



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND
BIOMECHANICS

LINEÁRNÍ ELASTICKÁ LOMOVÁ MECHANIKA A JEJÍ APLIKACE NA STUDIUM SLOŽENÝCH MATERIÁLŮ

LINEAR ELASTIC FRACTURE MECHANICS AND ITS APPLICATION ON STUDY OF COMPOSED
MATERIALS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

PETR DOHNALÍK

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

ING. BOHUSLAV MÁŠA

BRNO 2014

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky

Akademický rok: 2013/14

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Petr Dohnalík

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Strojní inženýrství (2301R016)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Lineární elastická lomová mechanika a její aplikace na studium složených materiálů

v anglickém jazyce:

Linear elastic fracture mechanics and its application on study of composed materials

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Kompozitní materiály jsou v dnešní době čím dál častěji využívány v inženýrské praxi. Typickou aplikační oblastí jsou vysoce exponované součásti moderních konstrukcí. Hlavní výhodou kompozitních materiálů je jejich optimální navržení k požadované funkci. Aby tyto materiály mohly splňovat vysoké požadavky současných technologických trendů, je třeba dokonale znát limity jejich použitelnosti. Jedním z kritických parametrů je odolnost materiálu vůči šíření trhlin, která významně ovlivňuje životnost konstrukce. Kompozitní materiály však na mikro/makro úrovni obsahují rozhraní, která celou problematiku výrazně komplikují. Příkladem takových materiálů mohou být vícevrstvé polymerní kompozity použité např. pro výrobu potrubí sloužícího k dopravě tekutých médií či keramické lamináty, kde vrstvením různých materiálů dosahujeme zvýšení lomové houževnatosti. Cílem bakalářské práce tedy bude detailní rešeršní práce dané problematiky, zjištění stavu současného poznání a možnosti řešení. V praktické části pak bude porovnání zjištěných analytických přístupů s numerickými metodami. K řešení praktické části bude využit MKP systém Ansys a matematický software Matlab, Maple.

Cíle bakalářské práce:

1. Seznámit se se základy metody konečných prvků - lineární výpočty v prostředí systému Ansys.
2. Získání základních znalostí z oblasti mechanických vlastností kompozitní materiálů.
3. Tvorba numerických modelů pro určení součinitele intenzity napětí ve složených materiálech za použití MKP software ANSYS.

Seznam odborné literatury:

[1] Anderson, T. L. Fracture mechanics: fundamentals and applications. 2nd ed. London: CRC Press, 2000.

[2] Ansys Reference Manual

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Bohuslav Máša

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2013/14.

V Brně, dne 11.11.2013



prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.
Děkan

Abstrakt:

Hlavním cílem této práce je uvedení možností výpočtu lomových parametrů pro trhlinu, která se nachází na rozhraní dvou materiálů. V úvodu práce je pojednáno o kompozitech, které jsou typickým představitelem materiálu, kde se případná trhlina může šířit v prostředí o různých elastických vlastnostech. Jsou zde obecně uvedeny přednosti kompozitních materiálů a tradiční konstrukce uspořádání jednotlivých složek. Dále se práce blíže zabývá lineárně elastickou lomovou mechanikou a popisu dostupných koncepcí pro posouzení tělesa s trhlinou, která se nachází v homogenním prostředí. Tyto koncepce jsou založeny na analytických vztazích, i na numerických metodách. Tato část je pak rozšířena v další kapitole o případ trhliny, která se nachází na materiálovém rozhraní. Jsou zde uvedeny postupy vedoucí k posouzení chování této trhliny. V praktické části bakalářské práce jsou pak představené metody použité k modelování trhliny šířící se jak v homogenním materiálu, tak i na trhlinu, jejíž kořen leží na bi-materiálovém rozhraní. K potřebným výpočtům byl použit konečnoprvkový systém ANSYS. Dosažené výsledky jsou v závěru práce porovnány a zhodnoceny.

Klíčová slova:

Lineární elastická lomová mechanika, kompozitní materiál, exponent singularity napětí, zobecněný součinitel intenzity napětí, efektivní hodnota součinitele intenzity napětí

Abstract:

The main objective of this bachelor thesis is the introduction to computational methods of fracture parameters of the crack, which terminates at the bi-material interface. The preface of the work deals with composites, where possible crack can grow in materials with different elastic properties. In this part advantages of composite materials are closely described and usual structure arrangements of the components are presented. The next part of this work is focused on the linear elastic fracture mechanics and available concepts for assessment of the body with presence of the crack in the homogenous material are described. These concepts are based on analytical expressions and, also, on numerical methods. This problem is furthermore extended in the next chapter by case, when the crack terminates perpendicularly to the bi-material interface. Here are given procedures, which can provide information about the further crack behaviour. In practical part all presented procedures have been used in order to evaluate the crack parameters in the homogenous material and for the crack terminating at bi-material interface. Necessary calculations were performed using the finite element method implemented in the commercial system ANSYS. Calculated results were compared and closely discussed in the conclusion.

Keywords:

Linear elastic fracture mechanics, composite materials, exponent of stress singularity, generalized stress intensity factor, effective value of stress intensity factor

Bibliografická citace práce:

DOHNALÍK, P. *Lineární elastická lomová mechanika a její aplikace na studium složených materiálů*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2014. 46 s.
Vedoucí bakalářské práce Ing. Bohuslav Máša.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a v seznamu literatury uvedl veškeré informační zdroje, které jsem použil.

V Brně dne

.....

Děkuji vedoucímu této bakalářské práce, panu Bohuslavu Mášovi, za jeho rady, odbornou pomoc a pravidelné konzultace, které byly nezbytné pro zdárné vyřešení všech problémů, se kterými jsem se v průběhu práce střetnul. Také bych chtěl poděkovat svojí rodině a svým blízkým za motivaci a neustálou podporu v tom, co dělám.

Obsah

1	Úvod	14
2	Kompozitní (složené) materiály	15
3	Lomová mechanika	17
3.1	Těleso s trhlinou	19
3.2	Způsoby posouzení tělesa s trhlinou	21
3.2.1	Energetická koncepce	21
3.2.1.1	Koncepce hnací síly trhliny	21
3.2.1.2	J-integrál	22
3.2.2	Součinitel intenzity napětí	23
4	Numerický výpočet lomových parametrů	25
4.1	Homogenní materiál	25
4.1.1	Metoda konečného rozšíření trhliny (Finite crack extension method).....	25
4.1.2	Metoda zavírání trhliny (Crack closure method).....	25
4.1.3	Metoda virtuálního zavírání trhliny (Virtual crack closure method).....	26
4.1.4	Extrapolace napětí, posuvů.....	27
4.2	Nehomogenní materiál	28
5	Praktická část	30
5.1	Tvorba modelu	30
5.1.1	Volba prvku	30
5.1.2	Materiálové vlastnosti	31
5.1.3	Geometrie	31
5.1.4	Síť konečných prvků	31
5.1.5	Okrajové podmínky	34
5.2	Výsledky numerického modelování	34
5.2.1	Homogenní materiál	34
5.2.2	Trhlina na bi-materiálovém rozhraní.....	36
6	Shrnutí dosažených výsledků	39
7	Závěr	41
	Literatura	43
	Seznam použitých symbolů	45

1 Úvod

Zvyšující se podíl výrobků a součástí vyrobených z kompozitních materiálů, je logickým důsledkem plynoucí z jejich předností. To jest zejména uzpůsobení struktury v místech, kde je to zapotřebí. Tím můžeme například výrazně ušetřit hmotnost konstrukce při zachování její tuhosti či pevnosti, a zvýšit tím efektivitu provozu uvažované konstrukce v porovnání s konstrukcí vyrobené z tradičních materiálů. Mechanické vlastnosti kompozitů závisí na jejich mikrostruktuře, jinými slovy na tvaru, rozmístění a vlastnostech jednotlivých fází. Stejně tak při znalosti chování trhlin v kompozitních materiálech (zejména v blízkosti přechodu dvou materiálů) můžeme například vhodně navrhnout takové kompozity, které budou lépe odolávat iniciaci či růstu trhlin.

Z hlediska historického je asi nejstarším kompozitem vyrobeným člověkem zdivo z bahna vyztuženého rákosem. Každopádně už v mladší době kamenné (Neolit) si středoevropané svoje obydlí stavěli z proutí omotaného kolem dřevěných latí, které byly vyplněny směsí jílu, písku a slámy. V dnešní době široce rozšířený beton je také kompozitním materiálem, kde pojivo je tvořeno cementem a výztuž je tvořena rozdrčeným kamenem. Půjdeme-li dále, můžeme tento beton vyztužit pruty z ocele, které představují prvek zvyšující pevnost celé stavby, a v případě porušení betonu pak zajišťuje soudržnost materiálu. Po tisíciletí je známá též překližka, tvořena nalepenými deskami dřeva orientovaných vůči sobě pod různými úhly. Prvním, dobře známým kompozitem, může být uveden i bakelit, objevený na počátku minulého století. V dnešní době nacházejí kompozity uplatnění ve vysoce zatížených částech raketoplánů a letadel (ocasní plochy, křídla, trup, vrtule), člunů, částí automobilů, ale jsou z nich vyráběny i rámy kol a další sportovní vybavení.

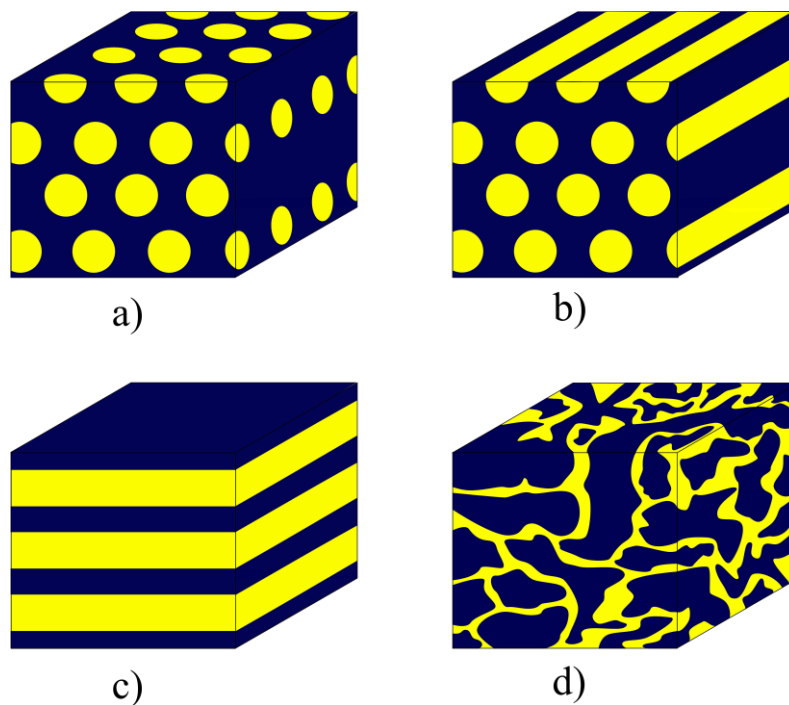
Důležitým úkolem lomové mechaniky je posoudit, zda se trhlina při určitém zatížení, vzhledem k lomovým kritériím (například lomové houževnatosti), bude, či nebude šířit. Lineárně elastická lomová mechanika byla původně odvozena pro homogenní materiál a zabývala se křehkým porušením (Griffith - sklo [3]), později se začala lomová mechanika zabývat také únavovým porušením materiálů. Lineárně lomová mechanika se v současné době považuje za dostatečně probádanou. Z hlediska mezních stavů může nastat několik druhů lomů a to křehký, tvárný, únavový nebo například lom při creepu, ale existuje i porušení houževnatého materiálu křehkým lomem s tvárnou lomovou plochou. Při navrhování konstrukce odolné vůči porušení lomem, musíme posoudit tři kritické proměnné (napětí, lomovou houževnatost a kritická velikost vady). Lomová mechanika poskytuje matematicko-fyzikální aparát mezi těmito veličinami. Například, pokud je napětí určeno z návrhu a je známa lomová houževnatost, vztahy lomové mechaniky mohou predikovat kritickou velikost vady v konstrukci. Pro představu vážnosti této problematiky - ekonomická studie odhadla náklady spojené s lomy ve Spojených státech v roce 1978 na 119 miliard dolarů. Mimoto tato studie odhadla, že roční náklady by se mohly snížit o 35 miliard, pokud by byly aplikovány současné metody [1].

2 Kompozitní (složené) materiály

Jak již název napovídá, jedná se o materiály složené ze dvou a více samostatných materiálů (komponentů). Kombinováním vlastností jednotlivých složek můžeme dosáhnout takových parametrů, které budou nejvhodnější pro konkrétní případ použití (například vysoká pevnost výrobku, při zachování nízké hmotnosti), což tyto materiály zvyhodňuje oproti konvenčním. Obecně je známo, že kompozitní materiály jsou ortotropní, tj. v každém kolmém směru vykazují jiné mechanické vlastnosti.

Jednotlivé složky kompozitních materiálů nazýváme maticí a výztuží [7]. Matrice představuje jakési pojivo nosných částí, tudíž by měla mít vůči výztuži dobrou adhezi. Matrice také dává tělesu jeho tvar a barvu. Materiál složek může být značně odlišný (kovy, keramické materiály, polymery) a mohou se mezi sebou jakkoliv kombinovat [7].

