kterým počítáme jednotkový skok, Diracův impuls, lineárně rostoucí signál, sinusový signál, reálný a komplexní exponenciální signál. Signály mohou být neperiodické (např. jednotkový skok, Diracův impuls, lineárně rostoucí signál, reálný exponenciální signál) nebo periodické (sinusový signál, komplexní exponenciální signál).
3. Se signály lze provádět různé matematické operace- posunutí v čase, otočení časové osy, násobení, sčítání a odčítání. Pomocí těchto operací lze ze základních signálů vytvořit další složitější signály.

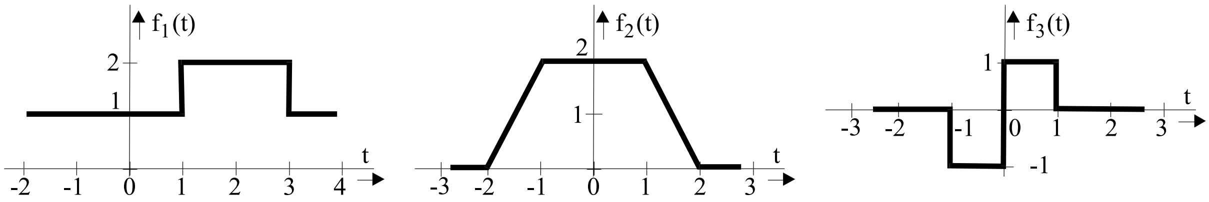
2.1.5 Cvičení ke kapitole 2.1

1. Nechť jsou dány dva signály $f_1(t), f_2(t)$ viz **Obr. 2-14**. Nakreslete signály $f_1(t+1), f_1(t-2), f_1(-t+2)$. Jaký je vztah mezi těmito dvěma signály?



Obr. 2-14: Dva signály k příkladu 1

2. Vyjádřete signály z předchozího příkladu pomocí jednotkového skoku a lineárně narůstajícího signálu.
3. Vyjádřete signály z **Obr. 2-15** pomocí jednotkového skoku a lineárně narůstajícího signálu.



Obr. 2-15: Tři signály k příkladu 3

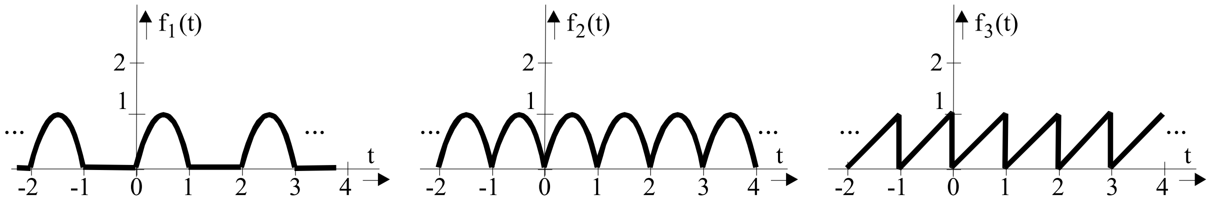
4. Funkce $f(t)$ se nazývá ***sudá (even),*** jestliže $f(t)=f(-t)$. Funkce $f(t)$ se nazývá ***lichá (odd),*** jestliže $f(t)=-f(-t)$. Nechť je dána funkce $f(t)$ a vytvořme dvě nové funkce

$$f_e(t)=\frac{f(t)+f(-t)}{2} \qquad\qquad f_o(t)=\frac{f(t)-f(-t)}{2}.$$

   Dokažte, že $f_e(t)$ je sudou funkcí a $f_o(t)$ je lichou funkcí. Dále dokažte, že každou funkci $f(t)$ je možno vyjádřit jako součet její sudé a liché části tj. $f(t)=f_e(t)+f_o(t)$.

5. Je funkce $\cos\omega_0 t$ sudou nebo lichou funkcí? Jaká je její základní perioda? Je funkce $|\sin\omega_0 t|$ sudou nebo lichou funkcí? Jaká je její základní perioda?

