



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ENERGETICKÝ ÚSTAV

ENERGY INSTITUTE

# MODELOVÁNÍ TLAKOVÝCH PULSACÍ V KAPALINĚ S VLIVEM DRUHÉ VISKOZITY

MODELLED PRESSURE PULSATIONS IN A FLUID WITH THE INFLUENCE OF A SECOND VISCOSITY

## DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

## AUTOR PRÁCE

AUTHOR

**Bc. Vladislav Dzjamko**

## VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

**doc. Ing. Vladimír Habán, Ph.D.**

**BRNO 2024**



# Zadání diplomové práce

Ústav: Energetický ústav  
Student: **Bc. Vladislav Dzjamko**  
Studijní program: Energetické a termofluidní inženýrství  
Studijní obor: Fluidní inženýrství  
Vedoucí práce: **doc. Ing. Vladimír Habán, Ph.D.**  
Akademický rok: 2023/24

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

## Modelování tlakových pulsací v kapalině s vlivem druhé viskozity

### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Záměrem práce je stanovení druhé viskozity kapaliny pomocí měření tlakových pulsací v trubici. Primárně by se mělo jednat o měření vynucených tlakových pulsací pomocí budiče. Dle možností laboratoře budou provedeny experimenty na různých kapalinách. Dalším úkolem diplomové práce bude sestavení vlastního modelu tlakových pulsací s vlivem druhé viskozity a porovnání výsledků tohoto modelu s experimentálně stanovenými daty. V diplomové práci budou uvedeny i výsledky získané pomocí „Ansysu“ v modulu „Acoustic“, kde je možno provádět výpočty s vlivem druhé viskozity.

### Cíle diplomové práce:

1. Navržení a provedení experimentu pro stanovení druhé viskozity zvolené kapaliny.
2. Vyhodnocení druhé viskozity a rychlosti zvuku v kapalině.
3. Vytvoření vlastního analytického modelu umožňující modelovat tlakové pulsace v kapalině s vlivem druhé viskozity.
4. Porovnání výsledků vlastního modelu s výsledky dostupných v komerčním softwaru „ANSYS Acoustics“ a s výsledky experimentu.

### Seznam doporučené literatury:

HABÁN, V.: Tlumení tlakových a průtokových pulzací: teze disertační práce. V Brně: Vysoké učení technické, 2001. Vědecké spisy Vysokého učení technického v Brně. ISBN 80-214-1905-9.

LIN, Jeffrey, Carlo SCALO a Lambertus HESSELINK. Bulk viscosity model for nearequilibrium acoustic wave attenuation [online]. July 20, 2017. Dostupné z: <https://arxiv.org/pdf/1707.05876.pdf>

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2023/24

V Brně, dne

L. S.

---

doc. Ing. Jiří Pospíšil, Ph.D.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jiří Hlinka, Ph.D.  
děkan fakulty

## **ABSTRAKT**

Práce má za cíl stanovit hodnotu rychlosti zvuku a druhé dynamické viskozity tekutiny s využitím numerické optimalizace analytického modelu. Teoreticky lze rychlost zvuku a druhou viskozitu stanovit ze tří naměřených tlakových průběhů v čase po délce trubice, rychlost zvuku se přitom dohledává pro určení správnosti výsledku. Práce je rozdělena do sedmi navazujících kapitol. První dvě definují veškeré potřebné pojmy a použitý 1D analytický model. Následující kapitoly se věnují návrhu experimentu, vyhodnocení dat a numerické optimalizaci hledaných parametrů ve frekvenční doméně. Rozsah měřených frekvencí se pohyboval v intervalu 1 kHz až 20,59 kHz. V práci je využita Einsteinova konvence. Všechny grafy spojené s analytickým modelem a vyhodnocením výsledků jsou vytvořené v programu Matlab. Pro vyhodnocení rychlosti zvuku a druhé dynamické viskozity jsou využity optimalizační funkce `fminsearch` a `lsqnonlin`, funkce `fminsearch` však velikost druhé viskozity nadhodnocuje. Součástí práce je výpočet úlohy pomocí programu Ansys a následné porovnání všech výsledků.

### **Klíčová slova**

Tlakové pulsace, rychlost zvuku, druhá viskozita, objemová viskozita, Fourierova transformace, FFT, podmínka koherence

## **ABSTRACT**

The aim of this thesis is to determine the value of the speed of sound and the second dynamic viscosity of the fluid using numerical optimization of analytical model. Theoretically, the speed of sound and the second viscosity can be determined from three measured pressure waveforms in time along the length of the tube, while the speed of sound is traced to determine the correctness of the result. The thesis is divided into seven successive chapters. The first two define all the necessary concepts and the 1D analytical model used. The following chapters deal with the design of the experiment, data evaluation and numerical optimization of the search parameters in the frequency domain. The range of measured frequencies was from 1 kHz to 20,59 kHz. Einstein's notation is used in this thesis. All graphs associated with the analytical model and the evaluation of the results are created in Matlab. The optimization functions `fminsearch` and `lsqnonlin` are used to evaluate the speed of sound and the second viscosity, however the `fminsearch` function overestimates the magnitude of the second viscosity. The thesis includes the calculation of the problem using Ansys and the subsequent comparison of all results.

### **Key words**

Pressure pulsations, speed of sound, second viscosity, bulk viscosity, Fourier transform, FFT, coherent sampling

## **BIBLIOGRAFICKÁ CITACE**

DZJAMKO, Vladislav. *Modelování tlakových pulsací v kapalině s vlivem druhé viskozity*. Brno, 2024. Dostupné také z: <https://www.vut.cz/studenti/zav-prace/detail/158177>. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Energetický ústav. Vedoucí práce doc. Ing. Vladimír Habán, Ph.D.

## **PROHLÁŠENÍ**

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma **Modelování tlakových pulsací v kapalině s vlivem druhé viskozity** vypracoval samostatně s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu, který tvoří přílohu této práce.

.....  
Datum

.....  
*Vladislav Dzjamko*

## **PODĚKOVÁNÍ**

Rád bych poděkoval vedoucímu diplomové práce doc. Ing. Vladimíru Habánovi, Ph.D. za veškerou pomoc a také jeho čas, který mi věnoval.

Dále bych rád poděkoval Ing. Martinu Hudcovi, Ph.D., Bc. Matěji Ostrezimu a Bronislavu Kusému a za pomoc při realizaci experimentu.

## OBSAH

ÚVOD.....	11
1 Základní pojmy .....	12
1.1 Pohybová rovnice tekutiny, Tenzor napětí .....	12
1.1.1 První viskozita .....	15
1.1.2 Druhá viskozita .....	15
1.1.3 Objemová viskozita .....	16
1.2 Rovnice kontinuity tekutiny .....	18
1.3 Voigtův model materiálu .....	20
1.4 Rovnice kontinuity tekutiny s uvážením trubice .....	21
1.5 Obecný Hookův zákon .....	22
1.6 Válcové těleso.....	23
1.7 Fourierova transformace .....	25
1.7.1 Diskrétní Fourierova transformace .....	26
1.7.2 Podmínka koherence .....	27
2 Analytický model.....	29
2.1 Deformace trubice .....	29
2.2 Úprava rovnice kontinuity tekutiny .....	30
2.3 Vlnová rovnice.....	31
2.4 Řešení vlnové rovnice.....	32
2.5 Stanovení přenosové matice .....	35
2.6 Ukázkové řešení vzorových okrajových podmínek.....	36
3 Experiment.....	44
3.1 Experimentální trať.....	45
3.1.1 Seznam použité techniky pro experiment .....	47
3.1.2 Sestava trubice .....	48
3.2 Průběh měření.....	50
3.2.1 Naměřená data.....	50
3.3 Stanovení poměrného útlumu trubice.....	52
3.3.1 Stanovení tlumení trubice .....	56
4 Vyhodnocení výsledků.....	57
4.1 Řešení s využitím okrajových podmínek z výsledku experimentu .....	57
4.2 Řešení s využitím okrajové podmínky z výsledku experimentu .....	59
4.3 Hledání optimálních dvojic parametrů .....	60
4.4 Ověření výsledku .....	65
4.5 Hledání koeficientu druhé dynamické viskozity .....	67
5 Numerické řešení .....	69
5.1 Harmonic Acoustics.....	69
5.2 Geometrie, síť, okrajové podmínky.....	71
5.3 Nastavení úlohy .....	74
6 Porovnání výsledků.....	76
7 Diskuze .....	78

ZÁVĚR .....	82
SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ .....	83
SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK .....	86
PŘÍLOHY .....	90

## ÚVOD

Tlakové pulsace mohou vznikat ve všech hydraulických systémech, může se jednat o ojedinělý nárůst velikosti tlaku při hydraulickém rázu, nebo o vysokofrekvenční pulsy z rotor-stator interakce. Pro jejich matematické modelování, je potřeba znát různé materiálové parametry charakterizující konkrétní tekutinu. Vedle běžně známých vlastností, jako je hustota nebo rychlost zvuku, obsahuje tekutina i parametry související s vnitřním útlumem a disipací energie.

Disipativní členy v izotropní tekutině jsou dva, první a druhá viskozita. První viskozita se obecně projevuje při libovolné tvarové změně. Druhá viskozita pak souvisí s objemovou změnou a způsobuje útlum tlakových pulsů, přičemž se veškerá tato utlumená energie mění v teplo. Útlum vlivem druhé viskozity se projevuje jak na délce, tak i v čase. Z dřívějších pozorování se ukazuje, že druhá viskozita je frekvenčně závislá, z tlakového průběhu po délce je možné stanovit právě její frekvenční závislost. Časová závislost druhé viskozity je kvůli její definici a souvislosti s molekulárními pochody při návratu do rovnovážného stavu velmi obtížná a do teď neznámá.

Práce je zaměřena na stanovení druhé viskozity vody s využitím modelování harmonických vysokofrekvenčních pulsací v kapalině. Metoda řešení úlohy vychází ze soustavy dvou diferenciálních rovnic, pohybové rovnice a rovnice kontinuity rozšířené o vliv trubice, které se pro případ jednorozměrné úlohy zkombinují do jedné vlnové rovnice. Jelikož je problém lineární, je řešení známé a určitelné. Z analytického průběhu tlakové funkce po délce lze poté numerickou optimalizací stanovit frekvenční závislost druhé viskozity.

Pro určení druhé viskozity je potřeba znát alespoň tři tlakové průběhy po délce trubice. Každý naměřený časový průběh se vyjádří, pomocí Fourierovy transformace, jedním komplexním číslem ve frekvenční doméně a všechny se současně použijí jako vstup do numerické optimalizace. V této práci je vyhodnocení nejprve provedeno zvlášť pro jednotlivé frekvence a následně přes všechny frekvence současně. Prvotní vyhodnocení mělo za cíl nezaujatě stanovit frekvenční závislost druhé viskozity, ta se ukázala pravděpodobně jako hyperbolická.

Zmíněný postup určení druhé viskozity, který bude uveden podrobněji, je platný pouze pro newtonovskou homogenní izotropní kapalinu s předem známou hodnotou hustoty.

## 1 ZÁKLADNÍ POJMY

Tekutina, jako objekt zájmu, je tvořena atomy a molekulami. Tyto stavební částice jsou v neustálém pohybu a jejich chování přímo určuje dané vlastnosti látky. Částice však tvoří diskrétní strukturu a popis takového prostoru by byl značně komplikovaný. Je proto výhodnější uvažovat tekutinu jako spojitou oblast – kontinuum.

Zavedení kontinua není bezpodmínečné, teorii lze použít při splnění určité podmínky. Předpoklad zavedení kontinua je validní v případě, kdy látka ve vymezeném, dostatečně velkém prostoru obsahuje takové množství částic, při kterém není příliš řídká. Podmínka je určena Knudsenovým číslem při splnění hodnoty  $< 0,001$  [1].

### 1.1 POHYBOVÁ ROVNICE TEKUTINY, TENZOR NAPĚTÍ

Podle [2] mohou na kontinuum obecně působit síly objemové  $FV$  (1.1) a plošné  $FA$  (1.2).

$$dFV_i = \rho g_i dV \quad (1.1)$$

$$dFA_i = \tau_{ij} n_j dA \quad (1.2)$$

Kde  $V$  je prostorová doména tekutiny – objem,  $\rho$  je hustota tekutiny,  $g_i$  je vektor zrychlení objemových sil,  $\tau_{ij}$  je tenzor napětí,  $n_j$  je normálový vektor plochy  $A$ .

Plošné síly mají vliv na povrchu kontinua, ve stykové ploše tekutiny s okolním prostředím. Objemové síly působí na všechny elementy kontinua v celém vymezeném prostoru. Tyto síly působí většinou na celý objem tekutiny, Jedná se o síly od gravitačního pole, síly magnetické nebo elektrostatické, odstředivé síly vznikající při rotaci.

V případě pohybu tekutiny, se musí dále uvažovat vliv setrvačných účinků definované (1.3).

$$dFR_i = -\rho a_i dV \quad (1.3)$$

Kde  $a_i$  je vektor zrychlení setrvačných sil. Všechny tyto síly působící na kontinuum vyvolávají v tekutině stav napjatosti, ten poté charakterizuje přímo tenzor napětí. K silové rovnováze dojde v případě, kdy suma všech sil působících na elementární objem tekutiny je nulová.

$$dFV_i + dFA_i + dFR_i = 0 \quad (1.4)$$

Po dosazení do rovnice (1.4) vznikne obecná pohybová rovnice reálné tekutiny (1.5).

$$\frac{Dv_i}{Dt} = g_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (1.5)$$

Kde parciální derivace podle  $x_j$  vyjadřuje směr, ve kterém se derivuje, přičemž oba indexy  $j; i$  mohou nabývat hodnot 1, 2, 3.

Vztah (1.5) představuje obecnou pohybovou rovnici tekutiny. Jedná se o silovou rovnováhu všech sil, které můžou na tekutinu působit. Vektor  $g_i$  obecně obsahuje všechny příspěvky od polí, které mohou na tekutinu působit (magnetické, elektrické ...), ve většině případů se v něm však vyskytuje pouze příspěvek od gravitačního zrychlení.

Levá strana představuje zrychlení tekutiny, je to přímo vektor  $a_i$ . Jedná se o substanciální derivaci vektorového pole rychlostí podle času dle Eulerova přístupu.

Eulerův přístup pracuje s vektorovým polem rychlostí  $v_i$  popisující tekutinu v každém jejím bodě pomocí čtyř proměnných – tří prostorových a jedné časové, takže platí.

$$v_i = v_i(x_1, x_2, x_3, t)$$

Na tekutinu je nahlíženo jako na celek bez vazby na jednotlivé částice. Levá strana (1.5) tedy přímo popisuje zrychlení v celé tekutině, obsahuje jak lokální tak konvektivní derivaci a je možno psát.

$$a_i \equiv \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \quad (1.6)$$

Substanciální derivace podle (1.6) je obecně platná pro libovolnou skalární funkci, která je definovaná pomocí Eulerových proměnných. Její fyzikální význam je přímo zřejmý z definice, popisuje změnu skalární funkce v čase při její současné změně během pohybu v prostoru.

Pravá strana obsahuje vedle vektoru  $g_i$  také člen s tenzorem napětí  $\tau_{ij}$ . Tenzor napětí přímo popisuje stav napjatosti v každém bodě tekutiny. Charakterizuje silové působení uvnitř tekutiny vyvolané vnějšími vlivy, které na tekutinu působí. Také popisuje síly, uvnitř objemu způsobené makroskopickým pohybem tekutiny, vznikající třením při rozdílných rychlostech napříč doménou, například při tečení. Pro reálnou viskózní tekutinu vykazující izotropní vlastnosti je tenzor napětí dán vztahem.

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij} + \Pi_{ij} \quad (1.7)$$

Kde  $\sigma_{ij}$  je tenzor vratných napětí,  $\Pi_{ij}$  je tenzor nevratných napětí. Jedná se tedy o součet dvou příspěvků – od tlaku v ideální (neviskózní) tekutině a od viskozity v reálně tekutině.

Tenzor vratných napětí  $\sigma_{ij}$  je platný pro ideální i reálnou tekutinu. Vyjadřuje možné rozložení napětí v tekutině v klidu (všestranný tlak). Pro tekutinu v klidu vymizí všechny příspěvky od gradientů rychlosti, ty se vyskytují ve všech složkách  $\tau_{ij}$ . Toto platí pro libovolnou kartézskou soustavu souřadnic. Pak ale lze  $\sigma_{ij}$  rozepsat do tvaru, kde si jsou všechna normálová napětí rovna a osy tenzoru  $\sigma_{ij}$  jsou osami hlavními (složky mimo diagonálu tenzoru jsou nulové) [2].

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} \quad (1.8)$$

Kde  $p$  je hydrostatický tlak,  $\delta_{ij}$  je Kroneckerovo delta, tenzor pro který platí  $\delta_{ij} = 1$  při  $i = j$ ;  $\delta_{ij} = 0$  při  $i \neq j$ . Záporné znaménko značí směr působení tlaku dovnitř tekutiny.

Tenzor nevratných napětí je platný pouze pro reálnou tekutinu, charakterizuje odpor, který tekutina klade vzájemnému pohybu uvnitř svého objemu. V obecném případě je tenzor dán podle zobecněného Hookova zákona.

$$\Pi_{ij} = C_{ijkl} \cdot \dot{e}_{kl}$$

Kde  $C_{ijkl}$  je tenzor čtvrtého řádu s 81 materiálovými koeficienty,  $\dot{e}_{kl}$  je následně popsáno v gradientu rychlosti.

Gradient rychlosti je možné vždy rozložit na symetrickou a antisymetrickou část dle (1.9).

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \dot{e}_{ij} + \dot{\omega}_{ij} \quad (1.9)$$

Kde  $\dot{e}_{ij}$  je tenzor rychlosti deformace;  $\dot{\omega}_{ij}$  tenzor rychlosti rotace, tenzory jsou definované jako.

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.10)$$

$$\dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.11)$$

Tenzor  $\Pi_{ij}$  musí být symetrický, aby byla splněna podmínka rovnováhy tekutiny. Kvůli symetričnosti se v  $\Pi_{ij}$  vyskytuje pouze symetrická část  $\dot{e}_{ij}$ , antisymetrická část  $\dot{\omega}_{ij}$  se neuplatní. Předpokládá se, že tenzor  $\Pi_{ij}$  je lineární kombinací derivací složek rychlosti podle souřadnic, tento předpoklad je oprávněný pro případy, kdy gradient rychlosti nebude příliš velký.

Z podmínky symetričnosti obou tenzorů vyplývá to, že se obecně 81 materiálových koeficientů redukuje na celkem 21 nezávislých koeficientů (tehdy je i  $C_{ijkl}$  symetrický), toto však platí pouze pro anizotropní látku, která má v různých směrech různé vlastnosti.

Pro izotropní látku se počet 21 koeficientů redukuje na celkový počet **dvou**. Tyto dva materiálové koeficienty představují viskozitu v tekutině. Tenzor  $\Pi_{ij}$  je pak možné psát ve tvaru.

$$\Pi_{ij} = b \delta_{ij} \frac{\partial v_m}{\partial x_m} + 2 \eta \dot{e}_{ij} \quad (1.12)$$

Kde  $\eta$  je první dynamická viskozita,  $b$  je druhá dynamická viskozita, koeficienty jsou vzájemně nezávislé. Celkový tenzor napětí je pak dosazením do (1.7) možné rozepsat jako.

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + b \delta_{ij} \frac{\partial v_m}{\partial x_m} + 2 \eta \dot{e}_{ij} \quad (1.13)$$

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + b \delta_{ij} \frac{\partial v_m}{\partial x_m} + \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

Po dosazení všech uvedených vztahů do (1.5) se získá *obecná pohybová rovnice pro reálnou tekutinu* (1.14) platná v každém bodě kontinua, která uvažuje viskozity  $b$  a  $\eta$  jako funkce.

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( b \frac{\partial v_m}{\partial x_m} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right\} \quad (1.14)$$

Při předpokladu konstantních obou viskozit, dojde ke zjednodušení rovnice na tvar.

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{b}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_m}{\partial x_i \partial x_m} \right) + \frac{\eta}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) \quad (1.15)$$

### 1.1.1 PRVNÍ VISKOZITA

První dynamická viskozita  $\eta$  vyjadřuje odpor tekutiny proti změně tvaru. Uplatňuje se pouze v případě, kdy tekutina jako celek není v rovnovážném stavu. Jejím vlivem dochází k disipaci energie uvnitř tekutiny při pohybu látky jako celku (tzn. tečení), kdy různé části tekutiny mají různou makroskopickou rychlost. Při tomto procesu viskozita představuje vnitřní tření, které brzdí pohyb. První viskozita se snaží zmenšit rozdíl rychlostí v tekutině, veškerá energie je poté disipována v podobě tepla.

První viskozita představuje poměr mezi tečným napětím a smykovou rychlostí (gradientem rychlosti podle polohy). Tečné napětí vzniká mezi pohybujícími se vrstvami tekutiny. Pro jednorozměrný pohyb je poměr vyjádřen pomocí Newtonova zákona. V obecném případě (pro uvážení všech možných směrů působení tečného napětí) se musí uvažovat v tenzorovém tvaru. Vztah (1.16) popisuje příspěvek do tenzoru napětí od první dynamické viskozity [2].

$$\eta \tau_{ij} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.16)$$

Pro zjednodušení vztahů je vhodné zavádět i první kinematickou viskozitu  $\nu$ .

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (1.17)$$

### 1.1.2 DRUHÁ VISKOZITA

Druhá dynamická viskozita  $b$  vyjadřuje odpor tekutiny proti změně objemu. Uplatňuje se pouze v případě, kdy tekutina jako celek není v rovnovážném stavu. Jejím vlivem dochází k disipaci energie uvnitř tekutiny při objemové změně, veškerá energie je disipována v podobě tepla.

Stejně jako první viskozita, tak i druhá dynamická viskozita přispívá ke vzniku napětí v tekutině. Vztah (1.18) popisuje příspěvek do tenzoru napětí od druhé dynamické viskozity.

$$b \tau_{ij} = b \delta_{ij} \frac{\partial v_m}{\partial x_m} \quad (1.18)$$

Druhá dynamická viskozita přispívá ke vzniku napětí pouze tehdy, jedná-li se o stlačitelnou tekutinu. Pro nestlačitelnou tekutinu by došlo k vynulování pravé strany kvůli divergenci rychlosti. Ze vztahu (1.18) je patrný normálový charakter napětí od druhé viskozity.

Druhá viskozita představuje poměr mezi normálovým napětím a rychlostí objemové změny (ta je přímo popsána divergencí rychlosti viz (1.19) [3].

$$\frac{\partial v_m}{\partial x_m} = \frac{1}{\Delta V} \frac{D(\Delta V)}{Dt} \quad (1.19)$$

Pro zjednodušení vztahů je vhodné zavádět i druhou kinematickou viskozitu  $\xi$ .

$$\xi = \frac{b}{\rho} \quad (1.20)$$

Obě viskozity obecně závisí na teplotě a tlaku [2], druhá viskozita závisí i na frekvenci [4].

### 1.1.3 OBJEMOVÁ VISKOZITA

Vnitřní tření v izotropní tekutině je kompletně popsáno při uvážení obou viskozit. Druhá dynamická viskozita souvisí s normálovým napětím, první dynamická viskozita s tečným napětím v tekutině. Ze vztahu (1.16) je ale patrné, že i viskozita  $\eta$  nějak přispívá k normálovému napětí.

Objemová viskozita  $\zeta$  udává jakýsi kombinovaný účinek obou viskozit. Popisuje disipaci energie při objemové změně látky. Je v ní obsažena první i druhá dynamická viskozita (1.21) [4].

$$\zeta = b + \frac{2}{3} \eta \quad (1.21)$$

Ze vztahu (1.21) je patrné, že při znalosti dvou viskozit je vždy možné tu třetí dopočítat, dvě viskozity jsou vzájemně nezávislé.

Stanovení definičního vztahu objemové viskozity je přímo možné z tenzoru napětí dle (1.13).

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + b \delta_{ij} \frac{\partial v_m}{\partial x_m} + 2 \eta \dot{e}_{ij}$$

Pokud dojde ke kontrakci tenzoru napětí (za index se dosadí  $j = i$ ) a následně se výraz upraví, kdy se využije  $\delta_{ii} = 3$  a faktu, že kontrakce  $\dot{e}_{ij}$  představuje přímo divergenci rychlosti, pak

$$\tau_{ii} = -3p + 3b \frac{\partial v_m}{\partial x_m} + 2\eta \frac{\partial v_m}{\partial x_m}$$

V dalším kroku se výraz upraví do následující podoby.

$$-\frac{1}{3}\tau_{ii} = p - b \frac{\partial v_m}{\partial x_m} - \frac{2}{3}\eta \frac{\partial v_m}{\partial x_m}$$

Při dalších úpravách se provede sumace a výraz se pozmění do přívětivějšího tvaru.

$$-\frac{1}{3}(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}) - p = -\left(b + \frac{2}{3}\eta\right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right) \quad (1.22)$$

Nyní se využije vztahů (1.19); (1.21), zavede se vhodnější značení a přeznačení, kdy  $p \equiv p_t$ . Po následném dosazením do (1.22) dojde ke vzniku přímo *definičního vztahu* (1.23) [5].

$$p_m - p_t = -\zeta \frac{\dot{V}}{V} \quad (1.23)$$

Kde  $p_m$  je mechanický tlak,  $p_t$  je termodynamický tlak. Člen vedle objemové viskozity na pravé straně  $\dot{V}/V$  je rychlost změny objemu v čase vztážená na původní objem, jedná se pouze o jiný zápis divergence rychlosti viz (1.19).

Mechanický tlak  $p_m$  je definovaný jako záporná třetina prvního invariantu tenzoru napětí.

$$p_m = -\frac{1}{3}(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}) \quad (1.24)$$

Nyní bude popsána interpretace rovnice (1.23), její fyzikální význam přímo souvisí s molekulárním složením tekutin. Všechny látky jsou složené z atomů a molekul, které konají neuspořádaný chaotický pohyb, tento pohyb je translační, rotační i kmitavý (pohyb se také nazývá stupeň volnosti). Při termodynamické rovnováze systému, jsou molekuly uspořádané v konfiguraci s nejnižší potenciální energií a nedochází k další disipaci. Při vnějším vlivu, nebo změně uvnitř systému, se dostane systém do nerovnovážného stavu, částice tekutiny pak relaxují přes stupně volnosti do energeticky výhodnější pozice a tím dochází k disipaci energie uvnitř látky. Relaxace systému je časově závislá [6]. První viskozita souvisí pouze s relaxací translačního stupně volnosti, objemová viskozita pak souvisí s relaxací rotačního a vibračního stupně volnosti [7].

Na mechanický tlak  $p_m$  lze pohlížet jako na napětí, které je na tekutinu reálně vyvozeno. Důsledkem tohoto napětí je změna objemu, při  $p_m$  dojde k expanzi nebo kompresi látky. Na termodynamický tlak  $p_t$  lze poté nahlížet jako na teoretickou klidovou hodnotu napětí v systému, kdy je systém v termodynamické rovnováze. Hodnotu tlaku  $p_t$  má systém po relaxaci částic. Tyto dvě veličiny si budou rovny pouze tehdy, když bude nulová pravá strana vztahu (1.23).

Pravá strana vztahu (1.23) bude nulová ve dvou případech. V prvním případě bude nulový podíl rychlosti změny objemu vůči původnímu objemu  $\dot{V}/V$ . To přímo popisuje rovnici kontinuity nestlačitelné tekutiny (divergence rychlosti musí být nulová). Z toho vyplývá, že platí  $p_m = p_t$  tehdy, jestliže se jedná o nestlačitelnou tekutinu (objemová viskozita postrádá smysl), nebo je rychlost změny objemu nulová, tzn. ke kompresi či expanzi nedochází.

V druhém případě, by byla nulová hodnota objemové viskozity. Objemová viskozita  $\zeta$  se uplatňuje pouze při změně objemu kapaliny a je na rychlosti této změny závislá. Udává poměr mezi rozdílem stavových tlaků a rychlostí objemové změny systému. Popisuje disipaci energie systému při návratu do rovnovážného stavu. Záporné znaménko ve vztahu (1.23) je zde jako korekce na kladnou hodnotu  $\zeta$ .

Při položení  $\zeta = 0$  se povoluje změna objemu, rozdíl zmíněných tlaků  $p_m$  a  $p_t$  však musí být nulový. Tomu odpovídá stav, kdy relaxace molekul je prakticky okamžitá [8], takže při aplikaci mechanického tlaku je systém automaticky v termodynamické rovnováze. Toto platí pouze pro určitou skupinu látek, kdy se uvažuje podle vztahu (1.21) hodnota druhé dynamické viskozity jako (1.25).

$$b = -\frac{2}{3} \eta \quad (1.25)$$

Druhá dynamická viskozita  $b$  tedy může nabývat i záporných hodnot. Zbývající dvě viskozity  $\zeta$  a  $\eta$  musí být vždy nezáporné. [4]

Platnost vztahu (1.25) je zaručena pouze při uvážení Stokesovy hypotézy. Ta říká, že vymizení vlivu objemové viskozity  $\zeta$  je platné pouze pro jednoatomové plyny [4]. To se dá vysvětlit tím, že objemová viskozita  $\zeta$  souvisí s časovou odezvou relaxací částic a jejich stupni volnosti [8].

V případě jednoatomového plynu je doba relaxace velmi malá, dominantní je pouze translační stupeň volnosti, rotační a vibrační stupně volnosti se vůbec neuplatní. V takovém případě lze účinek  $\zeta$  lze zanedbat [8]. Obecně to však neplatí, při komplikovanější molekulární struktuře se rotační a vibrační stupně volnosti uplatňují a doba relaxace systému narůstá. V některých případech  $\zeta$  násobně převyšuje velikost  $\eta$  [9].

Z prováděných měření do dnešní doby bylo zjištěno, že druhá viskozita vykazuje závislost na frekvenci [4], proto musí podle vztahu (1.21) na frekvenci záviset také objemová viskozita.

Závislost první viskozity na frekvenci je nepatrná a v objemové viskozitě se neprojeví. Z porovnávání měření  $\eta$  z ultrazvukových frekvencí a klasického rotačního viskozimetru se hodnoty lišily maximálně o jednotky procent po celém rozsahu frekvencí [10]. Podle [10] má tekutina první viskozitu na frekvenci nezávislou, jestliže je hodnota její první dynamické viskozity  $\eta \leq 0,05$  Pa s, a tekutina nevykazuje žádné vlastnosti, co by závislost  $\eta$  na frekvenci zapříčinily. První viskozita však na frekvenci být obecně závislá může [10].

Podle [11] klesá hodnota druhé viskozity s rostoucí frekvencí s hyperbolickou závislostí. Při vysokých frekvencích v ultrazvukovém spektru by se tedy  $\zeta$  měla projevovat minimálně až vůbec. To se shoduje s výsledky uvedenými v [7]. V [7] byla měřena longitudinální viskozita různých tekutin. Longitudinální viskozita  $\eta_{\text{long}}$  se často používá při popisu podélných vln.

$$\eta_{\text{long}} = \zeta + \frac{4}{3} \eta \quad (1.26)$$

Pro případ měření na vodě s rozsahem frekvencí od 10 MHz až po 100 MHz byla longitudinální viskozita v podstatě neměnná, takže se při velmi vysoké frekvenci závislost  $\zeta$  na frekvenci neprojevila [7]. Tato podmínka nezávislosti  $\eta_{\text{long}}$  (tudíž i  $\zeta$ ) na frekvenci v ultrazvukovém rozsahu je jednou z podmínek newtonovské kapaliny [7].

Objemová viskozita je odpovědná za útlum tlakových vln procházejících médiiem [4]. Významnou roli hraje rovněž při supersonických letech v atmosféře [9].

## 1.2 ROVNICE KONTINUITY TEKUTINY

Podle [3] je rovnici kontinuity možné odvodit dvěma způsoby pro případ konečného kontrolního objemu, nebo konečného plovoucího objemu. Oba způsoby jsou rovnocenné.

Konečný plovoucí objem  $\Delta V$  je vymezená oblast v kapalině, která obsahuje stále stejné částice. Tento objem může být při pohybu proměnný v důsledku změny hustoty napříč doménou tekutiny, jeho hmotnost však zůstává stále stejná. Zákon zachování hmotnosti je vyjádřen jako.

$$\frac{D(\rho \Delta V)}{Dt} = 0 \quad (1.27)$$

Ve vztahu (1.27) je užita substanciální derivace, protože se uvažuje časová změna objemu při jeho současném pohybu tekutinou. Při provedení substanciální derivace a dodatečnou úpravou přejde rovnice (1.27) do vhodnějšího vyjádření.

$$\frac{D(\rho)}{Dt} + \rho \frac{1}{\Delta V} \frac{D(\Delta V)}{Dt} = 0 \quad (1.28)$$

Ve tvaru rovnice (1.28) lze pozorovat výraz podle (1.19), který představuje divergenci rychlosti. Fyzikální význam toho výrazu (1.19) je takový, že substanciální změna plovoucího objemu  $\Delta V$  podle času  $t$  je přímo rovna objemovému integrálu přes objem  $\Delta V$  divergence rychlosti. Velikost plovoucího objemu se tedy uvažuje tak malá, aby přes celý objem  $\Delta V$  byla divergence rychlosti konstantní [3].

Divergence rychlosti tedy přímo popisuje objemovou změnu. Provedením dodatečných úprav vznikne *rovnice kontinuity* reálné tekutiny (1.29).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_j} v_j + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.29)$$

Rovnici kontinuity je vhodnější upravit do tvaru, který obsahuje funkci tlaku namísto hustoty. Toho se docílí za pomoci definice rychlosti zvuku v tekutině podle (1.30).

$$c_0^2 = \frac{K_S}{\rho} \quad (1.30)$$

Kde  $K_S$  je modul objemové pružnosti tekutiny za konstantní entropie. Vztah (1.30) vyjadřuje rychlost zvuku za předpokladu, že nedochází k přenosu tepla. Rychlost zvuku  $c_0$  je parametr vyjadřující rychlost šíření tlakového rozruchu prostředím.

Rychlost zvuku v tekutině je možné vyjádřit vhodnějším tvarem, který lze odvodit z modulu objemové pružnosti  $K_S$ . Přitom se v rychlosti zvuku objeví požadovaná závislost na tlaku [2].

$$c_0^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (1.31)$$

Vztah (1.31) rovněž uvažuje rychlost zvuku za konstantní entropie. Dosazením (1.31) do (1.29) vznikne *rovnice kontinuity* reálné tekutiny v požadovaném tvaru (1.32).

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p}{\partial x_j} v_j + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.32)$$

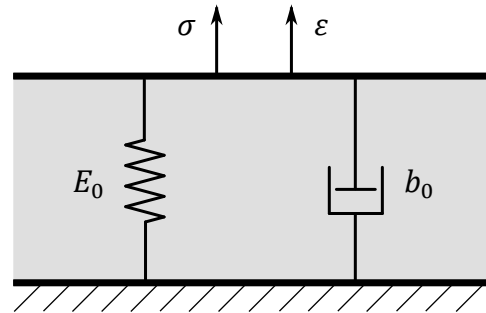
Často dochází k zanedbání konvektivního členu, když je rychlost proudění zanedbatelná vůči rychlosti zvuku v tekutině. Při uvážení rovnice kontinuity za tohoto předpokladu vznikne.

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.33)$$

### 1.3 VOIGTŮV MODEL MATERIÁLU

Aby došlo k uvážení vlivu trubice na tlakové pulsace kapaliny, musí se zavést model materiálu trubice. Pro typ rychlého zatěžování [12] je vhodné jako model použít Voigtův element viz Obrázek 1.1.

Při sériovém uspořádání více takových elementů, by vznikl Kelvin-Voigtův model [13].



Obrázek 1.1 Voigtův element

Tento materiálový model se skládá ze dvou paralelně řazených členů, tuhosti a tlumení, kdy se předpokládá jejich stejné poměrné přetvoření. Celkové napětí je pak součtem vzniklých napětí v jednotlivých členech [13].

$$\sigma = E_0 \varepsilon + b_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (1.34)$$

Kde  $\sigma$  je normálové napětí,  $E_0$  je modul pružnosti v tahu,  $\varepsilon$  je poměrné přetvoření,  $b_0$  je materiálové tlumení trubice.

Vztah (1.34) popisuje relaci mezi napětím a poměrným přetvořením trubice, obecně platí v libovolné souřadné ose. Napětí i poměrné přetvoření jsou časově závislé veličiny.

V případě harmonického zatěžování, má poměrné přetvoření materiálu opožděnou odezvu vůči buzení vlivem tlumení. Průběh  $\sigma$  a  $\varepsilon$  bude vzájemně fázově posunutý. V takovém případě se zavádí komplexní (také dynamický) modul pružnosti v tahu [13].

$$E_K = E' + i E'' \quad (1.35)$$

Kde  $i$  je imaginární jednotka,  $E'$  je reálná část komplexního modulu,  $E''$  je imaginární část komplexního modulu, tyto veličiny jsou definované jako.

$$E' = E_0 \quad (1.36)$$

$$E'' = \omega b_0 \quad (1.37)$$

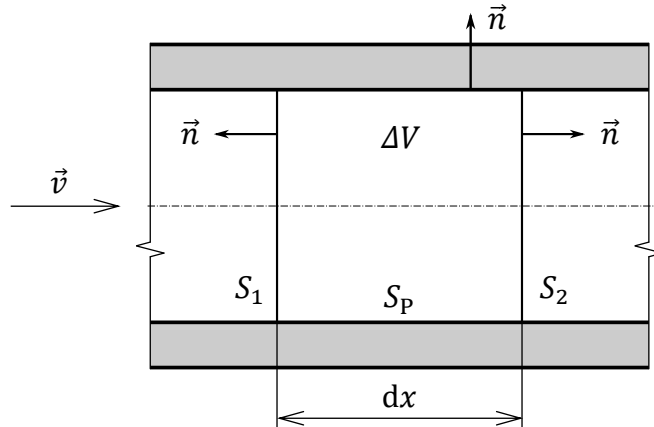
Kde  $E_0$  a  $b_0$  jsou již zmíněné materiálové parametry,  $\omega$  je úhlová frekvence, pro kterou platí.

$$\omega = 2 \pi f$$

Kde  $f$  je frekvence.

## 1.4 ROVNICE KONTINUITY TEKUTINY S UVÁŽENÍM TRUBICE

Podle [11] se vliv trubice do analytického modelu zakomponuje pomocí rovnice kontinuity. Nejprve je nutné vymezit doménu zájmu  $\Delta V$  uvnitř trubice viz Obrázek 1.2.



**Obrázek 1.2** Trubice s objemem kapaliny  $\Delta V$ , upraveno dle [11]

Kde plochy  $S_1$  a  $S_2$  představují vnitřní průřez trubice,  $S_p$  je plocha kontaktu kapaliny se stěnou trubice,  $\vec{n}$  je normálový vektor směřující ven z objemu kapaliny. Rovnice kontinuity (1.33) se integruje přes zvolený objem  $\Delta V$ .

$$\int_{\Delta V} \left( \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) dV = 0$$

Dále se upraví, přitom se první člen integruje jako střední hodnota tlaku na zvoleném  $\Delta V$ . Hustotu a rychlost zvuku se uvažují konstantní na zvoleném  $\Delta V$ . Při současném využití Gaussovy–Ostrogradského věty pro převod mezi objemovým a plošným integrálem pak vznikne.

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} \Delta V + \rho \int_{S_C} v_j n_j dS = 0 \quad (1.38)$$

Kde plocha  $S_C$  ohraničuje objem  $\Delta V$ . Průřez trubice se uvažuje konstantní, současně platí vztahy

$$S_C = S_1 \cup S_2 \cup S_p$$

$$S = S_1 = S_2$$

$$\Delta V = S dx$$

S použitím těchto vztahů se rovnice (1.38) přepíše do tvaru.

$$\frac{1}{\rho c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} S dx + \int_{S_1} v_j n_j dS_1 + \int_{S_2} v_j n_j dS_2 + \int_{S_p} v_j n_j dS_p = 0$$

Prostřední dva členy představují průtok přes průřez trubice, s uvážením nárustu průtoku jako

$$Q_2 = Q_1 + \frac{\partial Q}{\partial x} dx$$

vznikne

$$\frac{1}{\rho c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} S dx - Q_1 + Q_1 + \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \int_{S_P} v_j n_j dS_P = 0$$

Záporné znaménko u  $Q_1$ , vzniká kvůli orientaci normály plochy  $S_1$  proti kladnému směru průtoku. Při další úpravě se obdrží rovnice kontinuity rozšířená o vliv trubice (1.39).

$$\frac{1}{\rho c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} S + \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{dx} \int_{S_P} v_j n_j dS_P = 0 \quad (1.39)$$

Integrál na levé straně přes plochu  $S_P$  vyjadřuje deformaci trubice. Neprojeví se pouze v případě, kdy bude trubka natolik tuhá, aby se vlivem tlakových pulsací nedeformovala. Tento člen ovlivňuje rychlost zvuku k tekutině, v případě řešení kmitání plynů lze běžně zanedbat. Při řešení kapaliny však zanedbat nejde, má vliv na rychlost zvuku kapaliny dle materiálu trubice. K jeho řešení je nutné uvažovat vlastnosti trubice a její deformaci [11].

## 1.5 OBECNÝ HOOKŮV ZÁKON

Podle [14] se materiál trubice předpokládá jako homogenní, izotropní a lineárně pružný. Vztah mezi napětím a přetvořením popisuje Hookův zákon. V případě jednoosé napjatosti má tvar.

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0}$$

V trubce může obecně vznikat trojosá napjatost, je tedy nutné uvažovat zobecněný Hookův zákon. Ten platí v hlavním souřadném systému a je pro poměrné přetvoření dán.

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E_0} \{ \sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3) \} \quad (1.40)$$

Kde  $\varepsilon_1$  je první hlavní poměrné přetvoření,  $\sigma_1$  je první hlavní napětí,  $\mu$  je Poissonovo číslo. Záměnou indexů je možné psát vztah i pro další dva hlavní směry. Vyjádření poměrného přetvoření pro libovolné natočení souřadného systému je možné pomocí transformačních vztahů.

Pro vyjádření poměrného přetvoření v obvodovém směru je potom možné psát.

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E_0} \{ \sigma_\theta - \mu (\sigma_r + \sigma_a) \} \quad (1.41)$$

Kde napětí  $\sigma_\theta$  je v obvodovém směru,  $\sigma_r$  je v radiálním směru,  $\sigma_a$  je v axiálním směru.

Poměrné přetvoření v obvodovém směru je možné vyjádřit také pomocí geometrického vztahu, pro případ rotačně symetrické úlohy je tvaru.

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{u(r)}{r} \quad (1.42)$$

Kde  $u$  je posuv v radiálním směru,  $r$  je poloměr.

## 1.6 VÁLCOVÉ TĚLESO

Z teorie pružnosti a pevnosti [14] platí pro tlustostěnné válcové těleso rovnice rovnováhy v radiálním směru ve tvaru.

$$\sigma_r(r) - \sigma_{\theta}(r) + r \frac{d\sigma_r(r)}{dr} = 0 \quad (1.43)$$

Axiální směr se pro řešení uvažovat nebude. Pro případ rotačně symetrické úlohy lze analyticky vyřešit průběhy napětí v závislosti na poloměru. Pro řešení je třeba využít geometrických a konstitutivních vztahů. Geometrické vztahy popisují deformaci tělesa, zatímco konstitutivní vztahy dávají do souvislosti deformaci a napětí. Dosazením zmíněných vztahů do rovnice (1.43) vznikne diferenciální rovnice pro řešení radiálního posuvu.

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du(r)}{dr} - \frac{u(r)}{r^2} = 0$$

Funkci posuvu  $u(r)$  lze najít pomocí předpokládaného řešení,  $C_1$  a  $C_2$  jsou integrační konstanty.

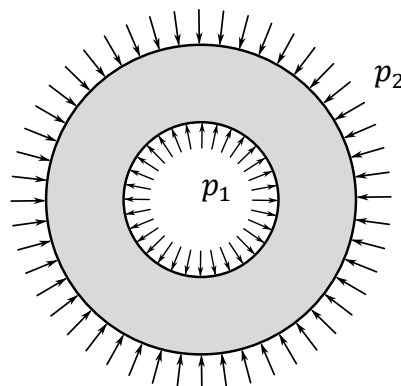
$$u(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

S využitím geometrických vztahů, je možné psát pro napětí v radiálním a obvodovém směru.

$$\sigma_r(r) = A' - \frac{B}{r^2} \quad (1.44)$$

$$\sigma_{\theta}(r) = A' + \frac{B}{r^2} \quad (1.45)$$

Kde  $A'$  a  $B$  jsou integrační konstanty, které je možné určit z okrajových podmínek zatížení nebo posuvů. Konkrétní podmínky zatížení jsou na Obrázek 1.3.



**Obrázek 1.3** Zatížení trubice

Pro případ silových okrajových podmínek z Obrázek 1.3 platí.

$$r = r_1 \quad : \quad \sigma_r(r_1) = -p_1$$

$$r = r_2 \quad : \quad \sigma_r(r_2) = -p_2$$

Kde  $r_1$  je vnitřní poloměr trubky,  $r_2$  je vnější poloměr trubky,  $p_1$  je tlakové zatížení na vnitřní stěně trubice,  $p_2$  je tlakové zatížení na vnější straně trubice. Napětí  $\sigma_r$  se uvažuje jako záporné, protože zatížení vyvolá uvnitř materiálu tlakové napětí.

Při dosazení okrajových podmínek do rovnice (1.44) je možné určit integrační konstanty jako.

$$A' = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (1.46)$$

$$B = \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (1.47)$$

Konstanty platí pouze pro tento typ zatěžování, pro případ jiných okrajových podmínek by měly jiný tvar. Dosazením do (1.44), (1.45) se obdrží napětí v radiálním a obvodovém směru.

$$\sigma_r(r) = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2} \quad (1.48)$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2} \quad (1.49)$$

Nyní se stanoví posuv v radiálním směru  $u$  na vnitřním poloměru  $r_1$ . Využije se přitom konstitutivního vztahu (1.41) a geometrického vztahu (1.42), oba se vyjádří pro poloměr  $r_1$ . Napětí v axiálním směru  $\sigma_a$  se uvažuje jako nulové.

$$\frac{u(r_1)}{r_1} = \frac{1}{E_0} \{ \sigma_\theta(r_1) - \mu (\sigma_r(r_1)) \}$$

Napětí na konkrétním poloměru lze stanovit ze vztahů (1.48) a (1.49), dosazením vznikne.

$$\frac{u(r_1)}{r_1} = \frac{1}{E_0} \left\{ \frac{p_1 r_1^2 + p_1 r_2^2 - 2 p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \mu (-p_1) \right\}$$

Jelikož bude vnitřek válce natlakovaný a z vnější strany bude tlak odpovídající atmosféře, bude platit  $p_1 \gg p_2$ . Dojde ke zjednodušení, vnější tlak  $p_2$  se bude uvažovat jako nulový. Poměrné přetvoření v obvodovém směru na poloměru  $r_1$  potom bude vypadat jako.

$$\frac{u(r_1)}{r_1} = \frac{1}{E_0} \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} p + \frac{\mu}{E_0} p \quad (1.50)$$

Nakonec došlo k formálnímu přeznačení vnitřního tlaku z  $p_1$  na tlak  $p$ . Tlak  $p$  je tlak tekutiny uvnitř trubice.

