



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV KONSTRUOVÁNÍ

INSTITUTE OF MACHINE AND INDUSTRIAL DESIGN

TVORBA EDUKAČNÍCH ÚLOH PRO VÝUKU METODY KONEČNÝCH PRVKŮ

EDUCATIONAL EXERCISES FOR FINITE ELEMENT METHOD LECTURES

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

František Sovadina

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. David Nečas, Ph.D.

BRNO 2018

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav konstruování
Student:	František Sovadina
Studijní program:	Strojírenství
Studijní obor:	Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce:	Ing. David Nečas, Ph.D.
Akademický rok:	2017/18

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Tvorba edukačních úloh pro výuku metody konečných prvků

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

V rámci projektové výuky na Ústavu konstruování studenti ověřují získané teoretické znalosti v oblasti metody konečných prvků (MKP) řešením relativně jednoduchých projektů typu „návrh mostní konstrukce ze špejlí a její ověření pomocí MKP“. Tento typ výuky podporuje u studentů kreativní myšlení, a proto je aplikován na mnoha zahraničních univerzitách. Vytvořená databáze úloh pro projektovou výuku povede k jejímu dalšímu zkvalitnění a rozšíření znalostí studentů.

Typ práce: rešeršně syntetická

Cíle bakalářské práce:

Hlavním cílem práce je zmapovat úlohy řešené v rámci výuky metody konečných prvků (MKP) na tuzemských i zahraničních univerzitách. Následně budou navržena tři zadání, kdy jedno bude rozpracováno formou kompletního zadání.

Dílčí cíle bakalářské práce:

- zmapovat úlohy vyučované v rámci výuky MKP na tuzemských a zahraničních univerzitách,
- navrhnout tři zadání projektů,
- vytvořit kompletní zadání jednoho zvoleného projektu,
- provést MKP analýzu finálního navrženého projektu,
- realizovat experimentální ověření finálního navrženého projektu.

Požadované výstupy: průvodní zpráva, laboratorní protokol, digitální data.

Rozsah práce: cca 27 000 znaků (15 – 20 stran textu bez obrázků).

Struktura práce a šablona průvodní zprávy jsou závazné:

http://dokumenty.uk.fme.vutbr.cz/BP_DP/Zasady_VSKP_2018.pdf

Seznam doporučené literatury:

REDDY, J. N. An introduction to the finite element method. 3rd ed. New York, NY: McGraw-Hill Higher Education, c2006. ISBN 0072466855.

TECH SUPPORT TEAM PADT Inc., YOUNG, S. a J. STRAIN, (eds.) Introduction to the ANSYS Parametric Design Language (APDL): A Guide to the ANSYS Parametric Design Language, 2013. ISBN 9781466411357.

LAWRENCE, K. L. ANSYS tutorial: release 14: structural & thermal analysis using the ANSYS Mechanical APDL release 14 environment. Mission, KS: SDC Publications, 2012. ISBN 9781585037612.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2017/18

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Martin Hartl, Ph.D.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

ABSTRAKT

Tato práce se zabývá zmapováním úloh využívaných pro výuku metody kone ných prvk (MKP) na tuzemských a zahrani ních univerzitách. V první ásti je vytvo en p ehled úloh zam ených na MKP, které jsou p i výuce na tuzemských i zahrani ních univerzitách využívány. Tyto úlohy lze použít pro výuku MKP na Fakult strojního inženýrství v Brn . V druhé ásti bakalá ské práce bylo na základ získaných podklad z univerzit vytvo eno nové zadání úlohy, pro které byl následn i proveden modelový výpo et pomocí programu ANSYS. Výsledky výpo tu byly poté ov ovány i provedením experimentu na fyzickém modelu.

KLÍ OVÁ SLOVA

Týmový projekt, Prutové konstrukce, Metoda kone ných prvk , Statická strukturální analýza, ANSYS

ABSTRACT

This work is concerned with mapping of exercises for teaching Finite Element Method (FEM) at Czech as well as foreign universities. The first part reviews exercises on FEM in use at Czech and foreign universities, which might be used for teaching FEM at the Faculty of Mechanical Engineering in Brno in the future. Based on the analyzed material, the aim of the second part of this work was to create a new assignment of an exercise together with its model calculation in ANSYS. The results were then proved through an experiment on a physical model.

KEY WORDS

Team project, Bar structures, Finite element method, Static structural analysis, ANSYS

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

SOVADINA, F. *Tvorba edukačních úloh pro výuku metody konečných prvků*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2018. 48 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. David Nečas, Ph.D.

ESTNÉ PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že tuto bakalářskou práci *Tvorba edukačních úloh pro výuku metody konečných prvků* jsem vypracoval samostatně, pod vedením vedoucího bakalářské práce Ing. Davida Nease, Ph.D. s použitím literárních zdrojů uvedených v 6. kapitole.

V Brně dne 17. května 2018

.....
Podpis autora

POD KOVÁNÍ

Tímto bych chtěl podkovat Ing. Davidu Neasovi, Ph.D. Za jeho čas a trpělivost při konzultacích a připomínky při psaní práce. Dále bych chtěl podkovat své rodinu a přátelům za podporu.

OBSAH

1 ÚVOD	12
2 ANALÝZA PROBLÉMU A CÍL PRÁCE	13
2.1 Používané typy mostových konstrukcí	13
2.1.1 Trámová mostová konstrukce	13
2.1.2 Oblouková mostová konstrukce	14
2.2 Cíl práce	15
3 PŘEHLED SOUČASNÉHO STAVU POZNÁNÍ	16
3.1 Teoretický úvod do MKP	16
3.1.1 Rovnice rovnováhy	16
3.1.2 Geometrické rovnice	16
3.1.3 Konstitutivní vztahy	17
3.1.4 Okrajové podmínky	17
3.1.5 MKP jako variací metoda	18
3.1.6 Diskretizace spojitého problému v MKP	18
3.1.7 Matice tuhosti a zatížení	19
3.1.8 Základní rovnice MKP	19
3.2 ANSYS	20
3.3 Prutové soustavy v MKP	20
3.3.1 Prutové těleso	20
3.3.2 Prutové soustavy	21
3.3.3 Vzpůrná stabilita prut	22
4 DISKUZE	23
4.1 Získané úlohy	23
4.2 Navrhované typy úloh	26
4.2.1 Úloha první	26
4.2.2 Úloha druhá	28
4.2.3 Úloha třetí	30
4.3 Projekt bakalářské práce	32
4.3.1 Mechanické vlastnosti použitých materiálů	32
4.3.2 Výpočtový model v programu ANSYS	33
4.3.3 Fyzický model	35
5 ZÁVĚR	38
6 SEZNAM POŽITÝCH ZDROJŮ	39
7 SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK, SYMBOLŮ A VELIČIN	41
8 SEZNAM OBRÁZKŮ A GRAFŮ	42
9 SEZNAM TABULEK	43
10. SEZNAM PŘÍLOH	44

1 ÚVOD

Projektová výuka v rámci studia na fakultě Strojního inženýrství Vysokého učení technického v Brně dává studentům možnost ověřit si teoretické znalosti na zjednodušených praktických úlohách. Postavením fyzického modelu a podrobením tohoto modelu zátěžovým zkouškám získají studenti možnost ověřit si analytické výsledky získané v programu ANSYS. Studenti prostřednictvím úloh, jimiž se zabývají v technické praxi, získávají zkušenosti v práci na daném problému v týmu. [1]

Mnoho problémů ve strojírenství je popsáno parciálními diferenciálními rovnicemi na netriviálních oblastech, které ve speciálních případech nelze vyřešit analyticky. Pro vyřešení těchto problémů lze efektivně využívat různých numerických metod, především metodu konečných prvků (MKP). Podle této metody získáváme řešení parciálních diferenciálních rovnic ve složitých oblastech. Hlavní výhodou metody konečných prvků je její aplikovatelnost na velkou škálu problémů.

Metoda konečných prvků je založena na variačním řešení partikulární diferenciální rovnice. Řešená oblast je rozdělena pomocí jednoduchých geometrických obrazců, např. trojúhelníků, čtyřúhelníků, čtyřtětů nebo šestitětů. Přibližné řešení je rozšířeno na báze lokálních funkcí s konečným počtem elementárních těles v dané podoblasti. Tato diskretizace vede k velkému systému lineárních rovnic, obvykle řešených pomocí iteračních metod. [2]

Jeví se jako žádoucí obohacovat projektovou výuku v oblasti MKP o stále nové úlohy, které mohou jak napomoci lepšímu pochopení dané problematiky, tak i přitáhnout větší zájem a pozornost studentů k MKP.

2 ANALÝZA PROBLÉMU A CÍL PRÁCE

2

V rámci studia na fakultě strojního inženýrství v Brně mohou studenti porovnat přesnost výpočtů MKP s realitou při analýze a následné stavbě fyzického modelu mostové konstrukce.

2.1 Používané typy mostových konstrukcí

2.1

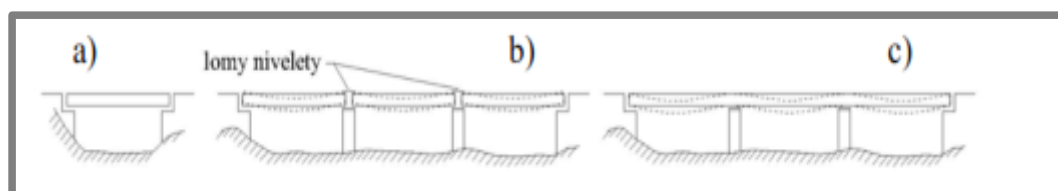
Při výuce se používají dva typy mostových konstrukcí. Prvním typem je trémová mostová konstrukce, druhým oblouková mostová konstrukce.

