

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

STEFFENSENOVA METODA A METODY STEFFENSENOVA TYPU

STEFFENSEN'S METHOD AND STEFFENSEN TYPE METHODS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Sabina Frýzová

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Mgr. Jitka Zatočilová, Ph.D.

BRNO 2020

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav matematiky
Studentka:	Sabina Frýzová
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	Mgr. Jitka Zatočilová, Ph.D.
Akademický rok:	2019/20

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Steffensenova metoda a metody Steffensenova typu

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Jednou z nejznámějších numerických metod pro hledání kořene nelineární rovnice je Newtonova metoda. Její nevýhodou je ovšem nutnost výpočtu derivace, což může být někdy obtížné nebo zcela nemožné. Proto vznikly různé modifikace této metody, ve kterých je tato derivace nahrazena aproximací. Mezi tyto modifikace patří i Steffensenova metoda. V průběhu let byly odvozeny další varianty Steffensenovy metody, tzv. metody Steffensenova typu, a to především s cílem zvýšit řád konvergence původní metody.

Cíle bakalářské práce:

Popis Steffensenovy metody.
Uvedení metod Steffensenova typu.
Naprogramování a srovnání uvedených metod.

Seznam doporučené literatury:

HOROVÁ, I. a ZELINKA, J. Numerické metody. Brno: Masarykova univerzita v Brně. 2004.

ZHENG, Q., WANG, J., ZHAO, P. a LI, Z. A Steffensen-like method and its higher-order variants. Applied Mathematics and Computation. Vol. 214(1), p. 10-16, 2009.

CORDERO, A., HUESO, J. L., MARTÍNEZ, E. a TORREGROSA, J. R. Steffensen type methods for solving nonlinear equations. Journal of Computational and Applied Mathematics. Vol. 236(12), P. 3058-3064, 2012.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2019/20

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá Steffensenovou metodou a metodami Steffensenova typu. Samotným metodám předchází seznámení se s problematikou řešení nelineárních rovnic a řádem konvergence. Je zde uvedena i Newtonova iterační metoda pro řešení nelineárních rovnic, z které je Steffensenova metoda odvozena. Na závěr jsou uvedeny výsledky jednotlivých metod v prostředí MATLAB.

Summary

This bachelor thesis deals with the Steffensen method and Steffensen-type methods. The methods themselves are preceded by familiarisation with the problem of solving nonlinear equations and the order of convergence. This thesis presents Newton's interaction method for solving nonlinear equations from which the Steffensen method is derived. Finally, the results of individual methods in the MATLAB environment are shown.

Klíčová slova

metody Steffensenova typu, nelineární rovnice, Newtonova metoda, Steffensenova metoda

Keywords

Steffensen type methods, nonlinear equations, Newton's method, Steffensen's method

FRÝZOVÁ, S. *Steffensenova metoda a metody Steffensenova typu*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2020. 46 s. Vedoucí Mgr. Jitka Zatočilová, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Steffensenova metoda a metody Steffensenova typu* vypracovala samostatně pod vedením Mgr. Jitky Zatočilové, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Sabina Frýzová

Ráda bych poděkovala vedoucí práce Mgr. Jitce Zatočilové Ph.D. za profesionální a vstřícné vedení, cenné rady a trpělivost.

Sabina Frýzová

Obsah

1	Úvod	2
2	Nelineární rovnice	3
	Startovací metody	4
3	Newtonova metoda	7
4	Steffensenova metoda	12
5	Metody Steffensenova typu	15
	Dehghan-Hajarianova metoda	15
	Metoda podle Sharmy	15
	Metoda podle Trauba	16
	Metoda podle Jaina	17
	Metoda podle Zhenga	17
	Metoda podle Pavaloiua	18
	Metoda podle Liua 1	19
	Metoda podle Singha	20
	Metoda podle Hafize	21
	Metoda podle Liua 2	23
	Metoda podle Rena	24
	Metoda podle Cordera 1	25
	Metoda podle Cordera 2	26
	Vylepšená metoda podle Cordera	27
	Metoda podle Wanga	28
	Metoda podle Soleymania 1	29
	Metoda podle Soleymania 2	30
6	Srovnání metod	33
7	Závěr	42
8	Seznam použité literatury	43
9	Seznam použitých zkratk a symbolů	46

1 Úvod

Hledání řešení nelineární rovnice $f(x) = 0$ je jedním z důležitých a náročných problémů vědy a inženýrství. Tyto problémy vznikají například v kinetické teorii plynů, v pružnosti, ve výzkumu provozu a v dalších aplikacích.

Za nejznámější iterační metodu pro nalezení kořene nelineární rovnice je považována Newtonova metoda. Tato metoda má velký přínos v numerické matematice již od 17. století. Měla vliv také na Johana Frederika Steffensena, který modifikoval derivaci v algoritmu a vznikla tak nová iterační metoda, pojmenována po výše uvedeném autorovi.

J. F. Steffensen se narodil roku 1873 v Kodani, kde začal svoji kariéru v pojišťovnictví. Matematická povaha problémů s pojišťováním ho vedla ke studiu teorii čísel. Stal se profesorem pojistné matematiky, vydal 107 vědeckých publikací z různých oblastí matematiky. V letech 1922–24 a 1930–33 byl prezidentem Dánské pojistné společnosti a v letech 1930–36 prezidentem Dánské matematické společnosti. Obě tyto společnosti z něj učinily čestného člena, stejně jako Švédská pojistná společnost a Statistická společnost Československá.

Tato bakalářská práce se věnuje Steffensenově metodě a metodám Steffensena typu, což jsou iterační numerické metody pro hledání jednoduchého reálného kořene nelineární rovnice. Práce je rozdělena na šest kapitol a struktura je následující.

Ve druhé kapitole jsou uvedeny základní pojmy nelineární rovnice, její řešení, řád konvergence a index efektivity. Také je zde představena takzvaná startovací metoda, za kterou jsme zvolili metodu bisekce, která je známá také pod názvem metoda půlení intervalů. Díky ní můžeme určit počáteční aproximaci x_0 pro Steffensenovu metodu a její modifikace.

Třetí kapitola je věnována Newtonově iterační metodě, které se také říká metoda tečen. Je zde uvedeno odvození metody a grafické řešení. V této kapitole se již setkáváme s problémem konvergence.

Ve čtvrté kapitole jsou nejdříve uvedeny tři různé aproximace první derivace, na které se budeme odkazovat v dalších kapitolách. Poté postup nahrazení derivace dopřednou diferencí v Newtonově iterační metodě, a tedy samotné odvození Steffensenovy iterační metody. Zmíníme se také o řádu konvergence a indexu efektivity Steffensenovy metody.

Následující pátá kapitola je zaměřena na metody Steffensena typu. Od roku 1960 bylo navrženo spoustu iteračních metod, které jsou zbavené derivace ve svém algoritmu. Seřazeny jsou podle řádu konvergence a v této práci jsou pojmenovány podle autorů článků, z kterých jsou metody převzaty. Naším cílem nebylo detailní odvození jednotlivých metod Steffensena typu, ale u každé z metod je nástin jejího odvození a je zde uveden zdroj, kde se dá dohledat více informací.

V poslední, šesté kapitole, jsou srovnány výsledky jednotlivých metod, které byly naprogramovány v prostředí MATLAB. Zaměřili jsme se hlavně na porovnání řádu metody s numerickým řádem na zvolených testovacích nelineárních funkcích a také na počty provedených iterací, které jednotlivé metody k nalezení kořene potřebovaly.

2 Nelineární rovnice

Nelineární rovnice se vyskytují téměř ve všech vědeckých oblastech, zejména ve fyzikálních a matematických vědách. Analyticky nalézt řešení nelineárních rovnic může být výpočetně velmi náročné nebo ani nelze získat přesné řešení. Proto se budeme zabývat numerickými metodami, které nám zajistí, abychom dostali výsledek s požadovanou přesností.

K řešení používáme iterační metody, které fungují tak, že z jedné nebo několika počátečních aproximací hledaného kořene ξ nelineární rovnice $f(x) = 0$ generujeme posloupnost x_0, x_1, x_2, \dots , která ke kořenu ξ konverguje. Některým metodám stačí dodat interval $\langle a, b \rangle$, v kterém se hledaný kořen ξ nachází. Jiné metody vyžadují blízkou počáteční aproximaci k hledanému kořenu ξ . Tyto metody konvergují mnohem rychleji. Proto kombinujeme obě metody: začneme s „hrubou“ metodou, díky které zpřesníme lokalizaci hledaného kořene a přejdeme na „jemnější“, rychleji konvergující metodu, kterou nalezneme hledaný kořen s požadovanou přesností.

V této práci se budeme zabývat hledáním kořenů nelineární rovnice

$$f(x) = 0, \quad (2.1)$$

kde x je reálná proměnná a $f(x)$ spojitá funkce, která má tolik derivací, kolik je v dané situaci zapotřebí. Číslo ξ je řešením rovnice (2.1) a budeme jej nazývat *kořenem* rovnice.

Pro zjednodušení se omezíme na problém určení jednoduchého reálného kořene ξ , takže předpokládáme $f'(\xi) \neq 0$.

Definice 2.1. [5, str. 82] Nechť x_0, x_1, x_2, \dots je posloupnost, která konverguje ke kořenu ξ a $e_k = x_k - \xi$ je chyba v k -tém kroku. Když existuje číslo p a konstanta $C \neq 0$ taková, že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C, \quad (2.2)$$

pak p se nazývá *řád konvergence* posloupnosti a C je *chybová konstanta*. Danou metodu nazveme řádu p , jestliže všechny konvergentní posloupnosti získané touto metodou mají řád konvergence větší nebo rovný p a nejméně jedna z těchto posloupností má řád konvergence rovný přesně p .

Různé iterační metody můžeme porovnávat na základě jejich řádů, to znamená podle rychlosti konvergence. Je ale zapotřebí zohlednit také, tzv. index efektivity.

Definice 2.2. [9, str. 261] Nechť p je řád konvergence metody a r je celkový počet funkčních hodnot v jedné iteraci metody. Pak číslo

$$I_e = p^{1/r} \quad (2.3)$$

nazveme *index efektivity*.

Index efektivity nám tedy ukazuje, jaká je výpočetní pracnost, která se měří množstvím výpočtů funkčních hodnot, které potřebujeme k dosažení dané přesnosti v jednom kroku metody. Spolu s řádem konvergence získáváme ukazatele výhod, či nevýhod jednotlivých iteračních metod.

Startovací metody

Jedna z možností, jak lokalizovat kořen ξ nelineární rovnice $f(x) = 0$, je využít graf funkce $f(x)$. Ručně nebo pomocí vhodného softwaru si vykreslíme funkci a sledujeme průsečíky s osou x .

Kořeny ξ nelineární rovnice $f(x)$ se zpravidla hledají ve více krocích a to tak, že kořeny separujeme. To znamená, že nalezneme intervaly, ve kterých se nachází kořen ξ a na těchto intervalech volíme počáteční aproximaci x_0 , popřípadě dvě počáteční aproximace x_0 a x_1 , jestliže to metoda vyžaduje.

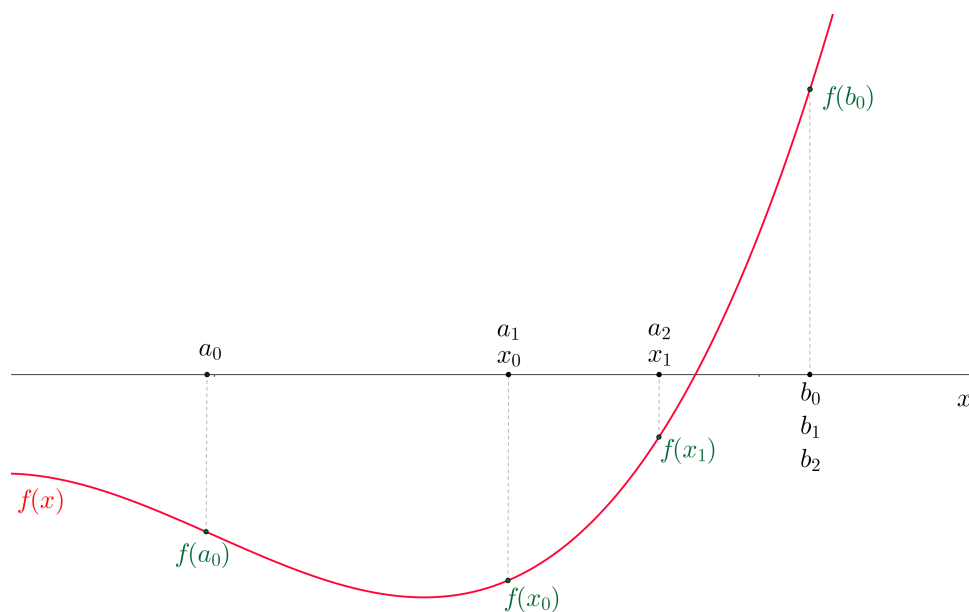
Každá iterační metoda nemá zaručenou konvergenci. Proto si volíme takzvanou startovací metodu, která konverguje vždy. Například metoda bisekce, metoda prosté iterace, metoda regula falsi nebo Brentova metoda. Protože startovací metody nejsou hlavním cílem této práce, tak si zde si rozebereme pouze jednu z těchto startovacích metod a to metodu bisekce.

Metoda bisekce

Věta 2.3. [12, str. 23]

Nechť $f \in C \langle a, b \rangle$ a nechť funkce f nabývá v koncových bodech intervalu funkčních hodnot s opačnými znaménky, tj. $f(a) \cdot f(b) < 0$. Pak uvnitř tohoto intervalu leží alespoň jeden kořen rovnice (2.1). Jestliže existuje f' a má konstantní znaménko v tomto intervalu, pak existuje právě jeden kořen $\xi \in (a, b)$.

Na větě 2.3 je založena metoda bisekce, která je známá také jako metoda půlení intervalu a funguje na principu znaménkových změn.



Obrázek 2.1: Metoda bisekce.

Pokud $f \in C \langle a, b \rangle$ a $f(a) \cdot f(b) < 0$, tak podle věty 2.3 leží v intervalu $\langle a, b \rangle$ alespoň jeden kořen ξ nelineární rovnice $f(x) = 0$. Předpokládejme, že tento kořen ξ je jediný. Položíme $a_0 = a$, $b_0 = b$ a $x_0 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$.

Mohou nastat 3 možnosti:

1. Jestliže vyjde součin $f(a_0) \cdot f(x_0) < 0$, leží kořen ξ v intervalu $\langle a_0, x_0 \rangle$ a položíme $a_1 = a_0$, $b_1 = x_0$ a postup opakujeme pro nový interval $\langle a_1, b_1 \rangle$.
2. Jestliže vyjde součin $f(x_0) \cdot f(b_0) < 0$, leží kořen ξ v intervalu $\langle x_0, b_0 \rangle$ a položíme $a_1 = x_0$, $b_1 = b_0$ a postup opakujeme pro nový interval $\langle a_1, b_1 \rangle$.
3. Jestliže $f(x_0) = 0$, pak je kořen nalezen a položíme $\xi = x_0$.

Dostáváme tedy posloupnost intervalů

$$\langle a_0, b_0 \rangle \supset \langle a_1, b_1 \rangle \supset \dots \langle a_k, b_k \rangle \supset \dots,$$

kde $f(a_k) \cdot f(b_k) < 0$, $k = 0, 1, \dots$

Přičemž pro koncové body intervalů $\langle a_k, b_k \rangle$, $k = 0, 1, \dots$ platí

$$a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_k \leq a_{k+1} \leq \dots \leq \xi \leq \dots \leq b_{k+1} \leq b_k \leq \dots \leq b_0.$$

Vztah udávající délky intervalů a délky těchto podintervalů je:

$$b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

kde $a_0 = a$ a $b_0 = b$.