## 1.7 FOURIEROVA TRANSFORMACE

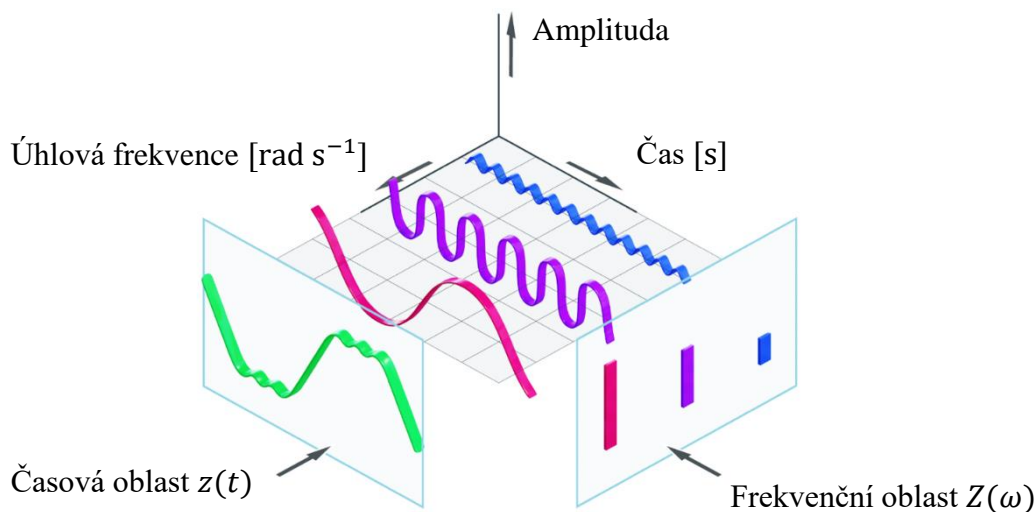
Fourierova transformace  $FT$  je nástroj, s jehož pomocí je možné převést funkci o určité proměnné  $t$  na funkci o jiné proměnné  $\omega$ . Tyto dva proměnné parametry poté mají vzájemně jiný fyzikální význam. Z měření bývá běžným výstupem časová závislost nějaké veličiny  $z(t)$ . Pomocí  $FT$  je možné právě z tohoto časového záznamu získat o této veličině další údaje navíc. Analyticky je  $FT$  definovaná následovně.

$$Z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1.51)$$

Ze vztahu je patrné, že časově závislá funkce  $z(t)$  je násobena komplexní exponenciálou a tento výsledek je integrován přes čas. Časová proměnná vypadne, zůstane pouze proměnná veličina v podobě úhlové frekvence. Užitím Eulerova vztahu je patrná reálná a imaginární část.

$$Z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) \cos(\omega t) dt - i \int_{-\infty}^{\infty} z(t) \sin(\omega t) dt$$

Komplexní exponenciála je korelační funkce. Vztah (1.51) udává, jak je  $z(t)$  shodná s cosinem nebo sinem pro libovolné úhlové frekvence přes celou časovou doménu. Dle Fourierova teoremu lze libovolnou spojitou funkci rozložit na součet sinusoid viz Obrázek 1.4, kdy každá z těchto periodických funkcí má svoji specifickou amplitudu a fázi, toho  $FT$  využívá [15].



**Obrázek 1.4** Pohled do časové a frekvenční oblasti signálu, upraveno ze [16]

Pro konkrétní úhlovou frekvenci  $\omega_n$  se stanoví její váha příspěvku do původního signálu jako velikost  $FT$  dle Pythagorovy věty. V případě čistě harmonického buzení, bude ve výsledné funkci  $Z(\omega)$  jediná dominantní frekvence, právě ta budící, při které bude maximální amplituda. Na Fourierovu transformaci lze tedy nahlížet jako na sken, který odhalí všechny frekvence skládající původní signál  $z(t)$ . Výsledkem transformace je komplexní funkce  $Z(\omega)$ , kdy pro konkrétní hodnotu úhlové frekvence  $\omega_n$  dává funkce  $Z(\omega_n)$  jedno komplexní číslo s reálnou a imaginární částí. Toto komplexní číslo má svoji amplitudu a fázi a přímo popisuje jednu sinusoidu skládající původní signál – její amplitudu a fázi.

### 1.7.1 DISKRÉTNÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE

V případě technické praxe nemá měřený signál podobu spojité funkce. Je proto nutné využít jiný tvar FT, který pracuje s měřeným signálem jako s množinou konečného počtu bodů. Na tento diskretní signál lze v programu Matlab použít příkaz *Fast Fourier transform FFT*. Výsledkem při provedení diskretní Fourierovy transformace bude vektor komplexních čísel. Počet prvků tohoto vektoru odpovídá počtu naměřených bodů.

Aby amplitudy z výstupu FFT byly shodné s amplitudami signálu, musí se výstup FFT násobit dvěma a podělit počtem vzorků signálu, tzn. násobit faktorem  $(2/N_{vz})$  [17].

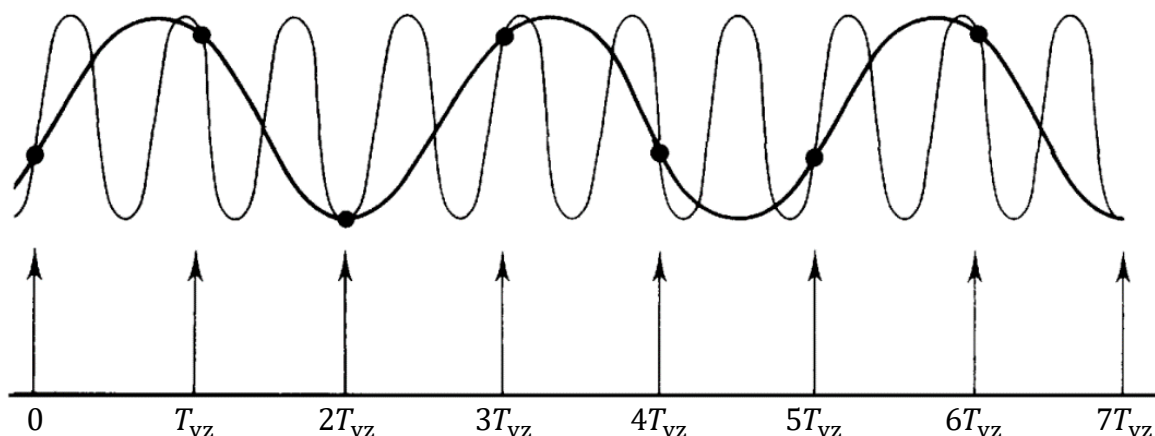
V případě diskretních dat, lze signál vyhodnocovat pouze do určité hraniční frekvence zvané Nyquistova frekvence  $f_{NQ}$ , která odpovídá polovině vzorkovací frekvence  $f_{vz}$  [18].

$$f_{NQ} = \frac{f_{vz}}{2} \quad (1.52)$$

Nyquistova frekvence  $f_{NQ}$  udává hodnotu maximální frekvence, kterou lze spolehlivě pozorovat v původním signálu. Jakákoliv další frekvence, co by se v signálu mohla vyskytovat, která má hodnotu větší než je hodnota  $f_{NQ}$ , bude vyhodnocena špatně.

Nesprávné vyhodnocení je způsobené efektem zvaném *Aliasing*. K tomuto jevu dochází z důvodu nedostatku vzorků pro přesný popis vyšších frekvencí viz Obrázek 1.5.

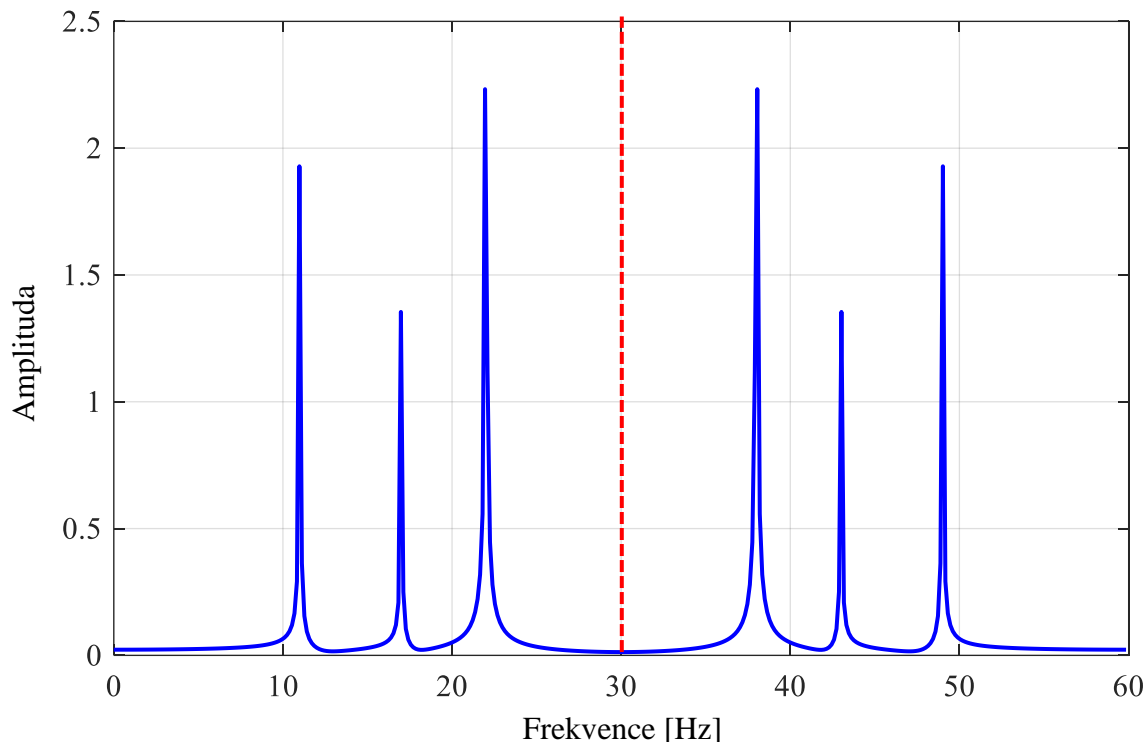
Kvůli diskretnímu dělení se mezi naměřenými body může se signálem odehrávat v podstatě cokoliv. Signál by se proto měl vzorkovat alespoň dvojnásobně větší frekvencí, než je největší frekvence původního signálu. Při tomto vzorkování je zaručeno, že každá perioda původního signálu bude obsahovat alespoň dva body, kterými lze naměřená data proložit.



**Obrázek 1.5** Nedostatečný počet vzorků na jednu periodu signálu – Aliasing [19]

Obrázek 1.5 znázorňuje špatnou volbu vzorkovací frekvence  $f_{vz}$ . Původní signál je vykreslený tenkou černou čarou, tento signál je však vzorkovaný špatnou periodou  $T_{vz}$ . V důsledku nedostatečného množství vzorků se mu přiřadí frekvence, která odpovídá nižší frekvenci, než ta která je hledaná. Obě tyto frekvence prokládají změřená data patrně správně, pro vyšší frekvenci je ale výsledek nesmyslný.

Aliasing je pak jev, při kterém se frekvenci, která je vyšší než je  $f_{NQ}$ , zrcadlově přiřadí automaticky hodnota odpovídající nižší frekvenci. To znamená, že obě frekvence (nižší i vyšší) poté přesně protínají naměřené body. Výsledkem je pak výstup amplitudy FT zrcadlený okolo frekvence  $f_{NQ}$  viz Obrázek 1.6.



**Obrázek 1.6** Zrcadlení výstupu FFT

Obrázek 1.6 je ilustrativním zobrazením zrcadlení amplitud při nižších a vyšších frekvencích. Lze pozorovat, že Nyquistova frekvence  $f_{NQ}$  odpovídá hodnotě 30 Hz. Frekvence je tedy možné smysluplně vyhodnocovat pouze do poloviny vzorkovací frekvence, pak se výstup opakuje s periodou odpovídající  $f_{NQ}$ .

### 1.7.2 PODMÍNKA KOHERENCE

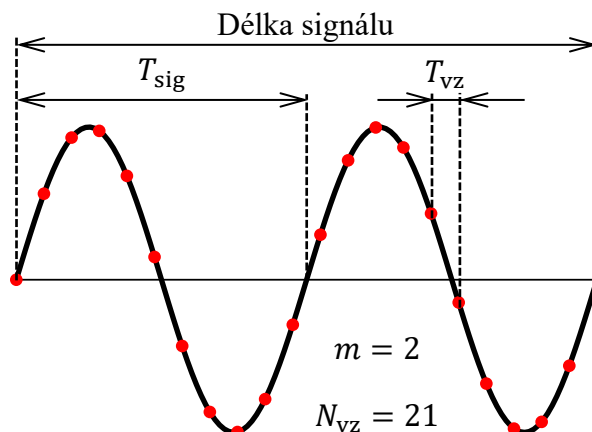
Jelikož se po FFT přesune signál z časové do frekvenční domény, může nastat případ, kdy se právě hledaná frekvence nachází někde mezi dvěma známými frekvencemi (jednotlivé frekvence jsou vzdálené o  $bin$ , kdy  $bin$  je poměr vzorkovací frekvence a počtu vzorků  $f_{vz}/N_{vz}$ ). V takovém případě nastává *spectral leakage* a dochází k efektu, kdy se hlavní složka signálu rozptyluje na sousední frekvenční pásma. To vede ke zkreslení frekvenčního spektra a snížení přesnosti odhadu maxima amplitudy a příslušné frekvence.

Aby se dal výstup FFT považovat za korektní, musí být v každé frekvenci, která je obsažena v původním signálu, ostrý vrchol amplitudy. To je zajištěno při dodržení podmínky koherence signálu. Musí tedy platit následující vztah (1.53) [20].

$$N_{vz} \cdot T_{vz} = m \cdot T_{sig} \quad (1.53)$$

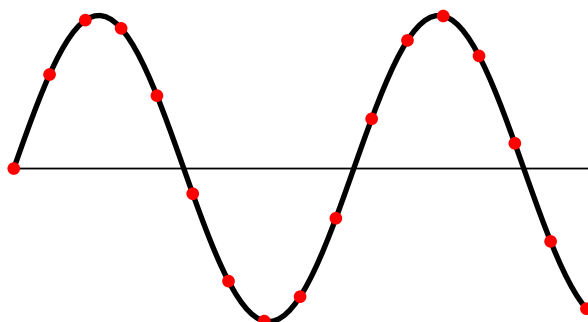
Kde  $N_{vz}$  je počet vzorků,  $T_{vz}$  je perioda vzorkovací frekvence,  $T_{sig}$  je perioda měřeného signálu a  $m$  je libovolné celé kladné číslo viz Obrázek 1.7. Perioda  $T$  je převrácená hodnota odpovídající frekvence  $f$ .

Obrázek 1.7 znázorňuje koherentní vzorkování. Při splnění podmínky koherence je vzorkovací frekvence a frekvence signálu ve fixním pevně daném poměru. Přitom musí být  $m$  celé kladné číslo, číslo  $m$  představuje počet period. V takovém případě bude výstup z FFT správný, takže nebude obsahovat žádné useknuté vrcholy v maximech amplitud.



Obrázek 1.7 Koherentní vzorkování

Nekoherentní vzorkování je pak tehdy, když do FFT vstupuje signál, který má jednu krajní periodu neúplnou viz Obrázek 1.8.



Obrázek 1.8 Nekoherentní vzorkování

Ve skutečnosti jsou  $f_{sig}$  neznámé veličiny, jsou to frekvence, které se FFT snaží najít. Pro dodržení podmínky koherence musí každá  $f_{sig}$  splňovat vztah (1.53) s patřičnou hodnotou  $m$ . Poměr frekvencí v (1.53) je obtížné vždy správně odhadnout, vstupní signál může být různého tvaru a dodržení vždy počtu celých period signálu ani nelze. Proto je třeba pro splnění podmínky koherence volit větší počet měřených vzorků  $N_{vz}$  [20]. V takovém případě se musí využít jiných metod pro korekci výstupu FFT například užitím *Zero padding*.

Při této metodě dochází k umělému rozšíření vstupního signálu o konečný počet nul. Zero padding lze přímo implementovat do příkazu FFT v Matlabu. Běžně se přičítá takový počet nul, aby celková délka signálu byla mocninou dvou. Cílem této operace je zvýšit počet vzorků signálu  $N_{vz}$  při zachování vzorkovací frekvence  $f_{vz}$ . Rozsah frekvencí pro vyhodnocení zůstává stejný, jelikož se  $f_{Nq}$  nemění. Použitím metody se pouze změní frekvenční rozlišení (hustší dělení frekvencí mezi 0 a  $f_{Nq}$  tzn. zmenšení velikosti binu). Při tomto zhuštění frekvence se sníží účinek spectral leakage v okolí hledané frekvence a amplituda se zpřesní. I s využitím dodatečných nul, se pro získání správné amplitudy musí výstup FFT násobit faktorem  $(2/N_{vz})$ , kde  $N_{vz}$  je původní počet vzorků bez zahrnutí nul.

## 2 ANALYTICKÝ MODEL

V této části se dají do souvislosti uvedené informace z předchozích kapitol. Bude zavedeno několik předpokladů.

- Dojde k zanedbání setrvačné síly trubice. Předpokládá se tedy, že trubici ovlivňují tlakové pulsace v kapalině, ale nijak význačně.
- Pro řešení se předpokládá rovinná napjatost, kdy se uvažuje napětí v axiálním směru  $\sigma_a$  jako nulové.
- Dojde k zanedbání vlivu nestacionárního rychlostního profilu tekutiny.

Analytický model se skládá ze soustavy dvou rovnic – pohybové rovnice a rovnice kontinuity rozšířené o vliv trubice.

### 2.1 DEFORMACE TRUBICE

Elastické chování trubice se uvažuje podle (1.34). Uvedený vztah však platí pouze pro jednoosou napjatost. Modifikace Voigtova modelu materiálu pro obecnou trojosou napjatost je uvedena v [21]. Pro případ rovinné napjatosti se Voigtův model materiálu zavádí ve tvaru.

$$\sigma_\theta - \mu \sigma_r = E_0 \varepsilon_\theta + b_0 \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial t}$$

Jedná se o lineární diferenciální rovnici, předpokládané řešení proměnných veličin bude tvaru.

$$\sigma = \bar{\sigma} e^{i\omega t}$$

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} e^{i\omega t}$$

Kde  $\bar{\sigma}$  je amplituda napětí,  $\bar{\varepsilon}$  je amplituda poměrného přetvoření. Následné řešení.

$$\bar{\sigma}_\theta e^{i\omega t} - \mu \bar{\sigma}_r e^{i\omega t} = E_0 \bar{\varepsilon}_\theta e^{i\omega t} + i \omega b_0 \bar{\varepsilon}_\theta e^{i\omega t}$$

$$\bar{\sigma}_\theta - \mu \bar{\sigma}_r = E_0 \bar{\varepsilon}_\theta + i \omega b_0 \bar{\varepsilon}_\theta$$

$$\bar{\varepsilon}_\theta = \frac{\bar{\sigma}_\theta - \mu \bar{\sigma}_r}{E_0 + i \omega b_0}$$

$$\bar{\varepsilon}_\theta = \frac{1}{E_K} (\bar{\sigma}_\theta - \mu \bar{\sigma}_r) \quad (2.1)$$

Uvedený vztah (2.1) vypadá stejně jako Hookův zákon pro rovinnou napjatost. Klíčová je znalost posuvu v radiálním směru na poloměru  $r_1$ . Za jednotlivé veličiny lze dosadit ze vztahů (1.42), (1.48) a (1.49). Tím vznikne vztah podobný již zmíněnému (1.50).

$$\frac{u(r_1)}{r_1} = \frac{1}{E_K} \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} p + \frac{\mu}{E_K} p \quad (2.2)$$

V rovnici kontinuity s vlivem trubice (1.39) figuruje rychlost v radiálním směru. Touto rychlostí se mění poloměr trubice. Poloměr  $r_1$  se vlivem poměrného přetvoření zvětší o posuv v radiálním směru  $u$ . Zmíněnou rychlost lze stanovit ze vztahu (2.2), jelikož obecně platí.

$$v_r = \frac{\partial u(r)}{\partial t}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u(r)}{r}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial u(r)}{\partial t}$$

Úpravou rovnice (2.2) následně vznikne.

$$\frac{1}{r_1} \frac{\partial u(r_1)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{E_K} \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} p + \frac{\mu}{E_K} p \right) \quad (2.3)$$

Všechny veličiny kromě tlaku jsou časově nezávislé. Rychlost  $v_r$ , se kterou se trubice deformuje v radiálním směru na poloměru  $r_1$  je.

$$v_r(r_1) = \frac{\partial u(r_1)}{\partial t} = \frac{r_1}{E_K} \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{r_1 \mu}{E_K} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.4)$$

## 2.2 ÚPRAVA ROVNICE KONTINUITY TEKUTINY

Pro zopakování se znovu uvede rovnice kontinuity ve tvaru (1.39).

$$\frac{1}{\rho c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} S + \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{dx} \int_{S_P} v_j n_j dS_P = 0$$

Plocha  $S_P$  odpovídá ploše, která ohraničuje objem tekutiny v kontaktu s trubicí. Jelikož platí podmínka ulpívání tekutiny na stěně trubice, lze do integrálu dosadit rychlost podle (2.4). Ze skalárního součinu bude v integrálu figurovat pouze radiální směr rychlosti.

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} S + \rho \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\rho}{dx} \int_{S_P} \left( \frac{r_1}{E_K} \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{r_1 \mu}{E_K} \frac{\partial p}{\partial t} \right) dS_P = 0$$

Žádný z členů v integrálu nezávisí na ploše  $S_P$ , celou závorku lze vytknout před integrál.

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} S + \rho \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\rho 2 \pi r_1 dx}{dx} \left( \frac{r_1}{E_K} \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{r_1 \mu}{E_K} \frac{\partial p}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.5)$$

Následuje série úprav rovnice (2.5).

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} S + \rho \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\rho 2 \pi r_1^2}{E_K} \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\rho 2 \pi r_1^2 \mu}{E_K} \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

$$\left( \frac{1}{c_0^2} + \frac{2 \rho}{E_K} \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{2 \rho \mu}{E_K} \right) \frac{\partial p}{\partial t} S + \rho \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.6)$$

Závorka ve vztahu (2.6) se nahradí následujícím výrazem.

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{c_0^2} + \frac{2 \rho}{E_K} \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{2 \rho \mu}{E_K} \quad (2.7)$$

Kde  $c$  je rychlost zvuku k tekutině s vlivem trubice. Konečný vztah pro rovnici kontinuity s vlivem trubice bude vypadat.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} S + \rho \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.8)$$

### 2.3 VLNOVÁ ROVNICE

Pro řešení se uvažuje soustava rovnic, konkrétně rovnice kontinuity ve tvaru (2.8) a pohybová rovnice tekutiny. Před řešením, se však musí pohybová rovnice (1.15) upravit do vhodnějšího tvaru.

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{b}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_m}{\partial x_i \partial x_m} \right) + \frac{\eta}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

V pohybové rovnici (1.15) dojde k zanedbání některých členů. Neuvažuje se vliv objemového zatížení. Zanedbá se člen konvektivního zrychlení, to je možné když rychlost proudění je podstatně menší ve srovnání s rychlostí zvuku. Zanedbají se členy s první viskozitou, jelikož je  $\eta$  řádově menší oproti druhé viskozitě. Řešení probíhá pouze v jedné dimenzi, ve směru osy trubice. Při aplikaci všech úvah se pohybová rovnice zjednoduší na tvar.

$$\frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{b}{\rho S} \left( \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial x} \right) \quad (2.9)$$

Výchozí je tedy níže uvedená soustava dvou rovnic (2.8) a (2.9).

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} S + \rho \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

$$\frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{b}{\rho S} \left( \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \right) = 0$$

Z rovnice kontinuity (2.8) se vyjádří změna průtoku po délce.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{S}{c^2 \rho} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.10)$$

Vztah (2.10) se dosadí do pohybové rovnice (2.9) a po úpravách vznikne.

$$\frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{b}{c^2 \rho^2} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} = 0 \quad (2.11)$$

Následně se rovnice (2.8) parciálně derivuje podle času  $t$ . Rovnice (2.11) se parciálně derivuje podle polohy  $x$ .

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} S + \rho \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t} = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{1}{S} \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{b}{c^2 \rho^2} \frac{\partial^3 p}{\partial x^2 \partial t} = 0 \quad (2.13)$$

Rovnice (2.12) se dosadí do rovnice (2.13).

$$\frac{1}{S} \left( -\frac{1}{c^2 \rho} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} S \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{b}{c^2 \rho^2} \frac{\partial^3 p}{\partial x^2 \partial t} = 0$$

Po následných úpravách vzniká vlnová rovnice pro tlak.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \xi \frac{\partial^3 p}{\partial x^2 \partial t} - c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad (2.14)$$

Kde ve vztahu (2.14) vystupuje druhá kinematická viskozita (1.20) a rychlost zvuku podle (2.7).

## 2.4 ŘEŠENÍ VLNOVÉ ROVNICE

Podle [2] je řešení vlnové rovnice (2.14) možné hledat ve tvaru.

$$p(x, t) = N e^{i(kx + \omega t)} \quad (2.15)$$

Kde  $N$  je amplituda kmitání,  $k$  je úhlový vlnčet,  $\omega$  je již zmíněná úhlová frekvence buzení. Úhlový vlnčet vyjadřuje četnost vln po délce – *prostorová frekvence*, tzn frekvenci opakování vlnové délky. V případě harmonického buzení je výhodné pracovat s komplexními funkcemi. Jestliže nějaká komplexní funkce je řešením dané lineární diferenciální rovnice, je řešením diferenciální rovnice i její reálná i imaginární část [2].

Vztah (2.15) přímo popisuje kmitání tlakových pulsací. Amplituda  $N$  vyjadřuje jejich velikost, člen  $e^{ikx}$  udává počet vln po délce a člen  $e^{i\omega t}$  popisuje změnu kmitání vln v čase. Běžně se amplituda uvažuje pouze u funkce s délkovou proměnnou  $x$ . Obecně pro průběh tlaku platí.

$$p(x, t) = X(x) T(t)$$

Kde funkce  $X(x)$  a  $T(t)$  jsou vzájemně nezávislé funkce jedné proměnné polohy  $x$  a času  $t$ .

Časově závislá funkce popisující změnu vlny v čase se uvažuje pouze ve tvaru.

$$T(t) = e^{i\omega t} \quad (2.16)$$

Funkce popisující průběh vlny dle polohy se uvažuje ve tvaru.

$$X(x) = N e^{ikx} \quad (2.17)$$

Jednotlivé parciální derivace předpokládaného řešení (2.15) vypadají následovně.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\omega^2 N e^{ikx} e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -k^2 N e^{ikx} e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial^3 p}{\partial x^2 \partial t} = -k^2 i \omega N e^{ikx} e^{i\omega t}$$

Ty se následně dosadí do vlnové rovnice (2.14) a upraví.

$$-\omega^2 N e^{ikx} e^{i\omega t} + \xi k^2 i \omega N e^{ikx} e^{i\omega t} + c^2 k^2 N e^{ikx} e^{i\omega t} = 0$$

$$-\omega^2 + \xi k^2 i \omega + c^2 k^2 = 0$$

$$k^2 (c^2 + i \omega \xi) = \omega^2 \quad (2.18)$$

Nyní se zavede komplexní rychlost zvuku  $c_K$  definovaná jako.

$$c_K^2 = c^2 + i \omega \xi \quad (2.19)$$

Ze vztahu (2.18) poté vyplývá.

$$k_{1,2} = \pm \frac{\omega}{c_K} \quad (2.20)$$

Nyní se dosadí zpětně obě hodnoty  $k$  do předpokládaného řešení (2.17).

$$X_1(x) = N_1 e^{i \frac{\omega}{c_K} x}$$

$$X_2(x) = N_2 e^{-i \frac{\omega}{c_K} x}$$

Uvedené  $X_1$  a  $X_2$  jsou řešením, řešením bude i jejich lineární kombinace.

$$X(x) = N_1 e^{i \frac{\omega}{c_K} x} + N_2 e^{-i \frac{\omega}{c_K} x}$$

Po zpětném dosazení do předpokládaného řešení pro funkci tlaku se obdrží funkce tlaku jako.

$$p(x, t) = \left( N_1 e^{i \frac{\omega}{c_K} x} + N_2 e^{-i \frac{\omega}{c_K} x} \right) e^{i \omega t} \quad (2.21)$$

Kde  $N_1$  a  $N_2$  jsou obecně komplexní konstanty, které se stanoví z okrajových podmínek. Funkce tlaku (2.21) popisuje šíření vlny pro oba směry osy  $x$ . Změna vlny v čase je popsána jenom v jednom kladném směru časové osy  $t$ .

Komplexní rychlost zvuku  $c_K$  obsahuje vliv tlumení materiálu trubice  $b_0$  i vliv tlumení způsobený druhou dynamickou viskozitou tekutiny  $b$ . Pro názornost je uveden funkční předpis  $c_K$ .

$$c_K = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{c_0^2} + \frac{2\rho}{E_0 + i\omega b_0} \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{2\rho\mu}{E_0 + i\omega b_0}}} + i\omega \frac{b}{\rho} \quad (2.22)$$

Před vyjádřením průtokové funkce dojde k úpravě tlakové funkce (2.21) pomocí Eulerova vzorce.

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

Pro účel úpravy se argument nahradí obecným  $\varphi$ .

$$p(x, t) = \{N_1 [\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)] + N_2 [\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)]\} e^{i\omega t}$$

$$p(x, t) = \{N_1 \cos(\varphi) + N_2 \cos(\varphi) + i N_1 \sin(\varphi) - i N_2 \sin(\varphi)\} e^{i\omega t}$$

$$p(x, t) = \{(N_1 + N_2) \cos(\varphi) + i (N_1 - N_2) \sin(\varphi)\} e^{i\omega t}$$

Po patřičných úpravách se konstanty nahradí novými a vzniká konečná podoba tlakové funkce.

$$p(x, t) = \left\{ M_1 \cos\left(\frac{\omega}{c_K} x\right) + i M_2 \sin\left(\frac{\omega}{c_K} x\right) \right\} e^{i\omega t} \quad (2.23)$$

Průtokovou funkci lze stanovit s užitím rovnice kontinuity, k tomu je třeba stanovit změnu tlaku v čase. Po derivaci (2.23) podle  $t$  a následném dosazení do (2.10) vznikne.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -i\omega \frac{S}{c^2 \rho} \left\{ M_1 \cos\left(\frac{\omega}{c_K} x\right) + i M_2 \sin\left(\frac{\omega}{c_K} x\right) \right\} e^{i\omega t}$$

Průtoková funkce  $Q(x, t)$  se stanoví integrací, tím vznikne integrační konstanta  $M_3$ , která představuje počáteční hodnotu průtoku. Bude se uvažovat  $M_3 = 0$ . Po patřičných úpravách bude.

$$Q(x, t) = -i \frac{c_K S}{c^2 \rho} \left\{ M_1 \sin\left(\frac{\omega}{c_K} x\right) - i M_2 \cos\left(\frac{\omega}{c_K} x\right) \right\} e^{i\omega t} \quad (2.24)$$

Uvedené (2.23) a (2.24) představují výchozí soustavu rovnic pro vznik přenosové matice.

## 2.5 STANOVENÍ PŘENOSOVÉ MATICE

Je třeba určit konstanty  $M_1$  a  $M_2$  z okrajových podmínek. Do rovnic (2.23) a (2.24) se dosadí poloha odpovídající počátku trubice  $x = 0$  a vyjádří se funkční hodnoty.

$$\begin{aligned} x = 0 & : p_{x=0} = M_1 e^{i\omega t} \\ x = 0 & : Q_{x=0} = -\frac{c_K S M_2}{c^2 \rho} e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Z toho plyne pro konstanty  $M_1$  a  $M_2$ .

$$\begin{aligned} M_1 &= p_{x=0} e^{-i\omega t} \\ M_2 &= -\frac{Q_{x=0} c^2 \rho}{c_K S} e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

Dosazením hodnot konstant do tlakové (2.23) a průtokové (2.24) funkce vzniknou.

$$p(x, t) = \cos\left(\frac{\omega}{c_K} x\right) p_{x=0} - i \frac{c^2 \rho}{c_K S} \sin\left(\frac{\omega}{c_K} x\right) Q_{x=0} \quad (2.25)$$

$$Q(x, t) = -i \frac{c_K S}{c^2 \rho} \sin\left(\frac{\omega}{c_K} x\right) p_{x=0} + \cos\left(\frac{\omega}{c_K} x\right) Q_{x=0} \quad (2.26)$$

Uvedené vztahy (2.25) a (2.26) popisují průběh tlaku a průtoku z jejich výchozích počátečních hodnot v místě  $x = 0$ . Soustava se dá přepsat do maticové podoby.

$$\begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\omega}{c_K} x\right) & -i \frac{c_K S}{c^2 \rho} \sin\left(\frac{\omega}{c_K} x\right) \\ -i \frac{c^2 \rho}{c_K S} \sin\left(\frac{\omega}{c_K} x\right) & \cos\left(\frac{\omega}{c_K} x\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{x=0} \quad (2.27)$$

Rovnice (2.27) popisuje šíření tlakové a průtokové vlny v trubici. Pravá strana představuje součin přenosové matice a počátečního stavového vektoru. Přenosová matice je funkcí souřadnice  $x$  a úhlové frekvence  $\omega$ . Se znalostí stavového vektoru na počátku lze stanovit stavový vektor kdekoli po souřadnici  $x$ . Pro řešení je nutné znát tlakovou či průtokovou podmínku ve dvou místech  $x$ .

## 2.6 UKÁZKOVÉ ŘEŠENÍ VZOROVÝCH OKRAJOVÝCH PODMÍNEK

V této kapitole bude provedeno řešení vzorového příkladu pro názornou ukázkou funkce analytického modelu. Uvažované podmínky pro řešení jsou následující.

$$\begin{aligned} x = 0 & : p_{x=0} = p_a e^{i\omega t} \\ x = L & : Q_{x=L} = 0 \end{aligned}$$

Tyto okrajové podmínky vyjadřují tlakové harmonické buzení  $p_a e^{i\omega t}$  na počátku trubice a nulový průtok na jejím konci. Okrajovou podmínku v počátku trubice lze takto uvažovat, jelikož se funkce tlaku předpokládá ve tvaru (2.15). Po dosazení do rovnice (2.27) vznikne.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\omega}{c_K} L\right) & -i \frac{c_K S}{c^2 \rho} \sin\left(\frac{\omega}{c_K} L\right) \\ -i \frac{c^2 \rho}{c_K S} \sin\left(\frac{\omega}{c_K} L\right) & \cos\left(\frac{\omega}{c_K} L\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q \\ p_a e^{i\omega t} \end{pmatrix}_{x=0}$$

Hodnota průtoku ve stavovém vektoru na počátku se obdrží z rovnice se známými podmínkami.

$$\begin{aligned} 0 &= \cos\left(\frac{\omega}{c_K} L\right) Q_{x=0} - i \frac{c_K S}{c^2 \rho} \sin\left(\frac{\omega}{c_K} L\right) p_a e^{i\omega t} \\ Q_{x=0} &= i \frac{c_K S}{c^2 \rho} \frac{\sin\left(\frac{\omega}{c_K} L\right)}{\cos\left(\frac{\omega}{c_K} L\right)} p_a e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Vztah (2.28) se dosadí zpětně do stavového vektoru na počátku, pro obecnou polohu  $x$ .

$$\begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\omega}{c_K} x\right) & -i \frac{c_K S}{c^2 \rho} \sin\left(\frac{\omega}{c_K} x\right) \\ -i \frac{c^2 \rho}{c_K S} \sin\left(\frac{\omega}{c_K} x\right) & \cos\left(\frac{\omega}{c_K} x\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \frac{c_K S}{c^2 \rho} \frac{\sin\left(\frac{\omega}{c_K} L\right)}{\cos\left(\frac{\omega}{c_K} L\right)} p_a e^{i\omega t} \\ p_a e^{i\omega t} \end{pmatrix}_{x=0}$$

Nyní je možné stanovit průběhy tlaku a průtoku.

$$Q(x, t) = \left( \cos\left(\frac{\omega}{c_K} x\right) \frac{\sin\left(\frac{\omega}{c_K} L\right)}{\cos\left(\frac{\omega}{c_K} L\right)} - \sin\left(\frac{\omega}{c_K} x\right) \right) i \frac{c_K S}{c^2 \rho} p_a e^{i\omega t} \quad (2.29)$$

$$p(x, t) = \left( \sin\left(\frac{\omega}{c_K} x\right) \frac{\sin\left(\frac{\omega}{c_K} L\right)}{\cos\left(\frac{\omega}{c_K} L\right)} + \cos\left(\frac{\omega}{c_K} x\right) \right) p_a e^{i\omega t} \quad (2.30)$$

Se stanovenou funkční závislostí tlaku je nyní možné vykreslit její průběh. Nejprve se však musí nadefinovat hodnoty parametrů, které jsou pro řešení potřeba. Vzorový příklad uvažuje hodnoty dle Tabulka 2.1. Velikost tlakového pulsu se pro příklad uvažuje jako  $p_a = 50000$  Pa.

**Tabulka 2.1** Zvolené parametry pro ukázkou analytického modelu

Trubka		Kapalina	
$r_1$	0,01 [m]	$c_0$	1400 [m s <sup>-1</sup> ]
$r_2$	0,02 [m]	$b$	2000 [Pa s]
$L$	0,2 [m]	$\rho$	840 [kg m <sup>-3</sup> ]
$\mu$	0,29 [–]		
$E_0$	193 [GPa]		
$b_0$	200000 [Pa s]		

Z tlakového průběhu (2.30) je patrné, že při některých hodnotách úhlové frekvence  $\omega$  bude tlaková funkce nabývat maximálních hodnot – dojde k rezonanci. K největšímu zesílení tlaku dochází v případě, kdy je jmenovatel zlomku nulový. Cosinus nabývá nulové hodnoty pro argument roven polovině  $\pi$  a dalším periodám  $\pi$  viz (2.31).

$$\frac{\omega}{c_K} L = \frac{\pi}{2} + \pi m \quad (2.31)$$

K rezonanci pak dojde v případě, kdy budící frekvence bude rovna následujícím hodnotám.

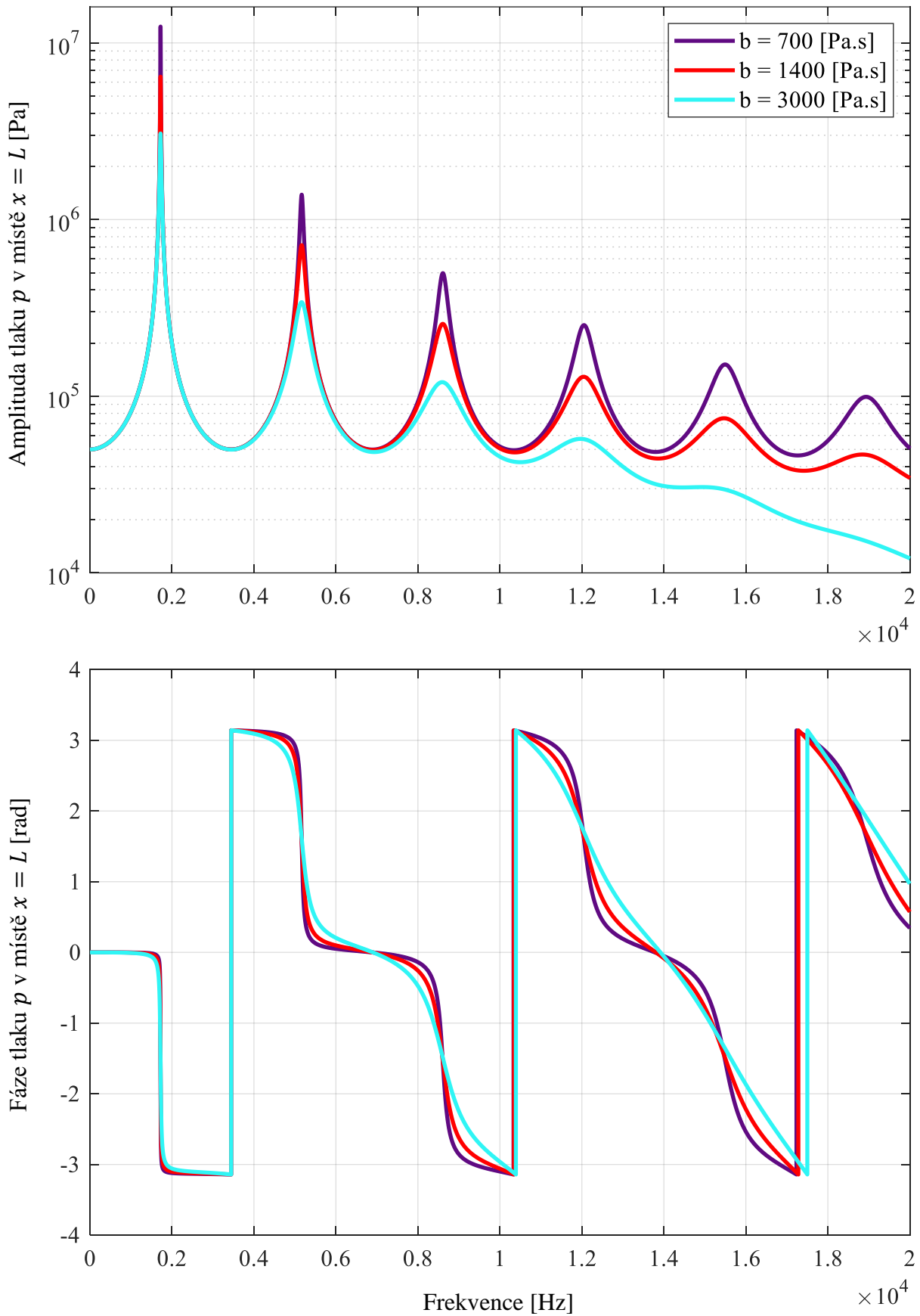
$$f = \frac{c_K}{2 \pi L} \left( \frac{\pi}{2} + \pi m \right)$$

Obrázek 2.1 znázorňuje závislost amplitudy a fáze tlaku na frekvenci v poloze  $x = L$ . Amplituda tlaku představuje přímo velikost tlakového pulsu, fáze tlaku vyjadřuje fázový posun vůči budícímu tlaku v počátku trubice. Amplituda tlaku je vynesena v logaritmickém měřítku.

Vykresleny jsou tři průběhy pro různé konstantní hodnoty druhé dynamické viskozity. Všechny průběhy začínají v čase odpovídající  $t = 0$ . Z průběhů je patrné, že s rostoucí hodnotou  $b$  se amplituda tlaku snižuje. Druhá viskozita není jediný tlumící element modelu. Tlumení materiálu  $b_0$  také přispívá k útlumu tlakových pulsů. Váha, se kterou však  $b_0$  přispívá k tlumení amplitudy tlaku je zanedbatelná vůči druhé dynamické viskozitě.

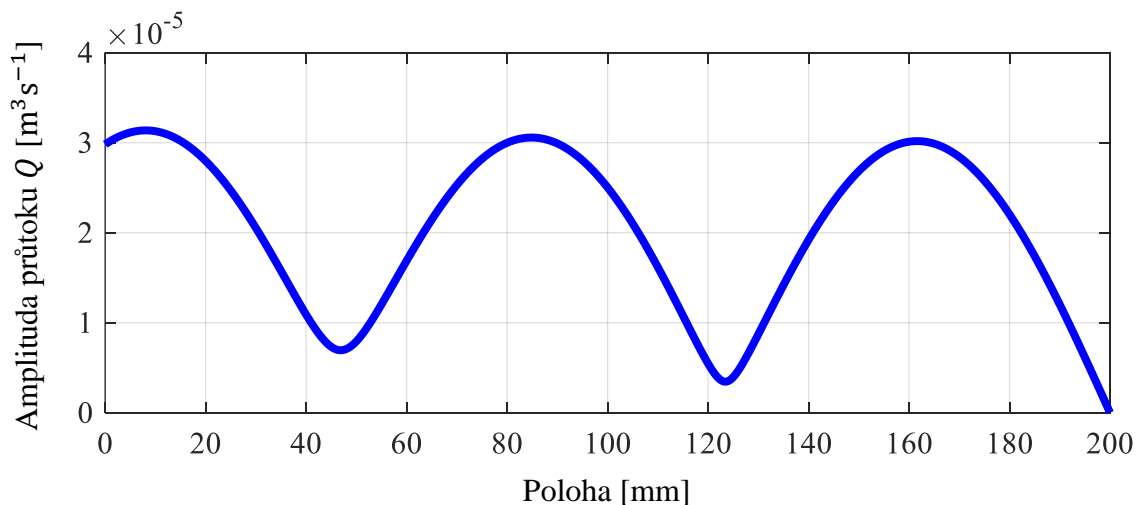
Budící frekvence, při kterých dojde k největšímu zesílení tlaku.