Ačkoliv je kompozit sestaven ze dvou nebo více spolupůsobících komponentů (složek), struktura složeného materiálu se může značně lišit. Mechanické charakteristiky velmi záleží na tom, jak jsou jednotlivé výztuže rozmístěny v matici a jaký mají tvar. Proto kompozity, mimo jiné, dělíme podle geometrie výztuže do skupin: částicové (obrázek 1a), vláknové (obrázek 1b), laminátové (obrázek 1c), či skeletové (obrázek 1d) [7].



Obrázek 1 – Dělení kompozitů podle geometrie výztuže (zobrazení v řezu)

V částicových kompozitech jsou malé částice jedné fáze rozmístěny v matici jiné fáze. Pro finální vlastnosti celku je mimo jiné důležitá vzájemná poloha částic, jinými slovy, zda se shlukují do skupin nebo jsou rovnoměrně rozmístěny v objemu. V mnoha případech jsou částice tvrdší a tužší než matrice. Částice mohou být různých velikostí a tvarů například z keramických nebo kovových materiálů. Jako materiálu matrice může být použito polymerů nebo kovů [15].

Díky pevným a tuhým vláknům, která spolupůsobí s poddajnou nebo křehkou maticí, bylo možné vytvořit kompozity s vysokou tuhostí, pevností a houževnatostí [9]. Vláknové

kompozity mohou zaujímat různé konfigurace, jako třeba jednosměrná dlouhá vlákna (obrázek 1b), jednosměrná krátká vlákna, dvousměrné (respektive vícesměnné) vyztužení, náhodně uspořádaná dlouhá nebo krátká vlákna [7].

Lamináty jsou tvořeny různými vrstvami. Vrstvy mohou být jak z různých materiálů, tak každá samostatná vrstva může být ještě zpevněna vlákny (laminát s vláknovou výztuží) [15].

Skeletový kompozit je definován v práci [7], jako kompozit sestávající se ze souvislé pórovité matrice, která je prostoupena souvislým nosným skeletem.

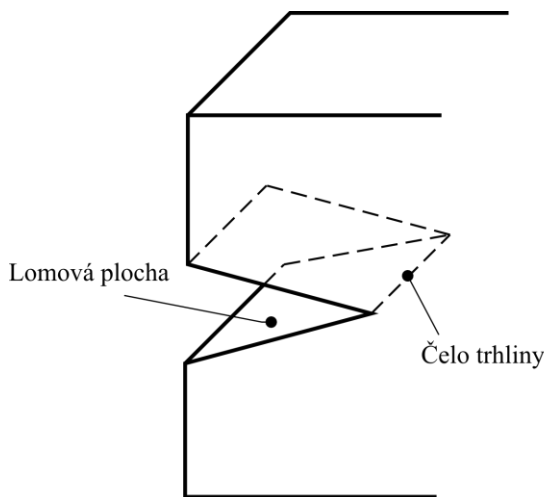
Množství technologických způsobů jak vyrobit kompozitní materiály se přímo odvíjí s počtem typů kompozitů. Jedním ze známých a běžných způsobů je například ruční kladení, kde do formy klademe výztuž v podobě tkaniny či rohože, která se poté přetře pojivem (pryskyřicí). Vytvrzení kompozitu poté může probíhat jak za normálních podmínek (atmosférický tlak, pokojová teplota), tak ve speciálních komorách (autokláv), kde se mohou nastavit specifické podmínky (teplota a tlak) pro vytvrzování [14]. V případě například keramických materiálů lze kompozit tvořit slinováním za vysokých teplot ve formě laminátu [17]. Takovýto kompozitní materiál může například vykazovat zvýšenou lomovou houževnatost oproti vzorkům vyrobených z jednoho materiálu jednotlivých komponent.

3 Lomová mechanika

Předmětem zájmu lomové mechaniky je co nejlepší popis chování trhliny v konstrukci. Na tento problém lomu se můžeme dívat ze dvou pohledů. Prvním je jednoparametrová lomová mechanika, kde nám pro popis napětí a deformace u kořene trhliny slouží pouze jeden parametr (součinitel intenzity napětí, hnací síla trhliny, J-integrál). Druhým je pak dvouparametrová lomová mechanika, zavedená pro lepší vystižení tvaru a velikosti pole napětí u kořene trhliny, která mimo jiné závisí na geometrii tělesa. Prvním parametrem v této metodě bývá součinitel intenzity napětí K nebo J-integrál, druhým pak tak zvané T-napětí nebo Q-parametr. Tato práce se dále zabývá pouze jednoparametrovou lomovou mechanikou.

Lomová mechanika lze dále rozdělit na lineárně elastickou lomovou mechaniku (LELM) a elasto plastickou lomovou mechaniku (EPLM). Lineárně elastická lomová mechanika je schopná určit napětí a deformaci u kořene trhliny za podmínky velmi malých plastických deformací (v porovnání s délkou trhliny), za předpokladu platnosti Hookova zákona. A platí, že čím větší je plastifikace u čela trhliny, tím menší je věrohodnost této metody. Naproti tomu pro elasto plastickou lomovou mechaniku není problém relativně větší plastická deformace u kořene trhliny [1].

V lineárně elastické lomové mechanice můžeme považovat trhlínu za ideálně ostrý vrub v tělese s úhlem rozevření 0° . Její protilehlé plochy nazýváme lomové plochy nebo také líce trhliny. Konec trhliny se nazývá čelo trhliny nebo při 2D aproximaci kořen trhliny (obrázek 2) [1].



Obrázek 2 - Popis trhliny

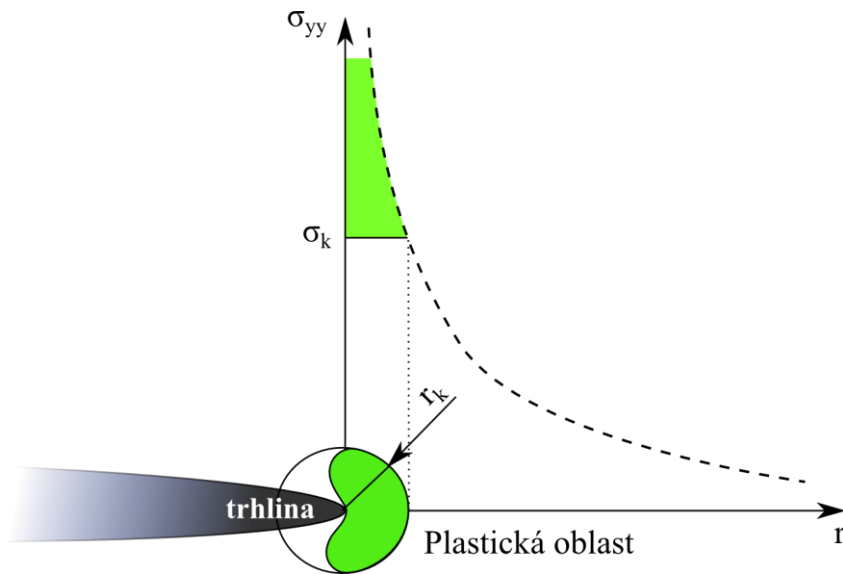
LELM předpokládá u kořene trhliny ostrý vrub (v kořeni trhliny je nulový rádius zaoblení - ostrý přechod), proto by mělo napětí v kořeni trhliny dosahovat teoreticky nekonečné hodnoty. Nicméně v reálném tělese je v kořeni vždy konečně malý poloměr způsobený pohybem dislokací, tudíž i přítomné napětí má konečnou hodnotu. Když toto napětí překročí mez kluzu, začne se oblast plasticky deformovat (obrázek 3). Velikost plastické oblasti lze určit následovně:

$$r_k = \frac{\alpha}{\pi} \cdot \left(\frac{K_I}{\sigma_k} \right)^2, \quad (1)$$

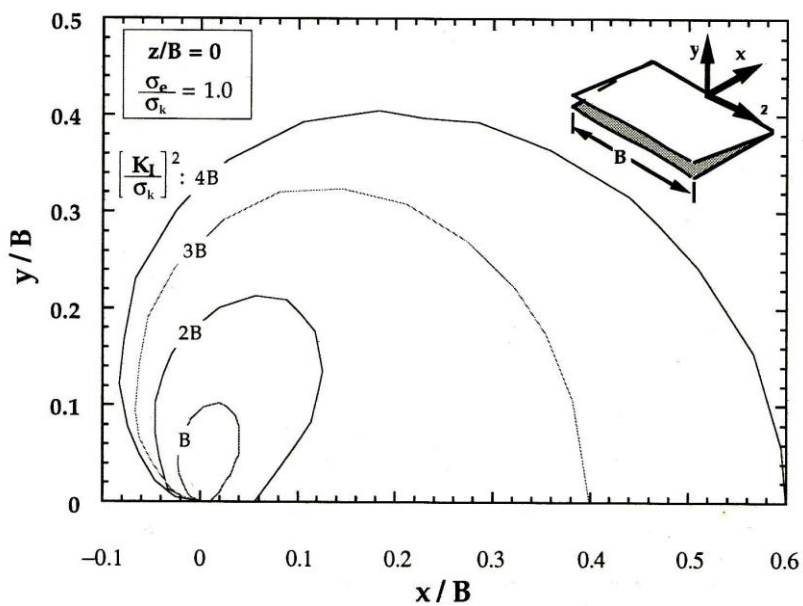
kde r_k je poloměr plastické oblasti, K_I je součinitel intenzity napětí pro normálový mód zatěžování, σ_k je mez kluzu materiálu, α nabývá hodnoty 1/3 pro rovinnou deformaci a 1/2 pro rovinnou napjatost [3]. Plastickou oblast lze považovat za dostatečně malou, pokud je splněna následující podmínka [16]:

$$r_k \leq \frac{a}{10}, \quad (2)$$

kde a je délka trhliny.



Obrázek 3 – Plastická oblast u kořene trhliny

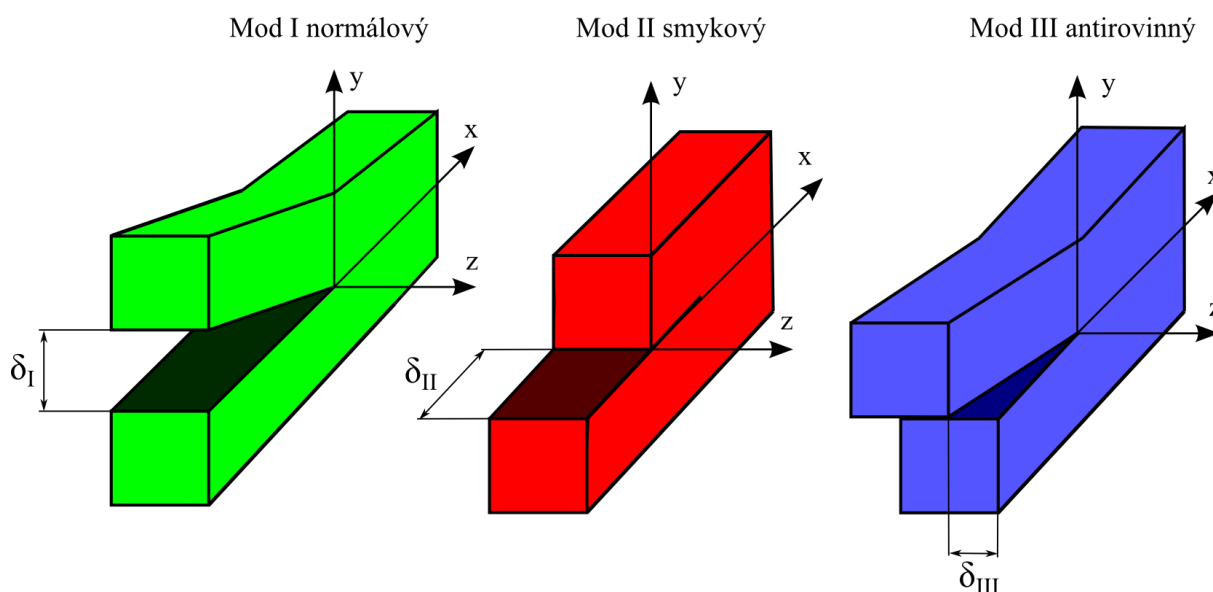


Obrázek 4 – Přejchod z rovinné napjatosti do rovinné deformace; zdroj: [1]

Většina běžných řešení v lomové mechanice se redukuje do dvourozměrných problémů. Zavádíme rovinnou napjatost (RN) a rovinnou deformaci (RD), což znamená, že alespoň jedno hlavní napětí nebo posunutí je považováno za nulové. Skutečné podmínky před kořenem trhliny však obecně ne vždy odpovídají pouze jednomu z uvedených stavů. Nicméně pro potřeby modelování je předpoklad rovinné napjatosti a rovinné deformace platný nebo poskytuje alespoň dobrou aproximaci [1]. Rovinná napjatost vzniká především u tenkostěnných těles, modelovým příkladem by mohl být tenký nekonečný tažený pás s centrální trhlinou. Při rovinné deformaci se materiál snaží stahovat v ose x a z (obrázek 4), ale brání mu v tom okolní materiál. Toto stísnění deformace (constraint) má za následek vytvoření trojosého stavu napjatosti. Jak $[K_I / \sigma_k]^2$ roste v poměru k tloušťce, tak se zvětšuje velikost plastické zóny [1].

3.1 Těleso s trhlinou

V minulosti, z důvodů snížení pracnosti výpočtu, bylo nutné řešení dostatečně zjednodušit tak, aby je bylo možné řešit analyticky. Na základě prací Muschelišviliho toto zjednodušení provedl Westergard a zavedl tři charakteristické mody zatěžování v rovině (obrázek 5).



