



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

MODEL KMITÁNÍ ŽELEZNIČNÍ TRATI

OSCILLATION MODEL OF TRAIN TRACK

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Michal Kosorín

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Zdeněk Hadaš, Ph.D.

BRNO 2018

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	Michal Kosorín
Studijní program:	Strojírenství
Studijní obor:	Základy strojírenství
Vedoucí práce:	doc. Ing. Zdeněk Hadaš, Ph.D.
Akademický rok:	2017/18

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Model kmitání železniční trati

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Moderní železnice kladou vysoké nároky na bezpečnost a velmi důležité je monitorování provozu a signalizace na železnici. Tyto elektronické obvody musí být autonomně napájeny a na odlehlých částech trati to může být problém. Jednou z možností jak vytvořit autonomní zdroj energie je transformace kinetické energie kmitání kolejnice na elektrickou energii. Úkolem této práce je vytvořit model kmitání pražce při průjezdu vlaku, který bude dále využit při vývoji zmíněných autonomních zdrojů energie.

Cíle bakalářské práce:

1. Rešerše a analýza dynamických modelů železniční trati a jejich parametrů.
2. Vytvoření modelu elementu železniční trati pro potřeby simulace.
3. Model buzení projíždějícím vlakem.
4. Analýza simulačních výsledků.

Seznam doporučené literatury:

SCHIEHLEN, W.: Multibody System Dynamics: Roots and Perspectives. Multibody System Dynamics [online]. roč. 1, č. 2, s. 149–188. ISSN 13845640, 1997

CLEANTE, V. G., M. J. BRENNAN, G. GATTI a D. J. THOMPSON: Energy harvesting from the vibrations of a passing train: effect of speed variability. Journal of Physics: Conference Series [online]. roč. 744, s. 12080. ISSN 1742-6588, 2016

GATTI, G., M. J. BRENNAN, M. G. TEHRANI a D. J. THOMPSON: Harvesting energy from the vibration of a passing train using a single-degree-of-freedom oscillator. Mechanical Systems and Signal Processing [online]. B.m.: Elsevier, roč. 66–67, s. 785–792. ISSN 10961216, 2016

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2017/18

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Táto bakalárska práca sa zaoberá dynamickými modelmi kmitania železničnej trate. V práci je uvedený prehľad historického vývoja týchto modelov. Sú vytvorené konkrétne modely, v ktorých sú dopočítané výchylky. Za účelom spresnenia výsledkov výchyliek koľajnice, je sila od prechádzajúceho vlaku vyjadrená v závislosti na čase. Na záver je popísané celkové silové pôsobenie kolies vlakovej súpravy na koľajnicu.

Abstract

This bachelor thesis deals with dynamic models of rail track vibration. The thesis presents an overview of the historical development of these models. Specific models of vibration are created and deflections are calculated. The force from the passing train is expressed in terms of time in order, to refine the results of the rail deflections. At last, the force effect of the wheels of the train on the rail is described.

Kľúčové slová

Kmitanie, Model železničnej trate, Výchylka železničnej trate, Sila od vlaku

Keywords

Vibration, Model of rail track, Deflection of rail track, Train's force

Bibliografická citácia

KOSORÍN, M. Model kmitání železniční trati. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2018. 47 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Zdeněk Hadaš, Ph.D..

Čestné prehlásenie

Prehlasujem, že som bakalársku prácu na tému „Model kmitania železničnej trate“ vypracoval samostatne s použitím odbornej literatúry a prameňov uvedených v zozname, ktorý je zahrnutý v tejto práci.

25.5.2018

.....
Michal Kosorín

Pod'akovanie

Týmto by som rád poďakoval vedúcemu svojej bakalárskej práce doc. Ing. Zdeňkovi Hadašovi, Ph.D. za cenné rady a pripomienky pri vypracovaní bakalárskej práce.

Obsah

Úvod	11
2. Formulácia problému.....	12
3. Parametre železničnej trate	13
4. Vývoj dynamických modelov železničnej trate	14
4.1. Rôzne typy zaťaženia v dynamických modeloch.....	14
4.2. Použitie momentu zotrvačnosti a strihovej deformácie	14
4.3. Nové prvky v dynamických modeloch	15
4.4. Podrobný dynamický model	17
4.5. Vplyv rýchlosti vlaku na kmitanie železničnej trate	18
5. Vlastná tuhosť koľajnice	21
6. Model traťového systému	23
6.1. Rovnice silovej rovnováhy.....	23
6.2. Riešenie sústavy diferenciálnych rovníc	24
7. Úprava modelu traťového systému.....	26
8. Popis sily od prechádzajúceho vlaku.....	28
8.1. Aplikácia popisu sily od prechádzajúceho vlaku	31
9. Model kmitania podvalu	33
10. Model budenia od prechádzajúceho vlaku.....	37
10.1. Prejazd vlakovej súpravy.....	37
10.2. Všeobecný priebeh síl od prechádzajúceho vlaku.....	40
Záver.....	42
Zoznam použitej literatúry	43
Zoznam obrázkov	45
Zoznam tabuliek	46
Zoznam príloh	47

Úvod

V dnešnej dobe kladie moderná spoločnosť vysoké nároky na bezpečnosť. Inak tomu nie je ani v železničnom odvetví, kde je potrebná neustála modernizácia tratí, monitorovanie prevádzky a dôležitý je aj bezchybný chod signalizácie.

Elektrické obvody zabezpečujúce monitorovanie a signalizáciu na trati by mali byť autonómne napájané, a to môže byť v odľahlých častiach trate problematické. V prípade akejkolvek poruchy sú úseky trate odstavené a počas času potrebného na opravu nepoužiteľné. Výluky na tratiach sú v súčasnosti dennou rutinou. Preto je nutné hľadať alternatívne riešenia elektrického napájania.

Pri prejazde vlaku po železničnej trati dochádza na koľajnici a na celom koľajovom systéme k javu nazývanému kmitanie. Váha a rýchlosť vlakovej súpravy je schopná rozkmitať traťovú sústavu na okom pozorovateľné výchylky. To vedie k zamysleniu, či by sa táto energia dala efektívne zužitkovať. Namiesto ťahania kilometrov napájacích káblov pod traťou, sa teda ponúka ako jedna z možných riešení, transformácia kinetickej energie kmitania koľajnice na energiu elektrickú. Pre účinnú aplikáciu zariadení, ktoré by boli schopné transformovať túto energiu, je potrebné vedieť predpokladať správanie železničnej trate pri prejazde vlaku. Najjednoduchšou cestou je vytvorenie modelu, ktorý by toto správanie správne simuloval. Práve touto problematikou sa bude táto bakalárska práca zaoberať.

Ciele tejto práce sú:

1. Rešerš a analýza dynamických modelov železničnej trate a jej parametrov
2. Vytvorenie modelu elementu železničnej trate pre potreby simulácie
3. Model budenia prechádzajúcim vlakom
4. Analýza simulačných výsledkov

2. Formulácia problému

Z mechanického hľadiska môžu byť vlak a koľajový systém dve samostatné vibračné jednotky pri aktívnom prechode vlaku. Dynamický opis interakcie medzi nimi je problematický z dôvodu geometricky zložitých kontaktov medzi povrchom vozovky a vozidlom. Kvôli tomu sa na tieto kontakty a spoje trate aplikujú vhodné zjednodušenia. Tými sa už v minulosti zaoberalo veľa svetových výskumov a vedcov, ktorí vytvorili rôzne varianty dynamických modelov prejazdu vlaku a následnej reakcie vyvolanej na jeho dvojkolesovej náprave a celom systéme železničnej trate. Reprezentatívne štúdie viedli vedci zo všetkých kútov sveta, či už z Európy, USA alebo Číny.

Táto práca sa bude zaoberať niekoľkými myšlienkami a prístupmi popisujúcimi kmitanie železničnej trate. Bude vymodelovaná časť koľajnice pomocou, ktorej sa simulačne dopočíta vlastná tuhosť koľajnice. Následne budú vytvorené modely kmitania železničnej trate a jej systému. Prebehne simulácia pôsobenia sily od prechádzajúceho vlaku. Táto sila sa pomocou simulácie bližšie definuje a po jej aplikácii do modelu kmitania, bude presnejšie popísaný priebeh kmitu prvku železničnej koľajnice a podvalu pod ňou. Na záver bude vytvorená zjednodušená simulácia priebehu síl od prechádzajúcej vlakovej súpravy.

3. Parametre železničnej trate

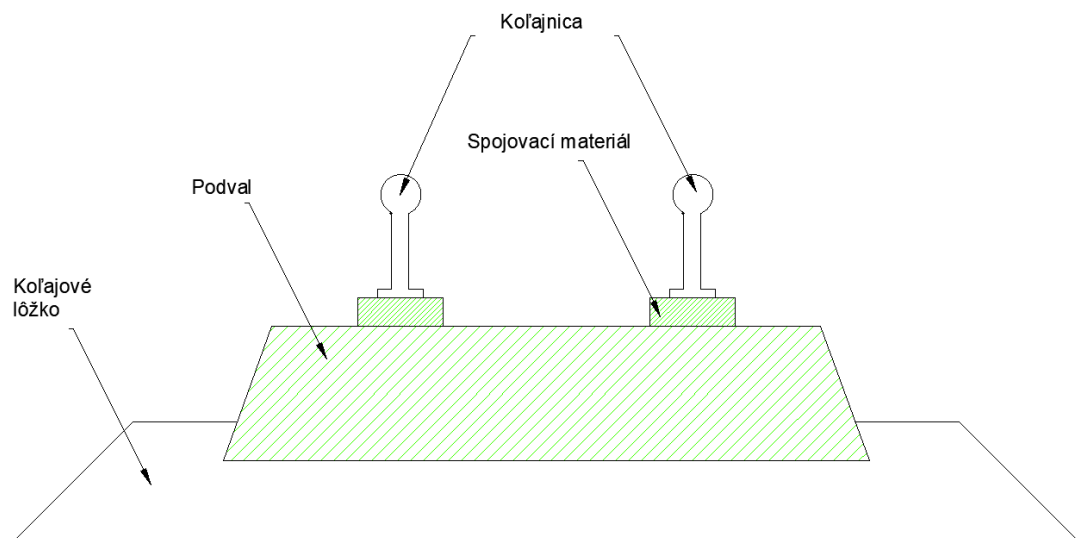
Schéma zloženia železničnej trate je popísaná na obrázku č. 1. Zloženie trate môžeme rozdeliť na dve skupiny: vrchnú vrstvu a spodnú vrstvu. Vrchnú alebo pevnú štruktúru tvoria koľajnica, spojovací materiál a podval. Spodnú vrstvu tvorí koľajové lôžko.

Koľajnica je oceľový nosník, ktorý prenáša silu kolies a absorbuje pozdĺžne sily. Rovnako zvláda pohltiť aj sily rozjazdové či brzdné. Na elektrifikovaných tratiach je vodičom spätného napätia. Najčastejšie sa v súčasnosti používajú širokopäté koľajnice. Hlavný parameter, ktorý sa pri koľajniciach používa je hmotnosť na jeden meter jej dĺžky.

Podval je konštrukčný prvok, ktorý prenáša zaťaženie z koľajnice do koľajového lôžka. V dnešnej dobe sa používajú už len podvaly priečne a môžu byť vyrobené z rôznych materiálov, ako je drevo, železobetón a oceľ. Práve materiál podvalu môže významne ovplyvniť dynamické chovanie trate.

Koľajové lôžko (koľajový násyp) zabezpečuje požadovanú stabilitu koľaje a umožňuje úpravu jej polohy. Je nevyhnutné, aby bolo koľajové lôžko priepustné, nemrznúce, pružné a stabilné. Voľba materiálov, z ktorých sa koľajové lôžko skladá je dôležitá pre jeho kvalitu a väčšinou sa používa kamenivo (žula, čadič, andezit,...).

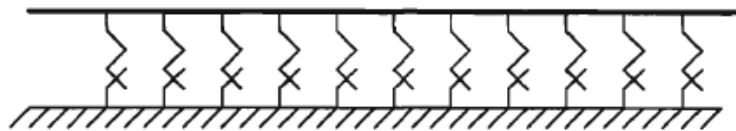
Správanie vrchnej vrstvy železničnej trate, teda podvalov, koľajnice a spojovacieho materiálu, je omnoho predvídateľnejšie ako správanie koľajového lôžka, ktoré má nehomogénnu povahu a vo výpočtoch je preto omnoho zložitejšie ho jednoznačne zjednodušiť.



Obrázok č. 1 – Zloženie železničnej trate

4. Vývoj dynamických modelov železničnej trate

S historicky prvým pokusom o popis dynamického modelu železničnej trate prišiel v roku 1926 Stephen Timoshenko [7]. Jeho idea spočívala v tom, že považoval koľajnicu za nekonečne dlhý priamy nosník, ktorý leží na spojitom elastickom základe (obrázok č. 2).



Obrázok č. 2 – Timoshenkov model

V jeho analýze rozložil hmotnosť samostatných podvalov a pridal ju rovnomerne na koľajnicu. Tento model sa dodnes používa ako základ pri ďalších analýzach a výskume dynamického chovania železničnej trate.

Timoshenkov model však ešte neobsahoval niekoľko dôležitých parametrov, ako sú nelineárne chovanie trate, flexibilita podvalov, momenty zotrvačnosti a strihová deformácia jednotlivých prvkov sústavy. Všetky tieto parametre v priebehu rokov postupne dopĺňali ďalší vedci vo svojich modeloch.

4.1. Rôzne typy zaťaženia v dynamických modeloch

V roku 1938 Lidwig [8] prezentoval riešenie dynamického modelu pre pohybujúce sa bodové zaťaženie na nekonečne dlhej koľajovej trati. O pár rokov neskôr sa pripojilo riešenie pre harmonické bodové zaťaženie namiesto konštantného, aby sa v roku 1972 podarilo British Rail Group [7] prísť so štúdiom pôsobenia dynamických síl od kolies vlaku na koľajové spoje a ďalšie články koľajového systému. Vďaka impulznej funkcii popisujúcej styk kolesa a trate, sa im podarilo popísať priebeh sily v čase. To prinieslo jedny z prvých reprezentatívnych výsledkov pre posuvy, ohyby a napätie trate.