$f_1$	1721	[Hz]
$f_2$	5164	[Hz]
$f_3$	8607	[Hz]
$f_4$	12050	[Hz]
$f_5$	15491	[Hz]
$f_6$	18929	[Hz]

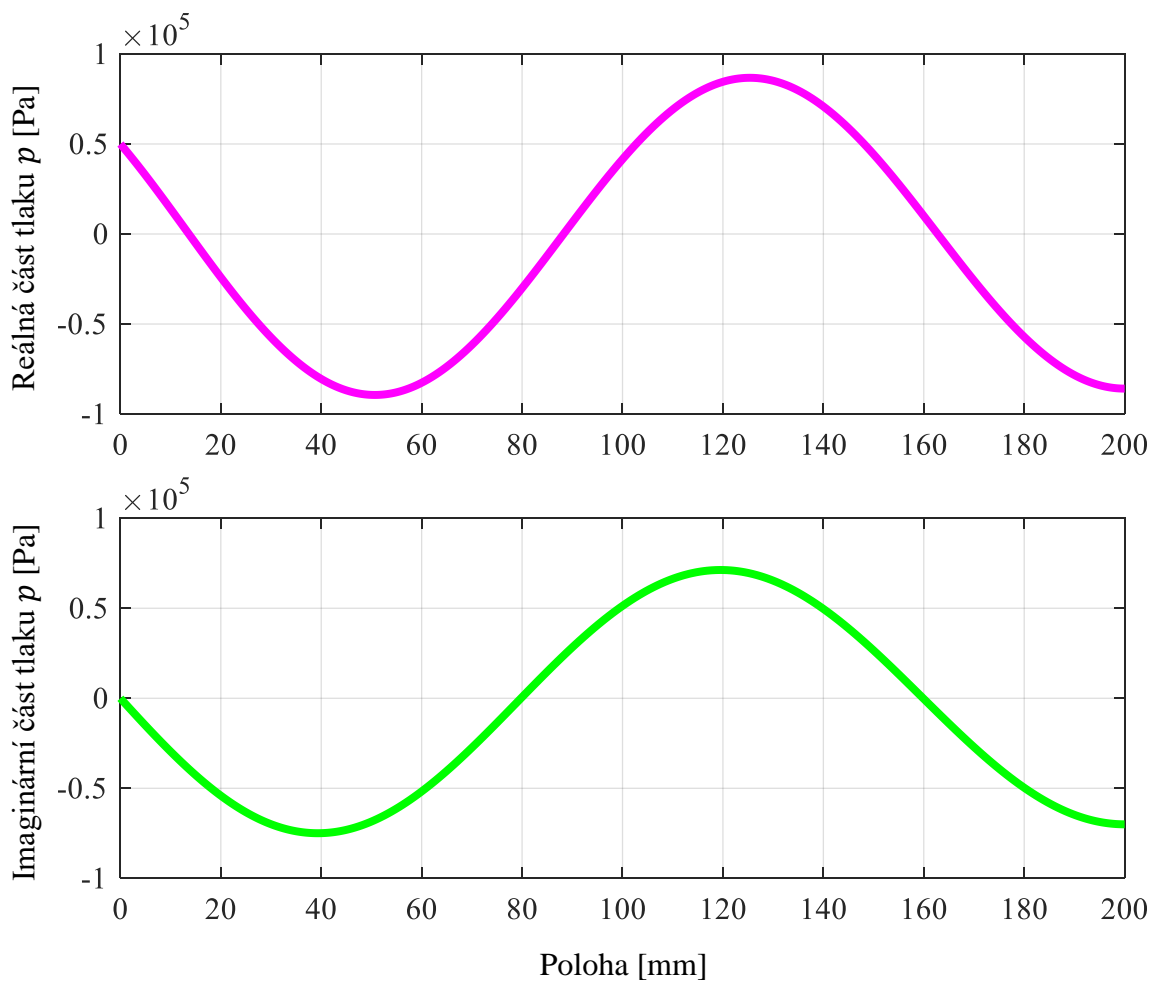


**Obrázek 2.1** Vykreslení závislosti amplitudy a fáze tlaku na frekvenci buzení

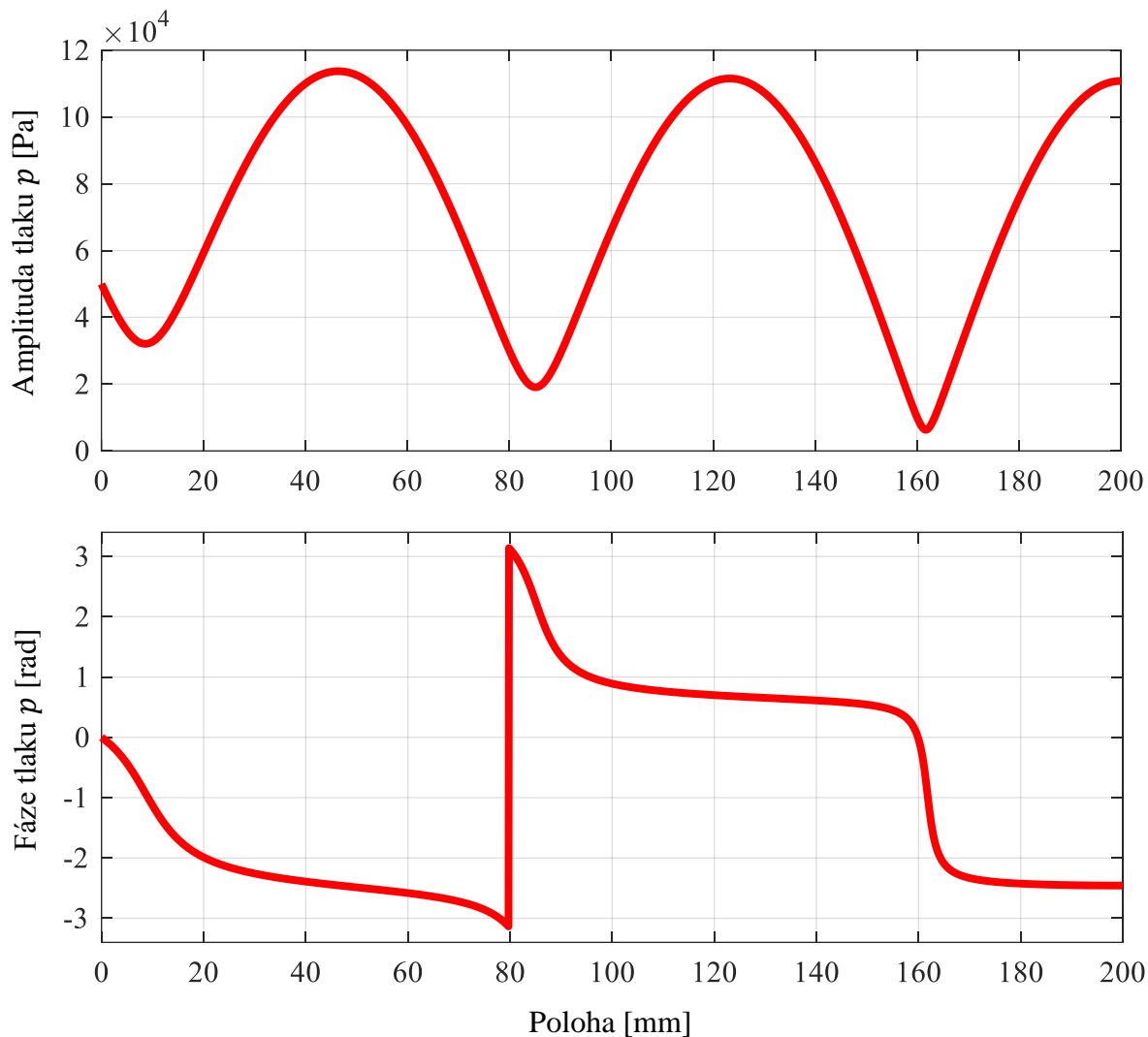
Následující průběhy průtoku a tlaku vykreslené na Obrázek 2.2, Obrázek 2.3 a Obrázek 2.4 jsou počítané pro parametry dle Tabulka 2.1 pro frekvenci  $f = 9000$  Hz. Amplituda průtoku je vykreslena pouze pro ukázkou platnosti okrajových podmínek.



**Obrázek 2.2** Průběh amplitudy průtoku po délce trubice



**Obrázek 2.3** Průběh reálné a imaginární části tlaku po délce trubice

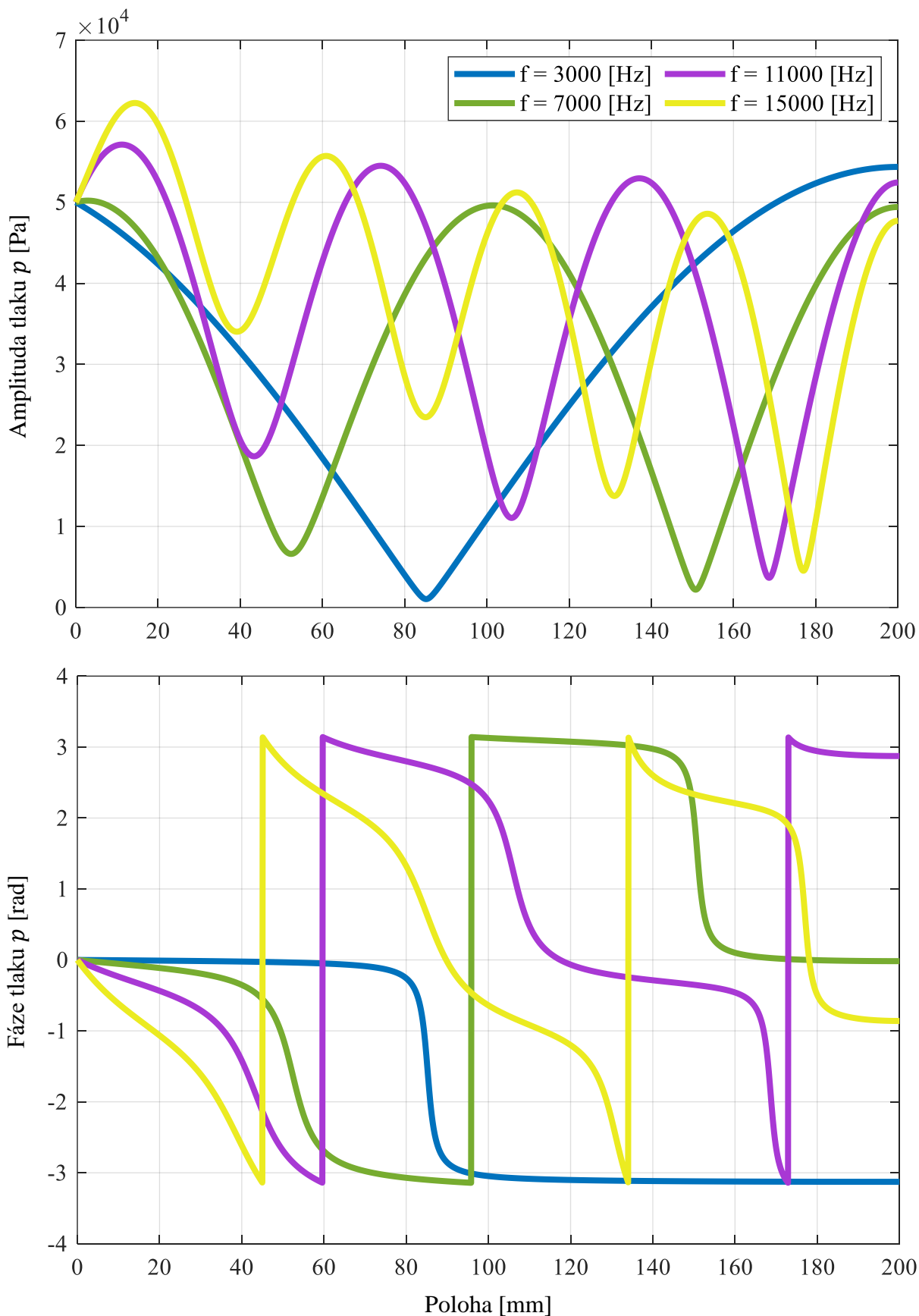


**Obrázek 2.4** Průběh amplitudy a fáze tlaku po délce trubice

Obrázek 2.4 znázorňuje amplitudu a fázi tlakových pulsů po délce trubice. Vyplyvá přímo z průběhu reálné a imaginární části tlaku (viz Obrázek 2.3). Lze si povšimnout, že amplituda tlaku nikde nedosahuje nulové hodnoty, není tedy možné v průběhu vlny po délce trubice stanovit polohu uzlů. Toto je způsobené přítomností tlumení v podobě  $b$  a  $b_0$ .

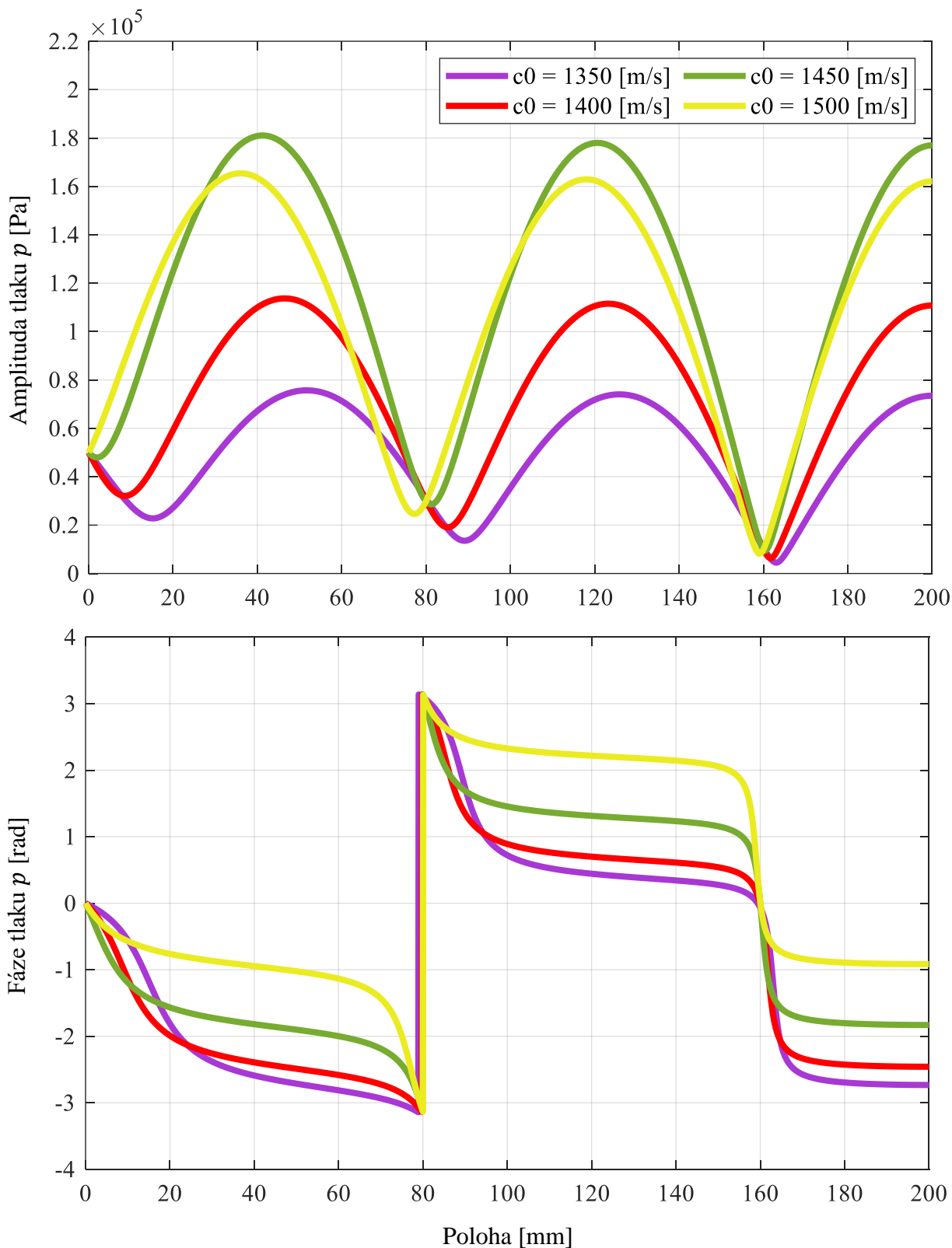
Tlumení modelu způsobuje fázový posun tlaku vůči budícímu tlaku. Průběh fázového posunu je znázorněn spodním grafem. Je patrné, že se tlak po délce trubice zpožďuje. V místě odpovídající 80 mm nedochází ke skokové změně fáze, průběh plynule navazuje a pokračuje přirozeně dál – jedná se o pohodlnější vykreslení průběhu v mezích  $(-\pi; \pi)$ . Oblasti, ve kterých je fáze téměř konstantní, odpovídají vlnění blížící se stojatému. Mezi těmito místy je razantní pokles fáze, takže oblasti s téměř konstantní fází jsou navzájem v protifázi. V případě, kdy se průběh fáze přibližuje už k lineárnímu průběhu, tak se v oblasti vyskytuje běžící vlna.

Tvar a průběh vlny je ovlivněn všemi parametry, které jsou obsaženy v komplexní rychlosti zvuku  $c_K$ . Při změně parametrů modelu týkající se rozměrů a materiálu trubice nebo typu tekutiny, bude mít tlaková vlna jiný tvar. Počet vlnových délek po délce je dán frekvencí buzení a rychlostí zvuku. Obrázek 2.5 vykresluje tvar amplitudy tlakových pulsů při různých frekvencích. Vyneseny jsou takové frekvence, při kterých nedochází k velkému zesílení amplitudy.



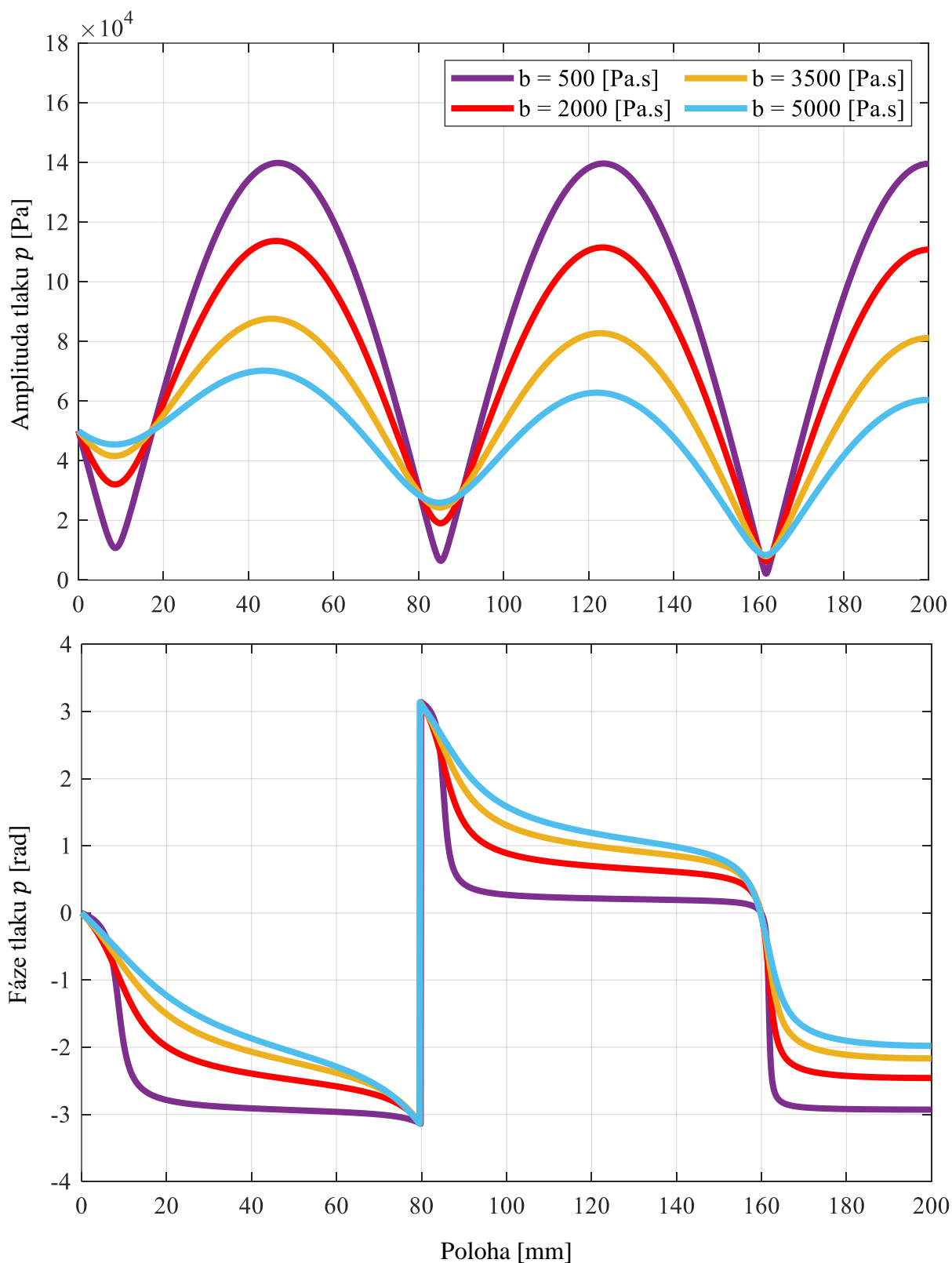
**Obrázek 2.5** Průběh amplitudy a fáze tlaku po délce trubice pro různé frekvence při hodnotách  $c_0 = 1400$  [m/s];  $b = 2000$  [Pa s]

Obrázek 2.6 znázorňuje tvary tlakových pulsů po délce pro různé hodnoty  $c_0$  při konstantních hodnotách  $f$  a  $b$ . Rychlost zvuku ovlivňuje vlnovou délku a velikost amplitudy, jelikož se při změně  $c_0$  mění i rezonanční frekvence podle (2.31).



**Obrázek 2.6** Průběh amplitudy a fáze tlaku po délce trubice pro různé rychlosti zvuku při hodnotách  $f = 9000$  [Hz];  $b = 2000$  [Pa s]

Obrázek 2.7 znázorňuje tvary tlakových pulsů po délce pro různé hodnoty  $b$  při konstantních hodnotách  $f$  a  $c_0$ . Druhá dynamická viskozita ovlivňuje velikost amplitudy, vlnová délka je ovlivněna nepatrně.



**Obrázek 2.7** Průběh amplitudy a fáze tlaku po délce trubice pro různou druhou viskozitu při hodnotách  $f = 9000$  [Hz];  $c_0 = 1400$  [m/s]

### 3 EXPERIMENT

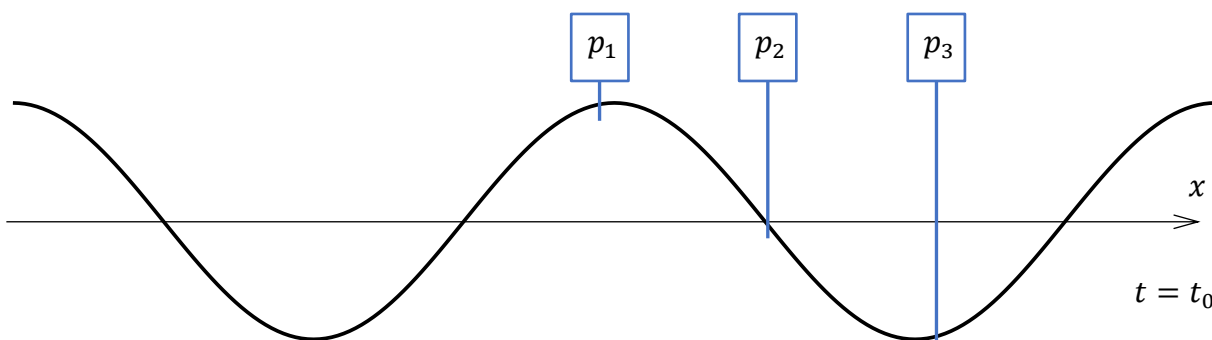
Cílem experimentu je nalezení hodnot rychlosti zvuku  $c_0$  a druhé dynamické viskozity  $b$ , pro které bude analytický model vhodně prokládat tlakový průběh po délce trubice. Jedná se tedy o numerickou optimalizaci analytického modelu dle naměřených tlakových pulsací. Z analytického výpočtu je zřejmé, že pro stanovení vhodné tlakové funkce bude potřeba znát alespoň tři hodnoty tlaku po délkové souřadnici  $x$ .

Hlavním výstupem z experimentu je změření tlakových průběhů v čase ve třech zvolených polohách  $x$ . Volba poloh snímačů by měla v ideálním případě být taková, aby při dané frekvenci pokrývali snímače přibližně polovinu vlnové délky. Podle nejjednoduššího vztahu platí.

$$\lambda = \frac{c_0}{f} \quad (3.1)$$

Kde  $\lambda$  je vlnová délka vlny. Tento vztah neobsahuje žádný vliv tlumení, je pouze pro orientační odhad vlnové délky pro přibližné stanovení vzdálenosti tlakových odběrů.

Současně by mělo jejich umístění navíc zachytit dvě amplitudy navzájem v protifázi. Tudiž takové umístění, kdy dva krajní snímače měří tlaky v protifázi a prostřední snímač je v okolí tlakového uzlu (schematicky viz Obrázek 3.1).



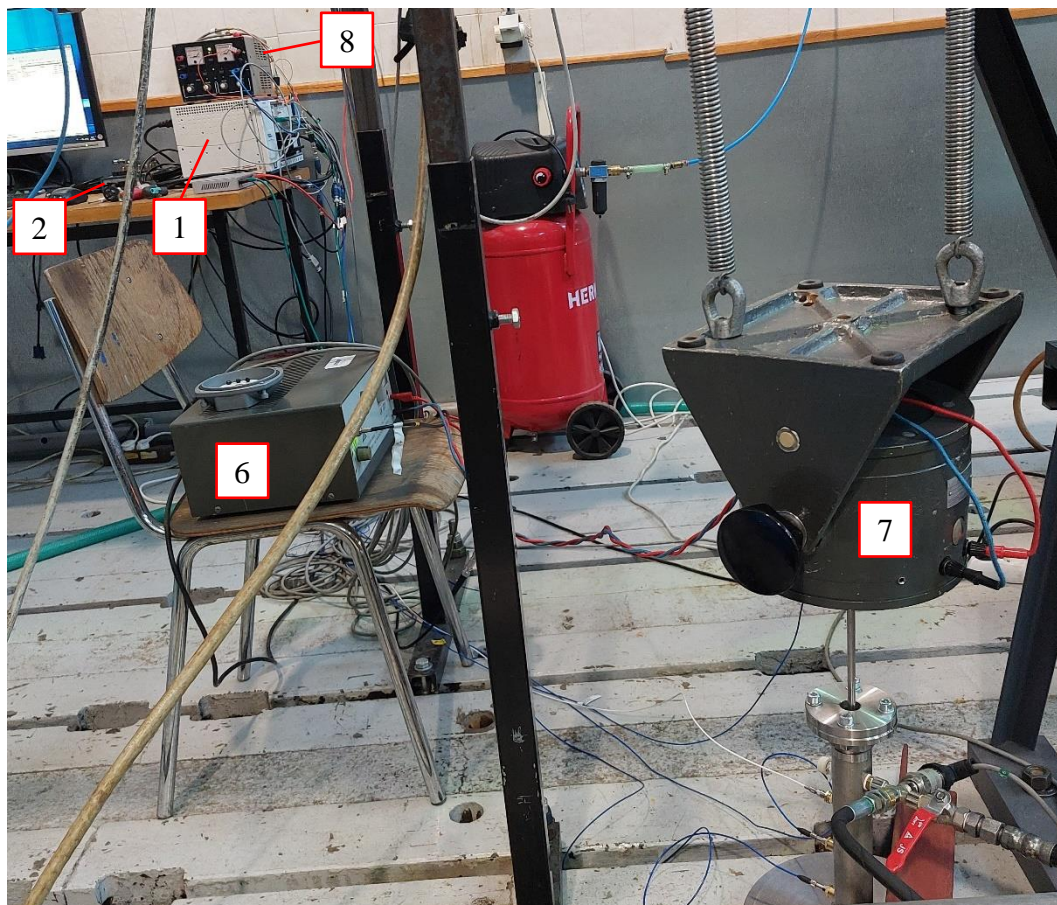
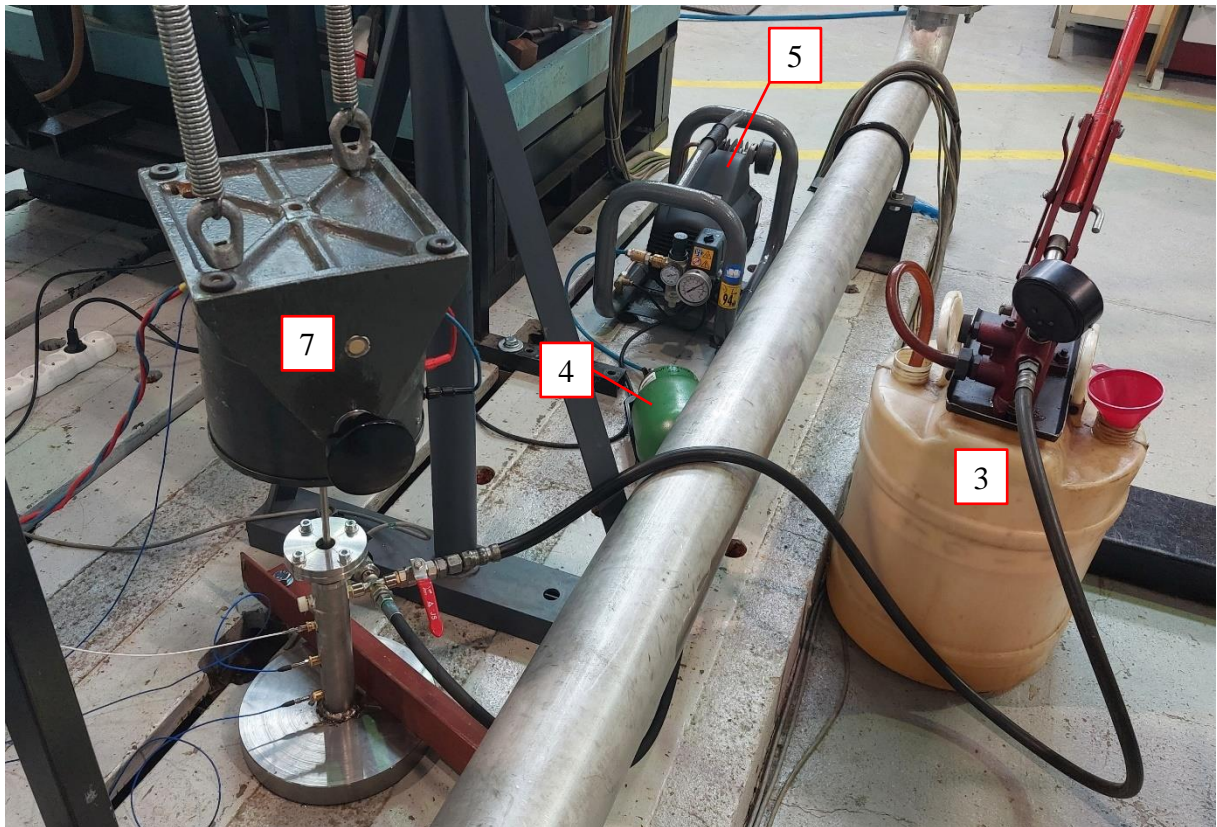
**Obrázek 3.1** Poloha tlakových snímačů pro ideální vyhodnocení

Takovéhoto rozpoložení nelze dosáhnout pro široké pásmo frekvencí. Poloha snímačů se stanoví tak, aby vyhovovala nejvíce frekvencím. Při vyhodnocení se musí uvažovat tento nedostatek u rychlost zvuku, je proto potřeba se spokojit s výsledky jaké jsou.

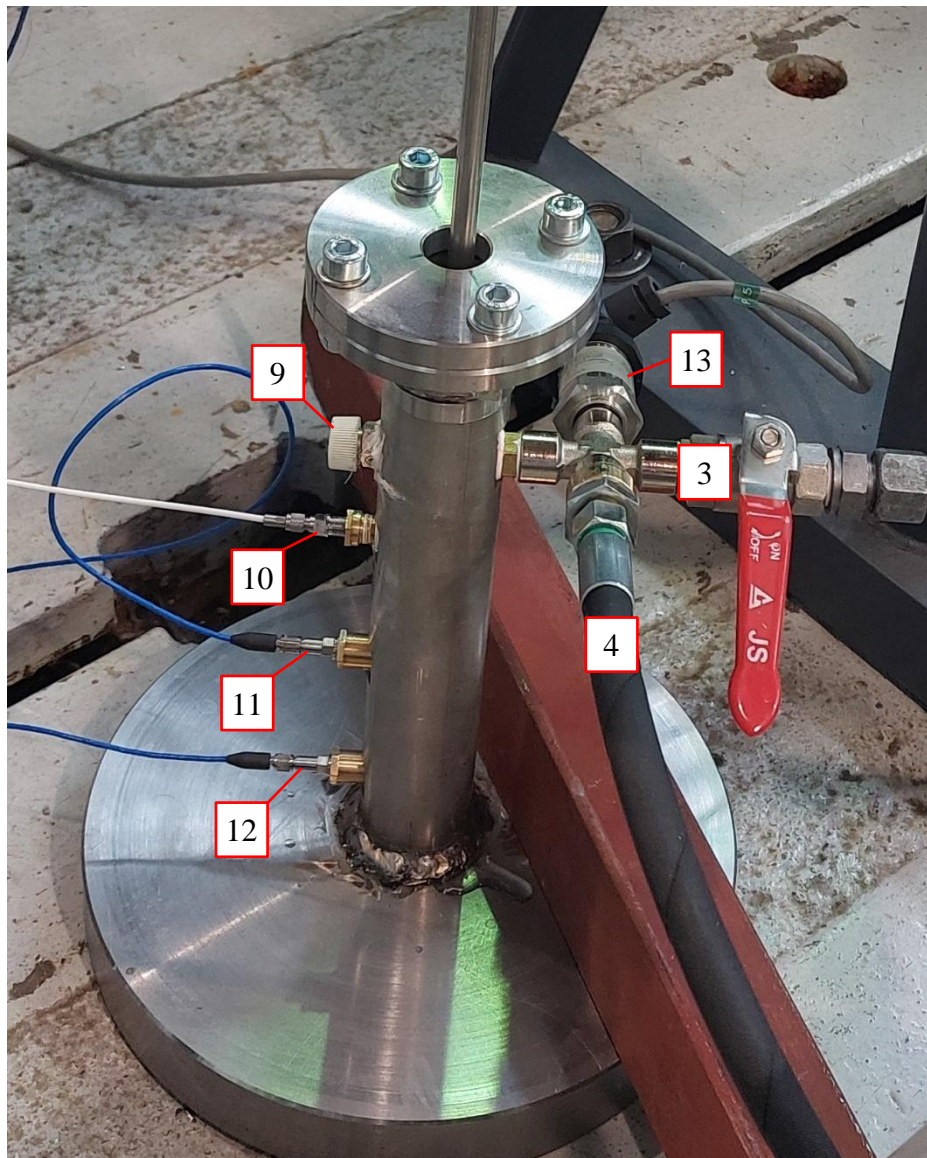
Tyto dva zmíněné parametry  $c_0$  a  $b$  jsou jediné volné parametry modelu. Model pracuje s tím, že všechny další veličiny jsou známé. Před vyhodnocováním výsledků je proto nutné určit dodatečné veličiny jako parametry trubice  $E_0$ ,  $\mu$  a  $b_0$  nebo hustotu kapaliny  $\rho$ . V příslušných materiálových listech lze dohledat hodnoty modulu  $E_0$  a Poissonovy konstanty  $\mu$ , stanovení  $b_0$  už tak přímočaré není.

Společně s tlumením  $b_0$  se musí stanovit i poměrný útlum pro numerické vyhodnocení. Poměrný útlum  $b_p$  se vyhodnotí ze separátního měření trubice bez vlivu tekutiny. Určí se z disipace energie v materiálu v čase, které je v podobě tlumení výchylek kmitání. Tlumení  $b_0$  se může následně vypočítat dvěma způsoby. První je založen na dohledávání numerickou optimalizací. Z modální analýzy trubice se stanoví vlastní čísla a pak se v analytickém modelu ohybového kmitání trubice hledá taková dvojice  $b_0$  a  $E_0$ , by se vlastní čísla z modelu shodovala s experimentem. Druhý způsob vychází z přepočtu tlumení  $b_p$  na  $b_0$  s využitím Rayleighova tlumení, které uvažuje tlumení jako lineární kombinaci hmotnosti a tuhosti.

### 3.1 EXPERIMENTÁLNÍ TRAŤ



Obrázek 3.2 Experimentální trať, označení použité techniky v souladu s kapitolou 3.1.1



Obrázek 3.3 Zapojení příslušenství do trubice

Obrázek 3.2 ukazuje všechny důležité části experimentální tratě. Obrázek 3.3 ukazuje zapojení příslušenství k trubici. Shora je do trubice vedena tyč z budiče (7), buzení je zajištěno pístkem uvnitř trubice (viz kapitola 3.1.2).

Z jedné strany jsou k trubici připojeny tři tlakové snímače a jeden odvodušňovací ventil. Na opačné straně je pak k trubici přišroubovaný dělicí kříž pro současné připojení nádrže pro plnění (3), hydraulického akumulátoru (4) a snímače statického tlaku ((13) - BD snímač napájen pomocí zdroje (8)). Pro dodatečné navýšení tuhosti byla trubice dodatečně upevněna L traversou k podlaze.

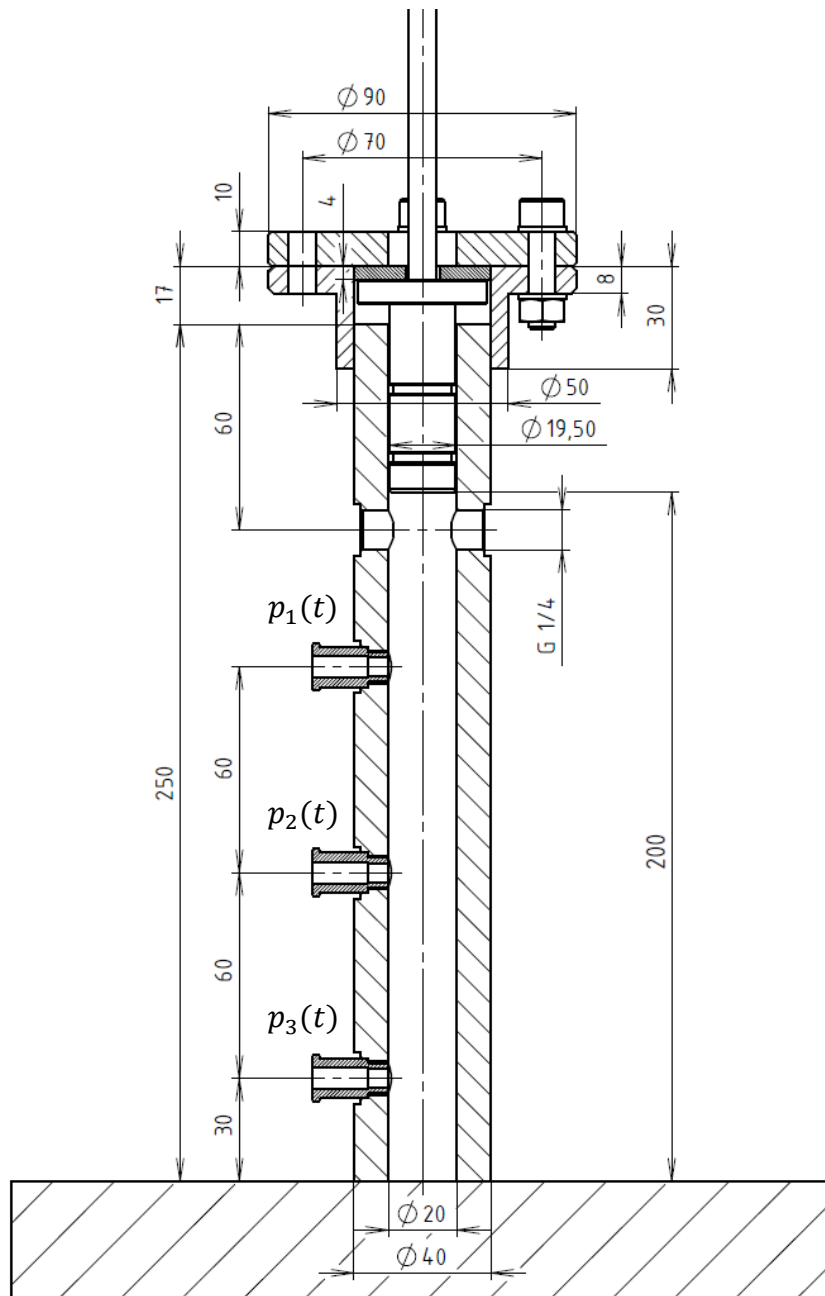
Veškeré příslušenství přišroubované přímo na trubici, bylo utěsněno s využitím teflonové pásky a teflonové šňůry. I přesto docházelo k nežádoucímu úniku kapaliny zevnitř trubice. Únik kapaliny nebylo možné zanedbat, proto se tento problém vyřešil dodatečným připojením hydraulického akumulátoru, který během měření kompenzoval úniky kapaliny. Akumulátor se nejprve natlakoval a při plnění trubice navýšil celkový objem o  $2,5 \text{ dm}^3$ . Tlakování akumulátoru bylo zajištěno kompresorem (5) vedle. Tlakování vnitřku trubice probíhalo s využitím ruční pumpy.

### 3.1.1 SEZNAM POUŽITÉ TECHNIKY PRO EXPERIMENT

- 1) Měřicí ústředna, výrobce National Instruments, model NI PXIe-1078, měřicí 8 kanálová karta NI PXIe-4492, měřicí 8 kanálová karta NI PXIe-6356 pro výstup.
- 2) Svorkovnice NI BNC-2110.
- 3) Nádrž pro plnění a tlakování.
- 4) Hydraulický akumulátor, výrobce ORSTA Hydraulik, nominální objem 2,5 dm<sup>3</sup>, maximální provozní tlak 21 MPa.
- 5) Kompresor pro natlakování hydraulického akumulátoru.
- 6) Analogový zesilovač LV 102, výrobce VEB Metra Meß und Frequenztechnik in Radebeul.
- 7) Budič typ 11077, výrobce VEB RFT Meßelektronik „Otto Schön“ Dresden.
- 8) Napájecí zdroj BK 123, výrobce TESLA Brno.
- 9) Odvzdušňovací ventil.
- 10) Snímač tlaku, PCB Piezotronics, ICP<sup>®</sup> PRESSURE SENSOR Model 113B28, měřicí rozsah 344,7 kPa, maximální tlak 6895 kPa, citlivost ( $\pm 15\%$ ) 14,5 mV/kPa, rezonanční frekvence  $\geq 500$  kHz, doba náběhu  $\leq 0,000001$  s, nelinearita  $\leq 1\%$  z měřicího rozsahu, sériové číslo LW60533.
- 11) Snímač tlaku, PCB Piezotronics, ICP<sup>®</sup> PRESSURE SENSOR Model 113B28, měřicí rozsah 344,7 kPa, maximální tlak 6895 kPa, citlivost ( $\pm 15\%$ ) 14,5 mV/kPa, rezonanční frekvence  $\geq 500$  kHz, doba náběhu  $\leq 0,000001$  s, nelinearita  $\leq 1\%$  z měřicího rozsahu, sériové číslo LW55655.
- 12) Snímač tlaku, PCB Piezotronics, ICP<sup>®</sup> PRESSURE SENSOR Model 113B28, měřicí rozsah 344,7 kPa, maximální tlak 6895 kPa, citlivost ( $\pm 15\%$ ) 14,5 mV/kPa, rezonanční frekvence  $\geq 500$  kHz, doba náběhu  $\leq 0,000001$  s, nelinearita  $\leq 1\%$  z měřicího rozsahu, sériové číslo LW60532.
- 13) Snímač tlaku, BD SENSORS, DMP 333, měřicí rozsah 0 – 100 bar abs, přetížení 210 bar abs, při proudový výstup 0 – 20 mA (varianta 3-vodič), přesnost 0,25%, časová odezva  $\leq 0,003$  s, výrobní číslo 0168486.
- 14) Snímač zrychlení, PCB Piezotronics, ACCELEROMETER, ICP<sup>®</sup> Model 352C33, měřicí rozsah  $\pm 50$  g, citlivost ( $\pm 10\%$ ) 100 mV/g, frekvenční rozsah 0,5 až 10000 Hz s přesností 5%, rezonanční frekvence  $\geq 50$  kHz, nelinearita  $\leq 1\%$ , sériové číslo LW159006

### 3.1.2 SESTAVA TRUBICE

Pro účel experimentu byla zvolena trubice z materiálu AISI 304, který odpovídá austenitické nerezové oceli. Rozměrové parametry jsou zvolené jako – celková délka trubice 250 mm, vnitřní průměr  $d_1 = 20$  mm a vnější průměr trubice  $d_2 = 40$  mm.

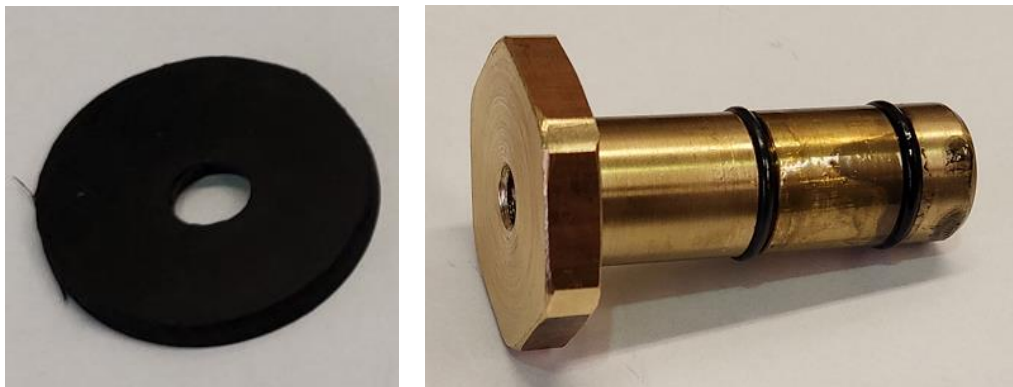


Obrázek 3.4 Model sestavy trubice

Obrázek 3.4 znázorňuje výkres, podle kterého se vytvořila část tratě s trubicí pro experimentální měření. Z jedné strany je trubice přivařena k masivnímu disku. Na protější straně je k trubicí připojen budicí mechanismus. Tlakové pulzace jsou buzené za pomoci pístu (viz Obrázek 3.5 vpravo), který je přišroubovaný pomocí tyče k budiči. Průměr pístu je menší jak vnitřní průměr trubice, odpovídá uložení s vůlí. Potřebné těsnění zajišťují dva O-kroužky. Celkový rozměr trubice, který bude vyplněn kapalinou pro měření, odpovídá přibližně 200 mm.

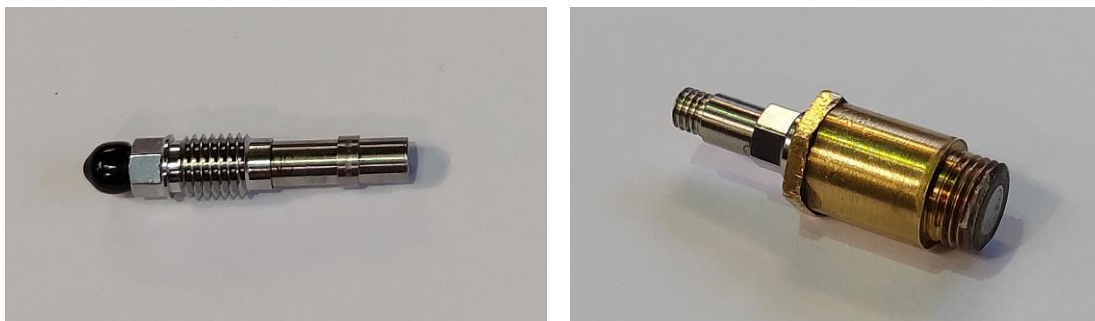
Pohyb pístu je vymezen vnitřním průměrem trubice, může se pohybovat ve směru své osy. Píst je umístěn v krkové přírubě, která je přivařena k vnějšímu průměru trubice. Maximální zdvih pístu je poté vymezený dodatečnou přírubou, která se ke krkové přírubě připojí šrouby.

Kapalina v trubici je před měřením natlakovaná na statickou hodnotu tlaku. Aby nedošlo ke kontaktu kov na kov, je vrchní část pístku opřena o dodatečnou gumovou podložku (viz Obrázek 3.5 vlevo).



**Obrázek 3.5** Gumová podložka; pístek pro buzení

Trubice obsahuje celkem pět navrtaných děr. Tři slouží jako tlakové odběry pro následné vyhodnocení. Díry pro tlakové odběry jsou rozmístěné se stejnou roztečí 60 mm po délce, bylo snahou dostat nejnižší odběr co nejbližší k přivařenému disku. Tlakové snímače se do trubice umisťují s využitím montážního pouzdra (viz Obrázek 3.6 vpravo).