6. Na **Obr. 2-16** jsou ukázány tři periodické signály. Jednocestně usměrněné harmonické napětí (vlevo), dvoucestně usměrněné harmonické napětí (uprostřed) a pilovitý průběh (vpravo). Vyjádřete je pomocí základních signálů.



Obr. 2-16: Příklady periodických signálů

7. Načrtněte funkce $f_1(t)=e^{-0,2t}$, $f_2(t)=\cos 4t$, $f_3(t)=f_1(t)f_2(t)$. Je funkce $f_3(t)$ omezená v čase? Diskutujte proč. Kterou hodnotu času lze u této funkce považovat za reálné „nekonečno“ (kdy funkční hodnota klesne na 1% své počáteční hodnoty).

2.1.6 Cvičení v MATLABu ke kapitole 2.1

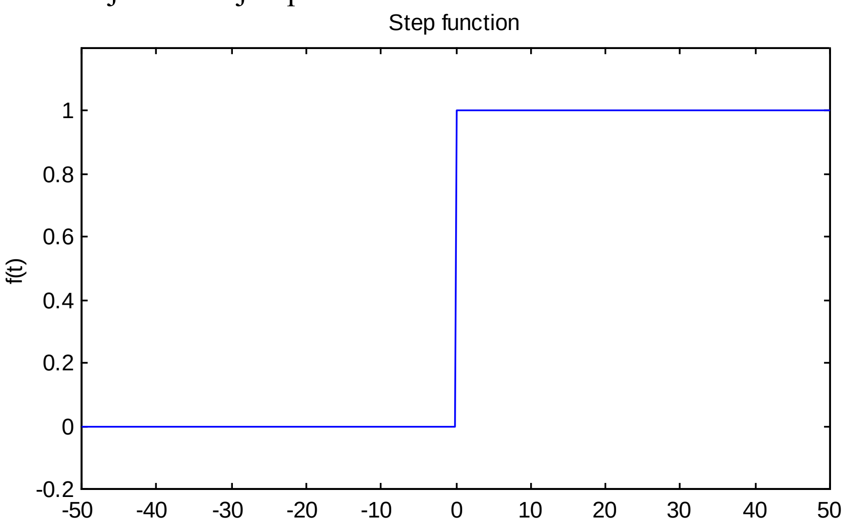
Zabýváme se signály se spojitým časem (zkráceně nazývané spojité signály). Takový signál je z matematického hlediska definován pro všechny časové okamžiky reálné osy času tj. pro všechna reálná čísla z této osy. Takový signál v číslicovém počítači nelze reprezentovat. V číslicovém počítači lze signál reprezentovat jen jako konečnou posloupnost hodnot signálu v jistých časových okamžicích (obvykle ekvidistantních). Osa času je tedy diskrétní a signál je v těchto časových okamžicích vzorkován, a to po nějakou konečnou dobu P. Počet vzorků za tuto dobu označme N. Předbíháme tak ve výkladu o signálech (vzorkování bude náplní následujících kapitol), ale bez toho by nebylo možno realizovat úlohy v MATLABu.
Vytvořme diskrétní časovou osu pomocí příkazů MATLAB:

```
P=100;                    % time interval [sec]
N=512;                    % number of samples
t=linspace(-P/2,P/2,N);   % discrete time axis
```

Vytvořme signál typu jednotkový skok $\sigma(t)$ a zobrazme jej:

```
name='Step function';
ft(1:N)=0;
ft((round(N/2)+1):N)=1;
plot(t,ft)
axis([-P/2 P/2 -0.2 1.2])
title(name);
xlabel('t');
ylabel('f(t)');
```

Výsledkem je následující průběh.