Aplikáciu teplotného axiálneho zaťaženia, základného tlmenia a Timoshenkovho modelu priniesol v roku 1974 pán Mair [14]. Vo svojej práci prezentoval opis rezonančných frekvencií trate a popis vychýleného tvaru koľaje pri prejazde vlaku. Maticovou analýzou riešil výchylky koľajnice pod bodovým zaťažením. Jeho štúdia v tom čase viedla k záveru, že axiálne zaťaženie, rýchlosť vlaku a ani tlmenie nemajú vplyv na rozsah rezonančnej frekvencie koľaje.

4.2. Použitie momentu zotrvačnosti a strihovej deformácie

V 70. rokoch 20. storočia sa k dynamickým analýzám železničnej trate začali postupne pridávať momenty zotrvačnosti a strihová deformácia koľajnice. Bolo dokázané, že táto aplikácia spôsobuje 1% výchylku vo výsledkoch rozsahu frekvencií [7].

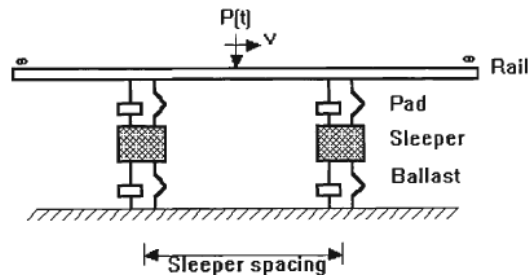
V roku 1997 Dalhberg a Nielsen [7] porovnali dva modely: nosník, ktorý nezahŕňal momenty zotrvačnosti a strihovú deformáciu a Timoshenkov nosník, ktorý dané charakteristiky obsahoval. Z výsledkov analyzovali, že došlo k podstatnému rozdielu pokiaľ sa v ohybe počíta s viac ako dvomi vlastnými frekvenciami. Od tej doby sú tieto

parametre neodmysliteľnou súčasťou moderných dynamických výpočtov železničnej trate.

4.3. Nové prvky v dynamických modeloch

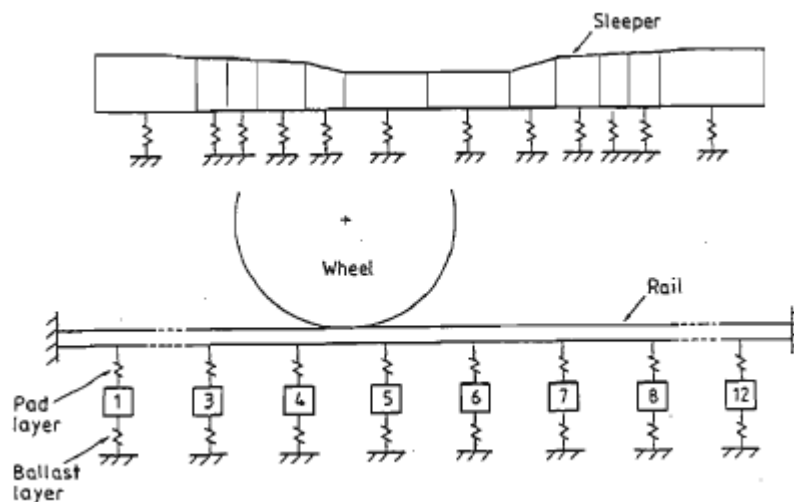
Prvými mužmi s myšlienkou využitia samostatnej podpory (niekoľkých samostatných podvalov) v dynamickom modeli trate boli v roku 1977 páni Fredrick a Newton. O dva roky neskôr Parasad a Garg rozdelili koľaj na niekoľko paralelných rovinných vrstiev z homogénnych, izotropných a elastických materiálov. V ich výskume pomocou tejto mikroštruktúrnej teórie analyzovali vplyv rozostupu podvalov, Youngovho modulu a tlmenia [6].

British Rail Research Group (BRR) v spolupráci s Cambridge University Research Group (CUR) postúpili vo svojom výskume ešte o krok ďalej. Ich model z roku 1984 obsahoval elastický základ z dvoch radov pružín. Ako pokračovanie tejto spolupráce o niekoľko rokov pridali do svojich modelov podložky pod koľajnice a železničné lôžko pod podvaly (obrázok č. 3) [7].



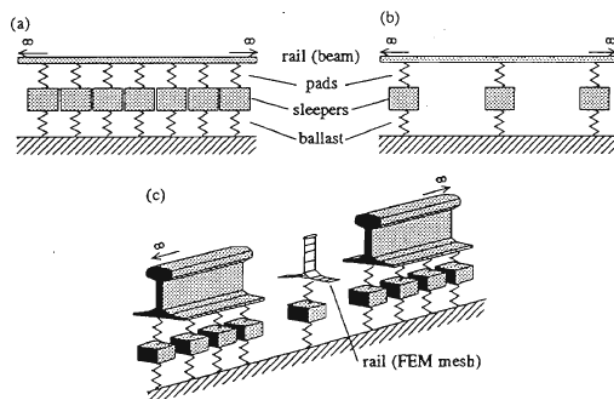
Obrázok č. 3 – Model od BRR a CUR [7]

Model J. M. Tunna z roku 1988 [5] už obsahoval 12 podvalov umiestnených v priestore, každý s vlastnou hmotnosťou pripevnený pružinou ku koľaji aj k zemi.



Obrázok č. 4 – Model od J.M. Tunna s 12 podvalmi [5]

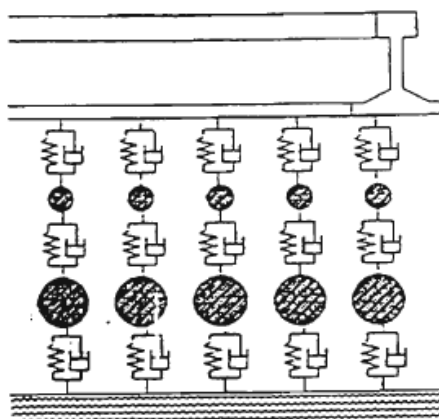
Tri alternatívne modely (obr. č. 5) od Thompsona a Vicenta z roku 1995 [10] popisujú správanie trate pri rozsahu frekvencií 50-60000 Hz. Prvý model (obr. č. 5a) má 2 pružné vrstvy (koľajové podložky, železničné lôžko) a 2 vrstvy hmoty (koľajnicu, podvaly). V druhom modeli (obr. č. 5b) už sú obsiahnuté aj parametre trate, a teda vzdialenosť medzi podvalmi a v treťom modeli (obr. č. 5c) je už koľajnica modelová v 3D.



Obrázok č. 5 – Modely Thompsona a Vicenta [10]

V roku 1961 bol prezentovaný 3D elastický pomocný priestorový model pre základy trate a správanie trate pod zaťažením. Trať ako elastický nosník leží na elastickom polpriestore so zotrvačnosťou a je zaťažená pohybujúcou sa konštantnou silou.

Japonec Sato [9] formuloval svoju myšlienku, kde podvaly uvažoval ako sústredenú hmotu umiestnenú medzi dvomi radmi pružín, kvôli analýze vysokej frekvencie traťovej vibrácie. Satov model (obr. č. 6) pozostáva z 3 vrstiev hmoty a 3 vrstiev pružín a tlmičov. Horná vrstva hmoty predstavuje koľaj, prostredná podvaly a spodná koľajové lôžko. Každá vrstva je spojená pružinami a tlmičmi, ktoré nahrádzajú pružnosť a tlmenie konkrétnych spojení.



Obrázok č. 6 – Satov model s 3 vrstvami hmoty [9]

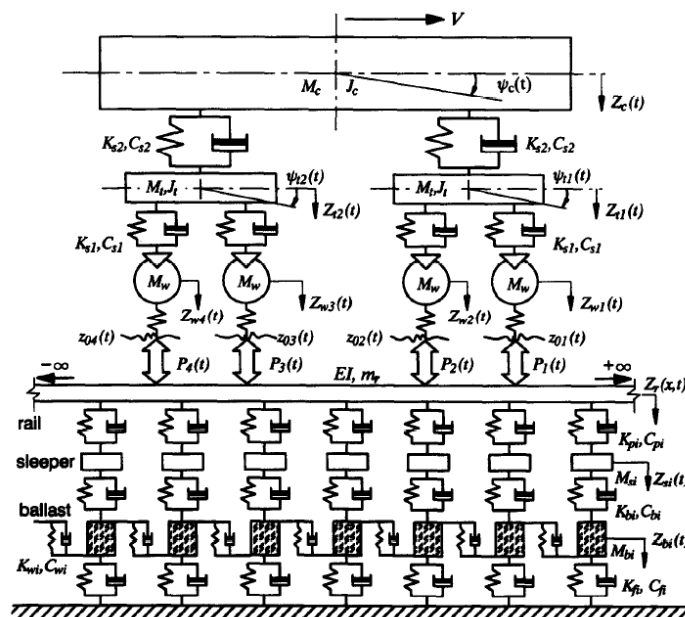
4.4. Podrobný dynamický model

Jeden z najkomplexnejších dynamických modelov je popísaný v práci dvoch vedcov z Číny – W. Zhai a Z. Cai [2]. Obrázok č. 7 popisuje model železničného traťového systému s rôznymi komponentami, ktoré na seba pôsobia. Uvažované vozidlo leží na dvoch podvozkoch. Každý podvozok sa nachádza na jednom konci vlaku. Autori popísali tento systém s 10 stupňami voľnosti. Momenty zotrvačnosti vozidla sú označené ako M_c , J_c . Momenty zotrvačnosti hmoty podvozku sú M_t , J_t a štyri dvojkolesové nápravy nepružnej hmoty sú označené M_w . Pozdĺžny rám podvozku je spojený s nápravou pomocou pružín a tlmičov označených K_{s1} , C_{s1} a s telom vozidla cez sekundárne závesné pružiny a tlmiče - K_{s2} , C_{s2} . V traťovom modeli je koľajnica uvažovaná ako dlhý nosník položený na podvaloch. Spojenie medzi koľajnicou a podvalmi je uvažované pomocou série pružín, tlmičov a hmoty. Tri vrstvy oddelených pružín a tlmičov predstavujú elastický a tlmiaci efekt koľajovej podložky a iného železničného podkladu. Dve vrstvy samostatnej hmoty pod koľajnicou predstavujú podvaly a železničné lôžko. Hodnoty hmoty, tuhosti a tlmenia týchto traťových prvkov, môžu byť pri výpočtoch pozmenené podľa potreby, takže môžu vzniknúť rôzne variácie traťových vlastností a geometrické nerovnosti môžu byť takisto zahrnuté do výpočtu. V mnohých situáciách vedú práve takéto nerovnosti k nežiadúcemu správaniu kolesa či koľaje.

Tento model je popísaný pomocou obyčajnej diferenciálnej rovnice druhého rádu. Rovnica je formulovaná použitím D'Alembertovho princípu. Všeobecný tvar tejto rovnice pre vozidlo, ale aj koľajovú trať je nasledovný:

$$[M]\{\ddot{X}(t)\} + [C]\{\dot{X}(t)\} + [K]\{X(t)\} = \{F(t)\}, \quad (1)$$

kde $[M]$, $[C]$ a $[K]$ sú všeobecné matice hmotnosti, tlmenia a tuhosti a $\{\ddot{X}(t)\}$, $\{\dot{X}(t)\}$, $\{X(t)\}$ sú všeobecné vektory zrýchlenia, rýchlosti a výchylky. Vektor sila $\{F(t)\}$ v sebe zahŕňa hnaciu silu pri prejazde vlaku, ale aj reakčné sily medzi kolesom vlaku a koľajnicou.



Obrázok č. 7 – model s 10 stupňami voľnosti [2]

4.5. Vplyv rýchlosti vlaku na kmitanie železničnej trate

Jedným zo záverov práce [2] spomenutej v predchádzajúcej podkapitole je aj dôkaz o tom, že dynamická reakcia koľaje a jej systému upnutia dramaticky stúpa spolu so zvyšujúcou sa rýchlosťou vlaku. A práve tomuto správaniu sa podrobnejšie venoval V. G. Cleante vo svojej práci z roku 2016 [1].

Cleante vychádzal z experimentálne nameraných dát na železnici v Spojenom kráľovstve a podrobne skúmal vplyv rôznych rýchlostí vlaku na energiu, ktorú je možné zachytiť z kmitania železničnej trate. Na zachytenie a uschovanie tejto energie používal lineárny systém pružnej klapky s jedným stupňom voľnosti, ktorý zosilňuje vibrácie pri špecifickej frekvencii. Aby to bolo možné, oscilátor má nastavenú vlastnú frekvenciu na úroveň budiacej frekvencie pri ľahkom tlmení.

Vytvorením jednoduchého modelu prechádzajúceho vlaku (obr. č. 8) sa Cleante snažil potvrdiť experimentálne merania na území Spojeného kráľovstva. Tieto merania prebehli na vlaku Inter-city 120, ktorý pozostával z dvoch hnacích lokomotív na každom konci vlakovej súpravy. Ďalej bol tvorený ôsmimi vozňami pre cestujúcich. Každý vagón tejto súpravy stál na dvoch podvozkoch. Merania prebiehali pri rýchlostiach 162, 180, 195 a 200 km/h. Z grafov na obrázku č. 9 formuloval záver, že lokálne maximá vertikálneho zrýchlenia sa vyskytujú pri celočíselných násobkoch pomeru medzi rýchlosťou vlaku a dĺžkou vlakového vozňa. Tieto body sa nazývajú dominantné frekvencie vlaku. Amplitúda zrýchlenia je úmerná amplitúde posuvu vynásobeného štvorcem frekvencie. Zrýchlenie sa mení s rýchlosťou vlaku. Absolútne maximum vertikálneho zrýchlenia sa vyskytuje v okolí 7. harmonickej frekvencie vlaku.

Rovnica č. 2 je diferenciálnou rovnicou pohybu pre koľaj pri stacionárnom zaťažení silou F na nosník (koľaj). E_r je Youngov modul pružnosti, I_r popisuje moment zotrvačnosti, $w(x,t)$ je výchylka trate spôsobená zaťažením, k_s je tuhosť na jednotku dĺžky, δ je delta funkcia, S je rýchlosť vlaku, x je axiálna súradnica a t je čas.

