



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

TEORIE HYDRAULICKÉHO RÁZU

WATER HAMMER THEORY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

KAMILA ŠÍBLOVÁ

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. SIMONA FIALOVÁ, Ph.D.

BRNO 2011

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2010/11

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Kamila Šíbllová

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Teorie hydraulického rázu

v anglickém jazyce:

Water hammer theory

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Hlubší seznámení s teorií hydraulického rázu z různých hledisek dostupných v literatuře.

Cíle bakalářské práce:

Rešerše a přehledné zpracování dostupné teorie o hydraulickém rázu, jeho typy a jednotlivé metody řešení, dostupný software, protirázové ochrany.



prof. RNDr. Miroslav Douřádko, CSc.
ředitel ústavu

prof. RNDr. Josef Šíbl, CSc.
ředitel ústavu

V Brně, dne 23.11.2010

Seznam odborné literatury:

Přednášky - matematika, fyzika, statika, hydromechanika

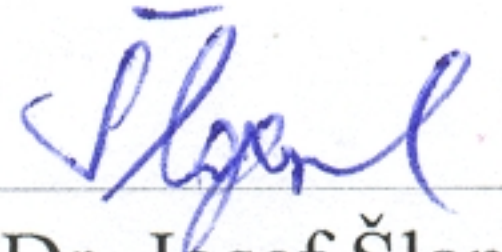
Internet

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Simona Fialová, Ph.D.

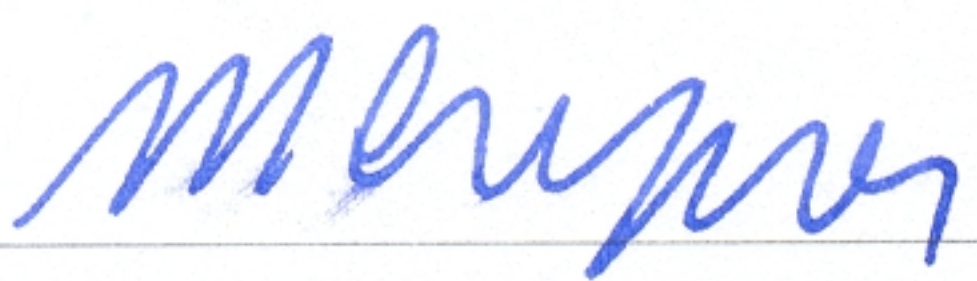
Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2010/11.

V Brně, dne 23.11.2010





prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
Ředitel ústavu



prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.
Děkan

Abstrakt

Práce je přehledovým textem, který se zabývá teorií, řešením a využitím hydraulického rázu. K řešení je zde využito metody charakteristik, metody Lax Wendroff a metody FTCS. Práce je ucelením veškerých dostupných informací o hydraulickém rázu a jeho využití v praxi.

Abstract

The thesis is a well-arranged text, which deals with the theory, solution and use of water hammer. For solution is used the method of characteristic, the Lax-Wendroff method and the methods of FTCS. The thesis is a synthesis of all available information about the water hammer and its use in practice.

klíčová slova

Hydraulický ráz, parciální diferenciální rovnice, metoda charakteristik, metoda Lax-Wendroff, metoda FTCS, Bernoulliho rovnice

key words

Water hammer, partial differential equation, method of Characteristics, Lax-Wendroff method, methods of FTCS, Bernoulli equation

ŠÍBLOVÁ, K.: *Teorie hydraulického rázu*, Brno, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2011, 44s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Simona Failová, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Teorie hydraulického rázu* vypracovala samostatně pod vedením Ing. Simony Fialové, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Kamila Šíblová

Děkuji svému školiteli Ing. Simoně Fialové, Ph.D. za četné rady a připomínky při vedení mé bakalářské práce.

Kamila Šíblová

Obsah

1	Úvod	11
2	Teorie [7]	13
2.1	Metody řešení	18
2.1.1	Metoda charakteristik [4]	18
2.1.2	Metoda Lax-Wendroff [4]	22
2.1.3	Metoda FTSC [6]	26
2.2	Software	40
2.2.1	AFT Arrow	40
2.2.2	AFT Impulse	41
2.2.3	Dynsip	42
3	Výskyt a eliminace v praxi	43
3.1	Výskyt vodního rázu	43
3.2	Příčiny vodního rázu v praxi	43
3.3	Ochrany proti rázu	43
3.3.1	Obtok	44
3.3.2	Vyrovnávací komora	44
3.3.3	Větrník	45
3.3.4	Vzdušník	46
3.3.5	ABS-Armaturo	47
4	Využití hydraulického rázu	49
4.1	Vodní trkač	49
4.2	Řezání vodním paprskem	50
4.3	Gibsonova metoda	51
5	Závěr	53

1 Úvod

Tato bakalářská práce řeší teorii hydraulického rázu. Hydraulický ráz vyjadřuje nestacionární proudění kapaliny. Tento jev je možné si představit jako proudění kapaliny, které je v každém zvoleném časovém úseku různé. Z výše zmíněných skutečností je zřejmé, že provozní podmínky proudění kapaliny jsou závislé na čase a současně je patrné, že rychlost proudění kapaliny není konstantní. Výskyt těchto nežádoucích jevů vyvolává změna tlaku, jejíž hodnota se pro zvolený materiál pohybuje v nezanedbatelných řádech. Bezpečnost a spolehlivost daného hydraulického systému klesá se vzrůstající hodnotou rozpětí tlaků v kapalině.

Hydraulický ráz je možné rozdělit dle druhu kapaliny a druhu prostředí na pružný a nepružný ráz. V případě nepružného rázu je uvažována nestlačitelná kapalina v tuhém prostředí. Pojem nestlačitelnosti kapaliny je možné charakterizovat jako časovou derivaci hustoty jejíž hodnota je nulová. Je tedy zřejmé, že hustota kapaliny je konstantní. Tuhé prostředí je možné chápat jako prostředí, které vlivem změny rychlosti proudění kapaliny a změny tlaku nezmění své parametry.

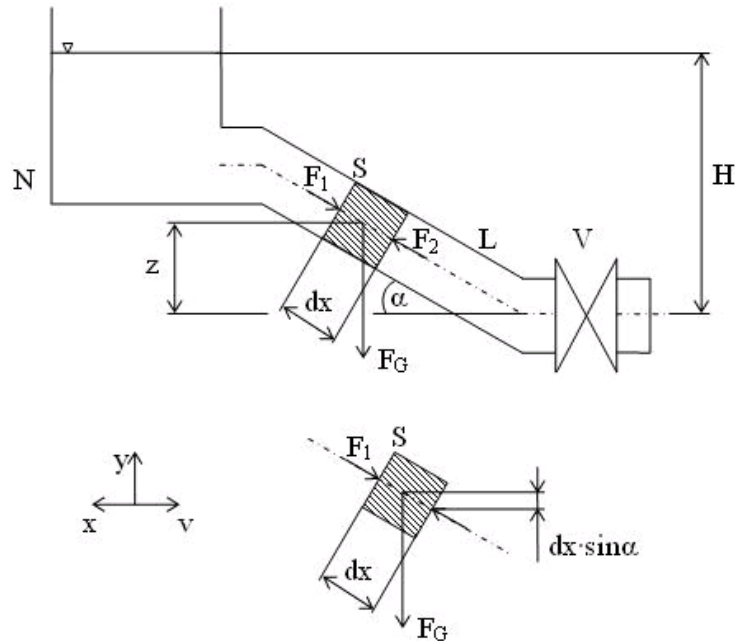
Pružný ráz lze charakterizovat stlačitelnou kapalinou v pružném prostředí. Je tedy patrné, že se jedná o opak rázu nepružného. Kapalina má v tomto případě časovou derivaci hustoty nekonstantní, tudíž různou od nulové hodnoty. Pružné prostředí má schopnost měnit svoje parametry a to vlivem změny rychlosti proudění kapaliny a vlivem změny tlaku. Dochází zde k přeměně kinetické energie pohybující se kapaliny na energii deformační. Z výše zmíněných aspektů je zřejmé, že může dojít k nevratným změnám (deformacím) celého systému.

Hydraulický ráz je možné pozorovat obecně v potrubních systémech. Pod tímto pojmem je možné si představit vodovodní řady, vodní díla, rozvodny vody a další. Je snahou v těchto systémech eliminovat vznikající rázy na minimální hodnotu, poněvadž výskyt těchto rázů má negativní účinky na mechanické vlastnosti materiálu. Může docházet k velkým změnám v systému, které mohou ohrozit bezpečnost. Současně má výskyt těchto rázů významný vliv na životnost celého systému.

2 Teorie [7]

Hydraulický ráz je možné popsat pomocí dvou diferenciálních rovnic, které se snadno odvodí ze dvou základních rovnic hydrodynamiky. První z nich je rovnice kontinuity, která je dána vztahem $Q = v \cdot S$, kde Q je průtok, v rychlost proudění a S průřez potrubí. Druhá je rovnice silové rovnováhy vyplývající z Newtonova zákona, který říká, že výslednice vnějších sil je rovna součtu všech sil na element působících.

Odvození je demonstrováno na příkladě výtoku z nádrže N za pomoci potrubí, které má na svém konci ventil V .



Obrázek 1: Výtok z nádrže

První diferenciální rovnice je odvozena za pomoci druhého Newtonova zákona, který řeší rovnost vnějších sil působících na zvolený element kapaliny dx . V nádrži je uvažován dostatečný objem, tzn. neměnná hladina H , tudíž $H = konst.$ Dalším předpokladem je neměnný průřez potrubí S . Přes ventil je uzavírán průtok Q , který v počátečním čase $t = 0$ má hodnotu Q_0 . Uzavírání ventilu způsobí zvýšení tlaku na elementu dx . Takle změna je dána vztahem $\Delta h = \frac{\partial H}{\partial x} dx$. Zavedením soustavy souřadnic, jak je uvedeno na obrázku 1, jsou zavedeny směry rychlosti proudění v ve směru kladném a délka x ve směru záporném.

Využitím druhého Newtonova zákona, který říká, že výslednice vnějších sil je rovna součtu všech sil na element působících, platí

$$F_s = -F_1 + F_2 - F_{Gx} \quad (2.1)$$

kde F_1 je síla na začátku elementu dx dána vztahem

$$F_1 = \rho \cdot g \cdot (H - z) \cdot S \quad (2.2)$$

F_2 je síla na konci elementu dx dána vytahem

$$F_2 = \rho \cdot g \cdot (H - z + \Delta z) \cdot S \quad (2.3)$$

kde

$$\Delta z = \sin \alpha \cdot dx + \Delta h = \sin \alpha \cdot dx + \frac{\partial H}{\partial x} \cdot dx$$

F_{Gx} je složka tíhové síly (složka ve směru proudění kapaliny)

$$F_{Gx} = \rho \cdot g \cdot S \cdot dx \cdot \alpha \quad (2.4)$$

a F_S je setrvačná síla

$$F_S = m \cdot \frac{dv}{dt} = \rho \cdot dV \cdot \frac{dv}{dt} = \rho \cdot S \cdot dx \cdot \frac{dv}{dt} \quad (2.5)$$

kde

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

je totální diferenciál setrvačného zrychlení, který obsahuje lokální (místní) zrychlení $\frac{\partial v}{\partial t}$ a konvektivní zrychlení $\frac{\partial v}{\partial x}$, které nastává při změně průřezu.

Po vyčíslení:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \left(1 + v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial t}{\partial v}\right) = \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \left(1 + v \cdot \frac{\partial t}{\partial x}\right) = \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \left(1 + v \cdot \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial t}}\right)$$

označíme $\frac{\partial x}{\partial t} = c$, což je rychlost zvuku v potrubí neboli rychlost tlakové vlny v potrubí, která se šíří od místa rozruchu k volné hladině v nádrži N a zpět k ventilu V stejnou rychlostí. Tím je získáno

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

ale poměr rychlostí $\frac{v}{c}$ (rychlost kapaliny versus rychlost tlakové vlny) můžeme být zanedbán, protože $c \gg v \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t}$, tzn. konvektivní zrychlení je zanedbatelné vůči lokálnímu zrychlení.

Po dosazení do rovnice (2.1) je obdrženo

$$\rho \cdot S \cdot dx \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = -\rho \cdot g \cdot (H - z) \cdot S + \rho \cdot g \cdot \left(H - z + \sin \alpha \cdot dx + \frac{\partial H}{\partial x} \cdot dx\right) \cdot S - \rho \cdot g \cdot S \cdot dx \cdot \sin \alpha$$

po úpravách

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g \cdot \frac{\partial H}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \equiv \frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} \quad (2.6)$$

Tím bylo dospěno k *první diferenciální rovnici* popisující hydraulický ráz.

Při odvození druhé diferenciální rovnice se vychází ze stlačitelnosti tekutiny δ , pružnosti potrubí a rovnosti změn objemů vlivem změny rychlosti v čas.

Nejprve bude nadefinována *stlačitelnost kapaliny* δ

$$\delta = -\frac{1}{V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta p} [Pa^{-1}] \quad (2.7)$$

a *modul objemové pružnosti kapaliny* K

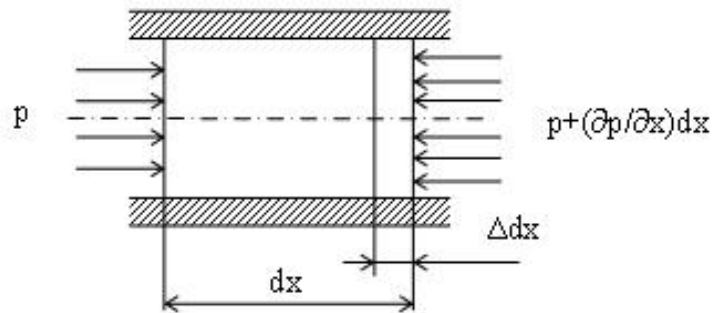
$$K = \frac{1}{\delta} = -V \cdot \frac{\Delta p}{\Delta V} [Pa^{-1}] \quad (2.8)$$

Celková změnu objemu je pak dosažena součtem změn, tzn. změnou ΔV_1 danou stlačitelností kapaliny a změnou ΔV_2 vycházející z pružnosti stěn potrubí, kterou lze určit z Hookova zákona spolu se základními pevnostními rovnicemi.