**Obrázek 3.6** Tlakový snímač PCB; tlakový snímač v montážním pouzdře

Jako tlakové snímače byly využity tři piezoelektrické senzory od firmy PCB Piezotronics, Inc. Piezoelektrické snímače jsou vhodné pro rychlé dynamické děje, jelikož jsou schopny měřit pouze tlakovou změnu. Konkrétní typ snímačů je 113B28 (viz Obrázek 3.6 vlevo). Specifikace snímače včetně rozměrů uvádí výrobce zde [22].

## 3.2 PRŮBĚH MĚŘENÍ

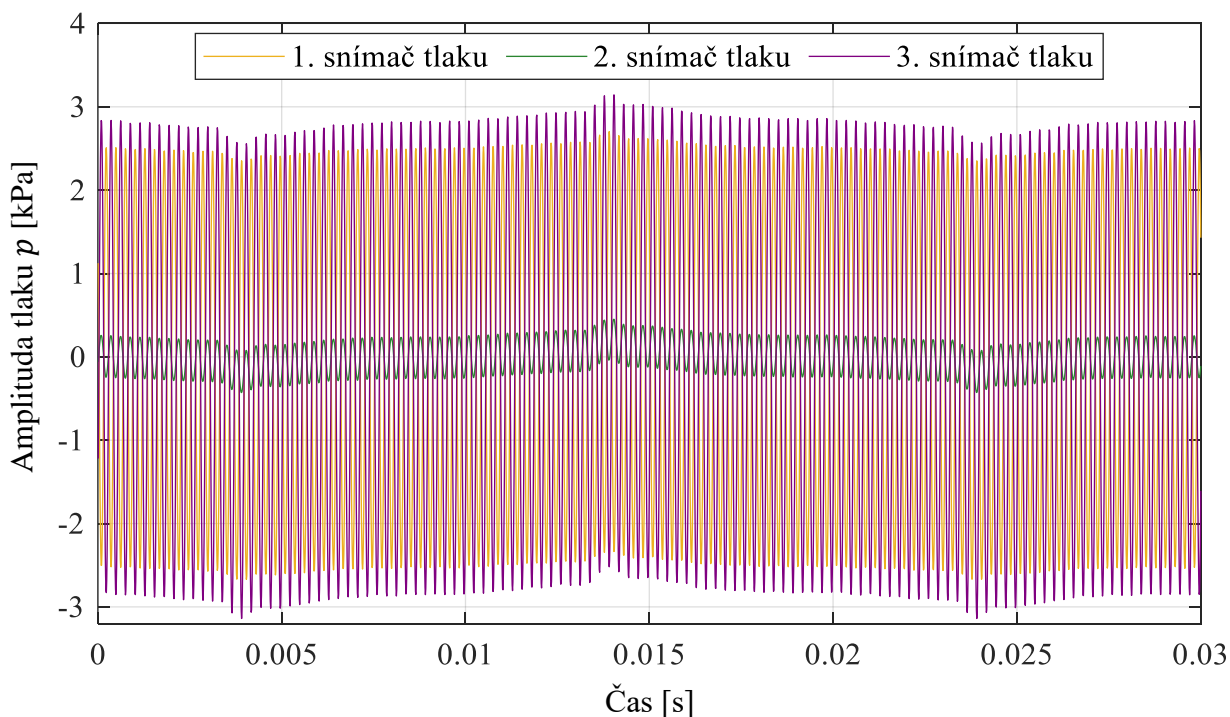
Před samotným měřením se hydraulický akumulátor předepnul, poté se trubice i akumulátor zaplnili kapalinou a natlakovali na hodnotu provozního statického tlaku. Pro nastavení úlohy a spuštění měření bylo využito programu LabVIEW.

Měření probíhalo plně automaticky, měřicí karta PXIe-6356 (1) generovala výstup v podobě sinusovky s patřičnou frekvencí a přes svorkovnici (2) ji posílala do analogového zesilovače (6). Na vstupu zesilovače byl signál pouze napěťový, bez proudu a výkonu. V zesilovači se tento signál zesílil a s patřičným výkonem poslal dál na budič (7). Jedná se o elektrodynamický budič, který přeměňuje elektrickou energii na mechanickou práci, takže cívka uvnitř budiče rozkmitávala jádro připojené tyčí k pístku uvnitř trubice a tím byly generovány tlakové pulsace. Tlak uvnitř trubice byl zaznamenáván čtyřmi snímači. Troje PCB, které lze pozorovat vlevo na trubici, snímali časovou změnu tlaku ve svých místech. Zbýlý BD snímač sloužil pro monitorování statického tlaku. Při měření se sledovalo i zrychlení jádra budiče, všechny tyto měřené veličiny šly na vstup měřicí karty PXIe-4492 (1) a vzorkovaly se frekvencí 100 kHz.

Měřený rozsah byl 1,00 kHz až 20,09 kHz nebo 1,50 kHz až 20,59 kHz s krokem po 10 Hz, vždy se změřilo 1910 frekvencí. Doba měření jedné frekvence byla 0,1 s, přičemž se mezi každým měřením čekalo jednu sekundu pro ustálení průběhu vlny. PCB snímače měřili se vzorkovací frekvencí 100 kHz, na jeden tlak pak vychází 10 000 naměřených bodů, podmínka koherence je automaticky splněna. Čas pro měření jedné frekvence byl celkem 1,1 s. Každá jednotlivá frekvence se ukládala. Celkový čas pro jedno měření odpovídal přibližně 63 min.

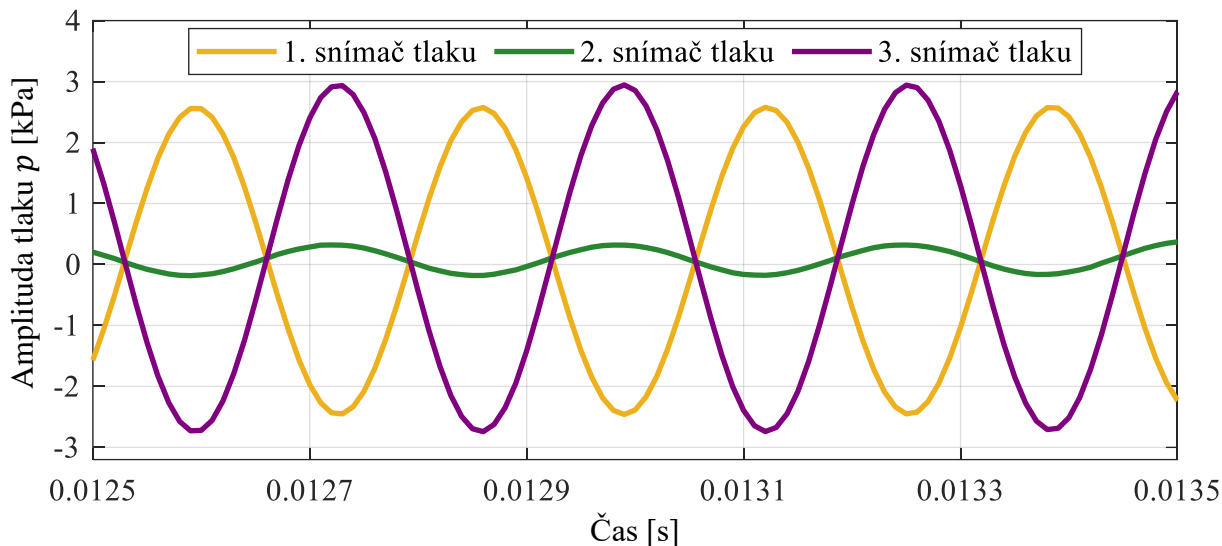
### 3.2.1 NAMĚŘENÁ DATA

Celkově probíhalo šest měření, každé pro jinou hodnotu statického tlaku  $p_s$ . Obrázek 3.7 znázorňuje časový úsek 0,03 sekundy pro případ měření frekvence 3800 Hz s hodnotou  $p_s$  jako 55 bar. Průběhy tlaku byly narušeny kmitáním ze sítě na frekvenci 50 Hz, při vyhodnocení se tímto faktem neuvažovalo a kmitání se zanedbalo.



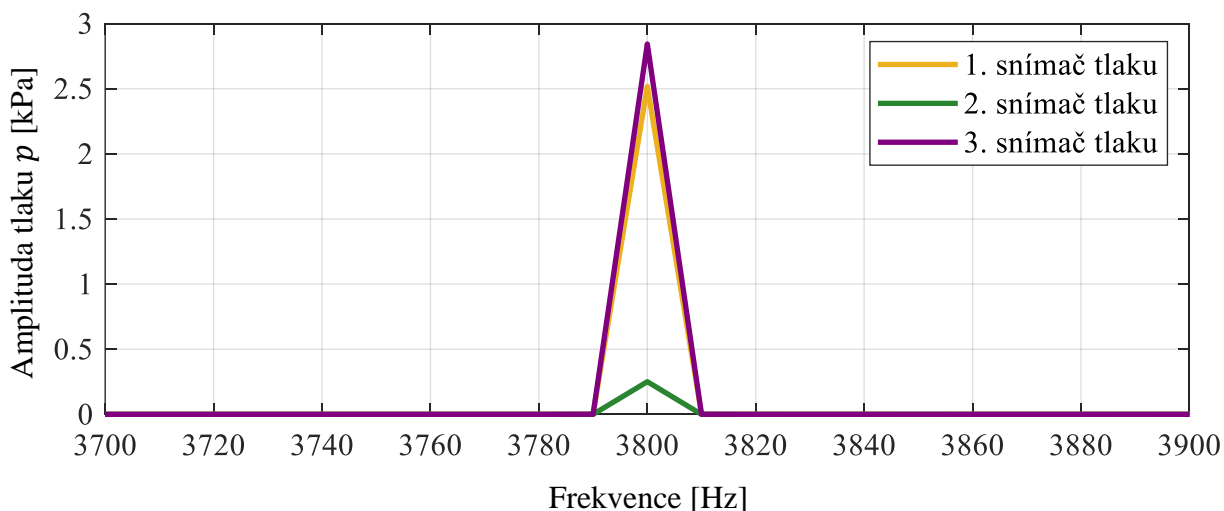
Obrázek 3.7 Časové průběhy měřených tlaků pro frekvenci 3800 Hz

Obrázek 3.7 není úplně přehledný, přiblížením pohledu na průběh lze pozorovat zvlášť tlakové pulsy na každém snímači. Obrázek 3.8 ukazuje časový úsek o délce 0,001, který začíná v 0,0125 s. Lze pozorovat, že průběhy tlaků na prvním a třetím snímači jsou navzájem v protifázi a tlak uprostřed je v blízkosti uzlu. Takovéto průběhy jsou pro vyhodnocení ideální.



**Obrázek 3.8** Detailnější zobrazení časových průběhů pro 3800 Hz

Po FFT na celý záznam se obdrží průběhy tlaku v závislosti na frekvenci. Obrázek 3.9 obsahuje informace o třech tlacích ve frekvenční doméně.



**Obrázek 3.9** Výstup FFT z časového záznamu

Dominantní frekvence, ve které jsou maximální amplitudy FFT, je 3800 Hz. V místech největší amplitudy mají tlakové průběhy hodnotu.

$$\widehat{p}_1 = 1,1161 + i 2,2573$$

$$\widehat{p}_2 = -0,0810 - i 0,2374$$

$$\widehat{p}_3 = -1,2290 - i 2,5641$$

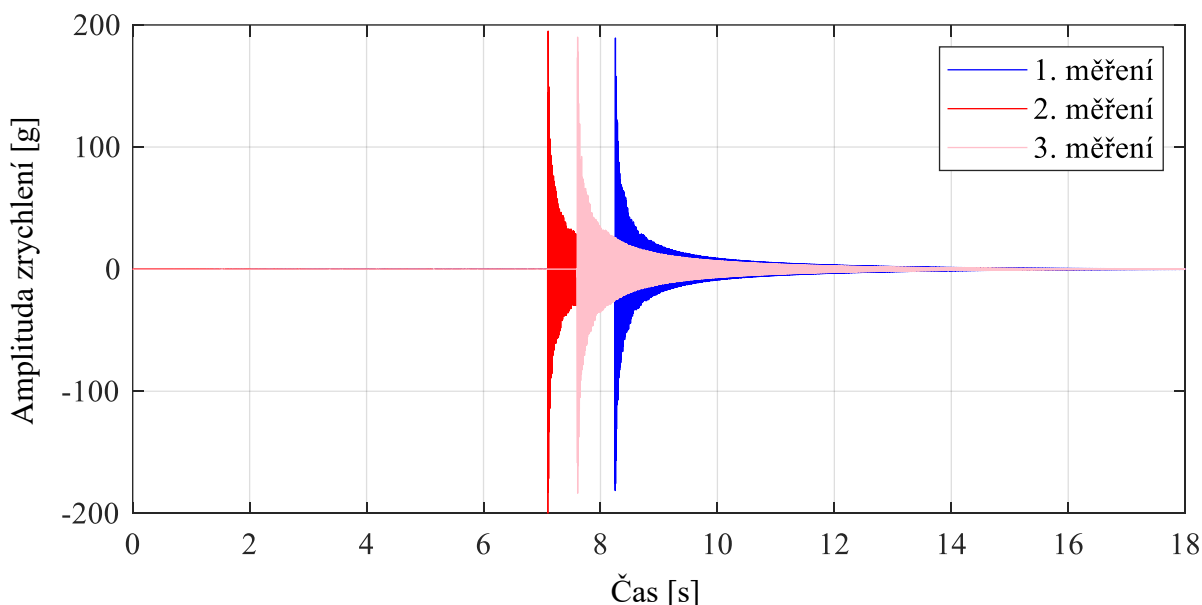
Uvedená čísla obsahují amplitudu a fázi tlaku. Každý tlakový průběh lze v odpovídající frekvenci charakterizovat jako jedno komplexní číslo, viz kapitola 4.

### 3.3 STANOVENÍ POMĚRNÉHO ÚTLUMU TRUBICE

Cílem této kapitoly je stanovit tlumení materiálu trubice, to je možné s využitím modální analýzy. K vyhodnocení výsledků je potřeba určit dva tlumící parametry. Ten první  $b_0$ , ve smyslu Voigtova elementu, je potřebný pro analytický výpočet. Druhý  $b_p$  představuje poměrný útlum (*damping ratio*) a je nutný pro korektní zadání tlumení materiálu pro numerický výpočet.

Trubice o materiálu AISI 304 byla volně pověšena. Chvilí po započetí měření se do ní udeřilo kladívkem a snímačem zrychlení se sledovala její odezva na tento budící impuls. Provedeny byly celkově tři měření, každé trvalo 18 s. Všechny odezvy jsou uvedeny na Obrázek 3.10. Měřilo se s vzorkovací frekvencí 20 kHz, celkově tedy 360000 vzorků. Použitý snímač:

Snímač zrychlení, PCB Piezotronics, ACCELEROMETER, ICP® Model 352C03, měřící rozsah  $\pm 500$  g, citlivost ( $\pm 10\%$ ) 10 mV/g, frekvenční rozsah 0,5 až 10000 Hz s přesností 5%, rezonanční frekvence  $\geq 50$  kHz, nelinearita  $\leq 1\%$ , sériové číslo LW155548



Obrázek 3.10 Záznamy tří měření kmitání trubice

Všechny záznamy jsou na první pohled stejné, počáteční zrychlení všech záznamů dosahuje až 200 g. Každý začíná v jiný čas kvůli různým okamžikům úderu kladívka. Vyhodnocení bylo provedeno pro všechny tři záznamy a výsledky byly totožné, proto bude uvedeno řešení pouze na prvním měření.

Pro FFT se musí vhodně vybrat časový interval pro vyhodnocení, vhodnou délkou se zabývala práce [23]. Záznam by se neměl vyhodnocovat se zahnutím počátečního impulsu, ten by totiž mohl být kladívkem nejvíce ovlivněný. Současně by se neměl brát do vyhodnocení i úplný konec záznamu, kdy trubice dokmitává už pouze na první vlastní frekvenci. Konec záznamu může obsahovat nějaké nežádoucí vnější vlivy a při jeho zahrnutí dochází k výraznému potlačení vyšších vlastních frekvencí.

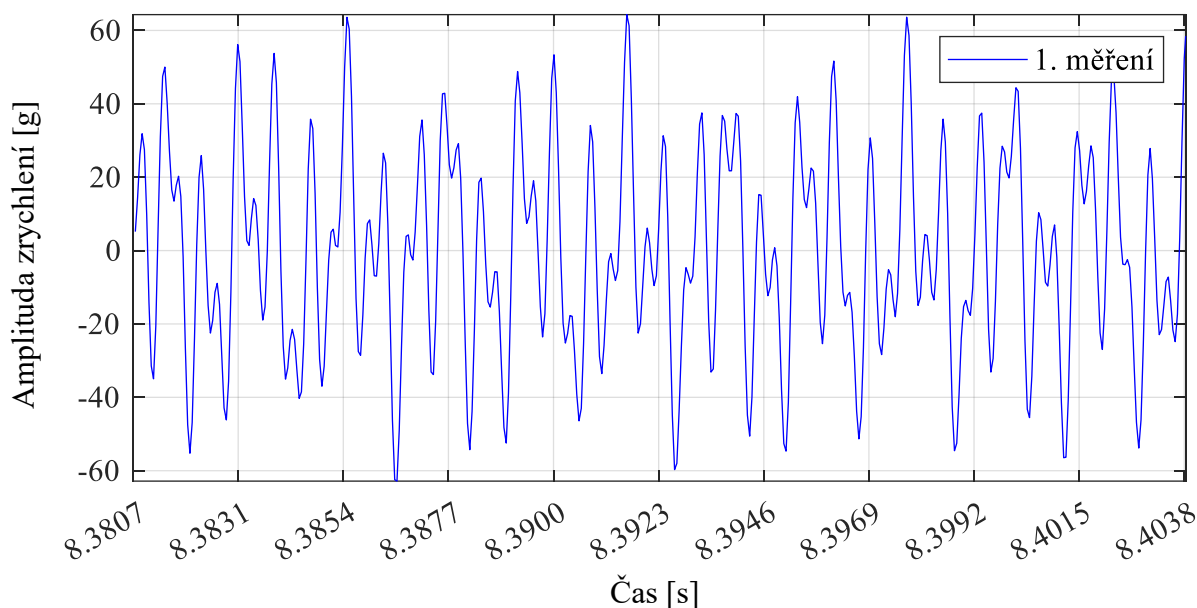
Aby byla splněna podmínka koherence, musí být na vstupu do FFT celočíselný počet period odpovídající frekvence. Nejprve bylo potřeba stanovit odhadovanou polohu vlastních frekvencí. To je možné z celého neupraveného záznamu, v takovém případě nalezené frekvence přibližně odpovídají realitě, amplitudy jsou však úplně špatně.

Po stanovení odhadované polohy frekvence se přešlo ke konečnému vyhodnocení. Pro případ prvního měření je maximální nárůst zrychlení 189,2946 g, této hodnotě odpovídá časový vzorek 165115. Není vhodné vyhodnocovat FFT se zahrnutím maximální amplitudy, výsledek by mohl být ovlivněný úderem kladívka. Byl zvolen čas odsazení od maximální amplitudy o 0,125 s, tzn posun o dodatečných 2500 vzorků. Celková délka signálu byla zvolena jako 30 period příslušné vlastní frekvence.

Výstup FFT je ovlivněný délkou zvoleného záznamu (více v [23]). Při volbě menšího počtu period byla stanovená hodnota poměrného útlumu nereálně vysoká. Naopak při volbě delšího časového úseku vycházela hodnota poměrného útlumu velmi nízká, to bylo způsobené především dominantní první frekvencí, na které trubka ještě dlouho dokmitávala. V okolí třiceti period byly změny poměrného útlumu nepatrné.

Každá vlastní frekvence se vyhodnocovala z jinak dlouhého záznamu, všechny ale obsahovaly průběh dlouhý třicet period. Tento postup byl doporučen vedoucím práce.

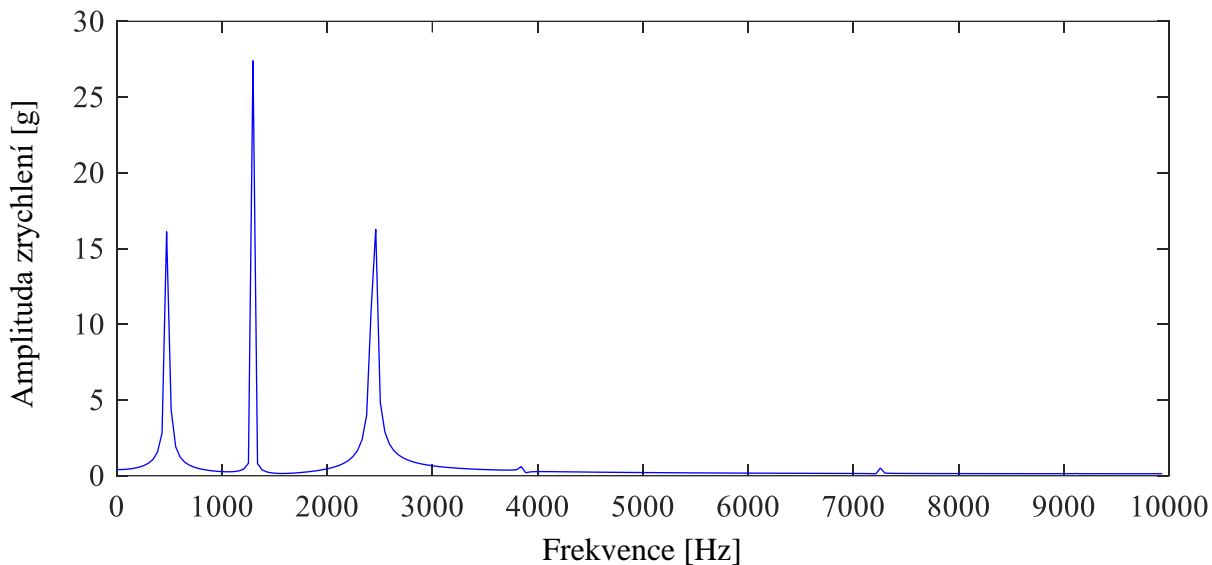
Obrázek 3.11 ukazuje časový úsek použitý pro vyhodnocení prvního měření. Odhadovaná druhá vlastní frekvence byla okolo 1297,17 Hz. Délka záznamu odpovídající třiceti periodám je přibližně 0,0231 s.



**Obrázek 3.11** Časový úsek pro vyhodnocení prvního měření

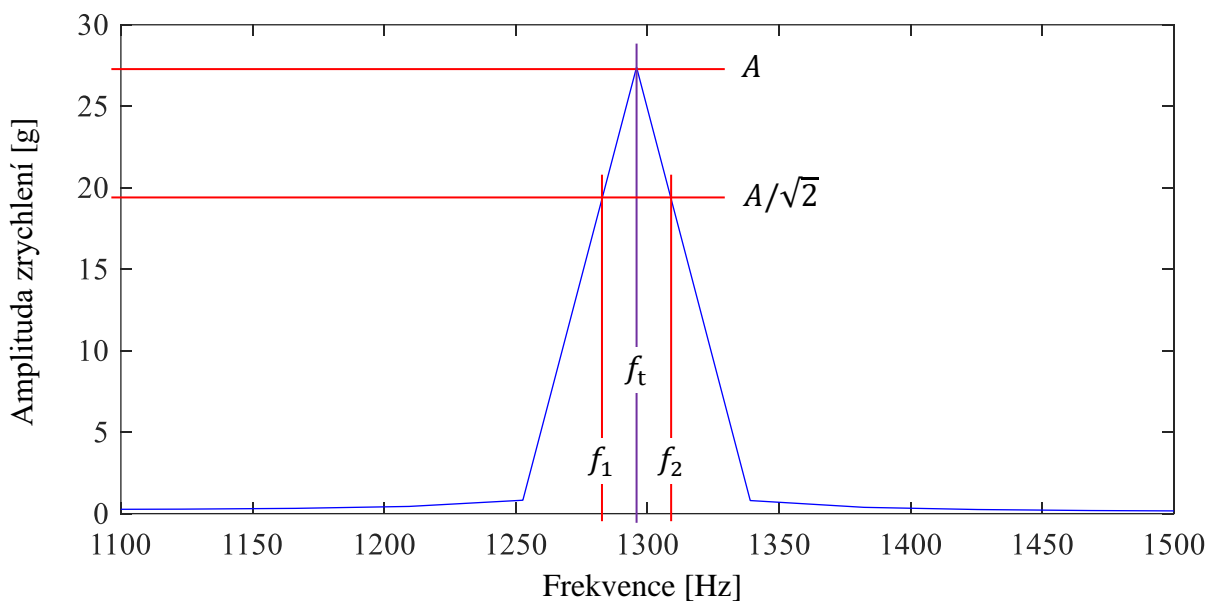
Po provedení FFT na tento vybraný záznam vznikne průběh viditelný na Obrázek 3.12. Lze pozorovat tři vlastní frekvence. Podmínka koherence je patrně splněna pouze v té druhé, jako jedná má výrazný ostrý vrchol bez význačného spectral leakage.

Aby byla zajištěno splnění koherentního vzorkování i v dalších vlastních frekvencích, musí se tento postup provést pro každou vlastní frekvenci zvlášť.



**Obrázek 3.12** Výstup FFT provedený na vybraný časový úsek

Při přiblížení na druhou vlastní frekvenci vznikne Obrázek 3.13. Na něm je již možné stanovit šířku rezonančního pásma a vyhodnotit poměrný útlum.



**Obrázek 3.13** Určení šířky rezonančního pásma pro druhou frekvenci, upraveno dle [24]

Poměrný útlum materiálu lze určit podle (3.2) [24].

$$b_p = \frac{\Delta f}{2 f_t} \quad (3.2)$$

Kde  $\Delta f$  je šířka rezonančního pásma,  $f_t$  je vlastní frekvence tlumeného kmitání. Šířka  $\Delta f$  se určuje jako rozdíl  $f_2$  a  $f_1$  v hodnotě amplitudy odpovídající  $A/\sqrt{2}$ , kde  $A$  je právě maximální amplituda v místě frekvence  $f_t$ . Pro určení imaginární části vlastního čísla se stanoví  $\Omega_t$ .

$$\Omega_t = 2 \pi f_t$$

Reálná část vlastního čísla se může určit z poměrného útlumu jako.

$$\alpha = -b_p \Omega_0 \quad (3.3)$$

Kde  $\Omega_0$  je vlastní úhlová frekvence netlumeného kmitání. Pro malý poměrný útlum se vlastní úhlové frekvence  $\Omega_t$  a  $\Omega_0$  téměř neliší, lze je proto uvažovat stejné, tzn.

$$\Omega_t \doteq \Omega_0$$

Potom se určí vlastní číslo.

$$s = \alpha + i \Omega_t$$

Následující tabulka obsahuje stanovené hodnoty vlastních čísel pro tři vlastní frekvence.

**Tabulka 3.1** Stanovení vlastních čísel pro první měření

	1. vlastní frekvence	2. vlastní frekvence	3. vlastní frekvence
$f_t$ [Hz]	484,262	1295,896	2439,024
$A$ [g]	17,046	27,393	21,997
$A/\sqrt{2}$ [g]	12,053	19,370	15,554
$f_1$ [Hz]	479,47	1282,82	2413,40
$f_2$ [Hz]	489,045	1308,87	2464,717
$\Delta f$ [Hz]	9,575	26,05	51,317
$b_p$ [-]	0,00989	0,010051	0,01052
$\alpha$ [rad s <sup>-1</sup> ]	-30,081	-81,838	-161,217
$s$ [rad s <sup>-1</sup> ]	-30,081 + i 3042,708	-81,838 + i 8142,35	-161,217 + i 15324,84

Hodnoty poměrného útlumu jsou pro všechny vlastní frekvence podobné. Konečná velikost, která se použije pro numerický výpočet, je stanovena z aritmetického průměru.

$$b_p = 0,010154$$

Tomu odpovídá tlumení 1%.

### 3.3.1 STANOVENÍ TLUMENÍ TRUBICE

Se známou hodnotou  $b_P$  je možné určit hodnotu  $b_0$  z pohybové rovnice vlastního kmitání.

$$m_T \ddot{x} + b_T \dot{x} + k_T x = 0 \quad (3.4)$$

Kde  $m_T$  je hmotnost trubice,  $b_T$  je skutečné tlumení trubice,  $k_T$  je tuhost trubice,  $x$  je výchylka. Z obecných vztahů v dynamice platí mezi veličinami.

$$b_P = \frac{b_T}{b_{\text{krit}}}$$

$$b_{\text{krit}} = 2 m_T \Omega_0$$

$$\Omega_0^2 = \frac{k_T}{m_T}$$

Kde  $b_{\text{krit}}$  je kritický útlum. Po dosazení těchto vztahů do rovnice (3.4) vzniká následující tvar.

$$\ddot{x} + 2 b_P \Omega_0 \dot{x} + \Omega_0^2 x = 0 \quad (3.5)$$

Rayleigho proporcionální tlumení se zavádí ve tvaru (3.6) [25].

$$b_T = \alpha_R m_T + \beta_R k_T \quad (3.6)$$

Kde  $\alpha_R$  je hmotnostně proporcionální koeficient tlumení,  $\beta_R$  je tuhostně proporcionální koeficient tlumení. Rayleigho tlumení se dosadí rovněž do (3.4) a po úpravě vznikne.

$$\ddot{x} + (\alpha_R + \beta_R \Omega_0^2) \dot{x} + \Omega_0^2 x = 0 \quad (3.7)$$

Následně se porovnají členy v (3.5) a (3.7) odpovídající rychlosti  $\dot{x}$ .

$$2 b_P \Omega_0 = \alpha_R + \beta_R \Omega_0^2 \quad (3.8)$$

Po úpravě je již jasná relace mezi poměrným útlumem a Rayleigho koeficienty.

$$b_P = \frac{1}{2 \Omega_0} \alpha_R + \frac{\Omega_0}{2} \beta_R \quad (3.9)$$

Odkaz [25] uvádí, že koeficient  $\alpha_R$  se uplatňuje pouze v případě pohybu objektu jako tuhého celku. Koeficient  $\beta_R$  se poté uplatňuje při deformaci tělesa. Pokud je cílem stanovit materiálové tlumení, lze uvažovat  $\alpha_R = 0$ . V takovém případě platí vztah, viz odkaz [25].

$$\beta_R E_0 = b_0 \quad (3.10)$$

Potom je relace mezi poměrným útlumem  $b_P$  a tlumením podle Voigtova elementu  $b_0$ .

$$b_0 = \frac{2 E_0 b_P}{\Omega_0} \quad (3.11)$$

Tlumení  $b_0$  vychází frekvenčně závislé, pro analytický model se  $\Omega_0$  nahradí za  $\omega_B$ .

## 4 VYHODNOCENÍ VÝSLEDKŮ

Výstupem z experimentu jsou změřené průběhy tlakových pulsů  $p_k(t)$  v čase ve třech zvolených polohách  $x$  po délce trubice, kde  $k$  udává číslo 1., 2., nebo 3. tlakového snímače. Řešení však nebude probíhat v časové oblasti, ale ve frekvenční. Je proto potřeba vytvořit nové průběhy tlaků v závislosti na frekvenci. Toho je možné docílit s využitím Fourierovy transformace. Na všechny tři tlakové průběhy  $p_k(t)$  se aplikuje FFT.

$$p_k(t) \rightarrow \text{FFT} \rightarrow p_k(\omega)$$

Jelikož je měřený tlak  $p_k(t)$  v podobě diskrétní veličiny, bude mít  $p_k(\omega)$  charakter vektoru komplexních čísel. Ze všech komplexních čísel, které  $p_k(\omega)$  obsahuje, se vybere pouze číslo odpovídající  $\omega_B$ . Při úhlové frekvenci buzení  $\omega_B$  má Fourierova transformace maximální amplitudu a toto číslo  $p_k(\omega_B)$  přímo charakterizuje změřený průběh tlakového pulsu.

$$\widehat{p}_k = p_k(\omega_B)$$

Tlak se stříškou  $\widehat{p}_k$  tedy odpovídá experimentálně změřenému tlaku v podobě jednoho komplexního čísla z výstupu Fourierovy transformace při úhlové frekvenci buzení  $\omega_B$ . Každé měření pro různou budící frekvence  $f_B$  bude mít svoji vlastní trojici čísel  $\widehat{p}_k$ .

### 4.1 ŘEŠENÍ S VYUŽITÍM OKRAJOVÝCH PODMÍNEK Z VÝSLEDKU EXPERIMENTU

Bude provedeno řešení úlohy s využitím výsledků experimentálního měření. Délka trubice se uvažuje jako vzdálenost mezi prvním a třetím tlakovým snímačem, odpovídá 120 mm. Potřebné podmínky pro řešení mají tlakový charakter a jsou následující.

$$x = 0 \quad : \quad p_{x=0} = \widehat{p}_1$$

$$x = L \quad : \quad p_{x=L} = \widehat{p}_3$$

Kde  $\widehat{p}_1$  a  $\widehat{p}_3$  je tlak v místě prvního a třetího tlakového snímače. Po dosazení do rovnice (2.27).

$$\begin{pmatrix} Q \\ \widehat{p}_3 \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\omega_B L}{c_K}\right) & -i \frac{c_K S}{c^2 \rho} \sin\left(\frac{\omega_B L}{c_K}\right) \\ -i \frac{c^2 \rho}{c_K S} \sin\left(\frac{\omega_B L}{c_K}\right) & \cos\left(\frac{\omega_B L}{c_K}\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q \\ \widehat{p}_1 \end{pmatrix}_{x=0}$$

Hodnota průtoku ve stavovém vektoru na počátku se obdrží z rovnice se známými podmínkami.

$$\widehat{p}_3 = -i \frac{c^2 \rho}{c_K S} \sin\left(\frac{\omega_B L}{c_K}\right) Q_{x=0} + \cos\left(\frac{\omega_B L}{c_K}\right) \widehat{p}_1$$

$$Q_{x=0} = \frac{c_K S}{i c^2 \rho} \frac{\cos\left(\frac{\omega_B L}{c_K}\right) \widehat{p}_1 - \widehat{p}_3}{\sin\left(\frac{\omega_B L}{c_K}\right)}$$

Průtoková podmínka se dosadí zpětně do stavového vektoru na počátku pro obecnou polohu  $x$ .

$$\begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\omega_B}{c_K}x\right) & -i \frac{c_K S}{c^2 \rho} \sin\left(\frac{\omega_B}{c_K}x\right) \\ -i \frac{c^2 \rho}{c_K S} \sin\left(\frac{\omega_B}{c_K}x\right) & \cos\left(\frac{\omega_B}{c_K}x\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{c_K S}{i c^2 \rho} \frac{\cos\left(\frac{\omega_B L}{c_K}\right) \widehat{p}_1 - \widehat{p}_3}{\sin\left(\frac{\omega_B L}{c_K}\right)} \\ \widehat{p}_1 \end{pmatrix}_{x=0}$$

Nyní je možné stanovit průběhy tlaku a průtoku podle souřadnice  $x$ .

$$Q(x) = \left( -\cos\left(\frac{\omega_B}{c_K}x\right) \frac{\cos\left(\frac{\omega_B L}{c_K}\right) \widehat{p}_1 - \widehat{p}_3}{\sin\left(\frac{\omega_B L}{c_K}\right)} - \sin\left(\frac{\omega_B}{c_K}x\right) \widehat{p}_1 \right) i \frac{c_K S}{c^2 \rho} \quad (4.1)$$

$$p(x) = -\sin\left(\frac{\omega_B}{c_K}x\right) \frac{\cos\left(\frac{\omega_B L}{c_K}\right) \widehat{p}_1 - \widehat{p}_3}{\sin\left(\frac{\omega_B L}{c_K}\right)} + \cos\left(\frac{\omega_B}{c_K}x\right) \widehat{p}_1 \quad (4.2)$$

Uvedené funkce popisují průběh tlaku a průtoku podle polohy  $x$  mezi prvním a třetím tlakovým snímačem. Pro řešení úlohy je významná souřadnice odpovídající poloze druhého tlakového snímače. Jelikož jsou snímače rozmístěny se stejnou vzdáleností, odpovídá poloha druhého snímače polovině vzdálenosti mezi krajními snímači.

Pro konkrétní  $x$  se vyjádří pouze tlaková funkce, průtoková funkce potřebná není.

$$\widetilde{p}_2 = -\sin\left(\frac{\omega_B L}{c_K 2}\right) \frac{\cos\left(\frac{\omega_B L}{c_K}\right) \widehat{p}_1 - \widehat{p}_3}{\sin\left(\frac{\omega_B L}{c_K}\right)} + \cos\left(\frac{\omega_B L}{c_K 2}\right) \widehat{p}_1 \quad (4.3)$$

Hodnota  $\widetilde{p}_2$  vyjadřuje tlak jako jedno komplexní číslo v místě druhého tlakového snímače z analytického výpočtu. Je však odlišná od tlaku  $\widehat{p}_2$ , který odpovídá hodnotě z experimentálního měření.

Analytický model obsahuje dva volné parametry, se kterými je možné ovlivňovat velikost  $\widetilde{p}_2$ . Tyto dva parametry se vyskytují v komplexní rychlosti zvuku  $c_K$ , pro zopakování viz (2.22).

$$c_K = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{c_0^2} + \frac{2\rho}{E_0 + i\omega_B b_0} \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{2\rho\mu}{E_0 + i\omega_B b_0}} + i\omega_B \frac{b}{\rho}}$$

Konkrétně to jsou – druhá dynamická viskozita tekutiny  $b$  a rychlost zvuku v tekutině  $c_0$ . Změnou velikosti těchto dvou veličin se bude měnit i hodnota  $\widetilde{p}_2$ .

Nyní je třeba využít optimalizační funkce pro hledání hodnoty dvou zmíněných parametrů, aby rozdíl  $\widehat{p}_2$  a  $\widetilde{p}_2$  byl co nejmenší. Nalezením optimálních hodnot  $b$  a  $c_0$  bude analytický model vhodně popisovat změřená data a současně se s ním stanoví původně neznámé hledané veličiny.

## 4.2 ŘEŠENÍ S VYUŽITÍM OKRAJOVÉ PODMÍNKY Z VÝSLEDKU EXPERIMENTU

Předchozí řešení v kapitole 4.1 uvažuje použití dvou krajních tlaků  $\widehat{p}_1$  a  $\widehat{p}_3$  jako okrajových podmínek, přičemž se dohledává hodnota tlaku  $\widehat{p}_2$  mezi nimi. Následující řešení využívá pouze tlak  $\widehat{p}_1$  a druhá okrajová podmínka je v podobě nulového průtoku na opačné stěně trubice. Délka trubice odpovídá 150 mm. Potřebné podmínky pro řešení jsou následující.

$$x = 0 \quad : \quad p_{x=0} = \widehat{p}_1$$

$$x = L \quad : \quad Q_{x=L} = 0$$

Jelikož je charakter okrajových podmínek identický s kapitolou 2.6, je řešení tlakové funkce.

$$p(x) = \left( \sin\left(\frac{\omega_B}{c_K} x\right) \frac{\sin\left(\frac{\omega_B}{c_K} L\right)}{\cos\left(\frac{\omega_B}{c_K} L\right)} + \cos\left(\frac{\omega_B}{c_K} x\right) \right) \widehat{p}_1 \quad (4.4)$$

Následně se tlaková funkce vyčíslí v odpovídající vzdálenosti pro druhý a třetí tlakový snímač. Jednotlivé snímače jsou od sebe vzdálené o 60 mm.

$$\widetilde{p}_2 = \left( \sin\left(\frac{\omega_B}{c_K} 0.06\right) \frac{\sin\left(\frac{\omega_B}{c_K} L\right)}{\cos\left(\frac{\omega_B}{c_K} L\right)} + \cos\left(\frac{\omega_B}{c_K} 0.06\right) \right) \widehat{p}_1 \quad (4.5)$$

$$\widetilde{p}_3 = \left( \sin\left(\frac{\omega_B}{c_K} 0.12\right) \frac{\sin\left(\frac{\omega_B}{c_K} L\right)}{\cos\left(\frac{\omega_B}{c_K} L\right)} + \cos\left(\frac{\omega_B}{c_K} 0.12\right) \right) \widehat{p}_1 \quad (4.6)$$

Hodnoty  $\widetilde{p}_2$  a  $\widetilde{p}_3$  vyjadřují tlak jako jedno komplexní číslo v místě druhého a třetího tlakového snímače z analytického výpočtu. Jsou však odlišné od tlaku  $\widehat{p}_2$  a  $\widehat{p}_3$  z experimentálního měření. Shoda tlaků se opět dohledává s pomocí dvou zmíněných parametrů  $b$  a  $c_0$ .

### 4.3 HLEDÁNÍ OPTIMÁLNÍCH DVOJIC PARAMETRŮ

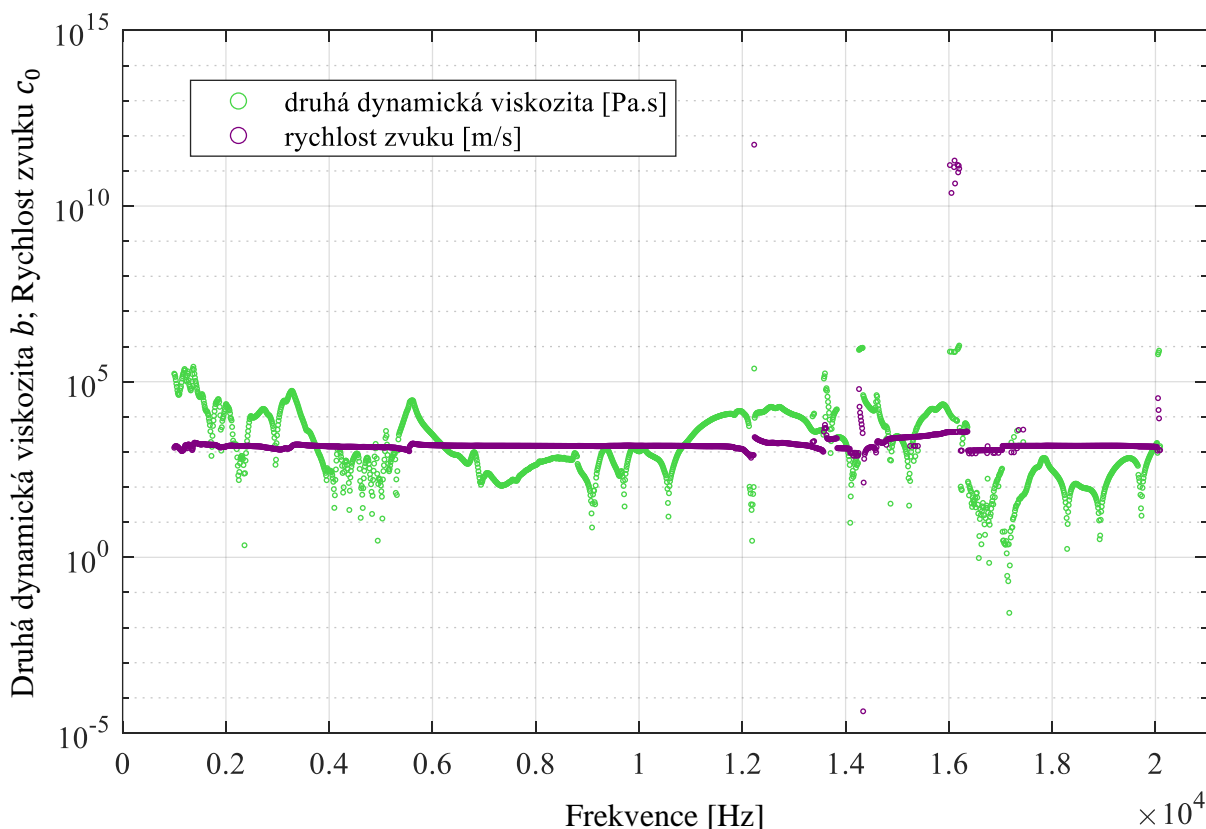
Vhodná metoda hledání optimálních parametrů v programu Matlab je za využití *fminsearch*. Funkce *fminsearch* představuje nelineární řešič, který hledá minimum neomezené funkce více proměnných. Této optimalizační funkci se musí nadefinovat účelová funkce  $U_F(c_0, b)$ . Pro případ dohledávání parametrů podle kapitoly 4.2 má účelová funkce tvar.

$$U_F(c_0, b) = |\widehat{p}_2 - \widetilde{p}_2| + |\widehat{p}_3 - \widetilde{p}_3| \quad (4.7)$$

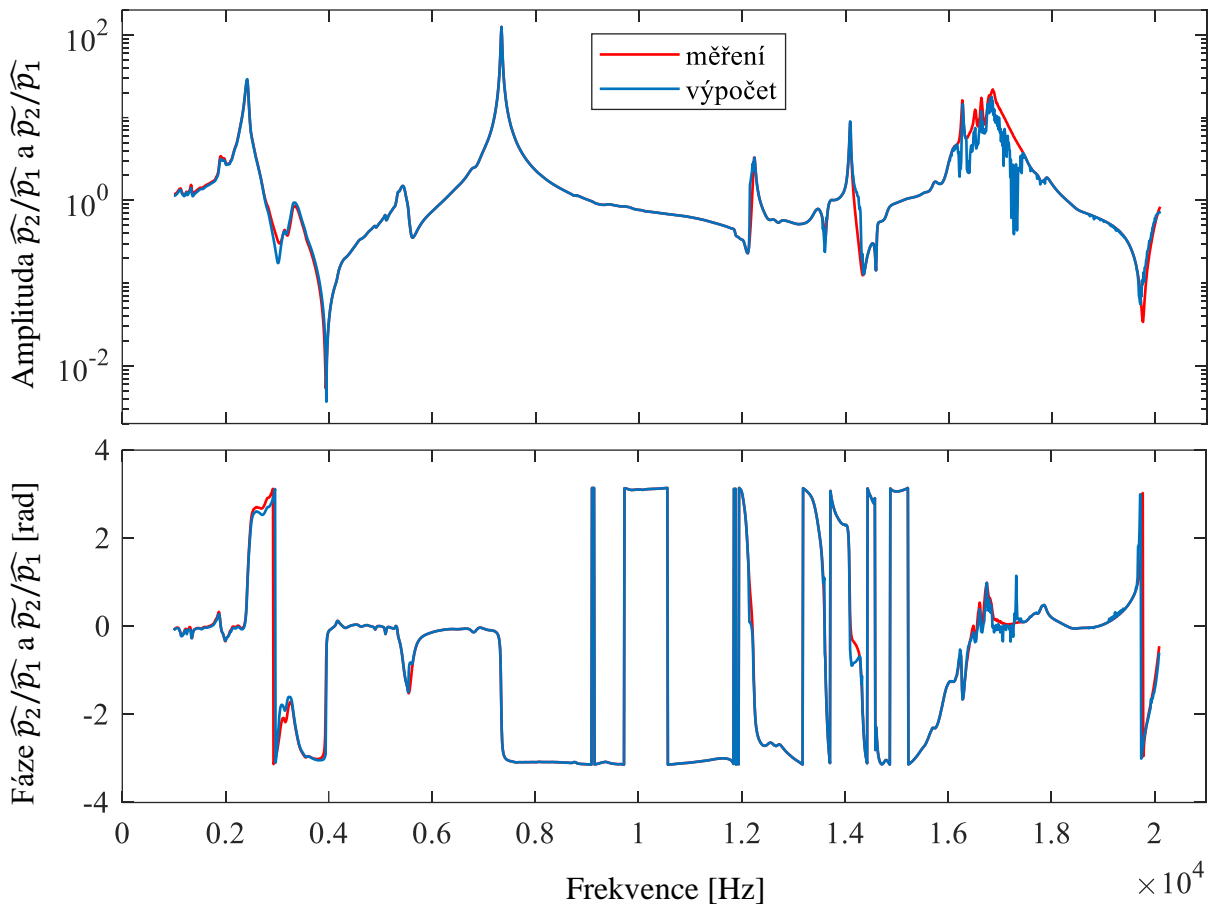
Další vstupní parametr do optimalizační metody je odhad počátečních hodnot hledané rychlosti zvuku  $\bar{c}_0$  a druhé dynamické viskozity  $\bar{b}$ . Účelová funkce může obecně obsahovat více lokálních minim pro různé inicializační hodnoty  $\bar{c}_0$  a  $\bar{b}$ . Funkce *fminsearch* prohledává okolí těchto vstupních hodnot a najde takové optimální hodnoty  $c_0$  a  $b$ , které nejlépe splňují podmínku minima funkce.