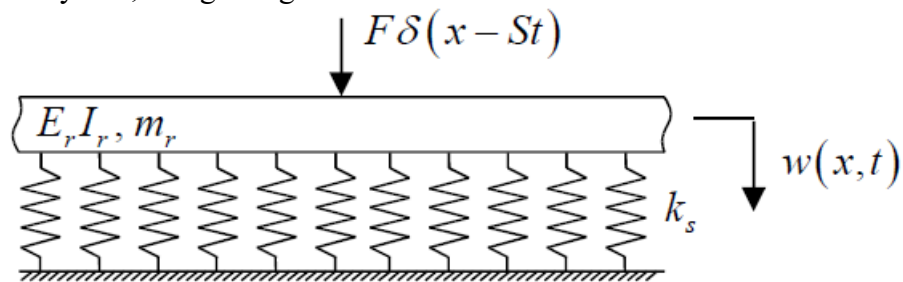
$$E_r I_r \frac{d^4 w(x,t)}{dx^4} + k_s w(x,t) = F \delta(x - St) \quad (2)$$

Riešenie tejto diferenciálnej rovnice je:

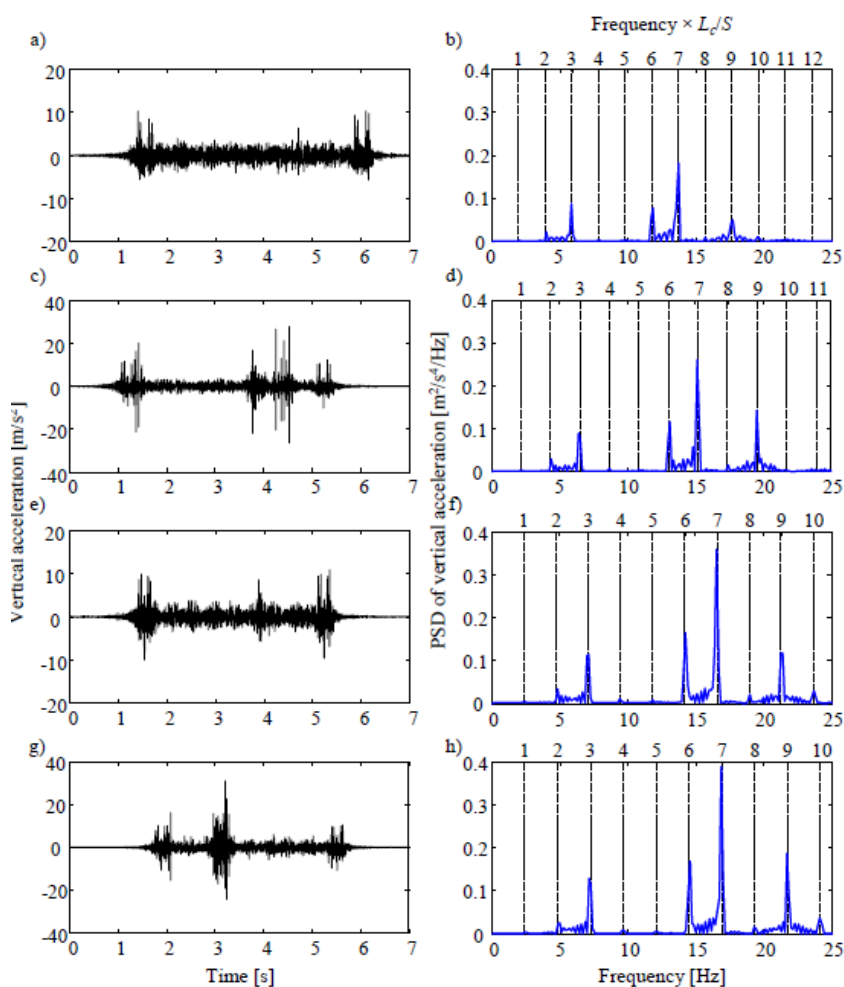
$$w(x,t) = \frac{F\beta}{2k_s} e^{-\beta|x-St|} [\cos(\beta|x-St|) + \sin(\beta|x-St|)], \quad (3)$$

kde $\beta = (k_s/(4E_r I_r))^{1/4}$, pričom $k_s = (\frac{1}{k_p} + \frac{1}{k_b})^{-1}/L_s$. Kde k_p a k_b sú tuhosti koľajovej podložky a koľajového zvršku a L_s je poloha podvalu. Výchylka v čase získaná pomocou tohto riešenia je vykreslená na obrázku č. 10. Správanie vytvoreného modelu sa značne podobá na správanie, ktoré sa získalo z meraní, aj keď ich hodnoty sú odlišné. Odlišnosti sú podľa autora spôsobené jednoduchosťou modelu a voľbou použitých parametrov do výpočtu. Železničný model je odvodený za predpokladu nepretržitej podpory, ale v skutočnosti je koľaj podporená podvalmi, ktoré prejavujú určité fyzikálne správanie. To vo výsledku spôsobí odchýlky s realitou. Avšak pre účely zistenia vplyvu rôznych rýchlostí vlaku na správanie koľaje je tento model dostačujúci. V závere Cleanteho práce je dokázané, že pre zachytenie najväčšieho množstva energie (a teda aj najväčšiu výchylku) je vhodné, aby vlak išiel, čo najväčšou rýchlosťou, čo je v tomto

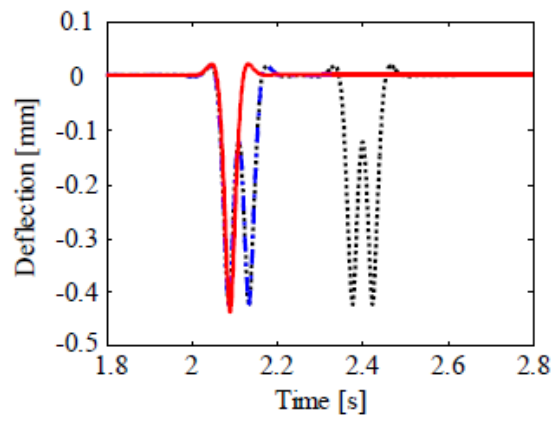
prípade 190 až 200 km/h. Pri podobnej rýchlosti je pri použití vhodného zberača energie možnosť zachytiť 1,1 J/kg energie.



Obrázok č. 8 - Jednoduchý dynamický model trate podľa Cleanteo [1]



Obrázok č. 9 – Vertikálne zrýchlenia pri rôznych rýchlostiach vlaku [1]
(a, b – 162 km/h, c, d – 180 km/h, e, f – 195 km/h, g, h – 200 km/h)



Obrázok č. 10 – Výchylky v čase pre Cleanteho riešenie, červená je výpočtová, modrá je reálne nameraná výchylka [1]

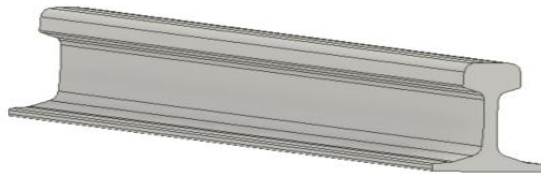
5. Vlastná tuhosť koľajnice

Nasledujúca časť práce sa zameria na výpočet vlastnej tuhosti koľajnice. Pri tomto výpočte sa postupovalo podľa základného vzorca pre tuhosť pružiny:

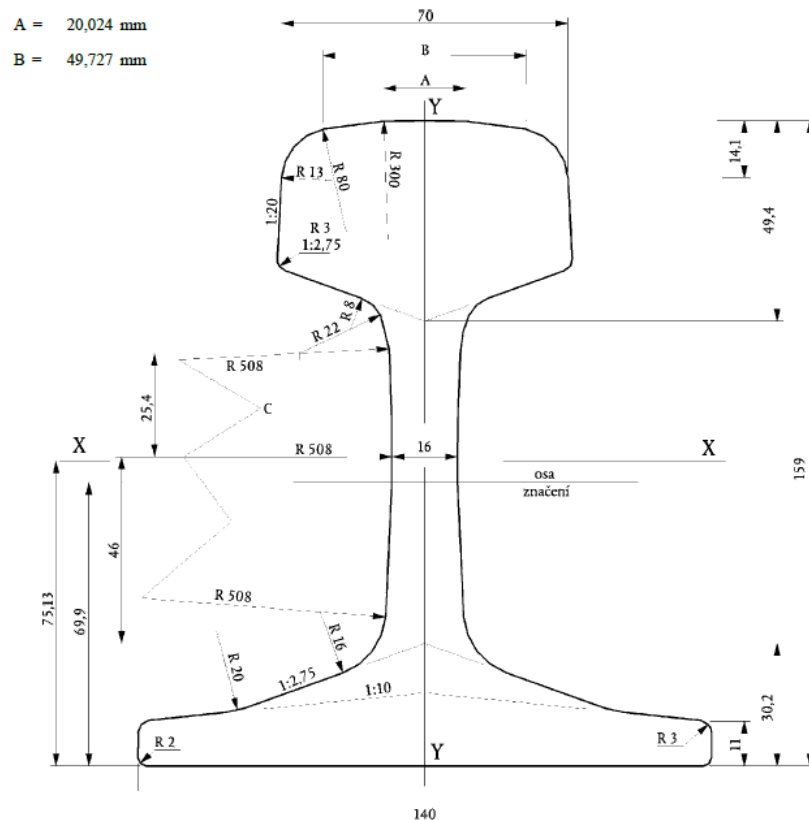
$$k = \frac{F}{\Delta l} \left[\frac{N}{m} \right], \quad (4)$$

kde F je sila, ktorá na koľajnicu pôsobí a Δl je priehyb koľajnice.

Na výpočet tuhosti koľajnice bolo nutné vytvoriť jej model (obr. č. 11). Koľajnica sa skladá z troch častí: hlava, stojina a päta. Geometria koľaje (obr. č. 12) bola použitá z európskych noriem vysokorýchlostných tratí [13] a koľajnica bola skonštruovaná v programe Autodesk Inventor (Príloha F). Tento model sa následne použil na simulácie v programe ANSYS (simulácia je súčasťou prílohy – Príloha 1).



Obrázok č. 11 – Model koľajnice



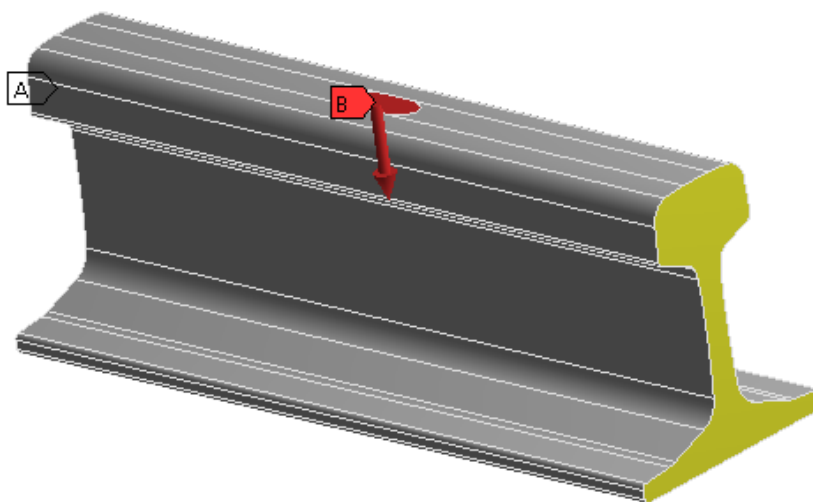
Obrázok č. 12 – Geometria koľajnice [13]

V programe ANSYS bola použitá dĺžka koľajnice 447,5 mm, čo odpovedá osovej vzdialenosti podvalov [12]. Zvoleným materiálom bola konštrukčná oceľ. Okrajové podmienky (obr. č. 13) boli nastavené na priečných prierezoch oboch koncov, v ktorých boli zamedzené všetky posuvy. Vychádzalo sa z predpokladu, že tieto časti sú pevne pripojené k podvalu, a teda sa nehýbu. Na povrchu koľajnice bola vytvorená malá plocha, na ktorú bola definovaná sila kolmo na koľajnicu o veľkosti 1000 N smerom dole. Pôsobisko tejto sily bolo priamo v strede koľajnice. Výsledkom tejto simulácie bola deformácia (priehyb koľajnice), ktorá bola najvyššia kolmo pod silou a jej hodnota bola 0,0007 mm (obr. č. 14). Po dosadení týchto výsledkov do rovnice číslo 4, mala vypočítaná tuhosť hodnotu: $1,4 \cdot 10^9 N \cdot m^{-1}$. Táto hodnota vlastnej tuhosti koľajnice bude v práci použitá v ďalších výpočtoch.

A: Static Structural

Static Structural
Time: 1, s
19.5.2018 2:43

- A Displacement
- B Force: 1000, N

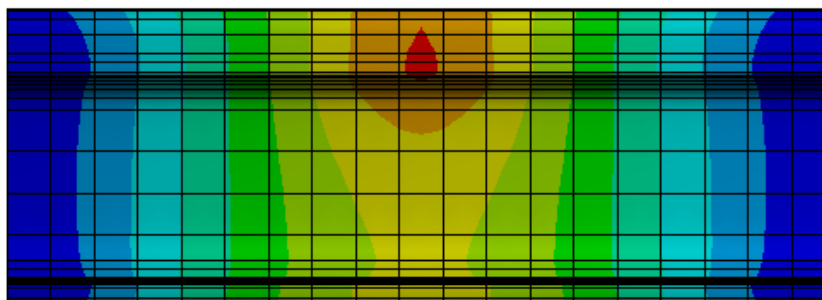


Obrázok č. 13 - Okrajové podmienky

A: Static Structural

Total Deformation
Type: Total Deformation
Unit: mm
Time: 1
19.5.2018 2:42

- 0,00069388 Max
- 0,00061679
- 0,00053969
- 0,00046259
- 0,00038549
- 0,00030839
- 0,00023129
- 0,0001542
- 7,7098e-5
- 0 Min

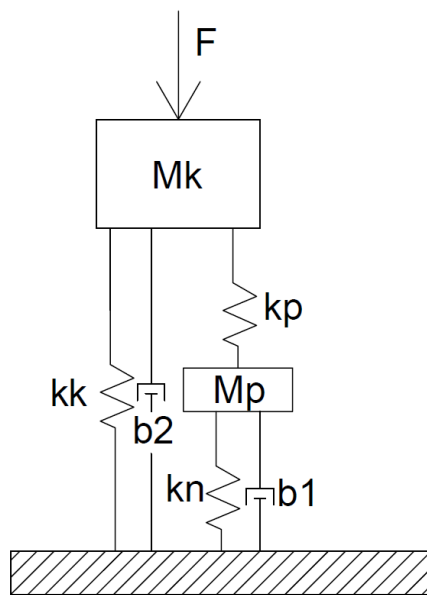


Obrázok č. 14 - Výsledný priehyb

6. Model traťového systému

Ako je vyššie v práci spomenuté, v dynamických modeloch železničný traťový systém predstavujú pružne spojené vrstvy hmoty uložené na elastickom nehmotnom podklade. Táto predstava vznikla na základe dlhodobých výskumov a prešla prirodzeným vývojom a inováciou. Preto sa pri tvorbe modelu v tejto práci vychádzalo z podobných princípov.