2.1.1 Trémová mostová konstrukce

2.1.1

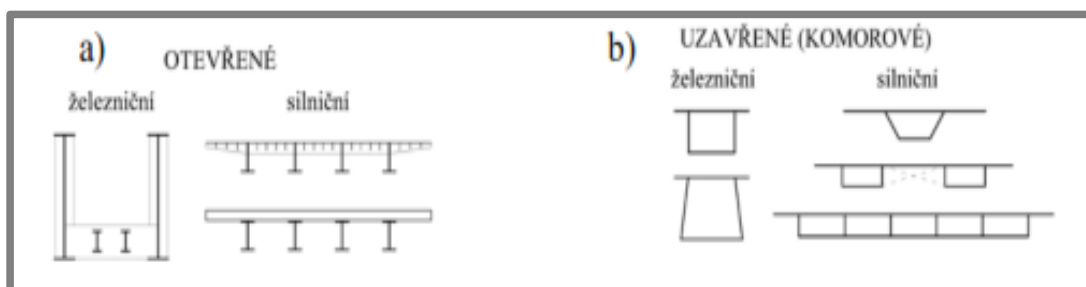
Trémové mosty se používají nejen při stavbě betonových, ocelových a ocelobetonových mostů, ale i při návrhu dřevěných mostů.

V případě ocelových a ocelobetonových mostů tvoří hlavní nosnou konstrukci ocelové trámy (hlavní nosníky), které přenášejí pomocí ložisek zatížení z mostovky do spodní stavby. **Hlavní nosníky** mohou být plnostěnné nebo příhradové. Při statickém zatížení mohou působit jako prosté nosníky (Obr. 2.1a, Obr. 2.1b) nebo jako spojitě nosníky (Obr. 2.1c). **Mostovka** ocelových mostů je ocelová, u ocelobetonových mostů pak z železobetonu. [3]



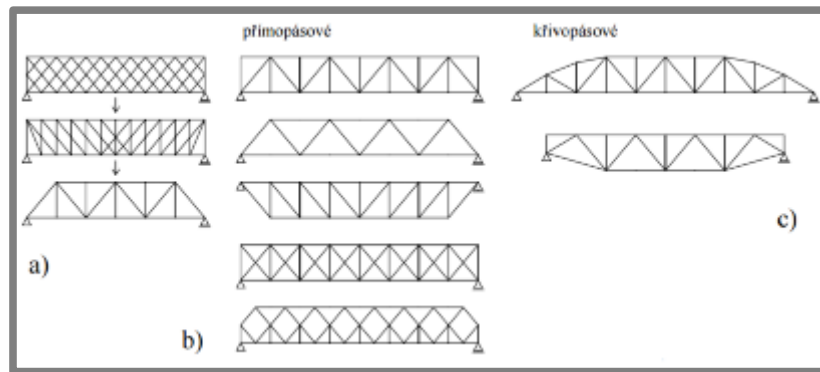
Obr. 2.1: Rozdělení nosníků [3]

Plnostěnné hlavní nosníky mohou být v příčném řezu řešeny jako otevřené (Obr. 2a) nebo uzavřené. (Obr. 2.2b)



Obr. 2.2: Typy trémových mostů [3]

U příhradových hlavních nosníků se v dnešní době dává přednost systémům staticky určitým nebo s nízkým stupněm statické neurčitosti. Jedním z typů systému jsou tzv. přímopásové systémy (Obr. 2.3b) a druhým typem jsou tzv. křivopásové systémy. (Obr. 2.3c) [3]



Obr. 2.3: Příhradové hlavní nosníky [3]

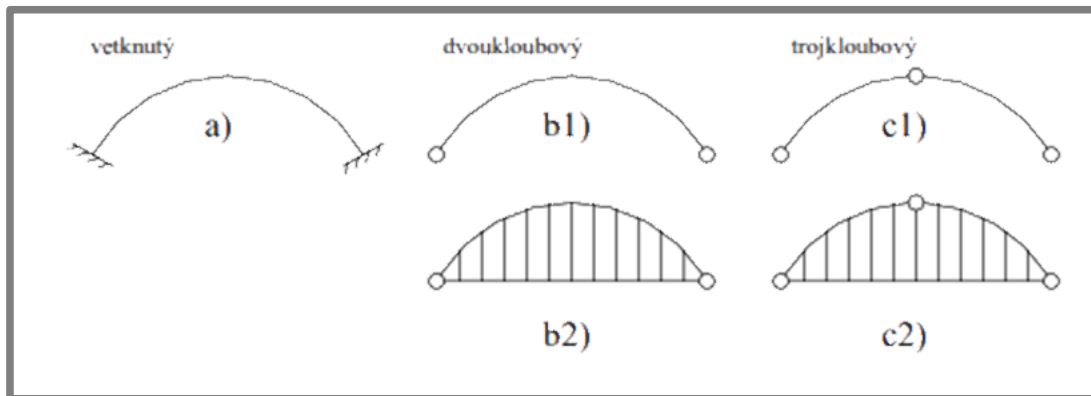
2.1.2

2.1.2 Oblouková mostová konstrukce

Výhoda obloukových mostů spočívá v jejich tvaru, který se přibližuje tvaru výslednicové křivky od vnějšího zatížení. Nevýhodou je jejich náročná výroba a montáž.

Jedním z kritérií, podle kterých oblouky dělíme, je statické působení tlaku na opěry [3]:

- **Pravé oblouky**
Pravé oblouky vyvozují na opěry šikmé tlaky. (Obr. 2.4a, 2.4b1, 2.4c1).
- **Nepravé oblouky s táhlem**
Nepravé oblouky zase vyvozují na opěry tlaky svislé. (Obr. 2.4b2, 2.4c2)



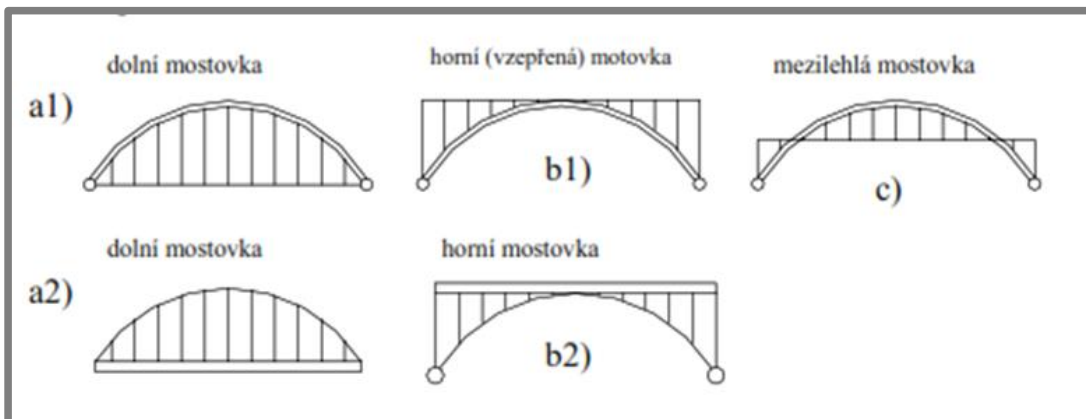
Obr. 2.4: Typy oblouků [3]

Dalším kritériem dělení oblouků je statická neurčitost a dělíme je na konstrukce:

- **Vetknuté**
Třikrát staticky neurčité (Obr. 2.4a)
- **S jedním kloubem**
Dvakrát staticky neurčité
- **Dvoukloubové**
Jedenkrát staticky neurčité (Obr. 2.4b)
- **Trojkloubové**
Staticky určité (Obr. 2.4c)

Podle poměru tuhosti oblouku a rámu dělíme oblouky na:

- **Tuhé oblouky** (Obr. 2.5a1, 2.5b1, 2.5c)
- **Volné oblouky**
- **Langerův trám** (Obr. 2.5a2, 2.5b2)



Obr. 2.5: Oblouky podle poměru tuhosti [3]

Langerův trám vzniká kombinací tuhých a volných oblouků. [3]

2.2 Cíl práce

2.2

Pro zkvalitnění projektové výuky je třeba rozšířit databázi úloh, které pomohou studentům rozšířit jejich znalosti. Proto je potřeba zmapovat úlohy, jež se aplikují ve výuce MKP na tuzemských a zahraničních univerzitách.

Díličí cíle bakalářské práce:

- Zmapovat úlohy vyučované v rámci výuky MKP na tuzemských a zahraničních univerzitách.
- Navrhnout tři zadání projektů.
- Vytvořit kompletní zadání jednoho zvoleného projektu.
- Provést MKP analýzu finálního navrženého projektu.
- Realizovat experimentální ověření finálního navrženého projektu.

3 PŘEHLED SOUČASNÉHO STAVU POZNÁNÍ

3.1

3.1 Teoretický úvod do MKP

Pro vysvětlení metody konečných prvků (dále jen MKP) se budeme zabývat tzv. přímou úlohou pružnosti, u které známe geometrii, materiál a zatížení tělesa. Navíc potřebujeme určit deformaci a napjatost tělesa.