Tedy

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 \quad (2.9)$$

Nejprve změna ΔV_1



Obrázek 2: Schematické znázornění změny tlaku

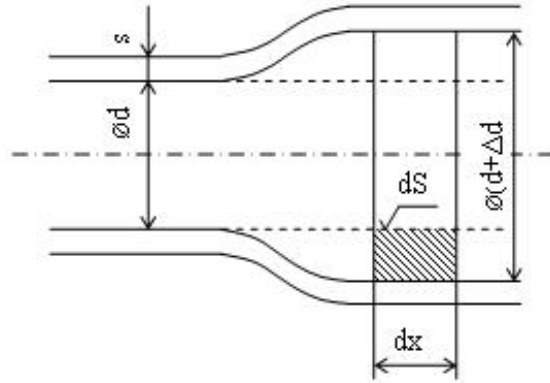
Důsledkem změny rychlosti dojde k přírůstku tlaku $\Delta p = \frac{\partial p}{\partial t} \cdot dt$ a tím i ke změně délky elementu dx o hodnotu Δdx při uvažování objemové pružnosti kapaliny

$$\begin{aligned} K = \frac{1}{\delta} = -V \cdot \frac{\Delta p}{\Delta V} &= -\frac{\pi \cdot d^2 \cdot dx}{4} \cdot \frac{\frac{\partial p}{\partial t} \cdot dt}{\frac{\pi \cdot d^2 \cdot \Delta dx}{4}} = -\frac{dx}{\Delta dx} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \cdot dt \\ \Rightarrow \Delta dx &= -\frac{1}{K} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \cdot dt \cdot dx \end{aligned} \quad (2.10)$$

Tedy

$$\Delta V_1 = S \cdot \Delta dx = -\frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \frac{1}{K} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \cdot dt \cdot dx \quad (2.11)$$

Nyní změna ΔV_2



Obrázek 3: Roztažnost potrubí

Přírůstkem tlaku se nezmění pouze délka elementu dx , ale navíc dojde k roztažení potrubí o Δd . Tahle skutečnost vyvolá v potrubí napětí v tahu σ dáno vztahy

$$\sigma = \frac{p \cdot d}{2 \cdot s} \quad (2.12)$$

$$\Delta\sigma = \frac{\partial p}{\partial t} \cdot dt \cdot \frac{d}{2 \cdot s} \quad (2.13)$$

kde s je tloušťka stěny potrubí. Po té za pomoci Hookova zákona, který je dán vztahem

$$\Delta\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (2.14)$$

kde E je Yangův modul pružnosti v tahu a ε je poměrné přetvoření

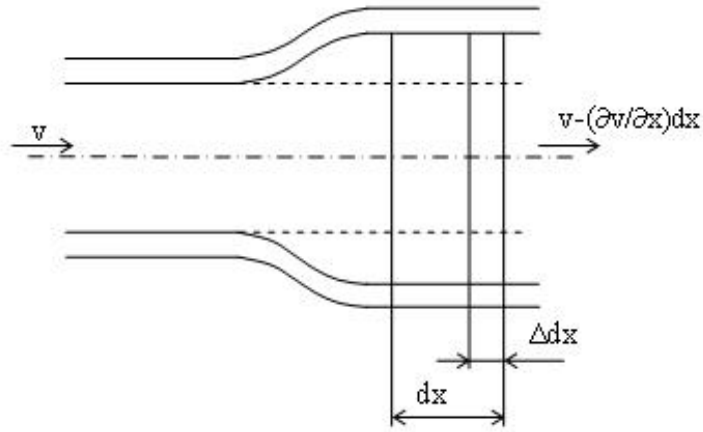
$$\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\pi \cdot \Delta d}{\pi \cdot d} = \frac{\Delta d}{d} \quad (2.15)$$

je obdrženo

$$\Delta\sigma = E \cdot \frac{\Delta d}{d} \Rightarrow \Delta d = d \cdot \frac{\Delta\sigma}{E} = \frac{\partial p}{\partial t} \cdot dt \cdot \frac{d^2}{2 \cdot E \cdot s} \quad (2.16)$$

Zněna ΔV_2 dána pružností stěn potrubí o poloměru $\Delta r = \frac{\Delta d}{2}$

$$\Delta V_2 = dS \cdot \Delta r = \pi \cdot d \cdot dx \cdot \Delta r = \pi \cdot d \cdot dx \cdot \frac{\Delta d}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot d \cdot dx \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \cdot dt \cdot \frac{d^2}{2 \cdot E \cdot s} = \frac{\pi \cdot d^3}{4 \cdot E \cdot s} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \cdot dt \cdot dx \quad (2.17)$$



Obrázek 4: Změna rychlosti

V elementu dx za časovou změnu dt vlivem rychlosti $\frac{\partial v}{\partial t} \cdot dt$ získáváme celkovou změnu objemu ve tvaru

$$\Delta V = S \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \cdot dx \cdot dt = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \cdot dx \cdot dt \quad (2.18)$$

Dosazením do rovnice (2.9) a po úpravách je obdrženo

$$\begin{aligned} \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \cdot dx \cdot dt &= -\frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \frac{1}{K} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \cdot dt \cdot dx + \frac{\pi \cdot d^3}{4 \cdot E \cdot s} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \cdot dx \cdot dt \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{K} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{d}{E \cdot s} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial p}{\partial t} \cdot \left(-\frac{1}{K} + \frac{d}{E \cdot s} \right) \equiv \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial t} \cdot \rho \cdot g \cdot \left(-\frac{1}{K} + \frac{d}{E \cdot s} \right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

protože

$$\frac{1}{c^2} = \rho \left(\frac{1}{K} + \frac{d}{E \cdot s} \right)$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{\frac{1}{\rho \cdot \left(\frac{1}{K} + \frac{d}{E \cdot s} \right)}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{\rho}{K} + \frac{\rho \cdot d}{E \cdot s}}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{\rho}{K} \cdot \left(1 + \frac{K \cdot d}{E \cdot s} \right)}} = \frac{\sqrt{\frac{K}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{K \cdot d}{E \cdot s}}}$$

$$c = k \cdot c_{th} \quad (2.20)$$

Vztah (2.20) je rychlost šíření rozruchu v pružném prostředí a pružné kapalině, kde $c_{th} = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$ je

teoretická rychlost zvuku v dokonale tuhém prostředí, zde je $E \rightarrow \infty$ a $k = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{K \cdot d}{E \cdot s}}}$

Konečný stav druhé diferenciální rovnice popisující hydraulický ráz je

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{c^2}{g} \equiv \frac{\partial p}{\partial t} = \rho \cdot c^2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.21)$$

Z výše uvedených postupů bylo dosaženo požadovaných rovnic hydraulického rázu, které jsou dány vztahy

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} &= 0 \equiv \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{c^2}{g} &= 0 \equiv \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \cdot c^2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

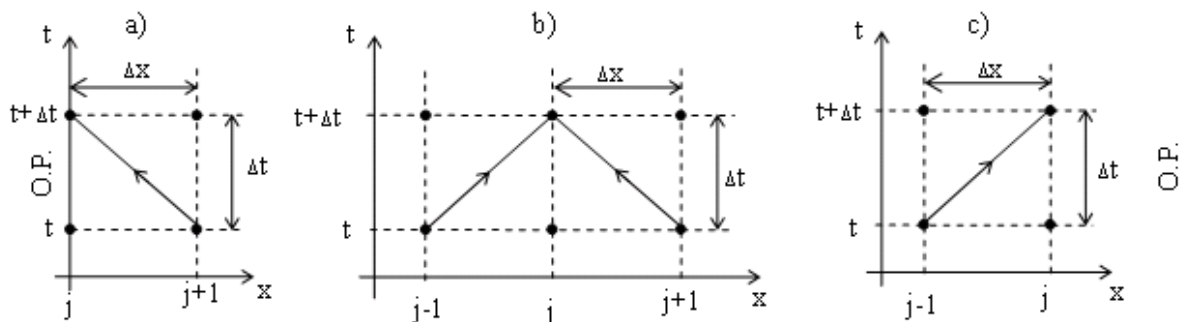
2.1 Metody řešení

Pro samotné řešení se v praxi využívá různých metod

Metoda charakteristik
Metoda Lax–Wendroff
FTCS

a další...

2.1.1 Metoda charakteristik [4]



Obrázek 5: a) krok řešení počátečního uzlu, b) krok řešení vnitřního uzlu, c) krok řešení

Řešené rovnice:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \rho \cdot c^2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho \cdot c^2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.24)$$

Vynásobením rovnice (2.23) konstantou κ a sečtením s rovnicí (2.24) je získáno

$$\kappa \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial t} + k \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

kde $k = \rho \cdot c^2$. Po úpravě má vztah tvar

$$\kappa \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial t} + k \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (2.25)$$

Vyjádření diferenciálů pro tlak a rychlost

$$dp = \frac{\partial p}{\partial t} \cdot dt + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx \quad dv = \frac{\partial v}{\partial t} \cdot dt + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot dx$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\partial p}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx} + \frac{\partial p}{\partial x} \quad \frac{dv}{dx} = \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Rovnici (2.25) lze upravit do tvaru

$$\alpha \cdot \frac{dp}{dx} + \beta \cdot \frac{dv}{dx} \quad (2.26)$$

kde

$$\alpha \cdot \frac{dp}{dx} = \kappa \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} \quad \beta \cdot \frac{dv}{dx} = \kappa \cdot k \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

Jestliže je dosazeno za $\frac{dp}{dx}$ a za $\frac{dv}{dx}$ nebývají vztahy tvaru

$$\alpha \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \kappa \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} \quad \beta \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \kappa \cdot k \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$$

Po upravení

$$\alpha \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx} + \alpha \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \kappa \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.27)$$

$$\beta \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx} + \beta \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \kappa \cdot k \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \quad (2.28)$$

Z rovnice (2.27) plyne vztah pro α a κ ve tvaru

$$\alpha = 1 \quad \kappa = \frac{dt}{dx}$$

Při dosazení za konstantu κ

$$\beta \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx} + \beta \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{dt}{dx} \cdot k \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

Pro β platí

$$\beta = \frac{dt}{dx} \cdot k \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{dx} \cdot k \cdot \frac{dt}{dx} = \rho$$

Rychlost zvuku v potrubí je dána vztahem

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{k}{\rho}} = \pm \sqrt{\frac{\rho \cdot c^2}{\rho}} = \pm c$$

Pro směr $dx = c \cdot dt$ pak platí

Pro směr $dx = -c \cdot dt$

$$\beta = \rho \cdot c$$

$$\beta = -\rho \cdot c$$

Po dosazení do rovnice (2.26)

$$\frac{dp}{dx} + \rho \cdot c \cdot \frac{dv}{dx} = 0$$

$$\frac{dp}{dx} + \rho \cdot c \cdot \frac{dv}{dx} = 0$$

$$dp + \rho \cdot c \cdot dv = 0$$

$$-dp + \rho \cdot c \cdot dv = 0$$

Po dosazení průtoku Q za rychlost v dle vztahu

$$v = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\frac{\pi \cdot D^2}{4}} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2}$$

Lze psát:

Pro $dx = c \cdot dt$ platí

$$dp + \frac{4 \cdot \rho \cdot c}{\pi \cdot D^2} \cdot dQ = 0 \quad (2.29)$$

Pro $dx = -c \cdot dt$ platí

$$-dp + \frac{4 \cdot \rho \cdot c}{\pi \cdot D^2} \cdot dQ = 0 \quad (2.30)$$

Zavedením konstanty

$$K = \frac{4 \cdot \rho \cdot c}{\pi \cdot D^2}$$

a jejím dosazením

pro $dx = c \cdot dt$ platí

$$dp + K \cdot dQ = 0$$

pro $dx = -c \cdot dt$ platí

$$-dp + K \cdot dQ = 0$$

Po dosazení za difference z Obrázku 5

$$(p_j^{t+\Delta t} - p_{j-1}^t) + K \cdot (Q_j^{t+\Delta t} - Q_{j-1}^t) = 0 \quad (2.31)$$

$$-(p_j^{t+\Delta t} - p_{j+1}^t) + K \cdot (Q_j^{t+\Delta t} - Q_{j+1}^t) = 0 \quad (2.32)$$

Řešení bude získáno sečtením a odečtením rovnic (2.31) a (2.32)

Po sečtení je obdrženo vztahu pro průtok

$$\begin{aligned}
& -p_{j-1}^{t+\Delta t} + p_{j+1}^t + K \cdot (2 \cdot Q_j^{t+\Delta t} - Q_{j-1}^t - Q_{j+1}^t) = 0 \\
& -p_{j-1}^{t+\Delta t} + p_{j+1}^t + K \cdot 2 \cdot Q_j^{t+\Delta t} - K \cdot Q_{j-1}^t - K \cdot Q_{j+1}^t = 0 \\
& K \cdot 2 \cdot Q_j^{t+\Delta t} = p_{j-1}^{t+\Delta t} - p_{j+1}^t K \cdot Q_{j-1}^t + K \cdot Q_{j+1}^t \\
& Q_j^{t+\Delta t} = \frac{p_{j-1}^{t+\Delta t} - p_{j+1}^t K \cdot Q_{j-1}^t + K \cdot Q_{j+1}^t}{2 \cdot K} \\
& Q_j^{t+\Delta t} = \frac{1}{2 \cdot K} (p_{j-1}^{t+\Delta t} - p_{j+1}^t) + \frac{1}{2} (Q_{j-1}^t + K \cdot Q_{j+1}^t)
\end{aligned}$$

Po odečtení je obdrženo vztahu pro tlak

$$\begin{aligned}
& 2 \cdot p_j^{t+\Delta t} - p_{j-1}^t - p_{j+1}^t - K \cdot Q_{j-1}^t + K \cdot Q_{j+1}^t = 0 \\
& 2 \cdot p_j^{t+\Delta t} = p_{j-1}^t + p_{j+1}^t + K \cdot Q_{j-1}^t - K \cdot Q_{j+1}^t \\
& p_j^{t+\Delta t} = \frac{p_{j-1}^t + p_{j+1}^t + K \cdot Q_{j-1}^t - K \cdot Q_{j+1}^t}{2} \\
& p_j^{t+\Delta t} = \frac{1}{2} (p_{j-1}^t + p_{j+1}^t) + \frac{K}{2} (Q_{j-1}^t - K \cdot Q_{j+1}^t)
\end{aligned}$$

Výpočtové vztahy pro vnitřní uzlové body

$$Q_j^{t+\Delta t} = \frac{1}{2 \cdot K} (p_{j-1}^{t+\Delta t} - p_{j+1}^t) + \frac{1}{2} (Q_{j-1}^t + K \cdot Q_{j+1}^t) \quad (2.33)$$

$$p_j^{t+\Delta t} = \frac{1}{2} (p_{j-1}^t + p_{j+1}^t) + \frac{K}{2} (Q_{j-1}^t - K \cdot Q_{j+1}^t) \quad (2.34)$$

Pro výpočet počátečního uzlového bodu bude využito vztahu (2.32), který bude doplněn rovnicí okrajových podmínek.