Protože posloupnosti $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ pro $k = 0, 1, \dots$ jsou omezené, monotonní a délka intervalů $\langle a_k, b_k \rangle$ konverguje k nule, tak platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \xi.$$

Věta 2.4. *Nechť $f \in C \langle a, b \rangle$, $f(a) \cdot f(b) < 0$ a nechť f má v intervalu $\langle a, b \rangle$ jediný kořen ξ . Pak metoda bisekce generuje posloupnost $x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$, $k = 0, 1, \dots$, která konverguje ke kořenu ξ a aproximuje kořen ξ takto:*

$$|x_k - \xi| \leq \frac{b - a}{2^{k+1}}. \quad (2.4)$$

Důkaz. [12, str. 24] Snadno ukážeme, že ξ je kořenem rovnice $f(x) = 0$. Funkce f je spojitá a platí $f(a_k) \cdot f(b_k) < 0$, $k = 0, 1, \dots$. Odtud

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(b_k) \cdot f(a_k) = f^2(\xi) \leq 0,$$

ale z toho plyne, že $f(\xi) = 0$. Protože $x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$, $\xi \in \langle a_k, b_k \rangle$ a $b_k - a_k = \frac{b - a}{2^k}$, tak $|x_k - \xi| \leq \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b - a}{2^{k+1}}$. □

Za přibližnou hodnotu kořene ξ bereme střed posledního nalezeného intervalu

$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}.$$

Protože se kořen ξ určitě nachází uvnitř posledního intervalu $\langle a_k, b_k \rangle$, může se x_k od přesné hodnoty kořene ξ lišit nanejvýš o polovinu jeho délky, tj. o ε , kde

$$|x_k - \xi| < \varepsilon.$$

Metoda bisekce nepotřebuje kritérium pro zastavení výpočtu. Ze vztahu $\frac{b - a}{2^{k+1}} \leq \varepsilon$ vyčteme, že jedinou neznámou je k , které udává počet iterací. Metodou bisekce nalezneme kořen ξ rovnice $f(x) = 0$ vždy. Je tedy spolehlivá, ale nevýhodou je, že konverguje velmi pomalu. Proto ji použijeme jen na zúžení původního intervalu $\langle a, b \rangle$ a poté použijeme jinou, rychlejší metodu.

3 Newtonova metoda

V této kapitole si popíšeme Newtonovu metodu, nebo-li metodu tečen. Jedná se o nejnámější zpřesňující metodu. Pro jednoduchost budeme v dalším textu předpokládat, že nelineární rovnice $f(x) = 0$ má jednoduchý kořen ξ , tj. $f'(\xi) \neq 0$.

Nejprve musíme zvolit vhodnou počáteční aproximaci x_0 , která je blízko kořene ξ . Můžeme předpokládat, že známe přibližné řešení x_k , které je dostatečně blízko hledanému kořenu ξ . Použijeme-li Taylorův rozvoj na nalezení kořene ξ nelineární rovnice $f(x) = 0$, tak dostáváme

$$\begin{aligned} 0 &= f(\xi) \\ &= f(x_k) + f'(x_k) \cdot (\xi - x_k) + \frac{1}{2} f''(\eta) \cdot (\xi - x_k)^2, \quad \eta \in (\xi, x_k) \\ &\approx f(x_k) + f'(x_k) \cdot (\xi - x_k). \end{aligned}$$

Odtud si vyjádříme hledaný kořen ξ :

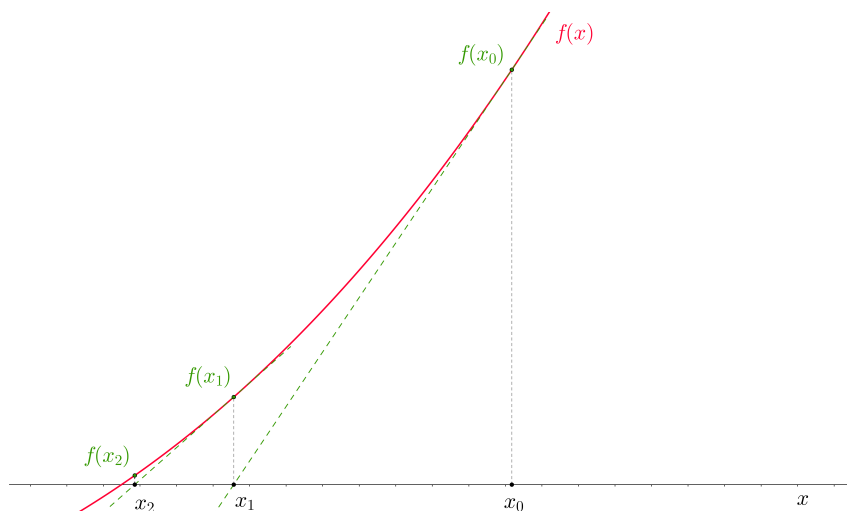
$$\xi \approx x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (3.1)$$

Iterační metoda, kterou jsme si odvodili pomocí (3.1) je tvaru

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.2)$$

(za předpokladu $f'(x_k) \neq 0$) a nazývá se *Newtonova metoda* (NM), či *metoda tečen*.

Z názvu *metoda tečen* vyplývá, že budeme pracovat s tečnami ke grafu funkce f , proto musíme předpokládat, že funkce f má derivaci. Graficky Newtonovu metodu můžeme popsat takto: zvolíme počáteční aproximaci kořene x_0 a sestrojíme tečnu ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $[x_0, f(x_0)]$. Nalezneme bod x_1 , který je průsečíkem osy x a námi sestrojené tečny. Znovu sestrojíme tečnu ke grafu funkce $f(x)$, nyní v bodě $[x_1, f(x_1)]$ a průsečík nové tečny s osou x nazveme x_2 . Takto postupujeme, až dostaneme aproximaci x_k , která je dostatečně blízko kořenu ξ .



Obrázek 3.1: Newtonova metoda.

Pomocí navržené iterační metody chceme získat posloupnost $\{x_k\}$, pro $k = 0, 1, \dots$, která konverguje ke kořenu ξ . Tedy takovou posloupnost, pro kterou je:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi.$$

Newtonova metoda je považována za nejefektivnější, avšak má tu nevýhodu, že u ní není zaručena konvergence. Ta závisí na vhodně zvolené počáteční aproximaci x_0 . Můžeme ale stanovit dodatečné podmínky pro to, aby konvergence Newtonovy metoda zaručena byla:

Věta 3.1 (Fourierova podmínka). *Nechť funkce $f \in C^2(a, b)$ a nechť rovnice $f(x) = 0$ má v intervalu $\langle a, b \rangle$ jediný kořen ξ . Nechť f' , f'' nemění znaménka na intervalu $\langle a, b \rangle$, přičemž $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in \langle a, b \rangle$. Nechť počáteční aproximace x_0 je ten z krajních bodů a, b , v němž znaménko funkce f je stejné jako znaménko druhé derivace funkce f'' na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak posloupnost $\{x_k\}$, pro $k = 0, 1, \dots$ určená Newtonovou metodou konverguje monotónně k bodu ξ .*

Důkaz. [12, str. 44] Vezmeme případ, kde $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$ a $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in \langle a, b \rangle$. V ostatních případech by důkaz probíhal obdobně. Důkaz provedeme indukcí. Počáteční aproximační bod volíme podle předpokladu $b = x_0$. Je třeba ukázat, že $\xi \leq x_1 < x_0$. Jelikož

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

a $f(x_0) > 0$, $f'(x_0) > 0$, plyne odtud, že $x_1 < x_0$. Dále užijeme Taylorova vzorce:

$$0 = f(\xi) = f(x_0) + f'(x_0)(\xi - x_0) + \frac{f''(\eta_0)}{2}(\xi - x_0)^2, \quad \eta_0 \in (\xi, x_0).$$

Protože $\frac{f''(\eta_0)}{2}(\xi - x_0)^2 \geq 0$, tak z výše uvedené rovnosti plyne

$$f(x_0) + f'(x_0)(\xi - x_0) \leq 0.$$

Z této nerovnosti dostáváme

$$\xi \leq x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1,$$

tudíž

$$\xi \leq x_1 < x_0.$$

Za předpokladu, že platí nerovnost:

$$\xi \leq x_k < x_{k-1} < \dots < x_0$$

můžeme stejně tak ukázat, že platí nerovnost:

$$\xi \leq x_{k+1} < x_k < \dots < x_0.$$

Posloupnost $x_0, x_1, x_2 \dots$ konverguje k bodu ξ . □

Věta 3.2 (O konvergenci Newtonovy metody). *Nechť $f \in C^2 \langle a, b \rangle$, $\xi \in \langle a, b \rangle$ je kořenem rovnice $f(x) = 0$ a $f'(\xi) \neq 0$. Pak pro posloupnost x_0, x_1, x_2, \dots generovanou Newtonovou metodou platí*

1.

$$|x_{k+1} - \xi| \leq \frac{M}{2m}(x_k - \xi)^2, \quad (3.3)$$

2.

$$|x_{k+1} - \xi| \leq \frac{M}{2m}(x_{k+1} - x_k)^2, \quad (3.4)$$

kde $M = \max_{x \in I} |f''(x)|$, $m = \min_{x \in I} |f'(x)| > 0$, $I = \langle \xi - \delta, \xi + \delta \rangle$, $\delta > 0$.

Důkaz. [12, str. 43] 1. Užijeme Taylorova vzorce ve tvaru

$$0 = f(\xi) = f(x_k) + f'(x_k) \cdot (\xi - x_k) + \frac{1}{2}f''(\eta_k) \cdot (\xi - x_k)^2, \quad \eta_k \in (x_k, \xi).$$

Pokud z Newtonovy metody vyjádříme $f(x_k) = x_k \cdot f'(x_k) - x_{k+1} \cdot f'(x_k)$ a dosadíme do předchozího vztahu, tak dostáváme

$$0 = -x_{k+1}f'(x_k) + \xi f'(x_k) + f''(\eta_k) \frac{(\xi - x_k)^2}{2}.$$

Odtud pak

$$|x_{k+1} - \xi| = \frac{|f''(\eta_k)|}{2|f'(x_k)|}(\xi - x_k)^2 \leq \frac{M}{2m}(\xi - x_k)^2.$$

2. Pro důkaz vztahu (3.4) opět využijeme Taylorova vzorce tentokrát ve tvaru

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + \frac{1}{2}f''(\eta_k) \cdot (x_{k+1} - x_k)^2,$$

kde $\eta_k \in (x_k, x_{k+1})$.

Z Newtonovy metody plyne, že

$$f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0$$

a tedy po dosazení do výše uvedeného Taylorova vzorce máme

$$f(x_{k+1}) = \frac{f''(\eta_k)}{2}(x_{k+1} - x_k)^2.$$

Nyní použijeme větu o střední hodnotě (viz [21]) ve tvaru ($f(\xi) = 0$)

$$f(x_{k+1}) = f(x_{k+1}) - f(\xi) = f'(\beta_k)(x_{k+1} - \xi),$$

kde $\beta_k \in (x_{k+1}, \xi)$. Dosazením do předchozího vztahu plyne

$$|x_{k+1} - \xi| = \frac{|f''(\eta_k)|}{2|f'(\beta_k)|}(x_{k+1} - x_k)^2 \leq \frac{M}{2m}(x_{k+1} - x_k)^2.$$

□

Důsledek. Newtonova metoda je druhého řádu pro jednoduchý kořen ξ .

V blízkosti kořene ξ platí, že čím je vyšší řád p , tím rychlejší je konvergence. To vyplývá z následujícího vztahu

$$|e_{k+1}| \approx C|e_k|^p,$$

takže když $|e_k|$ je malé, pak $|e_{k+1}|$ je tím menší, čím je p větší.

Věta 3.3. *Nechť funkce $f \in C^2\langle a, b \rangle$. Nechť $\xi \in \langle a, b \rangle$ je kořenem rovnice $f(x) = 0$ a $f'(\xi) \neq 0$. Pak existuje $\delta > 0$ tak, že posloupnost $\{x_k\}$, pro $k = 0, 1, \dots$, generovaná Newtonovou iterační metodou konverguje ke kořenu ξ pro každou počáteční aproximaci $x_0 \in \langle \xi - \delta, \xi + \delta \rangle \subseteq \langle a, b \rangle$.*

Důkaz. [12, str. 41]. Ukážeme, že existuje subinterval $x_0 \in \langle \xi - \delta, \xi + \delta \rangle \subseteq \langle a, b \rangle$, na kterém iterační funkce $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ splňuje předpoklady $g \in C\langle a, b \rangle$, $g : \langle a, b \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$. Vzhledem k tomu, že $f'(\xi) \neq 0$ a f' je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, existuje takové $\delta_1 > 0$, že $\forall x \in \langle \xi - \delta_1, \xi + \delta_1 \rangle \subseteq \langle a, b \rangle$ je $f'(x) \neq 0$. Tedy funkce g je definovaná a spojitá na intervalu $\langle \xi - \delta_1, \xi + \delta_1 \rangle$. Dále první derivace funkce $g(x)$

$$g(x) = 1 - \frac{f'(x) - f(x) \cdot f''(x)}{f'^2(x)} = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{f'^2(x)}$$

pro $x \in \langle \xi - \delta_1, \xi + \delta_1 \rangle$, a protože $f \in C^2\langle a, b \rangle$, je $g \in C^1\langle \xi - \delta_1, \xi + \delta_1 \rangle$. Podle předpokladu je $f(\xi) = 0$, a tedy

$$g'(\xi) = \frac{f(\xi) \cdot f''(\xi)}{f'^2(\xi)} = 0. \quad (3.5)$$

Funkce $g \in C^1\langle \xi - \delta_1, \xi + \delta_1 \rangle$ a tedy ze vztahu (3.5) plyne, že existuje δ takové, že $0 < \delta < \delta_1$ tak, že

$$|g'(x)| \leq q < 1$$

pro všechna $x \in \langle \xi - \delta, \xi + \delta \rangle$.

Musíme ještě ukázat, že $g : \langle \xi - \delta, \xi + \delta \rangle \rightarrow \langle \xi - \delta, \xi + \delta \rangle$, což plyne ihned aplikací věty o střední hodnotě (viz [21]), neboť pro libovolný bod $x \in \langle \xi - \delta, \xi + \delta \rangle$ platí

$$|g(x) - \xi| = |g(x) - g(\xi)| = |g'(\alpha) \cdot (x - \xi)|,$$

a neboť $\alpha \in \langle x, \xi \rangle$, je $|g'(\alpha)| \leq q < 1$. Odtud $|g(x) - \xi| \leq q|x - \xi| < |x - \xi| \leq \delta$, a tedy $g(x) \in \langle \xi - \delta, \xi + \delta \rangle$.

Funkce g splňuje na intervalu $\langle \xi - \delta, \xi + \delta \rangle$ předpoklady a to znamená, že posloupnost $\{x_k\}$, pro $k = 0, 1, \dots$, generovaná Newtonovou iterační metodou konverguje pro každou počáteční aproximaci $x_0 \in \langle \xi - \delta, \xi + \delta \rangle$ ke kořenu ξ . \square

Jestliže chceme zjistit index efektivity (2.3), podíváme se na tvar Newtonovy metody (3.2), z které vyčteme, že musíme vypočítat v každém kroku dvě funkční hodnoty ($r = 2$). Newtonova iterační metoda konverguje kvadraticky, tj. $p = 2$. Tudíž máme nízkou výpočtovou náročnost, která se dá vyjádřit indexem efektivity jako $I_e = 2^{1/2} \doteq 1,41421$.