V obecné prostorové statické úloze čítají deformace a napjatost dohromady 15 neznámých funkcí v kartézském souřadnicovém systému:

- Posuvy u, v, w
- Přetvoření $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$,
- Napětí $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$,

Tyto funkce jsou vzájemně provázány systémem obecných rovnic pružnosti uvnitř řešené oblasti. V rámci řešené oblasti jsou tyto funkce provázány tzv. základními rovnicemi obecné pružnosti. Základní rovnice obecné pružnosti se dělí na rovnice rovnováhy, geometrické rovnice a na konstitutivní vztahy. [4]

3.1.1

3.1.1 Rovnice rovnováhy

Tyto rovnice jsou podmínkami rovnováhy na elementární prvek tělesa, na které působí složky napětí a vnější objemová síla ve složkách x, y, z . Tyto rovnice můžeme vyjádřit pomocí tenzoru napětí. [4]

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + o_x = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + o_y = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + o_z = 0 \quad (3.3)$$

3.1.2

3.1.2 Geometrické rovnice

Tyto rovnice vytvářejí vazbu mezi složkami posuvu a přetvoření.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.5)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.6)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.7)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.8)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.9)$$

Můžeme je použít pouze při předpokladu malých přetvoření (řádu 10^{-2} a menší). [4]

3.1.3 Konstitutivní vztahy

Vyjadřují vztah mezi deformací a napjatostí tělesa. Jinak se tyto vztahy nazývají zobecněný Hookův zákon.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{G} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (3.10)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{G} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (3.11)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{G} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (3.12)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz} \quad (3.13)$$

Kde G je modul pružnosti ve smyku. [4]

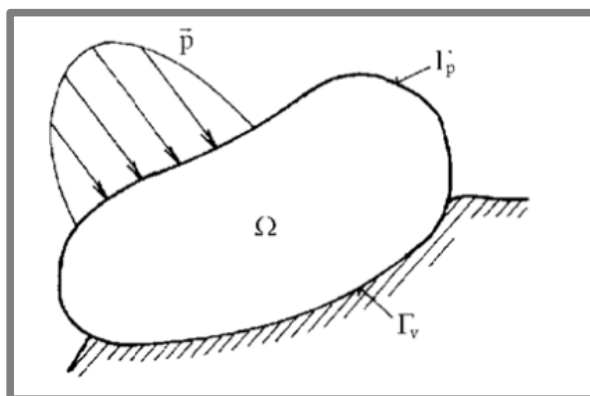
$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (3.14)$$

3.1.4 Okrajové podmínky

Abychom získali stejný počet rovnic a neznámých parametrů, musí být uvedený systém rovnic doplněn okrajovými podmínkami. Ty dělíme na geometrické a silové. V daném místě smíme předepsat vždy jenom jednu z těchto okrajových podmínek.

Geometrické okrajové podmínky vyjadřují posuvy na části povrchu tělesa Γ_v (viz obr.1). Tyto posuvy jsou už předem známy, značíme je $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$. Potom platí

$$\Gamma_v : u = \bar{u}, v = \bar{v}, w = \bar{w}$$



Obr. 3.1: Řešené těleso [4]

Silové okrajové podmínky vyjadřují rovnováhu mezi vnitřními a vnějšími silami elementárního prvku tělesa.

Je-li na Γ_p zadáno vnější plošné zatížení $\mathbf{p}^T = [p_x, p_y, p_z]$ a jednotkový vektor normály k povrchu má složky $(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$, pak [4]

$$\begin{aligned} \Gamma_p : \quad p_x &= \sigma_x \alpha_x + \tau_{xy} \alpha_y + \tau_{xz} \alpha_z \\ p_y &= \tau_{xy} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y + \tau_{yz} \alpha_z \\ p_z &= \tau_{xz} \alpha_x + \tau_{yz} \alpha_y + \sigma_z \alpha_z \end{aligned} \quad (3.15)$$

3.1.5

3.1.5 MKP jako variační metoda

Při využívání deformační varianty MKP využíváme Lagrangeův variační princip, který je formulován takto: „mezi všemi funkcemi posuvů, které zachovávají spojitost tělesa a splňují geometrické okrajové podmínky, se realizují ty, které udělají celkové potenciální energii Π stacionární hodnotu.“ [4]

Celkovou energii tělesa můžeme vyjádřit jako:

$$\Pi = W - P \quad (3.16)$$

Kde W je energie napjatosti Ω .

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (3.17)$$

A P je potenciál vnějšího zatížení.

$$P = \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{o} dV + \int_{\Gamma_p} \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS \quad (3.18)$$

Jednotlivé členy mají význam:

- | | |
|---------------------|---|
| • Posuvy | $\mathbf{u}^T = (u, v, w)$ |
| • Přetvoření | $\boldsymbol{\varepsilon}^T = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$ |
| • Napětí | $\boldsymbol{\sigma}^T = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$ |
| • Objemové zatížení | $\mathbf{o}^T = (o_x, o_y, o_z)$ |
| • Plošné zatížení | $\mathbf{p}^T = (p_x, p_y, p_z)$ |
| • Těleso | Ω |
| • Plocha tělesa | Γ_p |

3.1.6

3.1.6 Diskretizace spojitého problému v MKP

Obecně je potenciální energie Π závislá na spojitých funkcích posuvů \mathbf{u}^T s proměnnými x, y, z , kdy každá funkce má nekonečné množství hodnot v nekonečném počtu bodů v dané oblasti. Abychom daný problém mohli řešit pomocí numerických metod, musíme každou funkci vyjádřit v závislosti na konečném počtu parametrů. Aproximaci funkcí posuvů v MKP vyjadřujeme jako součet předem daných funkcí $N(x, y, z)$, které označujeme jako funkce bázové. Ty jsou pak násobeny neznámými koeficienty u_i, v_j, w_k , které představují fyzikální význam posuvů v uzlových bodech sítě.

$$u(x, y, z) = \sum_{i=1}^l N_i(x, y, z) \cdot u_i \quad (3.19)$$

$$v(x, y, z) = \sum_{j=1}^m N_j(x, y, z) \cdot v_j \quad (3.20)$$

$$w(x, y, z) = \sum_{k=1}^n N_k(x, y, z) \cdot w_k \quad (3.21)$$

Dosazením výše uvedené aproximace do rovnice (3.16) dojdeme k vyjádření potenciální energie Π v závislosti na konečném počtu parametrů. Poté podmínka stacionární hodnoty Π vede na soustavu rovnic:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \Pi}{\partial w_n} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow u_1, u_2, \dots, w_n \quad (3.22)$$

Řešením soustavy získáme parametry hledaných funkcí posuvů dle (3.19 – 3.21). [4]

3.1.7 Matice tuhosti a zatížení

3.1.7

Chceme-li vyjádřit celkový potenciál Π daného tělesa, musíme sloučit všechny deformační parametry problému do jediné globální matice deformačních parametrů: $\mathbf{U} = [u_1, u_2, u_3, u_4]^T$. Chceme-li energii napjatosti prvního prvku vyjádřit ve tvaru:

$$W_1 = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{U} \quad (3.23),$$

musí matice tuhosti prvního prvku \mathbf{K}_1 mít rozměr čtvercové matice tolik, kolik je deformačních parametrů.

Potom je celková energie napjatosti součtem příspěvků od jednotlivých prvků:

$$W = \sum_{i=1}^3 W_i = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \cdot (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3) \cdot \mathbf{U} = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} \quad (3.24).$$

Stejně získáme i matici celkového zatížení \mathbf{F} . Vyjádříme-li celkový potenciál vnějšího zatížení pomocí příspěvků od jednotlivých prvků: [4]

$$P = \sum_{i=1}^3 P_i = \mathbf{U}^T \cdot (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3) = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{F} \quad (3.25),$$

Matice zatížení \mathbf{F} má pak rozměr sloupcové matice.

3.1.8 Základní rovnice MKP

3.1.8

Dosazením rovnic (3.24), (3.25) do rovnice pro celkovou energii tělesa (3.16) dostaneme:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{F} \quad (3.26)$$

Podle Langrageova variačního principu vyplývá, že pro získání posuvů musíme najít stacionární hodnotu celkové potenciální energie, z čehož vyplývá podmínka:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{0} \quad (3.27)$$

Po derivaci má rovnice (3.26) tvar:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (3.28)$$

Rovnice (3.28) se nazývá základní rovnicí MKP.

Matice tuhosti soustavy K je singulární, soustava tedy nemá jednoznačné řešení. Pro vyřešení této rovnice musíme nejdříve předepsat okrajové podmínky a z matice soustavy K odstranit první sloupec a řádek, které představují zadanou okrajovou podmínku. Poté je matice K regulární. [4]

3.2

3.2 ANSYS

Program ANSYS je rozsáhlý inženýrský software pro modelování velkého množství fyzikálních dějů. Tento software se dnes používá v různých vědních oborech a také v různých odvětvích průmyslu např. letecký, strojírenský, stavební, zdravotnický, elektrotechnický, energetický. [5]

ANSYS kombinuje do sebe několik druhů produktů, které umožňují simulovat různé fyzikální děje, ať už je to výpočet pevnosti a pružnosti (structures) nebo simulace z oblasti elektřiny a magnetismu (electromagnetics), a vědní obory.

ANSYS Workbench umožňuje simulaci a analýzu multifyzikálních úloh díky systému propojení jednotlivých analýz, jejichž výsledky navzájem souvisí. Uživatelské prostředí je díky možnosti použití myši příjemnější na ovládání, na rozdíl od prostředí ANSYS Classic, které je ovládáno pomocí skriptů. Workbench obsahuje tzv. „Toolbox“, v němž se může kombinovat několik druhů analýz, např. strukturální analýza, proudění, elektromagnetické pole a jiné. [6]

ANSYS Mechanical (Classic) je základní verze obsahující grafický pre- a post-processor využívající svůj vlastní skriptovací jazyk APDL (Ansys Parametric Design Language) pro řešení úloh.