Na obrázku číslo 15 je model prvku železničnej trate, ktorý bol vytvorený pre potreby tejto práce. Celý model sa skladá z dvoch hmotných bodov. Vrchný hmotný bod reprezentuje hmotnosť koľajnice spolu s hmotnosťou upínacieho systému koľajnice, označenie M_k . Druhý hmotný bod predstavuje hmotnosť podvalu - M_p . Spojenie medzi podvalom a koľajnicou je pružné, teda je nahradené pružinou, ktorá má tuhosť úmernú tuhosti spojenia koľajnice s podvalom - k_p . Spojenie medzi podvalom a zemou je takisto uvažované ako pružné, a to s tuhosťou, ktorá odpovedá tuhosti koľajového násypu pod podvalom - k_n . V tomto spojení sa uvažuje aj tlmenie b_1 , práve kvôli tlmiacemu charakteru násypu. F je sila od vlaku, ktorá pôsobí na koľajnicu. Keďže je v tomto modeli koľajnica uvažovaná ako hmotný bod, jej vlastná tuhosť (k_k) a tlmenie (b_2) bolo ešte samostatne spojené so zemou.



Obrázok č. 15 – Model kmitania prvkov železničnej trate

6.1. Rovnice silovej rovnováhy

Model, ktorý je opísaný na obrázku číslo 15 má dva stupne voľnosti, kde neznáme výchylky y_1 a y_2 sú výchylkami koľajnice a podvalu. Pre ich riešenie bola vytvorená sústava dvoch rovníc silovej rovnováhy:

$$M_k \ddot{y}_1 + b_2 \dot{y}_1 + k_k y_1 + k_p (y_1 - y_2) = F(t) \quad (5)$$

$$M_p \ddot{y}_2 + b_1 \dot{y}_2 + k_n y_2 + k_p (y_1 - y_2) = 0 \quad (6)$$

Ide o sústavu dvoch diferenciálnych rovníc druhého rádu. Pričom \ddot{y}_1 je zrýchlenie koľajnice, \ddot{y}_2 je zrýchlenie podvalu, \dot{y}_1 je rýchlosť koľajnice, \dot{y}_2 je rýchlosť podvalu. Pri riešení pomocou substitúcie vzniknú štyri diferenciálne rovnice prvého rádu:

Substitúcia:

$$z_1 = y_1 \quad (7)$$

$$z_2 = \dot{y}_1 \quad (8)$$

$$z_3 = y_2 \quad (9)$$

$$z_4 = \dot{y}_2 \quad (10)$$

$$M_k \dot{z}_2 + b_2 z_2 + k_k z_1 + k_p (z_1 - z_3) = F(t) \quad (11)$$

$$M_p \dot{z}_4 + b_1 z_4 + k_n z_3 + k_p (z_1 - z_3) = 0 \quad (12)$$

Sústava štyroch diferenciálnych rovníc prvého rádu:

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (13)$$

$$\dot{z}_2 = -\frac{b_2 z_2}{M_k} - \frac{k_k z_1}{M_k} - \frac{k_p (z_1 - z_3)}{M_k} + \frac{F}{M_k} \quad (14)$$

$$\dot{z}_3 = z_4 \quad (15)$$

$$\dot{z}_4 = -\frac{b_1 z_4}{M_p} - \frac{k_n z_3}{M_p} - \frac{k_p (z_1 - z_3)}{M_p} \quad (16)$$

6.2. Riešenie sústavy diferenciálnych rovníc

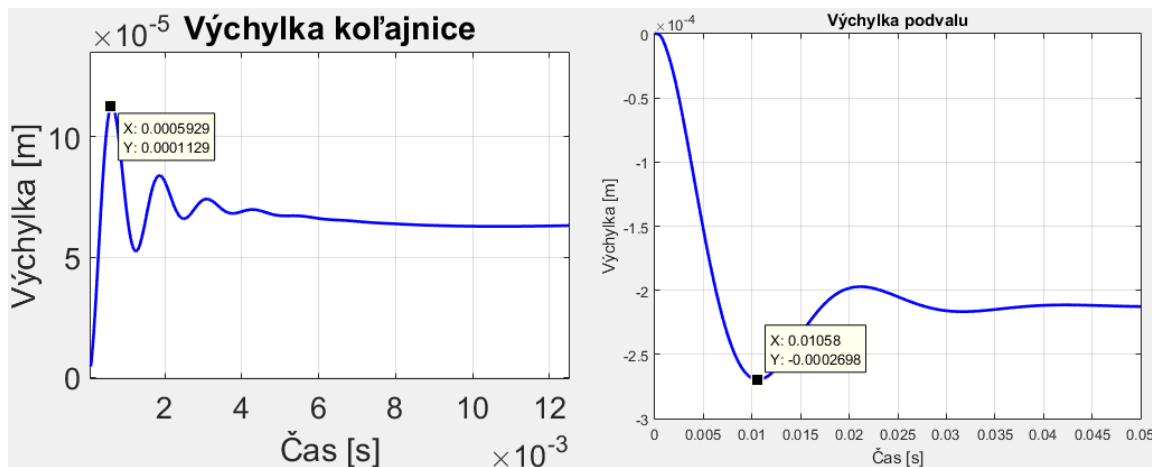
Na riešenie sústavy rovníc číslo 13 až 16 bola použitá funkcia ODE45 v programe Matlab (skripty použité na riešenie sú prílohou práce – príloha A). Vstupné hodnoty použité pri výpočte sú uvedené v tabuľke č. 1. Hodnoty tlmení boli nastavené na 20% pomerný útlm $b = 0.4\sqrt{mk}$. Použité hodnoty tuhostí sú prebraté zo štúdie publikovanej v Číne [11], kde boli experimentálne zisťované a hodnota tuhosti koľajnice bola dopočítaná v kapitole 5. Hodnoty hmotností vychádzajú z predpisu ŽSR [12]. Pri koľajnici sa pri výpočte brali do úvahy len 3/8 z jej celkovej hmotnosti, pretože sa považovala za votknutú z oboch strán a v tom prípade kmitá len táto časť jej hmotnosti [17].

Prvok	Hodnota	Jednotky
Hmotnosť koľajnice (M_k)	54,77	kg/m
Hmotnosť podvalu (M_p)	200	kg
Tunosť koľajnice (k_k)	1,4	GN/m
Tunosť podložky (k_p)	$0,6 \cdot 10^8$	N/m
Tunosť násypu (k_n)	$7,84 \cdot 10^7$	N/m

Tabuľka č. 1 – Hodnoty použité pri riešení sústavy rovníc č. 13-16

Pri riešení tohto modelu (obr. č. 15) bola sila od vlaku uvažovaná ako konštantná sila pôsobiaca v dôsledku gravitácie. Uvažovala sa jedna lokomotíva o hmotnosti 88 ton (vrátane kolies a náprav). Táto hmotnosť sa rovnomerne rozloží na 8 kolies lokomotívy, takže na jedno koleso pôsobí sila o veľkosti :

$$F = 9,81 \cdot 11000 = 107910 \text{ N} \quad (17)$$

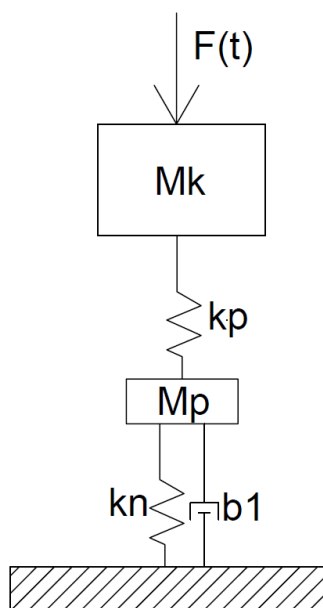


Obrázok č. 16 – Výsledky kmitania s 2 stupňami voľnosti

Na obrázku číslo 16 je vykreslený časový priebeh výchyliek koľajnice a podvalu pre tento uvažovaný model s konštantnou silou. Maximálna hodnota výchylky koľajnice je 0,11 mm a maximálna hodnota výchylky podvalu je 0,269 mm. Výsledky výchyliek môžu byť od reality odlišné, pretože sila, ktorá na koľajový systém pôsobí v skutočnosti nie je konštantná.

7. Úprava modelu traťového systému

Ďalšou možnosťou ako zjednodušiť a popísať prvok železničnej trate je model, ktorý je znázornený na obrázku číslo 17. Na rozdiel od prvej alternatívy, ktorá už v práci bola prezentovaná v predchádzajúcej kapitole, tento model už neobsahuje vlastnú tuhosť koľajnice ani jej tlmenie. Tieto parametre budú neskôr zahrnuté v popise sily, ktorá sa bude na riešenie tohto konkrétneho modelu používať.



Obrázok č. 17 – Model prvkov železničnej trate bez vlastnej tuhosti koľajnice (M_k – hmotnosť koľajnice, k_p – tuhosť podložky, M_p – hmotnosť podvalu, k_n – tuhosť žel. násypu, b_1 – tlmenie žel. násypu, F – sila od vlaku)

Matematické riešenie tejto sústavy hmotných bodov opäť vedie na 2 rovnice silovej rovnováhy:

$$M_k \ddot{y}_1 + k_p (y_1 - y_2) = F(t) \quad (18)$$

$$M_p \ddot{y}_2 + b_1 \dot{y}_2 + k_n y_2 + k_p (y_1 - y_2) = 0 \quad (19)$$

Ekvivalentne ako v kapitole 6 ide o sústavu dvoch diferenciálnych rovníc druhého rádu. Na ich riešenie bude použitá substitúcia, pomocou ktorej vzniknú štyri diferenciálne rovnice prvého rádu:

Substitúcia:

$$z_1 = y_1 \quad (20)$$

$$z_2 = \dot{y}_1 \quad (21)$$

$$z_3 = y_2 \quad (22)$$

$$z_4 = \dot{y}_2 \quad (23)$$

$$M_k \dot{z}_2 + k_p (z_1 - z_3) = F(t) \quad (24)$$

$$M_p \dot{z}_4 + b_1 z_4 + k_n z_3 + k_p (z_1 - z_3) = 0 \quad (25)$$

Sústava štyroch diferenciálnych rovníc prvého rádu:

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (26)$$

$$\dot{z}_3 = z_4 \quad (27)$$

$$\dot{z}_2 = -\frac{k_p(z_1 - z_3)}{M_k} + \frac{F(t)}{M_k} \quad (28)$$

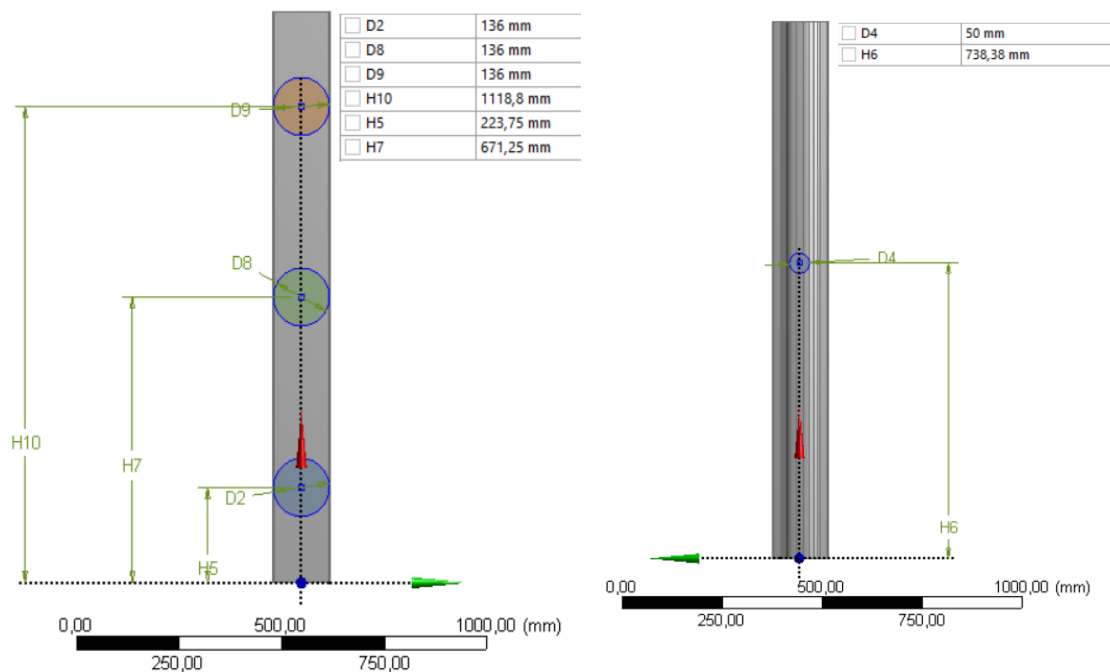
$$\dot{z}_4 = -\frac{b_1 z_4}{M_p} - \frac{k_n z_3}{M_p} - \frac{k_p(z_1 - z_3)}{M_p} \quad (29)$$

Konkrétne riešenie tohto modelu s dosadením hodnôt bude možné až po podrobnejšom zadaní časovej závislosti sily $F(t)$, ktorá pôsobí na koľajnicu od vlaku. Tento problém rieši nasledujúca kapitola.

8. Popis sily od prechádzajúceho vlaku

Ako už bolo v práci uvedené, sila od zaťaženia pôsobiaca na koľajnicu nie je konštantná. Preto je potrebné túto silu bližšie definovať. Na tento problém bol využitý model, ktorý bol vytvorený v kapitole č. 5 (obr. č. 11). Pri simulácii, ktorá prebehla v programe ANSYS (Príloha 2), bola použitá dĺžka koľajnice 1342,5 mm. Na oboch jej koncoch boli zamedzené posuvy na plochách priečných priereзов v dvoch smeroch (obr. č. 19). Povolený bol len posuv vo vertikálnom smere (os y). Na spodnej ploche koľajnice boli vytvorené tri kruhové plochy, ktoré slúžili ako náhrada podvalov (obr. č. 19). Tieto plochy predstavujú podpory, v ktorých bol zamedzený vertikálny posuv a tým došlo k zamedzeniu všetkých stupňov voľnosti koľajnice, čo je pri simulácii nutné. Všetky tieto okrajové podmienky sú podrobne znázornené na obrázku číslo 19 a boli definované s ohľadom na reálne podmienky, ktorým je koľajnica vystavená. Vzďialenosť osí podvalov (kruhových plôch) je 447,5 mm. Tento údaj pochádza z predpisu ŽSR [12]. Vzďialenosť medzi oboma koncami koľaje a krajnými podvalmi je 223,75 mm. Táto vzďialenosť sa zvolila z dôvody, aby oba konce koľajnice ležali pomyselne v strede medzi dvojicou podvalov. Keďže koniec koľajnice neleží na podvale, ale medzi podvalmi, môže byť povolený jeho vertikálny posuv (os y). Geometria modelu je podrobne viditeľná na obrázku číslo 18.