Zmíníme se také o problému zastavení výpočtu při použití této numerické metody pro nalezení kořene ξ . Předpokládejme, že Newtonova metoda generuje posloupnost $\{x_k\}$, pro $k = 0, 1, \dots$, konvergující ke kořenu ξ a nechť je dána požadována přesnost $\varepsilon > 0$. Můžeme použít tři kritéria pro zastavení výpočtu:

$$\left| \frac{x_{k+1} - x_k}{x_k} \right| < \varepsilon, \quad (3.6)$$

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon, \quad (3.7)$$

$$|f(x_k)| < \varepsilon, \quad (3.8)$$

V této práci jsme v kapitole srovnání metod při numerických testech použili zároveň kritéria (3.7) a (3.8).

4 Steffensenova metoda

Jak už bylo uvedeno výše, za nejznámější iterační metodu pro hledání kořene ξ nelineární rovnice $f(x) = 0$ je považována Newtonova iterační metoda. Tato metoda je velice efektivní, pokud dobře zvolíme počáteční aproximaci x_0 . Její nevýhodou je však jednak volba této počáteční aproximace x_0 a dále nutnost nenulovosti derivace $f'(x_k)$, pro $k = 0, 1, \dots$. Pokud v nějakém kroku dostaneme $f'(x_k) = 0$, tak algoritmus zcela zhavaruje. Ovšem problém může nastat, i když $|f'(x_k)|$ bude velmi malé číslo, pak může při výpočtu docházet k velkým numerickým chybám. V neposlední řadě nutnost výpočtu první derivace $f'(x)$ může být u složitějších nelineárních rovnic komplikací. Proto se v této kapitole budeme zabývat Steffensenovou metodou pro hledání kořene ξ nelineární rovnice $f(x) = 0$, která vychází z Newtonovy metody, ale nahrazuje derivaci $f'(x)$ její aproximací. Zachovává ovšem rychlost konvergence.

Než uvedeme výsledný rekurentní předpis pro Steffensenovu iterační metodu, tak se nejprve zmíníme o technice, jakou lze derivaci $f'(x)$ přibližně vypočítat. Je zapotřebí, aby funkce f měla v okolí bodu x_k dostatek derivací, až do řádu $(n + 1)$, pak Taylorův rozvoj funkce f v okolí bodu x je:

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k) \cdot (x - x_k) + \frac{1}{2!} f''(x_k) \cdot (x - x_k)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_k) \cdot (x - x_k)^n + O(x - x_k) \quad (4.1)$$

Člen $O(x - x_k) = \frac{1}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\eta) \cdot (x - x_k)^{(n+1)}$, $\eta \in (x, x_k)$ nazýváme zbytkem Taylorova polynomu. Nyní ve vztahu (4.1) dosadíme $x = x_k + h$ a protože chceme nahradit pouze první derivaci, tak si ze vztahu osamostatníme $f'(x)$ a dostáváme vztah:

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k + h) - f(x_k)}{h} + O(h).$$

Budeme uvažovat malé $h \rightarrow 0$, takže zbytek $O(h) \rightarrow 0$ můžeme zanedbat. Dostaneme tedy aproximaci $f'(x_k)$ ve tvaru:

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k + h) - f(x_k)}{h}, \quad (4.2)$$

která se nazývá *dopředná diference*.

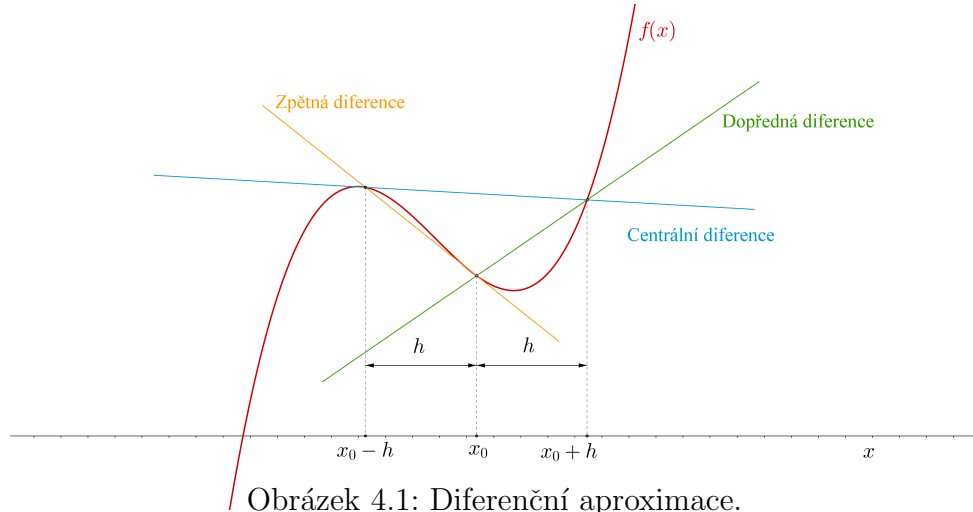
Kdybychom do Taylorova rozvoje dosadili za $x = x_k - h$, tak podobným odvozením jako u dopředné diference, dostáváme vztah, kterému se říká *zpětná diference*:

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_k - h)}{h}. \quad (4.3)$$

Odečtením Taylorova rozvoje s dosazeným bodem $x = x_k + h$ a Taylorovým rozvojem s dosazeným bodem $x = x_k - h$ získáme vztah:

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k + h) - f(x_k - h)}{2h}, \quad (4.4)$$

kterému říkáme *centrální diference*.



Grafická ilustrace dopředné, zpětné a centrální diference je znázorněna na obrázku 4.1. Pro dopřednou diferenci tedy používáme místo derivace sklon spojnice bodů $[x_k, f(x_k)]$ a $[x_k + h, f(x_k + h)]$. Pokud nyní v dopředné diferenci nahradíme krok $h = f(x_k)$, tak po dosazení do vztahu (4.1) dostáváme aproximaci derivace $f'(x_k)$ ve tvaru

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}{f(x_k)}. \quad (4.5)$$

Připomeneme si formuli pro výpočet Newtonovy iterační metody:

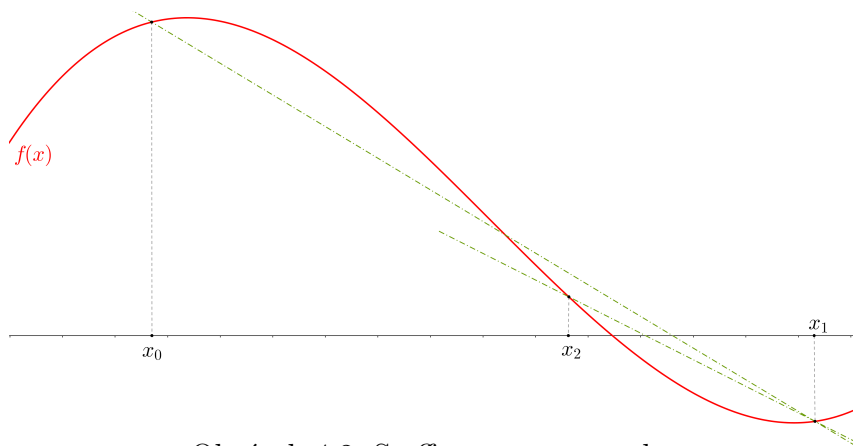
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad k = 0, 1, \dots$$

Jak už jsme si uvedli v důsledku za větou (3.2), Newtonova metoda má za určitých podmínek kvadratickou konvergenci. Nyní modifikujeme Newtonovu formuli takovým způsobem, abychom se jednak vyhnuli derivaci $f'(x)$, ale také abychom neovlivnili řád konvergence. Nahradíme tedy první derivaci $f'(x_k)$ v Newtonově metodě pomocí vztahu (4.5) a získáme novou metodu, která je nazývána *Steffensenova metoda* (SM). Graficky je tato metoda znázorněna na obrázku 4.2:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f^2(x_k)}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.6)$$

Věta 4.1 (O konvergenci a řádu Steffensenovy metody). *Nechť funkce $f \in C\langle a, b \rangle$ a nechť $\xi \in \langle a, b \rangle$ je řešením nelineární rovnice $f(x) = 0$. Nechť $f'(x) \neq 0$. Pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že posloupnost $\{x_k\}$, pro $k = 0, 1, \dots$ generovaná Steffensenovou metodou konverguje k bodu ξ pro každou počáteční aproximaci $x_0 \in \langle \xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon \rangle \cup \langle a, b \rangle$. Pokud má funkce f v okolí bodu ξ spojitou druhou derivaci, je řád Steffensenovy metody alespoň 2.*

Důkaz. Lze nalézt v [25, str. 6]. □



Obrázek 4.2: Steffensenova metoda.

Jak uvádí předchozí věta, tak Steffensenova metoda za určitých podmínek konverguje kvadraticky, stejně jako Newtonova iterační metoda. Namísto derivace užívá pouze vyhodnocení funkčních hodnot $f(x_k)$ a $f(x_k + f(x_k))$ v každém kroku. Můžeme tedy říct, že index efektivity Steffensenovy metody je stejný jako u Newtonovy iterační metody a to $I_e = 2^{1/2} \doteq 1.41421$.

5 Metody Steffensenova typu

Odstranění derivace $f'(x_k)$ z Newtonovy iterační metody (3.2) je velice významné. Steffensen nahradil derivaci $f'(x_k)$ dopřednou diferencí (4.5), což vedlo k myšlence dalších modifikací. V poslední době bylo odvozeno více takových metod, které nepoužívají derivaci a které vychází právě ze zmíněné Steffensenovy iterační metody. V této kapitole si uvedeme metody Steffensenova typu založené na aproximaci derivace poměrnými, centrálními, dopřednými a zpětnými diferencemi, ve kterých je $h = f(x_k)$. Velkou snahou je nalézt takovou iterační metodu, která má co nejvyšší řád konvergence, což ale může být na úkor efektivity dané iterační metody. Proto si modifikované metody Steffensenova typu uvedeme v pořadí od nejnižší po nejvyšší řád konvergence a v následující kapitole je budeme srovnávat. Metody jsou pojmenované podle autorů článků, z kterých daná metoda byla převzata. Detailní způsob odvození jednotlivých metod zde uvádět nebudeme, ale u každé metody bude uveden odkaz na zdroj, v kterém lze získat další informace o příslušné metodě.

Dehghan-Hajarianova metoda

Dehghan a Hajarian navrhli metodu Steffensenova typu v článku [7], která je druhého řádu stejně jako Steffensenova metoda, tedy $p = 2$. Oproti klasické Steffensenově metodě počítá $r = 3$ funkční vyhodnocení během jedné iterace. Metodu modifikovali tak, že místo dopředné diference (4.2) v Steffensenově metodě (4.6) použili centrální diferenci (4.4), kde $h = f(x_k)$. Výsledný předpis metody, kterou jsme nazvali *Dehghan-Hajarianovou metodou* (DHM), je:

$$\text{DHM:} \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k - f(x_k))}{2 \cdot f(x_k)}}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.1)$$

Index efektivity vypočítáme ze vztahu (2.3), tj. $I_e = p^{1/r} = 2^{1/3} \approx 1.25992$.

Metoda podle Sharmy

Nyní si uvedeme typ Steffensenovy metody, která je již řádu tři, nebo-li konverguje kubicky. Podle autora článku [22], kde je tato metoda odvozena, tuto metodu nazveme *metodou podle Sharmy* (MSh). Autoři navrhli následující iterační schéma:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{h(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (5.2)$$

kde

$$h(x_k) = \frac{f(x_k + \alpha(x_k) \cdot f(x_k)) - f(x_k)}{\alpha(x_k) \cdot f(x_k)}$$

je nová aproximace derivace a $\alpha(x)$ je funkce, která bude blíže specifikována v následující větě.

Věta 5.1. *Nechť funkce f je dostatečně hladká v okolí kořene ξ a $f'(\xi) \neq 0$. Nechť $f''(x)$ je spojitá v okolí kořene ξ nelineární rovnice $f(x) = 0$. Pak metoda (5.2) konverguje kubicky ke kořenu ξ , jestliže $\alpha(x) = -\frac{1}{f'(x)}$.*

Důkaz. Lze nalézt v [22, str. 243]. □

Forma iteračního schématu (5.2) po dosažení $h(x_k)$ je pak dána:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{\alpha(x_k) \cdot f^2(x_k)}{f(x_k + \alpha(x_k) \cdot f(x_k)) - f(x_k)}, \\ \text{MSh:} \quad \alpha(x_k) &= -\frac{1}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \tag{5.3}$$

Problémem je, že stejně jako u Newtonovy iterační metody, se i zde vyskytuje derivace funkce $f'(x_k)$.

Nyní si uvedeme index efektivity, jak je nadefinován podle vztahu (2.3). Máme tedy řád konvergence $p = 3$ a vidíme ze vztahu (5.3), že potřebuje výpočet $r = 3$ funkčních hodnot v jedné iteraci metody, tedy $I_e = 3^{1/3} \approx 1.44225$

Vzhledem k používání derivace funkce $f'(x_k)$ v MSh, byla snaha tuto derivaci aproximovat. Proto si nyní uvedeme metodu, která tuto derivaci aproximuje a je námi nazvána *metodou podle Trauba*.

Metoda podle Trauba

Traub ve své práci [26] ukázal, že iterační metoda (5.3), kde $\alpha(x_k) = 1/f'(x_k)$, může být vylepšena opakovaným použitím informací z předchozí iterace. Aproximoval tedy první derivaci $f'(x_k)$ ve vztahu $\alpha(x_k) = 1/f'(x_k)$ zpětnou diferencí:

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}. \tag{5.4}$$

Výsledný tvar *metody podle Trauba* (TM) má tvar:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots \\ \text{TM:} \quad x_{k+1} &= x_k - \frac{\alpha_k \cdot f^2(x_k)}{f(x_k + \alpha_k \cdot f(x_k)) - f(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \tag{5.5}$$

kde počáteční hodnota α_0 je zvolena. V další kapitole při srovnávání metod, budeme podle [26] dosazovat za $\alpha_0 = 0.01$.

Traubova metoda má dle [26] řád konvergence $p = 1 + \sqrt{2} \approx 2.414$. Index efektivity Traubovy metody zjistíme z výše zmíněného řádu konvergence $p = 2.414$ a počtu funkčních vyhodnocení během jedné iterace $r = 3$. Po dosažení do vztahu (2.3) dostáváme $I_e = 1.34150$.

Metoda podle Jaina

Další metodu Steffensenova typu třetího řádu, která je uvedena v článku [13], pojmenujeme v této práci *metodou podle Jaina* (JM). Vychází z iteračního schématu třetího řádu, které je kombinací Newtonovy metody a metody sečen. Tuto kombinaci uvedl Kastuiarachi v článku [14] a má předpis:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f^2(x_k)}{f'(x_k) \cdot (f(x_k) - f(x_k^*))},$$

$$x_k^* = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots$$
(5.6)

Jain aproximoval derivaci $f'(x_k)$ v (5.6) dopřednou diferencí (4.5). Výsledný vztah metody podle Jaina je:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f^3(x_k)}{(f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)) \cdot (f(x_k) - f(x_k^*))}$$

JM:

$$x_k^* = x_k - \frac{f^2(x_k)}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots,$$
(5.7)

Věta 5.2. *Nechť funkce f má dostatečný počet derivací v okolí jednoduchého nulového kořene ξ , tj. $f'(\xi) \neq 0$, pak iterační metoda (5.7) má řád konvergence tři.*

Důkaz. Lze nalézt v [13, str. 531]. □

Metoda podle Jaina je $p = 3$ řádu a počítá s $r = 3$ funkčními hodnotami během jedné iterace. Index efektivity určíme podle vztahu (2.3), tj. $I_e \approx 1.44225$.

Metoda podle Zhenga

Další metoda Steffensenova typu je uvedena v článku [29]. Nazveme ji *metodou podle Zhenga* (ZM) a má následující předpis:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2 \cdot \alpha_k \cdot f^2(x_k)}{[f(x_k + \alpha_k \cdot f(x_k)) - f(x_k)] - [f(x_{k+1}^* - \alpha_k \cdot f(x_k)) - f(x_{k+1}^*)]},$$

ZM:

$$x_{k+1}^* = x_k - \frac{\alpha_k \cdot f^2(x_k)}{f(x_k + \alpha_k \cdot f(x_k)) - f(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots$$
(5.8)

Pro $k = 0$ volíme x_0 a α_0 , tím obdržíme x_1 .