Tento signál budeme v dalším často používat. Proto jej vytvoříme jako MATLABovskou funkci s tím, že do ní ještě zavedeme časový posuv o a sekund. Budeme mít tedy naprogramovánu funkci $\sigma(t+a)$ tj. posunutý jednotkový skok:

```
% function StepFunction(t,a)
% t= time axis [sec]
% a= shift time [sec] (a<=max(t), a>=min(t))

function [ft]=StepFunction(t,a)
P=max(t)-min(t);                  % observation time [sec]
N=length(t);                      % number of samples [-]
if abs(a)>P/2                     % limit of shift time [sec]
   a=sign(a)*P/2;
end;
ft=t;
ft(1:N)=0;
n=sign(a)*round(abs(a)*(N-1)/P); % a is real, n must be integer
ft((round(N/2)+1-n):N)=1;
return;
```

Tento program uložte pod názvem „StepFunction.m“. První tři řádky jsou komentář, který lze využít k popisu chování funkce a významu jednotlivých parametrů. Napíšete-li do příkazového okna MATLAB následující text

function StepFunction(t,a)
 t= time axis [sec]

a= shift time [sec] (a<=max(t), a>=min(t))

Nyní budeme funkci StepFunction.m volat. Toto volání si také vytvoříme jako funkci kterou nazveme StepFunctionPlot.m. Budeme předpokládat, že naše signály reprezentují časový průběh napětí ve voltech. $[V]$. Bude

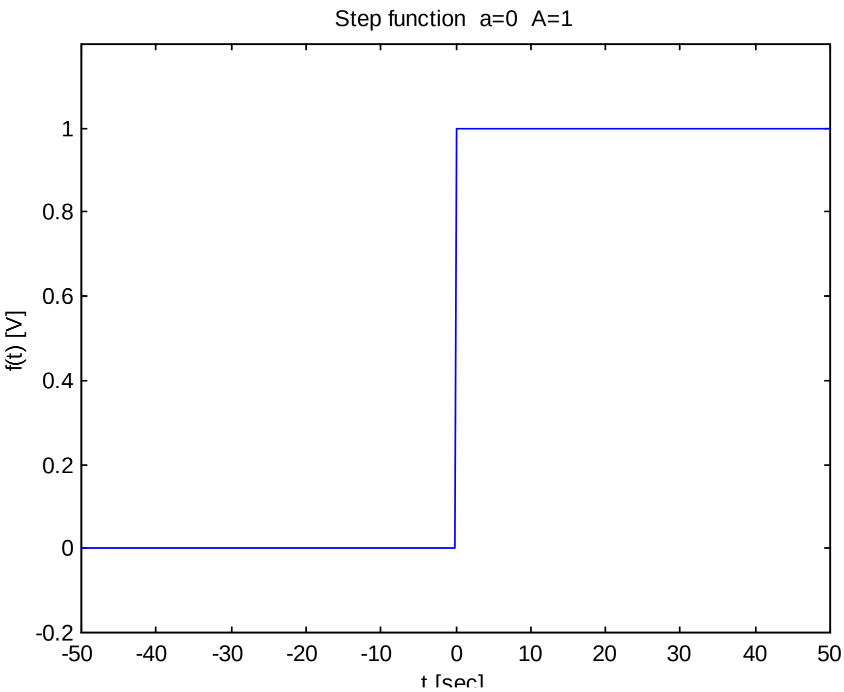
```
% function StepFunctionPlot(a,A)
% a= time shift [sec]
% A= amplitude [V]

function StepFunctionPlot(a,A);

P=100;                  % time interval [sec]
N=512;                  % number of samples [-]
t=linspace(-P/2,P/2,N); % discrete time axis

name='Step function';
ft=A*StepFunction(t,a);
plot(t,ft)
axis([-P/2 P/2 -0.2*A 1.2*A])
title([name,'  a='num2str(a),'  A=',num2str(A)]);
xlabel('t [sec]');
ylabel('f(t) [V]');
return
```

a po zavolání StepFunctionPlot(0,1) obdržíme předchozí obrázek. Volejte tuto funkci s různou hodnotou parametru a případně A a sledujte generované obrázky.