3.3

3.3 Prutové soustavy v MKP

V rámci této bakalářské práce se budeme zabývat konstrukcemi prutových soustav.

3.3.1

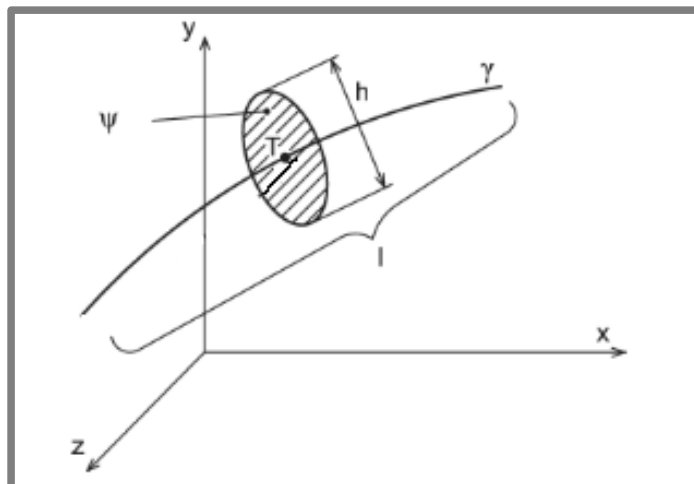
3.3.1 Prutové těleso

Za teoretický model tělesa považujeme takové těleso, které splňuje určité geometrické, deformační a napjatostní předpoklady. Tyto předpoklady souhrnně nazýváme prutovými předpoklady. Prutové těleso můžeme tedy považovat za teoretický model pružnosti.

Prutové předpoklady:

1) Geometrické

- Prut je určen střednicí γ . V každém bodě střednice je prut definován příčným průřezem ψ , který je kolmý na střednici. Průsečík střednice γ a příčného průřezu ψ se nazývá těžištěm T příčného průřezu ψ .
- Střednice γ je spojitá a hladká křivka konečné délky.
- Příčný průřez ψ je jedno nebo vícenásobně souvislá ohraničená oblast.
- Délka střednice l je minimálně stejně velká jako největší rozměr příčného průřezu h_{max} .



Obr. 3.2: Geometrické předpoklady

2) *Vazbové a zatěžovací*

- Vazby omezují pouze posuvy a úhly natočení střednice.
- Zatížení je soustředěno na střednici γ .

3) *Deformační*

- Střednice γ zůstává v procesu deformace spojitou a hladkou křivkou.
- Příčné průřezy ψ zůstávají i po deformaci rovinnými a kolnými průřezy ke zdeformované střednici γ .

4) *Napjatostní*

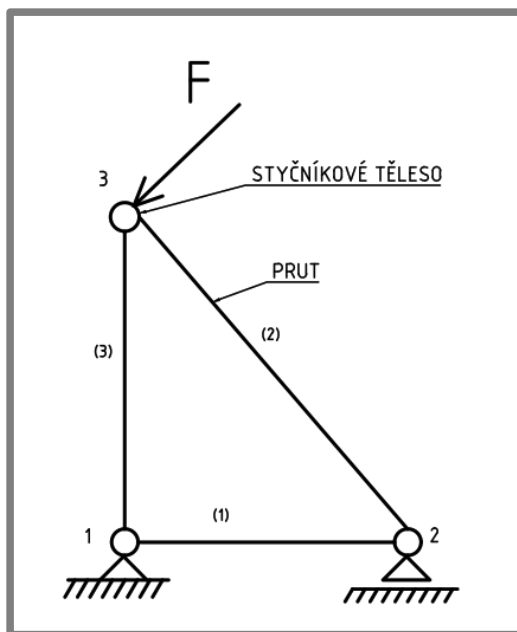
- Napjatost v prutu je určena normálovým a smykovým napětím v příčném průřezu ψ . [7]

3.3.2 Prutové soustavy

3.3.2

Prutové soustavy jsou nejjednodušší modelovou soustavou prutových a příhradových konstrukcí. Abychom mohli dané systémy vypočítat, musí konstrukce splňovat tyto předpoklady:

- 1) Vazby mezi tělesy jsou u prostorových úloh tvořené sférickými a rotačními kinematickými dvojicemi typu NNTN.
- 2) Prutová soustava je tvořena pouze pruty nebo styčnickovými tělesy. Styčnickové těleso vytváří spojení dvou a více prutů, kde středy rotačních a sférických kinematických dvojic splývají. Tyto body nazýváme styčnickovým tělesem.
- 3) Vnější zatížení na soustavu působí pouze na styčnicková tělesa.
- 4) Uložení k základnímu tělesu je realizováno stykem ve styčnicku rotační, sférickou nebo obecnou kinematickou dvojicí.
- 5) Každý prut prutové soustavy je vázán ve styčnicku s dvěma a více pruty, které vytváří nepohyblivé prutové těleso. [8]



Obr. 3.3: Prutová soustava

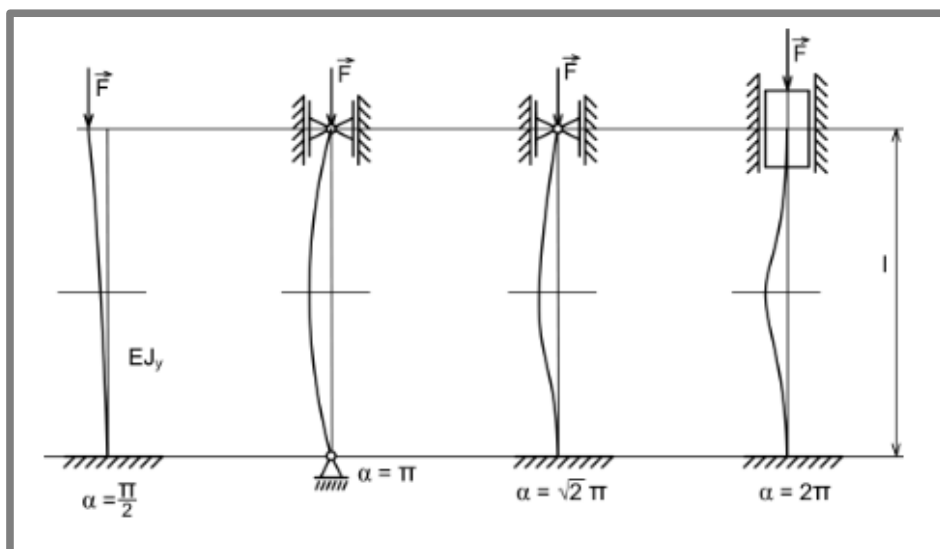
3.3.3

3.3.3 Vzpěrná stabilita prutů

Pokud prut zatěžujeme silou větší než kritickou, dochází díky velkému tlaku k meznímu stavu vzpěrné stability. V důsledku ztráty této vzpěrné stability se prut zdeformuje. Pro výpočet kritické síly lze odvodit vztah (3.29).

$$F_{krit} = \frac{\alpha^2 \cdot E \cdot J_y}{l^2} \quad (3.29)$$

Kde α je součinitel uložení prutu. Hodnoty viz Obr. 3.4.



Obr. 3.4: Hodnoty součinitele uložení [14]

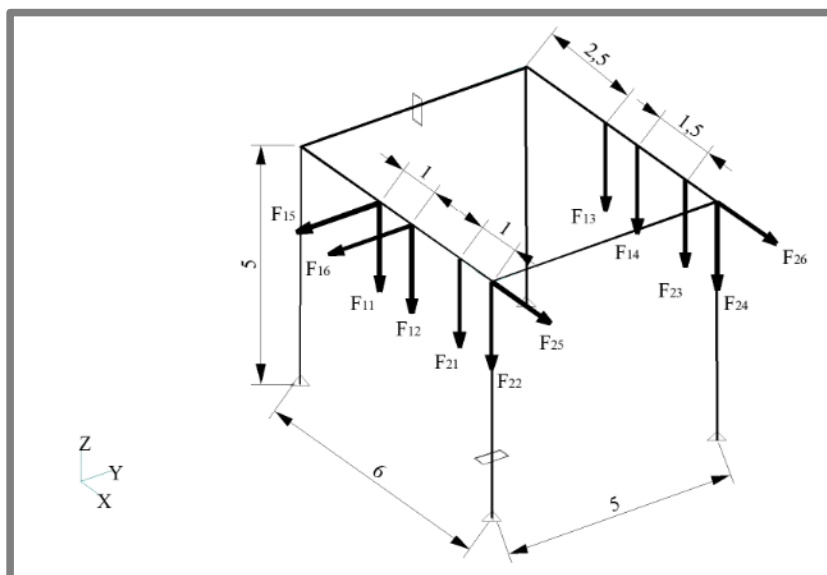
4 DISKUZE

Při hledání nových úloh pro projektovou výuku MKP byly kontaktovány jak tuzemské, tak zahraniční univerzity s technickým zaměřením. Při výběru univerzit byl projedán jejich výukový plán, aby byly vybrány pouze ty univerzity, které se zabývají výukou MKP. Po oslovení garantů těchto předmětů se podařilo získat příklady, které při výuce MKP využívají.

4.1 Získané úlohy

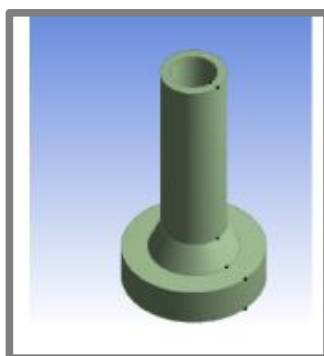
Z německé Univerzity aplikovaných věd Augsburg (**Hochschule für angewandte Wissenschaften Augsburg**) byly obdrženy tyto úlohy:

- U prvního příkladu se řeší zatížení nosníků ve více bodech konstrukce (viz Obr. 4.1).