Obrázek 5 – Mody zatěžování

Mód I (normálový) – Působící vnější síla je rovnoběžná s osou y, lomové plochy se od sebe oddalují, přitom jsou symetrické s rovinou xz a xy. Jedná se o nejčastěji se vyskytující a technicky nejdůležitější typ namáhání. Pro tento typ je charakteristické tak zvané „otvácí“ napětí σ_{yy} .

Mód II (smykový) – Vnější síla působí souhlasně s osou x ve směru šíření trhliny, charakteristické pro tento mód je smykové napětí τ_{xy} , symetrie je zachována v rovině xy.

Mód III (antirovinný smyk) – posunutí ve směru osy z, působící síla je rovnoběžná s čelem trhliny (ve směru osy z). Pro růst trhliny je dominantní smykové napětí τ_{yz} .

Kombinací těchto modů je možno postihnout všechny možné způsoby namáhání. Celkové rozevření trhliny je možné získat jako součet všech dílčích rozevření.

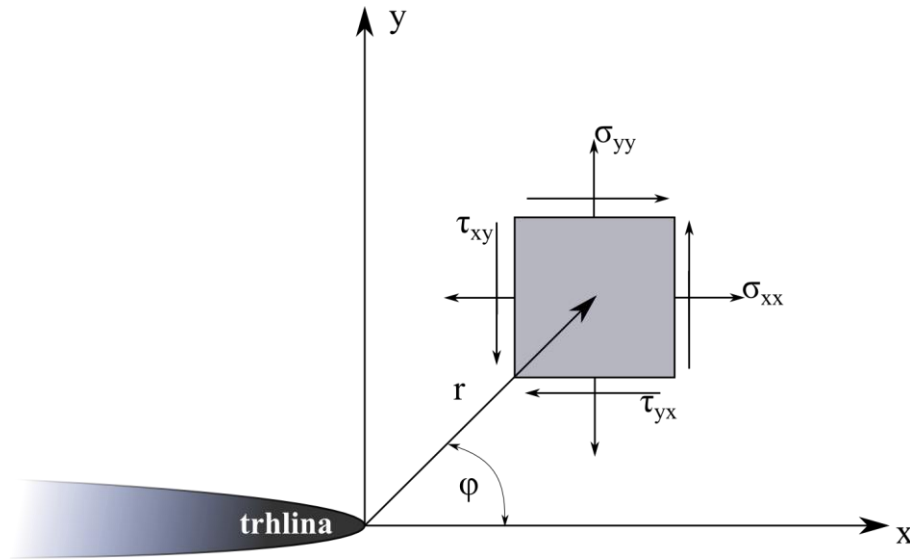
$$\vec{\delta} = \delta_I \vec{e}_I + \delta_{II} \vec{e}_{II} + \delta_{III} \vec{e}_{III} \quad (3)$$

Stejný princip platí pro jednotlivé složky tenzorů napětí, viz rovnice 4 [1].

$$\sigma_{ij}^{(total)} = \sigma_{ij}^{(I)} + \sigma_{ij}^{(II)} + \sigma_{ij}^{(III)} \quad (4)$$

Pro určitou konfiguraci trhliny zatíženou vnějšími silami je možné odvodit uzavřenou formu vyjádření pro napětí v tělese, předpokládající izotropní, lineárně elastický materiál. V polárním souřadnicovém systému s počátkem v kořeni trhliny (obrázek 6), můžeme ukázat, že pole napětí v tělese s trhlinou je dáno vztahem:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{k}{\sqrt{r}} \right) f_{ij}(\varphi) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^{\frac{m}{2}} g_{ij}^{(m)}(\varphi), \quad (5)$$



Obrázek 6 – Souřadnicový systém

kde σ_{ij} je tenzor napětí, k je konstanta, r je vzdálenost od kořene trhliny, φ polohový úhel a f_{ij} je bezrozměrná funkce úhlu φ [1].

Pro mód I v blízkém okolí kořene trhliny Westergard odvodil následující vztahy [1]:

a) pro rovinnou napjatost u čela trhliny ($\sigma_{zz} = 0$):

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \left[1 - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \right], \quad (6a)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \left[1 + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \right], \quad (6b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right), \quad (6c)$$

b) pro rovinnou deformaci ($\varepsilon_z = 0$):

$$\sigma_z = \nu \cdot (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}), \quad (7)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad (8)$$

posuv ve směru osy x a y pro rovinnou napjatost a deformaci:

$$u = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{2G_s} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot (\kappa - \cos \varphi), \quad (9)$$

$$v = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{2G_s} \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot (\kappa - \cos \varphi), \quad (10)$$

kde G_s je modul pružnosti ve smyku, σ je aplikované napětí a pro rovinnou napjatost je $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ a pro rovinnou deformaci $\kappa = 3 - 4\nu$ [3].

3.2 Způsoby posouzení tělesa s trhlinou

Trhlina v tělese představuje nespojitost, která přináší problém jak z hlediska matematického popisu, tak nebezpečného koncentrátoru napětí (ostrý vrub). Ukázalo se, že pro popis tělesa s trhlinou není vhodné používat maximální napětí před kořenem trhliny [3]. Proto bylo zavedeno několik koncepcí, které mají lépe charakterizovat stav trhliny a její následující chování [11]. Jednotlivé koncepce jsou popsány v následujících podkapitolách.

3.2.1 Energetická koncepce

Energetický přístup vychází z předpokladu, že k růstu trhliny dochází, pokud energie potřebná k rozšíření trhliny překročí kritickou mez. Při růstu trhliny se energie spotřebovává nejen na vytváření nových lomových ploch, ale také k lokálnímu ohřevu materiálu a plastifikaci v okolí čela trhliny, souhrnně nazývána disipační energie [3].

Pro prvotní popsání této koncepce byla uvažována nekonečně dlouhá stěna, tažená konstantním napětím σ s centrální trhlinou o velikosti $2a$. Předpoklad je, že šířka stěny je mnohem větší než délka trhliny a před čely trhliny převládá rovinná napjatost. Griffithova energetická bilance pro zvýšení přírůstku trhliny, může být za rovnovážných podmínek formulována následovně:

$$\frac{dE}{dA} = \frac{d\Pi}{dA} + \frac{dW_s}{dA} = 0, \quad (11)$$

kde dA je přírůstek plochy trhliny, E je celková energie, Π je potenciální energie a W_s je práce potřebná pro vytvoření nových ploch [1].

3.2.1.1 Koncepce hnací síly trhliny

Tato koncepce navazuje na Griffithovo kritérium, nicméně je více vhodná pro řešení inženýrských problémů [1]. Rovnici (11) je také možno napsat ve tvaru:

$$-\frac{d\Pi}{dA} = \frac{dW_s}{dA} \quad (12)$$

Potom hnací síla trhliny má tvar:

$$G = -\frac{d\Pi}{dA} \quad (13)$$

Hnací síla pro nekonečně dlouhou taženou stěnu s centrální průchozí trhlinou lze vyjádřit:

$$G = \frac{\pi\sigma^2 a}{E}, \quad (14)$$

z uvedeného vztahu vyplývá, že hnací síla trhliny je lineárně závislá na délce trhliny, pro jiná tělesa tento příměr již platit nemusí [3].

3.2.1.2 J-integrál

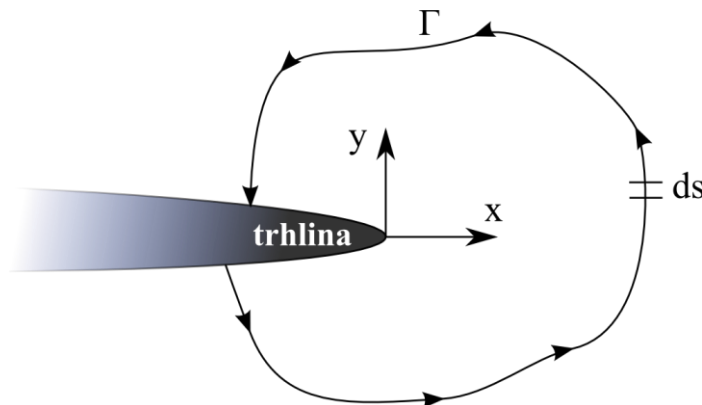
Rice zavedl další způsob popisu trhliny [1], J-integrál, který je nezávislý na integrační cestě. Ukázal, že hodnota tohoto J-integrálu je rovna hnací síle trhliny v nelineárním (tudíž i lineárním) elastickém tělese obsahující trhlinu. Hnací síla trhliny G v rovnici 13 je nahrazena J integrálem [1]:

$$J = -\frac{d\Pi}{dA} \quad (15)$$

Tudíž v elastické oblasti pro plasticitu malého rozsahu také platí:

$$J_I = \frac{K_I^2}{E'}, \quad (16)$$

pro rovinnou napjatost je E' rovno E a pro rovinnou deformaci je E' rovno $E/(1-\nu^2)$ [3].



Obrázek 7 – Integrační cesta J-integrálu

Uvažujme libovolnou křivku Γ orientovanou proti směru hodinových ručiček (obrázek 7), J-integrál je pak dán vztahem:

$$J = \int_{\Gamma} \left(w dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right), \quad (17)$$

kde T_i jsou složky vektoru síly $T_i = \sigma_{ij}n_j$, u_i jsou složky vektoru posuvu, ds je délka přírůstku na křivce Γ a w je hustota deformační energie definována jako:

$$w = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad (18)$$

kde jsou σ_{ij} a ε_{ij} tenzory napětí a přetvoření [1].

J-integrál se neomezuje pouze na lineárně elastickou lomovou mechaniku, ale nachází uplatnění i v elasto plastické lomové mechanice [3].

3.2.2 Součinitel intenzity napětí

Nejběžnějším lomovým parametrem pro posouzení tělesa s trhlinou je součinitel intenzity napětí K . Každý mód zatížení vykazuje na kořeni trhliny singularitu $1/\sqrt{r}$, konstanta k a funkce f_{ij} závisejí na módu zatěžování. Je vhodné nahradit konstantu k ze vztahu (5) součinitelem intenzity napětí K , kde $K = k\sqrt{2\pi}$. Pro napěťové pole před kořenem trhliny pro izotropní, lineárně elastický materiál můžeme po úpravě psát:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(I)} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(I)}(\varphi), \quad (19)$$

index I označuje mód namáhání, jak bylo uvedeno v kapitole 3.1 (obrázek 5). Obdobný vztah lze napsat také pro módy II a III. Pokud je $\varphi = 0$ a smykové napětí je rovno nule, objekt je zatížen čistým módem I. Při zatěžování objektu více módy současně můžeme tenzory napětí sečíst podle vztahu (4) [1].

Nutno podotknout, že vztahy (6) jsou platné pouze v blízkém okolí čela trhliny, kde napěťovému poli dominuje singularita $1/\sqrt{r}$. Avšak napětí v dostatečné vzdálenosti od čela trhliny není již dále ovlivněno přítomností trhliny v tělese. Je tedy nutné zůstat pouze v této oblasti [1].

Součinitel intenzity napětí stanovuje amplitudu singularity u kořene trhliny. To znamená, že napětí blízko kořene vzrůstají úměrně se součinitelem intenzity napětí K . Mimoto, součinitel intenzity napětí dostatečně vyjadřuje podmínky v okolí kořene trhliny, takže pokud jej známe, je možné řešit všechny složky napětí, posuvů a přetvoření jako funkci r a φ [1].

Pokud položíme vztahy (6) a (19) sobě rovny při $\varphi = 0$, získáme:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}, \quad (20)$$

což je vztah součinitele intenzity napětí pro nekonečnou taženou stěnu [3]. Z výše uvedeného vztahu také vyplývá rozměr jednotky $MPa \cdot \sqrt{m}$.

V předchozím bodě byl představen parametr hnací síly trhliny popisující celkové chování, zatímco součinitel intenzity napětí je lokální veličinou. Pro lineárně elastické materiály spolu hnací síla trhliny a součinitel intenzity napětí jednoznačně souvisí. Sloučením rovnic (14) a (20) získáme vztah mezi G a K_I pro rovinnou napjatost:

$$G = \frac{K_I^2}{E} \quad (21)$$

Pro rovinnou deformaci musí být E nahrazeno $E/(1-\nu^2)$. Přepočtem tímto vztahem můžeme použít pro všechny konfigurace, navzdory tomu, že rovnice (14) a (20) jsou odvozeny pro průchozí nekonečnou stěnu (Irwin provedl analýzu zavírání trhliny, kterou tímto přepočtem dokázal) [1].

Kritérium šíření trhliny chápeme obecně jako odpor materiálu proti vzniku a šíření trhliny. V případě součinitele intenzity napětí ji značíme K_{IC} a nazýváme lomovou houževnatostí (římská číslice I v dolním indexu opět odpovídá módu zatěžování). Je zřejmé, že po překročení této hodnoty se trhlina začne šířit nestabilně. Stejně tak můžeme označovat i G_{IC} a J_{IC} , nicméně součinitel intenzity napětí je jednou z nejpoužívanějších veličin popisující napjatost v tělese s trhlinou, proto se nejčastěji setkáme s tímto zápisem. Lomová houževnatost je materiálová charakteristika a je velmi závislá na teplotě, materiálu, rychlosti zatěžování a charakteru napjatosti. Určení lomové houževnatosti měřením určuje v současné době norma ČSN EN ISO 12737 [3]. Zkoušení se provádí na tělesech s přesně definovanou geometrií například na trojbodový ohyb nebo excentrický tah [3].

4 Numerický výpočet lomových parametrů

Experimentální určení lomových parametrů na reálné konstrukci je velmi nákladné, přesto mnohdy nezbytné. Proto se dnes s výhodou využívá relativně snadno dostupných výpočtových strojů a k tomu určenému softwaru. Při numerických výpočtech lomových parametrů je také využívána dnes již rozšířená metoda konečných prvků.