Nyní s pomocí funkce „StepFunction.m“ vytvoříme jednotkový impuls o šířce $2a$ a středu b s využitím operace posunu v čase a rozdílu jednotkových skoků. Opět naprogramujeme jako funkci pojmenovanou UnitImpuls.m neboť ji budeme v dalším používat. Bude:

```
% function UnitImpuls(t,a,b)
```

```
% t=time axis [sec]
% a= half width of impuls [sec]
% b= centre of impuls [sec]

function [ft]= UnitImpuls(t,a,b);
P=max(t)-min(t);
if abs(b)>P/2                   % limit of impuls center
   b=sign(b)*P/2;
end;
ft=StepFunction(t,b+a)-StepFunction(t,b-a);
return
```

Volání této funkce naprogramujte opět jako funkci s názvem UnitImpulsPlot.m. Bude

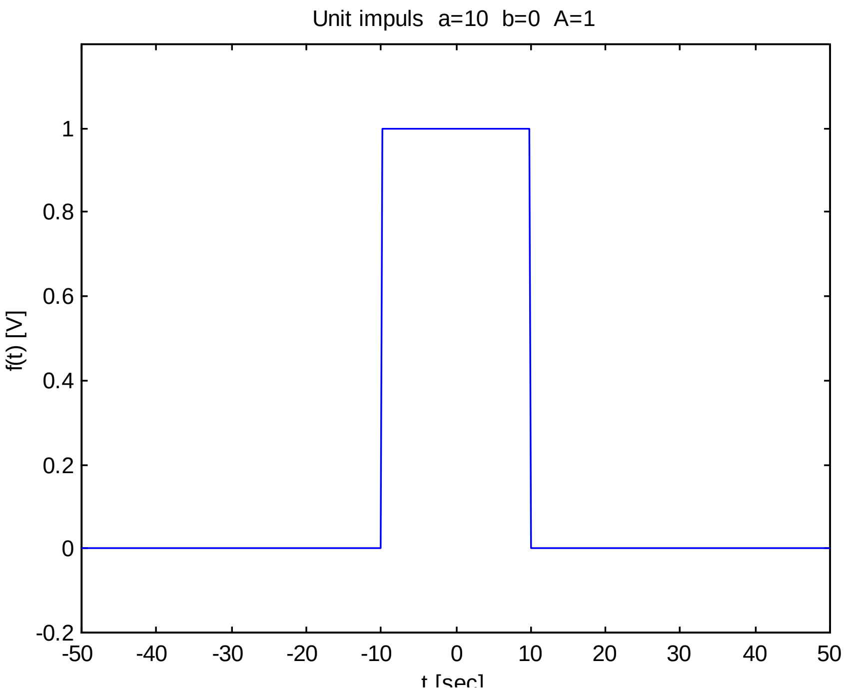
```
% function UnitImpulsPlot(a,b,A)
% a= half width of impuls [sec]
% b= center of impuls [sec]
% A= amplitude of impuls [V]

function UnitImpulsPlot(a,b,A);
P=100;                          % time interval [sec]
N=512;                          % number of samples
t=linspace(-P/2,P/2,N);         % discrete time axis

name=('Unit impuls');
ft=A*UnitImpuls(t,a,b);
plot(t,ft)
axis([-P/2 P/2 -0.2*A 1.2*A])

title([name,'  a='num2str(a),'  b=',num2str(b),'  A=',num2str(A)]);
xlabel('t [sec]');
ylabel('f(t) [V]');
return
```

a po zavolání UnitImpulsPlot(10,0,1) obdržíte následující průběh. Volejte funkci s různými parametry a sledujte výsledný obrázek.