Při známém tlaku v počátečním uzlu rovnice přejde ve tvar

$$Q_j^{t+\Delta t} = Q_{j+1}^t \frac{1}{K} (p_j^{t+\Delta t} - p_{j+1}^t) \quad (2.35)$$

a lze z ní vypočítat neznámý průtok.

Při průtokové okrajové podmínce se rovnice přemění ve tvar

$$p_j^{t+\Delta t} = p_{j+1}^t + K \cdot Q_j^{t+\Delta t} - K \cdot Q_{j+1}^t \quad (2.36)$$

a lze počítat tlak.

Pro výpočet koncového uzlového bodu bude využita rovnice (2.31), která bude doplněna rovnicí okrajových podmínek.

Při známém tlaku v počátečním uzlu, rovnice přejde ve tvaru

$$Q_j^{t+\Delta t} = Q_{j-1}^t - \frac{1}{K} (p_j^{t+\Delta t} - p_{j-1}^t) \quad (2.37)$$

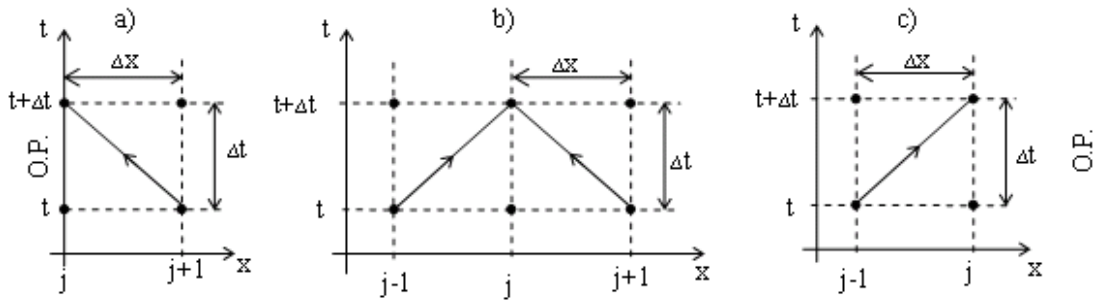
a lze z ní získat neznámý průtok.

Při průtokové okrajové podmínce přejde do tvaru

$$p_j^{t+\Delta t} = p_{j-1}^t - K \cdot Q_j^{t+\Delta t} + K \cdot Q_{j-1}^t \quad (2.38)$$

a lze získat tlak.

2.1.2 Metoda Lax-Wendroff [4]



Obrázek 6: a) krok řešení počátečního uzlu, b) krok řešení vnitřního uzlu, c) krok řešení

$$f_{x_j}^{t+\Delta t} = f_{x_j}^t + \Delta t \cdot \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{x_j} + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \left. \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right|_{x_j} \quad (2.39)$$

Pro rovnici typu

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Lze psát

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -a \cdot \frac{\partial f}{\partial x}$$

a po vyjádření derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -a \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial x} = -a \cdot \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial t}}{\partial x} = -a \cdot \frac{\partial (-a \cdot \frac{\partial f}{\partial x})}{\partial x} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Po dosazení do základního schématu

$$f_{x_j}^{t+\Delta t} = f_{x_j}^t - a \cdot \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta x} \cdot (f_{x_{j+1}}^t - f_{x_{j-1}}^t) + a^2 \cdot \frac{\Delta t^2}{2 \cdot \Delta x^2} \cdot (f_{x_{j+1}}^t - 2 \cdot f_{x_j}^t + f_{x_{j-1}}^t)$$

Řešené rovnice

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho \cdot c^2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

Zavedením matice je dosaženo

$$w = \begin{pmatrix} c \\ p \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ k & 0 \end{pmatrix}$$

Pak lze psát

$$\frac{\partial}{\partial t} w + K \cdot \frac{\partial}{\partial x} w = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} w = -K \cdot \frac{\partial}{\partial x} w$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} w = -K \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} w$$

Po úpravě

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} w = -K \cdot \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial t}$$

Po dosazení za derivaci $\frac{\partial}{\partial t} w$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} w = -K \cdot \frac{\partial (-K \cdot \frac{\partial w}{\partial x})}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} w = K \cdot K \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2 \cdot \Delta x} (w_{x_{j+1}}^t - w_{x_{j-1}}^t)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{\Delta x^2} (w_{x_{j+1}}^t - 2 \cdot w_{x_j}^t + w_{x_{j-1}}^t)$$

Po dosazení do základního schématu

$$w_{x_j}^{t+\Delta t} = w_{x_j}^t - \Delta t \cdot K \cdot \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x_j} + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot K \cdot K \cdot \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x_j}$$

Po rozepsání diferencí ve směru x a zjednodušení

$$w_{x_j}^{t+\Delta t} = w_{x_j}^t - \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta x} \cdot K \cdot (w_{x_{j+1}}^t - w_{x_{j-1}}^t) + \frac{\Delta t^2}{2 \cdot \Delta x^2} \cdot K \cdot K \cdot (w_{x_{j+1}}^t - 2 \cdot w_{x_j}^t + w_{x_{j-1}}^t)$$

Po rozepsání do matic

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix}_{x_j}^{t+\Delta t} &= \begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix}_{x_j}^t - \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta x} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ k & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix}_{x_{j+1}}^t + \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta x} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ k & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix}_{x_{j-1}}^t + \\ &+ \frac{\Delta t^2}{2 \cdot \Delta x^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ k & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix}_{x_{j+1}}^t - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ k & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix}_{x_j}^t + \\ &+ \frac{\Delta t^2}{2 \cdot \Delta x^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ k & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix}_{x_{j-1}}^t \end{aligned}$$

Roznásobení matic

$$K \cdot K = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ k & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k}{\rho} & 0 \\ 0 & \frac{k}{\rho} \end{pmatrix}$$

Po úpravě

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix}_{x_j}^{t+\Delta t} &= \begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix}_{x_j}^t - \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta x} \cdot \begin{pmatrix} \frac{p}{\rho} \\ k \cdot v \end{pmatrix}_{x_{j+1}}^t + \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta x} \cdot \begin{pmatrix} \frac{p}{\rho} \\ k \cdot v \end{pmatrix}_{x_{j-1}}^t + \\ &+ \frac{\Delta t^2}{2 \cdot \Delta x^2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{k \cdot v}{\rho} \\ \frac{k \cdot p}{\rho} \end{pmatrix}_{x_{j+1}}^t - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{k \cdot v}{\rho} \\ \frac{k \cdot p}{\rho} \end{pmatrix}_{x_j}^t + \frac{\Delta t^2}{2 \cdot \Delta x^2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{k \cdot v}{\rho} \\ \frac{k \cdot p}{\rho} \end{pmatrix}_{x_{j-1}}^t \end{aligned}$$

Rozepsání matice na složky

Pro rychlost

$$\begin{aligned} v_{x_j}^{t+\Delta t} &= v_{x_j}^t - \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta x} \cdot \frac{p_{x_{j+1}}^t}{\rho} + \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta x} \cdot \frac{p_{x_{j-1}}^t}{\rho} + \frac{\Delta t^2}{2 \cdot \Delta x^2} \cdot \frac{k \cdot v_{x_{j+1}}^t}{\rho} - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \cdot \frac{k \cdot v_{x_j}^t}{\rho} + \\ &+ \frac{\Delta t^2}{2 \cdot \Delta x^2} \cdot \frac{k \cdot v_{x_{j-1}}^t}{\rho} \end{aligned}$$

Pro tlak

$$\begin{aligned} p_{x_j}^{t+\Delta t} &= p_{x_j}^t - \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta x} \cdot k \cdot v_{x_{j+1}}^t + \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta x} \cdot k \cdot v_{x_{j-1}}^t + \frac{\Delta t^2}{2 \cdot \Delta x^2} \cdot \frac{k \cdot p_{x_{j+1}}^t}{\rho} - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \cdot \frac{k \cdot p_{x_j}^t}{\rho} + \\ &+ \frac{\Delta t^2}{2 \cdot \Delta x^2} \cdot \frac{k \cdot p_{x_{j-1}}^t}{\rho} \end{aligned}$$

Po dosazení průtoku za rychlost

$$v = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\frac{\pi \cdot D^2}{4}} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2}$$

Lze po úpravách psát

Pro průtok

$$\begin{aligned} Q_{x_j}^{t+\Delta t} = & Q_{x_j}^t - \frac{\pi \cdot D^2 \cdot \Delta t}{8 \cdot \Delta x \cdot \rho} \cdot p_{x_{j+1}}^t + \frac{\pi \cdot D^2 \cdot \Delta t}{8 \cdot \Delta x \cdot \rho} \cdot Q_{x_{j-1}}^t + \frac{\Delta t^2 \cdot k}{2 \cdot \Delta x^2 \cdot \rho} \cdot Q_{x_{j+1}}^t - \frac{\Delta t^2 \cdot k}{\Delta x^2 \cdot \rho} \cdot Q_{x_j}^t + \\ & + \frac{\Delta t^2 \cdot k}{2 \cdot \Delta x^2 \cdot \rho} \cdot Q_{x_{j-1}}^t \end{aligned}$$

Pro tlak

$$\begin{aligned} p_{x_j}^{t+\Delta t} = & p_{x_j}^t - \frac{2 \cdot \Delta t \cdot k}{\pi \cdot D^2 \cdot \Delta x} \cdot Q_{x_{j+1}}^t + \frac{2 \cdot \Delta t \cdot k}{\pi \cdot D^2 \cdot \Delta x} \cdot Q_{x_{j-1}}^t + \frac{\Delta t^2 \cdot k}{2 \cdot \Delta x^2 \cdot \rho} \cdot p_{x_{j+1}}^t - \frac{\Delta t^2 \cdot k}{\Delta x^2 \cdot \rho} \cdot p_{x_j}^t + \\ & + \frac{\Delta t^2 \cdot k}{2 \cdot \Delta x^2 \cdot \rho} \cdot p_{x_{j-1}}^t \end{aligned}$$

Zavedení konstant pro usnadnění

Pro Q

$$a = \frac{\pi \cdot D^2 \cdot \Delta t}{8 \cdot \Delta x \cdot \rho}$$

$$b = \frac{\Delta t^2 \cdot k}{2 \cdot \Delta x^2 \cdot \rho}$$

$$c = \frac{\Delta t^2 \cdot k}{\Delta x^2 \cdot \rho}$$

Pro p

$$d = \frac{2 \cdot \Delta t \cdot k}{\pi \cdot D^2 \cdot \Delta x}$$

$$e = \frac{2 \cdot \Delta t \cdot k}{\pi \cdot D^2 \cdot \rho}$$

$$f = \frac{\Delta t^2 \cdot k}{\Delta x^2 \cdot \rho}$$

Po dosazení konstant

Výpočtové vztahy pro vnitřní uzlové body

$$Q_{x_j}^{t+\Delta t} = Q_{x_j}^t - a \cdot p_{x_{j+1}}^t + a \cdot Q_{x_{j-1}}^t + b \cdot Q_{x_{j+1}}^t - c \cdot Q_{x_j}^t + b \cdot Q_{x_{j-1}}^t \quad (2.40)$$

$$p_{x_j}^{t+\Delta t} = p_{x_j}^t - d \cdot Q_{x_{j+1}}^t + d \cdot Q_{x_{j-1}}^t + e \cdot p_{x_{j+1}}^t - f \cdot p_{x_j}^t + e \cdot p_{x_{j-1}}^t \quad (2.41)$$

Výpočtové vztahy pro počáteční uzlový bod

$$Q_{x_j}^{t+\Delta t} = \frac{\pi \cdot D^2 \cdot \Delta x}{4 \cdot k \cdot \Delta t} \cdot (p_{x_j}^{t+\Delta t} - p_{x_j}^t) + Q_{x_{j+1}}^{t+\Delta t} \quad (2.42)$$

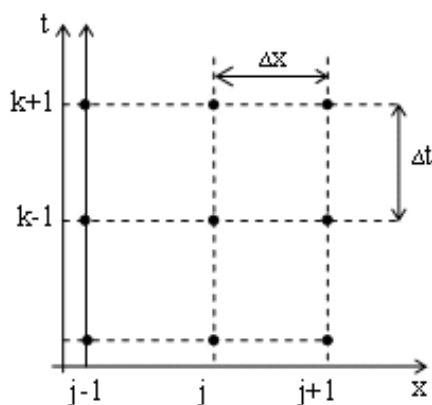
$$p_{x_j}^{t+\Delta t} = -\frac{4 \cdot k \cdot \Delta t}{\pi \cdot D^2 \cdot \Delta x} \cdot (Q_{x_{j+1}}^{t+\Delta t} - Q_{x_j}^{t+\Delta t}) + p_{x_j}^t \quad (2.43)$$