4.1 Homogenní materiál

V prvních třech bodech je pojednáno o způsobech výpočtu hnací síly trhliny, založených na tak zvaných energetických metodách [3]. V posledním bodě je rozebrán způsob výpočtu součinitele intenzity napětí.

4.1.1 Metoda konečného rozšíření trhliny (Finite crack extension method)

Celková potenciální energie Π je potenciálem vnitřních sil U a potenciálem vnějších sil Ω . Vyjádřeno následovně:

$$\Pi = U + \Omega \quad (22)$$

V souladu s definicí hnací síly trhliny budeme uvažovat rozšíření trhliny o δa vzhledem k původní délce trhliny a , poté dostaneme:

$$G \approx \frac{\Pi(a + \delta a) - \Pi(a)}{\Delta A} = \frac{\Pi(a + \delta a) - \Pi(a)}{\Delta a t}, \quad (23)$$

kde t je tloušťka tělesa.

Při aplikaci tohoto způsobu výpočtu je tedy nutné vypočítat zvlášť celkovou potenciální energii trhliny vzorku základní délky a a celkovou potenciální energii vzorku s rozšířenou trhlinou o δa . V našich výpočtech byla délka přírůstku obvykle stanovena jako velikost jednoho prvku ve směru růstu trhliny [19].

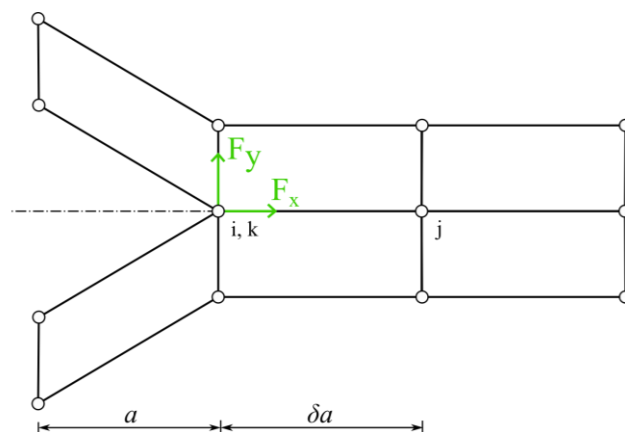
4.1.2 Metoda zavírání trhliny (Crack closure method)

Tato metoda je založená na předpokladu, že energie potřebná na oddělení povrchů o přírůstek je stejná jako energie potřebná k zavření těchto povrchů. Potřebujeme tedy opět posoudit dva modely s trhlinou [20].

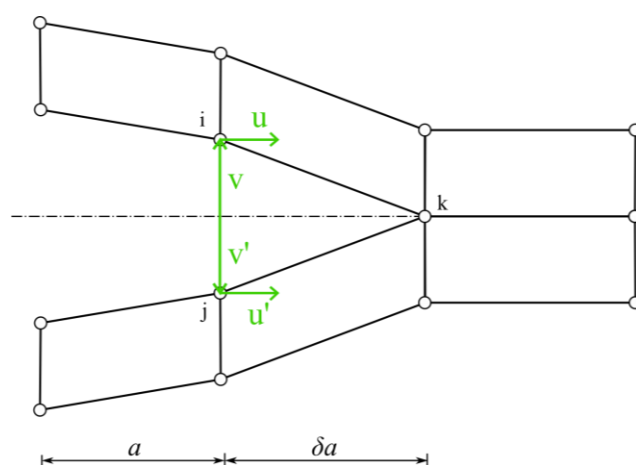
Model 1 s délkou trhliny a je použit pro výpočet sil v kořeni trhliny (uzel i nebo k , síly F_x , F_y viz obrázek 8). Model 2 s je pak s rozšířením délky trhliny o δa realizovanou mezi uzly i a k . Z tohoto modelu získáme posunutí (u a u' , v a v') potřebné k zavření trhliny δa (obrázek 9).

Ze získaných dat z těchto dvou modelů můžeme odhadnout hnací sílu trhliny pomocí vztahu:

$$G = G_I + G_{II} \approx \frac{1}{2} \frac{F_y \cdot \delta v}{\delta a \cdot t} + \frac{1}{2} \frac{F_x \cdot \delta u}{\delta a \cdot t} \quad (24)$$



Obrázek 8 - Metoda zavírání trhliny – model 1

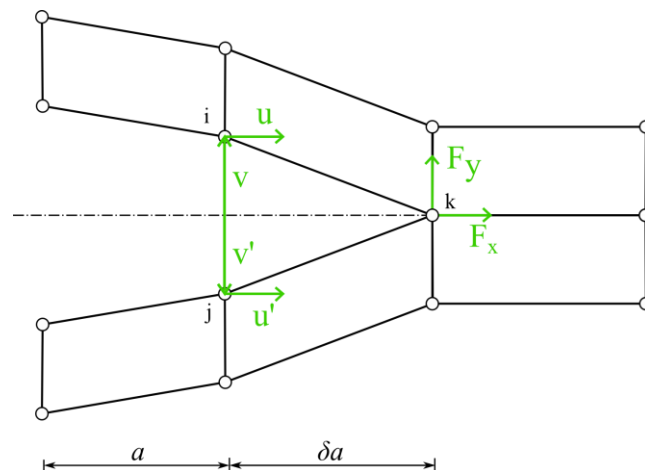


Obrázek 9 – Metoda zavírání trhliny – model 2

4.1.3 Metoda virtuálního zavírání trhliny (Virtual crack closure method)

Tento způsob určování hnacích sil trhliny je zjednodušením předchozího způsobu. Vychází z předpokladu, že stav napětí kolem kořene trhliny se výrazně nemění, když trhlina naroste o dostatečně malé δa [21]. To znamená, že v blízkosti kořene trhliny, v sousedních dvou uzlech (j a k), očekáváme přibližně stejné posuvy a stejné síly. K získání velikosti hnacích sil trhliny použijeme vztah 24 (obrázek 10).

S tímto zjednodušením je potřeba pouze jednoho modelu k získání posuvů a reakčních sil k zavření trhliny délky δa . Z toho vyplývá, že je za potřebí méně strojového času, nicméně lze očekávat horší přesnost výsledku než v předchozím případě.



Obrázek 10 – metoda virtuálního zavírání trhliny

4.1.4 Extrapolace napětí, posuvů

Tento postup spadá do tak zvaných přímých metod. Při extrapolaci napětí vycházíme z analytického vyjádření (vztah 19) napěťového pole, zavedeme-li limitu pro $r \rightarrow 0$, získáme výraz pro součinitele intenzity napětí jako:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(I)} \frac{\sqrt{2\pi r}}{f_{ij}^{(I)}(\varphi)} \quad (25)$$

Víme, že hodnoty napětí jsou získávány z posuvů, a tak jsou obecně zatíženy větší chybou, obzvláště v místech, kde je velký napěťový gradient (při užití deformační varianty MKP). Proto je lepší (z hlediska přesnosti) určovat součinitel intenzity napětí přímo extrapolací posuvů (k extrapolaci je vhodné použít například tabulkový kalkulátor) [4].

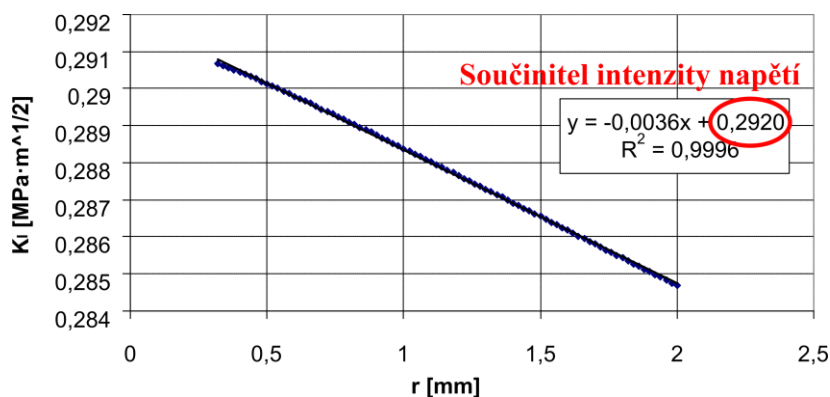
Při extrapolaci z napětí budeme uvažovat napětí nacházející se v určitém intervalu r od kořene trhliny pro $\varphi = 0^\circ$. Z programu ANSYS si poté do tabulkového kalkulátoru vložíme získané hodnoty napětí a souřadnice r . Do nového sloupce vypočítáme průběžné hodnoty K_I podle vztahu:

$$K_I = \sigma_{yy} \sqrt{2\pi r} \quad (26)$$

Následně vyhotovíme graf závislosti $K_I = f(r)$ a proložíme polynomickou spojnicí trendu prvního řádu a zobrazíme si rovnici této přímky. Na obrázku 11 je patrné, že číselná hodnota za směrnici je hodnota hledaného součinitele intenzity napětí.

Obdobný postup je použit i v případě extrapolace z posunutí. Pro konkrétní polohu vypočítáme průběžnou hodnotu K_I podle vztahu:

$$K_I = \sqrt{2\pi} \frac{G_s}{(1 + \kappa)} \cdot \frac{|\Delta v|}{\sqrt{r}} \quad (27)$$



Obrázek 11 – Získání součinitele intenzity napětí přímou metodou

4.2 Nehomogenní materiál

V této části bakalářské práce bude problém rozšířen o trhlinu v kompozitním materiálu. Dále se budeme zabývat způsobem určení zobecněného součinitele intenzity napětí a efektivní hodnoty intenzity napětí pro trhlinu, která je kolmá k rozhraní dvou materiálů.

V nehomogenním materiálu se nelze řídit součinitelem intenzity napětí, jak jsme si jej definovali výše, ale musíme si ho pro tento případ zobecnit. Zásadní rozdíl mezi ostrou trhlinou v homogenním materiálu a trhlinou nacházející se na rozhraní dvou materiálů je, že již neplatí singularita $1/\sqrt{r}$ nýbrž $1/r^p$, kde p je exponent singularity nabývající hodnot v intervalu $(0;1)$. Analytický vztah pro trhlinu kolmou k rozhraní, s jehož pomocí získáme exponent singularity, nalezneme například v [5], konkrétně:

$$\lambda^2(-4\alpha^2 + 4\alpha\beta) + 2\alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\alpha - \beta + 1 + (-2\alpha^2 + 2\alpha\beta - 2\alpha + 2\beta)\cos(\lambda\pi) = 0, \quad (28)$$

kde α a β jsou kompozitní parametry určené z Poissonových poměrů a modulů pružnosti v tahu obou materiálů a pro parametr λ platí vztah:

$$p = 1 - \lambda \quad (29)$$

Jelikož získáváme exponent různý od jedné poloviny, nelze nadále užívat součinitel intenzity napětí K . I tento součinitel lze však zobecnit a zavádí se takzvaný zobecněný součinitel intenzity napětí H_I . Určení zobecněného součinitele intenzity napětí je jen o málo složitější než součinitele intenzity napětí pro homogenní materiál. Lze opět použít extrapolaci otevíracího napětí před kořenem trhliny, nicméně musíme tento postup rozšířit o patřičný analytický aparát zahrnující například informace o elastických konstantách jednotlivých materiálů.

V první řadě je třeba určit exponent singularity napětí. Pro danou konfiguraci je napětí funkcí souřadnic r a φ , takže pro zvolený úhel φ (respektive pro $\varphi = 0$) můžeme rovnici (36) zapsat:

$$\sigma_{ij} \approx \frac{1}{r^p} \quad (30)$$

Následně pomocí regrese některé složky napětí v logaritmických souřadnicích získáme hledaný exponent singularity. Obdobně lze určit exponent singularity i z posuvů, kde platí:

$$u_{ij} \approx \frac{1}{r^{p-1}} \quad (31)$$

Získaný exponent singularity z posuvů je přesnější než z napětí v porovnání s analytickým řešením [6].

Pro šíření trhliny při namáhání modem I je rozhodující složka σ_{yy} . Dalším krokem je tedy ze vztahu (36) určit funkci $f_{ij}(\varphi, p, \alpha, \beta)$, pro trhlinu kolmou k rozhraní ($\varphi = 0$) je v práci [4] uveden vztah:

$$f_{yy} = (2 - p + g_r)(1 - p), \quad (32)$$

kde g_r je funkce kompozitních parametrů α a β , tyto parametry získáme z následujících vztahů (vztahy pro α a β platí pro pouze pro rovinnou deformaci) [13]:

$$\alpha = \frac{\frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_2} - 1}{4(1 - \nu_1)}, \quad (33)$$

$$\beta = \frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{1 - \nu_2^2}{1 - \nu_1^2}, \quad (34)$$

$$g_r = \lambda - \cos(\lambda\pi) - \frac{\beta[\alpha + 2\lambda - (1 + 2\alpha - 4\alpha\lambda^2)\cos(\lambda\pi) + (1 + \alpha)\cos(2\lambda\pi)]}{1 - 2\alpha + 2\alpha^2 - 2(\alpha + \alpha^2)\cos(\lambda\pi) - 4\alpha^2\lambda^2} \quad (35)$$

Po získání všech potřebných hodnot můžeme přistoupit k výpočtu zobecněného součinitele intenzity napětí z extrapolace napětí. Rozložení napětí pro libovolné p lze zapsat ve tvaru:

$$\sigma_{ij} = \frac{H_I}{\sqrt{2\pi r^p}} f_{ij}(\varphi, p, \alpha, \beta), \quad (36)$$

kde H_I je zobecněný součinitel intenzity napětí, p je příslušný exponent singularity napětí [4].