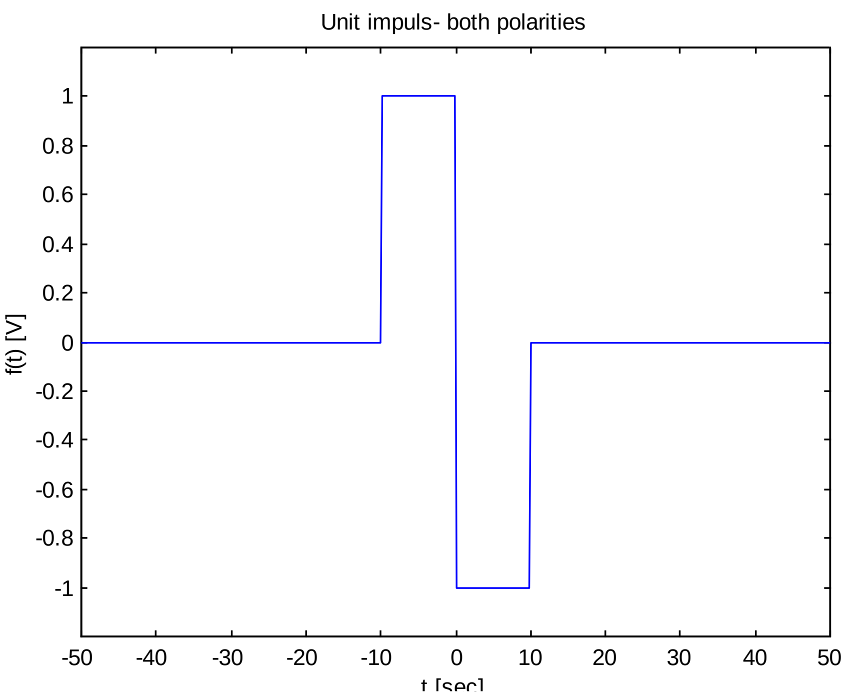


Poznámka: Tento impuls můžeme také vytvořit pomocí operace otočení časové osy (flipping) a součinu takto:

```
name='Unit impuls(use flip)'
a=10;
A=1;
ftp=A*StepFunction(t,a);       % shifted unit step
ftn=fliplr(ftp);               % flipping of ftp
ft=ftp.*ftn;                   % multiplication element-by-element
plot(t,ft)
axis([-P/2 P/2 -0.2*A 1.2*A])
title(name)
xlabel('t [sec]');
ylabel('f(t) [V]');
```

Vytvořme pomocí jednotkového skoku impuls o jednotkové amplitudě mající obě polarity. Bude:

```
name='Unit impuls- both polarities'
a=10;
A=1;
ft=A*StepFunction(t,a)-2*A*StepFunction(t,0)+A*StepFunction(t,-a);
plot(t,ft)
axis([-P/2 P/2 -1.2*A 1.2*A])
title(name)
xlabel('t');
ylabel('f(t)');
```

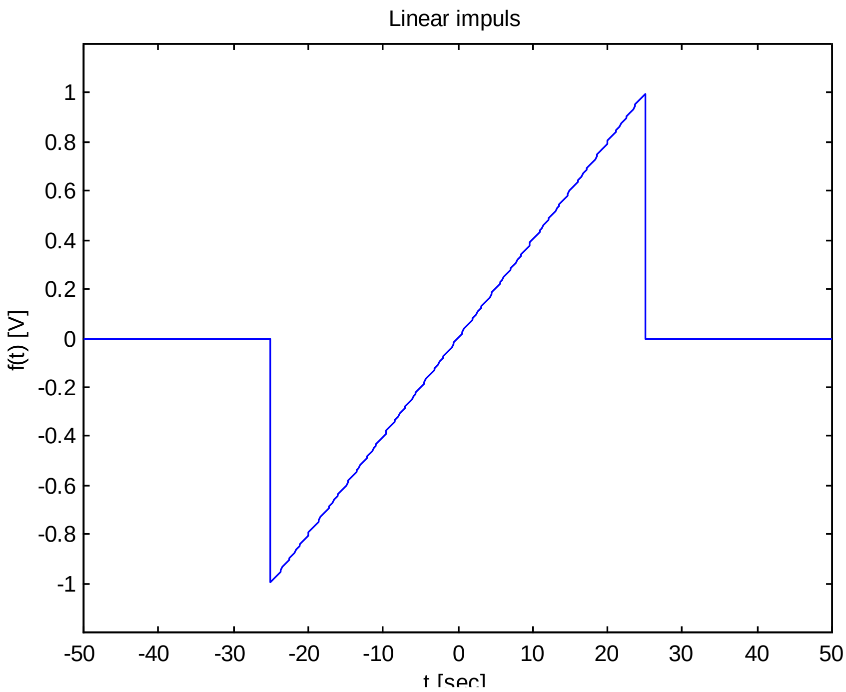


Vytvořme lineární signál o délce trvání $2a$. Bude:

```
name='Linear impuls'
a=25;
A=1;
```

```
ft=(A/a)*t;
ft=ft.*UnitImpuls(t,a,0);
plot(t,ft);
axis([-P/2 P/2 -1.2*A 1.2*A])
title(name)
xlabel('t [sec]');
ylabel('f(t) [V]');
```

a je ukázán na následujícím obrázku.