Obr. 4.1: Nosníky

- Další úloha je koncipována na teplotní analýzu části parní linky (viz Obr. 4.2).

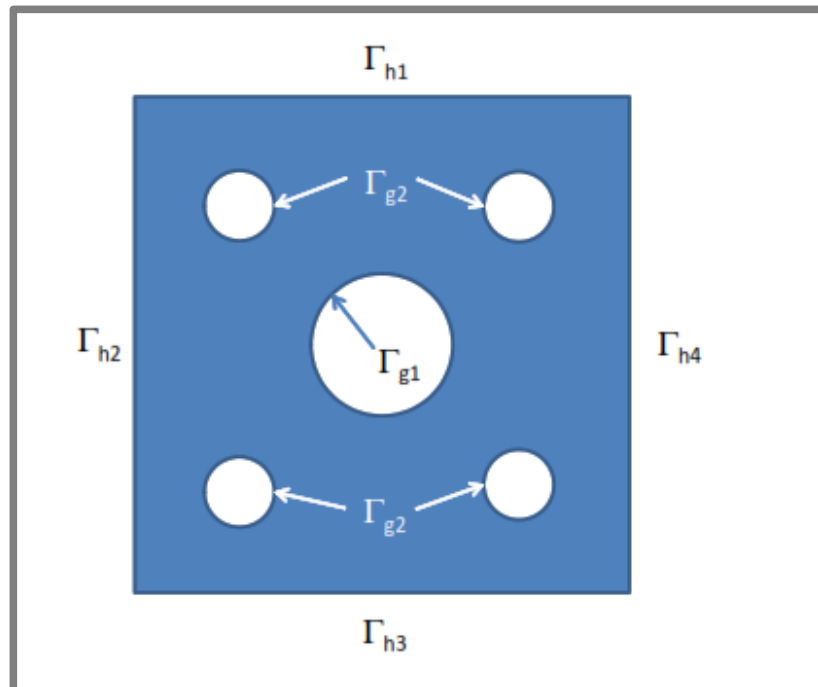


Obr. 4.2: Součást parní linky

Ostatní úlohy, které byly obdrženy z německé univerzity, jsou podobné těm, s nimiž se běžně setkáváme při výuce na VUT v Brně. Z tohoto důvodu jsou zde zmíněny pouze dva příklady uvedené na předchozí stránce.

Z **Univerzity ve Stanfordu v USA** byly získány příklady zaměřené na výpočet jednoduchých rovnic řešené pomocí numerických metod a analýzou MKP.

- Zadání jedné z úloh používané ve Stanfordu.
V zadání budeme řešit dvourozměrný problém s vedením tepla na čtvercové oblasti Ω . V úloze budeme řešit jak vedení tepla uvnitř oblasti Ω , tak i vnější vedení tepla. Vnější hranice mají Neumannovy okrajové podmínky a vnitřní hranice oblouků mají Dirichletovy okrajové podmínky.

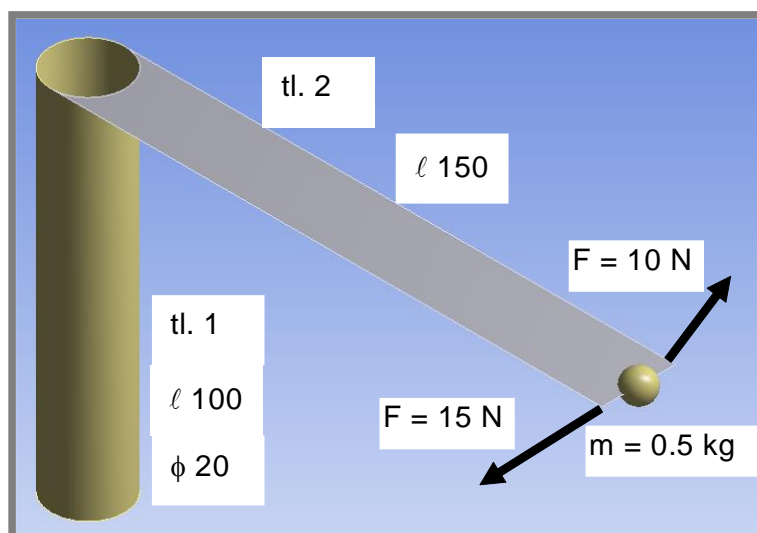


Obr. 4.3: Blok motoru

Geometrie a okrajové podmínky představují model motorového bloku (Obr. 4.3), kde oblast Γ_{g1} se dotýká zahřátého motorového pístu. Oblasti Γ_{g2} představují otvory pro proudění chladicí kapaliny. Úkolem je naprogramovat výpočet tohoto problému v programu Matlab.

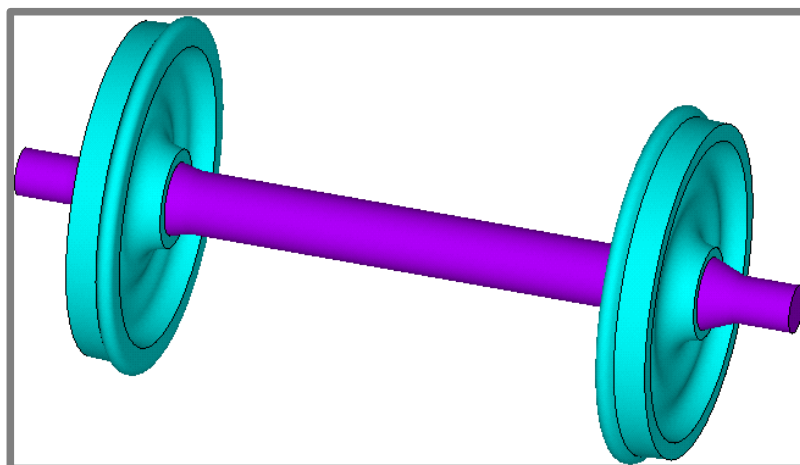
Od **technické univerzity v Ostravě** se podařilo získat příklady s využitím MKP v dynamice a kinematice.

- Jedna z úloh se zabývá zjištěním deformací způsobené odstředivou silou (viz Obr. 4.4).



Obr. 4.4: Kmitání

- Další z úloh se zabývá zjištěním vlastní frekvence kolejové nápravy (viz Obr. 4.5).



Obr. 4.5: Kolejová náprava

Je nutné zdůraznit, že byl kontaktován výrazně větší počet univerzit – např. ČVUT, MIT, Berkeley, Harvard, univerzita v Budapešti, skotská Paisley College of Technology, technická univerzita v Darmstadtu či univerzita Széchenyi Istvána v Győru. Bohužel se však do finálního odevzdání této práce nepodařilo získat větší počet odpovědí, ať už to bylo kvůli zdlouhavé komunikaci či kvůli neochotě univerzit dělit se o výukové podklady.

4.2

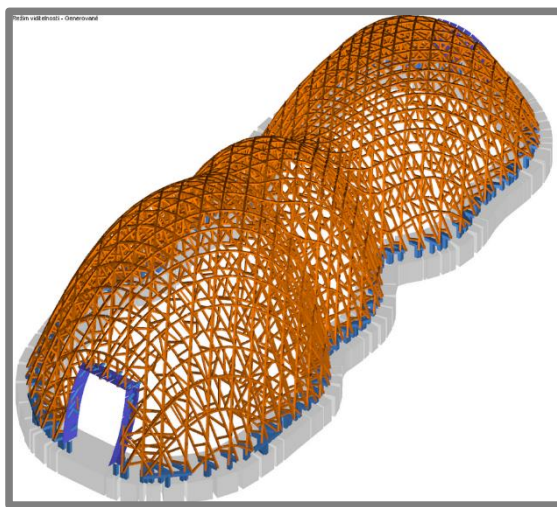
4.2 Navrhované typy úloh

Úlohy, které se podařilo ze všech univerzit získat, se kvůli své jednoduchosti nedaly použít pro zpracování této bakalářské práce. Byla tedy snaha hledat inspiraci v konstrukcích různých staveb, které splňují předpoklady prutových soustav.

4.2.1

4.2.1 Úloha první

- **Název projektu:**
Dřevěná konstrukce pavilónu ze špejlí a její analýza pomocí MKP
- **Úvod do problému:**
U halových konstrukcí se s ohledem na bezpečnost uplatňují vysoké požadavky na únosnost a odolnost vůči různým mezním provozním situacím. Případná porucha konstrukce střechy může v krajním případě vyústit až k jejímu zborcení. Může tak dojít k velmi závažným následkům jak materiálových, tak na ztrátě lidských životů. Při posouzení odolnosti konstrukce vůči mezním stavům se v současné době obvykle využívají numerické simulace ve spojení s experimentální verifikací navržené konstrukce. Pro možnost experimentální verifikace je třeba zhotovit fyzický model.



Obr. 4.6: Dřevěná konstrukce pavilónu [12]

- **Formulace problému řešeného v projektu:**
Halové konstrukce slouží k zakrytí plochy pro ochranu před klimatickými podmínkami. Konstrukce haly musí vydržet zatížení vlastní váhy a váhy střešního materiálu, případně také zatížení klimatických podmínek jako jsou silný vítr či sněhové přeháňky. Model haly je vytvořen z dřevěných špejlí o stejném průřezu a materiálu, přičemž je možné upravit jejich délku s ohledem na navržené rozměry konstrukce. Pro spojení jednotlivých špejlí je možné využít libovolný materiál (například nit, plastickou hmotu, plast z tavné pistole a podobně), který modeluje uvažovanou vazbu mezi jednotlivými pruty.