Nutno poznamenat, že jednotka zobecněného součinitele intenzity napětí již není $MPa \cdot \sqrt{m}$, ale obecně $MPa \cdot m^p$.

Zobecněný součinitel intenzity napětí H_I tedy nemůžeme srovnávat přímo se součinitelem intenzity napětí K_I homogenních materiálů. Nicméně je možné nalézt vztah mezi H_I a efektivní hodnotou součinitele intenzity napětí $K_{I,eff}$ na materiálovém rozhraní, který je založen na principu hustoty deformační energie [5, 18]:

$$K_{I,eff} = \left(\frac{1 - 2\nu_2}{(1 - p)^2 (4(1 - 2\nu_2) + (g_r(\lambda) - p)^2)} \right)^{-\frac{1}{2}} r_c^{\frac{1}{2} - p} H_I, \quad (37)$$

kde g_r je funkce definovaná výše a r_c je kritická vzdálenost získaná ze vztahu:

$$r_c = \frac{K_{IC}^2}{2\pi\sigma_f^2} \quad (38)$$

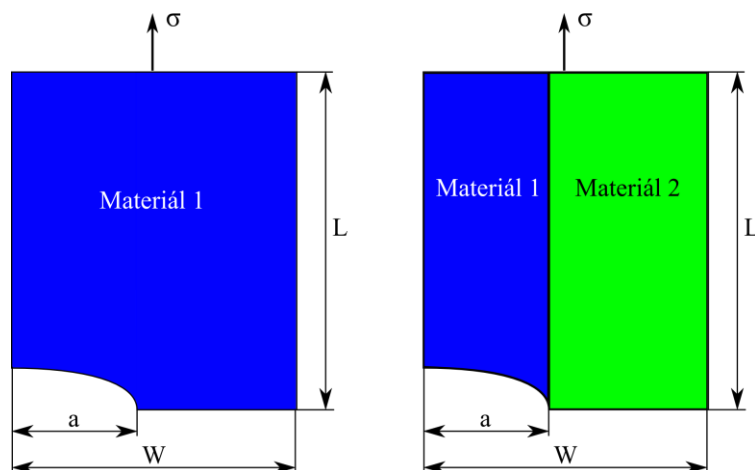
Tuto efektivní hodnotu součinitele intenzity napětí již můžeme porovnávat například s naměřenou hodnotou lomové houževnatosti.

5 Praktická část

V následující části práce je uveden postup výpočtu i s výsledky lomových parametrů pro jednotlivé modely podle výše zmíněných metod. Numerické modelování bylo provedeno metodou konečných prvků ve výpočetním programu ANSYS. V textovém editoru, v souladu s APDL kódem, byl vytvořen tak zvaný vstupní soubor, kde se definuje geometrie tělesa, typ elementu a jeho vlastnosti, materiálové charakteristiky, způsob tvorby sítě a okrajové podmínky. S ohledem na přehlednost a snadnou úpravu je vhodné zadávat vstupní data parametricky. Jednotlivé fáze tvorby modelu jsou popsány v následujících podkapitolách podle toho, jak jsou zadávány do vstupního souboru.

5.1 Tvorba modelu

Jako základní model byla uvažována stěna s centrální průchozí trhlinou namáhaná normálovým modem zatěžování. V případě modelu nehomogenního materiálu prochází rozhraní čelem trhliny a trhlina je na toto rozhraní kolmá (viz obrázek 12).

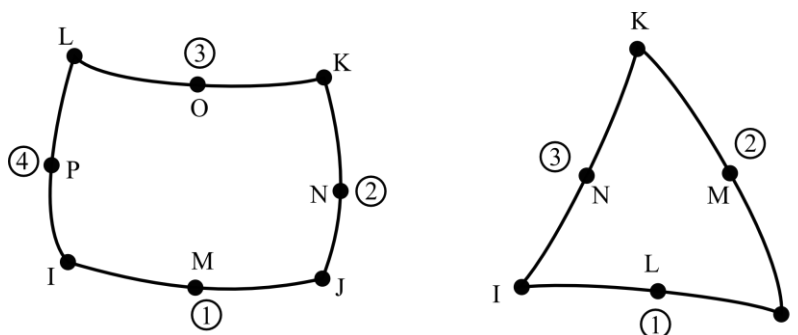


Obrázek 12 – Tvorba modelu (vlevo homogenní, vpravo nehomogenní materiál)

Toto řešení má však dvě osy symetrie, předepsáním vhodných okrajových podmínek tak lze řešit pouze čtvrtinu úlohy a ušetřený výpočetní čas investovat do jemnější sítě. Vytváření modelu probíhá chronologicky takto: volba prvku, volba materiálu, tvorba geometrie, tvorba sítě, zadání okrajových podmínek a zatížení a následně samotný výpočet.

5.1.1 Volba prvku

Úloha byla řešena jako rovinná, proto bylo použito pro vytvoření sítě prvek PLANE 183 (obrázek 13). Tento prvek má v základním tvaru 8 uzlů (nodes), čtyři rohové a čtyři uzly uprostřed každé strany (tak zvané midpoints). Degenerovaný tvar tohoto prvku je trojúhelník, který má uzly ve středu každé strany a v každém rohu (dohromady 6 uzlů). Všechny uzly mají dva stupně volnosti a to posunutí ve směru x a y [2]. Při volbě prvku se také volí chování elementu, v našem případě byla zvolena rovinná napjatost s uvedením tloušťky.



Obrázek 13 – Rovinný prvek PLANE 183 – základní tvar (vlevo), degenerovaný tvar (vpravo) [2]

5.1.2 Materiálové vlastnosti

Jedna z prvních věcí je specifikace materiálů, s kterými budeme počítat. Jedná se o keramický laminát $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-ZrO}_2$, z čehož první materiál je hliník s tetragonálním zirkoniem (dále označován jako ATZ) a druhý je hliník s monoklinickým zirkoniem (dále označován jako AMZ). Materiálové charakteristiky jsou uvedeny v tabulce 1, jako zdroj materiálových hodnot posloužila práce [17]. Výpočet lomových parametrů homogenního materiálu provedeme pouze pro materiál AMZ.

Tabulka 1: Materiálové vlastnosti používané v numerických modelech [17].

Vlastnost	Jednotky	AMZ	ATZ
Modul pružnosti v tahu E	GPa	280	390
Poissonův poměr ν	-	0,22	0,22
Mez pevnosti σ_f	MPa	90	422
Lomová houževnatost K_{IC}	MPa $\cdot\sqrt{\text{m}}$	2,6	3,2

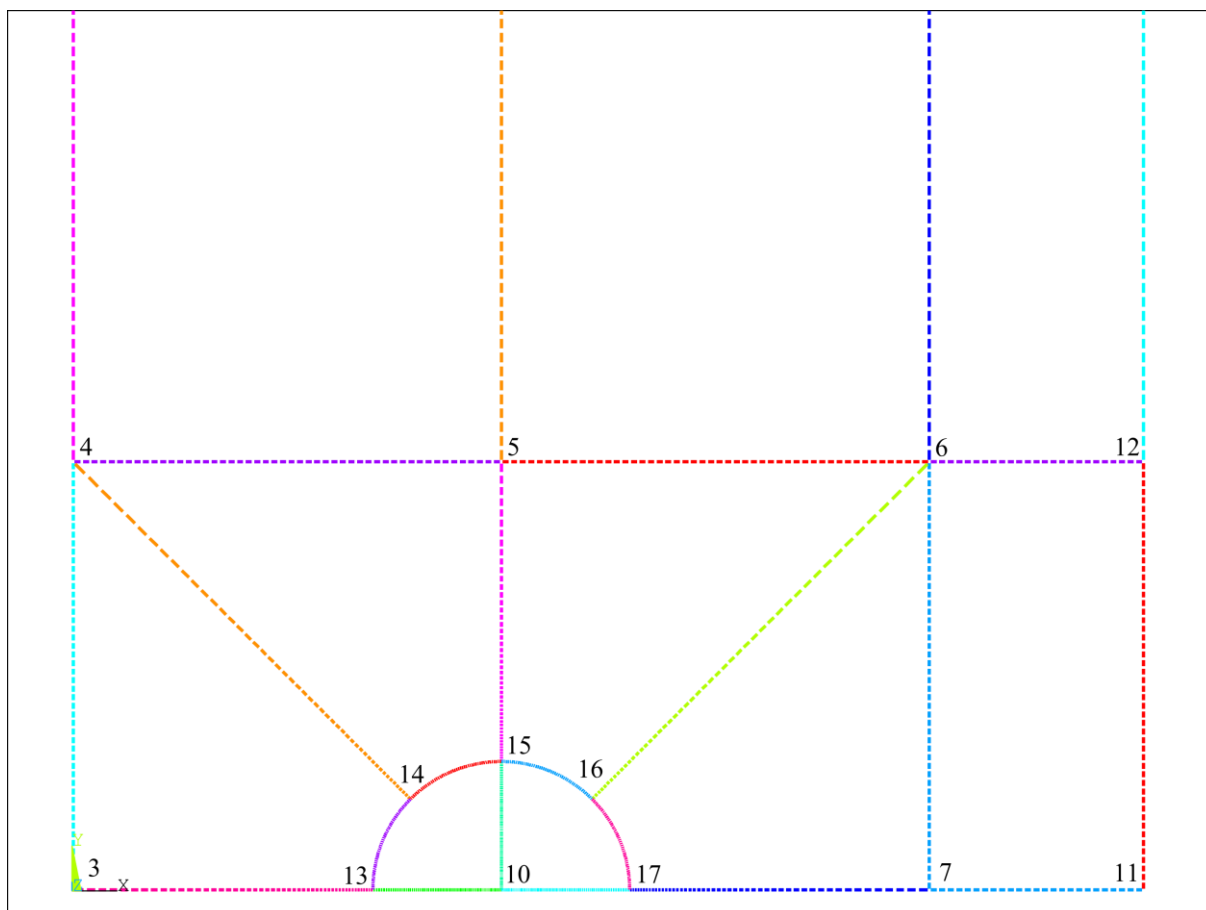
5.1.3 Geometrie

Již při tvorbě geometrie musí být myšleno na to, aby byly vytvořeny topologicky vhodné oblasti pro meshování čtyřúhelníkem (základní tvar prvku PLANE 183). Tento prvek se sice může degenerovat na trojúhelník, kterým dokážeme vyplnit jakoukoliv plochu, nicméně síť s trojúhelníky již nedosahuje takových kvalit - degenerovaný tvar prvku PLANE 183 dává obecně horší výsledky při stejné hustotě sítě. Z toho důvodu byly všechny modely rozděleny do elementárních podoblastí, které umožňují tvorbu takto kvalitní sítě (obrázek 14).

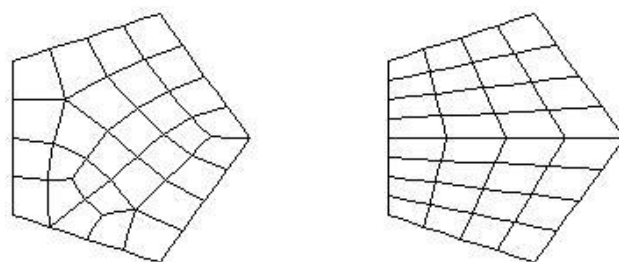
5.1.4 Síť konečných prvků

Mapovaná síť konečných prvků sestává pouze ze čtyřúhelníků (nebo jen trojúhelníků) a lze v ní vidět pravidelný vzor (obrázek 15), volná síť je tvořena oběma typy elementů [2]. Modely tvořené v této práci obsahovaly vždy mapovanou síť se základním tvarem zvoleného kvadratického prvku.