Výpočtové vztahy pro koncový uzlový bod

$$Q_{x_j}^{t+\Delta t} = -\frac{\pi \cdot D^2 \cdot \Delta x}{4 \cdot k \cdot \Delta t} \cdot (p_{x_{j+1}}^{t+\Delta t} - p_{x_{j+1}}^t) + Q_{x_j}^{t+\Delta t} \quad (2.44)$$

$$p_{x_{j+1}}^{t+\Delta t} = -\frac{4 \cdot k \cdot \Delta t}{\pi \cdot D^2 \cdot \Delta x} \cdot (Q_{x_{j+1}}^{t+\Delta t} - Q_{x_j}^{t+\Delta t}) + p_{x_{j+1}}^t \quad (2.45)$$

2.1.3 Metoda FTSC [6]



Obrázek 7: Řešení uzlů

Řešené rovnice

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho \cdot c^2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

Dosazením ptůroku Q za rychlost v

$$v = \frac{Q}{S}$$

a roznásobením $\frac{S}{\rho}$ je získáno

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{S}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{k}{S} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

kde $k = \rho \cdot c^2$

Zavedením matic je dosaženo

$$w = \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \frac{S}{\rho} \\ \frac{k}{\rho} & 0 \end{pmatrix}$$

Lze psát

$$\frac{\partial}{\partial t} w + K \cdot \frac{\partial}{\partial x} w = 0$$

Pak platí pro schéma FTCS

$$\frac{w_{x_j}^{t_{k+1}} - w_{x_j}^{t_k}}{\Delta t} + K \cdot \frac{w_{x_{j+1}}^{t_k} - w_{x_{j-1}}^{t_k}}{2 \cdot \Delta x} = 0$$

Vyjádření neznámé $w_{x_j}^{t_{k+1}}$

$$w_{x_j}^{t_{k+1}} = w_{x_j}^{t_k} - \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta x} + K \cdot (w_{x_{j+1}}^{t_k} - w_{x_{j-1}}^{t_k})$$

Rozepsáním do matic je obdrženo

$$\begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{x_j}^{t_{k+1}} = \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{x_j}^{t_k} - \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta x} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{S}{\rho} \\ \frac{k}{\rho} & 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{x_{j+1}}^{t_k} - \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{x_{j-1}}^{t_k} \right]$$

Rozepsání na složky

Pro průtok

$$Q_{x_j}^{t_{k+1}} = Q_{x_j}^{t_k} - \frac{\Delta t \cdot S}{2 \cdot \Delta x \cdot \rho} \cdot (p_{x_{j+1}}^{t_k} - p_{x_{j-1}}^{t_k})$$

Pro tlak

$$p_{x_j}^{t_{k+1}} = p_{x_j}^{t_k} - \frac{\Delta t \cdot k}{2 \cdot \Delta x \cdot S} \cdot (Q_{x_{j+1}}^{t_k} - Q_{x_{j-1}}^{t_k})$$

Zavedení konstant

$$a = \frac{\Delta t \cdot S}{2 \cdot \Delta x \cdot \rho}$$

$$b = \frac{\Delta t \cdot k}{2 \cdot \Delta x \cdot S}$$

Po dosazení konstant je obdržen vztah pro výpočet vnitřního uzlového bodu

Pro tlak

$$Q_{x_j}^{t_{k+1}} = Q_{x_j}^{t_k} - a \cdot (p_{x_{j+1}}^{t_k} - p_{x_{j-1}}^{t_k})$$

Pro tlak

$$p_{x_j}^{t_{k+1}} = p_{x_j}^{t_k} - b \cdot (Q_{x_{j+1}}^{t_k} - Q_{x_{j-1}}^{t_k})$$

Za pomoci jiného řešení lze docílit základních rovnic hydraulického rázu ve tvaru

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \rho \cdot g \cdot F\left(t - \frac{x}{c}\right) + f\left(t + \frac{x}{c}\right) \\ v &= v_0 - \frac{g}{c} \cdot \left[F\left(t - \frac{x}{c}\right) + f\left(t + \frac{x}{c}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.46)$$

kde p_0, v_0 jsou počáteční stavy neboli výchozí provozní parametry tlaku a průtokové rychlosti v nulovém čase, tedy $t = 0$.

Funkce $F\left(t - \frac{x}{c}\right), f\left(t + \frac{x}{c}\right)$ jsou integrační funkce. Jejich význam je chápán jako šířící se tlakové vlny zvoleným potrubím rychlostí zvuku c . Funkce $F\left(t - \frac{x}{c}\right)$ je tzv. *přímá tlaková vlna*. Je to vlna rozruchu., která se postupně šíří od ventilu V k hladině v nádrži H během časového intervalu $t \leq \frac{L}{c}$. Funkce $f\left(t + \frac{x}{c}\right)$ představuje tzv. *zpětnou tlakovou vlnu*. Tato vlna rozruchu je odražená vlna, která se vrací od hladiny nádrže H k ventilu V po čas $t > \frac{L}{c}$.

Jestliže je položena funkce $f\left(t + \frac{x}{c}\right)$ rovna nule, tedy $f\left(t + \frac{x}{c}\right) = 0$, obnáší to vznik pouze tlakové vlny přímé. Zpětná tlaková vlna nevzniká a rovnice se přemění ve tvaru

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \rho \cdot g \cdot F\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ v &= v_0 - \frac{g}{c} \cdot F\left(t - \frac{x}{c}\right) \end{aligned} \quad (2.47)$$

Vyjádřením změn v obou rovnicích je dosaženo tvaru

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho \cdot g} \cdot (p - p_0) &= F\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ \frac{c}{g} \cdot (v - v_0) &= -F\left(t - \frac{x}{c}\right) \end{aligned} \quad (2.48)$$

Po sečtení těchto dvou rovnic

$$\frac{1}{\rho \cdot g} \cdot (p - p_0) + \frac{c}{g} \cdot (v - v_0) = 0$$

a následující úpravě

$$\frac{1}{\rho \cdot g} \cdot (p - p_0) = -\frac{c}{g} \cdot (v - v_0)$$

V dalším kroku dojde k vynásobení celé rovnice členy $\rho \cdot g$

$$p - p_0 = -c \cdot g \cdot (v - v_0)$$

Konečná rovnice má tedy tvar

$$p - p_0 = c \cdot g \cdot (v_0 - v) \quad (2.49)$$

Jestliže funkci $F\left(t - \frac{x}{c}\right)$ položíme rovnu nule, tudíž $F\left(t - \frac{x}{c}\right) = 0$, vzniká naopak pouze tlaková vlna zpětná. Nevzniká tlaková vlna přímá. Rovnice se přemění na tvary

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \rho \cdot g \cdot f\left(t + \frac{x}{c}\right) \\ v &= v_0 - \frac{g}{c} \cdot \left[-f\left(t + \frac{x}{c}\right)\right] \end{aligned} \quad (2.50)$$

Opět vyjádřením změn je obdrženo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho \cdot g} \cdot (p - p_0) &= f\left(t + \frac{x}{c}\right) \\ -\frac{c}{g} \cdot (v - v_0) &= -f\left(t + \frac{x}{c}\right) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Sečtením rovnic je dosaženo

$$\frac{1}{\rho \cdot g} \cdot (p - p_0) - \frac{c}{g} \cdot (v - v_0) = 0$$

Po úpravě

$$\frac{1}{\rho \cdot g} \cdot (p - p_0) = \frac{c}{g} \cdot (v - v_0)$$

Vynásobením rovnice členy ρ a a je dosaženo konečného tvaru

$$p - p_0 = c \cdot g \cdot (v - v_0) \quad (2.52)$$

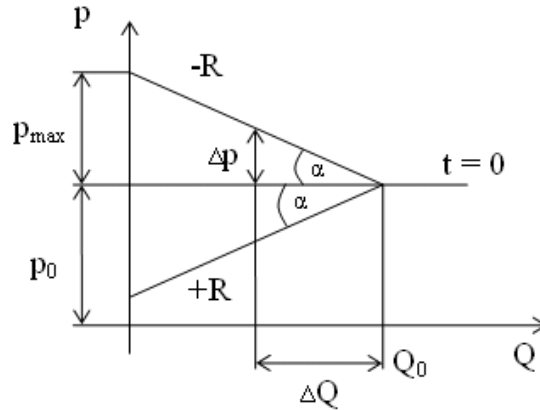
Pro změnu tlaku je zaveden výraz $p - p_0 = \Delta p$, pro změnu rychlosti $v - v_0 = \Delta v$. Použitím rovnice kontinuity ve tvaru

$$\Delta Q = \Delta v \cdot S \Rightarrow \Delta v = \frac{\Delta Q}{S}$$

kde přírůstek průtoku je ve tvaru $\Delta Q = Q - Q_0$ a tím je docíleno tzv. *Žukovského vztahu*

$$\Delta p = \pm \rho \cdot c \cdot \frac{\Delta Q}{S} = \pm R \cdot \Delta Q \quad (2.53)$$

kde $R = \frac{\rho \cdot c}{S}$ je absolutní hodnota rázové příčky (charakteristiky). Jedná se o konstantu, jenž je dána potrubním systémem.



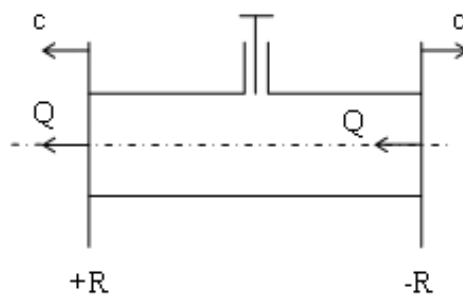
Obrázek 8: Rázové charakteristiky

Člen α vyjadřuje směrnici rázové charakteristiky danou vztahem

$$\tan \alpha = R \Rightarrow \alpha = \arctan R \quad (2.54)$$

Z obrázku lze vidět nabývání kladných i záporných hodnot rázové charakteristiky. Tento fakt se řídí dle jistého pravidla:

”Pokud směry průtoku Q a rychlosti v jdou v daném úseku stejným směrem, má rázová charakteristika kladné znaménko ($+R$). Jestliže jdou opačnými směry, je znaménko rázové charakteristiky záporné ($-R$).”



Obrázek 9: Znaménková konvence

Totální ráz

Při uzavření ventilu V dochází těsně za ním ke kumulaci částic kapaliny. Kumulace způsobí postupné zastavování pohybu částic kapaliny. Vlivem tohoto procesu se přemění kinetická energie w_k na energii deformační w_d . Automaticky dochází ke změnám tlaku, které se navyšují. Navyšení tlaku se dá určit za pomoci energetické rovnosti kinetické a deformační energie

$$w_k = w_d \quad (2.55)$$

Kinetická energie se vyjádří následovně

$$w_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot L \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V \cdot v_0^2 \quad (2.56)$$

Deformační energie je vyjádřena součinem síly, která působí na daný element, a délky elementu

$$w_d = \frac{1}{2} \cdot F \cdot \Delta x = \frac{1}{2} \cdot \Delta p \cdot S \cdot \Delta x = \frac{1}{2} \cdot \Delta p \cdot \Delta V \quad (2.57)$$

Dosazením do rovnosti (2.55) je získán výrazu

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \Delta p \cdot \Delta V$$

Upravením

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\rho \cdot v_0^2}{\Delta p} \quad (2.58)$$

Využití vztahu pro modul objemové pružnosti K (uvedený výše v rovnici (2.8))

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta p}{K} \quad (2.59)$$

Změna tlaku z rovnic (2.58), (2.59)

$$\Delta p = \sqrt{\rho \cdot v_0^2 \cdot K} = v_0 \cdot \sqrt{\rho \cdot K} = \rho \cdot v_0 \cdot \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \rho \cdot v_0 \cdot c = \Delta p_{tot}$$

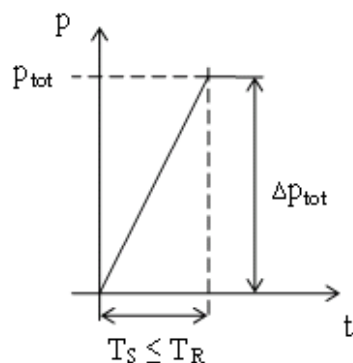
Je docíleno rovnice *ukovského* vyjadřující *totální (úplný) ráz* ve tvaru

$$\Delta p_{tot} = \rho \cdot v_0 \cdot c \quad (2.60)$$

Veškerá kinetická energie, která se zde objevila, se přemění v energii deformační. Zavádí se pojem *doba běhu rázové vlny* nebo-li *doba reflexe* T_R . V případě totálního rázu platí podmínka $T_S \leq T_R$, kde T_S je doba uzavěru ventilu V . Podmínka udává dobu reflexe větší nebo rovnu době uzavěru ventilu. Vyplývá z toho, že rázová vlna zpětná v čase $t = \frac{L}{c}$, dosáhne doby reflexe. Pokud je uvažováno odstupňované potrubí, tedy je v potrubním systému několik úseků i , $i = 1, 2, \dots, n$ je doba reflexe dána vztahem

$$T_R = 2 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{L_i}{x_i}$$

V reálném řešení potrubí se skutečnou kapalinou se při sebemenším uzavírání ventilu objeví rázové pulsace o jisté frekvenci $f = \frac{x}{4 \cdot L} = \frac{1}{2} \cdot T_R$. Rázové pulsace budou vlivem tření pohlcovány do okolí, především do materiálu potrubí. Díky tomu dojde ke snižování pulsace do doby než dojde k rovnovážnému (ustálenému) stavu.

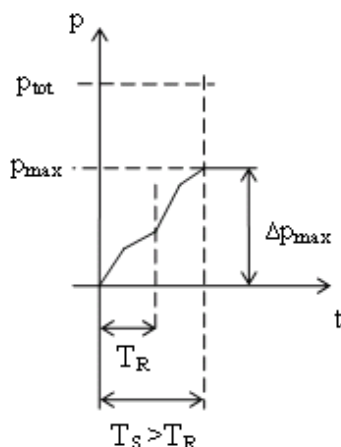


Obrázek 10: Změna tlaku při totálním rázu

Ve výzkumných centrech je úkolem stanovit maximální hodnoty tlaku, průtoku či rychlosti kapaliny. Veškeré získané hodnoty měřením jsou uvažovány na zmenšeném modelu potrubního systému nebo jiného vodního zařízení. Až po té jej projektant dimenzuje na reálný problém.