- **Cíle projektu:**
Cílem projektu je navrhnout a vyrobit halovou konstrukci ze špejlí s co nejvyšším poměrem únosnosti a tíhy konstrukce. Na základě numerické simulace pomocí MKP bude provedena optimalizace úlohy. Zvolená finální varianta bude poté vyrobena, přičemž je nutné experimentálně verifikovat výsledky MKP analýzy a ověřit vlastní funkčnost konstrukce.
- **Výstupy projektu a kritéria hodnocení které jsou společné pro všechny projekty:**
MKP model – kritériem hodnocení je postup tvorby a korektnost výpočtového modelu
Fyzický model – kritériem hodnocení je velikost poměru únosnosti a hmotnosti konstrukce

Výstupy:

- List zodpovědnosti, Ganttův diagram, Mapa projektu
- Technická zpráva
- Závěrečná prezentace

Kritériem hodnocení pro společné projekty je splnění všech pokynů pro jejich zpracování, úplnost a věcná správnost.

Výstup:**Kritéria hodnocení:**

Fyzický model konstrukce	U fyzického modelu bude posouzena celková funkčnost, únosnost v poměru k vlastní tíze, provozuschopnost a dodržení definovaných omezení.
Elektronická data z numerického řešení na CD nebo DVD	Správnost a věrohodnost výsledků numerického řešení, úroveň výpočtového modelu reálné situace z hlediska řešení problému.
Projektová dokumentace shrnující postup řešení, technickou dokumentaci, experimentální výsledky a závěry	Posouzena bude účelnost a správnost řešení; úroveň a validita experimentálních výsledků a jejich porovnání s numerickým řešením MKP a schopnost vyvodit patřičné závěry. Nezbytné je splnění požadavků kladených na strukturu závěrečné zprávy.
Prezentace projektu	Posouzena bude schopnost interpretovat a prezentovat výsledky řešení projektu.

- **Základní parametry výstupu:**
 - Výsledná varianta musí být vyrobena a musí být experimentálně verifikována její funkčnost.
 - Fyzický model musí umožňovat realizaci experimentu. Při statické zátěžové zkoušce bude závaží postupně zavěšováno na středy kopulí.

- Uložení haly bude respektovat reálné uložení halových staveb. Pruty budou pevně uchyceny k základnímu tělesu, tak aby bylo zamezeno všem posuvům a natočení.

4.2.2

4.2.2 Úloha druhá

- **Název projektu**

Těžní věž ze špejlí a její analýza pomocí MKP

- **Úvod do problému:**

U konstrukcí těžních věží se s ohledem na bezpečnost uplatňují vysoké požadavky na únosnost a odolnost vůči různým mezním provozním situacím. Případná porucha konstrukce střechy může v krajním případě vyústit až k jejímu zborcení. Může tak dojít k velmi závažným následkům. Při posouzení odolnosti konstrukce vůči mezním stavům se v současné době obvykle využívají numerické simulace ve spojení s experimentální verifikací navržené konstrukce. Pro možnost experimentální verifikace je třeba zhotovit fyzický model.



Obr. 4.7: Těžební věž Hlubina [13]

Jedná se o ocelovou příhradovou konstrukci postavenou nad osou těžní jámy a nad strojovnou, kde se pomocí motoru a bubnu navíjí nebo spouští ocelové lano. Pokud je strojovna umístěna mimo osu těžební jámy, těžní věž slouží též pro vedení ocelových těžních lan přes kladkový mechanismus na vrcholu věže.

V důsledku toho je nutné těžní věž podepřít šikmými nosníky pro zachytávání boční složky síly taženého lana. [9]

- **Formulace problému řešeného v projektu:**

Těžní věže (viz Obr. 4.7) jsou součástí hlubinných dolů, které slouží pro přepravu horníků a těžené horniny do dolu a na povrch.

Konstrukce těžních věží musí vydržet zatížení vlastní váhy a váhy dopravovaného materiálu. Model těžních věží je vytvořen z dřevěných špejlí o stejném průřezu a materiálu, přičemž je možné upravit jejich délku s ohledem na navržené rozměry konstrukce. Pro spojení jednotlivých špejlí je možné využít libovolný materiál (například nit, plastickou hmotu, plast z tavné pistole a podobně), který modeluje uvažovanou vazbu mezi jednotlivými pruty. Je taktéž nutné, aby v modelu bylo zaneseno zatížení boční složkou síly tažené lana.

- **Cíle projektu:**

Cílem projektu je navrhnout a vyrobit konstrukci těžební věže ze špejlí s co nejvyšším poměrem únosnosti a tíhy konstrukce. Na základě numerické simulace pomocí MKP bude provedena optimalizace úlohy. Zvolená finální varianta bude poté vyrobena, přičemž je nutné experimentálně verifikovat výsledky MKP analýzy a ověřit vlastní funkčnost konstrukce.

- **Základní parametry výstupu:**

- Výsledná varianta musí být vyrobena a musí být experimentálně verifikována její funkčnost.
- Fyzický model musí umožňovat realizaci experimentu. Při statické zátěžové zkoušce bude závaží postupně přidáváno na desku, která bude uložena na vrcholu věže na místo navíjecího bubnu. Přitom platí, že střed desky (místo závěsu) leží v ose těžební jámy.
- Uložení těžní věže bude respektovat reálné uložení těžních věží. Stojny budou pevně uchyceny k základnímu tělesu, tak aby bylo zamezeno všem posuvům a natočení.

4.2.3 Úloha třetí

- **Název projektu**

Návrh střechy autobusového nádraží a parkoviště ze špejlí a její analýza pomocí MKP

- **Úvod do problému**

U střech autobusových nádraží se s ohledem na bezpečnost lidí, kteří se pohybují pod střechou nástupiště, uplatňují vysoké požadavky na únosnost a odolnost vůči různým mezním provozním situacím. Případná porucha konstrukce střechy může v krajním případě vyústit až k jejímu zborcení. Může tak dojít k velmi závažným následkům. Při posouzení odolnosti konstrukce vůči mezním stavům se v současné době obvykle využívají numerické simulace ve spojení s experimentální verifikací navržené konstrukce. Pro možnost experimentální verifikace je třeba zhotovit fyzický model.

Příklad střechy autobusového nádraží viz Obr. 4.8, Obr. 4.9.



Obr. 4.8: ÚAN Brno Zvonařka – pohled na parkoviště [9]



Obr. 4.9: ÚAN Brno Zvonařka – pohled na konstrukci [9]

Stavební konstrukce autobusového nádraží Brno, tzv. Zvonařka (viz Obr. 4.8, Obr. 4.9) zastřešuje nástupiště před klimatickými podmínkami, ale střecha navíc slouží jako parkoviště autobusů. Prutová konstrukce střechy musí tedy vydržet nejen velké zatížení betonové vrstvy, ale i váhu mnoha autobusů.

- ***Formulace problému***

Projekt je zaměřen na návrh střechy autobusového nádraží prutové konstrukce, která bude sloužit i jako parkoviště pro autobusy tak, aby poměr tíhy, kterou může být střecha staticky zatížena a tíhy střechy byl maximální. Model střechy je vytvořen z dřevěných špejlí o stejném průřezu a materiálu, přičemž je možné upravit jejich délku s ohledem na navržené rozměry konstrukce. Pro spojení jednotlivých špejlí je možné využít libovolný materiál (například nit, plastickou hmotu, plast z tavné pistole a podobně), který modeluje uvažovanou vazbu mezi jednotlivými pruty. Je nutné, aby do modelu byla správně zanesena i neprutová část konstrukce – odstavná plocha pro autobusy.

- ***Cíle projektu:***

Cílem projektu je navrhnout a vyrobit konstrukci střechy autobusového nádraží ze špejlí s co nejvyšším poměrem únosnosti a tíhy konstrukce. Na základě numerické simulace pomocí MKP bude provedena optimalizace úlohy. Zvolená finální varianta bude poté vyrobena, přičemž je nutné experimentálně verifikovat výsledky MKP analýzy a ověřit vlastní funkčnost konstrukce.

4.3

4.3 Projekt bakalářské práce

Po konzultaci s vedoucím bakalářské práce byl zvolen projekt střechy autobusového nádraží, na který se vypracování této bakalářské práce zaměří.

4.3.1

4.3.1 Mechanické vlastnosti použitých materiálů

Při konstrukci fyzického modelu budou jako materiál použity dřevěné špejle, které jsou vyráběny z lipového dřeva a také třísková deska. Pro výpočet budou použity mechanické vlastnosti při vlhkosti $w = 12\%$, viz Tab. 1.