Vlak, ktorý po koľaji prechádza, mení svoju polohu v závislosti na čase. V simulácii sa teda postupne menila poloha pôsobiska sily na koľajnici. Ako pôsobisko sily bola vymodelovaná malá plocha na povrchu koľajnice, ktorá predstavuje „bodové“ zaťaženie od kolesa vlaku (obr. č. 18 vpravo). Veľkosť sily bola 107910 N, obdobne ako v kapitole 6.2, ale dá sa predpokladať, že správanie sily by bolo pre jej akúkoľvek veľkosť rovnaké.

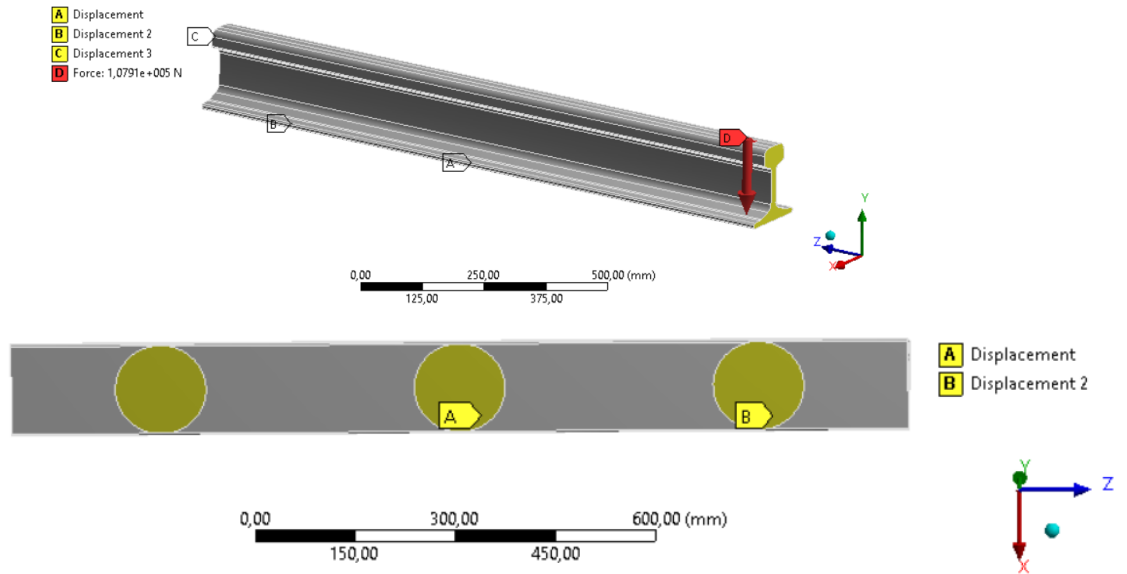


Obrázok č. 18 – Geometria modelu - ANSYS

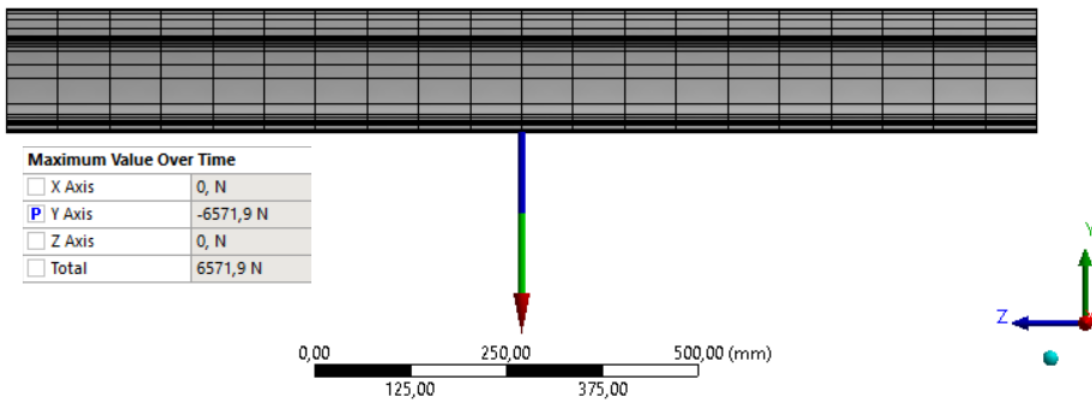
Výstupom tejto simulácie bola výsledná reakčná sila v prostrednej podpore (obrázok č. 20). Táto sila sa menila v závislosti na polohe zadanej sily od vlaku. Číselné výsledky simulácie sú v tabuľke číslo 2. Závislosť sily na polohe bola prepočítaná na závislosť sily na čase pomocou vzťahu:

$$t = \frac{v}{s}, \quad (30)$$

kde t je čas, s je poloha vlaku (sily) a v je rýchlosť vlaku, ktorá bola v tomto prípade zvolená 120 km/h. Závislosť reakčnej sily na čase bola vykreslená do grafu a výsledná krivka bola preložená polynómom (viď. obrázok číslo 21).



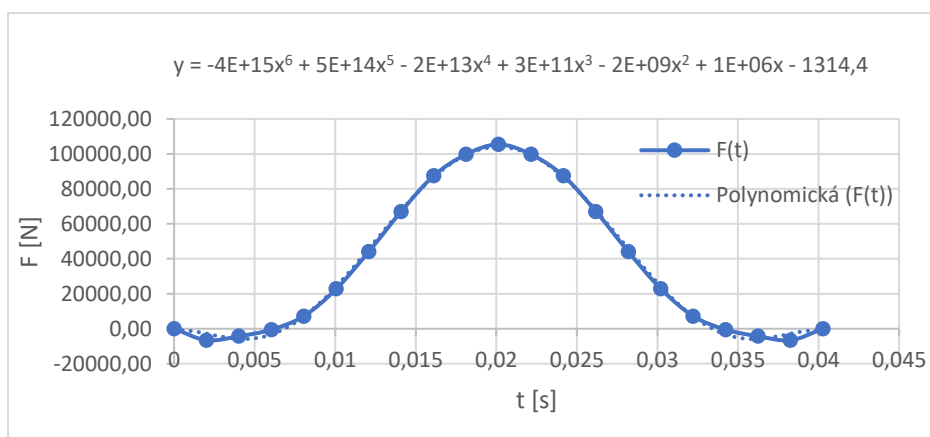
Obrázok č. 19– Okrajové podmienky - ANSYS



Obrázok č. 20– Reakčná sila v podpore

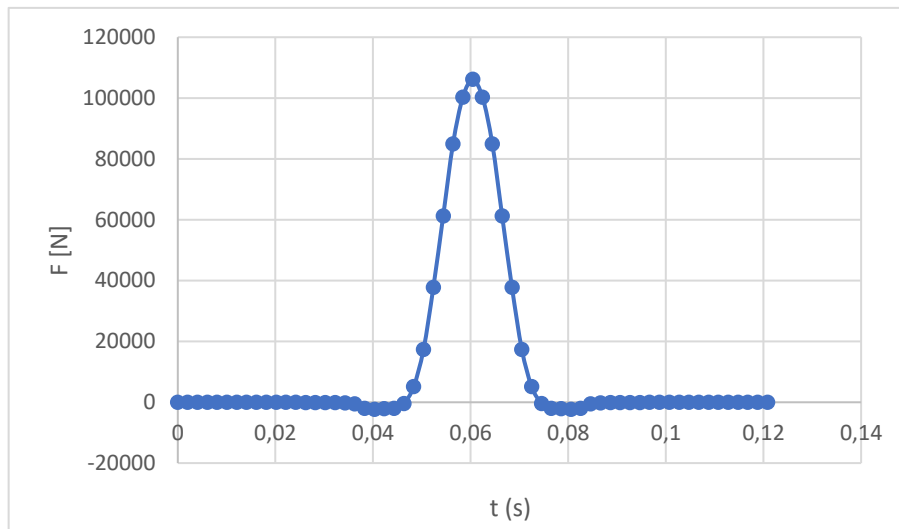
poloha [mm]	čas [s]	sila [N]
0,00	0	0,00
67,13	0,002014	-6571,91
134,25	0,004028	-4290,19
201,38	0,006041	-500,60
268,50	0,008055	7208,28
335,63	0,010069	22830,75
402,75	0,012083	44084,19
469,88	0,014096	67050,53
537,00	0,01611	87456,57
604,13	0,018124	99692,92
671,25	0,020138	105431,12
738,38	0,022151	99692,92
805,50	0,024165	87456,57
872,63	0,026179	67050,53
939,75	0,028193	44084,19
1006,88	0,030206	22830,75
1074,00	0,03222	7208,28
1141,13	0,034234	-500,60
1208,25	0,036248	-4290,19
1275,38	0,038261	-6571,91
1342,50	0,040275	0,00

Tabuľka č. 2 - Výsledky simulácie pre model s 3 podvalmi



Obrázok č. 21 – Priebeh reakčnej sily v čase (3 podvaly)

Pri ďalšej simulácii bola použitá dlhšia koľajnica (4027,5 mm), ktorá tentoraz ležala na 9 podvaloch. Vzďialenosť osí podvalov zostala identická, a teda 447,5mm. Bola použitá rovnaká sila pôsobiaca na rovnakú plochu ako v predchádzajúcej simulácii. Jej posun bol taktiež rovnomerný po celej dĺžke koľajnice. Všetky okrajové podmienky, teda zostali identické ako v predchádzajúcej simulácii. Opäť bola pozorovanou veličinou reakčná sila v prostrednej podpore a rovnako ako v predchádzajúcom prípade došlo k prepočítaniu závislosti výslednej sily na čas (rovnica č. 30) a výsledky tejto simulácie boli vykreslené do grafu (obr. č. 22).



Obrázok č. 22 – Priebeh reakčnej sily v čase (9 podvalov)

Maximálna reakčná sila v podpore nastala v oboch prípadoch vtedy, keď sila od vlaku pôsobila priamo nad sledovanou podporou. Z grafu aj výsledkov simulácie pre väčšiu dĺžku koľajnice jasne vyplýva, že v oblasti, ktorá je vo väčšej vzdialenosti od prostrednej podpory, sa blíži reakčná sila v tejto podpore k nule. Obe simulácie popísali rovnaký priebeh sily a z toho sa dá vyvodit' záver, že nemá zmysel dĺžku koľajnice pri simulácii ďalej zväčšovať, pretože tým sa zvyšuje aj výpočtový čas. Variant s tromi podvalmi a dĺžkou koľajnice 1342,5 mm bude pre potreby tejto práce stačiť.

Z výsledkov oboch simulácií je takisto zjavne viditeľné, že sila od vlaku sa chová symetricky. V rovnakých vzdialenostiach od stredu koľajnice je v oboch smeroch reakčná sila rovnako veľká a má rovnaký priebeh. To znamená, že výpočtový čas simulácie sa môže skrátiť a simulovať je možné len posuvy síl pôsobiacich na polovicu dĺžky koľajnice.

8.1. Aplikácia popisu sily od prechádzajúceho vlaku

Na obrázku č. 21 je vykreslená časová závislosť reakčnej sily v podpore na koľajnici pri prejazde vlaku po koľajnici. Krivka bola v grafe preložená polynómom šiesteho stupňa, ktorého tvar je:

$$y = -4 \cdot 10^{15} \cdot x^6 + 5 \cdot 10^{14} \cdot x^5 - 2 \cdot 10^{13} \cdot x^4 + 3 \cdot 10^{11} \cdot x^3 - 2 \cdot 10^9 \cdot x^2 + 10^6 \cdot x - 1314,4 \quad (31)$$

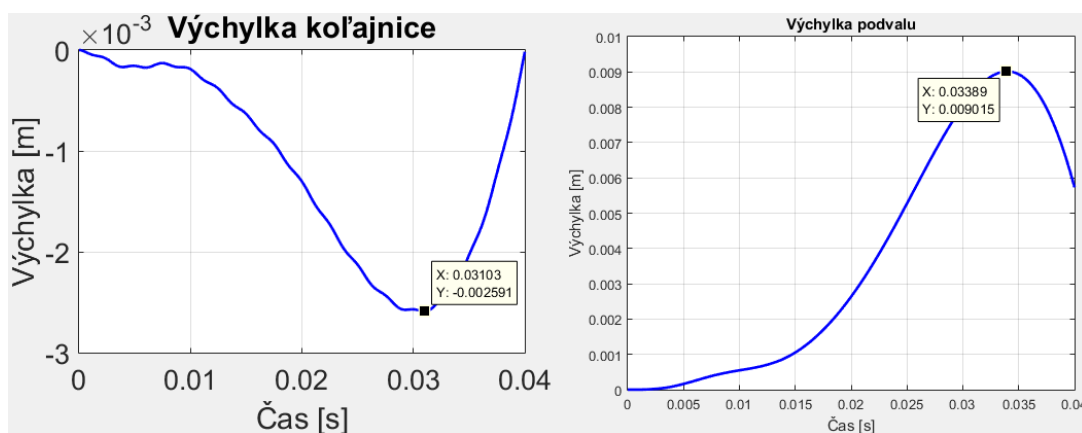
Pri predpoklade dokonalej aplikácie zákona o akcii a reakcii, je tento priebeh reakčnej sily v podpore aj skutočným priebehom sily, ktorou vlak pôsobí na koľajnicu. Tento polynóm (rovnica č. 31) teda zjednodušuje a popisuje dynamický priebeh sily v čase od prechádzajúceho vlaku. Polynóm môže byť teda použitý ako náhrada konštantnej sily pri riešení kmitania prvku železničnej trate. Keďže bol získaný pri simulácii v programe ANSYS pomocou skutočnej geometrie koľajnice, predpokladá sa, že už v tejto simulácii bola vlastná tuhosť koľajnice zahrnutá. Preto je na mieste tento polynóm použiť pre riešenie sústavy diferenciálnych rovníc z kapitoly 7, kde sa v modely prvku železničnej trate už vlastná tuhosť koľajnice neuvažovala.