Pro $k = 1, 2, \dots$, určíme $\alpha_k = -\left(\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}\right)$ a počítáme x_{k+1} dokud není splněna požadovaná přesnost. Při srovnávání metod budeme volit počáteční α_0 jako v [29] a to $\alpha_0 = -0.6$.

Věta 5.3. *Nechť $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je dostatečně diferencovatelná funkce s jednoduchým kořenem $\xi \in I$ nelineární rovnice $f(x) = 0$, $I \subset \mathbb{R}$ je otevřená množina, x_0 je dostatečně blízko ξ , pak metoda (5.8) konverguje alespoň kubicky a splňuje následující chybovou rovnici*

$$e_{k+1} = \frac{(\alpha_k f'(\xi) + 1) \cdot (2\alpha_k f'(\xi)^2 f'''(\xi) + 3f'''(\xi)^2 + f'(\xi)f'''(\xi))}{12f'(\xi)^2} e_k^3 + O(e_k^4), \quad (5.9)$$

kde $e_k = x_k - \xi$, pro $k = 0, 1, \dots$

Důkaz. Lze nalézt v [29, str. 12]. □

Jestliže je řád metody $p = 3$ a počet funkčních hodnot v každém kroku $r = 4$, pak index efektivity této metody je $I_e = 3^{1/4} \approx 1.31607$.

Metoda podle Pavaloiaua

Metoda podle Pavaloiaua je uvedena v článku [18]. Tato metoda je založena na inverzní interpolaci Newtonova polynomu druhého stupně.

Nechť $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dále nechť $F = f(\langle a, b \rangle)$ je množina funkčních hodnot funkce $f(x)$ pro $x \in \langle a, b \rangle$. Předpokládejme takové f , že existuje $f^{-1} : F \rightarrow \langle a, b \rangle$. Uvažujeme interpolační uzly $a_i \in \langle a, b \rangle$, $i = 1, 2, 3$ a funkční hodnoty funkce f v těchto uzlech $b_i = f(a_i)$, $i = 1, 2, 3$. Newtonův interpolační polynom druhého stupně pro inverzní funkci f^{-1} má tvar:

$$N_2(y) = a_1 + f^{-1}[b_1, b_2] \cdot (y - b_1) + f^{-1}[b_1, b_2, b_3] \cdot (y - b_1) \cdot (y - b_2). \quad (5.10)$$

Kde $f[\cdot, \cdot]$ je poměrná diference funkce f obecně definovaná následovně:

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}, \quad x_i \neq x_j. \quad (5.11)$$

Pro $j > i + 1$ je vztah poměrné difference nadefinován:

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_j] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_j] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}]}{x_j - x_i}, \quad x_i \neq x_j. \quad (5.12)$$

Inverzní funkce $f^{-1} = N_2(y) + R_2(x)$, kde $R_2(x) = f^{-1}[y, b_1, b_2, b_3] \cdot (y - b_1) \cdot (y - b_2) \cdot (y - b_3)$ je chyba Newtonova interpolačního polynomu druhého stupně pro každé $y \in F$.

Dosazením $y = 0$ do rovnice (5.10) a využitím rovností $f^{-1}[b_1, b_2] = \frac{1}{f[a_1, a_2]}$ a $f^{-1}[b_1, b_2, b_3] = -\frac{f[a_1, a_2, a_3]}{f[a_1, a_2] \cdot f[a_1, a_3] \cdot f[a_2, a_3]}$, se získá aproximace pro kořen ξ :

$$\xi = a_1 - \frac{f(a_1)}{f[a_1, a_2]} - \frac{f[a_1, a_2, a_3] \cdot f(a_1) \cdot f(a_2)}{f[a_1, a_2] \cdot f[a_2, a_3] \cdot f[a_1, a_3]}. \quad (5.13)$$

Aproximaci x_{k+1} kořene ξ rovnice (2.1) obdržíme z rovnice (5.13), v níž je třeba dosadit za $a_1 = x_k$, $a_2 = g(x_k)$ a $a_3 = g(g(x_k))$. Výsledný tvar metody podle Pavaloiua (PM) je následující:

$$\text{PM: } x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, g(x_k)]} - \frac{f[x_k, g(x_k), g(g(x_k))] \cdot f(x_k) \cdot f(g(x_k))}{f[x_k, g(x_k)] \cdot f[x_k, g(g(x_k))] \cdot f[g(x_k), g(g(x_k))]}, \quad (5.14)$$

pro $k = 0, 1, \dots$

Aby byla zaručena konvergence tak musí funkce $g(x)$ splňovat následující podmínky.

1. Funkce $g(x)$ musí být klesající na intervalu $\langle a, b \rangle$.

2. $\exists \ell \in \mathbb{R}$, $0 < \ell \leq 1$ takové, že $\forall x \in \langle a, b \rangle$ platí vztah:

$$|g(x) - g(\xi)| \leq \ell \cdot |x - \xi|. \quad (5.15)$$

Věta 5.4. *Nechť $f'(x) > 0$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$ a nechť $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$. Jestliže jsou splněny podmínky 1. a 2. tak, že $f'(b) \leq (1 + \ell) \cdot f'(a)$, pak funkce g je dána vztahem:*

$$g(x) = x - \lambda \cdot f(x), \quad (5.16)$$

kde $\lambda \in \left\langle \frac{1}{f'(a)}, \frac{1 + \ell}{f'(b)} \right\rangle$.

Důkaz. Lze nalézt v [18, str. 373]. □

V článku [18] je uvedeno, že řád konvergence metody podle Pavaloiua je $p = 3$. Počet funkčních vyhodnocení během jedné iterace je $r = 3$. Nyní můžeme vypočítat index efektivity podle vztahu (2.3), $I_e = 3^{1/3} \approx 1.44225$.

Metoda podle Liua 1

Nyní si uvedeme metodu, kterou jsme nazvali *metodou podle Liua 1* (LM1) podle autora článku [15]. Metoda je založena na Newtonově interpolačním polynomu.

Z Newtonova interpolačního polynomu prvního řádu $N_1(x) = f(x_k) + f[x_k, z_k] \cdot (x - x_k)$, kde se za z_k dosadí $z_k = x_k + \beta_k \cdot f(x_k)$, se získá funkce $f(x) = N_1(x) + R_1(x)$, kde $R_1(x) = f[x_k, z_k, x] \cdot (x - x_k) \cdot (x - z_k)$ je chyba Newtonova interpolačního polynomu prvního řádu. Poměrné diference $f[\cdot, \cdot, \cdot]$ v R_1 , které jsou nadefinované v (5.12), autoři nahradili výrazem $\mu_k \approx f[x_k, z_k, x]$. Funkce $f(x) = N_1 + R_1$ má po této substituci tvar:

$$f(x) = f(x_k) + f[x_k, z_k] \cdot (x - x_k) + \mu_k \cdot (x - x_k) \cdot (x - z_k). \quad (5.17)$$

Liu a spol. navrhli iterační schéma $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{N_2'(x_k)}$. Po dosazení (5.17) a derivaci Newtonova interpolačního polynomu druhého řádu za $N_2'(x_k)$ získali dvouparametrovou metodu Steffensenova typu:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, z_k] + \mu_k(x_k - z_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (5.18)$$

kde $z_k = x_k + \beta_k \cdot f(x_k)$, $\{\beta_k\}$ a $\{\mu_k\}$ jsou ohraničené posloupnosti, přičemž $\mu_0 = 0$ a $\mu_k = \frac{1 + \beta_k \cdot f[x_k, z_k]}{\beta_k \cdot f[x_k, z_k] \cdot f[z_{k-1}, x_k, z_k]}$, $k = 0, 1, \dots$, $\{\beta_k\}$ bude specifikována později.

Iterace probíhá bez jakéhokoliv nového funkčního vyhodnocení, tudíž můžeme říct, že vznikla samo-zrychlující metoda Steffensenova typu s kvadratickou konvergencí.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, z_k] - \left(1 + \frac{1}{\beta_k \cdot f[x_k, z_k]}\right) \cdot (f[z_{k-1}, z_k] - f[x_k, z_{k-1}])}, \quad (5.19)$$

pro $k = 0, 1, \dots$

Dále byla navržena jednostupňová iterační metoda Steffensenova typu s kubickou konvergencí a dvojnásobným samo-zrychlením:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, z_k] - \left(1 + \frac{1}{\beta_k \cdot f[x_k, z_k]}\right) \cdot (f[z_{k-1}, z_k] - f[x_k, z_{k-1}])},$$

LM1:

$$\beta_k = \frac{1}{f[x_{k-1}, z_{k-1}] - f[x_k, z_{k-1}] - f[x_{k-1}, x_k]}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.20)$$

Na rozdíl od většiny výše uvedených metod, kde stačilo zavést počáteční aproximaci x_0 , v metodě podle Liua 1 potřebujeme znát i x_1 . Tuto hodnotu získáme ze vztahu (5.18), kde $\mu_0 = 0$. Také potřebujeme znát koeficient β_0 , který vypočítáme ze vztahu:

$$\beta_0 = -1/f[x_0, x_0 + f(x_0)].$$

Věta 5.5. *Nechť $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je dostatečně diferencovatelná funkce s jednoduchým nulovým kořenem $\xi \in I$, $I \subset \mathbb{R}$ je otevřená množina, x_0 je dostatečně blízko kořenu ξ , potom metoda (5.20) dosahuje konvergence řádu 3.383.*

Důkaz. Lze nalézt v [15, str. 584]. □

Jednokroková metoda podle Liua s dvojnásobným samo-zrychlením má tedy řád konvergence $p = 3.383$ a výpočet funkčních hodnot během jedné iterace $r = 2$. Po dosazení do vztahu (2.3) zjistíme, že index efektivity $I_e = 1.83929$.

Metoda podle Singha

Nyní uvedeme iterační metodu třetího, resp. čtvrtého řádu, která je odvozena v článku [23] a kterou budeme nazývat *metodou podle Singha* (MSi). Tato metoda nemá ve svém předpisu derivaci a je založena na užití centrální diference. Budeme zvažovat následující dvoustupňové iterační schémata:

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{g(x_k)}, \quad (5.21)$$

MSi:

$$x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{g(x_k)} \cdot \frac{f(x_k + \alpha \cdot f(y_k))}{f(x_k) + \beta \cdot f(y_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (5.22)$$

kde α a β jsou reálné konstanty a $g(x_k)$ je centrální diference (4.4), do které dosadíme $h = f(x_k)$, tedy

$$g(x_k) = \frac{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k - f(x_k))}{2 \cdot f(x_k)}.$$

Věta 5.6. *Nechť $\xi \in I$ je jednoduchý nulový kořen dostatečně diferencovatelné funkce $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ na otevřeném intervalu. Jestliže počáteční aproximaci x_0 zvolíme dostatečně blízko kořene ξ , pak iterační schéma (5.22) konverguje alespoň kubicky. Navíc pro $\beta = \alpha - 2$ je řád konvergence 4.*

Důkaz. Lze nalézt v [23, str. 12]. □

Při srovnávání metod budeme dosazovat za $\alpha = 1$ stejně jako v článku [23]. β se určí vztahem $\beta = \alpha - 2$, abychom počítali s metodou čtvrtého řádu, jak je uvedeno ve větě 5.6.

Index efektivity je pro metodu podle Singha určen podle řádu konvergence $p = 3$, nebo $p = 4$, kdy v obou případech je potřeba během každé iterace vypočítat 4 funkční hodnoty, tj. $r = 4$. Podle vztahu (2.3) můžeme zapsat index efektivity pro třetí řád $I_e = 3^{1/4} = 1.3161$, nebo pro metodu podle Singha čtvrtého řádu $I_e = 4^{1/4} = 1.41421$.

Metoda podle Hafize

V této části uvedeme dvoustupňové metody Steffensonova typu, které budeme nazývat *metody podle Hafize* (HM). Hafiz pro odvození svých metod použil dvoustupňovou Newtonovu metodu třetího řádu, která je uvedená v článku [11] a jejíž iterační schéma je:

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= x_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (5.23)$$

Nyní se bude schéma (5.23) modifikovat tak, aby se odstranila derivace. Pro zvolenou počáteční aproximaci x_0 bude algoritmus (HM1), který konverguje k řešení $x_{k+1} \approx \xi$, vypadat následovně:

$$y_k = x_k - \frac{\beta \cdot f^2(x_k)}{f(w) - f(x_k)},$$

$$\text{HM1:} \quad w = x_k + \beta \cdot f(x_k), \quad (5.24)$$

$$x_{k+1} = y_k - \frac{f(x_k)}{P_0(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

$P_0(x_k)$ je definováno jako dopředná diference (4.2), kde za h položíme $h = \beta \cdot f(x_k)$, tedy

$P_0(x_k) = \frac{f(x_k + \beta \cdot (f(x_k))) - f(x_k)}{\beta \cdot f(x_k)}$ a $\beta \in \mathbb{R} - \{0\}$ je konstanta, přičemž ve srovnání metod bude, stejně jako v [11], použito $\beta = 1$. Vztah $P_0(x_k)$ a konstanta β jsou dosazeny stejně i v ostatních Hafizových metodách (HM2-HM4).

HM1 je stejně jako dvoustupňová Newtonova metoda (5.23) třetího řádu a vyžaduje výpočet $r = 3$ funkčních hodnot během jedné iterace. Index efektivity se vypočítá ze vztahu (2.3), tj. $I_e \approx 1.44225$. Cílem autora článku [11] bylo najít nové metody, které nepoužívají derivaci a mají řád konvergence čtyři, také bez nutnosti výpočtu nových funkčních vyhodnocení během jedné iterace. Proto byly zavedeny takzvané váhové funkce W_1, W_2 a W_3 , které jsou vyjádřeny následovně:

$$W_1 = \left\{ \frac{4}{1 + (f[x_k, y_k] \cdot f[w_k, y_k]) / P_0(x_k)^2} - 1 \right\}, \quad (5.25)$$

$$W_2 = \frac{f[w_k, x_k]^2}{f[x_k, y_k] \cdot f[w_k, y_k]} \cdot \left\{ 1 + \frac{f(y_k) \cdot f[w_k, x_k]^2 \cdot (f[w_k, x_k] - f[x_k, y_k])}{f(x_k) \cdot (f[x_k, y_k] \cdot f[w_k, y_k])^2} \right\}, \quad (5.26)$$

$$W_3 = \frac{f(x_k) \cdot f[x_k, y_k] \cdot f[w_k, y_k] \cdot f[w_k, x_k]^2}{f(x_k) \cdot f[x_k, y_k]^2 \cdot f[w_k, y_k]^2 - f(y_k) \cdot (f[w_k, x_k] - f[x_k, y_k]) \cdot f[w_k, x_k]^3}, \quad (5.27)$$

kde $f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$, $\forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j$ je poměrná diference, kterou jsme již uvedli (5.11).