Dalším užitečným signálem, který si vytvoříme jako MATLABovskou funkci bude trojúhelníkový impuls, který nazveme TriangleImpuls.m a naprogramujeme ho opět jako funkci. Bude

```
% function TriangleImpuls(t,a,b)
% t= time axis [sec]
% a= half width of impuls [sec]
% b= centre of impuls [sec]

function [ft] = TriangleImpuls(t,a,b);
P=max(t)-min(t);
if abs(b)>P/2                % limit of impuls center
   b=sign(b)*P/2;
end;

ftp=(1/a)*(t+b+a);
ftp=ftp.*(StepFunction(t,a+b)-StepFunction(t,b));
ftn=(1/a)*(-t-b+a);
ftn=ftn.*(StepFunction(t,b)-StepFunction(t,-a+b));
ft=ftp+ftn;
return
```

Jeho volání opět naprogramujeme jako funkci

```
% function TriangleImpulsPlot(a,b,A)
```

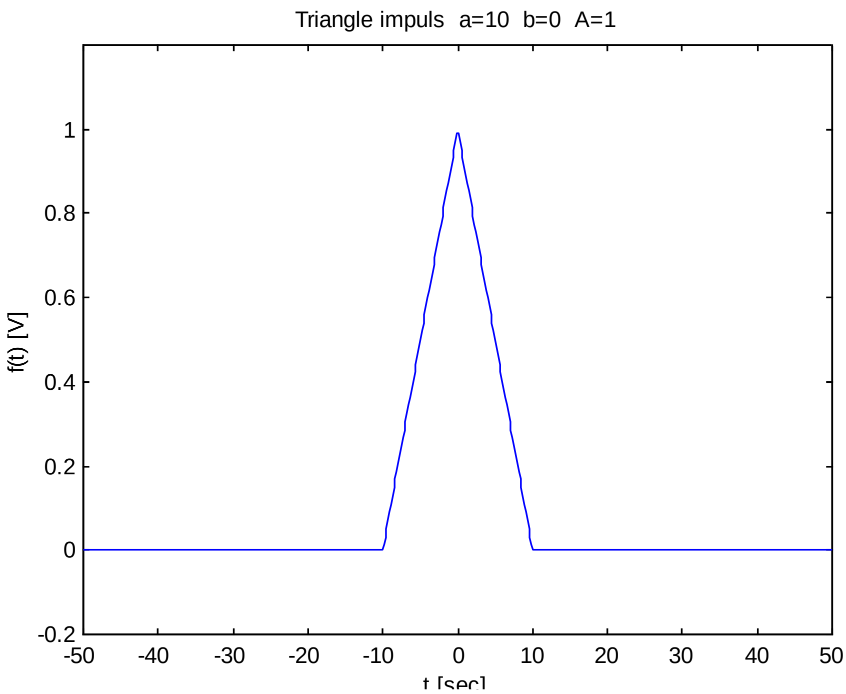
```
% a= half width of impuls [sec]
% b= centre of impuls [sec]
% A= amplitude of impuls [V]

function TriangleImpulsPlot(a,b,A)

P=100;                    % time interval [sec]
N=512;                    % number of samples [-]
t=linspace(-P/2,P/2,N); % discrete time axis

name=('Triangle impuls');
ft=A*TriangleImpuls(t,a,b);
plot(t,ft)
axis([-P/2 P/2 -0.2*A 1.2*A])
title([name,'  a='num2str(a),'  b=',num2str(b),'  A=',num2str(A)]);
xlabel('t [sec]');
ylabel('f(t) [V]');
return
```

a po zavolání TriangleImpulsPlot(10,0,1) je výsledek na následujícím obrázku. Volejte funkci s různými parametry a sledujte výsledný obrázek.