Do riešenia diferenciálnych rovníc z kapitoly 7, ktorých čísla sú 26 až 29, bol dosadený polynóm (rovnica č. 31) ako sila F , pričom premenná x je čas t .

Tak ako v kapitole 6, na riešenie tejto sústavy rovníc bola použitá funkcia ODE45 v programe Matlab. Vstupné parametre veličín použité pri riešení sú v tabuľke číslo 3. Pomerný útlm bol znovu nastavený na 20%. Všetky použité skripty sú súčasťou prílohy tejto práce (príloha B).

Prvok	Hodnota	Jednotky
Hmotnosť koľajnice (M_k)	54,77	kg/m
Hmotnosť podvalu (M_p)	200	Kg
Tuhosť podložky (k_p)	$0,6 \cdot 10^8$	N/m
Tuhosť násypu (k_n)	$7,84 \cdot 10^7$	N/m

Tabuľka č. 3 – Vstupné parametre

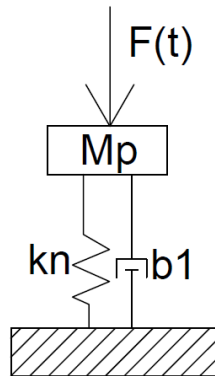


Obrázok č. 23 – Výsledky kmitania s 2 stupňami voľnosti – sila funkcia času

Výsledným riešením modelu z obrázku číslo 17 pri použití sily ako funkcie času sú priebehy výchyliek koľajnice a podvalu v čase (obr. č. 23). Koľajnica dosiahne maximálnu výchylku 2,6 mm a podval 9 mm. Vysokú hodnotu výchylky podvalu mohla spôsobiť nízka tuhosť železničného násypu vo vstupných parametroch. Násyp môže mať rôznu štruktúru, ktorá priamo ovplyvňuje chovanie železničných prvkov. Ak sa tuhosť k_n zmení zo $7,84 \cdot 10^7 \text{ N/m}$ na vyššiu hodnotu napr. $1,2 \cdot 10^8 \text{ N/m}$ [2], znamenalo by to, že násyp pod koľajnicou je tuhší a výchylka podvalu v tomto prípade klesne na 5,8 mm a výchylka koľajnice stúpne na 5,6 mm. Je zrejmé, že vstupné hodnoty majú vo výpočtoch veľmi dôležitú úlohu.

9. Model kmitania podvalu

Ďalším modelom kmitania, ktorý bude v tejto práci popísaný je model kmitania podvalu. V tomto prípade bolo nutné uvažovať, že sila od vlaku pôsobí už priamo na podval. Preto hmotný bod M_k , tuhosť k_k , tuhosť k_p a tlmenie b_2 , ktoré boli súčasťou predchádzajúcich modelov, už nebudú súčasťou tohto modelu. Nový model prvku železničnej trate v tomto prípade vyzerá nasledovne:



Obrázok č. 24 – Model kmitania podvalu (M_p – hmotnosť podvalu, k_n – tuhosť žel. násypu, b_1 – tlmenie žel. násypu, F – sila od vlaku)

Jedná sa o sústavu s jedným stupňom voľnosti, a to vedie už len na jednu rovnicu silovej rovnováhy:

$$M_p \ddot{y}_2 + b_1 \dot{y}_2 + k_n y_2 = F(t) \quad (32)$$

Riešenie tejto diferenciálnej rovnice 2. rádu pomocou substitúcie:

Substitúcia:

$$z_1 = y_2 \quad (33)$$

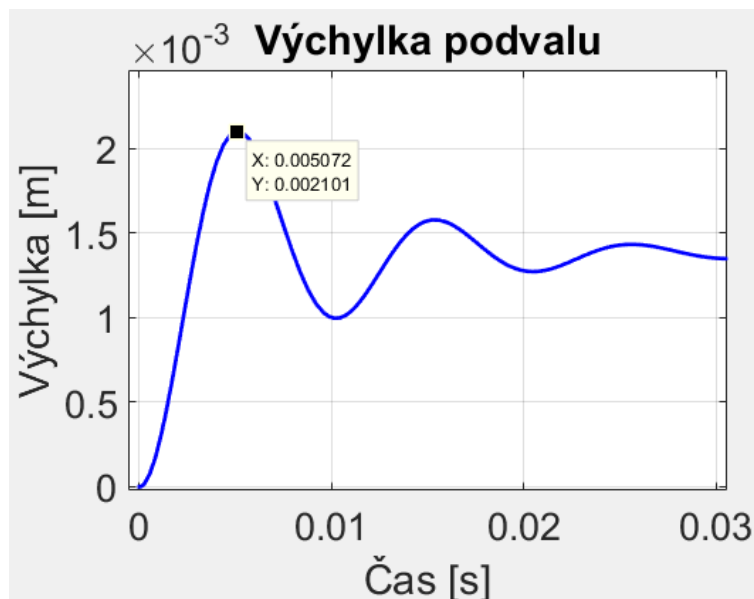
$$z_2 = \dot{y}_2 \quad (34)$$

Dosadenie:

$$M_p z_2 + b_1 z_2 + k_n z_1 = F(t) \quad (35)$$

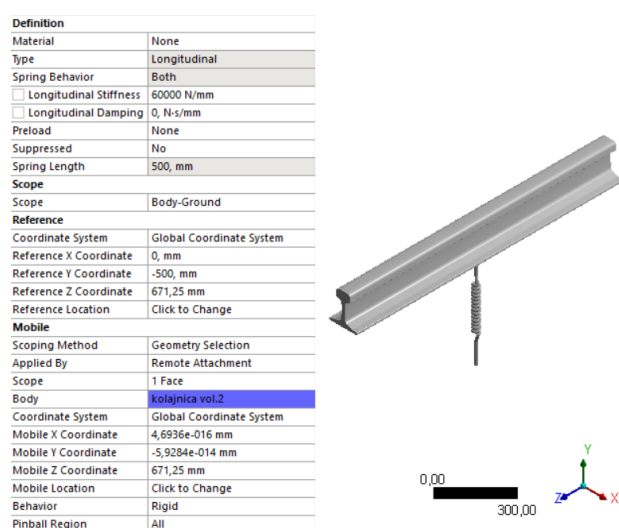
Vzniknutá diferenciálna rovnica je opäť riešená pomocou funkcie ODE45 v programe Matlab (prílohy C,D). Ponúkajú sa dva spôsoby riešenia pôsobenia sily na podval.

Pre prvý spôsob riešenia bola použitá konštantná sila. Sila F , ktorá pôsobí na podval bola prebratá z riešenia v kapitole 6 z rovnice číslo 17, pričom sa uvažovalo, že sila na podval bude rovnako veľká ako sila na koľajnici. Pri riešení rovnice číslo 35 boli všetky použité vstupné veličiny prebraté z tabuľky číslo 1. Výsledná výchylka podvalu je na obrázku číslo 25 a má hodnotu 2 mm.



Obrázok č. 25 – Výsledok kmitania pre model s podvalom

Druhou alternatívou pre riešenie modelu na obrázku číslo 24 je pridanie simulácie priebehu sily, ktorá bude pôsobiť na podval. Bola použitá simulácia v programe ANSYS (Príloha 3), do ktorej sa importovala geometria koľajnice vytvorená v kapitole 5. Rovnako ako v 8. kapitole pri simulácii ležala koľajnica na troch podporách a bola zaťažená silou na malú plochu na povrchu koľajnice. Táto plocha menila svoje pôsobisko, čím simulovala prejazd vlaku. Všetky vzdialenosti a okrajové podmienky simulácie sú zhodné s tými v kapitole 8 (obr. č. 19). Rozdiel nastal až v prípade prostrednej kruhovej plochy na spodnom povrchu koľajnice, v ktorej nebol zamedzený vertikálny posuv, ale na túto plochu sa pripevnila pružina (obr. č. 26), ktorá bola spojená pevne väzbou k zemi. Tuhosť pružiny bola nastavená na tuhosť spojenia koľajnice a podvalu, ktorú sama reprezentuje (k_p z tab. č. 1). Všetky parametre, ktoré boli ďalej na pružine nastavené, sú uvedené na nasledujúcom obrázku:



Obrázok č. 26 – Model s pružinou - ANSYS

Pružina pod koľajnicou predstavuje pružné spojenie medzi koľajnicou a podvalom. Takže reakčná sila, ktorá bude pôsobiť v pružine, bude rovnako veľká ako sila, ktorou by pružina pôsobila na podval, ktorý už v simulácii zahrnutý nie je. Týmto spôsobom je možné, vďaka simulácii bližšie definovať priebeh sily na podvale.

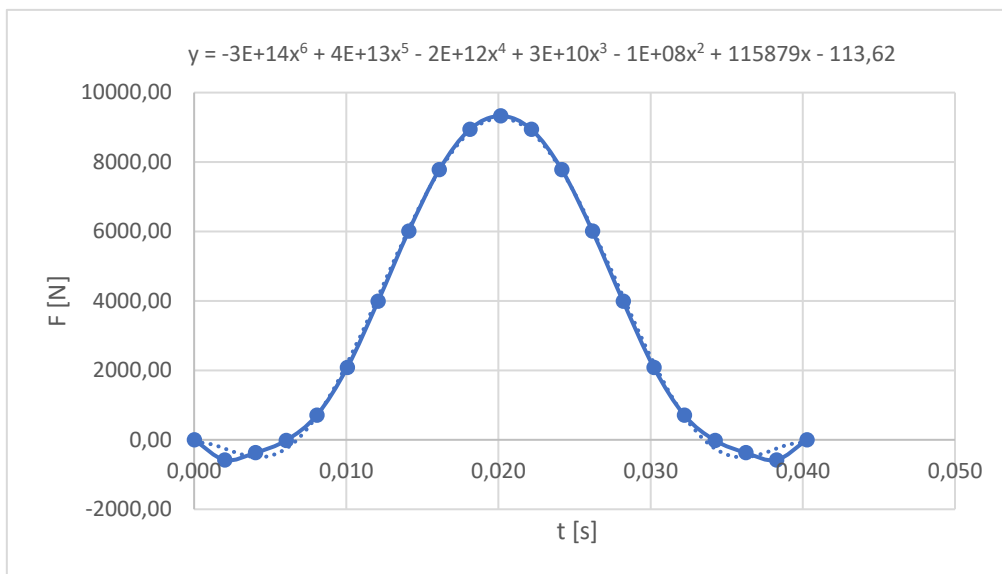
Sila v pružine sa menila so zmenou pôsobiska sily na koľajnici. Výsledky simulácie sú v tabuľke č. 4. Závislosť sily na polohe bola prepočítaná na závislosť sily na čase (rovnica č. 30) pri predpokladanej rýchlosti vlaku 120km/h.

poloha [mm]	čas [s]	sila [N]
0,00	0,00000	0,00
67,13	0,00201	-579,61
134,25	0,00403	-371,52
201,38	0,00604	-18,19
268,50	0,00806	705,35
335,63	0,01007	2085,60
402,75	0,01208	3986,96
469,88	0,01410	6007,41
537,00	0,01611	7778,27
604,13	0,01812	8944,04
671,25	0,02014	9323,80
738,38	0,02215	8944,04
805,50	0,02417	7778,27
872,63	0,02618	6007,41
939,75	0,02819	3986,96
1006,88	0,03021	2085,60
1074,00	0,03222	705,35
1141,13	0,03423	-18,19
1208,25	0,03625	-371,52
1275,38	0,03826	-579,61
1342,50	0,04028	0,00

Tabuľka č. 4 - Výsledky simulácie

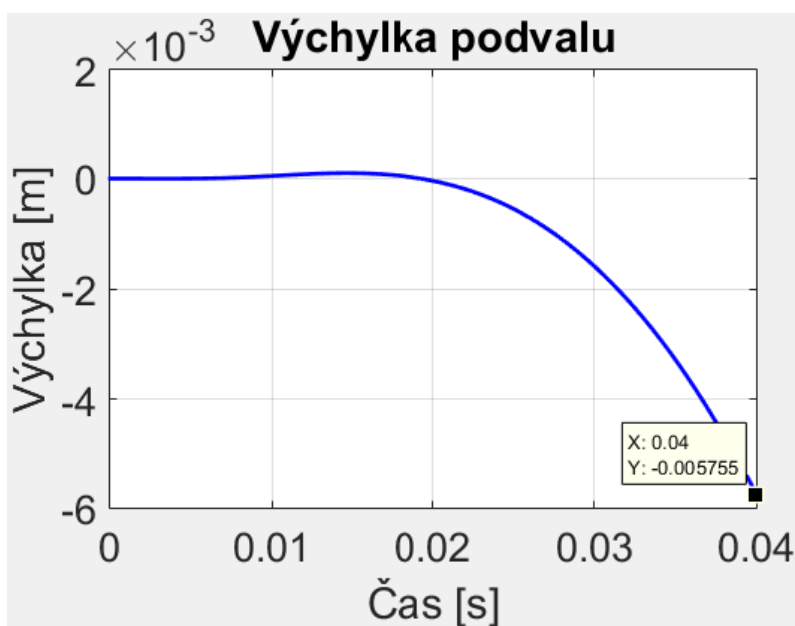
Táto závislosť sily na čase sa vykreslila do grafu v programe Excel (obr. č. 27). Rovnako ako v kapitole 8, aj v tomto prípade bola krivka v grafe preložená polynómom 6. stupňa, ktorého tvar je:

$$y = -3 \cdot 10^{14} \cdot x^6 + 4 \cdot 10^{13} \cdot x^5 - 2 \cdot 10^{12} \cdot x^4 + 3 \cdot 10^{10} \cdot x^3 - 1 \cdot 10^8 \cdot x^2 + 115879 \cdot x - 113,62 \quad (36)$$



Obrázok č. 27 – Priebeh sily v pružine v závislosti na čase

Polynóm z rovnice číslo 36 slúžil ako náhrada konštantnej sily pri riešení modelu prvku železničnej trate v rovnici číslo 35. Riešenie modelu prebehlo v programe Matlab (príloha D). Ostatné veličiny vstupujúce do výpočtu zostali nezmenené (tab. č. 1).