Autor použil tyto váhové funkce a navrhl následující nové dvoustupňové metody, které budeme označovat (HM2-HM4).

$$y_k = x_k - \frac{\beta \cdot f^2(x_k)}{f(w) - f(x_k)},$$

$$\mathbf{HM2:} \quad w = x_k + \beta \cdot f(x_k), \quad (5.28)$$

$$x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{P_0(x_k)} \cdot W_1.$$

$$y_k = x_k - \frac{\beta \cdot f^2(x_k)}{f(w) - f(x_k)},$$

$$\mathbf{HM3:} \quad w = x_k + \beta \cdot f(x_k), \quad (5.29)$$

$$x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{P_0(x_k)} \cdot W_2.$$

$$y_k = x_k - \frac{\beta \cdot f^2(x_k)}{f(w) - f(x_k)},$$

$$\text{HM4:} \quad w = x_k + \beta \cdot f(x_k), \quad (5.30)$$

$$x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{P_0(x_k)} \cdot W_3.$$

Věta 5.7. *Nechť ξ je jednoduchý nulový kořen dostatečně diferencovatelné funkce $f : \subseteq I \rightarrow \mathbb{R}$ v otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Jestliže x_0 je dostatečně blízko kořenu ξ , potom dvoustupňová metoda definovaná jako HM2 má řád konvergence čtyři.*

Důkaz. Lze nalézt v [11, str. 115]. □

Věta 5.8. *Nechť ξ je jednoduchý nulový kořen dostatečně diferencovatelné funkce $f : \subseteq I \rightarrow \mathbb{R}$ v otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Jestliže x_0 je dostatečně blízko kořenu ξ , potom dvoustupňová metoda definovaná jako HM3 má řád konvergence čtyři.*

Důkaz. Lze nalézt v [11, str. 116]. □

Věta 5.9. *Nechť ξ je jednoduchý nulový kořen dostatečně diferencovatelné funkce $f : \subseteq I \rightarrow \mathbb{R}$ v otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Jestliže x_0 je dostatečně blízko kořenu ξ , potom dvoustupňová metoda definovaná jako HM4 má řád konvergence čtyři.*

Důkaz. Lze nalézt v [11, str. 116]. □

Metody HM2, HM3 a HM4 mají řád konvergence $p = 4$ a používají $r = 3$ funkční vyhodnocení během jedné iterace. Index efektivity určíme pomocí vztahu (2.3), takže $I_e = 4^{1/3} \approx 1.58740$.

Metoda podle Liua 2

V článku [16] je uvedena další metoda Steffensenova typu čtvrtého řádu, kterou budeme nazývat *metodou podle Liua 2*. Její iterační předpis je:

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, z_k]},$$

LM2:

$$x_{k+1} = y_k - \frac{f[x_k, y_k] - f[y_k, z_k] + f[x_k, z_k]}{f[x_k, y_k]^2} \cdot f(y_k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (5.31)$$

kde $z_k = x_k + f(x_k)$ a $f[\cdot, \cdot]$ je poměrná diference nedefinovaná v (5.11).

Věta 5.10. *Nechť $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je dostatečně diferencovatelná funkce s jednoduchým nulovým kořenem $\xi \in I$, $I \subseteq \mathbb{R}$ je otevřená množina. Nechť x_0 je dostatečně blízko ξ . Pak metoda (5.31) je čtvrtého řádu a pro chybu platí*

$$e_{k+1} = \frac{f''(\xi) \cdot (1 + f'(\xi))}{8 \cdot f'(\xi)^3} \cdot [f''(\xi)^2 \cdot (2 + f'(\xi)) - \frac{2}{3} f'''(\xi) \cdot f'(\xi) \cdot (1 + f'(\xi))] \cdot e_k^4 + O(e_k^5),$$

kde $e_k = x_k - \xi$, $k = 0, 1, \dots$

Důkaz. Lze nalézt v [16, str. 1979]. □

Metoda (5.31) je $r = 4$ řádu a počítá $p = 3$ funkčních vyhodnocení během jedné iterace. Index efektivity se vypočítá ze vztahu, tj. $I_e \approx 1.58740$.

Metoda podle Rena

Metoda podle Rena (RM), která je uvedena v článku [19], vychází z iteračního schématu dvoustupňové Steffensenovy-Newtonovy metody čtvrtého řádu:

$$y_k = x_k - \frac{f^2(x_k)}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)},$$

$$x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(y_k)}, \quad k = 0, 1, \dots$$
(5.32)

Ve snaze vyhnout se derivaci, autoři nahradili $f'(y_k)$ Newtonovým interpolačním polynomem $h'(y_k)$, tj. $f'(y_k) \approx h'(y_k) = f[x_k, y_k] + f[y_k, z_k] - f[x_k, z_k] + a \cdot (y_k, x_k) \cdot (y_k - z_k)$, kde $z_k = x_k + f(x_k)$, $f[\cdot, \cdot]$ je poměrná diference nadefinovaná v (5.11) a $f[\cdot, \cdot, \cdot]$ je poměrná diference nadefinovaná v (5.12).

Tím byla navržena nová metoda, kterou jsme v této práci nazvali metodou podle Rena a má předpis:

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, z_k]}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

RM:

$$x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{f[x_k, y_k] + f[y_k, z_k] - f[x_k, z_k] + a \cdot (y_k - x_k) \cdot (y_k - z_k)},$$
(5.33)

kde a je reálná konstanta.

Věta 5.11. *Nechť $\xi \in I$ je jednoduchý nulový kořen dostatečně diferencovatelné funkce $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ v otevřeném intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Jestliže x_0 je dostatečně blízko kořenu ξ , pak metoda (5.33) je čtvrtého řádu a pro chybu platí*

$$e_{k+1} = (1 + f'(\xi))^2 \cdot c_2 \cdot \left[c_2^2 - c_3 + \frac{a}{f'(\xi)} \right] \cdot e_k^4 + O(e_k^5),$$

kde $e_k = x_k - \xi$, pro $k = 0, 1, \dots$ a $c_k = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k! \cdot f(\xi)}$, pro $k = 2, 3$.

Důkaz. Lze nalézt v [19, str. 208]. \square

Za konstantu a budeme ve srovnání metod dosazovat stejně jako v článku [19] postupně $a = -1$, $a = 0$ a $a = 1$. Index efektivity vypočítáme ze vztahu (2.3). Řád metody je roven čtyřem, tj. $p = 4$ a počet funkčních vyhodnocení je během jedné iterace $r = 3$, tedy $I_e \approx 1.58740$.

Metoda podle Cordera 1

Stejně jako metoda podle Rena i *metoda podle Cordera 1* (CM1), která je sepsaná v článku [4], vychází z iteračního schématu Steffensenovy-Newtonovy metody čtvrtého řádu (5.32). V zájmu zachování řádu konvergence byla nahrazena první derivace $f'(y_k)$ lineární kombinací dvou modifikovaných poměrných diferencí, tj.

$$f'(y_k) \approx \frac{a \cdot f(y_k) - b \cdot f(z_k)}{y_k - z_k} + \frac{c \cdot f(y_k) - d \cdot f(x_k)}{y_k - x_k},$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ jsou parametry. Výsledný předpis pro metodu podle Cordera 1 je:

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f^2(x_k)}{f(z_k) - f(x_k)}, \\ \text{CM1:} \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{f(y_k)}{\frac{a \cdot f(y_k) - b \cdot f(z_k)}{y_k - z_k} + \frac{c \cdot f(y_k) - d \cdot f(x_k)}{y_k - x_k}}, \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (5.34)$$

kde $z_k = x_k + f(x_k)$.

Věta 5.12. *Nechť $\xi \in I$ je jednoduchý nulový kořen dostatečně diferencovatelné funkce $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ na otevřeném intervalu I . Jestliže x_0 je dostatečně blízko kořene ξ , pak metoda (5.34) je čtvrtého řádu pro $a = c = 1$ a $b + d = 1$ a pro chybu platí*

$$e_{k+1} = (1 + f'(\xi))^2 \cdot c_2 \cdot (c_2^2 - c_3) \cdot e_k^4 + O(e_k^5),$$

kde $e_k = x_k - \xi$, pro $k = 0, 1, \dots$ a $c_k = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k! \cdot f'(\xi)}$, pro $k = 2, 3$.

Důkaz. Lze nalézt v [4, str. 7655]. \square

Za konstanty budeme ve srovnání metod dosazovat stejně jako v článku [4], to je $a = b = c = 1$ a $d = 0$.

Index efektivity vypočítáme ze vztahu (2.3), kde $p = 4$ je řád konvergence a $r = 3$ je počet funkčních vyhodnocení během jedné iterace, $I_e = 4^{1/3} \approx 1.58740$.

Metoda podle Cordera 2

V následujícím odstavci si uvedeme metodu Steffensenova typu, která je založena na Ostrowského metodě čtvrtého řádu, která má tvar:

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \cdot \frac{f(y_k) - f(x_k)}{2 \cdot f(y_k) - f(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (5.35)$$

Připomeneme vztah centrální diference (4.4), v němž je dosazeno za $h = f(x_k)$:

$$f'(x_k) \simeq \frac{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k - f(x_k))}{2 \cdot f(x_k)} \quad (5.36)$$

a kterým se aproximuje derivace v Ostrowského metodě čtvrtého řádu (5.35). Obdržíme tedy novou metodu, kterou budeme dále nazývat *metodou podle Cordera 2* (CM2):

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{2 \cdot f^2(x_k)}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k - f(x_k))}, \\ \text{CM2:} \\ x_{k+1} &= x_k - \frac{2 \cdot f^2(x_k)}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k - f(x_k))} \cdot \frac{f(y_k) - f(x_k)}{2 \cdot f(y_k) - f(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (5.37)$$

Metoda podle Cordera 2, která je uvedena v článku [3], tedy nevyužívá při výpočtu žádné derivace.

Věta 5.13. *Nechť $\xi \in I$ je jednoduchý nulový kořen dostatečně diferencovatelné funkce $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ v otevřeném intervalu I . Jestliže x_0 je dostatečně blízko kořenu ξ , potom metoda (5.37) má řád konvergence 4 a chybová rovnice odpovídá vztahu*

$$e_{k+1} = -c_2 \cdot \left(-\frac{c_2^2}{c_1^3} + c_3 + \frac{c_3}{c_1^2} \right) \cdot e_k^4 + O(e_k^5),$$

kde $e_k = x_k - \xi$, pro $k = 0, 1, \dots$ a $c_k = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k! \cdot f'(\xi)}$, pro $k = 1, 2, 3$.

Důkaz. Lze nalézt v [3, str. 3060]. □

Jak je uvedeno ve větě 5.13, metoda podle Cordera je řádu $p = 4$. Během jedné iterace využívá $r = 4$ funkční vyhodnocení. Index efektivity, podle vztahu (2.3), je roven $I_e = 4^{1/4} \approx 1.41421$.

Vylepšená metoda podle Cordera

Metoda podle Cordera 2, kterou jsme uvedli výše, je čtvrtého řádu a vychází z Ostrowského metody čtvrtého řádu. Nyní si uvedeme *vylepšenou metodu podle Cordera* (VCM), která vychází z jiné Ostrowského metody, která je sepsána v [10] a je šestého řádu. Tato metoda má tvar:

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ z_k &= y_k - \frac{y_k - x_k}{2 \cdot f(y_k) - f(x_k)} \cdot f(y_k), \\ x_{k+1} &= z_k - \frac{y_k - x_k}{2 \cdot f(y_k) - f(x_k)} \cdot f(z_k), \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (5.38)$$

Nyní se do (5.38) opět dosadí místo první derivace centrální diferenci (5.36) a získá se nová metoda, kterou jsme nazvali metodou podle Cordera. Tato metoda nepotřebuje k výpočtu žádné derivace a je šestého řádu:

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{2 \cdot f^2(x_k)}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k - f(x_k))}, \\ \text{VCM: } z_k &= y_k - \frac{y_k - x_k}{2 \cdot f(y_k) - f(x_k)} \cdot f(y_k), \\ x_{k+1} &= z_k - \frac{y_k - x_k}{2 \cdot f(y_k) - f(x_k)} \cdot f(z_k), \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (5.39)$$

Věta 5.14. *Nechť $\xi \in I$ je jednoduchý nulový kořen dostatečně diferencovatelné funkce $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ na otevřeném intervalu I . Jestliže x_0 je dostatečně blízko kořenu ξ , potom metoda (5.39) má řád konvergence 6 a pro chybu platí*

$$e_{k+1} = \frac{(-2 \cdot c_2^2 + c_1 \cdot (1 + c_1^2) \cdot c_3) \cdot (-c_2^3 + c_1 \cdot (1 + c_1^2) \cdot c_2 \cdot c_3)}{c_1^5} \cdot e_k^6 + O(e_k^7),$$

kde $e_k = x_k - \xi$, pro $k = 0, 1, \dots$ a $c_k = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k! \cdot f'(\xi)}$, pro $k = 1, 2, 3$.

Důkaz. Lze nalézt v [3, str. 3061]. □

Na rozdíl od metody podle Cordera 2, která používá 4 funkční vyhodnocení během jedné iterace, vylepšená metoda podle Cordera potřebuje během jedné iterace $r = 5$ funkčních vyhodnocení. Avšak podle věty 5.14 je řádu $p = 6$. Když použijeme vztah (2.3), můžeme vypočítat index efektivity $I_e = 6^{1/5} \approx 1.43097$.

Metoda podle Wanga

V této části si uvedeme novou iterační metodu, která byla v článku [27] navržena tak, aby se jednalo o třístupňovou iterační metodu sedmého řádu bez použití derivace. Wang a spol. uvažovali jako základ následující iterační schéma:

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, z_k]},$$

$$x_{k+1} = u_k - \frac{f(u_k)}{f'(u_k)}, \quad k = 0, 1, \dots,$$
(5.40)

kde $u_k = g_4(x_k)$ je nějaká Steffensenova metoda čtvrtého řádu, $z_k = x_k + f(x_k)$ a $f[x_k, z_k]$ je poměrná diference, nadefinovaná stejně jako ve vztahu (5.11). Aby autoři získali vyšší řád metody, aproximovali $f(u_k)$ Taylorovým rozvojem druhého stupně, následně vyjádřili první derivaci $f'(u_k)$ z tohoto Taylorova rozvoje druhého stupně a za použití poměrných diferencí získali vztah:

$$f'(u_k) \approx f[u_k, x_k] + \frac{1}{2}f''(x_k) \cdot (u_k - x_k).$$
(5.41)

Aby se vyhnuli výpočtu druhé derivace $f''(x_k)$ položili $f''(x_k) \approx 2 \cdot f[x_k, y_k, u_k]$, kde u_k a y_k jsou dostatečně blízko x_k . Nahrazením druhé derivace ve vztahu (5.41) dostali aproximaci $f'(u_k)$ ve tvaru:

$$f'(u_k) \approx f[u_k, x_k] + f[x_k, y_k, u_k] \cdot (u_k - x_k) = f[u_k, x_k] + f[u_k, y_k] - f[x_k, y_k].$$
(5.42)

Získali tedy nové iterační schéma, které jsme v této práci nazvali *metodou podle Wanga* (WM):

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, z_k]},$$

WM: $u_k = g_4(x_k),$

(5.43)

$$x_{k+1} = u_k - \frac{f(u_k)}{f[u_k, x_k] + f[u_k, y_k] - f[x_k, y_k]}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Věta 5.15. *Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je otevřený interval, $\xi \in I$ je jednoduchý kořen (2.1) a f je dostatečně diferencovatelná funkce $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Předpokládejme, že $u_k = g_4(x_k)$ je optimální Steffensenova metoda čtvrtého řádu, která splňuje*

$$u_k - \xi = B_0 \cdot e_k^4 + B_1 \cdot e_k^5 + B_2 \cdot e_k^6 + B_3 \cdot e_k^7 + O(e_k^8),$$

kde $B_0 \neq 0$ a $e_k = x_k - \xi$. Pak metoda (5.43) je sedmého řádu.

Důkaz. Lze nalézt v [27, str. 432]. □

Optimální metodou Steffensenova typu čtvrtého řádu, která splňuje podmínky věty 5.15, je metoda podle Liua 2, která je uvedena v této práci jako (5.31) a metoda podle Rena (5.33), v které dosazujeme za $a = 0$.

Metoda podle Wanga je řádu $p = 7$ a potřebuje 4 funkční vyhodnocení během jedné iterace, tj. $r = 4$. Index efektivity vypočítán ze vztahu (2.3) je $I_e = 7^{1/4} \approx 1.62658$.