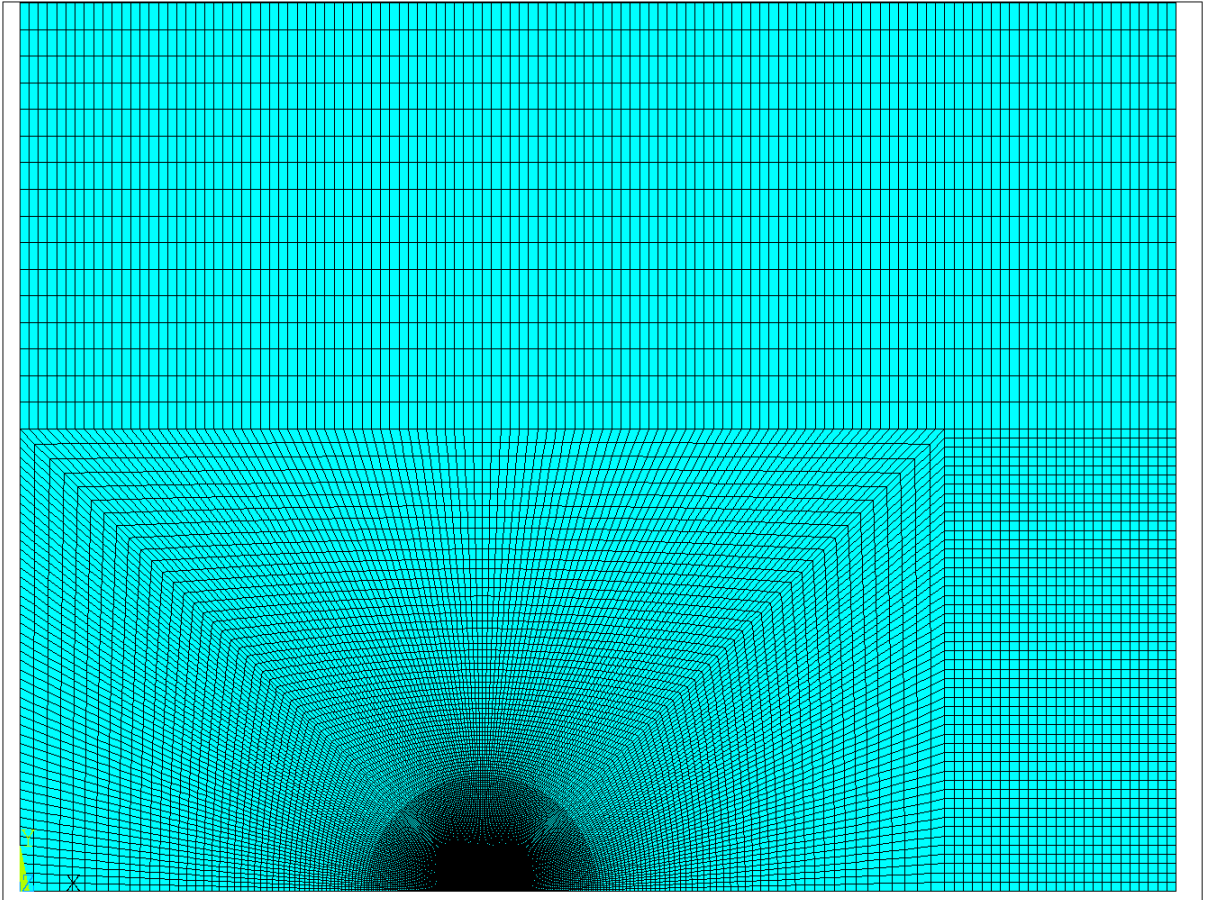
V případě modelování kompozitního materiálu (laminátu) byly při tvorbě sítě přiřazovány jednotlivým oblastem různé materiálové charakteristiky. Sít' aplikovaná na náš model má 51250 elementů, detail sítě v okolí kořene trhliny je znázorněn na obrázku 16.



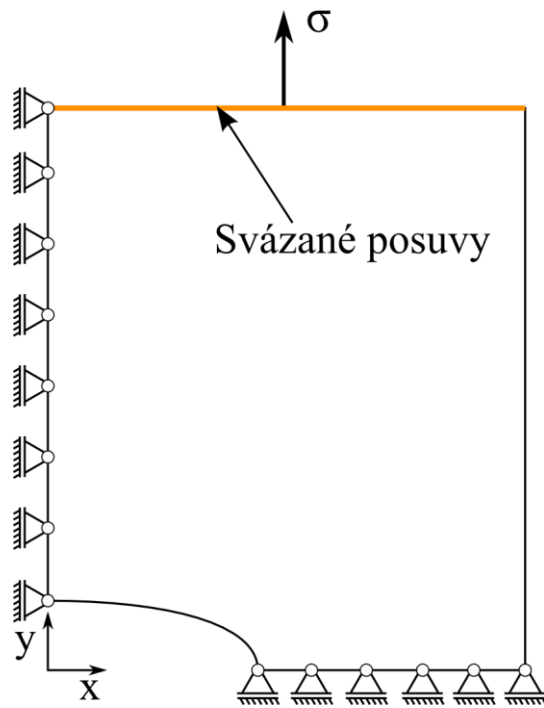
Obrázek 14 – Geometrie řešeného modelu



Obrázek 15 – Volná, mapovaná sít'; zdroj: [2]



Obrázek 16 – Síť elementů v řešeném modelu



Obrázek 17 – Znáornění okrajových podmínek

5.1.5 Okrajové podmínky

Okrajové podmínky jsou zřetelně znázorněny v obrázku 17. Na levé hraně je aplikována podmínka nulového posuvu ve směru osy x (z důvodu symetrie). Na spodní hraně za kořenem trhliny je předepsán nulový posuv ve směru obou os x a y. Horní hrana (v obrázku vyznačena oranžově), na které je aplikováno zatížení, je svázána stejnými posuvy ve směru osy y.

5.2 Výsledky numerického modelování

5.2.1 Homogenní materiál

Metoda konečného rozšíření trhliny

Po proběhnutí výpočtu se určí nejdříve potenciál vnitřních a vnějších sil pro první model (délka trhliny a). Tyto parametry se získají například pomocí funkce *VGET. Jejich součtem je získána celková elastická potenciální energie. To samé se provede pro model rozšířený o δa , tato velikost odpovídá velikosti jednoho elementu. Výsledný výpočet potom vypadá následovně:

$$G \approx \frac{\Pi(a + \delta a) - \Pi(a)}{\Delta a \cdot t} = \frac{1,317333087 - 1,31723341}{2 \cdot 0,00803 \cdot 30} = 0,000206875 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \quad (39)$$

Metoda zavírání trhliny

Po výběru uzlu v kořeni trhliny a zjištění síly, se posune trhlina o velikost jednoho prvku a provede se nový výpočet, následně se zjistí posuv stejného uzlu.

$$G_I \approx \frac{1}{2} \frac{F_y \cdot \delta v}{\delta a \cdot t} = \frac{1}{2} \frac{10,909 \cdot 2 \cdot 4,2033 \cdot 10^{-6}}{0,00803 \cdot 30} = 0,000190335 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \quad (40)$$

Metoda virtuálního zavírání trhliny

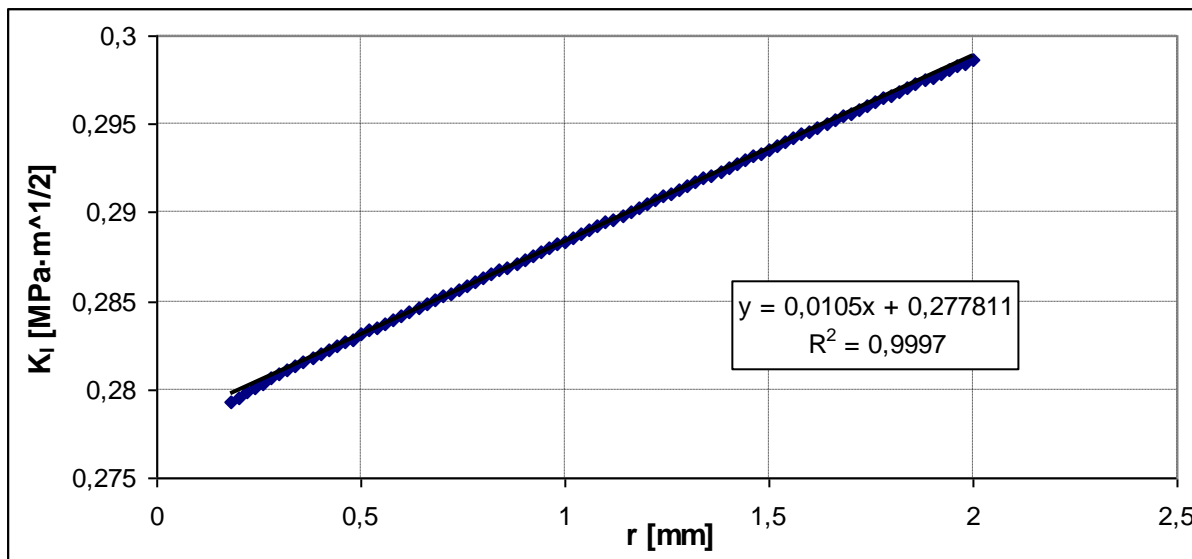
Postup je stejný jako v předchozím případě. Pokud proběhl výpočet z předchozí metody, stačí pouze zjistit sílu v novém kořeni trhliny.

$$G_I \approx \frac{1}{2} \frac{F_y \cdot \delta v}{\delta a \cdot t} = \frac{1}{2} \frac{10,996 \cdot 2 \cdot 4,2033 \cdot 10^{-6}}{0,00803 \cdot 30} = 0,000191853 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \quad (41)$$

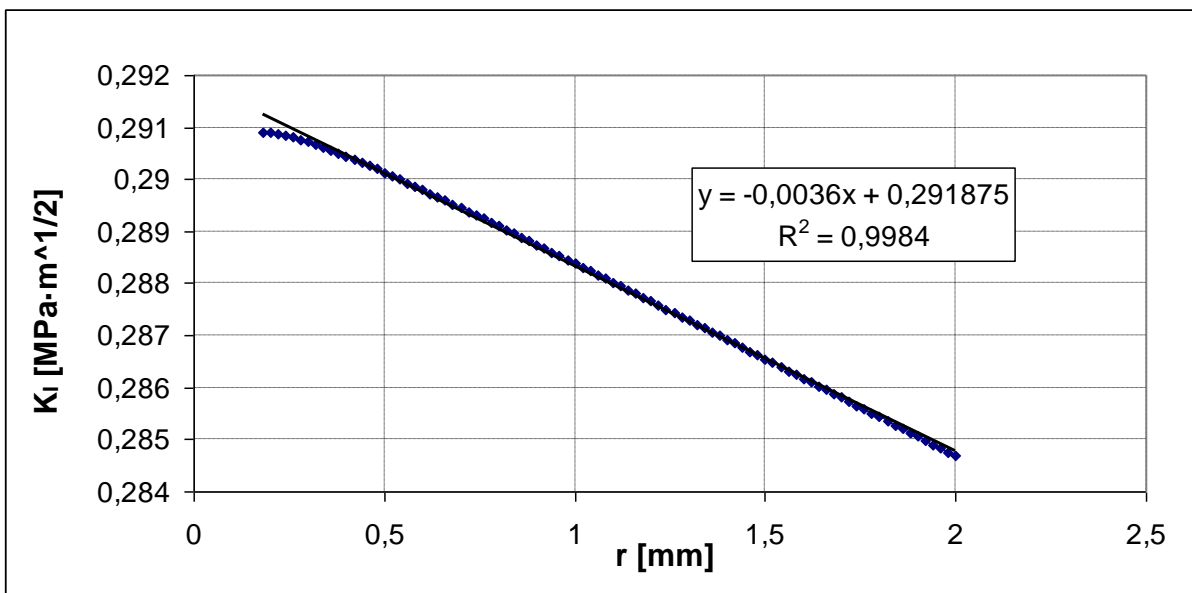
Výpočet součinitele intenzity napětí extrapolací

Následující výpočty a grafy jsou získány pomocí způsobu uvedeným v kapitole 4.1.4.

Při extrapolaci z posuvů (napětí) je uvažován posuv (napětí) nacházející se v rozmezí intervalu $r = (0,18; 2) \text{ mm}$ pro $\varphi = 0^\circ$. Graf 1 zobrazuje průběh $K_I = f(r)$, aplikovanou spojnicí trendu a její rovnici, kde hodnota 0,277811 je hodnota hledaného součinitele intenzity napětí K_I .



Graf 1 – Extrapolace z napětí



Graf 2 – Extrapolace z posunutí

Výsledky ze všech použitých metod jsou pro přehlednost uvedeny v tabulce 2. Pro zajímavost je zde uveden výsledek analytického výpočtu podle vztahu 14 pro nekonečnou taženou stěnu [3], výpočet dle postupu uvedených v kurzu Pevnost a pružnost II [10], výpočet podle [8] a také výsledky ze zabudovaných řešičů v programu ANSYS (KCALC, J-integral).

Tabulka 2: Shrnutí výsledků získaných různými metodami pro homogenní AMZ.

Materiál AMZ	K_I [MPa·√m]	G_I [N·m ⁻¹]
Extrapolace napětí	0,277811	0,262298
Extrapolace posunutí	0,291875	0,289528
FCEM	0,246721	0,206875
CCM	0,236652	0,190335
VCCM	0,237594	0,191853
Dle [8]	0,277130	0,261013
Pružnost a pevnost II	0,277985	0,262627
Analytický	0,236652	0,224399
KCALC	0,291527	0,288838
J-Integral	0,285052	0,276150

5.2.2 Trhlina na bi-materiálovém rozhraní

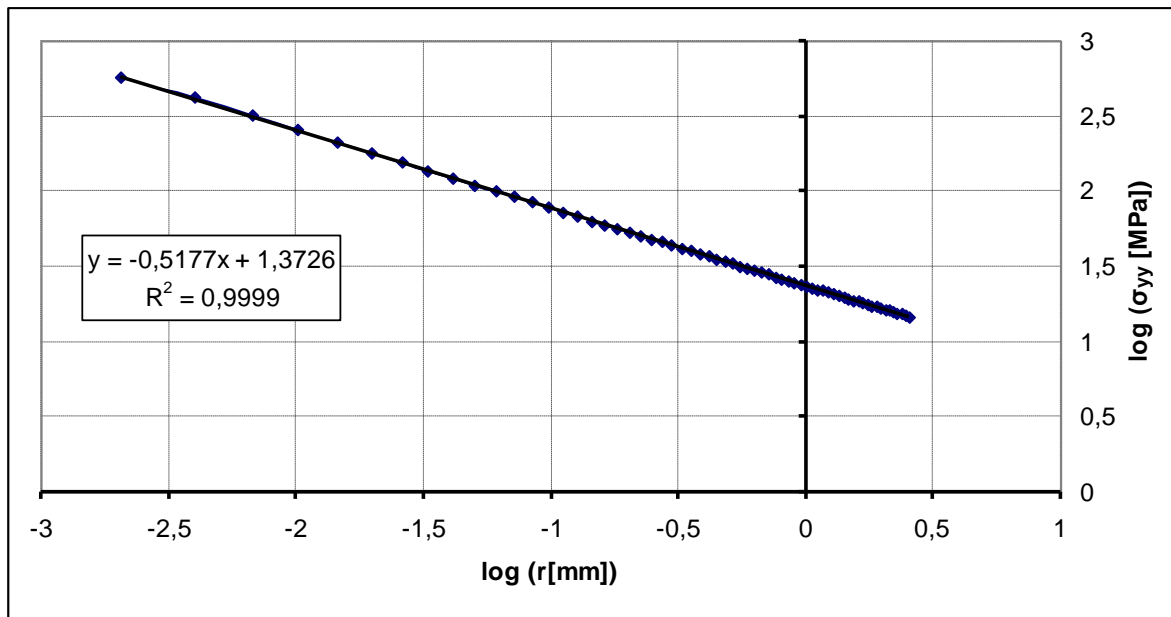
V této části je popsáno numerické určování lomových parametrů pro nehomogenní materiál. Model materiálu je znázorněn na obrázku 12. Nyní je uvažován případ trhliny, která se šíří z materiálu tužšího do poddajnějšího, tedy z materiálu ATZ do ATM. V prvním kroku je získán exponent singularity analytickou cestou a pro porovnání také přímou metodou (extrapolací z napětí a posunutí). Do rovnice (28) jsou dosazeny hodnoty kompozitních parametrů, v tomto případě vypadá rovnice po dosazení příslušných hodnot následovně:

$$0,6381115074 \cdot \lambda^2 - 0,460081395 + 2,852938538 \cdot \cos(\lambda\pi) = 0 \quad (42)$$