Hledání optimálních hodnot bylo provedeno v každé frekvenci pro celý měřený rozsah frekvencí. Pro každou frekvenci se uskutečnilo deset pokusů hledání minima pro různé inicializační hodnoty. Inicializační rozsah  $\bar{c}_0$  byl nastaven na interval  $\langle 1450, 1520 \rangle$ ,  $\bar{b}$  se inicializovala v intervalu  $\langle 500, 10000 \rangle$ . Takže v každém pokusu hledání minima byly náhodně vybrány hodnoty  $\bar{c}_0$  a  $\bar{b}$  z těchto intervalů. Optimalizační funkce poté provedla hledání minima a z deseti pokusů byl vybrán ten s nejmenší chybou. Jak se však ukázalo, funkce *fminsearch* přistupuje k hledání minima velmi agresivně a optimální hodnoty najde i daleko za inicializačními hodnotami. Ve většině případů byla všemi deseti pokusy nalezena stejná hodnota minima.

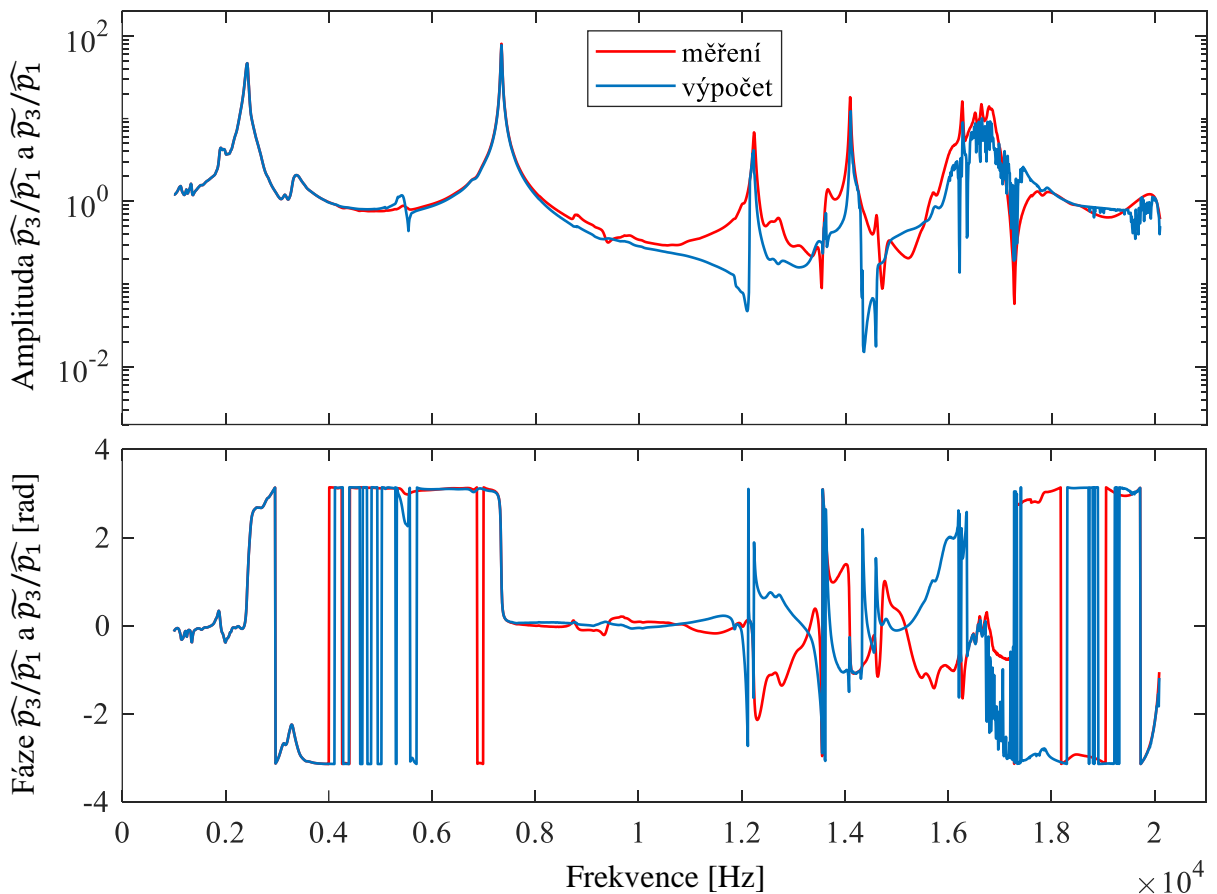
Obrázek 4.1 ukazuje všechny nalezené optimální dvojice parametrů  $c_0$  a  $b$  pro případ statického tlaku 55 bar. Některé parametry jsou vyneseny v absolutní hodnotě.



**Obrázek 4.1** Všechny nalezené optimální dvojice  $c_0$  a  $b$  pro 55 bar



**Obrázek 4.2** Měřený a vypočítaný průběh amplitudy a fáze zesílení tlaku  $\widehat{p}_2/\widehat{p}_1$  a  $\widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1$

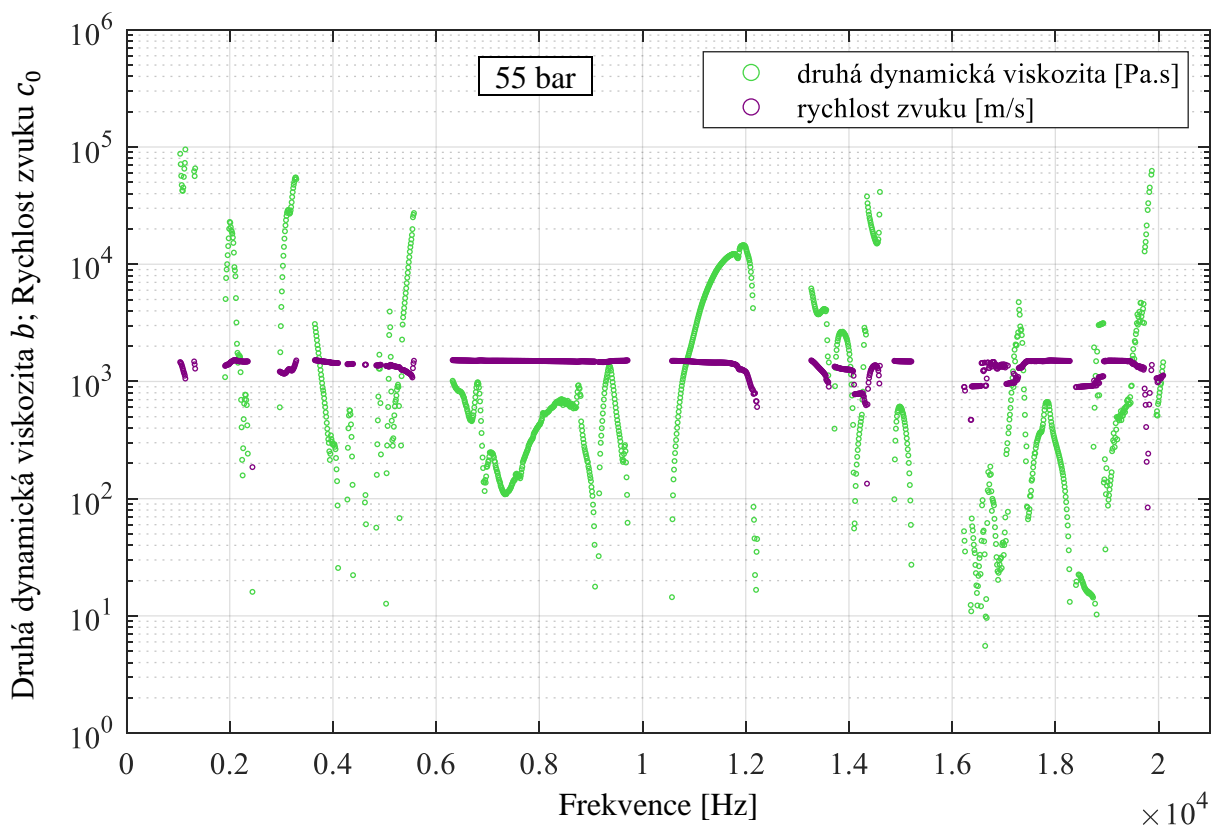


**Obrázek 4.3** Měřený a vypočítaný průběh amplitudy a fáze zesílení tlaku  $\widehat{p}_3/\widehat{p}_1$  a  $\widetilde{p}_3/\widetilde{p}_1$

Obrázek 4.2 a Obrázek 4.3 představují zesílení a fázi tlaků  $\widehat{p}_2$  a  $\widehat{p}_3$  vůči tlaku  $\widehat{p}_1$  prvního snímače. Současně ukazují srovnání výsledku optimalizace s reálnými naměřenými daty. Modré průběhy vznikly při dosazení optimálních dvojic do (4.5) a (4.6). Ve spoustě frekvencích byla dvojice  $c_0$  a  $b$  nalezena správně a oba tlaky jsou současně proloženy téměř přesně. V některých frekvencích je ale možné pozorovat, že řešič upřednostňuje tlak  $\widehat{p}_2$  na úkor  $\widehat{p}_3$ .

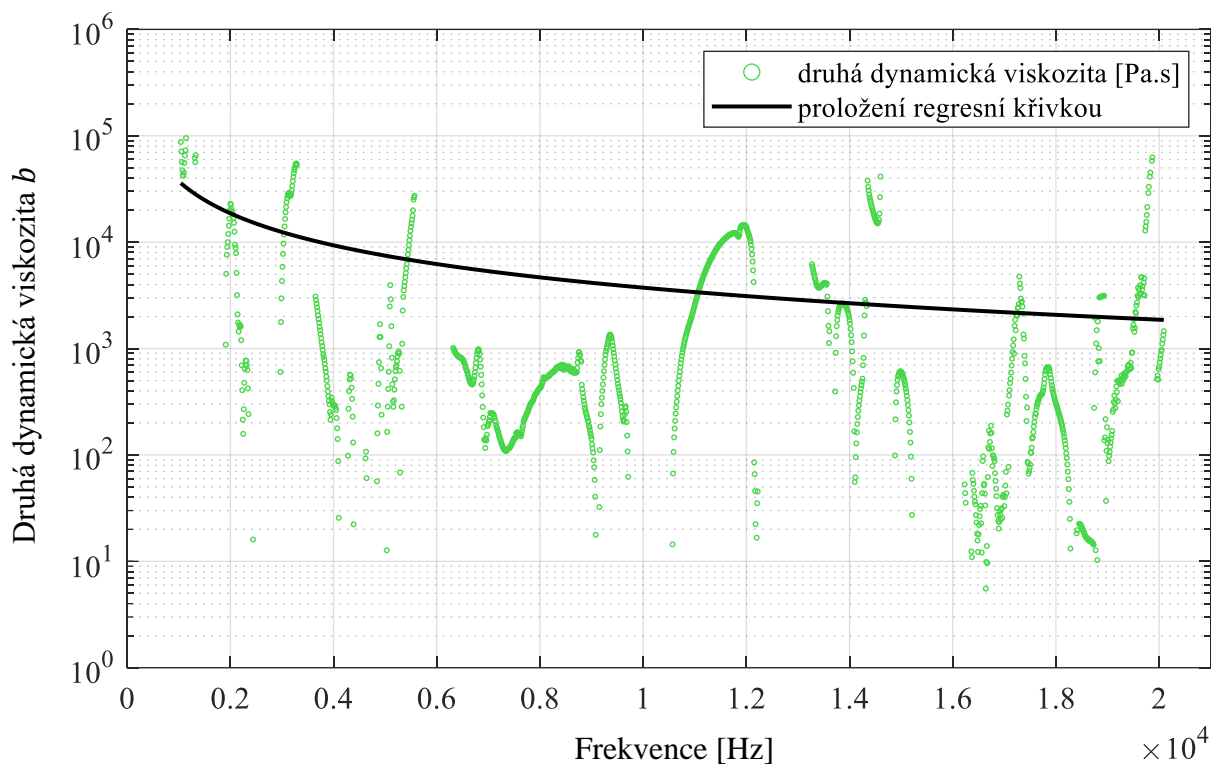
Matematicky je výsledek uspokojivý, fyzikálně však nikoli. Obrázek 4.1 má některé hodnoty  $c_0$  a  $b$  vynesené v absolutní hodnotě. Rychlost zvuku nemůže nabývat záporných hodnot. Podle kapitoly 1.1.3 může být druhá dynamická viskozita i záporná, objemová viskozita  $\zeta$  přitom musí být ale vždy nezáporná. Jelikož je  $\eta$  pro vodu obecně známá s hodnotou 0,001 Pa s, může  $b$  dosáhnout pouze malé negativní velikosti (vyplývá podle vztahu (1.21)). Z toho důvodu se negativní  $b$  zanedbají úplně. Dá se konstatovat, že nalezené negativní hodnoty těchto parametrů nemají žádný význam. Nepřípustné jsou i extrémně malé nebo velké hodnoty.

Úprava optimalizace spočívala v omezení výsledků řešení. Inicializační rozsahy byly ponechány na  $\langle 1450, 1520 \rangle$  pro  $\bar{c}_0$  a  $\langle 500, 10000 \rangle$  pro  $\bar{b}$ . Navýšil se počet pokusů hledání minima z deseti na padesát. Po provedení všech padesáti pokusů byly z výsledků vyfiltrovány všechny dvojice se záporným  $c_0$  nebo  $b$ . Následně se ze zbylých hodnot zahodily všechny, které ležely mimo definovaný interval hodnot. Tento interval se uvažoval pro  $c_0$  jako  $\langle 5, 1520 \rangle$  a pro  $b$  jako  $\langle 5, 100000 \rangle$ . V případě, že pro konkrétní frekvenci nenašel ani jeden z pokusů optimální hodnoty splňující všechny podmínky, byly hodnoty  $c_0$  a  $b$  z frekvenční závislosti vyřazeny.



**Obrázek 4.4** Fyzikálně smysluplné hodnoty dvojic  $c_0$  a  $b$  pro 55 bar

Obrázek 4.4 ukazuje všechny nalezené optimální dvojice parametrů  $c_0$  a  $b$  splňující dodatečné podmínky. Z frekvenční závislosti bylo vyřazeno celkem 688 dvojic. Pro fyzikálně možné hodnoty druhé dynamické viskozity je patrný trend poklesu s rostoucí hodnotou frekvence, místy ale dochází i k razantnímu navýšení hodnoty.

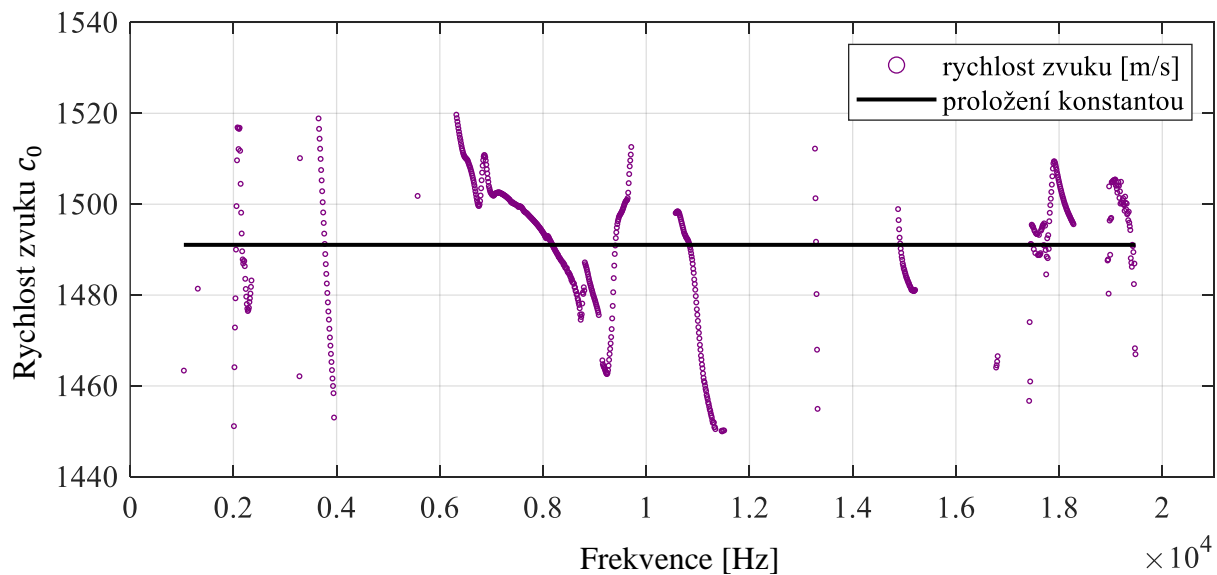


**Obrázek 4.5** Proložení regresní křivkou

Obrázek 4.5 ukazuje proložení druhé dynamické viskozity regresní křivkou. Hyperbolická závislost dohledaná pomocí regresní analýzy je následující.

$$b = \frac{37\,355\,466}{f} \quad (4.8)$$

Vztah byl stanoven s koeficientem determinace jako  $R^2 = 17,86\%$ , koeficient determinace udává míru kvality regrese. Při prvním pokusu o proložení rychlosti zvuku ze všech bodů vyšla její konstantní hodnota jako 1354,4 m/s. Skutečná hodnota by však měla být vyšší. Ze všech nalezených hodnot rychlosti zvuku se pro aproximaci konstantou uvažovaly proto pouze hodnoty v intervalu (1450, 1520). V tomto intervalu by se měla nacházet její skutečná velikost.



**Obrázek 4.6** Proložení konstantou

Konstantní velikost  $c_0$  byla stanovena jako 1491,1 m/s. Pro aproximaci bylo použito 673 frekvencí z celkového počtu 1910. K proložení  $b$  se použilo celkem 1222 frekvencí.

Uvedené hledání optimálních parametrů je pro statický tlak 55 bar. Měření celkově probíhalo pro šest různých statických tlaků. Další měření byly vyhodnoceny identickým postupem. Při změně  $p_s$  se měnila i hustota kapaliny podle Tabulka 5.4. Následující tabulka obsahuje přehledové shrnutí výsledku optimalizace pro všechna měření.

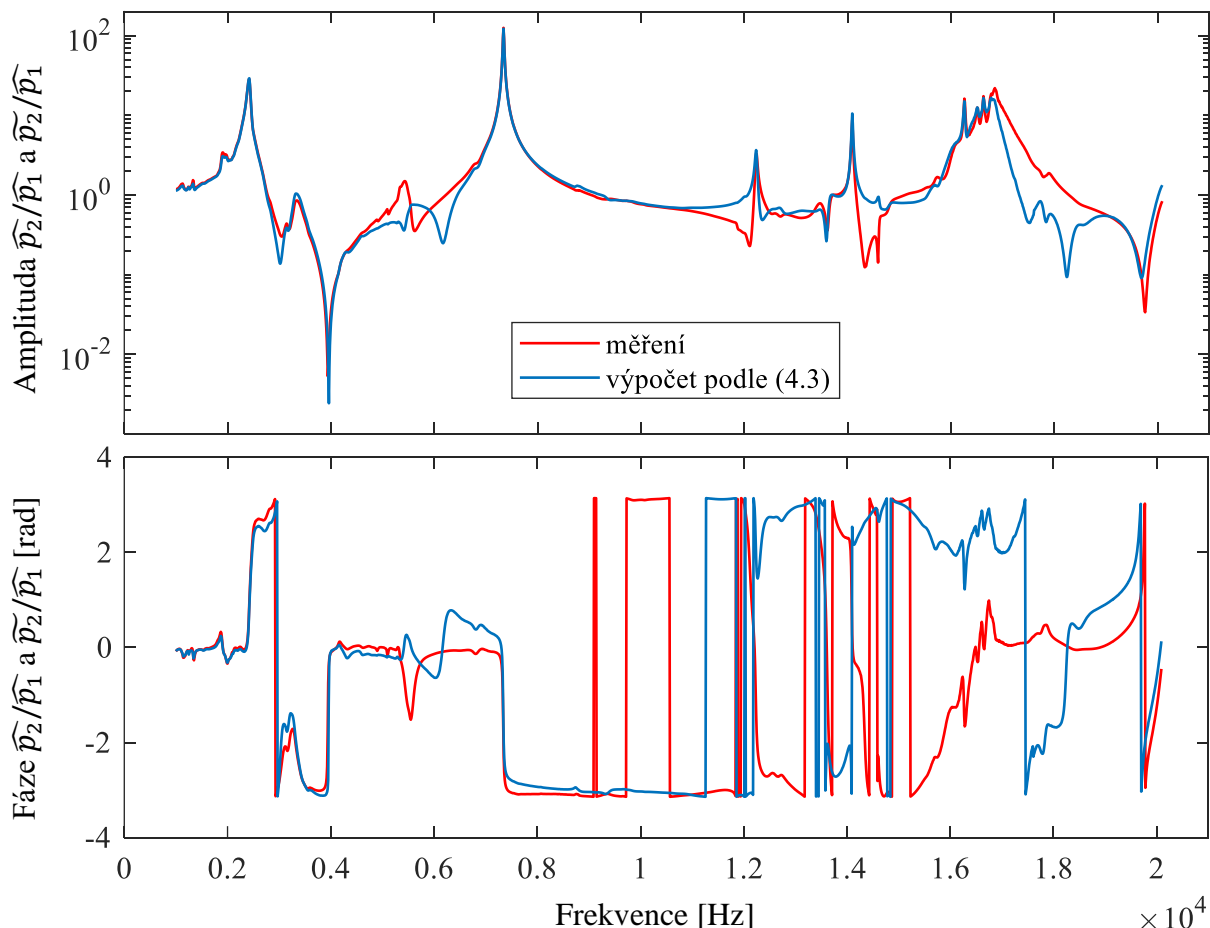
**Tabulka 4.1** Shrnutí výsledků optimalizace funkcí  $f_{minsearch}$

Statický tlak	55 bar	35 bar	22 bar
Regrese $b$ [Pa s]	$\frac{37\,355\,466}{f}$	$\frac{39\,675\,010}{f}$	$\frac{18\,749\,282}{f}$
Použito frekvencí pro $b$	1222	973	1079
Koeficient determinace $R^2$ [%]	17,86	18,61	6,7
Konstanta $c_0$ [m/s]	1491,1	1487,8	1486,7
Použito frekvencí pro $c_0$	673	557	569
Statický tlak	12 bar	8 bar	5 bar
Regrese $b$ [Pa s]	$\frac{35\,157\,432}{f}$	$\frac{37\,184\,225}{f}$	$\frac{26\,690\,031}{f}$
Použito frekvencí pro $b$	1019	1036	1196
Koeficient determinace $R^2$ [%]	29,39	28,85	46,91
Konstanta $c_0$ [m/s]	1481,3	1481,3	1483,3
Použito frekvencí pro $c_0$	669	682	766

Jak je patrné, podstatná část optimálních hodnot  $c_0$  a  $b$  byla nalezena mimo fyzikálně možné řešení. Ve vyřazených frekvencích mohla být kombinace optimální dvojice v podstatě libovolná. Je proto otázkou, jak kvalitně bude analytický model, s využitím výsledků, prokládat naměřená data.

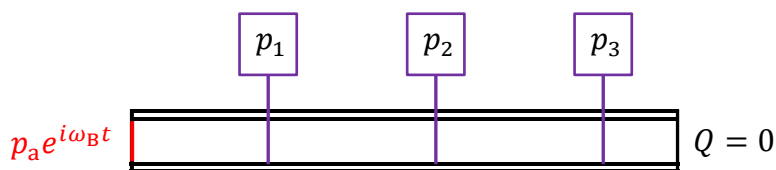
#### 4.4 OVĚŘENÍ VÝSLEDKU

K ověření kvality regrese se použije metodika z kapitoly 4.1. Nalezené funkční předpisy podle Tabulka 4.1 se dosadí do vztahu (4.3) a výsledné zesílení tlaku  $\widehat{p}_2$  se porovná se zesílením  $\widehat{p}_2$  (zesílení vůči  $\widehat{p}_1$ ). Obrázek 4.7 ukazuje srovnání vypočteného a naměřeného tlaku pro 55 bar.

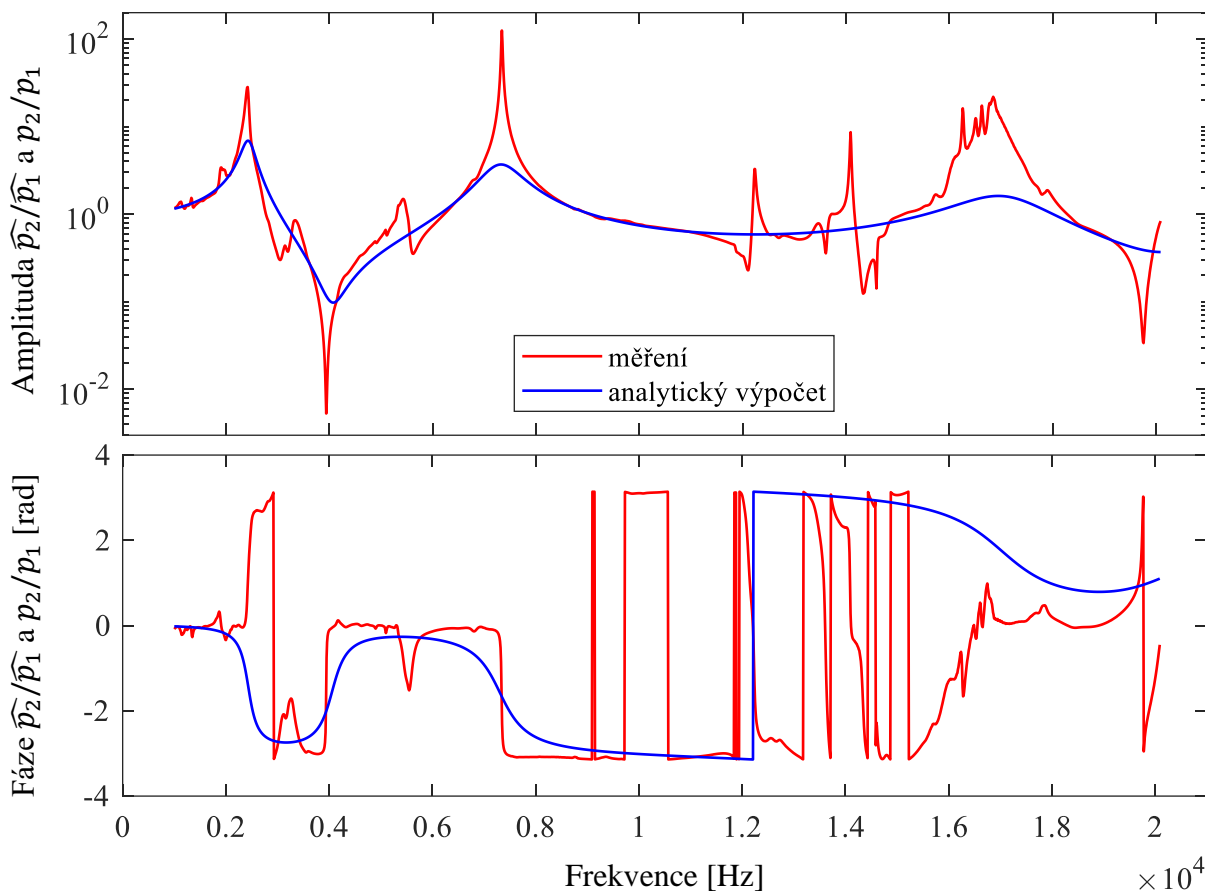


**Obrázek 4.7** Měřený a vypočítaný průběh amplitudy a fáze zesílení tlaku  $\widehat{p}_2/\widehat{p}_1$  a  $\widehat{p}_2/\widehat{p}_1$

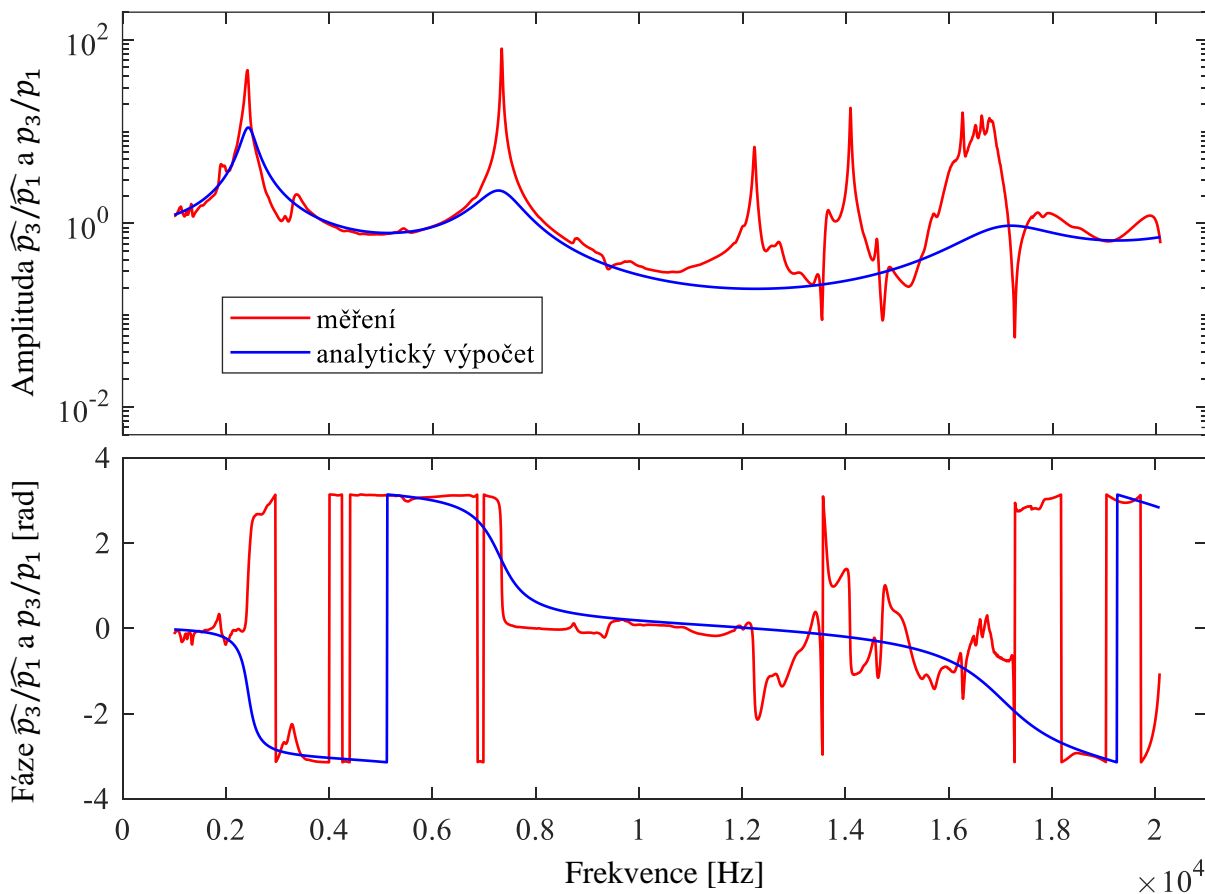
Na první pohled se zdá, že průběhy amplitudy i fáze jsou proloženy velmi dobře. K nejpatrnějším odlišnostem dochází od frekvence 12 kHz. Před konstatováním, že nalezené regresní vztahy z optimalizace pomocí `fminsearch` jsou finální, bude provedeno dodatečné ověření s využitím jiného postupu. Následující postup (viz Obrázek 4.8) využívá identických okrajových podmínek, jako jsou uvedené v kapitole 2.6. Stejně okrajové podmínky jsou i v případě skutečného experimentu, kdy tlaková OP zastupuje kmitající písteček. Vzniklá tlaková funkce (2.30) se sleduje ve třech místech trubice. Tato místa jsou identická s polohou snímačů, ve kterých se měří tlakové průběhy v čase. Délka trubice je 200 mm, rozměry jsou v souladu s Obrázek 3.4. Pro následné vyhodnocení se uvažuje zesílení tlaků  $p_2$  a  $p_3$  vůči tlaku  $p_1$ .



**Obrázek 4.8** Schéma pro vyhodnocení



Obrázek 4.9 Měřený a vypočítaný průběh amplitudy a fáze zesílení tlaku  $\widehat{p}_2/\widehat{p}_1$  a  $p_2/p_1$



Obrázek 4.10 Měřený a vypočítaný průběh amplitudy a fáze zesílení tlaku  $\widehat{p}_3/\widehat{p}_1$  a  $p_3/p_1$

Obrázek 4.9 a Obrázek 4.10 ukazuje porovnání zesílení tlaků  $p_2$  a  $p_3$  vůči tlaku  $p_1$ . Červené průběhy jsou experimentálně změřené. Modré průběhy jsou vypočítané z tlakové funkce (2.30) při dosazení odpovídajících hodnot polohy a úhlové frekvence. Parametry  $b$  a  $c_0$  jsou podle Tabulka 4.1.

Rychlost zvuku  $c_0$  byla nalezena správně, jelikož si místa největšího zesílení odpovídají. Z průběhů je ale patrné, že druhá viskozita utlumuje tlakové pulsy více než by měla. V místech největšího zesílení tlaku jsou vrcholy zaoblené a násobně menší, než bylo určeno experimentálně. To, že vyhodnocení na Obrázek 4.7 i přes to popisuje průběh tlaku věrohodně, je způsobené vnášením naměřených dat  $\widehat{p}_1$  a  $\widehat{p}_3$  do modelu.

Stanovené regresní závislosti  $b$  podle kapitoly 4.3 nejsou úplně správné. Matematicky je závislost  $b$  stanovena dobře. S uvažováním nalezené regrese  $b$  je ale model velmi zatlumený a změřená data nejsou, bez vlivu experimentálních dat, proložena korektně.

#### 4.5 HLEDÁNÍ KOEFICIENTU DRUHÉ DYNAMICKÉ VISKOZITY

Vyhodnocení bude provedeno znovu s využitím odlišného přístupu, přitom se ponechají některé správné závěry z kapitoly 4.3. Pro hledání regresního vztahu  $b$  je využito optimalizační funkce `lsqcurvefit`, která se metodou nejmenších čtverců snaží najít volné parametry tak, aby se požadovaný průběh funkce shodoval s naměřenými daty s co nejmenší chybou (reziduem).

Dohledávaný je pouze jeden volný parametr  $b_{\text{koef}}$ , rychlosti zvuku  $c_0$  se uvažují podle Tabulka 4.1, jelikož jsou stanoveny správně. Druhá dynamická viskozita se uvažuje se závislostí jako.

$$b = \frac{b_{\text{koef}}}{f}$$

Kde  $b_{\text{koef}}$  je koeficient druhé dynamické viskozity. Obecně se může funkce  $b$  uvažovat v libovolném tvaru. V předchozí kapitole 4.3 se k určení regresní křivky zkoušelo použít více různých funkcí, rovnoosá hyperbola však vykazovala nejlepší koeficient determinace.

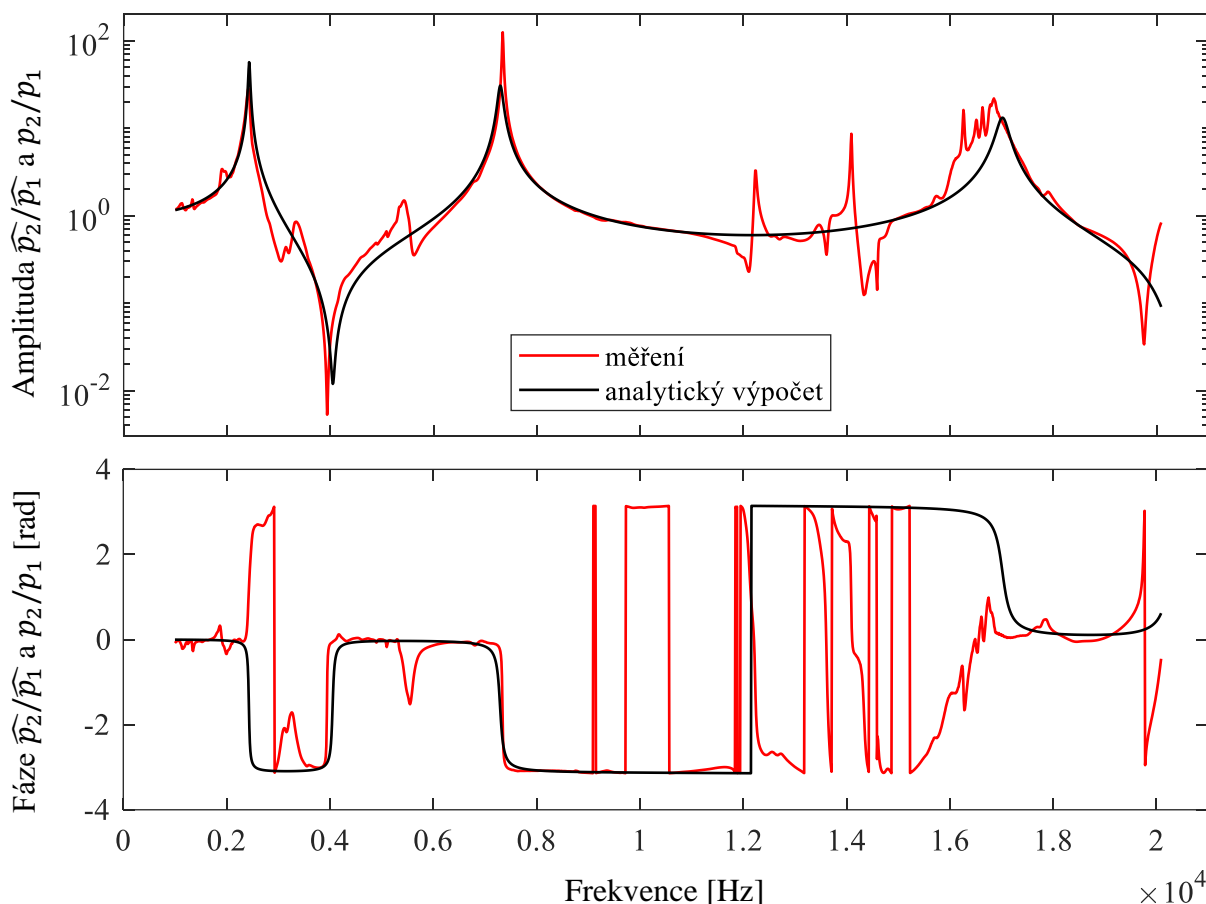
Optimalizace v této kapitole využívá pouze tlaku  $p_2$ , tlak  $p_3$  se neuvažuje. Funkce, která se dohledává, je v podobě zesílení změřeného tlaku.

$$\text{zesílení} = \frac{\widehat{p}_2}{\widehat{p}_1}$$

Účelová funkce  $U_F$  je rovněž v podobě zesílení tlaku  $p_2$  vůči  $p_1$ , obsahuje volný parametr  $b_{\text{koef}}$ .

$$U_F(b_{\text{koef}}) = \frac{\sin\left(\frac{\omega_B}{c_K} 0.11\right) \frac{\sin\left(\frac{\omega_B L}{c_K}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_B L}{c_K}\right)} + \cos\left(\frac{\omega_B}{c_K} 0.11\right)}{\sin\left(\frac{\omega_B}{c_K} 0.05\right) \frac{\sin\left(\frac{\omega_B L}{c_K}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_B L}{c_K}\right)} + \cos\left(\frac{\omega_B}{c_K} 0.05\right)} \quad (4.9)$$

Optimalizační funkce `lsqcurvefit` se snaží najít  $b_{\text{koef}}$  tak, aby účelová funkce  $U_F$  co nejlépe odpovídala zesílení  $\widehat{p}_2/\widehat{p}_1$  přes všechny naměřené frekvence současně.



**Obrázek 4.11** Měřený a vypočítaný průběh amplitudy a fáze zesílení tlaku  $\widehat{p}_2/\widehat{p}_1$  a  $p_2/p_1$

Obrázek 4.11 ukazuje proložení analytického modelu při 55 bar po provedení optimalizace. Hodnota  $b_{\text{koef}}$  byla stanovena jako 4 157 861 [Pa]. Tabulka 4.2 obsahuje hodnoty regresního vztahu  $b$  z optimalizace pro všechna měření. Jelikož je tlakový průběh proložený mnohem přesněji, uvažují se tyto hodnoty jako správné a použijí se jako vstup do numerického řešení a následné porovnání výsledků v kapitole 6.

**Tabulka 4.2** Shrnutí výsledků optimalizace funkcí lsqcurvefit

Statický tlak	55 bar	35 bar	22 bar
Regrese $b$ [Pa s]	$\frac{4\ 157\ 861}{f}$	$\frac{4\ 583\ 588}{f}$	$\frac{4\ 219\ 204}{f}$
Reziduum	35 115	317 731	39 902
Konstanta $c_0$ [m/s]	1491,1	1487,8	1486,7
Statický tlak	12 bar	8 bar	5 bar
Regrese $b$ [Pa s]	$\frac{2\ 932\ 509}{f}$	$\frac{1\ 568\ 550}{f}$	$\frac{3\ 216\ 486}{f}$
Reziduum	34 310	4 425 009	35 418
Konstanta $c_0$ [m/s]	1481,3	1481,3	1483,3

## 5 NUMERICKÉ ŘEŠENÍ

Pro numerické řešení úlohy je využito modulu *Harmonic Acoustics* v programu *Ansys*. V tomto modulu je možné ve frekvenční oblasti sledovat odezvu lineárního systému na harmonické buzení. Modul současně umožňuje modelovat přímo interakci kapaliny s trubicí při vhodném nastavení úlohy. V takovém případě jsou současně řešeny rovnice pro popis tělesa, pohybová rovnice tekutiny a rovnice kontinuity [26].

### 5.1 HARMONIC ACOUSTICS

Celý tento úvod je zpracovaný s využitím vztahů z [27], [28]. Podle *Ansys Theory Reference* [27] jsou výchozí rovnice (1.15) (1.33) zjednodušeny a upraveny pro následující předpoklady.

- Stlačitelná tekutina (změna hustoty v důsledku změny tlaku).
- Tekutina je nevířivá.
- Zanedbání objemových sil.
- Tlakové změny v tekutině jsou malé.
- Tekutina je v klidu, střední rychlost je tedy nulová.
- Předpokládá se ideální, adiabatický plyn.

V takovém případě má rovnice kontinuity tvar.

$$\frac{\partial v_{a,m}}{\partial x_m} = -\frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial p_a}{\partial t} + \frac{Q_M}{\rho_0} \quad (5.1)$$

A linearizovaná pohybová rovnice tekutiny.

$$\frac{\partial v_{a,i}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_a}{\partial x_i} + \frac{4\eta}{3\rho_0^2} \left( -\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial x_i \partial t} + \frac{\partial Q_M}{\partial x_i} \right) \quad (5.2)$$

Kde  $v_a$  je akustická rychlost,  $p_a$  je akustický tlak,  $Q_M$  je hmotnostní zdroj,  $\rho_0$  je střední hodnota hustoty. Akustická rychlost a tlak představují výchylku od rovnovážné polohy. Hmotnostní zdroj  $Q_M$  se v rovnicích objevuje pro zohlednění tohoto možného typu buzení. Vlnová rovnice, kterou *Ansys* řeší, má poté tvar (5.3) [27].

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p_a}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} + \frac{4\eta}{3\rho_0^2 c_0^2} \frac{\partial^3 p_a}{\partial x_i \partial x_i \partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial Q_M}{\partial t} + \frac{4\eta}{3\rho_0^2} \frac{\partial^2 Q_M}{\partial x_i \partial x_i} \quad (5.3)$$

Podle poslední podmínky z uvedených předpokladů, se hodnota objemové viskozity  $\zeta$  pro ideální plyn uvažuje jako nulová. Výše uvedené rovnice tedy pracují s druhou dynamickou viskozitou jako s konstantní veličinou podle (1.25) – to je také důvod pro existenci konstanty  $4/3$  v uvedených rovnicích.

Pro uvážení tlumení vlivem druhé viskozity musí *Ansys* řešit jiný tvar soustavy rovnic, konkrétně *The Full Linear Navier-Stokes Model (FLNS)*. V [27] nejsou uvedené výchozí rovnice pro stanovení FLNS, lze však předpokládat, že to budou obdobné rovnice, jako jsou uvedené například v [28].

Jedná se soustavu pěti rovnic – linearizovanou pohybovou rovnicí tekutiny, rovnicí kontinuity a rovnicí zachování energie. Tento tvar řeší viskózní i tepelné děje uvnitř tekutiny, jelikož viskozita souvisí s disipací energie v podobě tepla.

Řešení proměnných veličin je možné předpokládat ve tvaru [28].

$$v_m(x, t) = v_{a,m}(x) e^{i\omega t}$$

$$p(x, t) = p_0 + p_a(x) e^{i\omega t}$$

$$\rho(x, t) = \rho_0 + \rho_a(x) e^{i\omega t}$$

$$T(x, t) = T_0 + T_a(x) e^{i\omega t}$$

Kde  $T$  je termodynamická teplota. Uvedená řešení dávají najevo, že se veličiny  $v$ ,  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$  periodicky mění okolo rovnovážné polohy 0 s úhlovou frekvencí odpovídající buzení  $\omega$ . Při dosažení předpokládaných řešení do zmíněné soustavy pěti rovnic, se po patřičných úpravách obdrží konečný tvar FLNS modelu [27].

$$i \omega \rho_0 v_{a,m} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( b \delta_{mj} \frac{\partial v_{a,k}}{\partial x_k} + 2 \eta \dot{e}_{mj} - p_a \delta_{mj} \right) = g_m$$

$$i \omega \rho_0 c_p T_a - \kappa \frac{\partial^2 T_a}{\partial x_m \partial x_m} - i \omega p_a = q$$

$$\frac{\partial v_{a,k}}{\partial x_k} - i \omega \frac{T_a}{T_0} + i \omega \frac{p_a}{p_0} = 0$$

Kde  $\kappa$  je teplotní vodivost,  $q$  je zdroj tepla na jednotku objemu,  $c_p$  je měrná tepelná kapacita tekutiny za stálého tlaku. Objemová hustota síly  $g_m$  se dle předpokladů neuvažuje. Tyto tvary všech rovnic je nutné přepsat do vhodného tvaru pro konečný počet prvků. Podle [27] se rovnice násobí testovacími funkcemi a následně se integrují přes objem prvku, více v [27].