Tab. 1: Mechanické vlastnosti lipového dřeva [10]

Vlastnost	Rovnoběžné s vlákny	
	$w = 12\%$	$w > 30\%$
Pevnost v tahu [MPa]	85	23
Pevnost v tlaku [MPa]	52	26
Pevnost ve smyku [MPa]	4,2	4,0
Pevnost v ohybu [MPa]	106	46
Modul pružnosti v ohybu [MPa]	7400	5800

Tab. 2 Mechanické vlastnosti třískové desky tloušťky $t = 7\text{ mm}$ [11]

Vlastnosti	Hodnoty
Pevnost v ohybu [MPa]	13 MPa
Modul pružnosti v ohybu [MPa]	1800 MPa

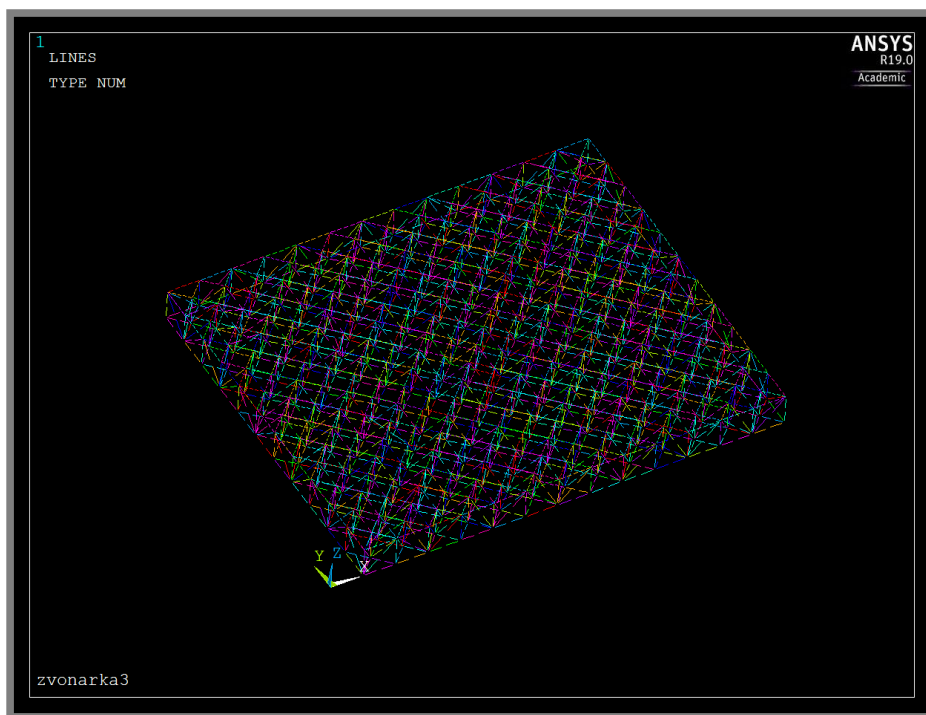
Použité vlastnosti materiálů pro analýzu MKP viz Tab. 3.

Tab. 3: Použité vlastnosti materiálů

Vlastnosti	Hodnoty	
	Lipové dřevo $w = 12\%$	Třísková deska
Poissonovo číslo μ	0,3	0,3
Modul pružnosti v tahu E	7400 MPa	1800 MPa
Typ elementu	BEAM 189	SHELL 181
Rozměry	$\varnothing d = 3\text{ mm}$	$h = 7\text{ mm}$

4.3.2 Výpočtový model v programu ANSYS

V programu ANSYS byl vytvořen výpočtový model střechy autobusového nádraží, který zároveň koresponduje s fyzickým modelem ze špejlí. Za použití prvků BEAM189 byla vytvořena prutová část střechy (viz. Obr. 4.10).



Obr. 4.10: Model prutové části konstrukce střechy

Její základní rozměry viz tab. 3

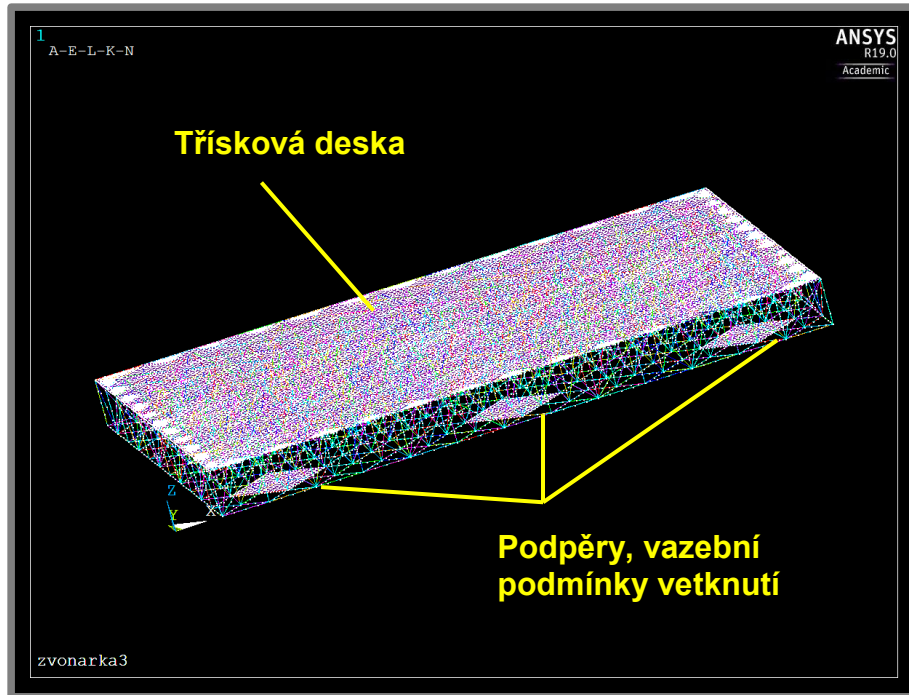
Tab. 4: Rozměry modelu prutové konstrukce

	Hodnoty
Výška	600 mm
Šířka	700 mm
Hloubka	50 mm

Zastřešení nástupiště sloužící i jako parkoviště pro autobusy bylo ve fyzickém modelu vytvořeno pomocí třískové desky o tloušťce $t = 7\text{mm}$. Tato deska byla do výpočtového modelu implementována s využitím skořepinových prvků SHELL181.

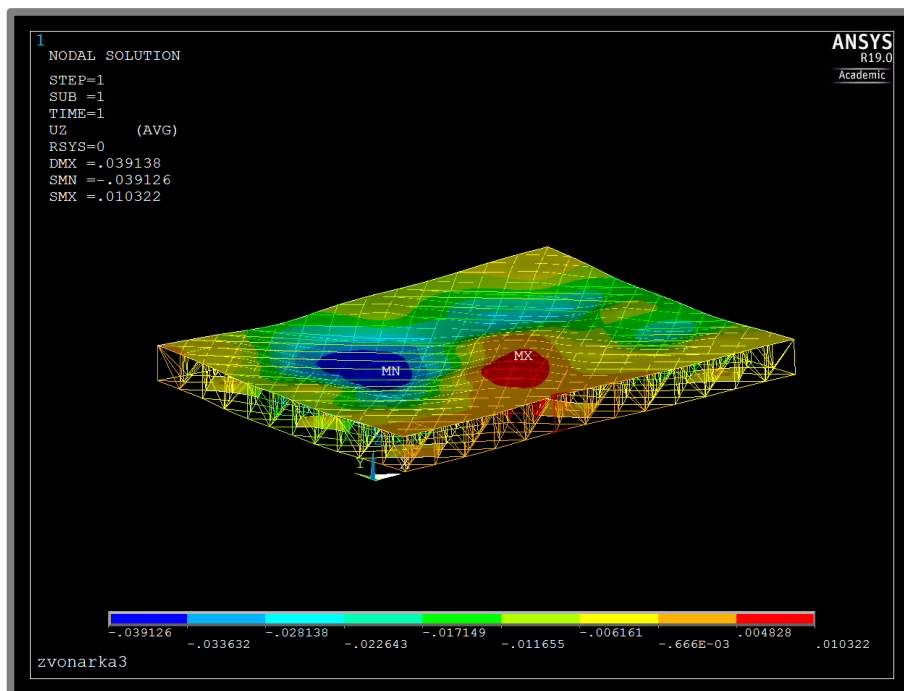
Při realizaci vazebných podmínek byly použity čtvercové plochy o hraně $a = 80\text{mm}$, ke kterým budou připevněny podpěry. Pro tyto plochy bylo opět využito prvků SHELL181.

Tlakové zatížení je realizováno na ploše o velikosti $380 \times 580\text{ mm}$ (viz Obr. 4.15) a jeho velikost odpovídá síle, kterou budeme pomocí dvou plastových nádrží model zatěžovat při experimentu.



Obr. 4.11: Model střechy v programu ANSYS

Z výsledku analýzy (Obr. 4.12) vyplývá, že nejnebezpečnější místa jsou v okolí vazebních podmínek ve střední části konstrukce. V těchto místech totiž dochází k největší deformaci prutů, a tudíž je zde největší nebezpečí poškození konstrukce.

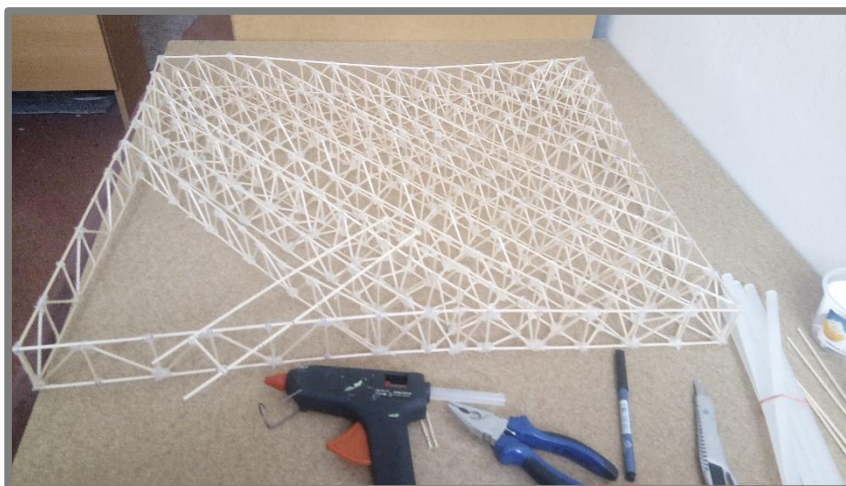


Obr. 4.12: Průhyb střechy ve směru osy z při zatížení modelu vahou 47 kg

Ve výpočtu bylo pro zjednodušení zanedbáno zatížení vlastní hmotností modelu, které v porovnání s aplikovaným zatížením dosahuje malých hodnot.