Výpočet je kvalitativně shodný s [4]. Po řešení této rovnice pro interval hodnot $\lambda = (0;1)$ je získán kořen $\lambda = 0,46391266$ takže hledaný exponent singularity je:

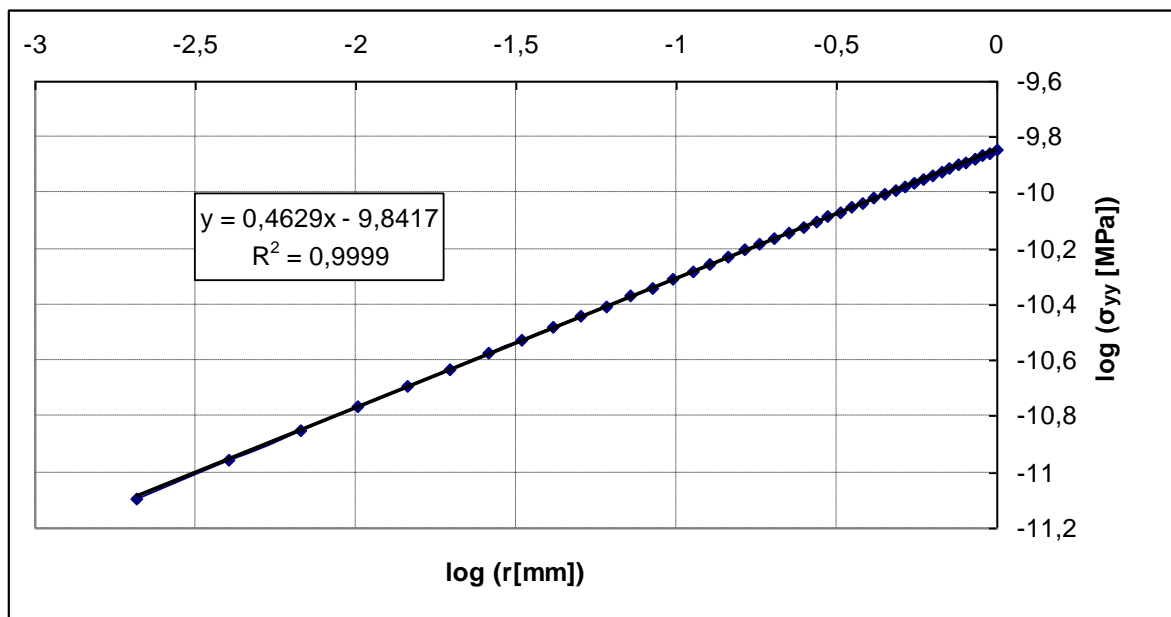
$$p = 1 - \lambda = 1 - 0,46391266 = 0,536097 \quad (43)$$

Pro zajímavost je určen exponent singularity pomocí regrese složek napětí σ_{yy} před čelem trhliny (graf 3). Směrnice přímky (v absolutní hodnotě) je přímo hledaný exponent singularity. Tato hodnota je porovnána s analytickým výpočtem. Z tabulky 3 výsledků je zřejmé, že exponenty singularity jsou přibližně stejné.



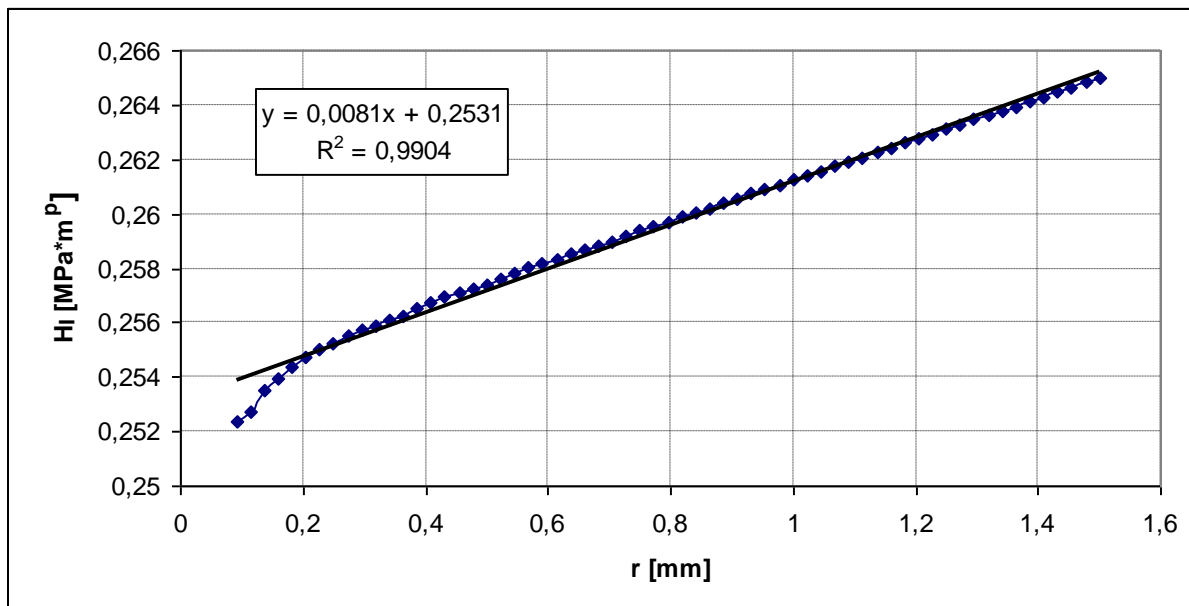
Graf 3 – Určení exponentu singularity z napětí

Stejný postup je aplikován i u posuvů. Zde je exponent singularity rovný směrnici přímky, který je odečtený od jedničky (podle grafu 4 je $p = 1 - 0,4629 = 0,5371$).



Graf 4 – Zjištění exponentu singularity z posuvů

Pro další výpočty je brána v úvahu analyticky vypočítaná hodnota exponentu singularity napětí, kterou lze považovat za přesnou. V dalším kroku je potřeba určit funkci g_r podle vztahu (35), která se dosadí do vztahu (32) a tím pádem je možno přistoupit k určení zobecněného součinitele intenzity napětí. Do tabulkového kalkulátoru se z programu ANSYS vypíší hodnoty napětí σ_{yy} pro příslušnou souřadnici r v patřičném intervalu. Pro každou polohu se provede výpočet H_I podle vztahu (36) a následně je provedena extrapolace (graf 5). V tomto konkrétním případě vyšlo $H_I = 0,2531 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{0,5361}$.



Graf 5 – Zjištění zobecněného součinitele intenzity napětí extrapolací

V poslední fázi výpočtu je zjištěna velikost efektivní hodnoty součinitele intenzity napětí. K tomu je potřeba kritická vzdálenost r_c získaná ze vztahu (38):

$$r_c = \frac{K_{IC}^2}{2\pi\sigma_f^2} = \frac{2,6^2}{2\pi 90^2} = 1,3283 \cdot 10^{-4} \text{ m} \quad (44)$$

Efektivní hodnota součinitele intenzity napětí je poté konečně:

$$K_{I,eff} = \left(\frac{1 - 2\nu_2}{(1 - p)^2 (4(1 - 2\nu_2) + (g_R(\lambda) - p)^2)} \right)^{\frac{1}{2}} r_c^{\frac{1}{2} - p} H_I = 0,9278 \cdot (1,3283 \cdot 10^{-4})^{1 - 0,5361} \cdot 0,2531 = 0,3241 \text{ MPa} \cdot \sqrt{\text{m}} \quad (45)$$

Postup výpočtu pro šíření trhliny z materiálu poddajnějšího (AMZ) do tužšího (ATZ) je totožný, výsledky obou případů jsou zaznamenány v tabulce 3.

Tabulka 3: Výsledky výpočtů lomových parametrů pro keramický kompozit AMZ/ATZ.

	AMZ \Rightarrow ATZ	ATZ \Rightarrow AMZ
kompozitní parametr α	-0,0904	0,1259
kompozitní parametr β	0,7179	1,3929
p analyticky	0,4646	0,5361
p extrapolací napětí	0,4390	0,5177
p extrapolací posuvů	0,4634	0,5371
funkce g_r	0,4725	0,5451
H_I [MPa·m ^p]	0,2980	0,2531
r_c [m]	$9,1516 \cdot 10^{-6}$	$1,3283 \cdot 10^{-4}$
$K_{I,eff}$ [MPa·√m]	0,2116	0,3241

6 Shrnutí dosažených výsledků

Při výpočtu lomových parametrů homogenního materiálu (AMZ) jsme jako referenční hodnotu vybrali extrapolaci z posunutí, jelikož by dle předpokladů měla vycházet nejpřesněji. Při porovnání s analytickým řešením pro centrální trhlinu v nekonečné stěně se však hodnoty významně liší. Důvodem je, že šířka modelové geometrie je nedostatečně velká a trhlinka ovlivňuje rozložení napětí na vnějším okraji taženého pásu. Nad rámec zadání byla tedy provedena změna okrajových podmínek (na vnějším okraji modelové geometrie byly předepsány sružené posuvy ve směru osy x) tak, aby podmínky odpovídaly nekonečné stěně. Po provedení patřičných výpočtů lze konstatovat, že analytické řešení se přesně shodovalo s hodnotou získanou z extrapolací posuvů. Nicméně, analytické určení hnací síly trhliny pro nekonečnou stěnu je velmi rychlé a takto zjištěná hodnota může velmi dobře sloužit jako orientační odhad tohoto parametru.

Je také vhodné porovnat výsledek získaný pomocí příkazu KCALC - zde se vypočítané hodnoty liší o necelé dvě desetiny procenta. Tento vnitřní řešič využívá také extrapolaci posunutí a zjištěná chyba je dána jen rozdílnou volbou cesty od kořene trhliny. Opět lze konstatovat, že takto získané hodnoty jsou poměrně přesné a lze doporučit používání těchto metod.

Porovnáme-li hodnoty získané pomocí semi-analytických metod (katalog Pružnosti a pevnosti II [10], práce prof. Knésla a Ing. Bednáře [8]), pak odchylky byly kolem pěti procent. Toto je považováno za dobrý výsledek, neboť výpočet hodnoty součinitele intenzity napětí je velmi rychlý s relativně vysokou přesností. Tyto metody jsou vhodné v inženýrských aplikacích pro posuzování těles s trhlinou, a to velmi efektivně.

Při užití metod FCEM, CCM a VCCM se odchylka od referenční hodnoty pohybuje kolem patnácti procent. Tyto metody jsou oproti ostatním složitější na následný postprocessing, který je často nutný dělat mimo konečnoprvkový systém ANSYS. Vzniklé odchylky jsou dány především tím, že je nutné zjistit sílu přímo v kořeni trhliny. Tato hodnota, odečítaná z jednoho uzlu, který tvoří singularitu, je však zatížena vysokou numerickou chybou. Lze konstatovat, že tyto metody fungují podle očekávání, nicméně vzhledem k jejich náročnosti (mnohdy je třeba tvořit i dva modely) nejsou vyloženě vhodné k rychlému posouzení trhliny. Přesto je třeba podotknout, že tyto metody mají své uplatnění – vychází z nich například metoda VCCT (Virtual Crack Closure Technique), kdy je předem známa cesta šíření trhliny a podél této cesty jsou vytvořeny kontaktní prvky s nadefinovanými lomovými parametry. Tato trhlinka se pak může sama šířit při například externím zatížení. Úloha je sice nelinerární, nicméně k takovému šíření trhliny postačuje pouze jeden model.

V případě problému trhliny v kompozitním materiálu byly provedeny výpočty k určení exponentu singularity napětí, byly učeny hodnoty zobecněného součinitele napětí H_I a jejich následný přepočítání na efektivní hodnotu součinitele napětí $K_{I,eff}$. Po provedení výpočtu exponentu singularity napětí lze konstatovat, že přímá metoda je dostatečně přesná. Oproti analytickému výpočtu se v případě regrese z napětí liší hodnoty o pět a půl procenta a v případě regrese z posunutí o pouhou čtvrtinu procenta. Lze tedy tuto numerickou metodou doporučit v případech, kde je analytické řešení nemožné nebo příliš pracné. Těmito případy může být objekt řešený ve 3D (exponent singularity napětí se mění v závislosti na poloze vůči volnému povrchu), nebo když je těleso zatíženo reziduálními napětími a podobně.