Řízený-částečný ráz

Pro částečný ráz platí podmínka $T_S \gg T_R$. obecně se uvádí doba uzávěru jako $T_S = i - T_R$, $i_{min} = \geq 4$. Podmínka uvádí skutečnost, že doba reflexe musí být mnohem menší nežli doba uzávěru ventilu. Požadavek je kladen na zpětnou tlakovou vlnu. Měla by se k ventilu dostat podstatně dříve nežli dojde k úplnému uzavření ventilu. Zpětná vlna nedovolí další zvýšení tlaku, tudíž tlak roste lineárně.



Obrázek 11: Změna tlaku při částečném-řízeném rázu

Z podmínky a uvedeného Obrázku 11 je patrné

$$\Delta p = \Delta p_{tot} \cdot \frac{T_R}{T_S} = \frac{c}{g} \cdot v_0 \cdot \frac{2 \cdot L}{c \cdot T_S} = 2 \cdot \frac{v_0 \cdot L}{g \cdot T_S} \quad (2.61)$$

Po vydělení počátečním tlakem p je docíleno vztahu pro tzv. *poměrné přechodové zvýšení tlaku* $\Delta \kappa$ odpovídající pružnému rázu. Vztah se nazývá *Michuadského vztah*

$$\Delta\kappa = \frac{\Delta p}{p} = 2 \cdot \frac{v_0 \cdot L}{g \cdot T_S} \cdot \frac{1}{p} = 2 \cdot \frac{T_W}{T_S} \quad (2.62)$$

kde T_W je přechodové zvýšení tlaku odpovídající nepružnému rázu dáno ve tvaru

$$T_W = \frac{v_0 \cdot L}{g \cdot p} = \frac{Q_0 \cdot L}{g \cdot p \cdot S} \quad (2.63)$$

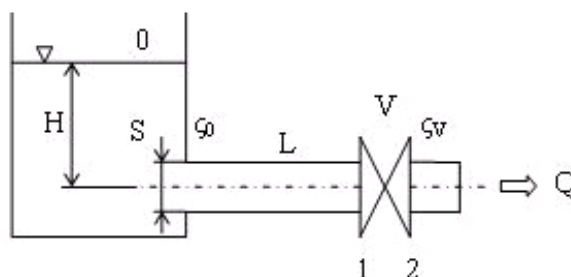
Více používaným a přesnějším vztahem je vztah dle Alliého

$$\Delta\kappa = \frac{\Delta p}{p} = 0,5 \cdot \frac{T_W}{T_S} \cdot \left[\frac{T_W}{T_S} \pm \sqrt{\left(\frac{T_W}{T_S}\right)^2 + 4} \right] \quad (2.64)$$

Při úplném uzavření ventilu dochází k maximálnímu přechodovému zvýšení tlaku. Maximální tlak p_{max} je uvažován před ventilem směrem k nádrži N . Celý systém se pak dimenzuje na zkušební tlak

$$p_{zk} = (1,3 - 1,5) \cdot p_{min} \cot \quad (2.65)$$

Na příkladě bude uvedeno grafické řešení řízeného rázu. Je uvažována nádrž v níž je objem jisté kapaliny V_1 . Dále je uvažováno potrubí délky L na svém konci s ventilem V dle Obrázku 12. Pro jednoduchost bude bráno stacionární proudění, které má neměnnou rychlost proudění kapaliny, tudíž $v = konst..$ Souřadnicový systém je vztažen k ose ventilu.



Obrázek 12: Nádrž s potrubím délky L

Postupně je ventil uzavírán a je zkoumána výška hladiny společně s průtokem. V úseku $0 - 1$ se vychází z tzv. Bernoulliovy energetické rovnice, která je dána vztahem

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{v_0^2}{2} + g \cdot h_0 = \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + g \cdot h_1 + \int_1^0 a_t dx + Y_{Z0,1} \quad (2.66)$$

kde $\frac{p_0}{\rho}, \frac{p_1}{\rho}$ jsou tlakové energie, $\frac{v_0^2}{2}, \frac{v_1^2}{2}$ jsou kinetické energie, $g \cdot h_0, g \cdot h_1$ jsou potenciální energie, $\int_1^0 a_t dx$ je měrná energie na rozběhu nestacionárního proudění kapaliny. V tomto případě je rovna nule, jelikož je uvažováno stacionární proudění. A $Y_{Z0,1}$ je měrná ztrátová energie, která vychází z Weisbachova vztahu. Hydraulické ztráty jsou spojovány s kinetickou energií a jsou ve tvaru

$$Y_{Z0,1} = \zeta_C \cdot \frac{v^2}{2} = (\zeta_0 + \zeta_L) \cdot \frac{v^2}{2} \quad (2.67)$$

kde ζ_C je součet všech ztrátových činitelů na úseku 0 – 1, ζ_0 jsou ztráty na vstupu a ζ_L jsou třecí (délkové) ztráty dány vztahem

$$\zeta_L = \lambda \cdot \frac{L}{d} \quad (2.68)$$

λ je koeficient délkových ztrát, který bude popsán níže a d je průměr potrubí.

Nebude uvažován tlak p_0 jelikož na hladinu působí atmosférický tlak, který je vůči tlaku v potrubí zanedbatelný. Rychlost proudění kapaliny v_0 může být také zanedbána. Důvodem je pohyb hladiny k výtoku. Výtok má mnohonásobně menší plochu nežli hladina kapaliny. Tudíž ať proudí kapalina z výtoku sebevětší rychlostí, hladila kapalina se sníží o nepatrnou hodnotu. Po dosazení do rovnice (2.66)

$$g \cdot H = \frac{p}{\rho} + (\zeta_0 + \zeta_L) \cdot \frac{v^2}{2}$$

za rychlost proudění v z rovnice kontinuity se dosadí $v = \frac{Q}{S}$ a vyjádří se tlaku p

$$p = \rho \cdot g \cdot H - \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{S^2} \cdot \rho \cdot (1 + \zeta_0 + \zeta_L)$$

Výraz $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{S^2} \cdot \rho \cdot (1 + \zeta_0 + \zeta_L)$ je označen jako konstanta k_1 , pak

$$p = \rho \cdot g \cdot H - k_1 \cdot Q^2 \quad (2.69)$$

Průtok Q lze vyjádřit pomocí výtoku kapaliny z nádrže ve tvaru

$$Q = \mu_0 \cdot S \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H} = \mu_0 \cdot S \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \frac{p}{\rho \cdot g}} = \mu_0 \cdot S \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot p}{\rho}} \quad (2.70)$$

kde μ_0 je výtokový součinitel daný vztahem

$$\mu_0 = \varphi \cdot \alpha \quad (2.71)$$

Při vypouštění kapaliny z nádrže kapalina zaujme celý průřez S . Ovšem při opuštění kapaliny se proud kapaliny zúží vlivem kontrakce na hodnotu S_0 . *Součinitele kontrakce* α je dán tvarem

$$\alpha = \frac{S_0}{S} \quad (2.72)$$

Výraz φ je rychlostní součinitel jenž je závislý nejen na Reynoldsově čísle, ale i na tvaru otvoru (kruhový, čtvercový, ...). Vyjadřuje se za pomoci ztrátového součinitele takto

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{1 + \zeta_C}} \quad (2.73)$$

Provedením další Bernoulliovy rovnice, nyní v úseku 1 – 2

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + Y_{Z1,2}$$

Neuvažuje se zde potenciální energie jelikož výšky h_1, h_2 jsou ve stejném místě, výšce a v souřadném systému jsou na nulové hladině. Rychlost v_1 je stejná jako rychlost v_2 , protože potrubí má konstantní průměr. Z toho vyplývá, že $v = konst..$ Tlak p_2 je roven

atmosférickému tlaku tudíž je opět zanedbán. Ztráty $Y_{Z1,2} = \zeta_V \cdot \frac{v^2}{2}$. Po dosazení je obdrženo

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \frac{v^2}{2} + \zeta_V \cdot \frac{v^2}{2}$$

Po úpravách a dosazení opět za v z rovnice kontinuity vyplývá

$$\frac{p}{\rho} = \zeta_V \cdot \frac{Q^2}{2 \cdot S^2} \Rightarrow Q = \text{sqr}t{\frac{2}{\rho}} \cdot p \cdot \frac{1}{\zeta_V \cdot S^2} \quad (2.74)$$

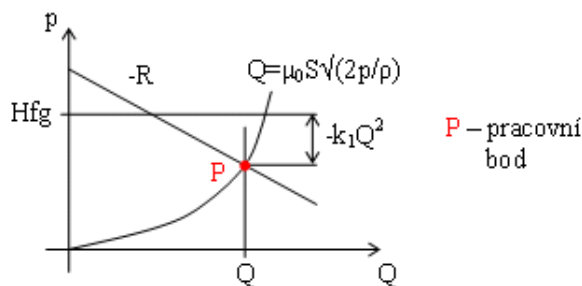
Po porovnání s rovnicí (2.70)

$$\mu_0 \cdot S \cdot \text{sqr}t{\frac{2 \cdot p}{\rho}} = \text{sqr}t{\frac{2}{\rho}} \cdot p \cdot \frac{1}{\zeta_V} \cdot S^2$$

konečný tvar výtokového součinitele je

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{1}{\zeta_V}} \quad (2.75)$$

Po dosazení do $p - Q$ diagramu



Obrázek 13: Závislost $p-Q$

Názornějším diagramem je tzv. K_V charakteristika ventilu, která vychází ze vztahů

$$\frac{\Delta p}{\rho} = R \cdot Q^2 \Rightarrow R = \frac{\Delta p}{\rho \cdot Q^2} \quad (2.76)$$

$$\frac{\Delta p_R}{\rho_R} = R \cdot K_V^2 \Rightarrow R = \frac{\Delta p_R}{\rho_R \cdot K_V^2} \quad (2.77)$$

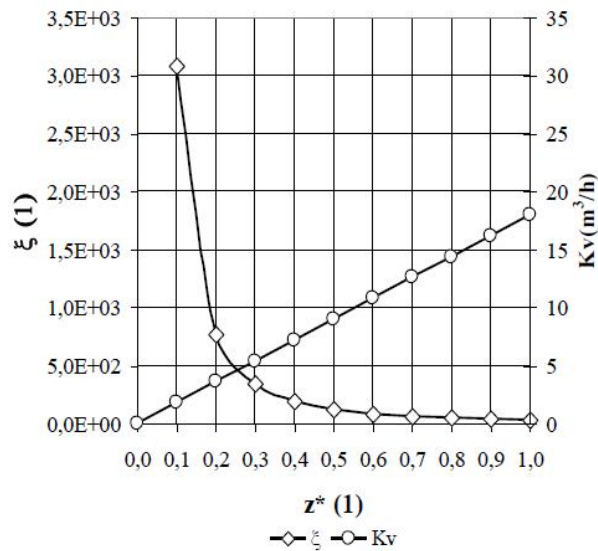
kde Δp_R je referenční tlak 1 bar, ρ_R je referenční hustota vody = $1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a K_V je průtokový součinitel v $\text{m}^3 \cdot \text{hod}^{-1}$ danou armaturou při tlakovém spádu 1 bar
Po porovnání lze vidět

$$K_V = \sqrt{\frac{\Delta p_R}{\rho_R} \cdot \frac{\rho}{\Delta p}} \cdot Q \quad (2.78)$$

V odborných literaturách se často uvádí vztah

$$K_V = \sqrt{\frac{\rho}{\Delta p}} \cdot Q \cdot N \quad (2.79)$$

kde $N = 3600 \text{mhod}^{-1}$



Obrázek 14: K_v charakteristika ventilu, kde z^* je otevření ventilu ($0 =$ zavřeno, $1 =$ plně otevřeno)

Koeficient délkových ztrát λ

Koeficient délkových ztrát závisí na Reynoldsově čísle Re , které je dáno ve tvaru

$$Re = \frac{v_S \cdot d_H}{\nu} \quad (2.80)$$

v_S je střední rychlost, d_H je hydraulický průměr potrubí dán

$$d_H = \frac{4 \cdot S}{o} \quad (2.81)$$

kde S je průřez potrubí a o je obvod potrubí. Člen ν je kinematická viskozita kapaliny. Kinematická viskozita je uměle zavedená veličina, která závisí na teplotě a je dána vztahem

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (2.82)$$

kde η je dynamická viskozita kapaliny, která závisí na stavových veličinách jako jsou tlak a teplota. Tlak na ni má zanedbatelný vliv, ale s rostoucí teplotou dynamická viskozita klesá. Dá se pouze měřit, tudíž se stanovuje experimentálně.

Kritickou hodnotou Re_K je určeno, zda se jedná o laminární či turbulentní proudění.

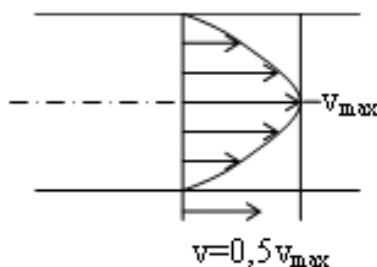
Laminární proudění (*lamina = vrstva*)

Částice kapaliny se po sobě pouze šinou, třou. Vlivem tření dochází k prokluzování částic. Pohybují se ve vrstvách a nepřemísťují se napříč průřezem. Částice kapaliny se

nemísí a vzniklý tečný účinek od smykového napětí τ na stěně potrubí je způsoben pouze dynamickou viskozitou kapaliny η . Je dán vztahem

$$\tau = \eta \cdot \frac{dv}{dr} \quad (2.83)$$

ke dv je změna rychlosti proudění a dr je změna poloměru potrubí. Rychlostní profil je tvarově podobný rotačnímu paraboloidu.