Obrázok č. 28 - Výsledok kmitania podvalu pre silu ako funkciu času

Výsledná maximálna výchylka podvalu je na obrázku číslo 28 a má hodnotu 5,755 mm. Vo výsledných výchylkách podvalov je viditeľný rozdiel vo výslednej výchylke modelu pri použití sily konštantnej a pri použití sily, ktorá je premenná v čase. Keď je sila bližšie definovaná, výsledná výchylka je reálnejšia.

10. Model budenia od prechádzajúceho vlaku

Charakteristiky sily v závislosti na čase od prechádzajúceho vlaku (obrázky č. 21 a 22), ktoré boli podrobne popísané a získané v kapitole číslo 8, je možné zovšeobecniť. Pri simulácii v programe ANSYS môže byť jednoznačne predpokladaná lineárnosť výsledkov pri akejkol'vek veľkosti sily, ktorá bude na koľajnicu pôsobiť. Teda, pokiaľ bude vlak akokoľ'vek ťažký, priebeh sily bude vyzerat' rovnako. Jediná zmena nastane v jej veľkosti.

Ako príklad budú použité výsledky zo simulácie z kapitoly 8. V tabuľke číslo 2 je jedným z výsledkov reakčná sila o veľkosti $-6153,81$ N. Takáto reakčná sila nastane v prípade, keď je sila od vlaku o veľkosti $F = 107910$ N vo vzdialenosti $67,125$ mm od jedného konca koľajnice. Na tento výsledok budú použité dve základné zovšeobecnenia, vďaka ktorým bude vysvetlené, ako sa vytvorí všeobecný model správania železničnej trate.

Prvé zovšeobecnenie je pre veľkosť sily od vlaku. Sila 107910 N, ktorá charakterizuje len vlastnú tiaž vlaku, bola vyjadrená z myšlienky, že hmotnosť vlaku sa rozloží rovnomerne na jeho 8 kolies (kap.6.2). Teda vlak hmotnosti 88 ton, bude na element koľajnice pôsobiť silou:

$$F = \frac{88000}{8} \cdot 9,81 = 107910 \text{ N} \quad (37)$$

Ekvivalentne sa bude počítat' sila pri akejkol'vek inej hmotnosti lokomotívy alebo vozňa.

Druhé zjednodušenie bude použité pre reakčnú silu v podpore koľajnice. Pokiaľ 88 tonový vlak (vagón) vo vzdialenosti $67,125$ mm vytvorí reakčnú silu na koľajnici o veľkosti $-6153,81$ N, potom sa dá vďaka lineárnemu predpokladu dopočítat' reakčná sila od vagóna o akejkol'vek inej hmotnosti. Všeobecne sa táto závislosť môže zapísať takto:

$$\begin{array}{l} 88000 \text{ kg} \dots \dots \dots - 6571,91 \text{ N} \\ m_2 \text{ kg} \dots \dots \dots x \text{ N} \end{array}$$

Riešenie tejto priamej úmernosti:

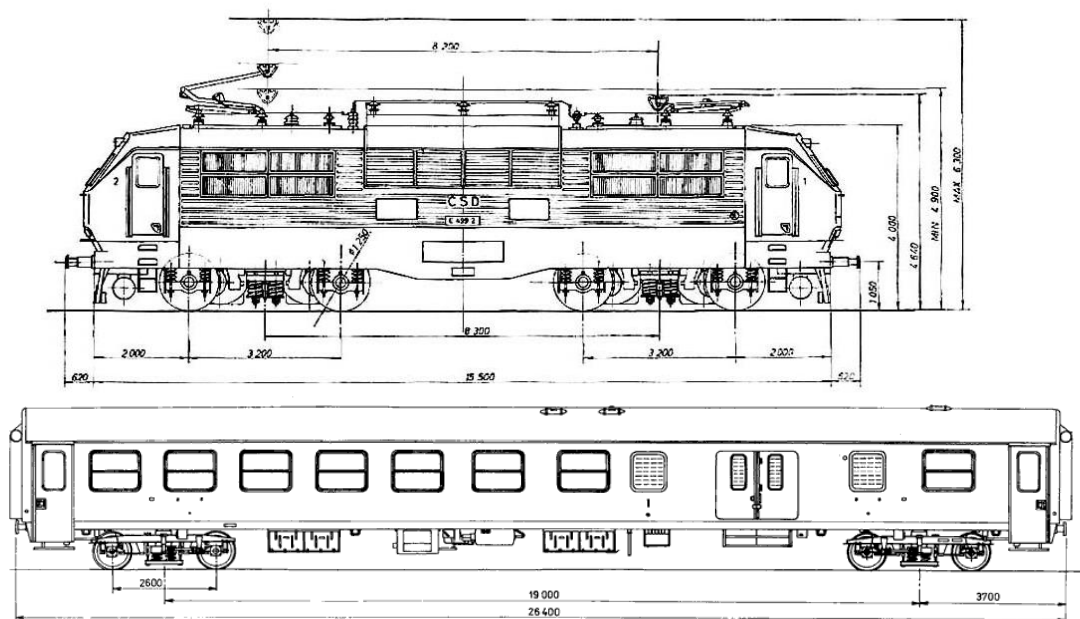
$$x = \frac{-6571,91 \cdot m_2}{88000} \text{ N} \quad (38)$$

Vďaka tomuto zovšeobecneniu je možné spočítat' veľkosť reakčnej sily od vlaku s ľubovoľnou hmotnosťou m_2 . Prepočítat' sa takto dajú sily v tých bodoch koľajnice, v ktorých prebehla simulácia v programe ANSYS (kap. 8) a tým sa dajú popísať priebehy ľubovoľne veľkých síl. Týmto spôsobom sa ušetrí výpočtový čas, keďže ďalšie simulácie už nie sú potrebné.

10.1. Prejazd vlakovej súpravy

Doposiaľ bola v tejto práci popísaná vždy len sila od jedného kolesa vozňa. Keďže sa vychádzalo z predpokladu, že hmotnosť vozňa sa rozloží rovnomerne na všetky kolesá, je možné predpokladať, že sily od každého kolesa toho istého vozňa budú rovnaké. Táto analýza umožňuje vytvorit' všeobecný model sily pôsobiacej na železničnú trať pri prejazde akejkol'vek vlakovej súpravy.

Ako príklad, ktorým bude demonštrovaný tento prepočet, bude vlak idúci rýchlosťou 120 km/h. Vlaková súprava bude pozostávať z lokomotívy rady 150 E 449.2 [15] a dvoch vožňov typu BDmee [16] (obr. č. 29). Parametre potrebné na vytvorenie modelu prejazdu vlaku sú vzdialenosti osí jednotlivých kolies a váha lokomotívy a vožňov (tabuľka č.5). Vzdialenosť osí kolies je potrebná pre výpočet času, ktorý ubehne od prechodu jedného kolesa určitým miestom koľaje a prechodu ďalších kolies tým istým miestom. Týmto spôsobom sa získajú sily od jednotlivých kolies pôsobiace každá v inom čase. Napríklad, ak ide vlak rýchlosťou 120 km/h a vzdialenosť prvých dvoch kolies vlaku bude 2,5 metra, ubehne od prechodu prvého kolesa k druhému 0,075 sekundy (rovnica č. 30).



Obrázok č. 29 - Lokomotíva rady 150 (hore) a vozeň typu BDmee (dolu)

Prvok	Hmotnosť [kg]	x0 [mm]	x1 [mm]	x2 [mm]	x3 [mm]	x4 [mm]
Lokomotíva rady 150 E 449.2	82400	0	3200	5100	3200	520
1.Vozeň Bdmee	37000	2400	2600	16400	2500	2400
2.Vozeň Bdmee	37000	2400	2600	16400	2500	2400

Tabuľka č. 5 - Parametre potrebné na zostrojenie modelu (x0 – vzdialenosť spojenia vagónov po os 1. kolesa, x1 – osová vzdialenosť 1. nápravy, x2 – vzdialenosť osí 2. a 3. kolesa, x3 – osová vzdialenosť 2. nápravy, x4 – vzdialenosť osi posledné kolesa po spojenie vagónov

Lokomotíva aj vozeň uvažovanej vlakovej súpravy majú 4 kolesá na každej strane. To znamená, že ak od každého kolesa bude pôsobiť jedna sila na prvok koľajnice, dokopy bude tých síl dvanásť. Každá bude pôsobiť na ten istý prvok koľajnice s časovým

oneskorením závislým na vzdialenosti kolies a rýchlosti vlaku. Veľkosť sily od všetkých kolies lokomotívy bude rovnaká, ale bude pôsobiť v iný moment. Rovnako aj veľkosti síl od vozňov, avšak tie budú v porovnaní so silami od lokomotívy menšie v dôsledku nižšej hmotnosti vozňa (rovnica č. 37).

Využitím vyššie spomenutých zovšeobecnení nebolo nutné znovu simulovať priebehy síl od lokomotívy a vozňa, ale výsledné sily od jednotlivých kolies boli dopočítané cez hmotnosti lokomotívy a vozňa tak, ako to bolo predvedené v rovnici číslo 38. Zo všetkých výsledkov z tabuľky číslo 3 sa pre každý bod na koľajnici prepočíta nová reakčná sila pre lokomotívu a vagón, ktorých hmotnosti sú v tabuľke číslo 5.

Výsledky sú v nasledujúcej tabuľke:

poloha [mm]	čas [s]	sila [N] - Lokomotíva	sila [N] - Vozeň
0	0	0,00	0,00
67,125	0,002014	-6153,81	-2613,87
134,25	0,004028	-4017,18	-1706,33
201,375	0,006041	-469,10	-199,25
268,5	0,008055	6749,57	2866,93
335,625	0,010069	21376,56	9079,85
402,75	0,012083	41278,83	17533,49
469,875	0,014096	62782,13	26667,16
537	0,01611	81891,15	34783,86
604,125	0,018124	93348,10	39650,28
671,25	0,020138	98721,87	41932,83
738,375	0,022151	93348,10	39650,28
805,5	0,024165	81891,15	34783,86
872,625	0,026179	62782,13	26667,16
939,75	0,028193	41278,83	17533,49
1006,875	0,030206	21376,56	9079,85
1074	0,03222	6749,57	2866,93
1141,125	0,034234	-469,10	-199,25
1208,25	0,036248	-4017,18	-1706,33
1275,375	0,038261	-6153,81	-2613,87
1342,5	0,040275	0,00	0,00

Tabuľka č. 6 - Výsledky prepočtov pôsobiacich síl vlakovej súpravy

V tabuľke číslo 6 sú vypočítané sily od jedného kolesa lokomotívy a vozňa. Na výsledkoch je jasne viditeľné, že priebehy síl sú rovnaké a jediný rozdiel je v ich veľkosti, tak ako to bolo predpokladané. Keďže od uvažovanej vlakovej súpravy bude na koľajnicu pôsobiť takýchto síl viac, je nutné ich časovo sčítať. Ak je vzdialenosť medzi prvým a druhým kolesom lokomotívy 3200 mm, potom pri rýchlosti 120 km/h prejde 96 milisekúnd (rovnica č. 30), kým príde na to isté miesto koľajnice druhé koleso. Sila od tohto kolesa bude pôsobiť rovnako dlhú dobu ako sila od prvého kolesa. Potom bude dopočítaný čas, ktorý ubehne kým začne na ten istý prvok pôsobiť tretie koleso lokomotívy. Takýmto spôsobom sa použijú vzdialenosti všetkých kolies vlakovej súpravy (tab. č. 5) a budú dopočítané časové rozmedzia ich pôsobenia. Bude vytvorený časový vektor. Pomocou tohto časového vektoru sa sily od jednotlivých kolies sčítajú v

čase do výsledného stĺpcového vektoru sily, ktorá na koľajnicu pôsobí pri prejazde tejto vlakovkej súpravy. Každý riadok tohto vektoru predstavuje silu od niektorého kolesa vlaku pôsobiacu na ten istý prvok koľajnice. Práve tento priebeh sily v čase je vykreslený v grafe na obrázku číslo 30. Tento graf popisuje silové pôsobenie na prvok koľajnice pri prejazde celej vlakovkej súpravy.



Obrázok č. 30 - Výsledný priebeh sily budenia vlakovkej súpravy

Z grafu na obrázku číslo 30 je viditeľné, že prvé štyri sily, ktoré sú od ťažšej lokomotívy, majú vyššiu amplitúdu ako zvyšných osem síl. Tie sú rovnako veľké, keďže oba vozne za lokomotívou vážia rovnako. Ďalej je možné z grafu vyčítať, že vzdialenosť medzi kolesami v nápravách je výrazne kratšia ako vzdialenosť medzi nápravami samotnými. To znamená, že jeden prvok koľajnice je najprv vystavený vysokým silám od kolies lokomotívy. Potom na ten istý prvok pôsobia menšie sily od kolies vagónov vo väčšom časovom horizonte. Prejazd takejto vlakovkej súpravy idúcej rýchlosťou 120 km/h bude cez jeden bod koľajnice trvať menej ako 2 sekundy.

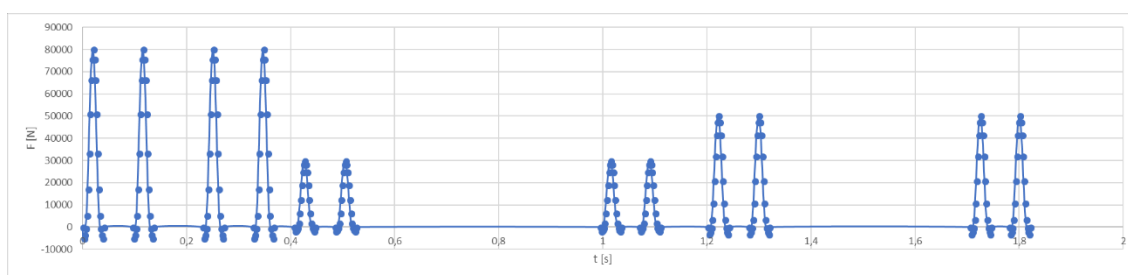
10.2. Všeobecný priebeh síl od prechádzajúceho vlaku

V predchádzajúcej kapitole bolo predvedené, ako sa dá vytvoriť model sily od prechádzajúcej vlakovkej súpravy. V programe Excel bola ako výsledok tohto zovšeobecnenia vytvorená tabuľka číslo 7, do ktorej môže užívateľ zadať akúkoľvek hmotnosť lokomotívy a dvoch vozňov, ako aj rôznu vzdialenosť ich jednotlivých kolies. Takisto boli vytvorené aj vektory jednotlivých síl od kolies. Spolu 12 vektorov. Po zadaní vstupných parametrov sa vektory síl od kolies vlakovkej súpravy automaticky aktualizujú. V riadkoch týchto vektorov už nie sú hodnoty pevne dané, ale tvoria ich rovnice podobné rovniciam číslo 37 a 38, vďaka ktorým dôjde k automatickej aktualizácii. Všetky vektory síl sa časovo sčítajú do výsledného vektoru sily, vďaka časovému vektoru, ktorý sa vytvorí zo zadaných vzdialeností jednotlivých kolies. Výsledný graf priebehu celkových síl od kolies vlakovkej súpravy v závislosti na čase sa taktiež prispôbí novým vstupným údajom.