Model pracuje s vlivem trubice, podle [27] se proto musí řešit *Fluid-Structure Interaction FSI*. Vzájemné podmínky jsou na ploše interakce  $S_p$  definované jako.

$$S_p: \quad \Sigma_{ij} n_j + p_a n_i = 0 \quad (5.4)$$

$$S_p: \quad {}^S u_i n_i - {}^F u_i n_i = 0 \quad (5.5)$$

Kde  $\Sigma_{ij}$  je tenzor napětí tělesa,  $n_j$  je vektor vnější normály tekutiny,  ${}^S u_i$  je vektor posunutí tělesa,  ${}^F u_i$  je vektor posunutí tekutiny. Tyto dvě podmínky vyjadřují tlakové zatížení od akustického tlaku na ploše v kontaktu s tekutinou a ulpívání tekutiny na stěně tělesa.

Společně s rovnicemi popisující chování tekutiny se musí řešit i rovnice pro popis strukturálního tělesa, kdy na pravá straně vystupuje právě tlakové zatížení od tekutiny.

$$\mathbf{M}_S \ddot{u}_i + \mathbf{C}_S \dot{u}_i + \mathbf{K}_S u_i = f_{S,i} + {}^p f_i \quad (5.6)$$

Kde  $\mathbf{M}_S$  je matice hmotnosti,  $\mathbf{C}_S$  je matice tlumení,  $\mathbf{K}_S$  je matice tuhosti vztahující se ke strukturálnímu tělesu.  $u_i$  je vektor neznámých posunutí,  $f_{S,i}$  je vektor zatížení působící na těleso a  ${}^p f_i$  je vektor zatížení od tlaku tekutiny v kontaktu s tělesem, který se stanoví jako integrál.

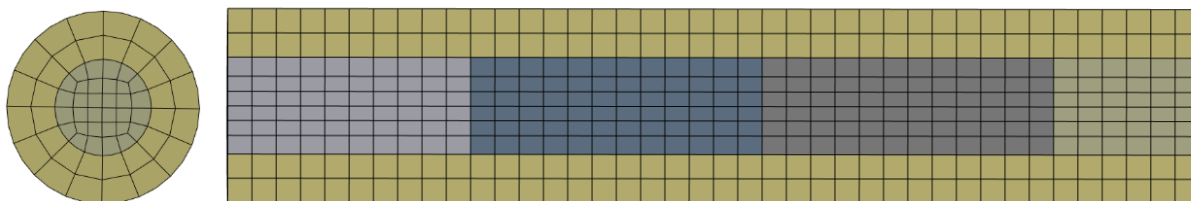
$${}^p f_i = \iint_{S_p} N' p_a n_i dS_p \quad (5.7)$$

Kde  $N'$  jsou bázové funkce aproximující posuv  $u_i$  strukturálních prvků,  $S_p$  je plocha kontaktu tekutiny s tělesem.

## 5.2 GEOMETRIE, SÍŤ, OKRAJOVÉ PODMÍNKY

Model úlohy je složen ze dvou separátních částí představující zvlášť kapalinu a trubici. Pro dosažení vzájemného kontaktu jsou obě tyto domény sjednoceny do jedné součásti s nastavenou topologií jako *Share*. Pro vyhodnocení výsledku v podobě frekvenční odezvy je oblast tekutiny rozdělena pomocí tří ploch na čtyři podoblast, kdy každá plocha odpovídá poloze příslušného tlakového snímače. Těmto plochám jsou přiřazeny odpovídající *Named Selections*.

Pro tvorbu sítě byla využita metoda *MultiZone* pro vytvoření hexaedrální sítě. Velikost prvku pro trubici odpovídá 5 mm, pro kapalinu 5 mm. Obrázek 5.1 ukazuje síť použitou při výpočtu, síť obsahuje pouze šestistěnné prvky. Celkový počet prvků je 2560 s 11489 uzly.



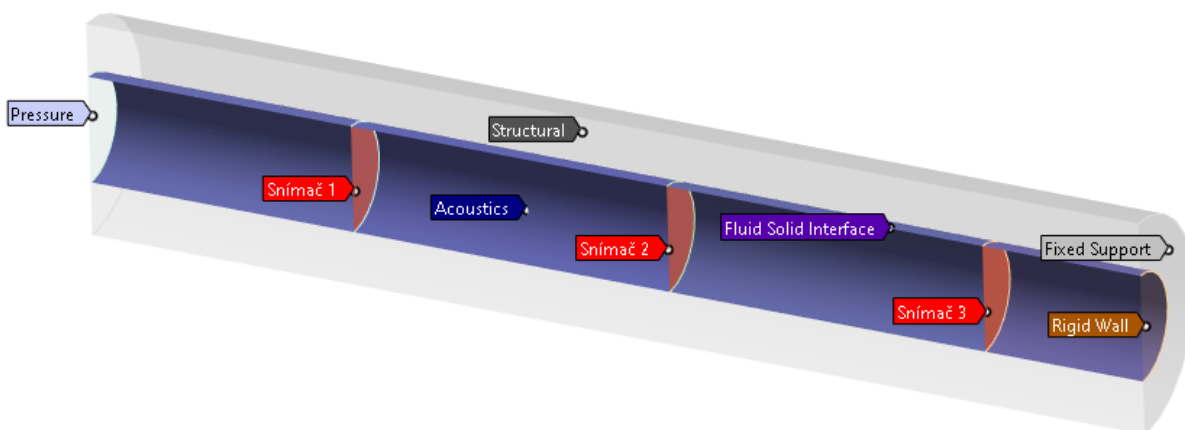
Obrázek 5.1 Ukázka sítě použité pro výpočet

Při nastavování úlohy je nutné vymežit strukturální a akustickou doménu. Toho je docíleno s využitím příkazu *Physics Region* na model trubice jako *Structural* a kapalinu jako *Acoustics*. Při tomto kroku se řešení přepne na FSI, následně je potřeba nadefinovat plochu kontaktu strukturální a akustické oblasti s využitím *Fluid Solid Interface* (viz Obrázek 5.2).

Ansys automaticky přiřadí regionu strukturální SOLID nebo akustické FLUID prvky podle typu fyzikální oblasti. Při řešení se právě rozpozná rozhraní mezi těmito prvky a předepíší se *strongly coupled FSI interfaces* právě mezi akustickými a strukturálními prvky. Stupně volnosti (*Degrees of Freedom DOF*) tlaku a posunutí se na *Fluid Solid Interface* řeší současně. [26]

Řád prvku je zvolen jako kvadratický, jsou proto využity elementy SOLID186 a FLUID220. Přesný typ užitých elementů lze dohledat v souborech úlohy. Zmíněné 3D prvky odpovídají hexaedrům s 20 uzly. Prvek SOLID186 obsahuje v každém uzlu 3 DOF (tři posuvy v osách) celkem má tedy 60 neznámých parametrů. Prvek FLUID220 obsahuje v každém uzlu 9 DOF (tři posuvy v osách, tři rychlosti v osách, tlak, teplotu a hustotu akustické energie). Jeden prvek FLUID220 má ve vší obecnosti celkem 180 neznámých parametrů. [29]

Pro řešení úlohy se využily dvě *Acoustic Boundary Conditions* tlakového a průtokového charakteru. Tlaková okrajová podmínka je umístěna na plochu odpovídající čelu pístu uvnitř trubice v kontaktu s kapalinou. Využívá se jako buzení za pomoci příkazu *Pressure*, ten v příslušném místě definuje velikost akustického tlaku. Průtoková okrajová podmínka je v místě existence pevné stěny v délce odpovídající  $L = 200$  mm. Je realizována za pomoci příkazu *Rigid Wall*, který definuje plochu jako neprůtočnou. Na čelo trubice, ke které je ve skutečnosti přivařen masivní disk, se navíc předepsala podmínka *Fixed support*.



**Obrázek 5.2** Model trubice a kapaliny s označením důležitých míst

### Mesh Independence Study

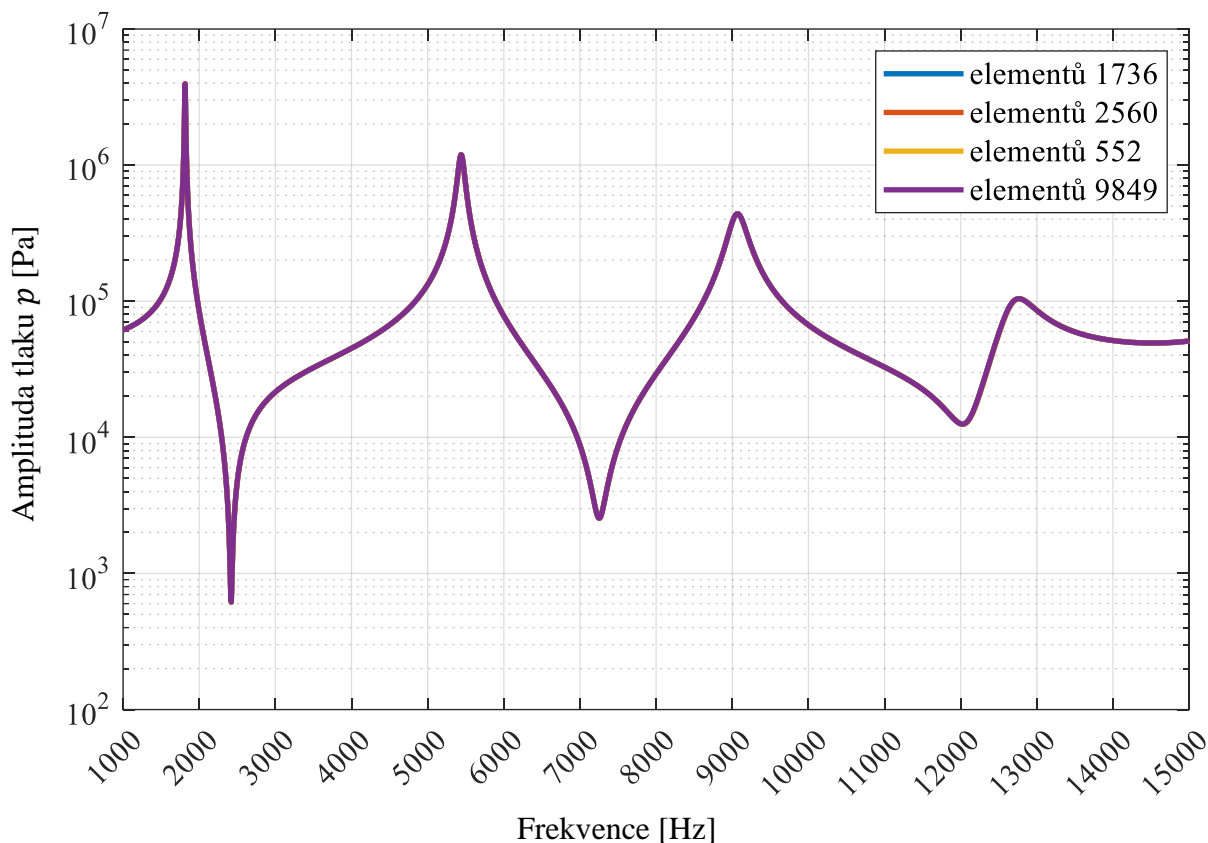
Byla provedena *Mesh Independence Study* za účelem zjištění, pro jakou síť je nejvhodnější provádět numerický výpočet. Porovnávány byly celkem čtyři sítě s různými velikostmi prvku. Všechny jsou složeny z hexaedrů s kvadratickým řádem. Tabulka 5.1 ukazuje počet uzlů a elementů pro každou porovnávanou síť.

**Tabulka 5.1** Počet elementů a uzlů uvažovaných sítí

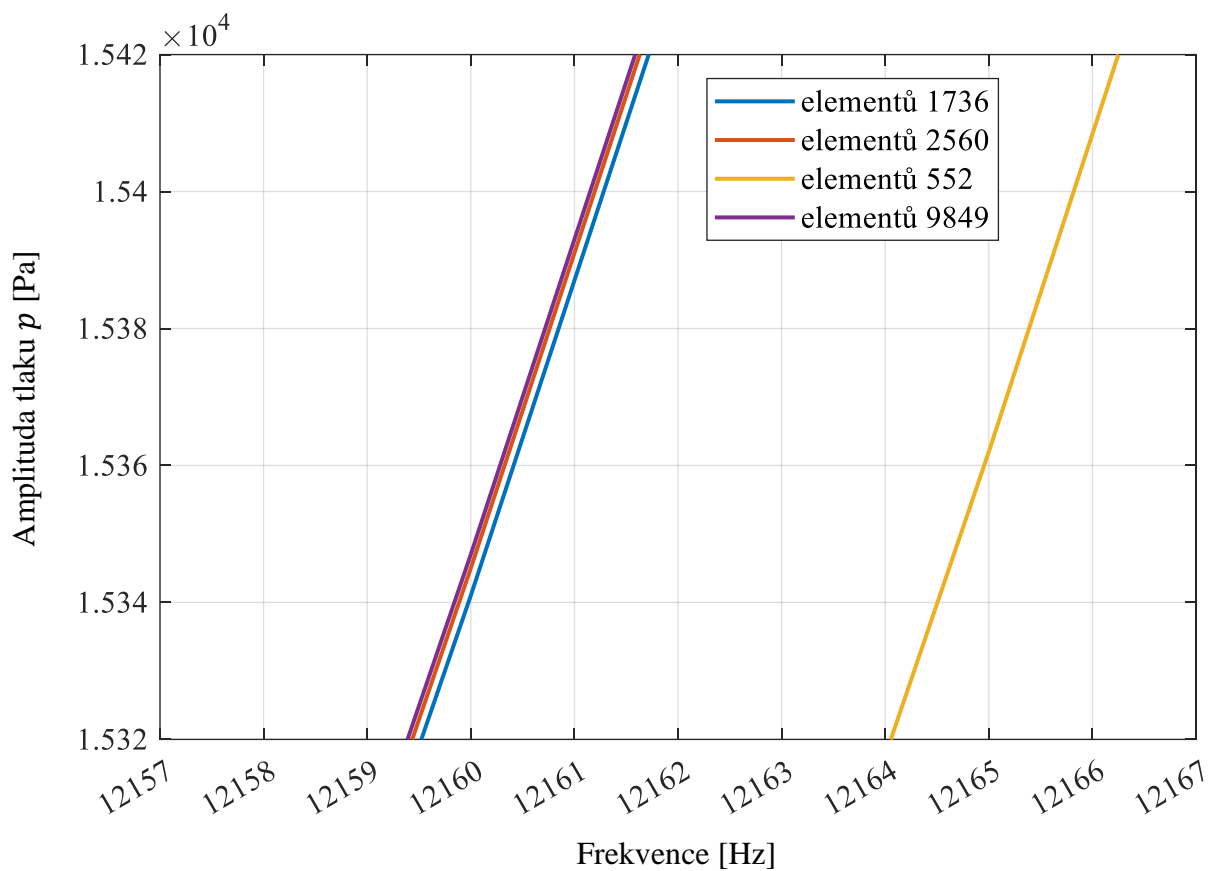
	Počet elementů	Počet uzlů
Síť 1	552	2770
Síť 2	1736	7935
Síť 3	2560	11489
Síť 4	9849	42814

Pro porovnání výsledků jsou na Obrázek 5.3 uvedeny průběhy závislosti amplitudy tlaku na frekvenci v místě odpovídající prvnímu tlakovému snímači pro všechny čtyři sítě. Nejsou uvedeny hodnoty tlumení ani dalších použitých parametrů, protože na jejich velikosti v tomto případě nezáleží. Záleží pouze na tom, jak se výsledky jednotlivých sítí navzájem shodují.

Na první pohled se všechny čtyři průběhy překrývají. Dalo by se konstatovat, že k výpočtu je patrně vhodné použít všechny sítě. Při bližším přiblížení je však možné pozorovat odchylky v jednotlivých řešeních viz Obrázek 5.4.



Obrázek 5.3 Závislost amplitudy tlaku na frekvenci v místě tlakového snímače – Snímač 1



Obrázek 5.4 Ukázka rozdílných výsledků pro různé velikosti sítě

Je patrné, že sítě s 1736, 2560 a 9849 elementy dávají už velmi podobné výsledky, zatímco síť s 552 elementy dává výsledky horší. Hodnoty odpovídající síti s 2560 prvky jsou téměř shodné s výsledky sítě s 9849 prvky. K výpočtu je proto nejvhodnější použít síť 3, tato síť je zobrazena na Obrázek 5.1. Základní parametry kvality sítě jsou uvedeny v Tabulka 5.2.

**Tabulka 5.2** Průměrné hodnoty kvality sítě 3

Mesh Quality	Average Value
Element Quality	0,89225
Aspect ratio	1,6373
Skewness	0,15003

### 5.3 NASTAVENÍ ÚLOHY

#### Engineering data

Materiál trubice odpovídá AISI304 s příslušnou hodnotou modulu pružnosti v tahu  $E_0$ , Poissonova čísla  $\mu$  a tlumením materiálu  $b_0$  potřebného pro analytický model. V Ansysu se však tlumení materiálu nastavuje za pomoci poměrného útlumu  $b_p$ , který se do definuje přes *Material Dependent Damping*, toto tlumení je frekvenčně nezávislé. Tabulka 5.3 obsahuje použité hodnoty materiálových parametrů trubice pro numerický výpočet. Materiálové parametry jsou dohledatelné v materiálových listech, tlumení je stanoveno v kapitole 3.3.

**Tabulka 5.3** Použité hodnoty parametrů trubice

Trubice	
$E_0$	193 [GPa]
$\mu$	0,29 [–]
$\rho_T$	7930 [kg m <sup>-3</sup> ]
$b_p$	0,010154 [–]

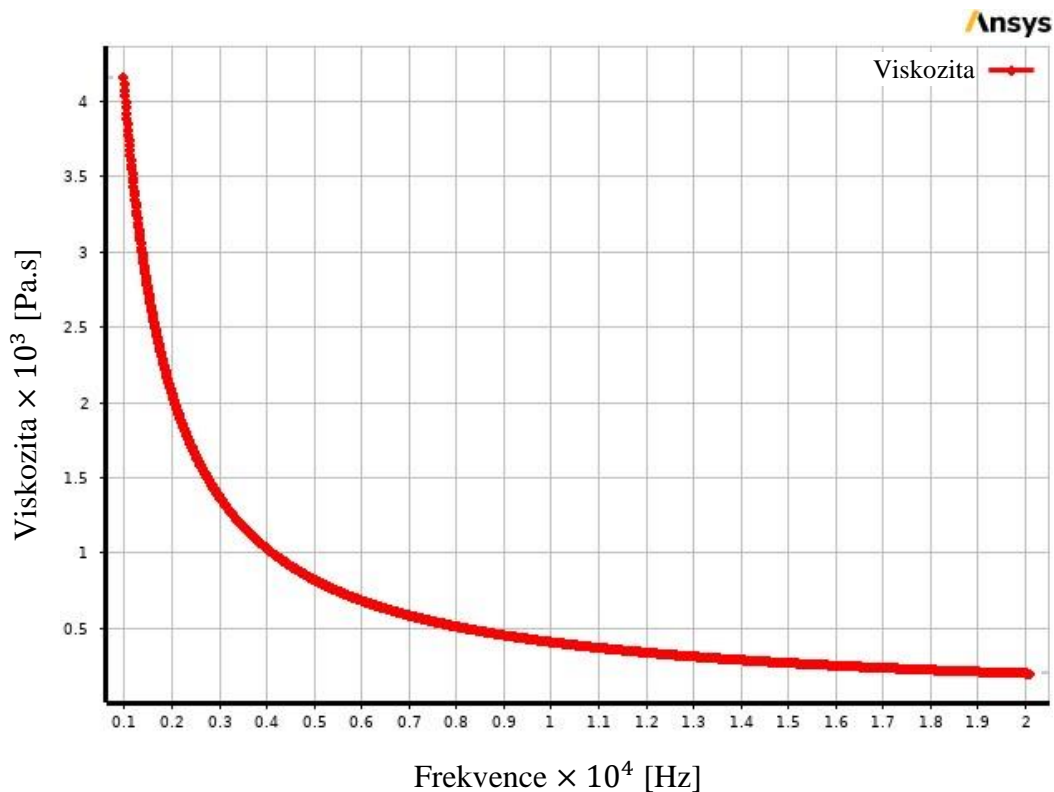
Materiál kapaliny odpovídá vodě, vstupní parametry jako rychlost zvuku  $c_0$  a druhá dynamická viskozita  $b$  se dosazují z výsledku numerické optimalizace (viz Tabulka 4.2). Výpočet je prováděn pro různé hodnoty statického tlaku, přičemž hustota kapaliny je na statickém tlaku závislá. Tabulka 5.4 uvádí použité hodnoty hustoty pro různé statické tlaky při teplotě 20°C, hodnoty jsou stanoveny podle volně dohledatelných tabulek založených na IAPWS-IF97 [30].

**Tabulka 5.4** Hustota vody v závislosti na statickém tlaku při 20°C

	55 bar	35 bar	22 bar	12 bar	8 bar	5 bar
Hustota $\rho$ [kg m <sup>-3</sup> ]	1000,7	999,8	999,2	998,7	998,5	998,4

Průběh závislosti hustoty vody na statickém tlaku podle IAPWS-IF97 je uveden v Příloha A.

Druhá viskozita  $b$  není konstantní, musela se tedy nadefinovat za pomoci tabulárního pole (výsledný graf pro hodnotu statického tlaku 55 bar viz Obrázek 5.5). Aby Ansys počítal s druhou dynamickou viskozitou jako frekvenčně závislou veličinou, bylo nutné v nastavení systému změnit výchozí oddělovač desetinných míst z čárky na tečku.



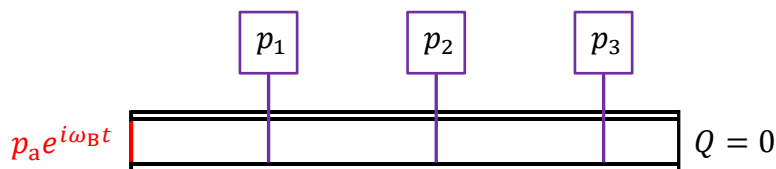
Obrázek 5.5 Hyperbolická závislost druhé dynamické viskozity v Ansysu

### Analysis settings

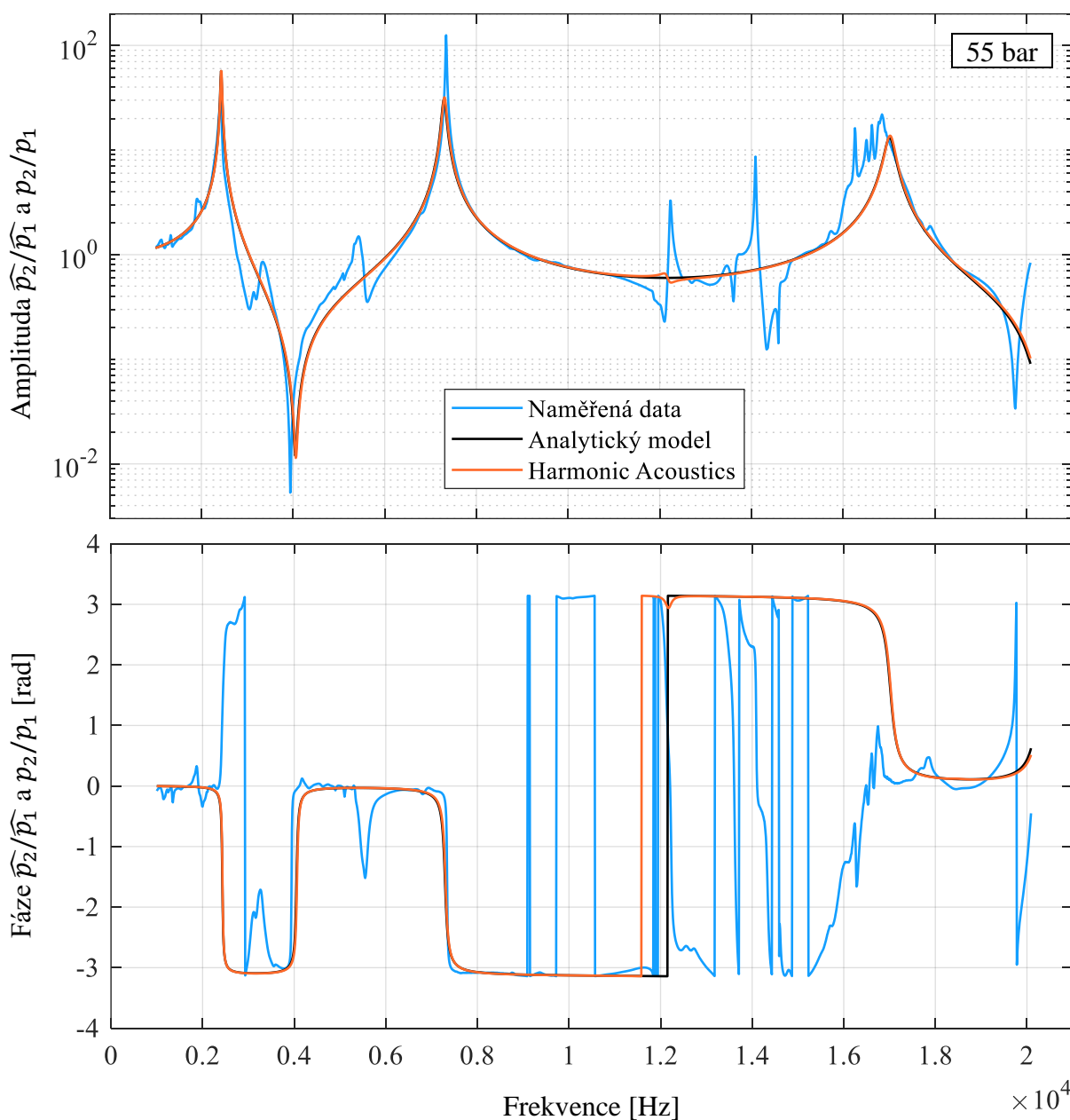
Statický tlak se akustickému regionu nadefinoval v *Advanced Settings* jako *Reference Static Pressure*. Amplitudová frekvenční charakteristika byla stanovena pro 1910 frekvencí, krok na frekvenci byl 10 Hz. Frekvence pokryly vždy celý měřený rozsah příslušného statického tlaku. Výsledkem numerického výpočtu jsou tři *Frequency Response* grafy akustického tlaku v místech tlakových snímačů (viz Obrázek 5.2).

## 6 POROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ

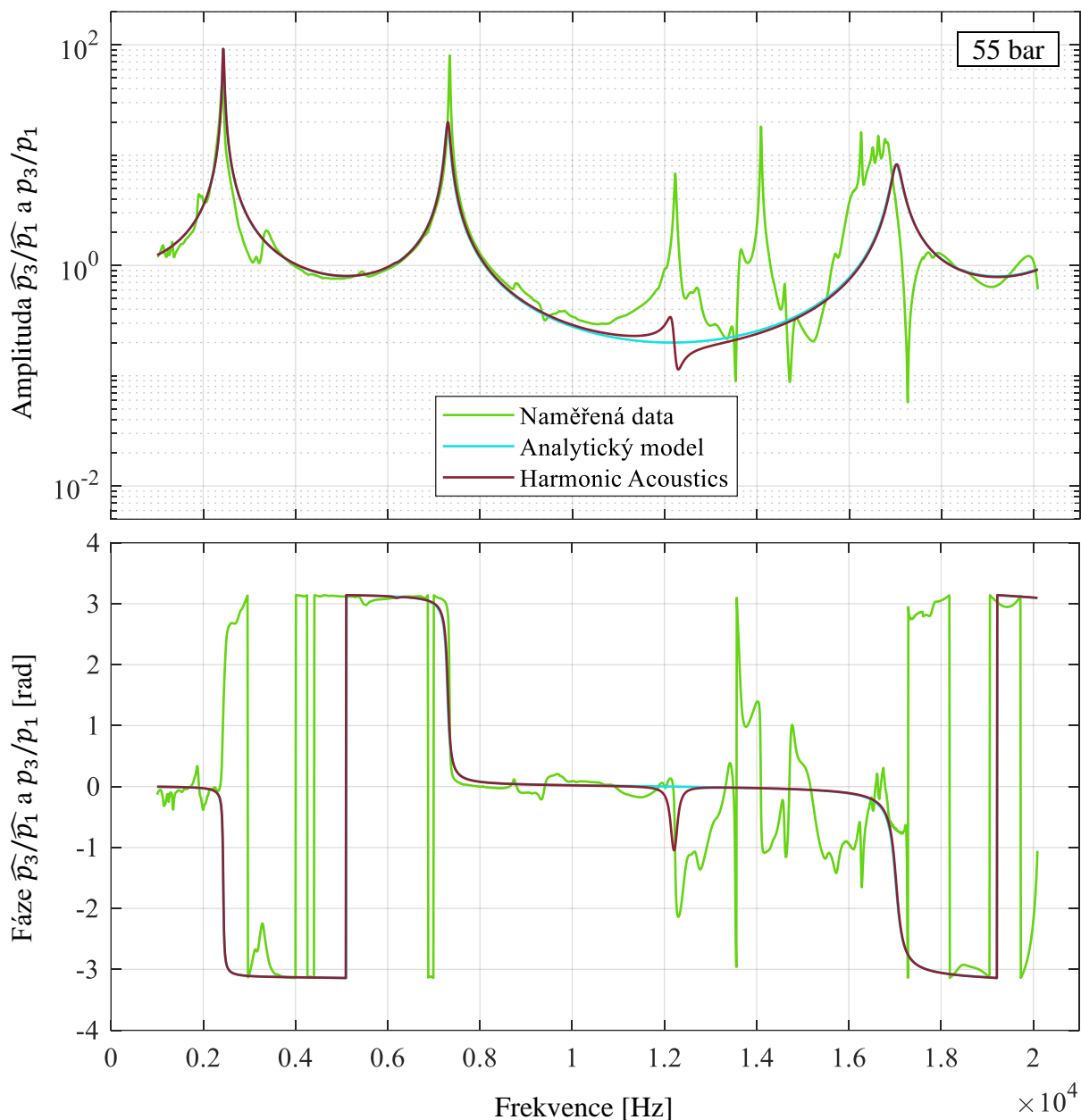
Porovnání výsledků bude obdobné, jako je uvedeno v kapitole 4.4. Pro zopakování se znovu uvede Obrázek 4.8. Pro porovnání se uvažuje zesílení tlaků  $p_2$  a  $p_3$  vůči tlaku  $p_1$ .



Obrázek 6.1 Schéma pro vyhodnocení



Obrázek 6.2 Porovnání průběhu amplitudy a fáze zesílení tlaku  $\widehat{p}_2/\widehat{p}_1$  a  $p_2/p_1$  pro 55 bar



**Obrázek 6.3** Porovnání průběhu amplitudy a fáze zesílení tlaku  $\widehat{p}_3/\widehat{p}_1$  a  $p_3/p_1$  pro 55 bar

Obrázek 6.2 a Obrázek 6.3 obsahují srovnání analytického výpočtu s výpočtem z programu Ansys vůči naměřeným datům. Frekvence největšího zesílení jsou v okolí 2430 Hz, 7340 Hz a 16850 Hz. Při těchto frekvencích dochází k tomu, že v místě prvního PCB snímače je nejmenší akustický tlak, tzn odpovídá uzlu tlaku. Naopak místa největšího zesílení jsou v okolí 3940 Hz, 19760 Hz. Obě tyto frekvence odpovídají tlakovému uzlu v místě druhého snímače.

Analytický model popisuje věrohodně viditelná hlavní zesílení tlaků  $p_2$  a  $p_3$ , v průběhu naměřených dat lze ale pozorovat i další frekvence, ve kterých dochází k zesílení nebo zeslabení tlaku, ale analytický model je neprokládá. Tato zesílení mohou být způsobené dodatečnými jevy nesouvisejícími s kapalinou. Bližší popis výsledků je uveden v kapitole 7. Porovnání dalších statických tlaků je dohledatelné v přílohách (Příloha H až Příloha Q).

## 7 DISKUZE

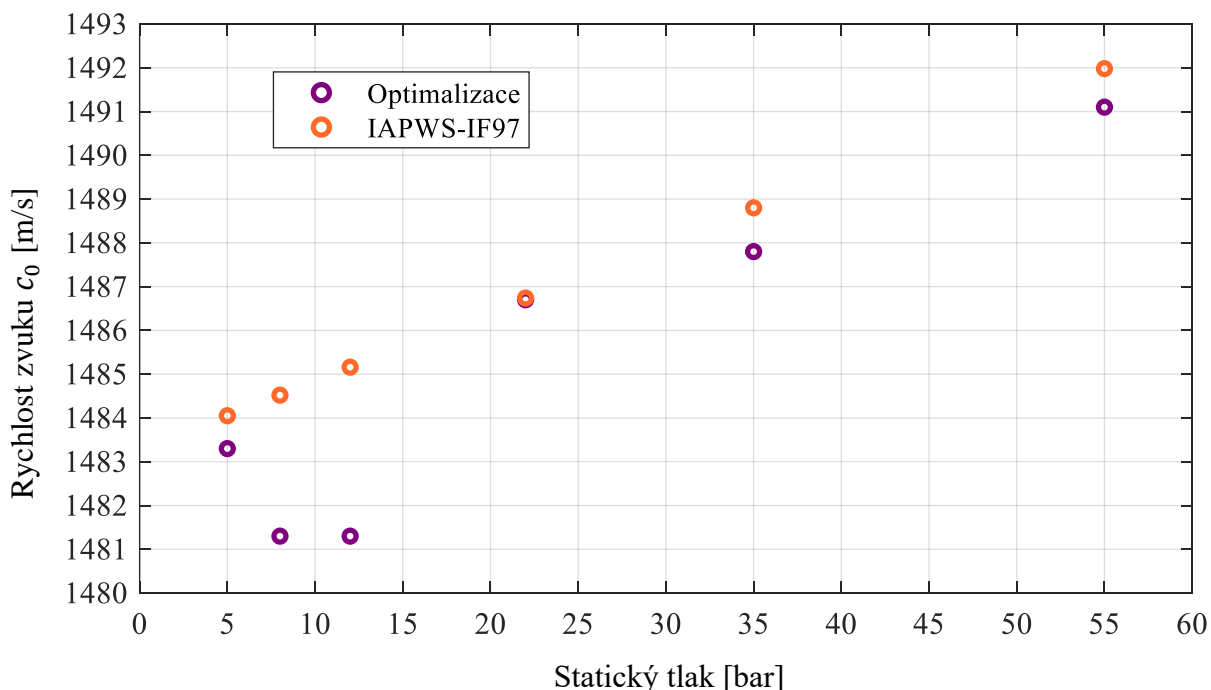
Analytický model zohledňuje vliv trubice na tlakové pulsy pouze v omezené míře. Hlavní předpoklad spočíval v tom, že trubice bude tlakové pulsy tlumit a zpomalovat a nebude je ovlivňovat jiným způsobem. Použitá trubice pro experiment nesplňuje předpoklady tenkostěnného tělesa, jelikož má šířku stěny 10 mm. Modelovala se proto tlustostěnná s dvouosou napjatostí.

Z prvotního předpokladu se uvažovalo, že se trubice bude pouze nafukovat, tzn měnit velikost svého vnitřního poloměru podle velikosti tlaku kapaliny uvnitř. Kmitání trubice jako celku se v analytickém modelu vůbec neuvažovalo. Na naměřených datech lze ale pozorovat, že při některých frekvencích, se v průběhu tlaku projevují i děje, které nebyly spojené přímo s úlohou ve smyslu 1D modelu. Tyto děje nelze 1D modelem popsat, lze je pozorovat v okolí 3,4 kHz, 5,3 kHz nebo od frekvence 12 kHz. Může se jednat třeba o ohybové kmitání trubice apod., taky se může jednat o kmitání samotného pístku nebo i připojovací tyče. To, který jev jak konkrétně ovlivňuje tlakové pulsy, by potřebovalo hlubší prozkoumání možných vlivů.

Další negativní vliv na tlakové pulsace může mít kvalita vnitřního povrchu trubice. Aby došlo k montáži tlakových PCB snímačů, musely se po délce vyvrtat díry pro tlakové odběry. Ačkoli bylo snahou se nedokonalostí po vrtání zbavit, nemusely být zcela odstraněny.

### Rychlost zvuku

Teoreticky by se měla  $c_0$  zvyšovat s rostoucí hodnotou statického tlaku  $p_s$ . Fakt je dán kompaktnějším naskládáním jednotlivých molekul látky u sebe. Obrázek 7.1 ukazuje porovnání nalezených hodnot s teoretickými hodnotami stanovených dle IAPWS-IF97. Vlastnosti vody podle IAPWS-IF97 mají oblast platnosti v rozmezí 0 až 800 °C a 0,00611 až 1000 bar [31].



Obrázek 7.1 Srovnání výsledku optimalizace  $c_0$  s IAPWS-IF97 pro teplotu 20 °C

Teplota vody se předpokládala 20 °C. Při porovnání s hodnotami dle IAPWS-IF97 lze pozorovat, že všechny  $c_0$  byly stanoveny níže, než odpovídá skutečnosti. To odpovídá předpokladu, kdy se uvažuje ovlivnění  $c_0$  stěnami trubice.

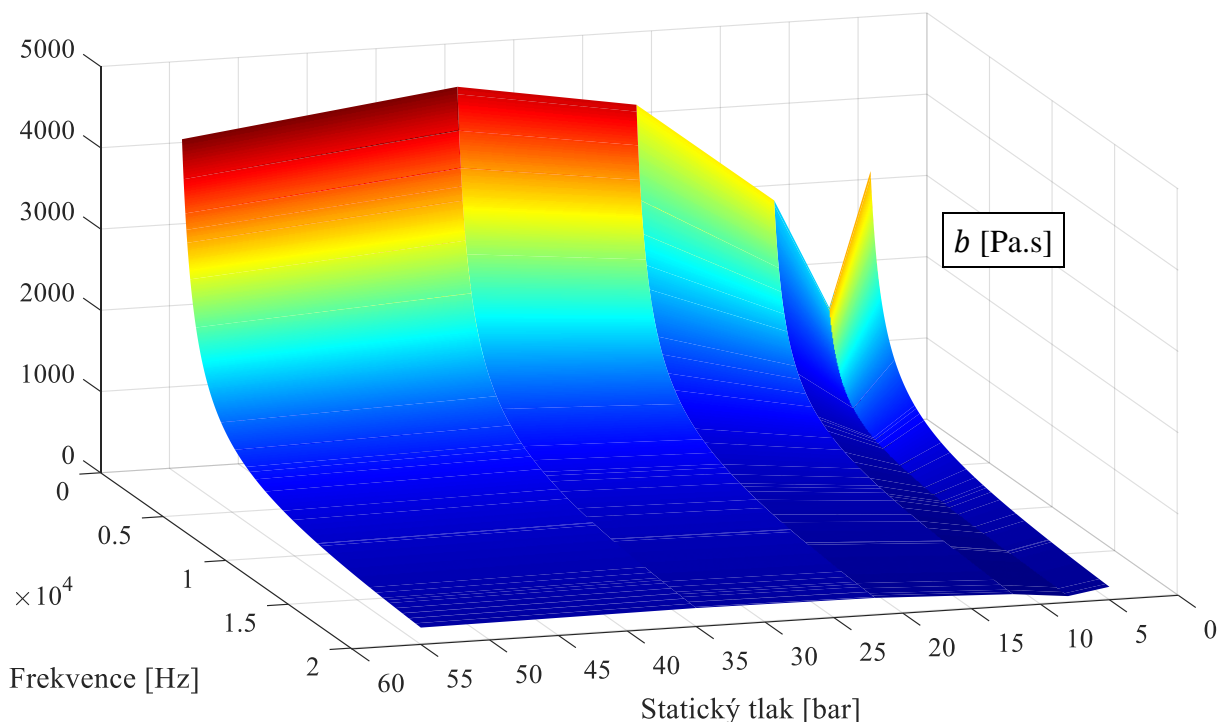
Trend nárůstu kopírují pouze čtyři statické tlaky 5, 22, 35 a 55 barů. Pro 8 a 12 barů byla nalezená rychlost zvuku značně odlišná vůči skutečnosti. Pro 22 barů je naopak  $c_0$  stanovena velmi blízko teoretické hodnotě. Hodnoty  $c_0$  byly podle Tabulka 4.1 stanoveny ale patrně správně, místa největšího zesílení si při porovnání výsledků odpovídají (viz Obrázek 6.2, Obrázek 6.3; Příloha H až Příloha Q). Je otázkou, proč jsou výrazně podhodnoceny pouze tlaky 8 a 12 bar, když je vyhodnocení výsledků pro všechny  $p_s$  identické. Možným vysvětlením může být špatné odvodnění před experimentálním měřením, obsah vzduchu v kapalině nepříznivě ovlivňuje velikost  $c_0$ .

Měření mělo být dodatečně provedeno pro více  $p_s$ , důvodem pro neuskutečnění těchto měření je omezení PCB snímačů do maximálního tlaku 6,895 MPa. Po vyhodnocení i vyšších tlaků by se dalo určit, jestli nárůst  $c_0$  dále kopíruje skutečnou lineární závislost na  $p_s$  (viz Příloha B).

Nalezení nižších hodnot  $c_0$  vůči IAPWS-IF97 je očekávané kvůli trubici. To, že jsou hodnoty jen nepatrně odlišné vůči teoreticky přesným, naznačuje fakt, že vliv stěn trubky na  $c_0$  je malý až zanedbatelný. Trubice se do modelu pravděpodobně nemusela uvažovat vůbec. Při pokusu o vyčíslení  $c_0$  ze vztahu (2.7) by její hodnota měla být přibližně 1460 m/s. Je ale nutné zmínit, že tento model neuvažoval trojosou napjatost, ani změnu tuhosti vlivem přivaření dodatečného disku. Tato skutečnost mohla nepříznivě ovlivnit výsledek druhé viskozity, nelze však přesně říct jak moc, jelikož je optimalizovaná funkce silně nelineární.

### Druhá viskozita

Z provedených měření nelze s jistotou stanovit závislost druhé dynamické viskozity  $b$  na statickém tlaku  $p_s$ . Při porovnání výsledků na Tabulka 4.2 neexistuje žádný jasný trend chování  $b$  s měnícím se  $p_s$ . Obrázek 7.2 ukazuje průběh  $b$  v závislosti na frekvenci a statickém tlaku. Lze pozorovat, že se změnou  $p_s$  se  $b$  mění náhodně, je otázkou proč se koeficient  $b_{\text{koef}}$  někdy zvyšuje s rostoucí hodnotou  $p_s$  a jindy naopak drasticky poklesne. Skutečná data jsou pouze v měřených  $p_s$ , hodnoty mezi nimi jsou lineárně interpolované a nemusí být pravdivé.

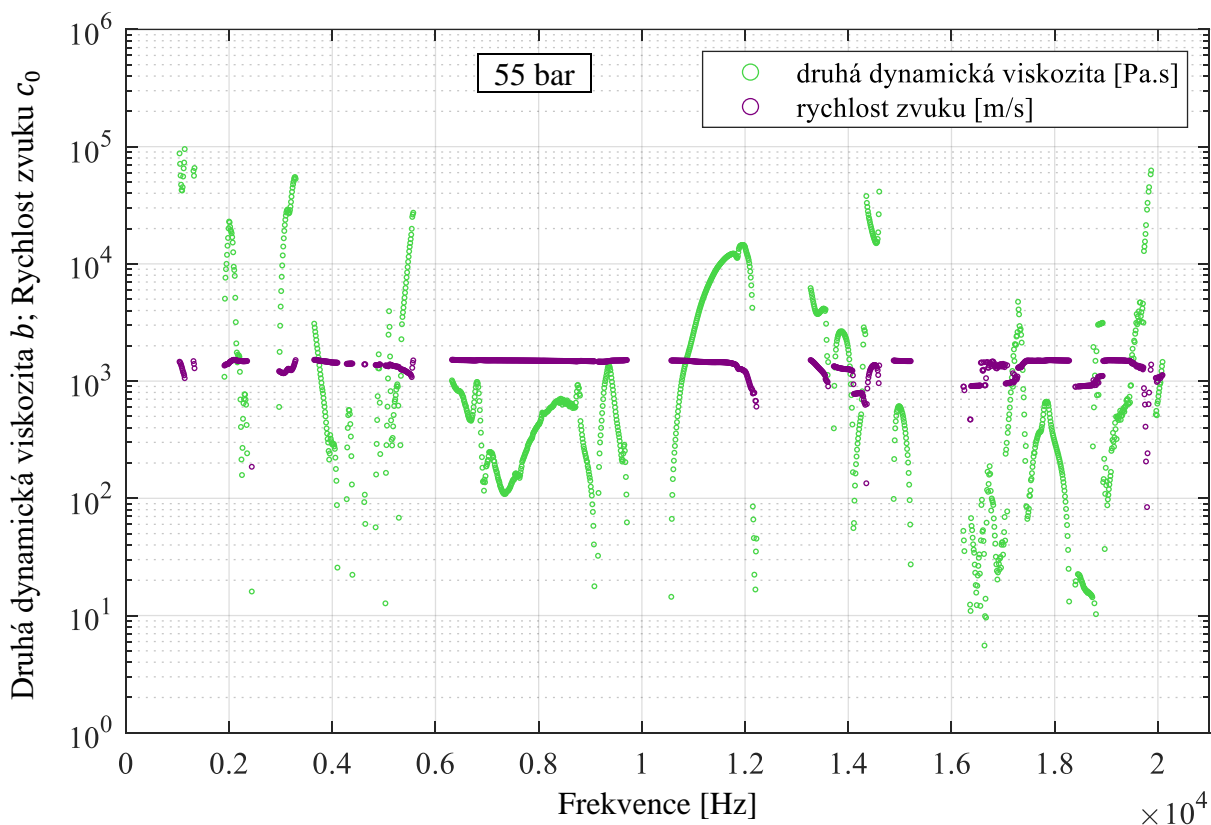


**Obrázek 7.2** Průběh druhé dynamické viskozity  $b$  v závislosti na statickém tlaku a frekvenci

Nejvyšších hodnot dosahuje  $b$  při  $p_s$  35 bar. Rozumné hodnoty rezidua jsou v případě 55, 22, 12 a 5 barů, při 35 barech je reziduum desetinásobné. Nejhorší reziduum vyšlo u tlaku 8 barů, při pohledu na Příloha N je první největší zesílení  $p_2$  vůči  $p_1$  odhadem 2100, analytický model ho však stanovil přibližně 140. Takže by velikost  $b$  měla být ještě menší než z optimalizace.

Každé měření konkrétního  $p_s$  mělo být provedeno více než jednou. Následně se tyto separátní měření jednoho  $p_s$  měly vůči sobě porovnat. Je potřeba zmínit, že závislost  $b$  na  $p_s$  se může projevit až při pozorování širšího rozsahu statických tlaků. Rozsah do 5,5 MPa nemusí být vůbec postačující pro určení trendu  $b$ .