Metoda podle Soleymania 1

Jako další si uvedeme *metodu podle Soleymania 1* (MSo1). Autor článku [24] vychází ze třístupňového schématu, kde prvním krokem je Steffensenova iterace a v následných dvou krocích se jedná o Newtonovu iteraci:

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, w_k]}, & w_k &= x_k + \beta \cdot f(x_k), \\ z_k &= y_k - \frac{f(y_k)}{f'(y_k)}, \\ x_{k+1} &= z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)}, & k &= 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (5.44)$$

kde $f[x_k, w_k]$ je poměrná diference funkce $f(x)$ definovaná stejně jako ve vztahu (5.11), β je konstanta, kterou ve srovnání metod budeme volit stejně jako v [24], tj. $\beta = 1$, nebo $\beta = 0.01$.

Aby se autor článku [24] vyhnul derivaci ve schématu (5.44), ale zároveň zachoval osmý řád, který metoda (5.44) má, zavedl tak zvané váhové funkce (uvedené níže) a také nahradil derivace $f'(y_k)$ a $f'(z_k)$ poměrnými diferenciemi: $f'(y_k) \approx f[x_k, w_k]$ a $f'(z_k) \approx f[x_k, w_k]$. Výsledná metoda má tvar:

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, w_k]}, & w_k &= x_k + \beta \cdot f(x_k), \\ \text{MSo1: } z_k &= y_k - \frac{f(y_k)}{f[x_k, w_k]} \cdot \{G(A) \times H(B)\}, \\ x_{k+1} &= z_k - \frac{f(z_k)}{f[x_k, w_k]} \cdot \{K(\Gamma) \times L(\Delta) \times P(E) \times Q(B) \times J(A)\}, & k &= 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (5.45)$$

kde $\beta \in \mathbb{R} - \{0\}$ a $G(A)$, $H(B)$, $K(\Gamma)$, $L(\Delta)$, $P(E)$, $Q(B)$ a $J(A)$ je sedm reálných funkcí, přičemž:

$$\begin{aligned} A &= (f(y)/f(x)), & B &= (f(y)/f(x + \beta \cdot f(x))), \\ \Gamma &= (f(z)/f(x)), & \Delta &= (f(z)/f(x + \beta \cdot f(x))), \\ E &= (f(z)/f(y)). \end{aligned}$$

x, y a z jsou zde bez indexu k , který by měl být vybrán tak, aby řád konvergence byl roven osmi. Následující věta udává způsob výběru váhových funkcí s co nejmenším počtem funkčních vyhodnocení. Iterační metodu nazýváme *metodou podle Soleymania 1*.

Věta 5.16. *Nechť ξ je jednoduchý kořen nelineární rovnice $f(x) = 0$ v oblasti I . Nechť $f(x)$ je dostatečně hladká v okolí kořene ξ . Potom iterační schéma bez použití derivace definované v (5.45) má optimální řád osm, jestliže váhové funkce splňují:*

$$G(0) = G'(0) = 1, \quad G''(0) = G^{(3)}(0) = 0, \quad |G^{(4)}(0)| < \infty,$$

$$H(0) = H'(0) = 1, \quad H''(0) = 0,$$

$$H^{(3)}(0) = 18 + 6\beta f[x_k, x_k + \beta f(x_k)] \cdot (5 + \beta f[x_k, x_k + \beta f(x_k)] \cdot (4 + \beta f[x_k, x_k + \beta f(x_k)])),$$

$$|H^{(4)}(0)| < \infty$$

$$K(0) = K'(0) = 1, \quad L(0) = L'(0) = 1,$$

$$P(0) = P'(0) = 1, \quad |P''(0)| < \infty$$

$$Q(0) = Q'(0) = 1, \quad Q''(0) = 2 + 2\beta f[x_k, x_k + \beta f(x_k)], \quad Q^{(3)}(0) = 0, \quad |Q^{(4)}(0)| < \infty,$$

$$J(0) = J'(0) = 1, \quad J''(0) = J^{(3)}(0) = 0, \quad |J^{(4)}(0)| < \infty.$$

Důkaz. Lze nalézt v [24, str. 6]. □

Konkrétní váhové funkce volil Soleymani v [24] následovně:

$$\text{W1:} \tag{5.46}$$

$$G(A) = 1 + \frac{f(y_k)}{f(x_k)} + \left(\frac{f(y_k)}{f(x_k)} \right)^5,$$

$$H(B) = 1 + \frac{f(y_k)}{f(w_k)} + (3 + f[x_k, w_k](5 + f[x_k, w_k](4 + f[x_k, w_k]))) \left(\frac{f(y_k)}{f(w_k)} \right)^3,$$

$$K(\Gamma) = 1 + \frac{f(z_k)}{f(x_k)} + \left(\frac{f(z_k)}{f(x_k)} \right)^3, \quad L(\Delta) = 1 + \frac{f(z_k)}{f(w_k)} + \left(\frac{f(z_k)}{f(w_k)} \right)^3,$$

$$P(E) = 1 + \frac{f(z_k)}{f(y_k)} + \left(\frac{f(z_k)}{f(y_k)} \right)^2, \quad Q(B) = 1 + \frac{f(y_k)}{f(w_k)} + (1 + f[x_k, w_k]) \left(\frac{f(y_k)}{f(w_k)} \right)^2,$$

$$J(A) = 1 + \frac{f(y_k)}{f(x_k)} + \left(\frac{f(y_k)}{f(x_k)} \right)^5.$$

Metoda podle Soleymania má řád $p = 8$ a v každém iteračním kroku potřebuje $r = 4$ funkční vyhodnocení. Nyní lze lehce určit index efektivity, který udáváme podle vztahu (2.3). $I_e = 8^{1/4} \approx 1.68179$.

Metoda podle Soleymania 2

Metoda podle Soleymania 1 využívá v prvním kroku dopředné diference, nyní se budou nahrazovat dopředné diference zpětnými deferencemi a získá se nová třístupňová iterační metoda osmého řádu, kterou nazveme *metodou podle Soleymania 2* (MSo2), tato metoda

byla odvozena v [24], stejně jako metoda podle Soleymania 1.

Obě metody jsou stejného řádu osm a také potřebují stejný počet funkčních hodnot během jedné iterace, tudíž mají i stejný index efektivity $I_e \approx 1.68179$.

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, w_k]}, \quad w_k = x_k - \beta \cdot f(x_k),$$

$$\text{MSo2: } z_k = y_k - \frac{f(y_k)}{f[x_k, w_k]} \cdot \{A(t) \times B(i)\}, \quad (5.47)$$

$$x_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f[x_k, w_k]} \cdot \{P(r) + Q(i) + J(t) + L(k)\}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

kde $\beta \in \mathbb{R} - \{0\}$ a $A(t)$, $B(i)$, $P(r)$, $Q(i)$, $J(t)$ a $L(k)$ je šest reálných váhových funkcí, kde

$$t = (f(y)/f(x)), \quad i = (f(y)/f(x - \beta \cdot f(x))),$$

$$r = (f(z)/f(y)), \quad k = (f(z)/f(x - \beta \cdot f(x))).$$

I zde jsou x , y a z bez indexu k , který by měl být vybrán tak, aby řád konvergence byl roven osmi. Váhové funkce musí splňovat následující podmínky:

$$A(0) = A'(0) = 1, \quad A''(0) = 2, \quad A^{(3)}(0) = 0, \quad |A^{(4)}(0)| < \infty,$$

$$B(0) = B'(0) = 1, \quad B''(0) = 6 - 4\beta f[x_k, x_k - \beta f(x_k)], \quad B^{(3)}(0) = 0, \quad |B^{(4)}(0)| < \infty$$

$$P(0) = P'(0) = 1, \quad |P''(0)| < \infty,$$

$$Q(0) = 0, \quad Q'(0) = 1, \quad Q''(0) = 10 - 8\beta f[x_k, x_k - \beta f(x_k)],$$

$$Q^{(3)}(0) = 60 + 12\beta f[x_k, x_k - \beta f(x_k)] \cdot (-8 + 3\beta f[x_k, x_k - \beta f(x_k)]), \quad |Q^{(4)}(0)| < \infty,$$

$$J(0) = 0, \quad J'(0) = 1, \quad J''(0) = 2, \quad J^{(3)}(0) = 0, \quad |J^{(4)}(0)| < \infty.$$

$$L(0) = 0, \quad L'(0) = 4 - 2\beta f[x_k, x_k - \beta f(x_k)].$$

Věta 5.17. *Nechť ξ je jednoduchý kořen nelineární rovnice $f(x) = 0$ v oblasti I . Nechť $f(x)$ je dostatečně hladká v okolí kořene ξ . Potom iterační schéma bez použití derivace definovaná v (5.47) má řád konvergence osm.*

Důkaz. Lze nalézt v [24, str. 9]. □

Jako jeden ze tří efektivních příkladů váhových funkcí Soleymani zvolil:

$$\text{W2:} \quad (5.48)$$

$$A(t) = 1 + \frac{f(y_k)}{f(x_k)} + \left(\frac{f(y_k)}{f(x_k)}\right)^2, \quad B(i) = 1 + \frac{f(y_k)}{f(w_k)} + (3 - 2f[x_k, w_k]) \left(\frac{f(y_k)}{f(w_k)}\right)^2,$$

$$P(r) = 1 + \frac{f(z_k)}{f(y_k)} + \left(\frac{f(z_k)}{f(y_k)}\right)^2,$$

$$\begin{aligned}
Q(i) &= \frac{f(y_k)}{f(w_k)} + (5 - 4f[x_k, w_k]) \left(\frac{f(y_k)}{f(w_k)} \right)^2 + \\
&+ (10 + 2f[x_k, w_k](-8 + 3f[x_k, w_k])) \left(\frac{f(y_k)}{f(w_k)} \right)^3 + \\
&+ (11 - f[x_k, w_k](26 - 15f[x_k, w_k])) \left(\frac{f(y_k)}{f(w_k)} \right)^4, \\
J(t) &= \frac{f(y_k)}{f(x_k)} + \left(\frac{f(y_k)}{f(x_k)} \right)^2, \quad L(k) = (4 - 2f[x_k, w_k]) \frac{f(z_k)}{f(w_k)}.
\end{aligned}$$

Další variantou volby je:

$$\begin{aligned}
&\text{W3 :} \tag{5.49} \\
A(t) &= 1 + \frac{f(y_k)}{f(x_k)} + \left(\frac{f(y_k)}{f(x_k)} \right)^2, \quad B(i) = 1 + \frac{f(y_k)}{f(w_k)} + (3 - 2f[x_k, w_k]) \left(\frac{f(y_k)}{f(w_k)} \right)^2, \\
P(r) &= 1 + \frac{f(z_k)}{f(y_k)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q(i) &= \frac{f(y_k)}{f(w_k)} + (5 - 4f[x_k, w_k]) \left(\frac{f(y_k)}{f(w_k)} \right)^2 + \\
&+ (10 + 2f[x_k, w_k](-8 + 3f[x_k, w_k])) \left(\frac{f(y_k)}{f(w_k)} \right)^3 + \\
&+ (11 - f[x_k, w_k](26 - 15f[x_k, w_k] + (f[x_k, w_k])^3)) \left(\frac{f(y_k)}{f(w_k)} \right)^4, \\
J(t) &= \frac{f(y_k)}{f(x_k)} + \left(\frac{f(y_k)}{f(x_k)} \right)^2, \quad L(k) = (4 - 2f[x_k, w_k]) \frac{f(z_k)}{f(w_k)}.
\end{aligned}$$

Poslední způsob výběru váhových funkcí, které autor navrhl je:

$$\begin{aligned}
&\text{W4 :} \tag{5.50} \\
A(t) &= 1 + \frac{f(y_k)}{f(x_k)} + \left(\frac{f(y_k)}{f(x_k)} \right)^2, \quad B(i) = 1 + \frac{f(y_k)}{f(w_k)} + (3 - 2f[x_k, w_k]) \left(\frac{f(y_k)}{f(w_k)} \right)^2, \\
P(r) &= 1 + \frac{f(z_k)}{f(y_k)} + \left(\frac{f(z_k)}{f(y_k)} \right)^2, \\
Q(i) &= \frac{f(y_k)}{f(w_k)} + (5 - 4f[x_k, w_k]) \left(\frac{f(y_k)}{f(w_k)} \right)^2 + \\
&+ (10 + 2f[x_k, w_k](-8 + 3f[x_k, w_k])) \left(\frac{f(y_k)}{f(w_k)} \right)^3 + \\
&+ (11 - f[x_k, w_k](26 - 15f[x_k, w_k] + (f[x_k, w_k])^3)) \left(\frac{f(y_k)}{f(w_k)} \right)^4, \\
J(t) &= \frac{f(y_k)}{f(x_k)} + \left(\frac{f(y_k)}{f(x_k)} \right)^2 + \left(\frac{f(y_k)}{f(x_k)} \right)^4, \quad L(k) = (4 - 2f[x_k, w_k]) \frac{f(z_k)}{f(w_k)}.
\end{aligned}$$

6 Srovnání metod

V této kapitole budeme porovnávat veškeré numerické metody, které jsou v této práci uvedeny. Zvolíme si několik nelineárních rovnic, na kterých tyto metody otestujeme v softwaru MATLAB R2016a.

Pro lepší orientaci je v tabulce 6.1 souhrn všech metod, jejich názvy, zkratky, řád konvergence a index efektivity. V úvodu práce jsme definovali řád konvergence (2.2) a index efektivity (2.3), které používáme k porovnání numerických metod.

Při srovnání metod nás bude zajímat také numerický řád konvergence COC (Computational Order of Convergence), který může být nadefinovaný více způsoby, proto budeme od sebe jednotlivé varianty odlišovat čísly. Cordero ve svém článku [1] nadefinoval COC následovně:

Definice 6.1 (COC 1). Nechť ξ je nulovým kořenem funkce $f(x)$ a předpokládejme, že x_{k+1} , x_k , x_{k-1} a x_{k-2} jsou čtyři po sobě jdoucí aproximace blížící se ke kořenu ξ . Pak *numerický řád konvergence* COC 1 je nadefinován

$$\text{COC 1} \approx \frac{\ln|(x_{k+1} - x_k)/(x_k - x_{k-1})|}{\ln|(x_k - x_{k-1})/(x_{k-1} - x_{k-2})|}. \quad (6.1)$$

Ze zápisu je zřejmé, že numerický řád konvergence (6.1) potřebuje k výpočtu, aby algoritmus dané metody provedl nejméně 3 iterace.

Džunic ve svém článku [8] používá k výpočtu COC poměr logaritmů funkčních hodnot:

Definice 6.2 (COC 2). Nechť ξ je nulovým kořenem funkce $f(x)$ a předpokládejme, že x_k , x_{k-1} a x_{k-2} jsou tři po sobě jdoucí aproximace blížící se ke kořenu ξ . Pak *numerický řád konvergence* COC 2 je nadefinován

$$\text{COC 2} \approx \frac{\log|f(x_k)/f(x_{k-1})|}{\log|f(x_{k-1})/f(x_{k-2})|}. \quad (6.2)$$

Jelikož naším cílem je vypočítat kořen ξ nelineární rovnice $f(x) = 0$, ze zápisu (6.2) je zřejmé, že se často setkáme s nulovým výsledkem u numerického řádu COC 2. Proto budeme výsledky COC 2 zvažovat pouze u některých funkcí. Na rozdíl od COC 1 potřebuje COC 2, aby algoritmus provedl pouze 2 iterace.

Poslední COC, které si zde nadefinujeme, jsme získali malou úpravou vztahu, který uvedl Weerakoon ve svém článku [28]. Budeme potřebovat stejně jako v (6.1) 4 po sobě jdoucí aproximace, přičemž poslední aproximaci x_{k+1} považujeme za kořen ξ .