V tabuľke číslo 7 sú náhodne zvolené parametre vlakovkej súpravy. Na základe týchto vstupných údajov sa automaticky upravil graf priebehu síl v čase (obr. č. 31). Kompletný súbor tohto riešenia je súčasťou prílohy k tejto práci (príloha E).

rýchlosť [km/hod]	hmotnosť [kg]	x0 [mm]	x1 [mm]	x2 [mm]	x3 [mm]	x4 [mm]
120	Lokomotíva:					
	67000	0	3200	4500	3200	250
	1. Vozeň					
	25000	2400	2600	17000	2500	2000
	2.Vozeň					
	42000	2400	2600	14200	2500	2400

Tabuľka č. 7 - Tabuľka náhodných vstupných parametrov (hodnoty x0 až x4 predstavujú rovnaké veličiny ako v tabuľke č. 5)



Obrázok č. 31 - Automaticky aktualizovaný priebeh sily v čase od vlakovej súpravy

Ak užívateľ zadá vysokú hodnotu hmotnosti lokomotívy, tak sa prvé štyri sily úmerne zvýšia. Keď zadá veľkú vzdialenosť medzi kolesami, tak sa v grafe úmerne vzdialia pôsobenia konkrétnych síl. Vďaka tomu je možné popísať priebeh sily od akejkoľvek vlakovej súpravy.

Záver

Cieľom mojej bakalárskej práce bola analýza a vytvorenie modelov železničnej trate a následné skonštruovanie elementu koľajnice, pomocou ktorého som popísal priebeh sily od prechádzajúceho vlaku.

Na začiatku práce bolo uskutočnené podrobné štúdium existujúcich dynamických modelov železničnej trate. Vďaka znalosti geometrických špecifikácií, mohol byť skonštruovaný model železničnej koľajnice. Tento model vznikol v študentskej verzii programu Autodesk Inventor 2018 a bol importovaný do programu ANSYS. V tom prebehla simulácia, v ktorej bola koľajnica zaťažená silou. Pomocou výsledného priehybu koľajnice a veľkosti sily, ktorá na model pôsobila, bola dopočítaná vlastná tuhosť koľajnice, ktorej hodnota je $1,4 \frac{GN}{m}$.

Po detailnom naštudovaní viacerých existujúcich modelov, bolo možné vytvoriť vlastné zjednodušené modely kmitania traťového systému.

V prvom prípade figurovali dva hmotné body – koľajnica a podval. Spojenie medzi nimi bolo považované za pružné, a preto ho predstavovala pružina. Podval bol ďalšou pružinou a tlmičom pripevnený k zemi. Rovnako aj koľajnica bola k zemi samostatne pripojená pružinou s vlastnou tuhosťou a tlmičom. Sila, ktorou vlak na koľajnicu a celý tento kmitajúci systém s dvomi stupňami voľnosti pôsobil, bola považovaná za konštantnú. Pre tento konkrétny model kmitania prvku železničnej trate boli dopočítané výchylky. Výchylka koľajnice vyšla 0,11 mm a výchylka podvalu 0,269 mm.

Ako druhý bol vytvorený model, ktorý neobsahoval vlastnú tuhosť koľajnice. Tá bola obsiahnutá v simulácii, ktorou sa určil charakter sily od vlaku. Simulácia prebehla v študentskej verzii programu ANSYS. Na koľajnici boli zamedzené vertikálne posuvy v miestach, na ktorých leží na podvaloch. V oboch priečných prierezoch koncov koľajnice bol povolený len vertikálny posuv. Sila od vlaku pôsobila na malú plochu na povrchu koľajnice. Táto plocha menila svoje miesto pôsobenia po celej dĺžke koľajnice, a tým menila reakčnú silu v podpore na spodnej strane koľajnice. Priebeh tejto reakčnej sily v čase bol použitý ako sila pôsobiaca na koľajnicu pri riešení výchyliek druhého modelu. To prinieslo hodnoty výchylky koľajnice 2,6 mm a podvalu 9 mm.

Posledný model, ktorý bol vytvorený, popisoval samostatné kmitanie podvalu, ktorý bol k zemi pripevnený pružinou a tlmičom. Pri prvom výpočte bola sila pôsobiaca na podval považovaná za konštantnú, a to znamenalo hodnotu výchylky podvalu 2 mm. Pri druhom výpočte prebehla simulácia v programe ANSYS, kde sa na model koľajnice pripevnila pružina, ktorá nahradzovala pružné spojenie medzi koľajnicou a podvalom. Pôsobisko sily od vlaku pôsobiacej na koľajnicu sa menilo, a tým sa menila aj sila v pružine. Sila, ktorá pôsobila v pružine vyjadrovala silu, ktorou by pružina pôsobila na podval. Výsledkom bola sila premenná v čase. Tá nahradila vo výpočte výchylky podvalu silu konštantnú. Tento spôsob riešenia viedol k hodnote výchylky podvalu 5,76 mm.

V závere práce bola vytvorená tabuľka, do ktorej môže užívateľ zadávať hmotnosti jednotlivých vagónov vlakovej súpravy a vzdialenosti ich kolies. Tieto hodnoty slúžia na vytvorenie grafu priebehu síl od kolies pôsobiacich v čase na element železničnej koľajnice.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Cleante, V G, M J Brennan, G Gatti a D J Thompson. Energy harvesting from the vibrations of a passing train: effect of speed variability. DOI: 10.1088/1742-6596/744/1/012080. ISBN 10.1088/1742-6596/744/1/012080.
- [2] ZHAI, W. a Z. CAI. DYNAMIC INTERACTION BETWEEN A LUMPED MASS VEHICLE AND A DISCRETELY SUPPORTED CONTINUOUS RAIL TRACK. Computers & Structures. 1997, 1997(63), 987-997.
- [3] SUN, Y. Q. a M. DHANASEKAR. A dynamic model for the vertical interaction of the rail track and wagon system. International Journal of Solids and Structures. 2002, 2002(39), 1337-1359.
- [4] GATTI, G., M.J. BRENNAN, M.G. TEHRANI a D.J. THOMPSON. Harvesting energy from the vibration of a passing train using a single-degree-of-freedom oscillator. Mechanical Systems and Signal Processing. 2016, 2016(66-67), 785-792. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2015.06.026>.
- [5] Tunna, J. M., (1988), „Wheel-rail forces due to wheel irregularities,“ Proc. of 9th Int. Wheelset Congress, Montreal, Canada.
- [6] Parasad, B., and Garg, V. K., (1979), „Dynamic models of a railroad track,“ Applied Mathematics and modelling, Vol. 3, pp 359-366.
- [7] Sadeghi, Javad, Investigation of characteristics and modelling of railway track system, Doctor of Philosophy thesis, Department of Civil and Mining Engineering, University of Wollongong, 1997.
- [8] Lidwig, K., (1938), „Deformation of a Rail Elastically Supported and of Infinite length by load moving at constant horizontal velocity,“ Proc. 5th Int. Cong. Appl. Mech., pp 650-655.
- [9] Sato, Y., (1981), „Recent Developments in railway track mechanics in JNR,“ Japan Railway Engineering, Vol. 20 (4), pp 1-5.
- [10] Thompson, J. D. and Vicent N., (1995), „Track dynamic behaviour at high frequencies: Theoretical models and laboratory measurements,“ Interaction of Railway Vehicles with the Track and its Substructure, Swets and Zeitlinger Publisher, Prague.
- [11] GAO, M. Y., P. WANG, Y. CAO, R. CHEN a C. LIU. A rail-borne piezoelectric transducer for energy harvesting of railway vibration. Journal of Vibroengineering. 2016, 18(7), 4647-4663. DOI: 10.21595/jve.2016.16938. ISSN 1392-8716.
- [12] P-17-O 420-2011. Predpis: Železničný zvršok. 02155/2011/O420-39. Bratislava: Odbor 420 GR ŤSR, 2011.

- [13] ROZHODNUTÍ KOMISE: Technická specifikace pro interoperabilitu subsystému "Infrastruktura" transevropského vysokorychlostního železničního systému podle čl. 6 odst. 1 směrnice Rady 96/48/ES. In: . ročník 2002, 2002/732/ES.
- [14] Mair, R. I., (1974), Aspects of railroad track dynamics, Part I, Vertical respond, BHP Melb. Res. Lab. Rep. MRL 81/3.
- [15] Lokomotíva rady 150. In: Atlas lokomotiv [online]. Praha: David Švestka, 2005 [cit. 2018-05-20]. Dostupné z: <http://www.atlaslokomotiv.net/katalog/150/vykres.jpg>
- [16] Vůz BDmee. In: Parostroj [online]. Praha: Jub, 2004 [cit. 2018-05-20]. Dostupné z: https://www.parostroj.net/katalog/ov/images/vykresy/BDmee_1987.gif
- [17] BREPTA, Rudolf, Ladislav PŮST a František TUREK. *Mechanické kmitání*. Praha: Sobotáles, 1994, 589 s. : il. ISBN 80-901684-8-5.

Zoznam obrázkov

Obrázok č. 1 – Zloženie železničnej trate	13
Obrázok č. 2 – Timoshenkov model.....	14
Obrázok č. 3 – Model od BRR a CUR [7]	15
Obrázok č. 4 – Model od J.M. Tunna s 12 podvalmi [5]	15
Obrázok č. 5 – Modely Thompsona a Vicenta [10]	16
Obrázok č. 6 – Satov model s 3 vrstvami hmoty [9].....	16
Obrázok č. 7 – model s 10 stupňami voľnosti [2]	17
Obrázok č. 8 - Jednoduchý dynamický model trate podľa Cleanteho [1].....	19
Obrázok č. 9 – Vertikálne zrýchlenia pri rôznych rýchlostiach vlaku [1] (a, b – 162 km/h, c, d – 180 km/h, e, f – 195 km/h, g, h - 200 km/h).....	19
Obrázok č. 10 – Výchyľky v čase pre Cleanteho riešenie, červená je výpočtová, modrá je reálne nameraná výchylka [1]	20
Obrázok č. 11 – Model koľajnice	21
Obrázok č. 12 – Geometria koľajnice [13].....	21
Obrázok č. 13 - Okrajové podmienky	22
Obrázok č. 14 - Výsledný priehyb.....	22
Obrázok č. 15 – Model kmitania prvkov železničnej trate.....	23
Obrázok č. 16 – Výsledky kmitania s 2 stupňami voľnosti.....	25
Obrázok č. 17 – Model prvkov železničnej trate bez vlastnej tuhosti koľajnice (Mk – hmotnosť koľajnice, kp – tuhosť podložky, Mp – hmotnosť podvalu, kn – tuhosť žel. násypu, b1 – tlmenie žel. násypu, F – sila od vlaku).....	26
Obrázok č. 18 – Geometria modelu - ANSYS	28
Obrázok č. 19– Okrajové podmienky - ANSYS	29
Obrázok č. 20 – Reakčná sila v podpore	29
Obrázok č. 21 – Priebeh reakčnej sily v čase (3 podvaly).....	30
Obrázok č. 22 – Priebeh reakčnej sily v čase (9 podvalov).....	31
Obrázok č. 23 – Výsledky kmitania s 2 stupňami voľnosti – sila funkcia času. 32	
Obrázok č. 24 – Model kmitania podvalu (Mp – hmotnosť podvalu, kn – tuhosť žel. násypu, b1 – tlmenie žel. násypu, F – sila od vlaku)	33
Obrázok č. 25 – Výsledok kmitania pre model s podvalom.....	34
Obrázok č. 26 – Model s pružinou - ANSYS	34
Obrázok č. 27 – Priebeh sily v pružine v závislosti na čase.....	36
Obrázok č. 28 - Výsledok kmitania podvalu pre silu ako funkciu času	36
Obrázok č. 29 - Lokomotíva rady 150 (hore) a vozeň typu BDmee (dolu)	38
Obrázok č. 30 - Výsledný priebeh sily budenia vlakovej súpravy	40
Obrázok č. 31 - Automaticky aktualizovaný priebeh sily v čase od vlakovej súpravy	41

Zoznam tabuliek

Tabuľka č. 1 – Hodnoty použité pri riešení sústavy rovníc č. 13-16.....	24
Tabuľka č. 2 - Výsledky simulácie pre model s 3 podvalmi	30
Tabuľka č. 3 – Vstupné parametre	32
Tabuľka č. 4 - Výsledky simulácie	35
Tabuľka č. 5 - Parametre potrebné na zostrojenie modelu (x_0 – vzdialenosť spojenia vagónov po os 1. kolesa, x_1 – osová vzdialenosť 1. nápravy, x_2 – vzdialenosť osí 2. a 3. kolesa, x_3 – osová vzdialenosť 2. nápravy, x_4 – vzdialenosť osi posledné kolesa po spojenie vagónov	38
Tabuľka č. 6 - Výsledky prepočtov pôsobiacich síl vlakovej súpravy	39
Tabuľka č. 7 - Tabuľka náhodných vstupných parametrov (hodnoty x_0 až x_4 predstavujú rovnaké veličiny ako v tabuľke č. 5)	41

Zoznam príloh

1. Príloha 1 - riešenie vlastnej tuhosti v programe ANSYS
2. Príloha 2 - riešenie priebehu sily na koľajnici v programe ANSYS
3. Príloha 3 - riešenie priebehu sily v pružine v programe ANSYS
4. Príloha A - skript a funkcia riešiaci sústavu diferenciálnych rovníc
5. Príloha B - skript a funkcia riešiaci sústavu diferenciálnych rovníc
6. Príloha C - skript a funkcia riešiaci sústavu diferenciálnych rovníc
7. Príloha D - skript a funkcia riešiaci sústavu diferenciálnych rovníc
8. Príloha E - všeobecný model sily od prechádzajúceho vlaku – Excel
9. Príloha F - model koľajnice Autodesk Inventor 2018