Při pohledu na Obrázek 7.3 (jedná se pouze o rekapitulaci, stejný viz Obrázek 4.4) lze vidět, že fyzikálně smysluplné dvojice  $b$  a  $c_0$  jsou poněkud náhodné.



**Obrázek 7.3** Fyzikálně smysluplné hodnoty dvojic  $c_0$  a  $b$  pro 55 bar

Obrázek 7.3 ukazuje nalezené optimální dvojice parametrů funkcí `fminsearch`, další statické tlaky jsou k náhledu v příloze (viz Příloha C až Příloha G). Lze vidět, že  $c_0$  si udržuje konstantní trend. Naopak  $b$  má divoké chování, její hodnoty klesají a rostou nepravidelně. Všechny frekvence, které dvojici nemají, nesplnily alespoň jednu z omezujících podmínek. Optimalizační funkce v nich našla minimum, které ale nebylo smysluplné (záporná nebo velká hodnota  $b$ ;  $c_0$ ). Všechny nalezené dvojice byly nalezeny s nejmenší chybou. Nejsou to však jediné dvojice, které jsou schopné dobře prokládat tlaky  $\widehat{p}_2$  a  $\widehat{p}_3$  pro danou frekvenci. I jiné dvojice (například s měnícím se  $b$ ) mohou tlaky  $\widehat{p}_2$  a  $\widehat{p}_3$  prokládat dobře, akorát s větší chybou.

Prvotní vyhodnocení mělo za cíl určit  $b$  pro každou jednotlivou frekvenci a následně odhalit její trend chování, pokud vůbec nějaký má. Koefficient determinace byl stanoven jako 17,86 % pro případ statického tlaku 55 bar. Pokrytí pouhých 17,86 % naměřených dat regresní křivkou není vůbec dobré, je ale nutné mít na paměti fakt, že experimentální data nenesly informace

pouze o pulsacích kapaliny. Měly v sobě i další okolní rušení a kmitání přidružených součástí. Při pokusu o prokládání takovýchto naměřených dat modelem, který vnější vlivy neuvažuje, bude docházet k velké chybě. Bylo by dobré ověřit, jestli by se došlo ke stejným výsledkům s použitím například jiné rozměrové konfigurace sestavy trubice, jelikož jsou vlastní frekvence trubice závislé na její délce.

Jedním z možných nedostatků modelu je zanedbání toku energie, konkrétně tepla. Jelikož je druhá viskozita disipativní člen, dochází při pohybu tlakové vlny k disipaci energie a tím k ohřevu tekutiny. Tento fakt není v modelu zohledněn. Teplota se při celém experimentu uvažovala jako neměnná s hodnotou 20 °C. Jedno experimentální měření trvalo celkově 63 minut, během celého experimentu docházelo k disipaci energie. Je proto otázkou jak moc se voda během měření ohřála a jakou váhu měla změna teploty na celkové ovlivnění tlakových pulsů.

Výsledky prezentované v Tabulka 4.2 nejde pokládat za správné bez dodatečného nezávislého ověření. Ideální by bylo uvedené regresní vztahy využít při řešení skutečného problému a vyhodnotit, jestli se s jejich implementací dojde ke zpřesnění výsledku.

### Harmonic Acoustics

Z porovnání výsledků se frekvenční odezva z Ansysu téměř shoduje s analytickým modelem, až na okolí frekvence 12,2 kHz. Objevují se zde odlišné poměry  $p_2/p_1$  a  $p_3/p_1$ , tzn. dochází nejprve k nárůstu a poté poklesu amplitudy zesílení. Prvotní úvaha příčiny spočívala v tom, že Ansys zde do průběhu tlaku uvažuje i kmitání trubice. Byla proto provedena modální analýza pro zjištění všech vlastních tvarů, které by mohly v daném rozsahu frekvencí tlakové pulsy výrazně ovlivnit.

**Tabulka 7.1** Vlastní tvary kmitu trubice z Modal Acoustics

Vlastní tvar kmitu	Frekvence [Hz]	Vlastní tvar kmitu	Frekvence [Hz]
3.	3629,7	11.	10883
5.	3891	13.	14507
6.	3891	14.	15091
7.	6192,6	15.	15091
8.	7258,6	16.	18123
9.	9167,6	17.	18486
10.	9167,6		

Tabulka 7.1 ukazuje všechny nalezené vlastní tvary kmitu trubice o délce 0,2 m modulem Modal Acoustics do frekvence 20,59 kHz. Zmíněná frekvence 12,2 kHz nalezena nebyla, žádná z nalezených frekvencí se v amplitudo-frekvenční charakteristice neprojevuje. Nesoulad v okolí 12,2 kHz by proto mohla být chyba vzniklá diskretizací a numerickým výpočtem.

Pro ověření, jestli Ansys uvažuje ovlivnění kapaliny okolní trubicí, byl proveden výpočet s jinými elastickými koeficienty trubice, konkrétně s hodnotou  $E_0$  jako 50 GPa. Po výpočtu se na amplitudo-frekvenční charakteristice jasně projevil pokles amplitudy tlaku a snížení rychlosti zvuku. Nastavení úlohy bylo patrně správné, Ansys však s trubicí počítá jinak, než se původně očekávalo. Takovýto FSI výpočet zřejmě uvažuje, že trubice ovlivňuje amplitudu a vlnovou délku tlakových pulsů, kmitání trubice ale do tlakového průběhu pravděpodobně nezahrnuje.

## ZÁVĚR

Cílem práce bylo experimentální stanovení význačného parametru – druhé viskozity kapaliny. Jako použitá kapalina byla zvolena voda, jelikož má dobře známé další potřebné parametry.

Pro vyhodnocení se nejprve využila optimalizační funkce schopná hledat dvojice parametrů v každé frekvenci zvlášť. Takovýmto postupem se nejlépe zjistí možné trendy chování parametrů bez zaujatého vnějšího zásahu. Závislost rychlosti zvuku se ukázala jako konstantní, nezávislá na frekvenci. Druhá viskozita vykazovala hyperbolickou frekvenční závislost, ale se špatným koeficientem determinace. Je však pravděpodobné, že malá hodnota  $R^2$  byla způsobena dodatečnými ději neodpovídající kapalině, takže se na malou hodnotu  $R^2$  nelze dívat jako na definitivní důkaz frekvenční nezávislosti. S nalezenou regresní závislostí druhé viskozity se následně přešlo ke zpřesnění výsledku využitím jiné optimalizační funkce, která dohledává průběh přes všechny frekvence současně.

Rozsah frekvencí pro vyhodnocení  $b$  byl celkově vhodný. Nejlepší rozsah frekvencí při délce 0,2 m je pravděpodobně 4 kHz až 12 kHz. V tomto rozsahu pokrývají tlakové snímače s roztečí 0,06 m polovinu až celou vlnovou délku vlny. U vyšších frekvencí už byl znatelný nedostatek snímačů po délce trubice. Při frekvenci 20 kHz jsou po délce trubice 2,68 vlnové délky tlakové vlny a tři snímače nejsou dostatečné. Pro nižší frekvence už vychází vlnová délka v řádech metrů, naopak pro vysoké frekvence je v centimetrech. Pro stanovení  $b$  v jiných frekvencích než je prezentováno by muselo dojít k rozměrové úpravě trubice. Frekvence menší jak 1 kHz vyžadují dlouhou trubici, naopak pro frekvence nad 20 kHz je vhodnější kratší trubice. Samotná trubice je možným zdrojem rušení a je otázkou jak moc ovlivňuje tlakové pulsy. Při délkové úpravě by došlo i k jejímu přeladění.

Uvedené vztahy pro druhou viskozitu by bylo potřeba porovnat s dalšími variantami řešení, například využitím jiného postupu optimalizace nebo úpravou analytického modelu. Regresní vztahy by mohly vyjít odlišně se zahrnutím komplikovanějšího modelu trubice. Eliminace rušících faktorů a kmitání okolních součástí by mohla rovněž ovlivnit výsledek.

Prezentované regresní vztahy nelze pokládat za korektní bez nezávislé verifikace. Kvůli všem rušivým dějům v experimentálních datech není z této práce hyperbolická frekvenční závislost druhé viskozity jasně prokazatelná, výsledky tomu ale přesto nasvědčují. Rovnoosá hyperbola není jediný regresní model, který byl schopný optimální hodnoty druhé viskozity proložit. I jiné regresní modely, jako například mocninná funkce, prokládaly data s obdobným koeficientem determinace. Zkoumaný rozsah frekvencí stanovuje závislost druhé viskozity jako hyperbolickou, není však jasné, k jakému výsledku by se došlo i se zahrnutím vyšších frekvencí, například do 50 kHz.

Po validaci regresních vztahů, na základě výsledků po využití při řešení skutečných problémů, je pravděpodobně možné tento postup stanovení druhé viskozity využít i u jiných newtonovských homogenních izotropních tekutin, jako jsou například oleje nebo paliva.

## SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] RAPP, Bastian E. Chapter 9 - Fluids. In: *Micro and Nano Technologies*. Oxford: Elsevier, 2017, s. 243-263. ISBN 978-1-4557-3141-1. Dostupné z: <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/B978-1-4557-3141-1.50009-5>.
- [2] BRDIČKA, Miroslav; SAMEK, Ladislav a SOPKO, Bruno. *Mechanika kontinua*. Vyd. 2., opr. Praha: Academia, 2000. ISBN 80-200-0772-5.
- [3] ANDERSON, John David. *Computational fluid dynamics: The Basics with Applications*. Druhé. McGraw-Hill, 1995. ISBN 0-07-001685-2.
- [4] GAD-EL-HAK, Mohamed. Questions in Fluid Mechanics: Stokes' Hypothesis for a Newtonian, Isotropic Fluid: Stokes' Hypothesis for a Newtonian, Isotropic Fluid. *Journal of Fluids Engineering-transactions of The Asme - J FLUID ENG*. 1995, roč. 117. Dostupné z: <https://doi.org/10.1115/1.2816816>.
- [5] OKUMURA, Hisashi a YONEZAWA, Fumiko. New expression of the bulk viscosity. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2003, roč. 321, č. 1, s. 207-219. ISSN 0378-4371. Dostupné z: [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(02\)01799-5](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0378-4371(02)01799-5).
- [6] FALLER, Larry D. Relaxation phenomenon: physics and chemistry. online. *Encyclopedia Britannica*. 2016. Dostupné z: <https://www.britannica.com/science/relaxation-phenomenon>. [cit. 2023-10-16].
- [7] DUKHIN, Andrei a GOETZ, Philip. Bulk viscosity and compressibility measurement using acoustic spectroscopy. *The Journal of Chemical Physics*. 2009, roč. 130, č. 12, s. 124519. ISSN 0021-9606. Dostupné z: <https://doi.org/10.1063/1.3095471>.
- [8] BURESTI, Guido. A note on Stokes' hypothesis. *Acta Mechanica*. 2015, roč. 226, č. 10, s. 3555-3559. ISSN 1619-6937. Dostupné z: <https://doi.org/10.1007/s00707-015-1380-9>.
- [9] JAEGER, Frederike; MATAR, Omar a MÜLLER, Erich. Bulk viscosity of molecular fluids. *The Journal of Chemical Physics*. 2018, roč. 148, s. 174504. Dostupné z: <https://doi.org/10.1063/1.5022752>.
- [10] GITIS, Mihail. On the interpretation of shear viscosity ultrasonic measurements. *Ultrasonics*. 2019, roč. 93, s. 1-6. ISSN 0041-624X. Dostupné z: <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ultras.2018.10.004>.
- [11] HABÁN, Vladimír. *Vysokofrekvenční pulsace ve vodních strojích*. Brno, 2010. Habilitační práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Energetický ústav Odbor fluidního inženýrství Victora Kaplana.

- [12] KARATO, Shun-ichiro. Rheology of the Earth's mantle: A historical review: A historical review. *Gondwana Research*. 2010, roč. 18, č. 1, s. 17-45. ISSN 1342-937X. Dostupné z: <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.gr.2010.03.004>.
- [13] SHAW, Montgomery a MACKNIGHT, William. *Introduction to polymer viscoelasticity*. 3rd ed. Hoboken: Wiley-Interscience, 2005. ISBN 0-471-74045-4.
- [14] ONDRÁČEK, Emanuel; VRBKA, Jan; JANÍČEK, Přemysl a BURŠA, Jiří. *Mechanika těles: pružnost a pevnost. II*. Vyd. 4., přeprac., V Akademickém nakladatelství CERM 2. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006. ISBN 80-214-3260-8.
- [15] ROBERTSON, W. M. Fourier's Theorem and the Spectrum of Complex Tones. online. In: . Middle Tennessee State University, 2023. Dostupné z: [https://w1.mtsu.edu/faculty/wroberts/teaching/fourier\\_4.php](https://w1.mtsu.edu/faculty/wroberts/teaching/fourier_4.php). [cit. 2024-02-03].
- [16] Sensors, networking and control systems - ifm electronic. online. In: *Vibration Technology: Frequency domain*. Dostupné z: <https://www.ifm.com/ie/en/shared/technologies/real-time-maintenance/technology/frequency-domain>. [cit. 2024-02-04].
- [17] MATHWORKS. *Help center: fft*. online. In: . Dostupné z: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/fft.html>. [cit. 2024-02-04].
- [18] GATAN INC. *Nyquist Frequency*. online. In: . Dostupné z: <https://www.gatan.com/nyquist-frequency>. [cit. 2024-02-04].
- [19] LUTS, Heleen. *Diagnosis of hearing loss in newborns: clinical application of auditory steady-state responses*. Katholieke Universiteit Leuven, Faculty of Medicine. 2005. ISBN 90-901940-2-9.
- [20] ZUTH, Daniel. *Analýza nejistot ve vibrodiagnostice*. Brno, 2009. Vysoké učení technické v Brně. Fakulta strojního inženýrství. Ústav automatizace a informatiky. Vedoucí disertační práce Ing. František Vdoleček, CSc.
- [21] KOLENDA, Janusz. Modification of Hooke's law for multiaxial stress in viscoelastic solids. *Polish Maritime Research*. 2008, roč. 15, č. 2, s. 22-25. Dostupné z: <https://doi.org/doi:10.2478/v10012-007-0060-7>.
- [22] PCB PIEZOTRONICS, INC. *ICP® PRESSURE SENSOR Model 113B28*. online. Dostupné z: <https://www.pcb.com/products?m=113b28>. [cit. 2024-02-09].
- [23] GREŠÁKOVÁ, Kristýna. *Experimentální stanovení vlivu kapaliny na kmitající těleso*. Brno, 2018. Vysoké učení technické v Brně. Fakulta strojního inženýrství. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Vladimír Habán, Ph.D.
- [24] BUTTERWORTH, John; LEE, Jin a DAVIDSON, Barry. Experimental determination of modal damping from full scale testing. 13th World Conference on Earthquake Engineering. Vancouver, B.C., Canada, August 2004, Paper No. 310.

- [25] NĚMEC, Ivan; TRCALA, Miroslav; VANĚČKOVÁ, Adéla a REK, Vaclav. *Dynamic Damping - Comparison of different concepts from the point of view of their physical nature and effects on civil engineering structures*. 2019. Dostupné z: <https://doi.org/10.21136/panm.2018.12>.
- [26] *Ansys® Mechanical APDL , Release 24.1, Help System, Acoustic Analysis Guide, ANSYS, Inc.*
- [27] *Ansys® Mechanical APDL , Release 24.1, Help System, Theory Reference, Acoustics, ANSYS, Inc.*
- [28] MALINEN, M.; LYLTY, M.; RÅBACK, Peter; KÄRKKÄINEN, Asta a KÄRKKÄINEN, Leo. *A finite element method for the modeling of thermo-viscous effects in acoustics*. 2004.
- [29] *Ansys® Mechanical APDL , Release 24.1, Help System, Element Reference, ANSYS, Inc.*
- [30] THE INTERNATIONAL ASSOCIATION FOR THE PROPERTIES OF WATER AND STEAM IAPWS. *Main IAPWS Thermodynamic Property Formulations*. online. Leden 18, 2018. Dostupné z: <http://www.iapws.org/newform.html>. [cit. 2024-04-25].
- [31] THE INTERNATIONAL ASSOCIATION FOR THE PROPERTIES OF WATER AND STEAM IAPWS. *Information on the Property Library LibIF97*. online. Dostupné z: [https://web1.hszg.de/thermo\\_fpc/range\\_of\\_validity/range\\_of\\_validity\\_water.htm?choose\\_fluid=1&](https://web1.hszg.de/thermo_fpc/range_of_validity/range_of_validity_water.htm?choose_fluid=1&). [cit. 2024-04-27].

## SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

### Tenzory

$\tau_{ij}$	[Pa]	Tenzor napětí tekutiny
$\sigma_{ij}$	[Pa]	Tenzor vratných napětí tekutiny
$\Pi_{ij}$	[Pa]	Tenzor nevratných napětí tekutiny
$C_{ijkl}$	[Pa s]	Tenzor materiálových koeficientů
${}^{\eta}\tau_{ij}$	[Pa]	Příspěvek k tenzoru napětí od první dynamické viskozity
${}^b\tau_{ij}$	[Pa]	Příspěvek k tenzoru napětí od druhé dynamické viskozity
$\Sigma_{ij}$	[Pa]	Tenzor napětí tělesa
$\delta_{ij}$		Kroneckerovo delta
$\dot{\epsilon}_{ij}$	[s <sup>-1</sup> ]	Tenzor rychlosti deformace
$\dot{\omega}_{ij}$	[s <sup>-1</sup> ]	Tenzor rychlosti rotace

### Vektory

$a_i$	[m s <sup>-2</sup> ]	Vektor zrychlení setrvačných sil
$FV_i$	[N]	Vektor objemových sil
$FA_i$	[N]	Vektor plošných sil
$FR_i$	[N]	Vektor setrvačných sil
$g_i$	[m s <sup>-2</sup> ]	Vektor zrychlení objemových sil
$g_m$	[N m <sup>-3</sup> ]	Objemová hustota síly, pouze str 70
$n_i$	[-]	Normálový vektor plochy
$v_i$	[m s <sup>-1</sup> ]	Vektorové pole rychlostí

### Skaláry

$A$	[m <sup>2</sup> ]	Obecná plocha
$A'$		Integrační konstanta
$B$		Integrační konstanta
$b$	[Pa s]	Druhá dynamická viskozita
$\bar{b}$	[Pa s]	Inicializační hodnota $b$
$b_{\text{koef}}$	[Pa]	Koeficient druhé dynamické viskozity
$b_{\text{krit}}$	[-]	Kritický útlum
$b_p$	[-]	Poměrný útlum
$b_T$	[N s m <sup>-1</sup> ]	Skutečné tlumení trubice
$b_0$	[Pa s]	Materiálové tlumení trubice podle Voigtova elementu
$C$		Integrační konstanta
$c$	[m s <sup>-1</sup> ]	Rychlost zvuku v tekutině s vlivem trubice

$c_0$	[m s <sup>-1</sup> ]	Rychlost zvuku v tekutině
$\bar{c}_0$	[m s <sup>-1</sup> ]	Inicializační hodnota $c_0$
$c_K$	[m s <sup>-1</sup> ]	Komplexní rychlost zvuku v tekutině
$c_p$	[J Kg <sup>-1</sup> °C <sup>-1</sup> ]	Měrná tepelná kapacita za stálého tlaku
$E_0$	[Pa]	Modul pružnosti v tahu
$E_K$	[Pa]	Komplexní modul pružnosti v tahu
$E'$	[Pa]	Reálná část komplexního modulu pružnosti v tahu
$E''$	[Pa]	Imaginární část komplexního modulu pružnosti v tahu
$f_0$	[Hz]	Vlastní frekvence netlumeného kmitání
$f$	[Hz]	Frekvence
$\Delta f$	[Hz]	Šířka rezonančního pásma
$f_B$	[Hz]	Budící frekvence zatěžování
$f_{NQ}$	[Hz]	Nyquistova frekvence
$f_{vz}$	[Hz]	Vzorkovací frekvence
$f_{sig}$	[Hz]	Frekvence měřeného signálu
$f_t$	[Hz]	Vlastní frekvence tlumeného kmitání
$i$	[-]	Imaginární jednotka
$k$	[m <sup>-1</sup> ]	Úhlový vlnčet
$k_T$	[N m <sup>-1</sup> ]	Tuhost trubice
$K_S$	[Pa]	Modul objemové pružnosti tekutiny za stálé entropie
$L$	[m]	Délka trubice
$m$	[-]	Celé kladné číslo
$m_T$	[kg]	Hmotnost trubice
$M$	[Pa]	Amplituda kmitání
$M_3$		Integrační konstanta
$N$	[Pa]	Amplituda kmitání
$N'$		Bázová funkce
$N_{vz}$	[-]	Počet vzorků
$p$	[Pa]	Tlak v tekutině
$p_s$	[Pa]	Statický tlak
$p_a$	[Pa]	Akustický tlak
$p_1$	[Pa]	Tlak na vnitřní straně trubice
$p_2$	[Pa]	Tlak na vnější straně trubice
$\widehat{p}_1$	[Pa]	Měřený tlak v místě prvního tlakového snímače
$\widehat{p}_2$	[Pa]	Měřený tlak v místě druhého tlakového snímače
$\widetilde{p}_2$	[Pa]	Optimalizovaný tlak v místě druhého tlakového snímače
$\widehat{p}_3$	[Pa]	Měřený tlak v místě třetího tlakového snímače

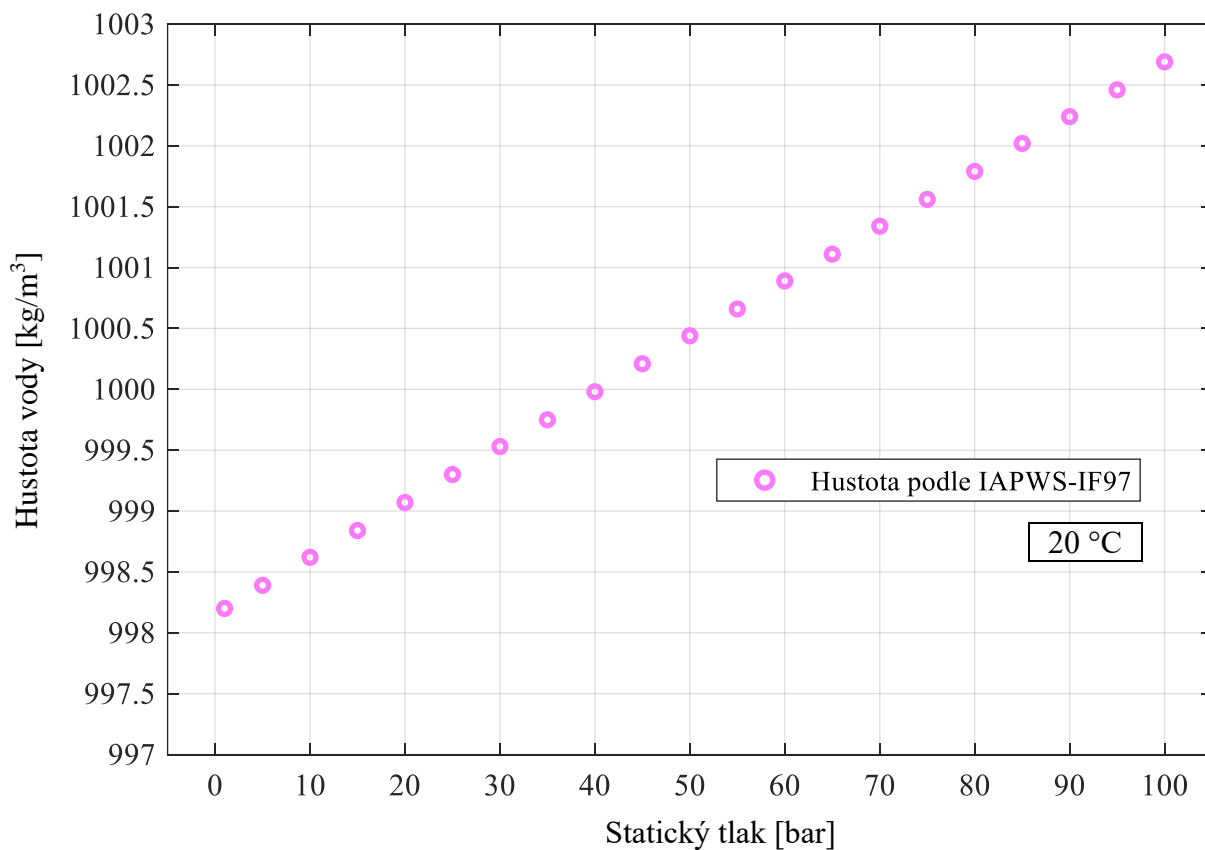
$\widetilde{p}_3$	[Pa]	Optimalizovaný tlak v místě třetího tlakového snímače
$p_t$	[Pa]	Termodynamický tlak
$p_m$	[Pa]	Mechanický tlak
$q$	[W m <sup>-3</sup> ]	Zdroj tepla na jednotku objemu
$Q$	[m <sup>3</sup> s <sup>-1</sup> ]	Průtok
$Q_1$	[m <sup>3</sup> s <sup>-1</sup> ]	Průtok plochou $S_1$
$Q_2$	[m <sup>3</sup> s <sup>-1</sup> ]	Průtok plochou $S_2$
$Q_M$	[kg s <sup>-1</sup> ]	Hmotnostní zdroj
$r$	[m]	Poloměr trubice
$r_1$	[m]	Vnitřní poloměr trubice
$r_2$	[m]	Vnější poloměr trubice
$s$	[rad s <sup>-1</sup> ]	Vlastní číslo
$S$	[m <sup>2</sup> ]	Průřez trubice
$S_1$	[m <sup>2</sup> ]	Plocha ohraničující $\Delta V$
$S_2$	[m <sup>2</sup> ]	Plocha ohraničující $\Delta V$
$S_P$	[m <sup>2</sup> ]	Plocha ohraničující $\Delta V$ v kontaktu s trubicí
$S_C$	[m <sup>2</sup> ]	Celková plocha ohraničující $\Delta V$
$t$	[s]	Čas
$T$	[°C]	Teplota
$T_{VZ}$	[s]	Perioda vzorkovací frekvence
$T_{sig}$	[s]	Perioda měřeného signálu
$u$	[m]	Posuv trubice v radiálním směru
$U_F$		Účelová funkce
$v_a$	[m s <sup>-1</sup> ]	Akustická rychlost
$v_r$	[m s <sup>-1</sup> ]	Rychlost posuvu trubice v radiálním směru
$x$	[m]	Délková poloha v trubicí; výchylka str 57
$V$	[m <sup>3</sup> ]	Objem
$\Delta V$	[m <sup>3</sup> ]	Vymezený objem kapaliny
$\alpha$	[rad s <sup>-1</sup> ]	Reálná část vlastního čísla
$\alpha_R$	[s <sup>-1</sup> ]	Hmotnostně proporcionální koeficient tlumení
$\beta_R$	[s]	Tuhostně proporcionální koeficient tlumení
$\varepsilon$	[-]	Poměrné přetvoření
$\bar{\varepsilon}$	[-]	Amplituda poměrného přetvoření
$\varepsilon_1$	[-]	Poměrné přetvoření v prvním hlavním směru
$\varepsilon_\theta$	[-]	Poměrné přetvoření v obvodovém směru
$\zeta$	[Pa s]	Objemová viskozita

$\eta$	[Pa s]	První dynamická viskozita
$\eta_{\text{long}}$	[Pa s]	Longitudinální viskozita
$\kappa$	[W m <sup>-1</sup> °C <sup>-1</sup> ]	Součinitel teplotní vodivosti
$\lambda$	[m]	Vlnová délka
$\mu$	[-]	Poissonovo číslo
$\nu$	[m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]	První kinematická viskozita
$\xi$	[m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]	Druhá kinematická viskozita
$\rho$	[kg m <sup>-3</sup> ]	Hustota tekutiny
$\rho_T$	[kg m <sup>-3</sup> ]	Hustota materiálu trubice
$\sigma$	[Pa]	Normálové napětí
$\bar{\sigma}$	[Pa]	Amplituda normálové napětí
$\sigma_1$	[Pa]	První hlavní napětí
$\sigma_2$	[Pa]	Druhé hlavní napětí
$\sigma_3$	[Pa]	Třetí hlavní napětí
$\sigma_\theta$	[Pa]	Normálové napětí v obvodovém směru
$\sigma_r$	[Pa]	Normálové napětí v radiálním směru
$\sigma_a$	[Pa]	Normálové napětí v axiálním směru
$\varphi$		Obecný argument
$\omega$	[rad s <sup>-1</sup> ]	Úhlová frekvence
$\omega_B$	[rad s <sup>-1</sup> ]	Budící úhlová frekvence
$\omega_n$	[rad s <sup>-1</sup> ]	Konkrétní hodnota úhlové frekvence
$\Omega_0$	[rad s <sup>-1</sup> ]	Vlastní úhlová frekvence netlumeného kmitání
$\Omega_t$	[rad s <sup>-1</sup> ]	Vlastní úhlová frekvence tlumeného kmitání

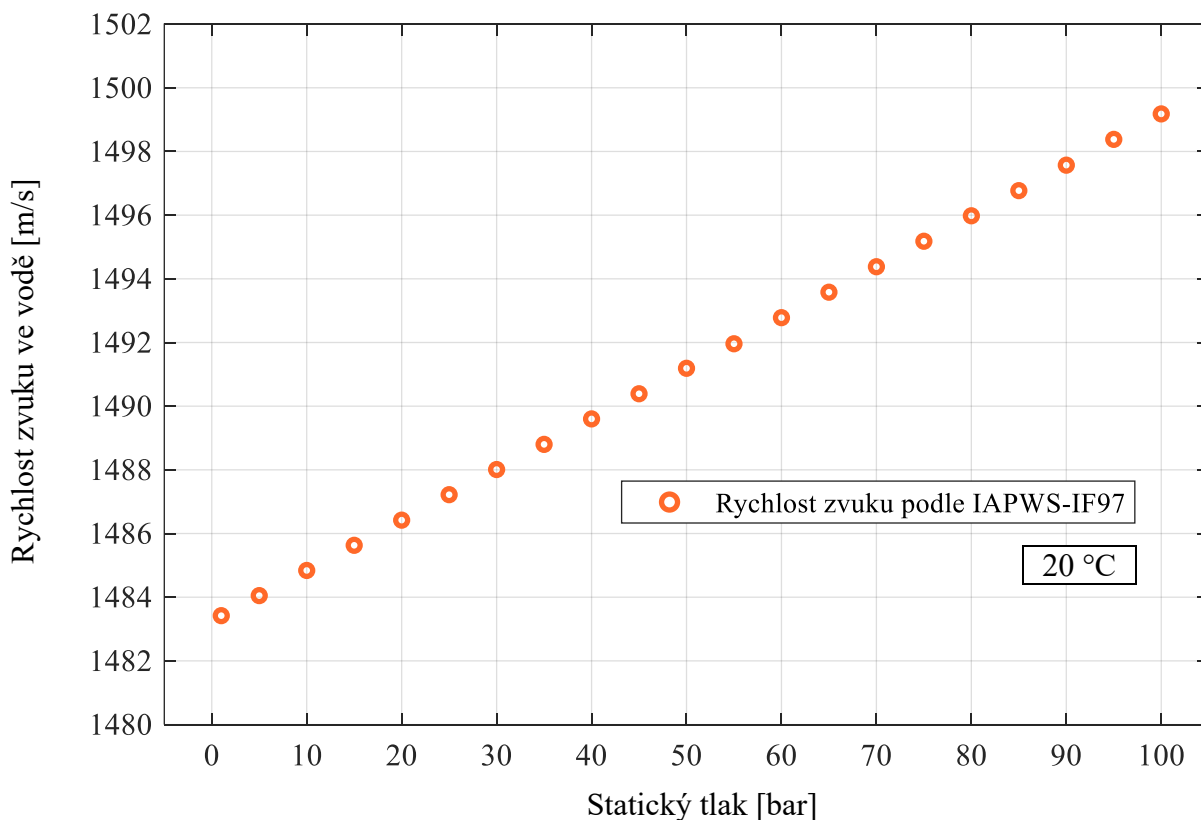
### Zkratky

FFT	Fast Fourier Transform
FT	Fourierova transformace
FLNS	The Full Linear Navier-Stokes Model
FSI	Fluid-Structure Interaction
DOF	Degrees of Freedom

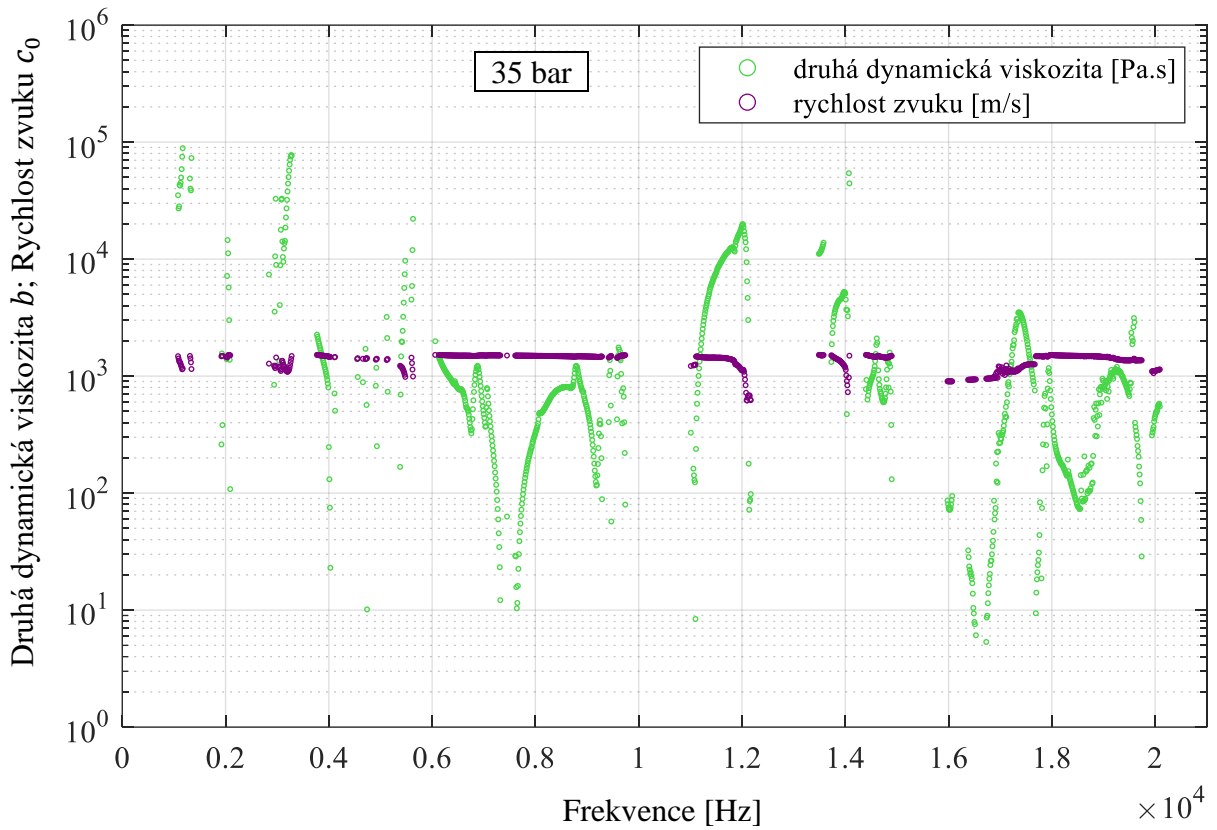
## PŘÍLOHY



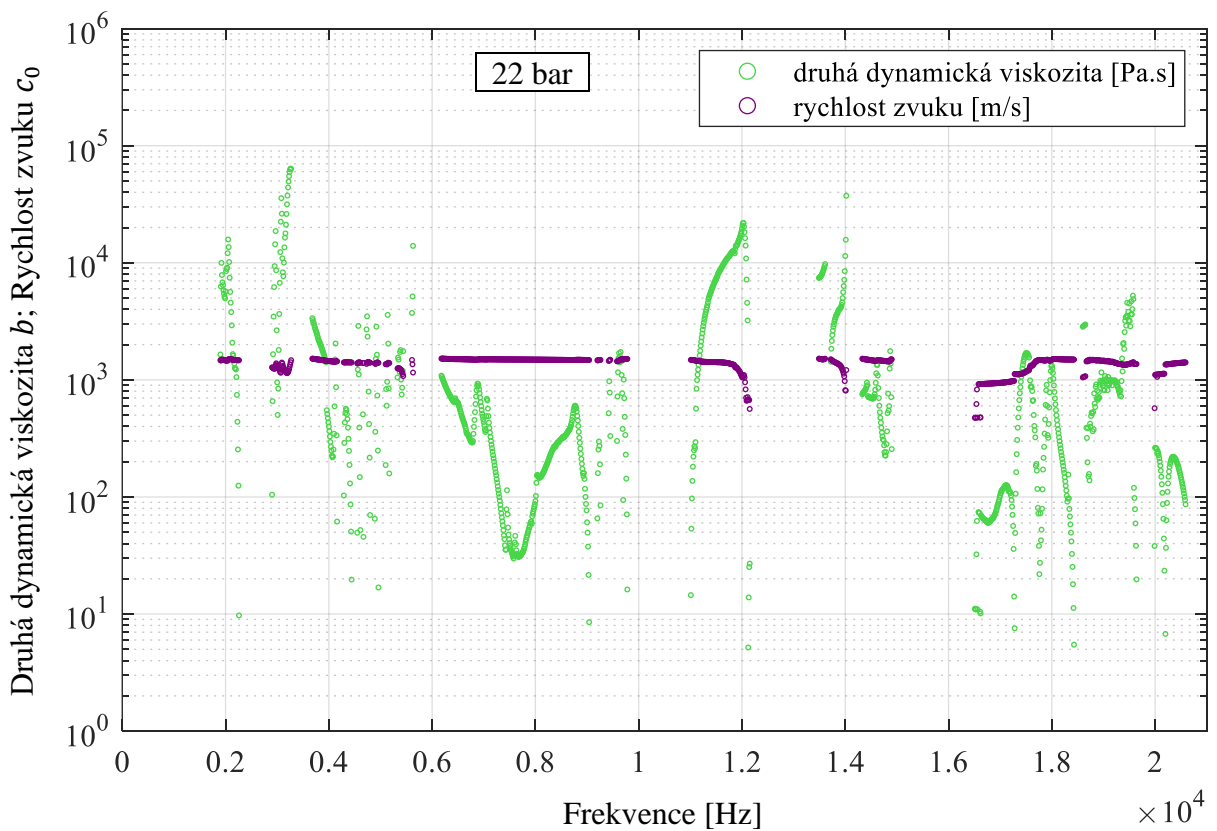
**Příloha A** Závislost hustoty vody na statickém tlaku podle IAPWS-IF97 při 20°C



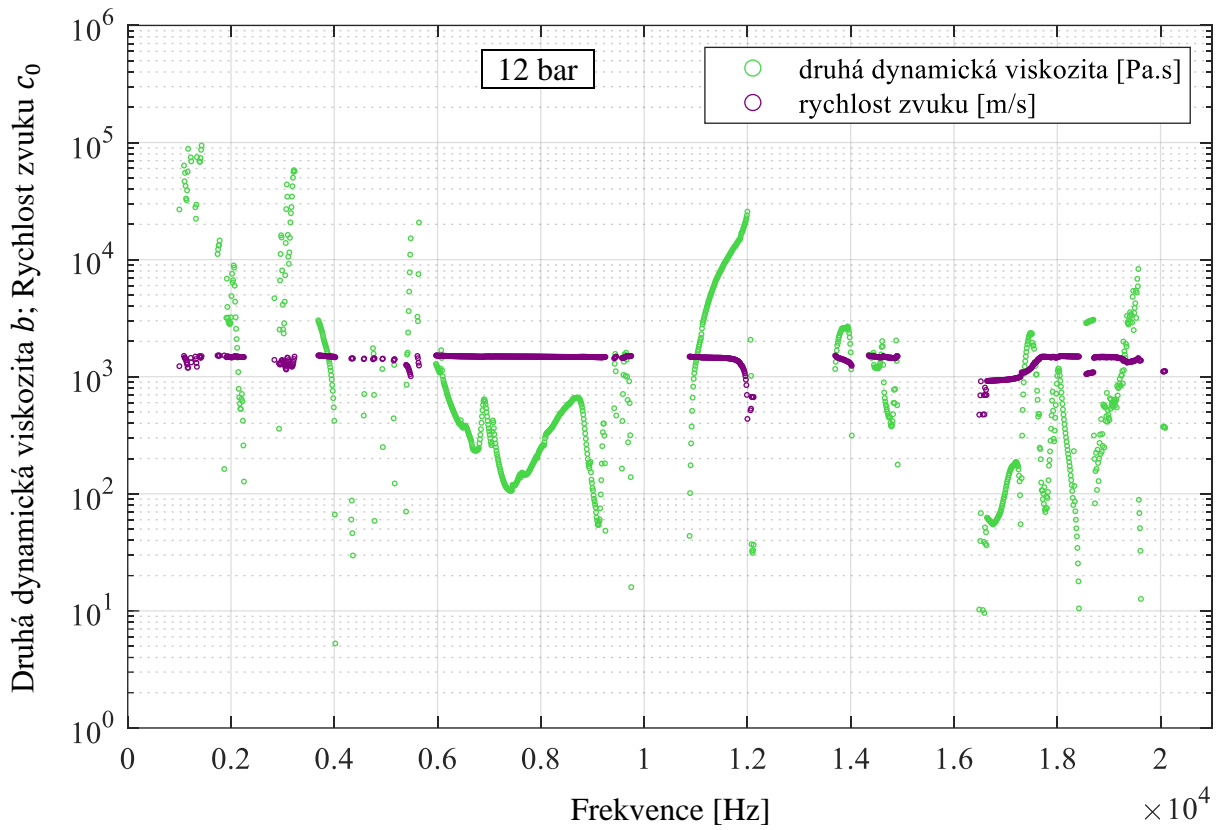
**Příloha B** Závislost rychlosti zvuku ve vodě na statickém tlaku podle IAPWS-IF97 při 20°C



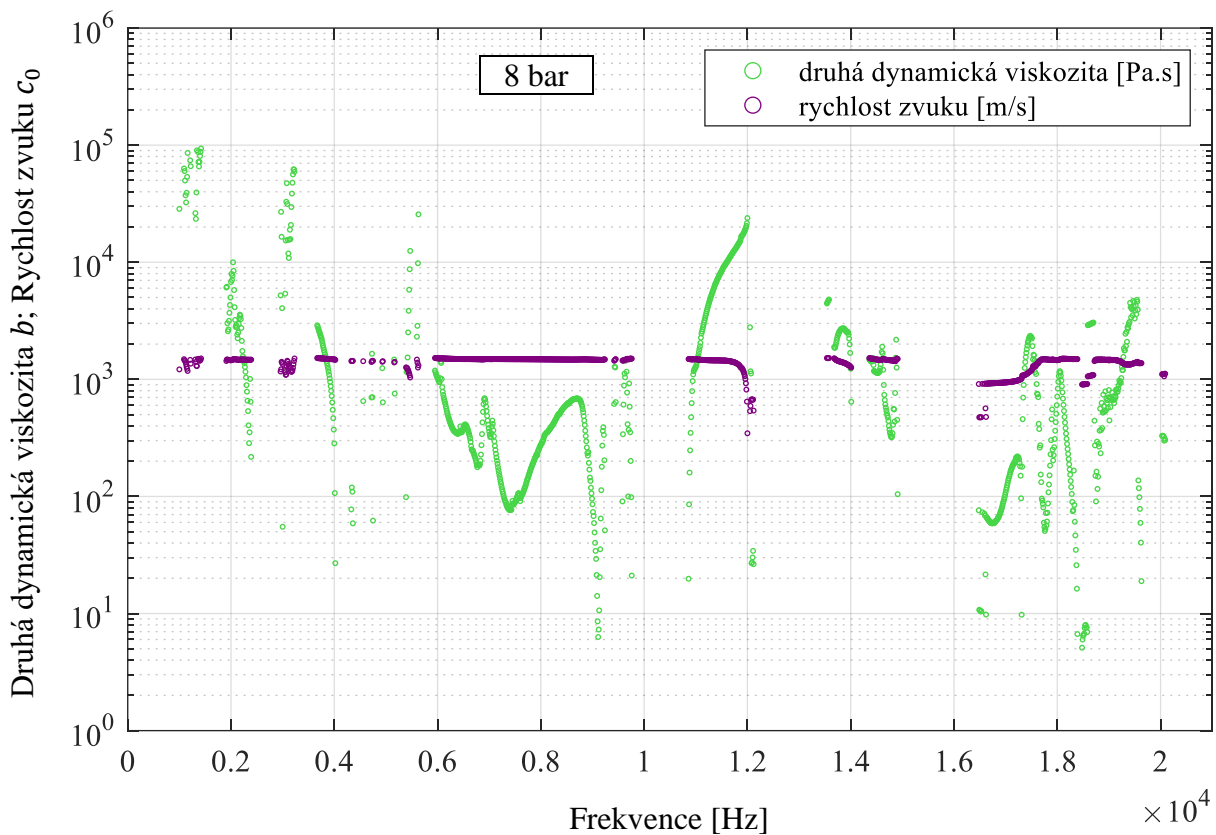
**Příloha C** Fyzikálně smysluplné hodnoty dvojic  $c_0$  a  $b$  pro 35 bar



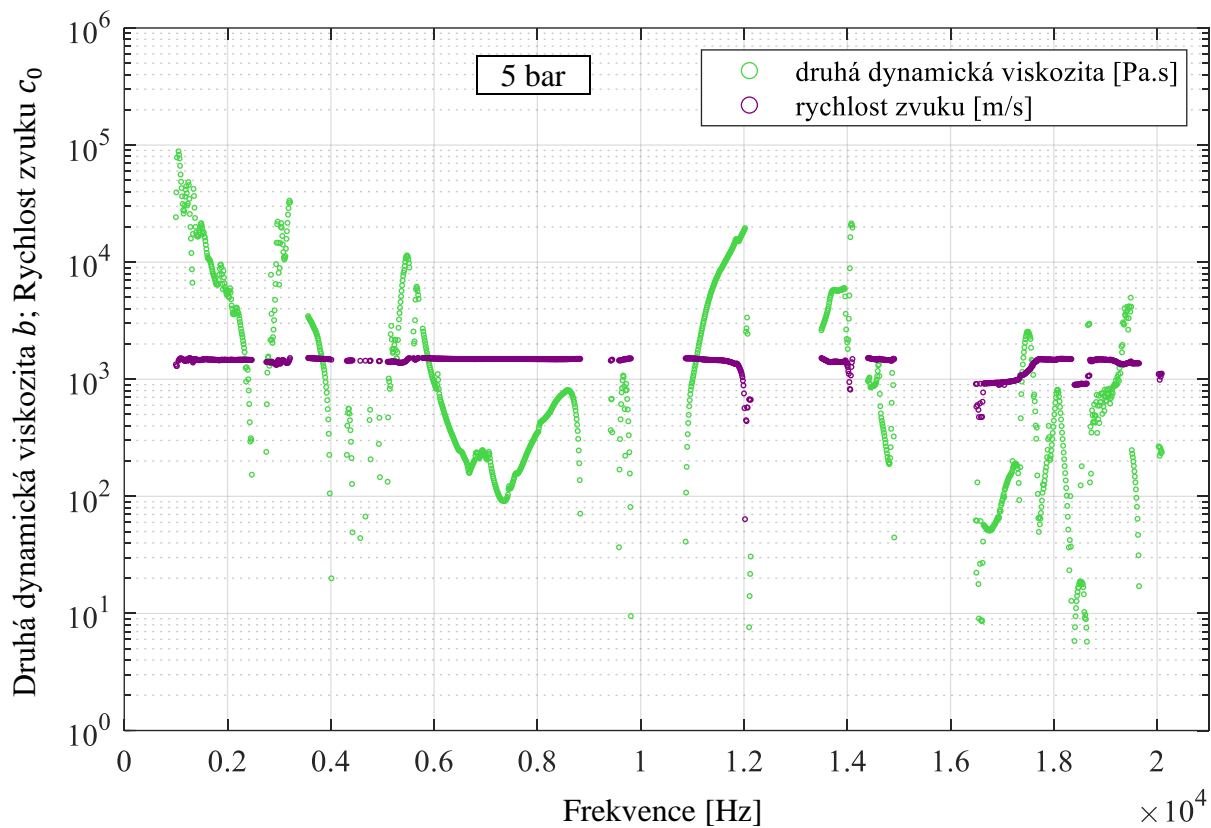
**Příloha D** Fyzikálně smysluplné hodnoty dvojic  $c_0$  a  $b$  pro 22 bar