Definice 6.3 (COC 3). Nechť ξ je nulovým kořenem funkce $f(x)$ a předpokládejme, že x_{k+1} , x_k , x_{k-1} a x_{k-2} jsou čtyři po sobě jdoucí aproximace blížící se ke kořenu ξ . Pak *numerický řád konvergence* COC 3 je nadefinován

$$\text{COC 3} \approx \frac{\ln|(x_k - \xi)/(x_{k-1} - \xi)|}{\ln|(x_{k-1} - \xi)/(x_{k-2} - \xi)|}. \quad (6.3)$$

K ukončení algoritmu jsme použili kombinaci kritérií (3.7) a (3.8), které jsou uvedené v kapitole o Newtonově metodě. Za požadovanou přesnost pro ukončení výpočtu jsme zvolili $\varepsilon = 10^{-15}$.

Tabulka 6.1: Přehled metod.

Název metody	Zkratka	Řád	I_e
Metoda Bisekce	MB	1	1
Newtonova metoda	NM	2	1.41421
Steffensenova metoda	SM	2	1.41421
Dehghan-Hajarianova metoda	DHM	2	1.25992
Metoda podle Sharmy	MSh	3	1.44225
Metoda podle Trauba	TM	2.414	1.34146
Metoda podle Jaina	JM	3	1.44225
Metoda podle Zhenga	ZM	3	1.31607
Metoda podle Pavaloia	PM	3	1.44225
Metoda podle Liua 1	LM1	3.383	1.83929
Metoda podle Singha	MSi	4	1.41421
Metoda podle Hafize 1	HM1	3	1.44225
Metoda podle Hafize 2	HM2	4	1.58740
Metoda podle Hafize 3	HM3	4	1.58740
Metoda podle Hafize 4	HM4	4	1.58740
Metoda podle Liua 2	LM2	4	1.58740
Metoda podle Rena	RM	4	1.58740
Metoda podle Cordera 1	CM1	4	1.58740
Metoda podle Cordera 2	CM2	4	1.41421
Vylepšená metoda podle Cordera	VCM	6	1.43097
Metoda podle Wanga	WM	7	1.62658
Metoda podle Soleymania 1	MSo1	8	1.68179
Metoda podle Soleymania 2	MSo2	8	1.68179

Tabulka 6.2 obsahuje funkce $f_1 - f_9$ nelineárních rovnic, na kterých jsme dané metody testovali. Jestliže má daná funkce více nulových kořenů ξ , vybrali jsme jeden takový, který byl nalezen větším počtem metod.

Tabulka 6.2: Testovací funkce.

funkce	kořen
$f_1 = x - \sin(\cos x) + 1$	$\xi = -0.166039051051029$
$f_2 = \cos x - xe^x + x^2$	$\xi = 0.639154096332007$
$f_3 = e^{x-2} - 1$	$\xi = 2.000000000000000$
$f_4 = \sin x^2 + x$	$\xi = 0.000000000000000$
$f_5 = 10xe^{-x^2} - 1$	$\xi = 1.679630610428450$
$f_6 = \sqrt{x} - \cos x$	$\xi = 0.641714370872883$
$f_7 = x \log x - 1.2$	$\xi = 1.888086753028343$
$f_8 = \sqrt{x^2 + 2x + 5} - 2 \sin x - x^2 + 3$	$\xi = 2.331967655883964$
$f_9 = x^3 + 4x^2 - 10$	$\xi = 4.494939671263585$

V následujících tabulkách 6.3, 6.4 a 6.5 jsou vypsány výsledky pro jednotlivé funkce. Sloupec k značí počet iterací, kterých bylo potřeba k dosažení výpočtu kořene ξ , $nf(x)$ je počet funkčních vyhodnocení v závislosti na počtu iterací. Číslo p je řád konvergence, jak byl uveden a dokázán v jednotlivých člácích, toto číslo by mělo odpovídat číslu ve sloupcích COC 1 a COC 3. Pokud je sloupec COC 1 a COC 3 sjednocen, znamená to, že jsme použili hodnotu numerického řádu COC 2.

Tabulka 6.3 srovnává všechny metody pro dvě různé funkce f_1 a f_2 . Tabulka 6.4 srovnává hodnoty pouze pro funkci f_3 se dvěma různými počátečními aproximacemi. Tato tabulka neobsahuje metody vyššího řádu, neboť pro obě počáteční aproximace x_0 proběhly pouze dvě iterace a nebylo možné COC vypočítat. Proto jsme vytvořili tabulku 6.5, která obsahuje pouze srovnání metod vyššího řádu a to na funkci f_4 . I zde jsme provedli test pro dvě různé počáteční aproximace x_0 , které jsme zvolili dále od kořene ξ , aby proběhly alespoň 3 iterace a bylo možné srovnat COC. U funkce f_3 ani volba počáteční aproximace x_0 dále od kořene ξ k dosažení většího počtu iterací nepomohla.

Jak lze vidět, numerický řád u metod do pátého řádu konvergence se relativně shoduje s uvedeným řádem. U metod s vyšším řádem konvergence záleží na vhodném zvolení počáteční aproximace x_0 , pak jsou velice efektivní a stačí jen malý počet iterací. Ze zmíněných metod v této práci má nejvyšší index efektivity metoda podle Liua 1, která je řádu 3.383. Podle počtu iterací i časové náročnosti výpočtu je ale vhodnou náhradou Newtonovy metody. Na většině testovacích funkcí se projevila Steffensenova metoda méně vhodná v počtu iterací, než Newtonova metoda. Pouze u funkce f_4 vypočítala Steffensenova metoda kořen ξ o 14 iterací rychleji než Newtonova metoda, pro zvolenou počáteční aproximaci $x_0 = -0.99$. Když ale zohledníme časovou náročnost na výpočet, tak Steffensenova metoda je rychlejší než Newtonova metoda. Nejmenší index efektivity má Dehghan-Hajarianova metoda, i když má větší počet iterací, časová náročnost byla malá. Tato metoda výpočty provedla rychleji, jak metody s vyšším řádem konvergence.

Tabulka 6.3: Srovnání metod 1.

Funkce x_0	f_1					f_2				
	1.6					1.45				
Metoda	k	$nf(x)$	p	COC 1	COC 3	k	$nf(x)$	p	COC 1	COC 3
NM	6	12	2	2.00159	2.00153	6	12	2	2.00094	1.99960
SM	7	14	2	1.99992	1.99905	7	14	2	2.00022	1.99961
DHM	6	18	2	1.99956	1.99903	13	39	2	2.00217	2.00138
MSh	4	12	3	2.96624	2.96516	4	12	3	2.98134	2.97092
TM	6	18	2.414	1.99801	1.99734	7	21	2.414	1.99966	1.99952
JM	4	12	3	3.12062	3.11006	5	15	3	3.00771	3.00861
ZM	3	12	3	2.52745	2.51700	5	15	3	3.36848	3.36816
PM	3	9	3	2.42007	2.41775	3	9	3	2.88561	
LM1	3	6	3.383	3.63512	3.63628	3	6	3.383	2.94650	2.94424
MSi	4	16	4	3.20628	3.20749	1000	-	4	-	-
HM1	4	12	3	3.20117	3.17141	4	12	3	2.78823	2.77671
HM2	4	12	4	4.32449	4.35588	4	12	4	3.70733	3.72290
HM3	4	12	4	4.18260	4.18410	4	12	4	3.70892	3.71598
HM4	4	12	4	4.27620	4.27959	4	12	4	3.73255	3.77755
LM2	4	12	4	4.19656	4.20355	4	12	4	3.96754	3.94883
RM	4	12	4	4.16554	4.16989	4	12	4	3.77717	3.78055
CM1	4	12	4	4.16549	4.16985	4	12	4	3.98687	
CM2	3	12	4	4.16993		1000	-	4	-	-
VCM	3	15	6	5.10489	5.20262	1000	-	6	-	-
WM	3	12	7	6.45710	6.43422	2	8	7	5.40261	
MSo1	2	8	8	4.54647		3	12	8	7.72611	7.57605
MSo2	3	12	8	5.41884	5.39674	5	20	8	8.88852	8.12435

Tabulka 6.4: Srovnání metod 2.

Funkce x_0	f_3									
	1.5					3				
Metoda	k	$nf(x)$	p	COC 1	COC 3	k	$nf(x)$	p	COC 1	COC 3
NM	5	10	2	2.00133	1.99934	6	12	2	2.00019	1.99994
SM	6	12	2	2.00188	1.99973	8	16	2	2.00041	1.99995
DHM	5	15	2	2.00162	2.00000	6	18	2	2.00407	2.00002
MSh	4	12	3	2.97383	2.97369	4	12	3	2.98876	2.98592
TM	6	18	2.414	1.99892	1.99878	6	18	2.414	1.99789	1.99474
JM	4	12	3	3.00635	3.00496	4	12	3	2.99482	2.96093
ZM	3	12	3	3.57314	3.52342	3	12	3	2.41492	2.41661
PM	3	9	3	2.75120	2.75788	3	9	3	2.61387	2.60521
LM1	2	4	3.383	5.47345	5.02574	3	6	3.383	1.99734	1.99729
MSi	3	12	4	4.09166	4.09893	4	16	4	4.09025	4.09739
HM1	5	15	3	3.06395	3.04032	5	15	3	2.98021	2.94020
HM2	4	12	4	3.91694	3.89529	4	12	4	3.87919	3.75961
HM3	3	9	4	3.88397	3.91936	3	9	4	3.37777	3.49002
HM4	3	9	4	4.01992	4.11689	1000	-	4	-	-
LM2	3	9	4	4.02419	4.12920	4	12	4	3.98420	3.98294
RM	3	9	4	3.97828	3.99940	3	9	4	4.22968	3.90935

Tabulka 6.5: Srovnání metod 3.

funkce x_0	f_4									
	0.8					-0.99				
Metoda	k	$nf(x)$	p	COC 1	COC 3	k	$nf(x)$	p	COC 1	COC 3
CM1	4	12	4	4.16543	4.217819	4	12	4	4.19079	4.27642
CM2	4	16	4	4.07380	4.07990	4	16	4	3.94388	3.94129
VCM	3	15	6	6.06533		3	15	6	5.95055	
WM	3	12	7	6.56072	6.422420	3	12	7	6.23553	6.24779
MPSo1	3	12	8	5.95366	5.96356	3	12	8	7.00617	
MPSo2	2	8	8	9.55920		1000	-	8	-	-

Volba konstant

U některých metod (TM, ZM, MSi, HM1-HM4, RM, WM, MSo1, MSo2) bylo kromě počáteční aproximace potřeba zvolit i jiné startovací konstanty. U každé z metod jsme uvedli volbu těchto konstant, jak byly zvoleny ve zdroji, z kterého jsme metodu převzali. Nyní si jednotlivě ukážeme, jestli a jak volba konstanty ovlivní výpočet. Pro jednoduchost si v následujících tabulkách budeme uvádět pouze jeden numerický řád, a to COC 1.

První takovou metodou je metoda podle Trauba (5.5). Výpočty, ve výše uvedených tabulkách, byly provedeny s počáteční konstantou $\alpha_0 = 0.01$. Následující tabulka 6.6 ukazuje výpočty pro testovací funkci f_1 , pro různé volby konstanty α_0 . Jak je z tabulky patrné, tak volba α_0 měla vliv pouze na počet iterací, stejné výsledky jsme obdrželi u funkcí f_4 , f_8 a u f_9 . U testovacích funkcí f_2 a f_7 neměla změna konstanty žádný vliv, ale u funkcí f_3 , f_5 a f_6 metoda nevypočítala kořen ξ pro konstanty $\alpha_0 = 10$, $\alpha_0 = -1000$ nebo $\alpha_0 = 1000$.

Tabulka 6.6: Metoda podle Trauba.

TM	f_1			$x_0 = 1.6$	
α_0	0.01	10	-1000	1000	0.0001
k	6	10	10	10	6
p	2.414	2.414	2.414	2.414	2.414
COC 1	1.99801	1.99880	2.00467	2.00312	1.99800

Metoda podle Zhenga (5.8) byla spouštěna při výpočtech s $\alpha_0 = -0.6$, stejně jako v článku [29]. Tabulka 6.7 ukazuje vliv konstant na testovací funkci f_1 , kde jiná α_0 mění numerický řád konvergence. Stejný efekt měla změna konstanty α_0 na testovací funkce f_4 a f_6 , s jediným rozdílem, že pro testovací funkci f_6 metoda selhala při volbě $\alpha_0 = -1000$. Na funkcích f_2 , f_3 a f_5 jakákoliv změna konstanty zapříčinila, že metoda nenalezla řešení ξ . Na zbývajících funkcích f_7 , f_8 a f_9 změna konstanty α_0 neměla žádný vliv.

Tabulka 6.7: Metoda podle Zhenga.

ZM	f_1			$x_0 = 1.6$	
α_0	-0.6	6	60	1000	-1000
k	3	5	5	5	5
p	3	3	3	3	3
COC 1	2.52745	3.57013	3.47034	3.47033	3.46951

V následující tabulce 6.8 jsou výsledky pro změnu konstanty α v metodě podle Singha (5.22) na testovacích funkcích f_1 s počáteční aproximací $x_0 = 1.6$ a f_4 , pro počáteční aproximací $x_0 = 0.8$. Pro testovací funkci f_1 změna konstanty α ovlivnila COC 1 skoro o jeden řád. U funkce f_4 lze vidět, že čím menší jsme nastavili α , tím přesnější je COC 1. Podobných výsledků jako u funkce f_4 jsme docílili i u funkce f_5 . Pro f_2 a f_9 metoda

selhala. U ostatních testovacích funkcí, tj. f_3 , f_6 , f_7 a f_8 , metoda nevypočítala kořen ξ s konstantou $\alpha = 100$.

Tabulka 6.8: Metoda podle Singha.

MSi	$f_1, x_0 = 1.6$			$f_4, x_0 = 0.8$		
	k	p	COC 1	k	p	COC 1
1	4	4	3.20628	4	4	4.34927
100	4	4	2.91478	4	4	3.80852
-1	4	4	3.20503	4	4	4.05003
0.01	4	4	3.86070	4	4	4.07487
0.0001	3	4	2.98295	4	4	4.07381

V tabulce 6.9 jsou uvedeny hodnoty pro metody podle Hafize HM1 (5.24), HM2 (5.28), HM3 (5.29), HM4 (5.30) na testovací funkci f_9 s počáteční aproximací $x_0 = 0.85$. Ve všech výše uvedených výpočtech je použita původní konstanta $\beta = 1$, pro srovnání jsme nejprve zvolili $\beta = 0.001$. Největší rozdíl je patrný na HM2, protože metoda dosáhla maximálního počtu iterací. Pro zvolené $\beta = 0.01$ zhavarovala HM3 a konstantu $\beta = 0.99$ nedokázala spočítat HM1. Na funkcích $f_1 - f_8$ s výjimkou funkce f_6 jsou obdobné výsledky pro zvolené konstanty $\beta = 1$, $\beta = 0.01$ a $\beta = 0.001$. Pro funkci f_6 se zvolenými konstantami lze porovnat numerický řád jen pro HM1. Metody HM2-HM4 buď nevypočítaly kořen ξ , nebo proběhly pouze dvě iterace.

Tabulka 6.9: Metody podle Hafize.