Poslední výpočty v praktické části byly zaměřeny na výpočet hodnoty efektivního součinitele napětí $K_{I,eff}$ trhliny, která je orientována kolmo na rozhraní, a jejíž kořen se nachází přímo na tomto rozhraní. Byly počítány obě varianty kompozice laminátu. Tedy,

v případě růstu trhliny z AMZ do ATZ je hodnota efektivního součinitele napětí $K_{I,eff}$ rovna $0,2116 \text{ MPa} \cdot \sqrt{\text{m}}$. Druhý případ, tedy růst trhliny z tužšího materiálu do poddajnějšího (ATZ \Rightarrow AMZ) má hodnotu $K_{I,eff}$ rovnu $0,3241 \text{ MPa} \cdot \sqrt{\text{m}}$. Pro úplnost uvedme hodnotu součinitele napětí K_I pro trhlínu, nacházející se v homogenním materiálu (AMZ), jejíž velikost je $0,291875 \text{ MPa} \cdot \sqrt{\text{m}}$. Při pohledu na výsledky vypočtených hodnot efektivního součinitele intenzity napětí na rozhraní dvou materiálů lze konstatovat, že pokud se trhlína šíří z poddajnějšího materiálu do tužšího, má tendenci omezit svůj růst. Na závěr této části je nutno podotknout, že výsledky dosažené při výpočtu trhliny na rozhraní dvou materiálů, kvalitativně odpovídají s prací [4].

Závěr

Hlavní cíl této práce spočíval v rešeršní studii problematiky výpočtu lomových parametrů, které jsou důležité při posuzování trhliny v kompozitním materiálu. Bylo nutné se na patřičné úrovni seznámit s lineárně elastickou lomovou mechanikou, jejíž poznatky jsou nezbytné pro další pochopení trhlin na bi-materiálovém rozhraní. Konkrétně se jedná o problematiku spojenou se změnou exponentu singularity napětí, kdy je nutné zobecnění celého problému a uvedení možností určení zobecněného součinitele intenzity napětí. Posledním krokem je určení efektivní hodnoty součinitele napětí, kterou poté můžeme porovnávat například s lomovou houževnatostí. Poznamenejme, že tato práce se omezuje pouze na trhlínu kolmou na rozhraní dvou materiálů.

Součástí této práce je krátké pojednání o kompozitních materiálech. V této části je uvedeno členění jednotlivých kompozitních materiálů, možnosti jejich konstrukce a jsou uvedeny jejich hlavní výhody/nevýhody. Je zde i krátce pojednáno o možnostech zhouževnatění materiálů, jsou-li vzájemně vrstvené. Právě přechod trhliny přes rozhraní dvou materiálů může například vést k zastavení růstu trhliny a tím pádem dochází ke zvýšení únosnosti celé konstrukce. V případě kompozitních materiálů může tedy trhlina zůstat uzavřena na rozhraní a obsluha může včas takovou součástku vyměnit za jinou. Postupy uvedené v této práci mohou pomoci k posouzení takových trhlin.

Ačkoliv se tato práce zabývá zejména trhlínou na rozhraní dvou materiálů, je vhodné uvést možnosti určování lomových parametrů v případě homogenního tělesa. Tyto postupy lze rozdělit na analytické, semi-analytické a numerické. Všechny tyto postupy jsou podrobněji popsány a jsou uvedeny jejich výhody a nevýhody. Na modelovém příkladu byly použity tyto postupy a jejich přesnost byla kvantifikována.

Poslední, hlavní část bakalářské práce se zabývá problematikou trhliny kolmé na rozhraní dvou materiálů. Je zde uveden celý analytický aparát k určení exponentu singularity napětí. Toto řešení je však odvozeno pouze pro 2D problémy, z toho důvodu je v práci uvedena možnost určení tohoto exponentu i numericky. Lze konstatovat, že tento postup určení exponentu singularity napětí dává dostatečně přesné výsledky a že jej lze použít u problémů, na které analytické řešení nebylo odvozeno.

Dále byl uveden postup výpočtu zobecněného součinitele intenzity napětí a efektivní hodnoty součinitele intenzity napětí pro složený materiál. Zobecněný součinitel intenzity napětí lze získat tak zvanou přímou metodou, kdy je otevírací napětí extrapolováno do kořene trhliny. Je však třeba tuto hodnotu upravit o funkce, které berou v potaz elastické vlastnosti jednotlivých materiálů v kompozitu a exponent singularity napětí. Takto získaná hodnota nelze porovnávat přímo s materiálovými vlastnostmi a nejsme schopni přímo rozhodnout o chování takové trhliny. Z toho důvodu je třeba použít kritérium založené na konceptu hustoty deformační energie. Tak jsme schopni získat efektivní hodnotu součinitele intenzity napětí, která lze již porovnávat s naměřenou materiálovou veličinou, například lomovou houževnatostí.

Celá uvedená teorie byla aplikována na AMT/ATZ keramický laminátový kompozit. Pro tento případ byly vytvořeny dva modely, kdy se mění prostředí, do kterého se trhlina šíří. Všechny ostatní parametry (délka trhliny, tloušťka vrstev) zůstaly stejné. Závěrem těchto výpočtů je fakt, že šíří-li se trhlina z prostředí poddajnějšího do prostředí tužšího, trhlina má snahu se na tomto rozhraní zpomalit. V opačném případě má trhlina dostatek energie, aby rozhraní překonala a pokračovala v šíření ve druhém materiálu. Na základě získaných výsledků poznamenejme, že zlepšování mechanických vlastností kompozitu nemusí nutně

spočívat pouze ve vylepšování výztuže a matric, ale také ve vývoji vrstvy mezi maticí a výztuží, která bezpochyby má důležitou roli na konečné vlastnosti celku.

Závěrem dodejme, že cíle uvedené v zadání bakalářské práce byly splněny.

Literatura

- [1] ANDERSON, T. *Fracture Mechanics: fundamentals and applications*. 2nd ed. Boca Raton: CRS Press, 1995, xvi, 688 s. ISBN 08-493-4260-0.
- [2] ANSYS, Ansys Reference Manual. Version 14.5, 2012.
- [3] VLK, M., ZDENĚK, F. *Mezní stavy a spolehlivost*. Brno, 2007.
- [4] NÁHLÍK, L. *Šíření únavových trhlin v okolí rozhraní dvou elastických materiálů*. 1. vyd. Brno: VUT v Brně, 2002. 36 s. ISBN 80-214-2184-3. Disertační práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav Mechaniky těles.
- [5] NÁHLÍK, L., ŠESTÁKOVÁ, L., HUTAŘ, P. Estimation of apparent fracture toughness of ceramic laminates. *Computational Materials Science*. 2009, vol. 46, issue 3, s. 614-620.
- [6] HUTAŘ, P., NÁHLÍK, L., KNĚSL, Z. The effect of a free surface on fatigue crack behaviour. *International Journal of Fatigue*. 2010, vol. 32, issue 8, s. 1265-1269.
- [7] VRBKA, J. *Mechanika kompozitů*. Brno, 2008.
- [8] KNĚSL, Z., BEDNÁŘ, K. *Dvoupřímětrová lomová mechanika: výpočet parametrů a jejich hodnoty*. Brno: Ústav fyziky materiálů AV ČR, 1997, 48 s.
- [9] BAREŠ, R. A. *Kompozitní materiály*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1988, 325 s.
- [10] ONDRÁČEK, E., VRBKA, J. a JANÍČEK, P. *Mechanika těles: pružnost a pevnost II*. Brno: CERM, 2002, 262 s. Učební texty vysokých škol (Vysoké učení technické v Brně). ISBN 80-214-2214-9.
- [11] KUNZ, J. *Základy lomové mechaniky*. 2. přeprac. vyd. Praha: ČVUT, 1994, 172 s. ISBN 80-010-1215-8.
- [12] NÁHLÍK, L., ŠESTÁKOVÁ, L., HUTAŘ, P., BERMEJO, R.. Prediction of crack propagation in layered ceramics with strong interfaces. *Engineering Fracture Mechanics*. 2010, vol. 77, issue 11, s. 439-454.
- [13] KNĚSL, Z., NÁHLÍK, L., RADON, J.C. Influence of interface on fatigue threshold values in elastic bimaterials. *Computational Materials Science*. 2003, vol. 28, 3-4, s. 620-627.
- [14] KOŘÍNEK, Z. Kompozity. [online]. [cit. 2014-05-22]. Dostupné z: <http://mujweb.cz/zkorinek/technologie.pdf>
- [15] MISHNAEVSKY, L. *Computational mesomechanics of composites: numerical analysis of the effect of microstructures of composites on their strength and damage resistance*. Hoboken, NJ: John Wiley, 2007, XV, 276 p. ISBN 978-047-0027-646.
- [16] FLORIAN, Z. *Pružnost a pevnost II: přednášky*. FSI VUT v Brně, 2013.
- [17] BERMEJO, R., BAUDÍN, C., MORENO, R., LLANES, L., SANCHEZ-HERENCIA, A. J.: Processing optimisation and fracture behaviour of layered ceramic composites with highly compressive layers. *Composites Science and Technology*, Vol. 67 (2007), p. 1930.
- [18] SIH, G.C.: *Mechanics of fracture I. Methods of analysis and solutions of crack problems*. Leyden: Nordhoff Int Publ; 1973.
- [19] HELLEN, T. K. On the method of virtual crack extensions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1975, vol. 9, issue 1, s. 187-207.
- [20] IRWIN, G.R., Fracture I, *Handbuch der Physik VI*, s. 558–590. Springer Verlag, Berlin, Germany, 1958.

- [21] RYBICKI, E.F., KANNINEN, M.F. A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral. *Engineering Fracture Mechanics*. 1977, vol. 9, issue 4, s. 931-938.

Seznam použitých symbolů

a	délka trhliny	[m]
\vec{e}_I	jednotkový vektor orientovaný ve směru zatěžování modu I	[-]
\vec{e}_{II}	jednotkový vektor orientovaný ve směru zatěžování modu II	[-]
\vec{e}_{III}	jednotkový vektor orientovaný ve směru zatěžování modu III	[-]
g_r	funkce potřebná pro získání H_I	[-]
k	konstanta	[-]
n_i	normálový vektor	[-]
p	exponent singularity napětí	[-]
r	vzdálenost od kořene trhlín	[m]
r_c	poloměr kritické oblasti	[m]
r_k	poloměr plastické oblasti	[m]
s	délka	[m]
t	tloušťka	[m]
u	posuv ve směru osy x	[m]
u_i	složky vektoru posuvu	[m]
v	posuv ve směru osy y	[m]
w	hustota deformační energie	[MPa]
A	plocha trhliny	[m ²]
E	celková energie (kapitola 3.2.1)	[J]
E	modul pružnosti v tahu	[MPa]
E^c	upravený modul pružnosti pro rovinnou napjatost/deformaci	[-]
F_x	síla ve směru osy x	[N]
F_y	síla ve směru osy y	[N]
G	hnací síla trhliny	[N · m ⁻¹]
G_s	modul pružnosti ve smyku	[MPa]
H_I	zobecněný součinitel intenzity napětí	[MPa · m ^p]
J	hodnota J integrálu	[N · m ⁻¹]
J_I	hodnota J integrálu pro mód I	[N · m ⁻¹]
K_I	součinitel intenzity napětí	[MPa · √m]
K_{IC}	lomová houževnatost	[MPa · √m]
$K_{I,eff}$	efektivní hodnota součinitele intenzity napětí	[MPa · √m]
L	výška modelu	[m]
T_i	složky vektoru síly	[N]
W_s	práce potřebná pro vytvoření nových ploch	[J]
W	šířka modelu	[m]
α	konstanta udávající rovinnou deformaci/napjatost (kapitola 3)	[-]
α, β	kompozitní parametry	[-]

$\vec{\delta}$	vektor posuvu	[m]
δ_I	posuv ve smyslu namáhání módem I	[m]
δ_{II}	posuv ve smyslu namáhání módem II	[m]
δ_{III}	posuv ve smyslu namáhání módem III	[m]
ε_{ij}	tenzor přetvoření	[-]
ε_z	přetvoření v ose z	[-]
κ	konstanta pro rozlišení rovinné napjatosti/deformace	[-]
λ	parametr pro určení singularity napětí	[-]
ν	Poissonův poměr	[-]
σ	aplikované napětí	[MPa]
σ_k	mez kluzu materiálu	[MPa]
σ_f	mez pevnosti materiálu	[MPa]
σ_{ij}	tenzor napětí	[MPa]
$\sigma_{ij}^{(total)}$	tenzor napětí postihující všechny módy namáhání	[MPa]
$\sigma_{ij}^{(I)}$	tenzor napětí vyvolávající zatěžovací mód I	[MPa]
$\sigma_{ij}^{(II)}$	tenzor napětí vyvolávající zatěžovací mód II	[MPa]
$\sigma_{ij}^{(III)}$	tenzor napětí vyvolávající zatěžovací mód III	[MPa]
σ_{xx}	x-ová složka tenzoru napětí	[MPa]
σ_{yy}	y-ová složka tenzoru napětí	[MPa]
σ_{zz}	z-ová složka tenzoru napětí	[MPa]
τ_{xy}	smyková složka tenzoru napětí v rovině xy	[MPa]
φ	polohový úhel	[rad]
Π	potenciální energie	[J]
Ω	potenciál vnějších sil	[J]