Obrázek 15: Rychlostní profil laminárního proudění

Pro tento druh proudění platí

$$Re \leq Re_K \quad (2.84)$$

Koeficient tření λ se zde určí dle vztahu

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (2.85)$$

Turbulentní proudění

Při tomto druhu proudění částice kapaliny mají nejen postupovou rychlost v , ale navíc ještě turbulentní (flukтуаční) složku rychlosti v' . Tato turbulentní rychlost mění v závislosti na čase svou velikost i směr. Turbulentní proudění má neuspořádaný "chaotický" tok částic kapaliny. Jeho rychlostní profil se tvarem blíží profilu skutečné kapaliny. Dochází zde k intenzivnímu mísení částic kapaliny. Částice přecházejí neustále z vrstev s vyššími rychlostmi do vrstev s nižšími rychlostmi a naopak. Částice si nevyměňují pouze svoji rychlost, ale i hybnost. Díky tomu dochází k brzdným účinkům, které jsou způsobeny tečným napětím od viskozity kapaliny. U turbulentního proudění tedy značně roste odpor proti pohybu kapaliny.

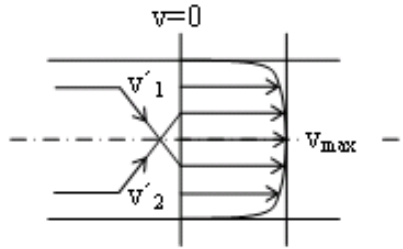
Pro turbulentní proudění platí

$$Re > Re_K \quad (2.86)$$

Jsou zde zavedeny tři režimy proudění:

1. režim: *Proudění v hydraulicky hladkém potrubí*

Závisí na $Re < 8 \cdot 10^4$. Pak λ je dáno podle Konakova



Obrázek 16: Rychlostní profil turbulentního proudění

$$\lambda = \frac{1}{(1,8 \cdot \log Re - 1,5)^2} \quad (2.87)$$

2. režim: Proudění v přechodové oblasti

Tato oblast závisí nejen na Re , ale ještě na relativní drsnosti k_r , která je dána vztahem

$$k_r = \frac{k}{d} \quad (2.88)$$

kde, k je střední výška nerovností v milimetrech a d je průměr potrubí. Výška nerovnosti je závislá na materiálu potrubí a je dohledatelná v tabulkách, např.:

Potrubí	Kvalita vnitřních stěn	k [mm]
ocelové	nové, vyčištěné a natřené	0,1
	částečně zrezavělé	0,35 - 0,4
	zrezavělé (po delším provozu)	1,2 - 3,0
Litinové	nové	0,5 - 1,0
	částečně zrezavělé	1,0 - 3,0
Betonové	z kvádrů dobře vyspárovaných	1,2 - 2,5
	neopracované (dřevěné bednění)	1,5 - 3(10)

Tabulka 1: Tabulka materiálových charakteristik

Pro určení λ se zde používá vztahu dle Altšula

$$\lambda = \left[-1,8 \cdot \log \left(\frac{k_r}{10} + \frac{7}{Re} \right) \right]^{-2} \quad (2.89)$$

3. režim: Proudění v hydraulicky drsném potrubí

U tohoto typu záležitosti pouze a jenom na relativní drsnosti k_r , jejíž vztah je uveden v rovnici (2.88).

Po té λ je získáno podle Nikuradzeho ve tvaru

$$\lambda = \left(1,14 + 2 \cdot \log \frac{1}{k_r} \right)^{-2} \quad (2.90)$$

Druhy proudění popisuje tzv. Nikuradzeho diagram

2.2 Software

K řešení diferenciálních rovnic rázu je možné využít různých softwarů. Tyto softwary se liší formou zpracování vkládaných dat. Software volíme dle problematiky, kterou chceme řešit. Níže jsou uvedeny příklady vybraných softwarů:

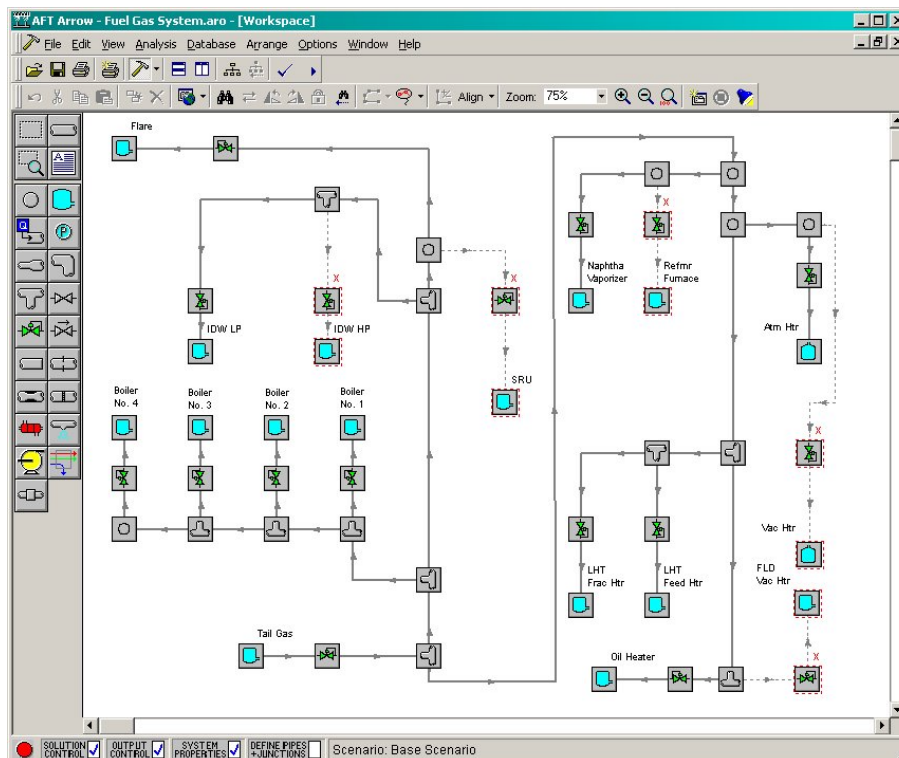
2.2.1 AFT Arrow

Poskytuje komplexní analýzu stlačitelného proudění v trubici. Je zde možnost modelování systémů v kombinaci s jednoduchostí k použití. AFT Arrow obsahuje knihovnu kapalin, proměnný modul konfigurace, řídicí ventil a mnohem víc. Jeho dostupná rozšířená analýza a návrh obsahuje např. tepelně fyzikální databázi o přibližně 600 plynech. Software má schopnost teplotní analýzy včetně teplotního přenosu potrubím, umí namodelovat teplotní výměník atd.

Využívá řešení za pomoci osvědčených maticových řešení rovnic pro proudění v trubici. Mezi jeho výhody patří schopnost řešit problém za jakýchkoliv podmínek (adiabatických, izotermických aj.) a zvukového utěsnění.

Umožní nejen průtokovou analýzu ale i samotné namodelování potrubního systému. Dají se zde nastavit vlastnosti ventilů, tekutin, křivky kompresorů a mnohem více. Ve své podstatě celý reálný potrubní systém sem lze zanést včetně přesných simulací jednotlivých komponentů systému s jejich vzájemnou působností.

Samotné prostředí pro tvorbu simulace je příjemné a přehledné, což dokazuje přiložený obrázek.



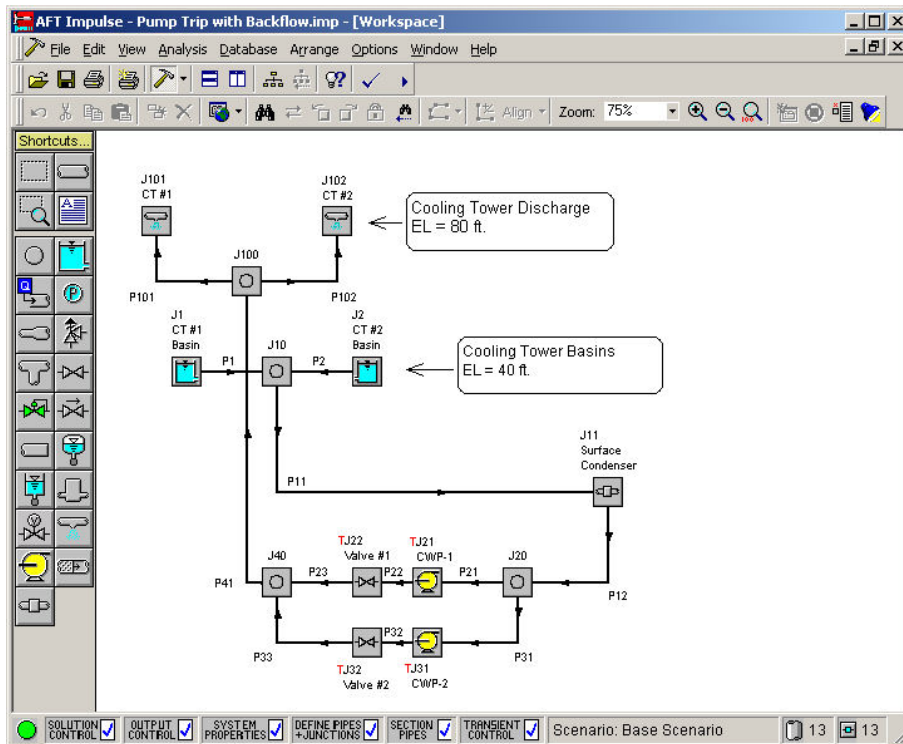
Obrázek 18: Pracovní prostředí v AFT Arrow [1]

2.2.2 AFT Impulse

Analýza vodního rázu byla v minulosti proslulá pro své obtížné použití a žádoucí rozsáhlé specializované znalosti techniků. Z toho důvodu byla tato metoda přehlížena. V nynější době nabízí už mnohem snadnější využití a nejen to. Umožňuje navrhování a řízení systému s větší spolehlivostí a odstraňuje nebezpečné katastrofické efekty rázu.

Software je vybaven nástroji pro návrh a analýzu vodního rázu v systému, který obsahuje vodu, ropné či chemické produkty, chladiva aj. Nalezneme zde nástroje schopné modelování události včetně různých zařízení na ochranu proti přepětí. Má vestavěnou knihovnu tekutin, kování, čerpadel atd. V rámci jednoho modelu je možné měnit jakékoliv parametry modelování. Pracuje na tradiční metodě charakteristik, která řeší přechodovou hmotu a rovnici hybnosti proudění v trubici. Tento software je schopný řešit náročné konstrukční problémy. V nejnovějších verzích je možnost potrubní systémy navrhovat a analyzovat dynamicky.

Pracovní prostředí je velice obdobné jako u předchozího.



Obrázek 19: Pracovní prostředí v AFT Impuls [1]

2.2.3 Dynsip

Program Dynsip je určen pro simulaci hydrodynamických dějů v systému přiváděče s Francisovými turbínami. Autory jsou Doc. Ing. Ondřej Debreczeni, CSc. společně s Ing. Petrem Ševčíkem.

Obecně se jedná o MIDI program. Lze v něm tedy otevřít více dokumentů současně. Kompilace a odladění probíhá v operačním systému Windows XP. Pro spuštění je možné použít i nižší verze operačních systémů jako např. Windows NT, Windows 2002,

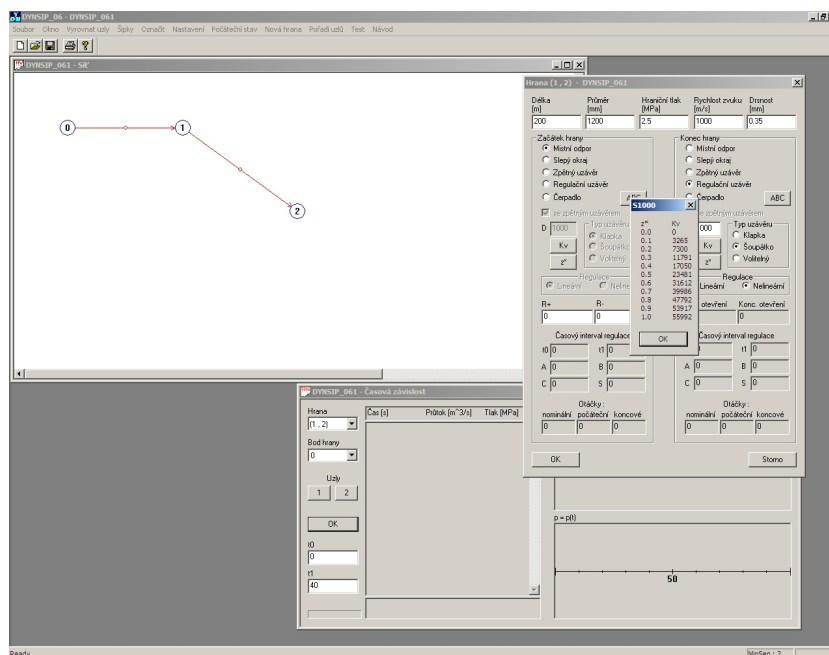
Tento program umí namodelovat vodní ráz v sítích. Obsahuje knihovnu základních prvků jako jsou čerpadla, větrníky, ventily apod., které se dají nemodifikovat dle požadavků.

Prostředí ve kterém se pracuje je zobrazeno jako orientovaný graf, který obsahuje např. potrubí. Ty jsou v tomto programu uvažovány jako hrany. Jejich směr je orientován kladně ve směru průtoku. Dalším jsou místa, ve kterých se potrubí větví. Tato místa jsou zobrazována jako uzly.

Při jednorozměrném proudění jsou stavy v programu Dynsip popsány pomocí dvou diferenciálních rovnic. Jednou z nich je rovnice pohybové rovnováhy a druhou rovnice kontinuity. Dynsip využívá metodu konečných diferencí. Jako diskretizační síť využívá metodu charakteristik.

V České republice je program Dynsip nejvyužívanějším softwarem pro řešení různých problematik v potrubních sítích. Z uživatelského pohledu je velice snadným a ověřeným softwarem.

Další z možností je použití softwaru Matlab. Je to také jisté dostačující řešení. Ovšem problémem je finanční stránka. Je zapotřebí si dokoupit jistou sadu balíčků, díky nimž lze řešit různé potrubní systémy. Dají se díky tomuto rozšířenému softwaru namodelovat různé situace. Balíčky obsahují různé knihovny větrníků, vyrovnávacích komor atd. Jediným, ovšem nepřehlédnutelným hlediskem je cena těchto balíčků. Při jejich koupi je možné, že cena přesáhne 250 000 Kč. Při srovnání ceny a možností softwaru je zřejmé, že se nebude jednat o nejlevnější alternativu.