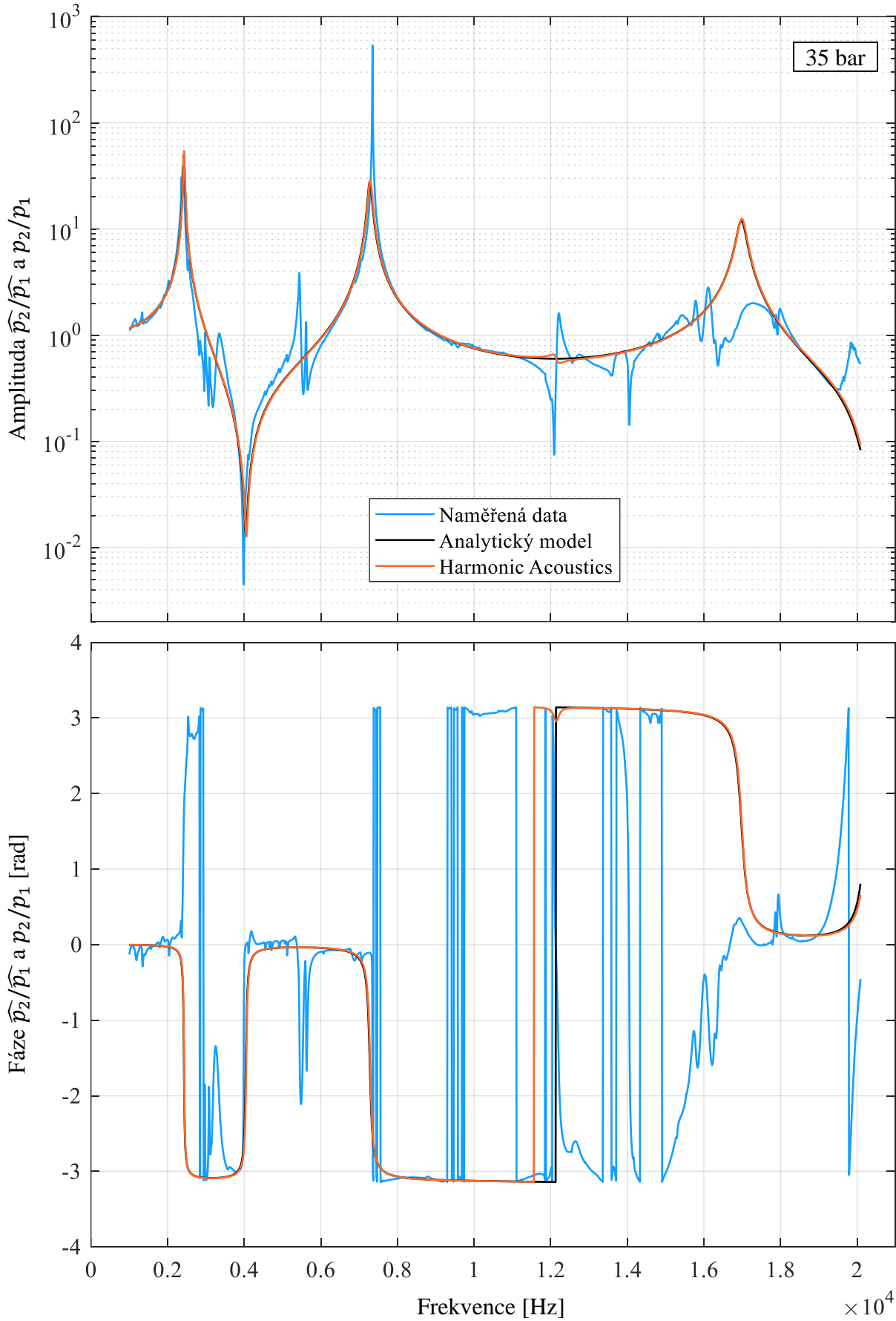
Příloha E Fyzikálně smysluplné hodnoty dvojic  $c_0$  a  $b$  pro 12 bar



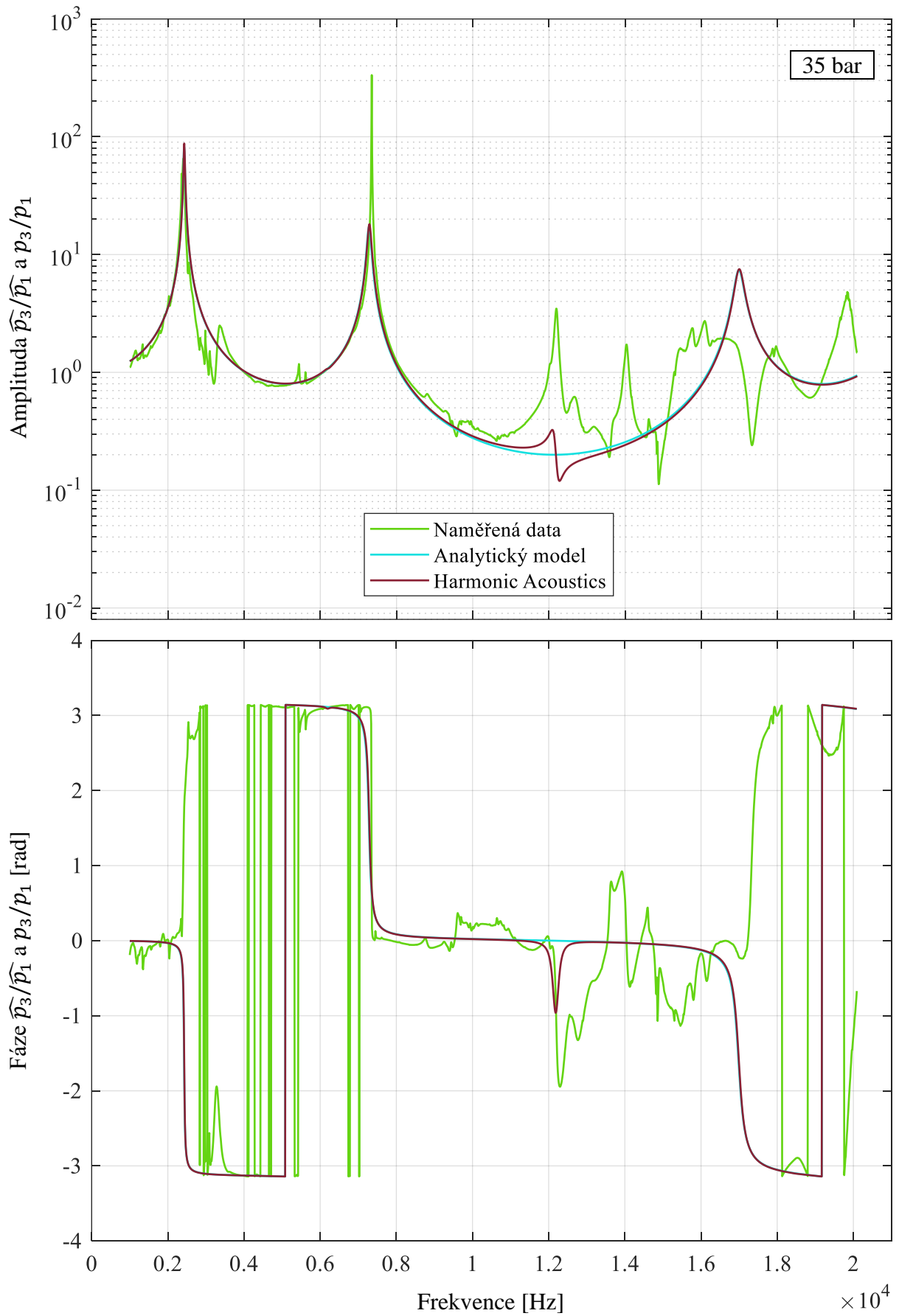
Příloha F Fyzikálně smysluplné hodnoty dvojic  $c_0$  a  $b$  pro 8 bar



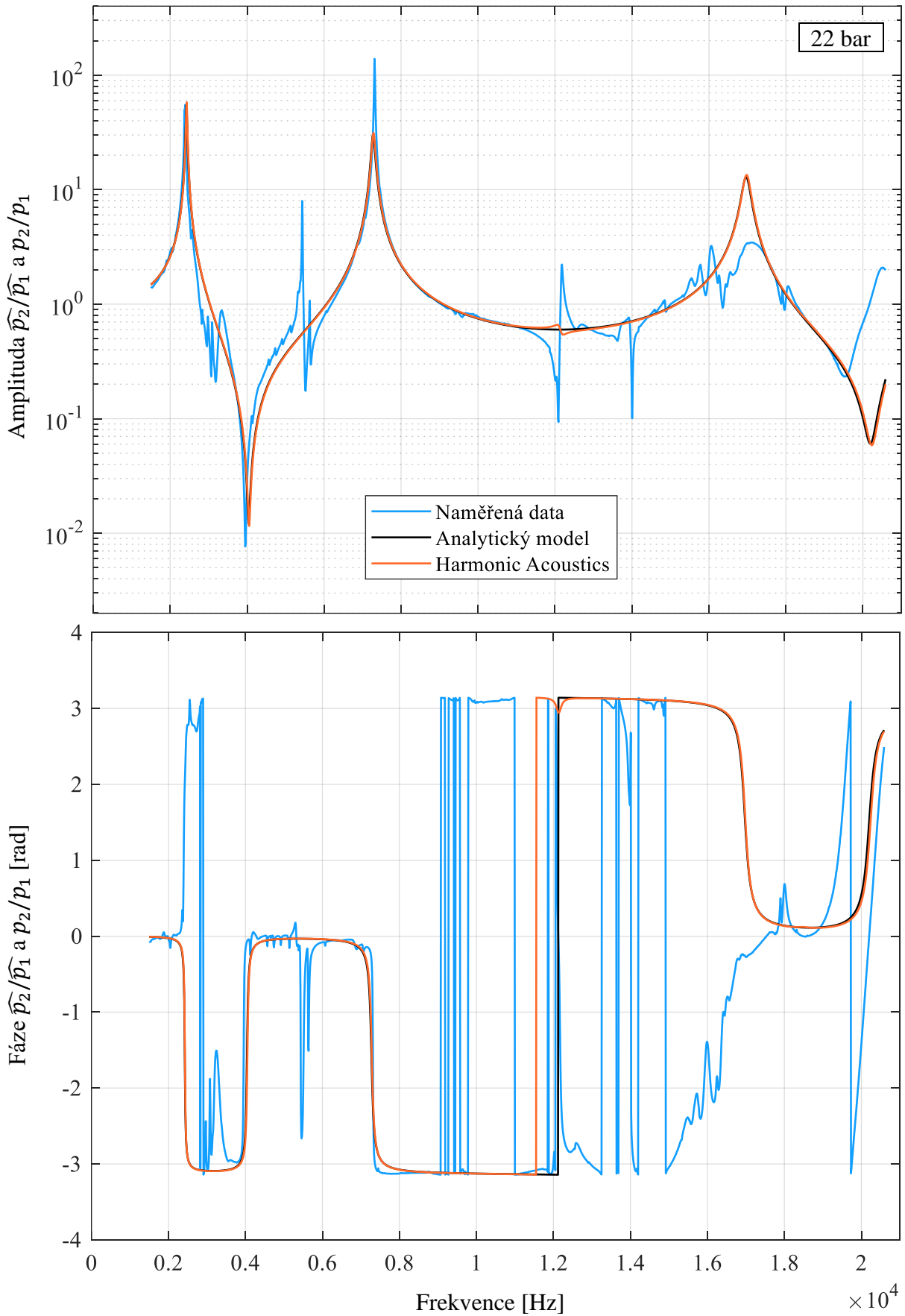
**Příloha G** Fyzikálně smysluplné hodnoty dvojice  $c_0$  a  $b$  pro 5 bar



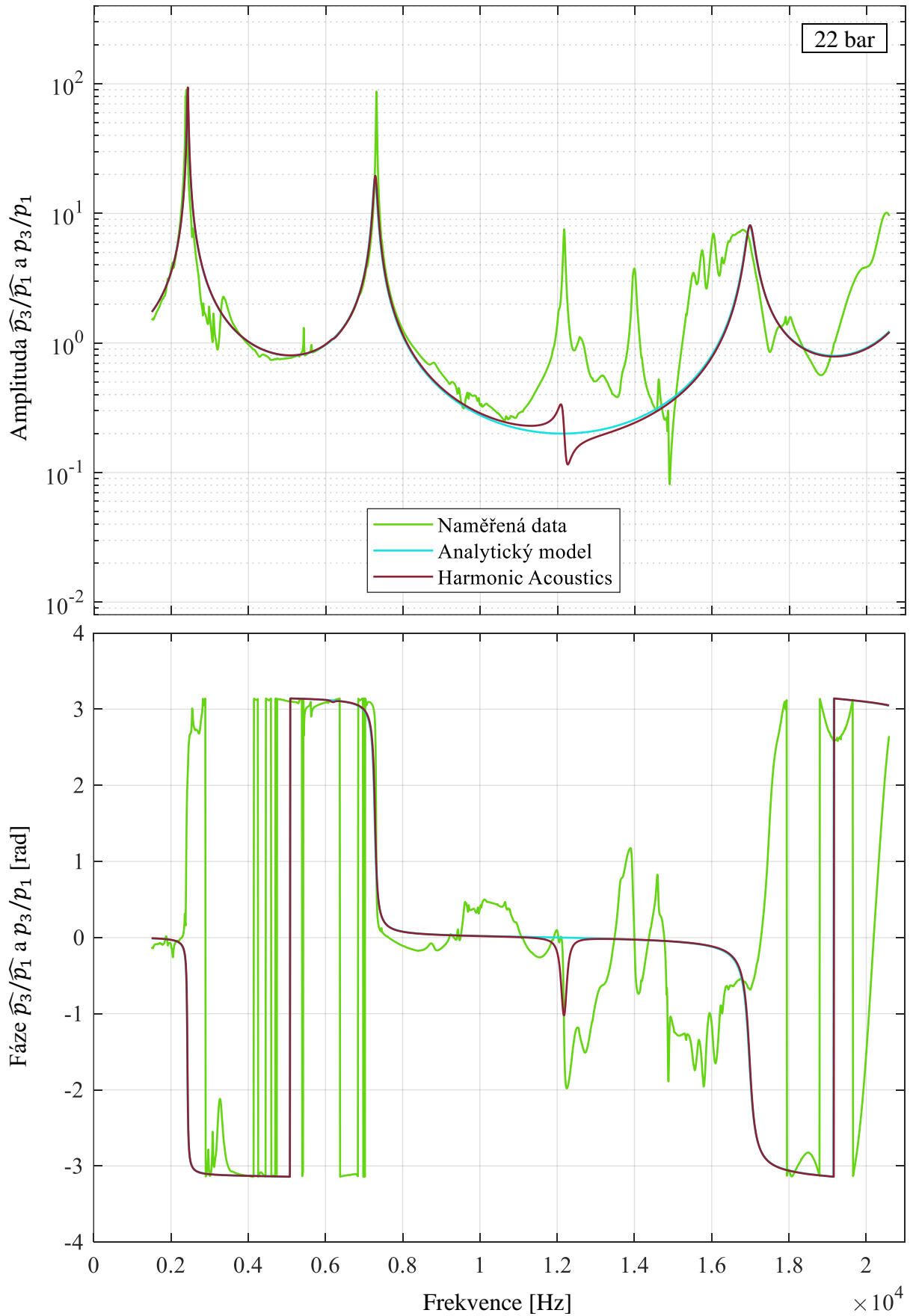
**Příloha H** Porovnání průběhu amplitudy a fáze zesílení tlaku  $\widehat{p}_2/\widehat{p}_1$  a  $p_2/p_1$  pro 35 bar



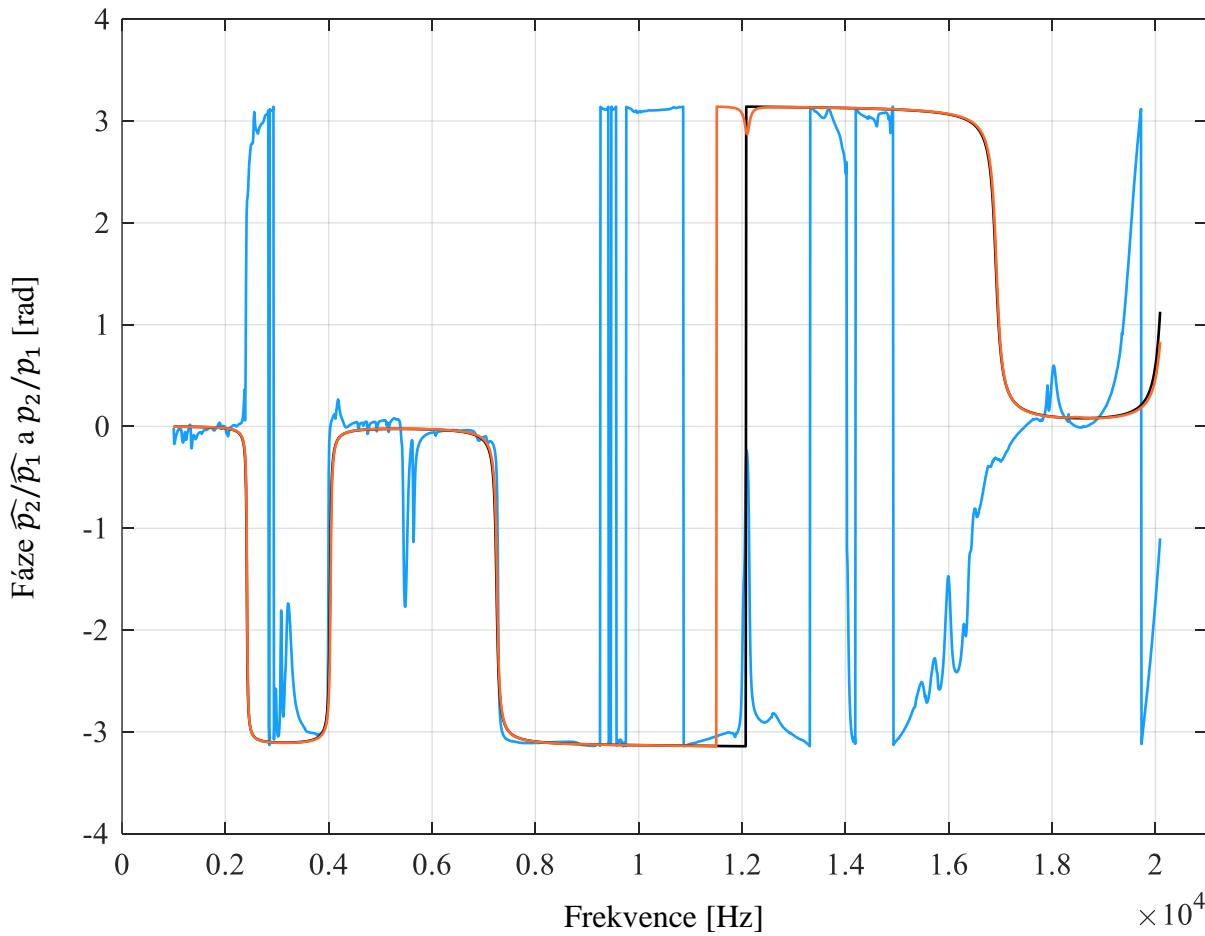
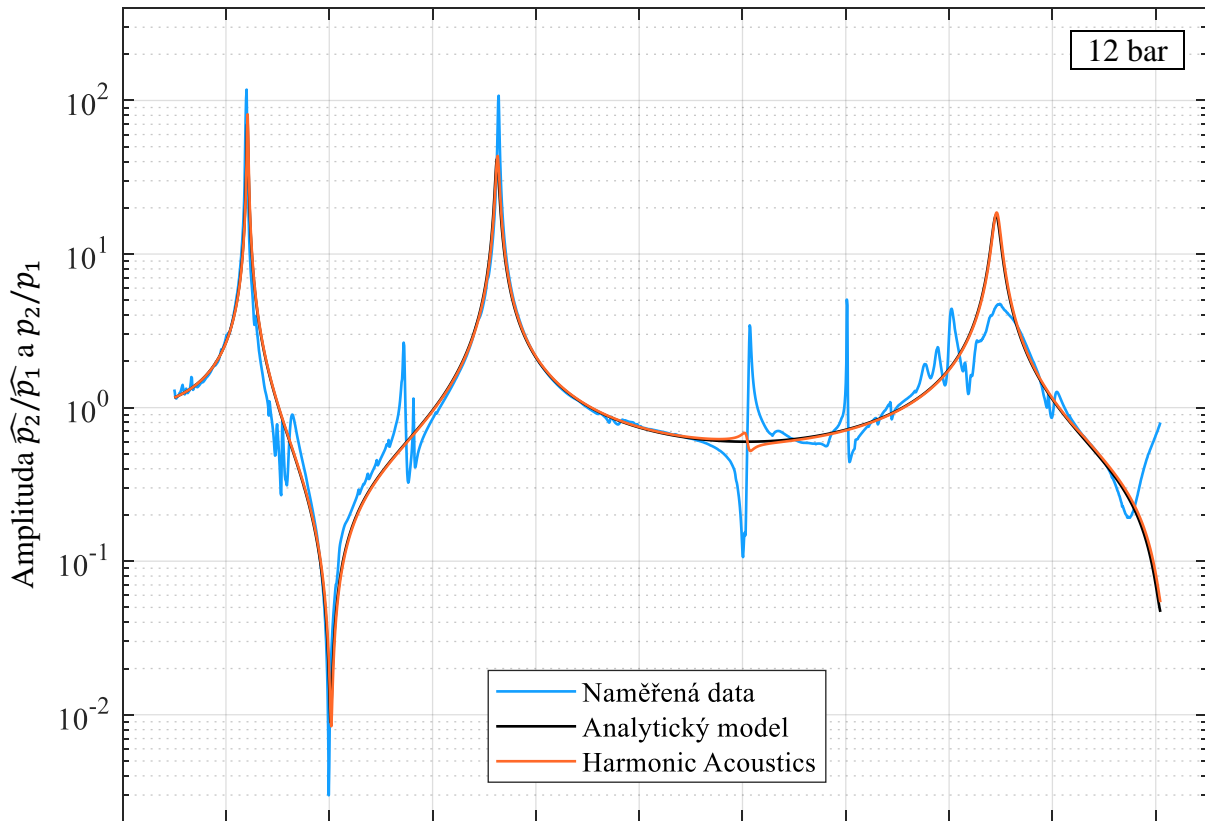
**Příloha I** Porovnání průběhu amplitudy a fáze zesílení tlaku  $\widehat{p}_3/\widehat{p}_1$  a  $p_3/p_1$  pro 35 bar



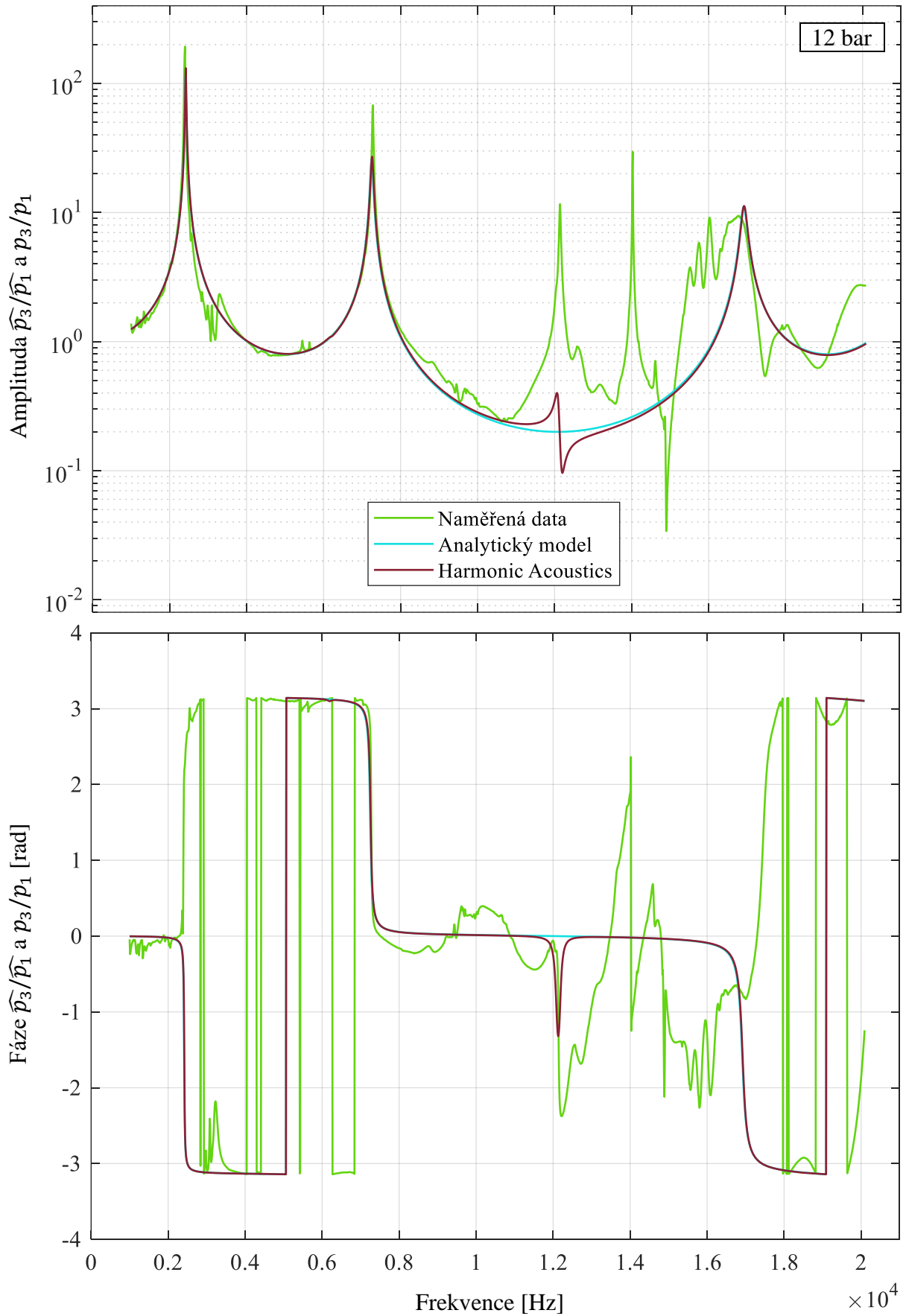
**Příloha J** Porovnání průběhu amplitudy a fáze zesílení tlaku  $\widehat{p}_2/\widehat{p}_1$  a  $p_2/p_1$  pro 22 bar



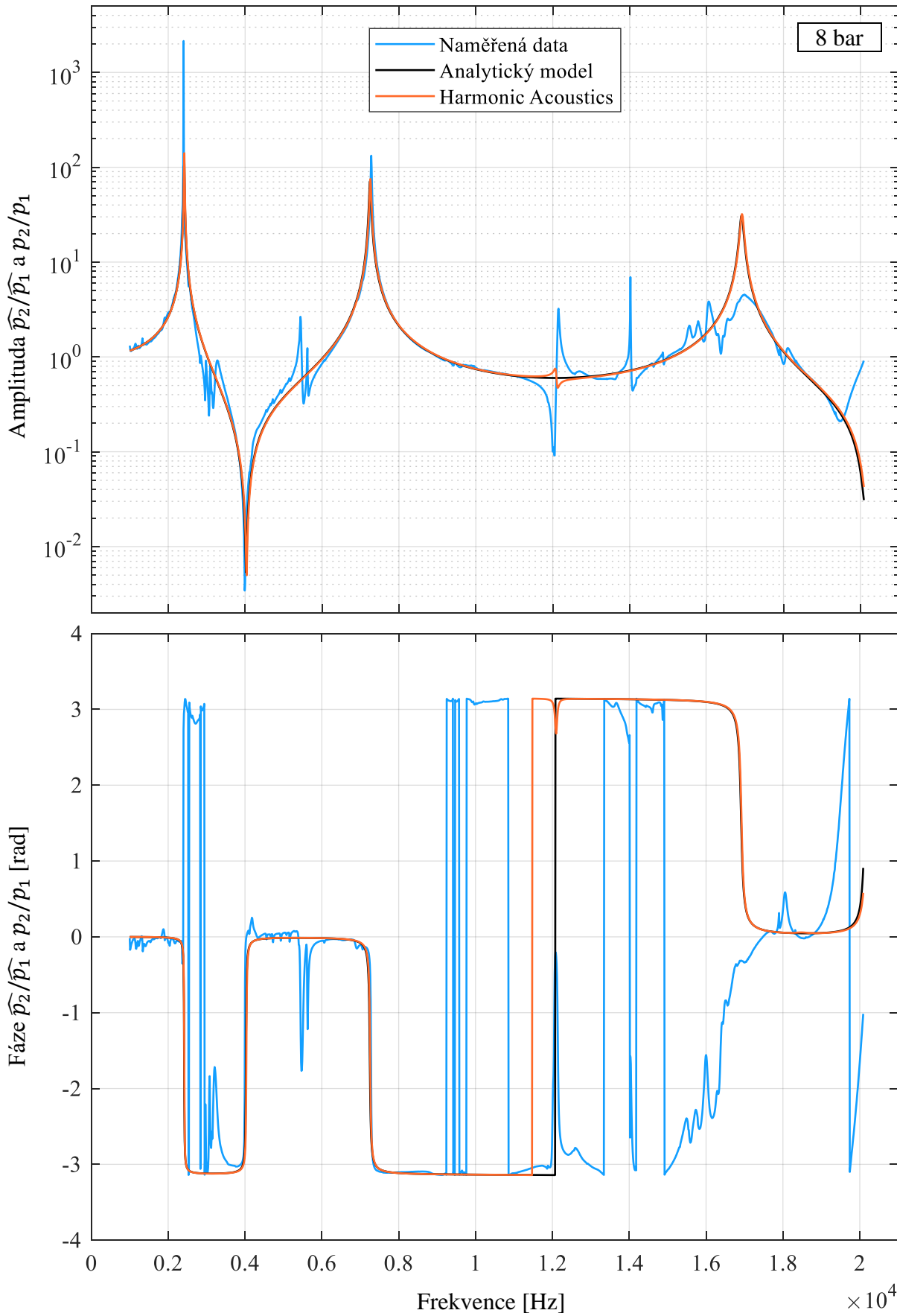
**Příloha K** Porovnání průběhu amplitudy a fáze zesílení tlaku  $\widehat{p}_3/\widehat{p}_1$  a  $p_3/p_1$  pro 22 bar



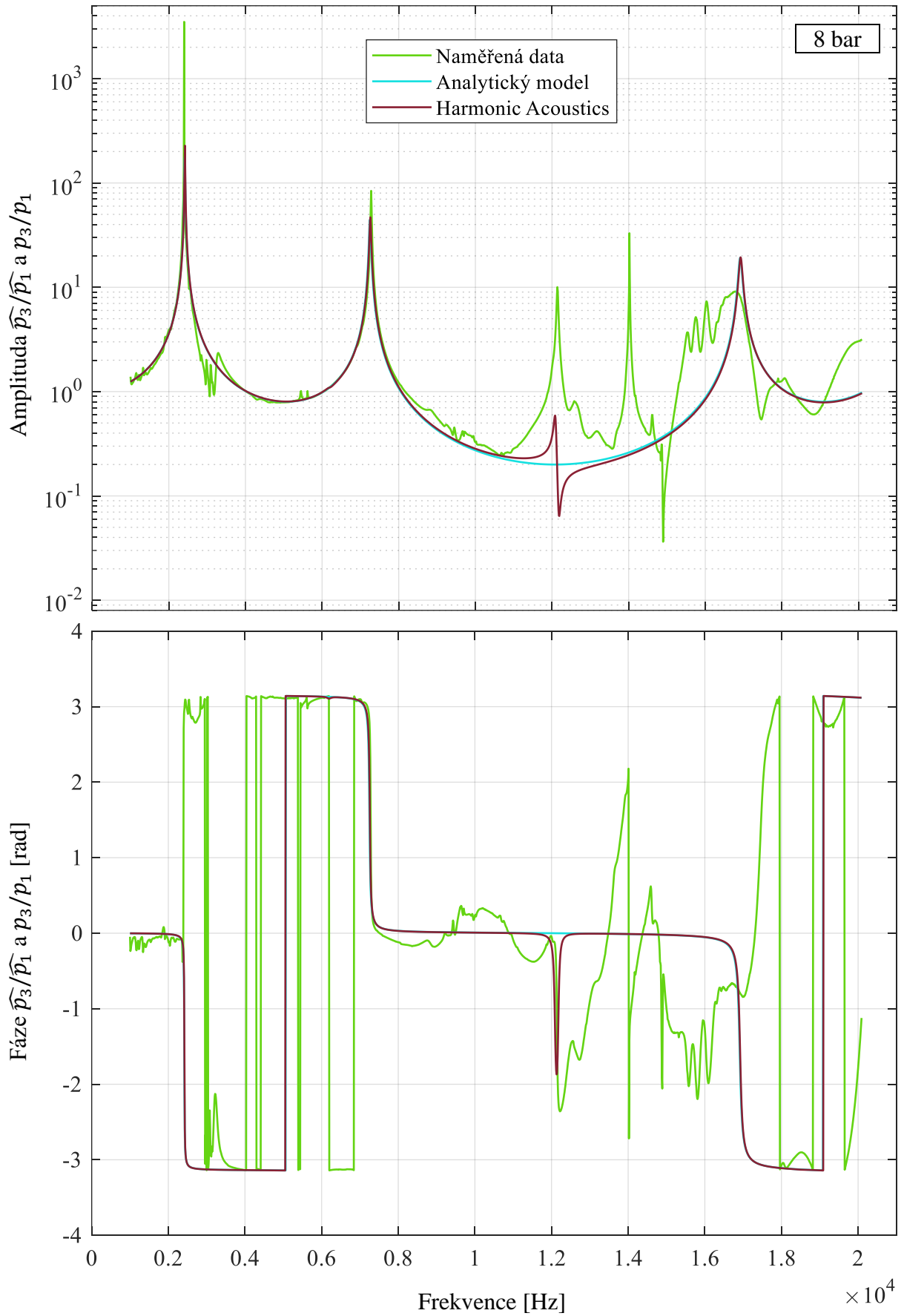
**Příloha L** Porovnání průběhu amplitudy a fáze zesílení tlaku  $\widehat{p}_2/\widehat{p}_1$  a  $p_2/p_1$  pro 12 bar



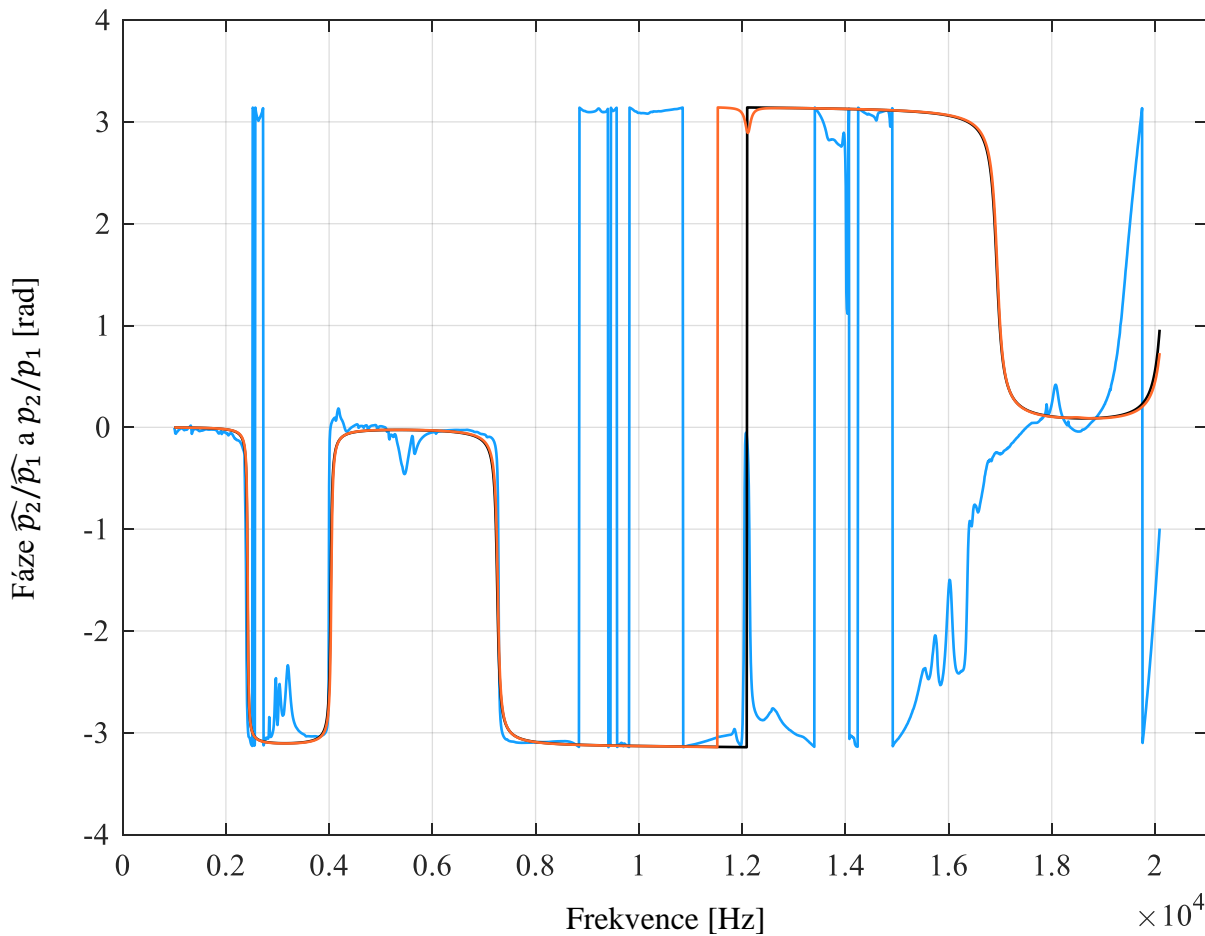
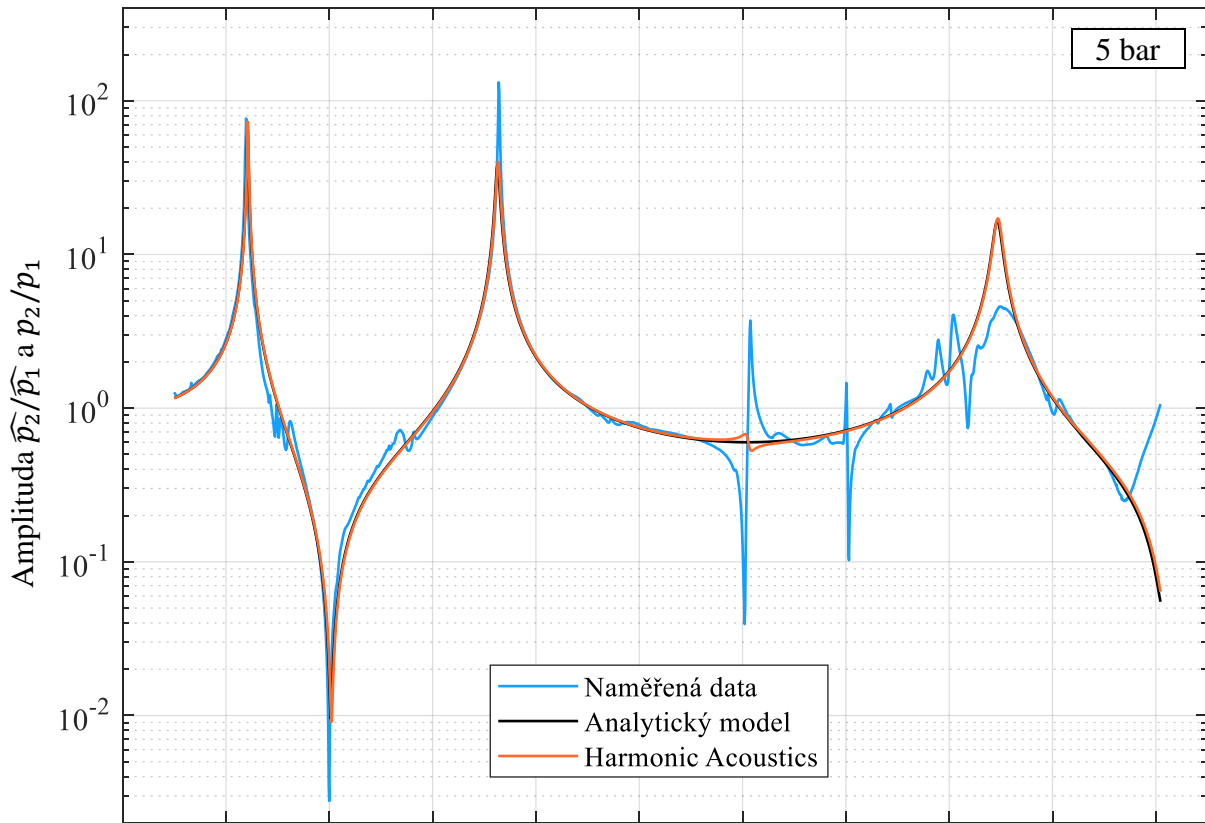
**Příloha M** Porovnání průběhu amplitudy a fáze zesílení tlaku  $\widehat{p}_3/\widehat{p}_1$  a  $p_3/p_1$  pro 12 bar



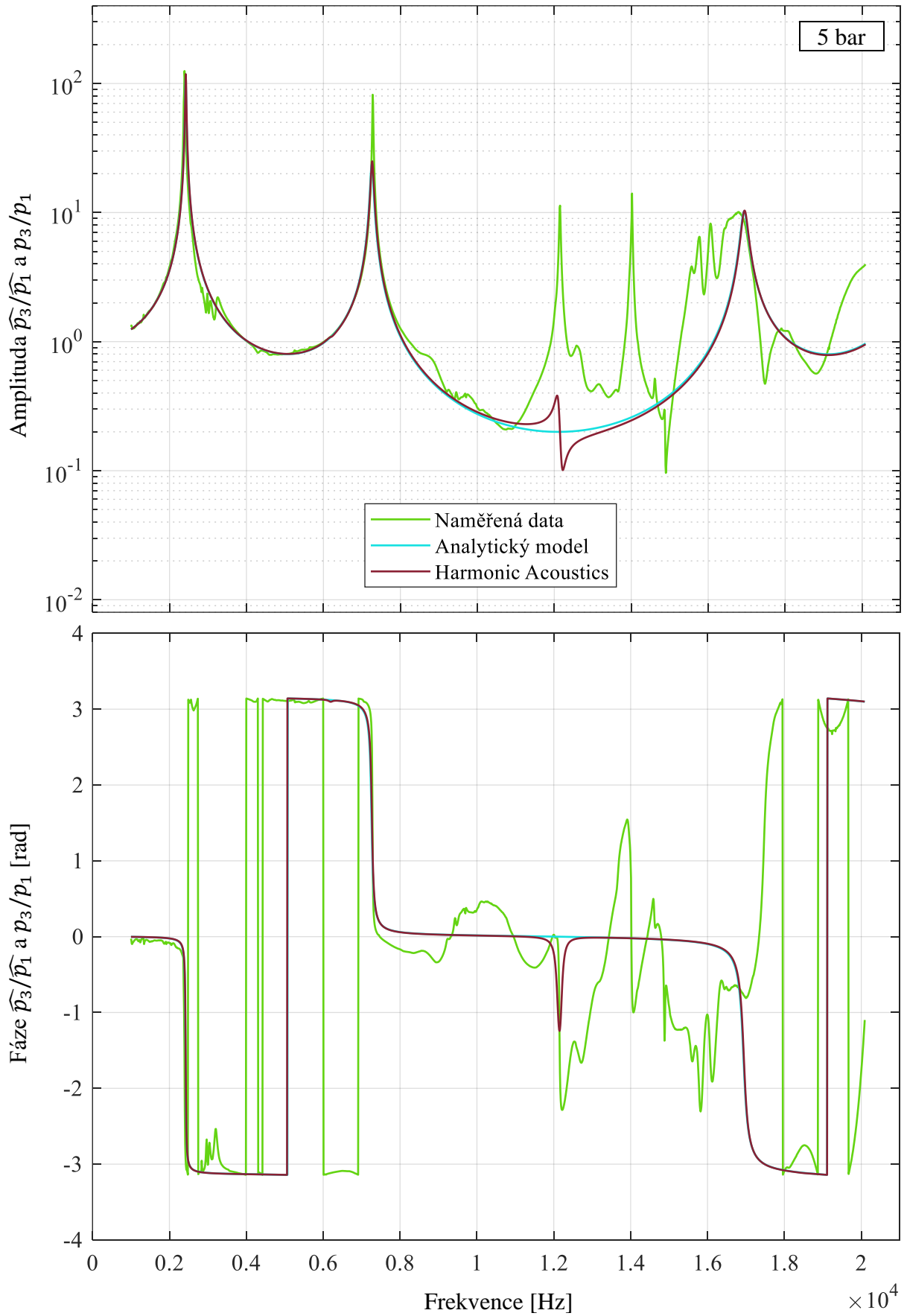
**Příloha N** Porovnání průběhu amplitudy a fáze zesílení tlaku  $\widehat{p}_2/\widehat{p}_1$  a  $p_2/p_1$  pro 8 bar



Příloha O Porovnání průběhu amplitudy a fáze zesílení tlaku  $\widehat{p}_3/\widehat{p}_1$  a  $p_3/p_1$  pro 8 bar



**Příloha P** Porovnání průběhu amplitudy a fáze zesílení tlaku  $\widehat{p}_2/\widehat{p}_1$  a  $p_2/p_1$  pro 5 bar



**Příloha Q** Porovnání průběhu amplitudy a fáze zesílení tlaku  $\widehat{p}_3/\widehat{p}_1$  a  $p_3/p_1$  pro 5 bar