HM	f_9				$x_0 = 0.85$			
	β	k	p	COC 1	β	k	p	COC 1
HM1	1	651	3	3.00546	0.001	4	3	3.16675
HM2	1	4	4	3.93761	0.001	1000	4	0
HM3	1	4	4	4.29997	0.001	3	4	4.30574
HM4	1	5	4	4.02773	0.001	3	4	4.51327

V metodě podle Rena (5.33) jsme postupně testovali konstanty $a = 0$, $a = 1$ a $a = -1$. Výsledky z testovacích funkcí f_1 a f_9 jsou uvedeny v tabulce 6.10. Jak je vidět u funkce f_1 pro konstanty $a = 0$ a $a = -1$, počet iterací je stejný a rozdíl v hodnotách numerického řádu je téměř zanedbatelný. Podobné výsledky v COC 1 jako u funkce f_1 pro vyšly na testovací funkci f_6 , s tím rozdílem, že počet iterací byl pro všechny konstanty stejný. Změna konstant měla vliv na počet iterací pouze na testovacích funkcích f_3 a f_7 , nejnižší počet k vyšel pro $a = 0$ a nejvyšší pro $a = -1$. Počet iterací na testovací funkci f_5 s konstantou $a = -1$ proběhl pouze dvakrát, takže nelze porovnat numerický řád. Vhodná volba konstanty a měla velký vliv na funkci f_9 , jak můžeme vidět v tabulce 6.10, má rozdílný počet iterací i numerický řád. Naopak volba a neměla žádný vliv na testovací funkce f_4 a f_8 .

Tabulka 6.10: Metoda podle Rena.

RM	$f_1, x_0 = 1.6$			$f_9, x_0 = 0.85$		
a	k	p	COC 1	k	p	COC 1
0	4	4	4.16554	4	4	4.14730
1	3	4	3.39637	3	4	2.53628
-1	4	4	4.19627	4	17	3.43461

Ve větě 5.12 pro metodu podle Cordera 1 (5.34) je řečeno, že pokud nastavíme konstanty $a = c = 1$ a $b + d = 1$, bude metoda čtvrtého řádu. Původní hodnoty byly $b = 1$ a $d = 0$. Na všech, námi zvolených, testovacích nelineárních funkcích jsme ověřili různé kombinace b a d , tak aby platila rovnost $b + d = 1$. Výsledek je vždy stejný, tzn. nezmění se výpočet numerického řádu, ani počet iterací. Pokud však porušíme rovnost, tzn. $b + d \neq 1$ numerický řád už nevychází rovný čtyřem a počet iterací se výrazně zvětší.

Metoda podle Wanga (5.43) potřebuje ke svému výpočtu optimální metodu Steffensova typu čtvrtého řádu. V této práci jsme si za optimální metody zvolili LM2 (5.31) nebo RM (5.33) s konstantou $a = 0$. Následující tabulka 6.11 ukazuje vliv na výběr této optimální metody čtvrtého řádu na funkce f_1 a $f_6 - f_8$. Z tabulky vidíme, že pro funkci f_1 na volbě optimální metody záleží, neboť LM2 v tomto případě nekonverguje ke kořenu ξ . Když jsme testovali funkci f_5 , metoda nekonvergovala s metodou RM. U funkcí f_2, f_3, f_4 a f_9 optimální metoda čtvrtého řádu ovlivnila jen nepatrně COC 1, stejným způsobem, jak je tomu u funkce f_6 . U testovacích funkcí f_7 a f_8 ovlivnila volba optimální metody rozdíl ve výpočtu numerického řádu.

Tabulka 6.11: Metoda podle Wanga.

WM	$f_1, x_0 = 1.6$			$f_6, x_0 = 1.8$		
Metoda	k	p	COC 1	k	p	COC 1
RM	3	7	6.45710	3	7	7.90544
LM2	1000	7	-	3	7	7.96868
WM	$f_7, x_0 = 1.15$			$f_8, x_0 = 3.86$		
Metoda	k	p	COC 1	k	p	COC 1
RM	3	7	8.57372	3	7	8.05584
LM2	3	7	9.65991	3	7	7.23486

Metoda podle Soleymania 1 (5.45), stejně jako metoda podle Soleymania 2 (5.47) měla nastavenou konstantu $\beta = 1$. U většiny námi zvolených testovacích funkcích metoda našla řešení ξ , pokud jsme konstantu β zmenšovali, ale zmenšil se také počet iterací, i přes oddalování počáteční aproximace x_0 od kořene ξ , proto nemůžeme porovnat COC 1.

V článku [24] autor uvedl tři různé váhové funkce W2 (5.48), W3 (5.49) a W4 (5.50) pro metodu podle Soleymania 2 (5.47). V následující tabulce 6.12 můžeme vidět hodnoty testovacích funkcí f_7 a f_8 . U funkce f_7 je jen nepatrná změna ve výpočtu numerického řádu, stejně tomu bylo u funkce f_6 . Větší rozdíl v COC 1 byl pro funkci f_2 a pro funkce f_8 a f_5 s váhovou funkcí W4 metoda nespočítala kořen ξ . MSo2 nekonvergovala, když byla použita váhová funkce W2 na funkci f_9 . Pro ostatní testovací funkce (f_1 , f_3 , f_4) nemůžeme srovnat hodnoty numerického řádu, protože i když jsme oddalovali kořen, proběhly pouze dvě iterace.

Tabulka 6.12: Metoda podle Soleymania 2.

MSo2	$f_7, x_0 = 6$			$f_8, x_0 = 3.3$		
	k	p	COC 1	k	p	COC 1
W2	3	8	7.90803	3	8	8.13109
W3	3	8	7.86206	3	8	8.34972
W4	3	8	7.87780	1000	8	-

7 Závěr

Cílem této bakalářské práce byl především popis Steffensenovy metody a uvedení metod Steffensenova typu.

Nejdříve bylo potřeba uvést samotný problém nelineárních rovnic a definice týkající se řádu konvergence a indexu efektivity, což bylo provedeno ve druhé kapitole. Také jsme v této kapitole popsali tzv. startovací metodu, za kterou jsme zvolili metodu bisekce, protože tato metoda konverguje vždy.

Ve třetí kapitole jsme se zaměřili na Newtonovu iterační metodu, ze které vychází Steffensenova metoda, té je věnovaná čtvrtá kapitola. V další, páté kapitole, jsou uvedeny metody Steffensenova typu, které vychází ze samotné Steffensenovy metody. Detailní odvození metod v této práci nebylo uvedeno, ale u každé z metod je uveden alespoň náznak odvození a odkaz na zdroj, kde lze nalézt o dané metodě více.

Poslední kapitola se věnuje především porovnání výsledků z naprogramovaných metod v softwaru MATLAB, což byl poslední z cílů této bakalářské práce. Porovnávali jsme řád metody s numerickým řádem COC, počty iterací potřebné k nalezení hledaného kořene a v neposlední řadě také vliv volby různých konstant v daných metodách na rychlost konvergence. Zvolili jsme testovací funkce, na kterých se ukázala Steffensenova metoda jako méně efektivní oproti Newtonově metodě, avšak v případě, kdy nelineární funkce je náročná na výpočet derivace, je Steffensenova metoda vhodnější, protože nepoužívá derivaci ve svém algoritmu. Metody Steffensenova typu vyššího řádu se jeví jako efektivní, ale při špatné volbě počáteční aproximace nekonvergují ke kořenu.

Metody Steffensenova typu vznikají už od roku 1960. Na tuto bakalářskou práci je možno dále navázat zpracováním a srovnáním dalších takových metod, protože jejich aplikace je velmi široká a potřebná v mnoha vědních oborech.

8 Seznam použité literatury

- [1] CORDERO, Alicia a Juan R. TORREGROSA. Variants of Newton's Method using fifth-order quadrature formulas. *Applied Mathematics and Computation* [online]. 2007, 190(1), 686-698 [cit. 2020-06-17]. DOI: 10.1016/j.amc.2007.01.062. ISSN 00963003.
- [2] CORDERO, Alicia, José L. HUESO, Eulalia MARTÍNEZ a Juan R. TORREGROSA. A modified Newton-Jarratt's composition. *Numerical Algorithms* [online]. 2010, 55(1), 87-99 [cit. 2020-05-11]. DOI: 10.1007/s11075-009-9359-z. ISSN 1017-1398.
- [3] CORDERO, Alicia, José L. HUESO, Eulalia MARTÍNEZ a Juan R. TORREGROSA. Steffensen type methods for solving nonlinear equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. [online]. 2012, 236(12), 3058-3064 [cit. 2020-03-09]. DOI: 10.1016/j.cam.2010.08.043. ISSN 03770427.
- [4] CORDERO, Alicia a Juan R. TORREGROSA. A class of Steffensen type methods with optimal order of convergence. *Applied Mathematics and Computation* [online]. 2011, 217(19), 7653-7659 [cit. 2020-05-02]. DOI: 10.1016/j.amc.2011.02.067. ISSN 00963003.
- [5] ČERMÁK, Libor a Rudolf HLAVIČKA. *Numerické metody*. Vydání třetí. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2016. ISBN 978-80-214-5437-8.
Dostupné z: http://math.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=246843468
- [6] DIVYA, Jain a Babita GUPTA. Two step Newton and Steffensen type methods for solving non-linear equations. *Tbilisi Mathematical Journal*. 2012, 5(1), 17-29 [cit. 2020-03-09].
- [7] DEHGHAN, Mehdi a Masoud HAJARIAN. A variant of Steffensen's method with a better approximation to the derivative. *Applied Mathematics and computation*. 2008, doi:10.1016/j.amc.2007.12.046.
- [8] DŽUNIĆ, Jovana a Miodrag S. PETKOVIĆ. *A cubically convergent Steffensen-like method for solving nonlinear equations*. *Applied Mathematics Letters* [online]. 2012, 25(11), 1881-1886 [cit. 2020-03-09]. DOI: 10.1016/j.aml.2012.02.055. ISSN 08939659.
- [9] GAUTSCHI, Walter. *Numerical analysis*. 2nd ed. New York: Springer/ Birkhauser, c2012. ISBN 978-0-8176-8258-3.
- [10] GRAU, Miquel a José Luis DÍAZ-BARRERO. An improvement to Ostrowski root-finding method. *Applied Mathematics and Computation* [online]. 2006, 173(1),

- 450-456 [cit. 2020-04-22]. DOI: 10.1016/j.amc.2005.04.043. ISSN 00963003.
- [11] HAFIZ, Mohammed Ali. Solving Nonlinear Equations Using Steffensen-Type Methods With Optimal Order of Convergence. *Palestine Journal of Mathematics*. 2014, 3(1), 113-119 [cit. 2020-03-16].
- [12] HOROVÁ, Ivana a Jiří ZELINKA. *Numerické metody*. Vyd. 2., rozš. Brno: Masarykova Univerzita v Brně, 2004. ISBN 978-80-210-3317-7.
- [13] JAIN, Pankaj. Steffensen type methods for solving non-linear equations. *Applied Mathematics and Computation* [online]. 2007, 194(2), 527-533 [cit. 2020-05-02]. DOI: 10.1016/j.amc.2007.04.087. ISSN 00963003.
- [14] KASTURIARACHI, A. Bathi. Leap-frogging Newton's method. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* [online]. 2002, 33(4), 521-527 [cit. 2020-05-02]. DOI: 10.1080/00207390210131786. ISSN 0020-739X.
- [15] LIU, Zhongli a Hong ZHANG. Steffensen-Type Method of Super Third-Order Convergence for Solving Nonlinear Equations. *Journal of Applied Mathematics and Physics*. [online]. 2014, 02(07), 581-586 [cit. 2020-03-09]. DOI: 10.4236/jamp.2014.27064. ISSN 2327-4352.
- [16] LIU, Zhongli, Quan ZHENG a Peng ZHAO. A variant of Steffensen's method of fourth-order convergence and its applications. *Applied Mathematics and Computation* [online]. 2010, 216(7), 1978-1983 [cit. 2020-04-30]. DOI: 10.1016/j.amc.2010.03.028. ISSN 00963003.
- [17] OGBORN, M. E. Johan Frederik Steffensen. *Journal of the Institute of Actuaries* [online]. 1962, 88(2), 251-252 [cit. 2020-06-10]. DOI: 10.1017/S0020268100015067. ISSN 0020-2681.
- [18] PAVALOIU, Ion a Emil CATINAS, On a Steffensen type method. *Ninth International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing*. [online]. 2007, 369-375 [cit. 2020-03-26]. DOI: 10.1109/SYNASC.2007.83.
- [19] REN, Hongmin, Qingbiao WU a Weihong BI. A class of two-step Steffensen type methods with fourth-order convergence. *Applied Mathematics and Computation* [online]. 2009, 209(2), 206-210 [cit. 2020-04-30]. DOI: 10.1016/j.amc.2008.12.039. ISSN 00963003.

- [20] RŮŽIČKOVÁ, Irena a Rudolf HLAVIČKA. *Numerické metody* [online]. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství.
Dostupné z: <http://physics.ujep.cz/~jskvor/NME/DalsiSkripta/Numerika.pdf>
- [21] ŘEHÁK, Pavel. *Pár informací o diferenciálním počtu funkcí jedné reálné proměnné.* [online]. 2016, [cit. 2020-03-09]
Dostupné z: <http://users.math.cas.cz/~rehak/soubory/dp.pdf>
- [22] SHARMA, J.R. A composite third order Newton–Steffensen method for solving nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation* [online]. 2005, 169(1), 242-246 [cit. 2020-04-23]. DOI: 10.1016/j.amc.2004.10.040. ISSN 00963003.
- [23] SINGH, Baljodh. Fourth-order Steffensen type methods for nonlinear equations. *International Journal of Statistics and Applied Mathematics*. 2017, 2(4), 11-15.
- [24] SOLEYMANI, F. Optimized Steffensen-Type Methods with Eighth-Order Convergence and High Efficiency Index. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* [online]. 2012, 2012, 1-18 [cit. 2020-03-31]. DOI: 10.1155/2012/932420. ISSN 0161-1712.
- [25] ŠVENDOVÁ, Vendula. *Steffensenova metoda a její zobecnění.* Brno, 2010. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Ústav matematiky a statistiky. Vedoucí práce prof. RNDr. Ivana Horová, CSc.
- [26] TRAUB, J.F. *Iterative Methods for the Solution of Equations.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, [1964].
- [27] WANG, Xiaofeng a Tie ZHANG. A family of Steffensen type methods with seventh-order convergence. *Numerical Algorithms* [online]. 2013, 62(3), 429-444 [cit. 2020-03-31]. DOI: 10.1007/s11075-012-9597-3. ISSN 1017-1398
- [28] WEERAKOON, S. a T.G.I. FERNANDO. A variant of Newton’s method with accelerated third-order convergence. *Applied Mathematics Letters* [online]. 2000, 13(8), 87-93 [cit. 2020-05-11]. DOI: 10.1016/S0893-9659(00)00100-2. ISSN 08939659.
- [29] ZHENG, Quan, Jing WANG, Peng ZHAO a Li ZHANG. A Steffensen-like method and its higher-order variants. *Applied Mathematics and Computation*. [online]. 2009, 214(1), 10-16 [cit. 2020-03-09]. DOI: 10.1016/j.amc.2009.03.053. ISSN 00963003.

9 Seznam použitých zkratek a symbolů

ξ	kořen nelineární rovnice $f(x) = 0$
x_0	počáteční aproximace
ε	výpočtová přesnost
e_k	chyba v k -tém kroku
p	řád konvergence
r	celkový počet funkčních hodnot v jedné iteraci
I_e	index efektivity
$\langle a, b \rangle$	uzavřený interval
$C \langle a, b \rangle$	množina spojitých funkcí na $\langle a, b \rangle$
$C^2 \langle a, b \rangle$	množina funkcí se spojitými derivacemi do druhého řádu včetně na intervalu $\langle a, b \rangle$
\mathbb{R}	množina reálných čísel
COC	numerický řád konvergence
k	počet iterací
f^{-1}	inverzní funkce
$[\cdot, \cdot]$	poměrná diference
α, β	reálné konstanty
$N_k(x)$	Newtonův interpolační polynom k -tého stupně
$R_k(x)$	chyba Newtonova interpolačního polynomu k -tého stupně
$W_k, k = 1, 2, 3$	váhové funkce pro HM
$Wk, k = 1, 2, 3, 4$	váhové funkce pro MSo