Obrázek 20: Pracovní prostředí v Dynsip

3 Výskyt a eliminace v praxi

3.1 Výskyt vodního rázu

Vodní ráz lze nalézt v jakýchkoliv vodovodních tratích, potrubních řadech, vodních elektrárnách či v běžné domácnosti. Vodní ráz má z velké části negativní nežli pozitivní účinek. Snahou je ho co možná nejvíce eliminovat. Jeho úplná eliminace, ale bohužel není možná.

Výskyt vodního rázu je možné sledovat např. u vodních turbín, kde dochází k vysokým tlakům. Tyto vysoké tlaky turbíny ničí a zhoršují jejich funkčnost. Další výskyt je možný zaznamenat v čerpacích stanicích. Lze jej pozorovat i v domácnostech např. při uzavírání kohoutku vodovodního potrubí.

Potrubí, kde se vodní ráz vyskytuje, je potřebné nadimenzovat na dostatečnou hodnotu. Tato hodnota ale není rovna hodnotě maximálního tlaku, nýbrž hodnotě mnohonásobně vyšší. Pokud je potrubí nesprávně nadimenzované, může dojít i k jeho úplnému zborcení nebo roztrhnutí. O správné nadimenzování potrubí se starají projektanti různých společností. Tito projektanti si skutečný problém přenesou na zmenšený model, který řeší. Po jeho vyřešení stanoví kritéria, která na daný problém aplikují.

3.2 Příčiny vodního rázu v praxi

Jednou z možných příčin je rychlé spuštění či vypnutí čerpadla. Rychlé spuštění čerpadla vede k pádu volných prostor, které se vyskytují po směru proudu. Pád volných prostor si lze představit jako zborcení potrubí po směru proudění kapaliny. Kapalina po spuštění čerpadla opustí prostor, čímž vznikne volný prostor a v něm podtlak. Tento podtlak je natolik velký, že dojde k pádu, zborcení tohoto volného prostoru. Naopak rychlé vypnutí čerpadla vytvoří rychlou změnu průtoku, čímž dojde k poklesu tlaku. Na straně sání dochází k vzestupu tlaku a na výtlačné straně dochází k poklesu tlaku a to až na tlak nasycených par. Tyhle tlakové rozdíly vyvolají vodní ráz.

Další možností vzniku je putování tzv. vzduchové kapsy v potrubí. Vzduch je stlačitelný, tudíž pracuje ve své podstatě jako pružina. Jeho kompresí a expanzí kolísá hodnota tlaku. Jestliže je toto kolísání příliš velké, dochází k vodnímu rázu.

3.3 Ochrany proti rázu

Vodnímu rázu je možné předcházet několika způsoby. Jednou z nich je např. snížení rychlosti proudění kapaliny. Tohoto typu ochrany se využívá, pokud má ráz být zachován v intervalu nízkých hodnot. Snížení rychlosti kapaliny se provádí za pomoci tzv. synchronního ventilu. Tento druh ochrany se využívá u turbín, kde je synchronní ventil paralelně připojen k turbíně. Jedná se o pomalé, synchronní uzavírání ventilu. Jakmile se uzavře, odstaví turbína, synchronní ventil se do několika sekund musí otevřít. Dojde tam tedy ke snížení tlaku, pod maximální dovolenou hodnotu. Stejného principu se využívá i u vodních elektráren. Ovšem tam se nevyužívá synchronních ventilů, nýbrž tzv. programové uzavírání, které funguje na obdobném principu.

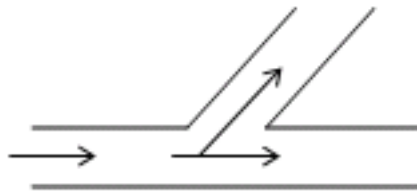
Jednou z dalších možností jsou kuželové uzávěry. Ty se využívají v čerpacích stanicích nebo ve větrnicích, kde "brzdí" vodní sloupec. Nechají vodní sloupec volně proudit, doběhnout v potrubním systému.

U turbín je jednou z možných ochran dimenzování turbíny i generátoru na vysoké otáčky. Tyto otáčky jsou vyšší, obvykle dvojnásobné, než-li samotné provozní otáčky. Snížení tlaku se provádí tím způsobem, že se turbína nechá pracovat na zvýšené otáčky a pomale se začne uzavírat. Postupně se tedy snižuje tlak a to vede k pomalému snižování rázu.

Další možnost ochrany je pomalé uzavírání ventilu, což ovšem není zcela ideálním řešením. Je velice pravděpodobné, že k vymizení rázu by v tomto případě bylo zapotřebí nekonečného času. Proto v běžné praxi tento druh ochrany není příliš vhodnou volbou. Mezi nejčastěji využívané ochrany patří větrníky, vyrovnávací komory, vzdušníky, výtoky přepadem aj.. Volba ochrany je podmíněna druhem používaného systému, který je řešen. Je zapotřebí zvažovat druh armatur, délku potrubí atd.

3.3.1 Obtok

Obtok je možné si představit jako "odbočku" v potrubním systému. Jednosměrný tok je za pomoci obtoku rozvětven do více postraních větví. Díky tomu dojde ke snížení tlaku, tudíž dojde ke zmírnění rázu.



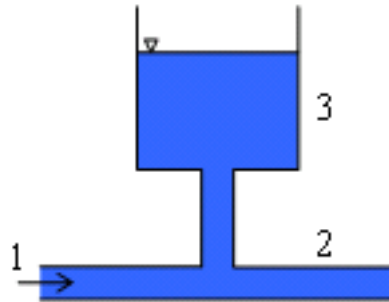
Obrázek 21: *Obtok*

3.3.2 Vyrovnávací komora

Tento druh ochrany je využíván u vysokospádových vodních elektráren. Jedná se o nádrž s kapalinou, která je otevřená do atmosféry a připojena k tlakovému potrubí. Vyrovnávací komory mohou být připojeny různými způsoby. Také je možné volit ze široké škály druhů např. dle tvaru či svých specifických úprav. Pokud by měla být vyrovnávací komora hodnocena z ekonomického hlediska, je nutné konstatovat, že se nejedná o zcela nejvhodnější řešení. Vyplatí se ji použít tam, kde se nachází potrubí s malým tlakem, např. v horní nádrži čerpací stanice nebo tam, kde je použita jako svahové potrubí.

Při průběhu rázu ve vyrovnávací komoře kolísá výška hladiny kapaliny, což ovlivňuje tlak v potrubí. Tlak v potrubí díky vyrovnávací komoře poklesne a tím se ráz utlumí.

Obvykle jsou vyrovnávací komory vyrobeny z oceli a musejí splňovat velmi přísné bezpečnostní požadavky.



Obrázek 22: *Vyrovňovací komora*

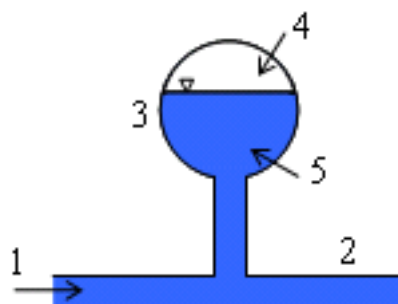
- 1 - směr průtoku
- 2 - potrubí
- 3 - vyrovnávací komora

3.3.3 Větrník

Jedná se o tlakovou nádobu, která je z části naplněná plynem (obvykle vzduch) a z části kapalinou. Větrník bývá umístěn na konci potrubního systému. Jeho činnost je založena na expanzi a kompresi plynu v jeho horní části.

Pokud tlak v potrubí poklesne, dojde k expanzi plynu a kapalina ze spodní části větrníku proudí do potrubí. Naopak, jestliže tlak v potrubí vzroste, plyn ve větrníku se stlačí, tudíž dojde ke kompresi a výška hladiny ve větrníku stoupne. Jeho správnou funkci ovlivňuje dostatečné nadimenzování, tj. nadimenzování na množství plynu ve větrníku.

Nežádoucí je proniknutí plynu z větrníku do potrubí. V případě, že plyn z větrníku unikne do potrubí, dojde k rapidnímu navýšení oscilací tlaku. V důsledku této skutečnosti dojde ke ztrátě správné funkčnosti větrníku.



Obrázek 23: *Větrník*

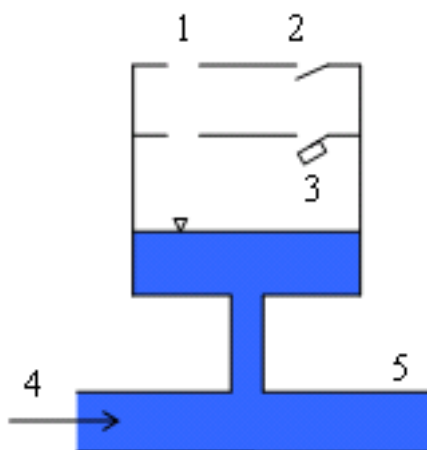
- 1 - směr průtoku
- 2 - potrubí
- 3 - větrník
- 4 - plyn
- 5 - kapaliny

3.3.4 Vzdušník

Jedná se o komoru, která je spodní částí připojena na potrubí. Vrchní část je dvěma způsoby spojená s ovzduším. První způsob označuje otvor č. 1, který je přímo otevřen do ovzduší. Druhý způsob označuje otvor č. 2, jenž je pohyblivý přes zpětnou klapku. Tato klapka způsobuje proudění vzduchu do vzdušníku, ale zabraňuje mu vrátit se zpět. Společně s těmito otvory je současně v horní části horizontální přepážka č. 3 doplněná o klapku s plovákem. Klapka s plovákem na rozdíl od zpětné klapky umožňuje proudění vzduchu oběma směry. K jejímu uzavření dojde, jestliže se prostor pod přepážkou naplní kapalinou. Vše naznačuje níže uvedený obrázek obrázek 24.

Činnost vzdušníku lze popsat následujícím způsobem:

Počáteční stav, otvor č. 2 je otevřen, otvor č. 3 uzavřen a prostor pod přepážkou zcela zaplněn kapalinou. Jakmile tlak ve vzdušníku klesne, unikne kapalina, otvor č. 3 se otevře a dojde k volnému proudění vzduchu pod přepážkou. Tento vniklý vzduch udržuje ve vzdušníku stálý tlak. V okamžiku, kdy začne proudit kapalina nazpět do vzdušníku, otvor č. 2 se uzavře a vzduch ve vzdušníku se stlačuje, ale současně také uniká otvorem č. 1. Stav trvá tak dlouho, dokud tlak ve vzdušníku opět nepoklesne a nedojde k otevření otvoru č. 2.

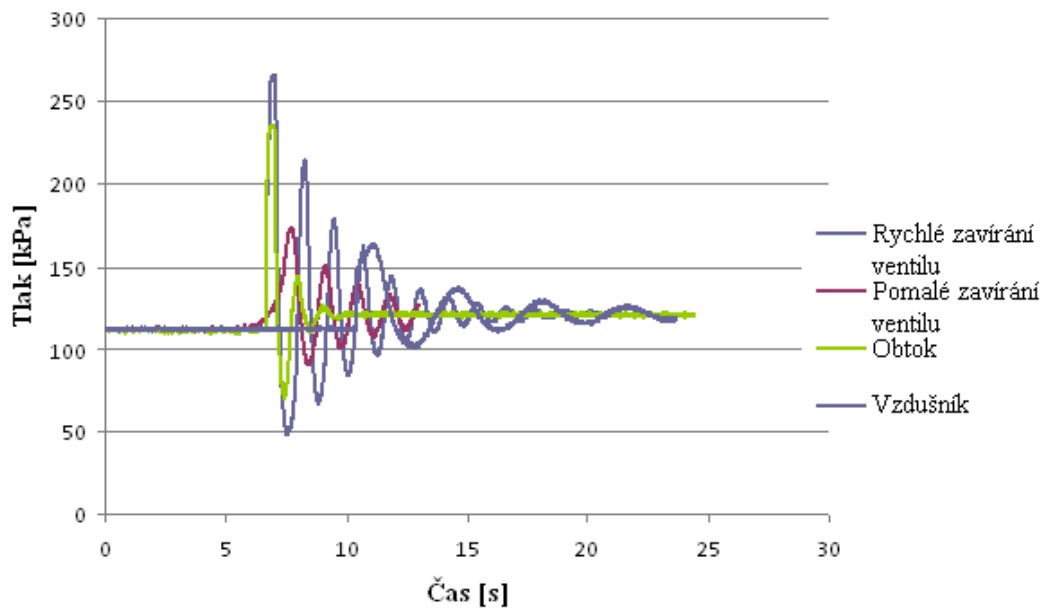


Obrázek 24: Vzdušník

- 1 - otvor do atmosféry
- 2 - otvor do atmosféry s klapkou
- 3 - otvor s klapkou
- 4 - směr průtoku
- 5 - potrubí

Nastínění různých druhů ochran popisuje uvedený obrázek 25 níže. Jedná se o potrubní systém, který na svém konci má ventil. Postupně ventil uzavíráme. Uzavírání probíhá buďto rychle, kde dochází k prudkému zvýšení tlaku nebo pomale, kde navýšení tlaku není tak patrné. Po sléze se před ventil přidávala vyrovnávací komora, vzdušník, či obtok.

Měření probíhalo v časovém rozmezí 30 sekund. Snímání proběhlo danou dobu po časových intervalech 0,01s. Z grafu je patrné, že nelepší ochranou je pomalé zavírání či vzdušník, které nejlépe utlumí rázové vlny.