Ještě jeden signál, a to tlumený kosinusový signál si vytvoříme jako funkci DampedCosineImpuls.m. Bude

```
% function DampedCosineImpuls(t,a,b,w0)
% t= time axis [sec]
% a= damping parameter [1/sec]
% b= centre of impuls [sec]
% w0= cosine frequency [rad/sec]

function [ft] = DampedCosineImpuls(t,a,b,w0);
P=max(t)-min(t);
if abs(b)>P/2              % limit of impuls centre
   b=sign(b)*P/2;
```

```
end;

ft=cos(w0*(t+b)).*exp(-a*abs(t+b));
return;
```

Volání této funkce opět naprogramujeme jako funkci DampedCosineImpulsPlot.m

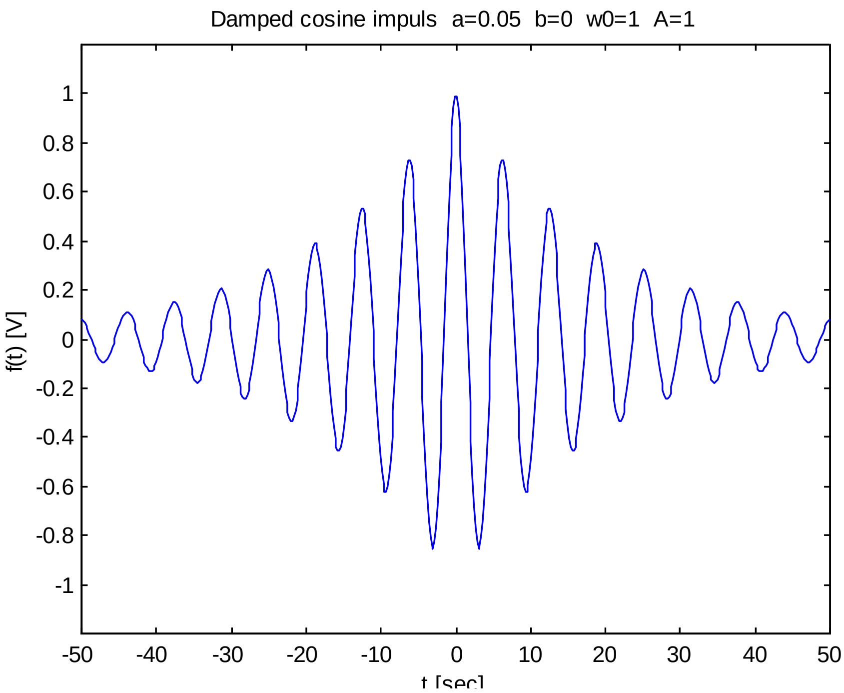
```
% function DumpedCosineImpulsPlot(a,b,w0,A);
% a= damping parameter [1/sec]
% b= centre of impuls [sec]
% w0= frequency of cosine [rad/sec]
% A= amplitude of impuls [V]

function DumpedCosineImpulsPlot(a,b,w0,A);

P=100;                    % time interval [sec]
N=512;                    % number of samples [-]
t=linspace(-P/2,P/2,N);   % discrete time axis

name=('Damped cosine impuls');
ft=A*DampedCosineImpuls(t,a,b,w0);
plot(t,ft)
axis([-P/2 P/2 -1.2*A 1.2*A])
title([name,'     a='num2str(a),'     b='num2str(b),'     w0=',num2str(w0),'
A=',num2str(A)]);
xlabel('t [sec]');
ylabel('f(t) [V]');
return;
```

Volání této funkce DampedCosineImpulsPlot(0.05,0,1,1) generuje následující obrázek.



Experimentujte s parametry volání a sledujte výsledek. Prověřte např., že pro $a = 0$ je generována netlumená kosinusovka nebo pro $w0 = 0$ je generován exponenciální signál, nebo pro $a < 0$ je generován narůstající kosinový signál.