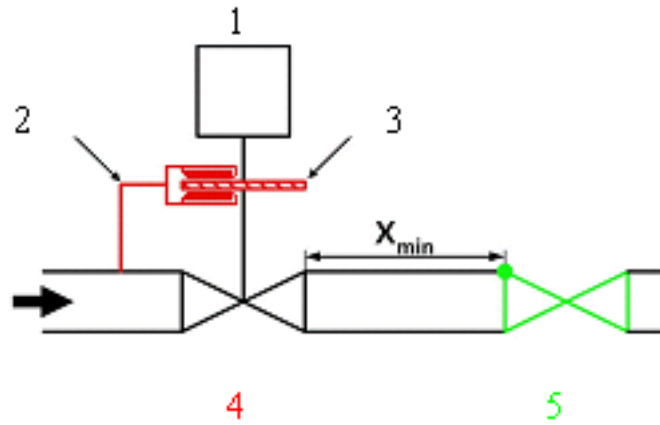


Obrázek 25: *Vliv různých ochran*

3.3.5 ABS-Armatur

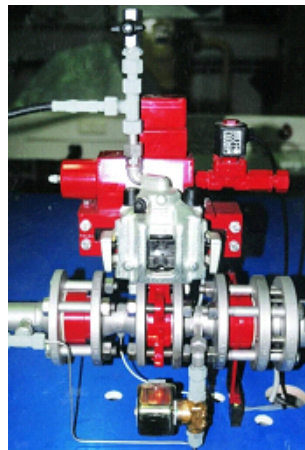
Umsicht v Oberhausenu společně s Forschungszentrum Rossendorf FZR vyvinul novou metodu k prevenci vodního rázu. Naměřené výsledky rychlosti proudění, tlaku, síly apod. v potrubním systému jsou porovnávány s předpokládanými výpočty softwarů. Tyto výsledky jsou po sléze použity k vyvíjení nových ochran proti vodnímu rázu. Metoda ABS-Armatur byla vyvinuta na již zabudovaných ventilech v potrubním systému. Uzavíratelné ventily jsou opatřeny hydraulickým brzdícím systémem. Tento systém využívá rotací os ventilů a skládá se z brzdových pedálů, brzdového disku a brzdového lanka. Celý tento systém je spojen s ventily. Brzdný buben hydraulického disku je propojen vrchní stranou s potrubím ventilu. Pokud tlak tekutiny vystoupá, aktivuje se tím brzda. Jestliže se tlak ještě navýší, uzavírací proces se zpomalí. Konečný tlak je omezen maximálním navoleným tlakem uživatele. Výhodou této ochrany je nezávislost na stavu proudění. Povolovaný maximální tlak omezí tlakové vlny a je nastaven mechanicky. Konečný tlak je pak optimalizován.

Uzavírání ventilu probíhá tak rychle, jak je to jen možné, ovšem nedojde k překročení maximální hodnoty nastaveného tlaku. ABS-Armatur nepotřebuje žádný vedlejší zdroj energie. Je schopný se přizpůsobit změnám potrubního systému, jako jsou např. změny délek potrubí, rychlosti proudění v potrubí atd. .



Obrázek 26: Schéma ABS armatury s přídavným ventilem [1]

- 1 - ventil převodovky
- 2 - brzdové potrubí
- 3 - brzdový kotouč
- 4 - zavírací ventil
- 5 - dodatečný ventil



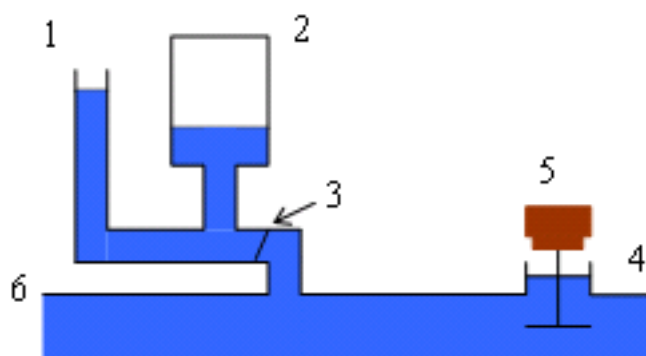
Obrázek 27: Prototyp ABS armatury [1]

4 Využití hydraulického rázu

4.1 Vodní trkač

Vodní trkač byl poprvé zkonstruován v 18. století francouzským vynálezcem Josephem Montgolfierem. Jedná se o zařízení pracující na principu jednoduchého vodního čerpadla. Principem je využití kinetické energie proudící vody, která je v pravidelných intervalech uzavírána za pomoci trkacího ventilu. V důsledku toho vznikne vodní ráz, jenž čerpá vodu přes výtlačný ventil. Výška načerpané hladiny je mnohem výše nežli výška hladiny vody, která vodní trkač pohání.

Vodní trkač může být mnohem složitěji řešený. Je možné jej využít například v chatových oblastech. Zde se čerpá pitná voda z míst níže položených než-li se samotná chata nalézá.



Obrázek 28: Vodní trkač

Popis schematu trkače:

1. výtlačné potrubí
2. tlaková nádoba
3. výtlačný ventil
4. výtokový otvor
5. trkací ventil
6. přívodní potrubí

Trkací ventil je zatěžován závažím a uzavírá výtokový otvor. Pokud je překonán tlak vody ventil se otevře. Po určité době rychlost vody vystoupá natolik, že dojde ke zpětnému uzavření ventilu. Tato skutečnost vyvolá zvýšení tlaku v potrubí, čímž vznikne ráz. Tento tlak ve výtlačném potrubí přesáhne tlak vody. Vlivem toho se otevře výtlačný ventil a projde nepatrné množství vody do potrubí. Výtlačný ventil se začne uzavírat jakmile dojde k odeznívání rázu a trkací ventil se naopak začne otevírat. Tento cyklus se neustále opakuje a čerpá vodu do potrubí. Těsně za výtlačný ventil se často umísťuje tlaková nádoba, která v sobě má stlačený vzduch. Tato nádoba slouží k tlumení rázu ve výtlačném potrubí. Obvykle bývá nazývána hruškou.



Obrázek 29: *Rozdělaný trkač*

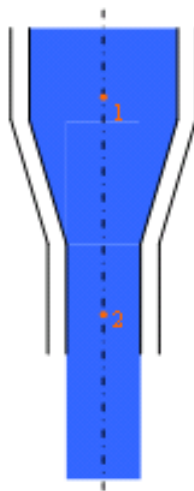


Obrázek 30: *Trkač v provozu*

4.2 Řezání vodním paprskem

Tato technologie odebírání materiálu je založena na mechanicko-fyzikálních principech. Dochází zde k odebírání částeczek materiálu působením dopadajícího kapalinového paprsku. Tento paprskem má vysoký tlak a je soustředěn na velice malou plošku materiálu. Způsob odebírání částeczek se nazývá crochipping. Technologie využívá jediný nástroj a je velice univerzální. Dá se aplikovat na řezání, vrtání, frézování, odstraňování rzi, soustružení atd. Obrovskou výhodou při použití této technologie je, že materiál v místě řezu netrpí tepelnou ovlivnitelností. Struktura materiálu tedy zůstává netknuta, tudíž nevznikají zbytková pnutí jako např. při obvyklém řezání materiálu.

Z výše uvedeného postupu lze vidět, že vodní ráz je jedním z velice využívaných principů této technologie.



Obrázek 31: *Tryska*

Na Obrázku 31 lze vidět náznak modulace paprsku tryskou. V místě 2 je mnohonásobně vyšší tlak. Tento tlak, jakožto impuls, působí na materiál. Využívá se zde změna rychlosti proudění kapaliny tryskou. Změny rychlosti způsobí spojování rychlejších částic s pomalejšími, které společně vytvoří v modulovaném paprsku shluky kapaliny. Tyto shluky kapaliny se v jisté vzdálenosti od trysky od sebe oddělují a samostatně, jako impulsy, působí na materiál. Za působení těchto impulsů dochází k oddělování částic materiálu.

Účinky paprsku jsou závislé na vzdálenosti trysky od daného materiálu. Frekvence modulovaného paprsku odpovídá frekvenci zatěžovací frekvence.



Obrázek 32: Ukázka řezání sendvičového materiálu [8]

Ke generování impulsů se využívají magnetostrikční, piezoelektrické a ultrazvukové měniče. Nejvýhodnějším použitím jsou ultrazvukové měniče, z důvodu možnosti nastavení požadované frekvence a amplitudy modulace paprsku.

Výhody:

- nedochází k tepelnému ovlivnění materiálu, jedná se o tzv. studený řez
- univerzální použití pro libovolné materiály a jejich tloušťky
- lze řezat i velmi těžko obrobitelné materiály
- vysoká přesnost
- konečný tvar materiálu není nutné dále opracovávat, např. srážet hrany

Nevýhody:

- nutný kontakt s vodou
- kontakt s abrazivním materiálem, čímž dochází k rychlé povrchové korozi či dlouhé vysoušení u nasákových materiálů atd.
- výroba malých dílů značně omezena
- u silnějších materiálu může dojít vlivem výběhu paprsku k deformaci kontury řezu

4.3 Gibsonova metoda

Gibsonova metoda často přezdívaná jako metoda tlak-čas využívá ke svému řešení hydraulického rázu. Za pomoci této metody lze měřit průtok a je postavena na Newto-

nově zákonu a na odvozených zákonech hydromechaniky. Tyto zákony vyvozují vztahy mezi silově vyvolanou změnou rozdílu tlaku mezi dvěma průřezy a zrychlením či zpomalením vody mezi nimi. Zrychlení či zpomalení vody je způsobeno pohybem uzávěru. Její nejčastější využití lze najít v případě uzavírání průtoku při turbínovém provozu.

Průběh tlakové vlny numerickým nebo grafickým záznamem se získá plynulým postupným uzavíráním uzávěru. Změna tlaku mezi dvěma průřezy se pak získá měřením integrovaným podél časové osy.

Gibsonova metoda má několik variant, které se mezi sebou liší. Jejich odlišnost je dána přístrojovým vybavením, výpočetní technikou integrace tlak-čas či používáním diferenčních či jednotlivých záznamů.

Jednou z variant je metoda diferenčního diagramu. Při této variantě se zaznamenává změna diferenčního tlaku ve vymezeném úseku měření. Změny jsou způsobeny třením a hybností. Po zablokování uzávěru se čeká až dojde k ustálenému stavu. Za pomoci postupného uzavírání uzávěru a časovou změnou diferenčního tlaku je vykreslen diagram tlak-čas. Než-li dojde k samotnému měření, musí se měřicí systém kalibrovat. Mezi nejstarší přístroje k měření se řadí Gibsonův přístroj nebo-li diferenční tlakový rtuťový tlakoměr. Zaznamenává za pomoci fotografického pohybu rtuťového sloupce v U-trubici. Další možností je diferenční převodník. Diferenční převodníky jsou mnohem přesnější a umožňují ke svému výpočtu užít i počítač.

Další z variant je metoda samostatných diagramů. Touto metodou se zaznamenávají pouze samotné změny tlaku na daném úseku. Pokud není napojená vyrovnávací komora, lze použít měření pouze na jedné straně úseku. Způsobem měření je obdobný jako u metody diferenčního diagramu.

Pokud chce uživatel využít Gibsonovu metodu k řešení svého problému, musí dodržet jisté podmínky. Jednou z nich je, že v oblasti měřeného úseku nesmí být žádná volná hladina. Další je např. že snímač diferenčního tlaku musí být umístěn přibližně ve stejných vzdálenostech k odběru tlaku po proudu i proti proudu.

5 Závěr

Tato práce je zaměřena na teorii a ucelení informací o hydraulickém rázu. Jedním z cílů práce bylo představení různých metod řešení. Z rešerže vyplývá, že je nejvýhodnějším řešením numerická metoda charakteristik. Z praktického hlediska se jedná o metodu, která svými možnostmi splňuje nároky na rychlé řešení. Mezi její nezanedbatelné klady patří také její spolehlivost. Jestliže tuto metodu budeme hodnotit z hlediska přesnosti, je nutné ji také zařadit do kategorie těch spolehlivých.

Další část práce byla věnována výstkytům rázu a ochranám proti němu. Práce ukazuje, že hydraulické rázy se vyskytují v širokém okolí. Tím je zřejmé, že každý potrubní systém v našem okolí je hydraulickému rázu vystaven a tudíž mu musíme předcházet.

Při řešení hydraulického rázu je možné postupovat několika způsoby. Z výše jmenovaných ochran proti rázu je dle mého názoru nejúčinnější vyrovnávací komora. Tento způsob ochrany je pro mnoho potrubních systémů nevyužívanější ochranou pro svoji účinnost a jednoduché zabudování. Další z vhodných variant ochrany je programovatelné uzavírání, jenž je využíváno např. u vodních elektráren. Obdobného principu ochrany se využívá u trubín, kde se však používá název synchronní ventil.

Poslední část práce je věnována k využití vodního rázu. V mnoha případech se snažíme vodnímu rázu předcházet a eliminovat ho takřka na nulu. Je však možné nalézt také jeho využití. Jedním z příkladů je vodní trkač, jenž měl své opodstatnění převážně v minulosti. Byl využíván především k dopravě pitné vody ze vzdálenějších a níže položených míst do chatových oblastí. S trkačem mám vlastní zkušenost z oblasti bydliště mých prarodičů, kde je stále využíván.

Z celkového shrnutí je patrné, že řešení vodního rázu je důležitým a nepřehlédnutelným problémem, se kterým je zapotřebí aktivně pracovat.

Reference

- [1] www.aft.com, 5.4.2011, 16:00
- [2] BRDIČKA, M., SAMEK, L., SOPKO, B.: *Mechanika kontinua*, Academia, Praha, 2000, 2. vyd. opr., ISBN 80-200-0772-5, 799 s.
- [3] HAINDL, K.: *Hydraulický ráz ve vodovodních a průmyslových potrubích*, Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1963, 137 s.
- [4] KOYŠ, J.: *Modelování tlakových pulsací v pružných potrubích*, Diplomová práce, Brno, 2007, 54 s.
- [5] MAŠTOVSKÝ, O.: *Hydromechanika*, Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1964, 2. vydání, 319 s.
- [6] PANKO, M.: *Tlumení tlakových pulsací v pružných potrubích*, Diplomová práce, Brno, 2008, 55 s.
- [7] ŠOB, F.: *Hydromechanika*, skriptá, FSI VUT v Brně, 2008, 2. vydání, ISBN 978-80-3578-0, 238 s.
- [8] VESELÝ, R.: *Řezání vodním paprskem modulovaným ultrazvukem - optimalizace tvaru kapalinového vlnovodu*, Diplomová práce, Brno, 2009, 29 s.
- [9] ZÁRUBA, J.: *Hydraulický ráz v soustavách potrubí*, Academia, Praha, 1984, 116 s.