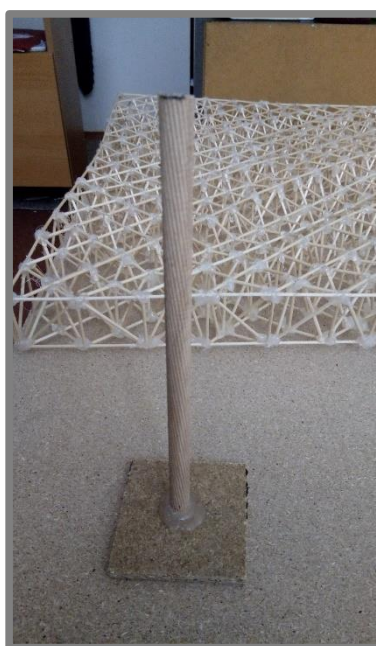
4.3.3 Fyzický model

Při stavbě fyzického modelu prutové soustavy střechy autobusového nádraží bylo použito špejlí z lipového dřeva. Jako pojivo ve styčnicích bylo upotřebeno lepidlo z tavné pistole. Pro nahrazení plochy parkoviště bylo využito dřevotřískové desky. V první fázi byl postaven rám konstrukce. Následovně byl postupně slepován výplet celé konstrukce pod úhlem 45° k jedné straně rámu, viz Obr. 4.13. Vzdálenost mezi jednotlivými řadami byla přibližně $3,5\text{mm}$.



Obr. 4.13: Lepení modelu

Po zkompletování modelu prutové konstrukce následovalo připevnění podpěr, které se skládaly z dřevěných tyčí průměru $\varnothing d = 12\text{ mm}$ a čtvercových destiček z třískové desky o rozměru $80 \times 80\text{ mm}$ (Obr. 4.14).



Obr. 4.14: Podpěry

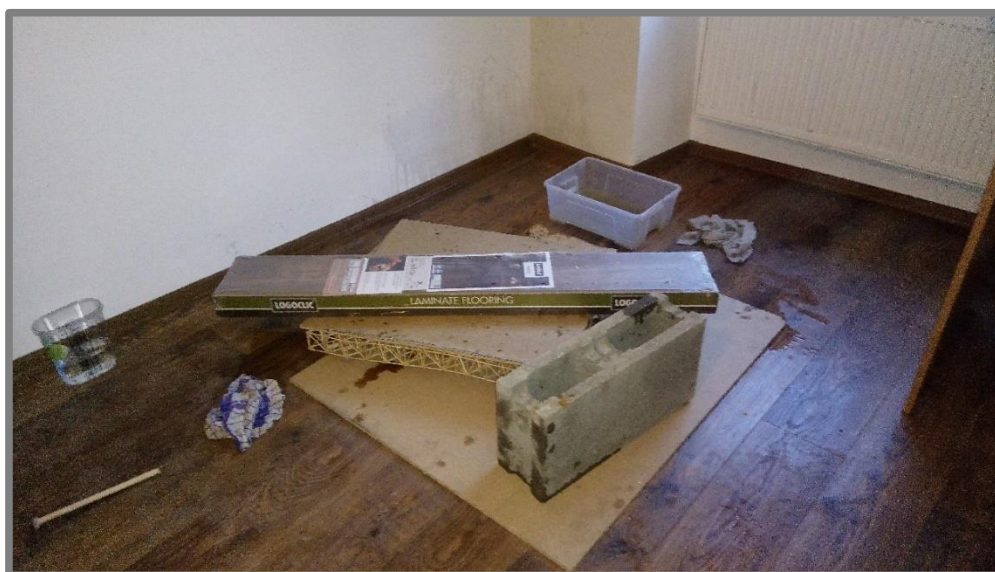
V poslední fázi realizace fyzického modelu střechy autobusového nádraží byla navrch na prutovou konstrukci připevněna třísková deska o velikosti rámu. Celková hmotnost fyzického modelu byla $m = 3,6 \text{ kg}$.

Z výsledků analýzy provedené v programu ANSYS vyplývá, že konstrukce by měla vydržet relativně velké statické zatížení. Bylo tedy možné při statickém zatěžování fyzického modelu použít kromě plastových boxů, do kterých se přilévala voda, i betonovou tvárnici o hmotnosti $m = 25 \text{ kg}$, kterou byly oba boxy rovnoměrně překryty. Objem jednoho boxu je $V = 10 \text{ dm}^3$ (viz Obr 4.15). Jak tvárnice, tak boxy byly umístěny doprostřed střechy.



Obr. 4.15: Zatěžování fyzického modelu

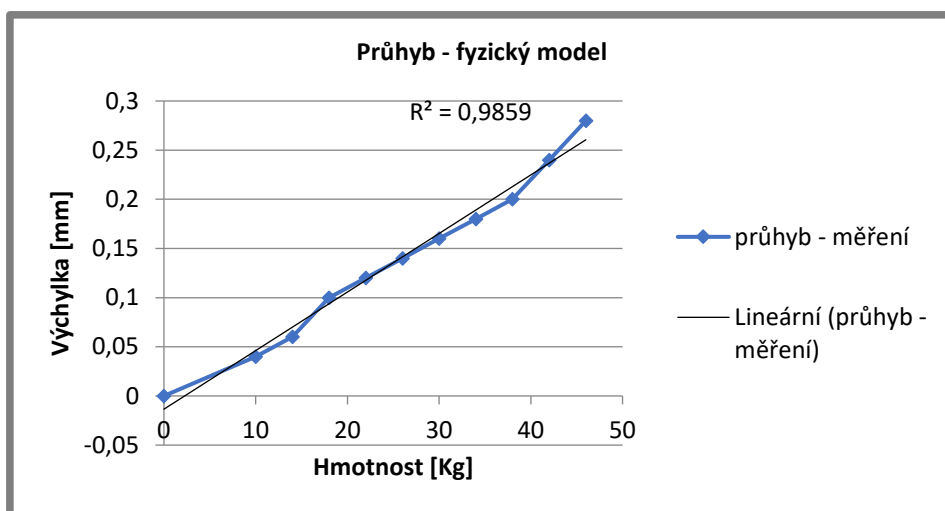
Při dovršení váhy $m = 47 \text{ kg}$ došlo ke zborcení konstrukce (Obr. 4.16).



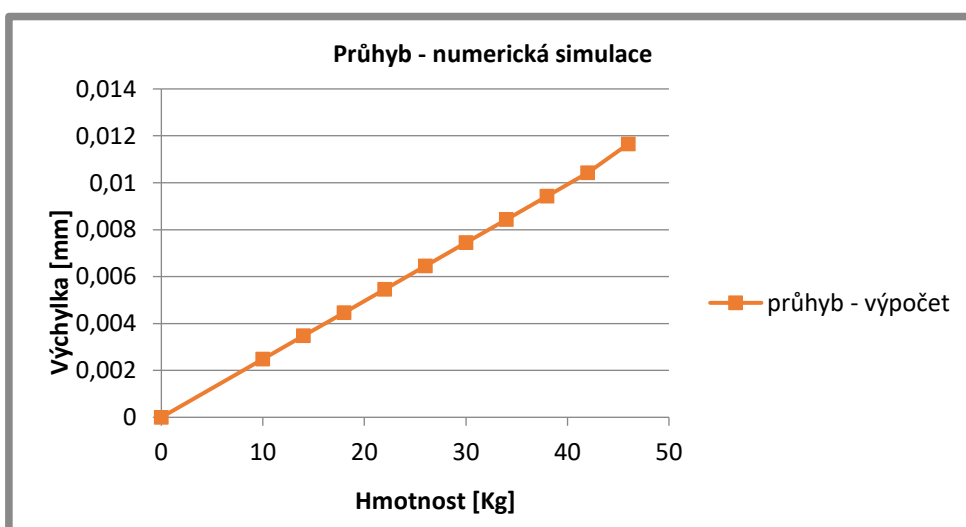
Obr. 4.16: Zborcení modelu.

K tomuto zborcení došlo kvůli narušení vazeb v místě spojení podpěr s čtvercovými destičkami. Vzhledem k následnému stavu fyzického modelu, který byl příliš poškozen, pak již však nebylo možno realizovat opakování pokusu se zatěžováním.

Během realizace pokusu s fyzickým modelem byl za pomoci posuvného měřítka určován průhyb ve střední části kratší hrany modelu střechy. Srovnáme-li průhyb určovaný během zatěžování modelu (Graf 4.1) a průhyb stanovený numerickou simulací (Graf 4.2), lze si povšimnout, že trend je obdobný. Dle numerického výpočtu by závislost měla být lineární. Křivku naměřených hodnot také lze s relativně vysokou hodnotou spolehlivosti proložit lineární spojnicí trendu. Hodnoty z numerické simulace se však značně liší od naměřených hodnot. To je způsobeno zřejmě především nepřesností lineárního izotropického modelu materiálu ve výpočtu, nepřesností měření, značnou nepřesností rozměrů špejlí a tím, že stykové vazby tvořené roztaveným plastem na fyzickém modelu nejsou dostatečně tuhé.



Graf 4.1 Průhyb fyzického modelu



Graf 4.2 Průhyb numerické simulace

5 ZÁVĚR

Cílem této bakalářské práce bylo zmapovat úlohy řešené v rámci výuky metody konečných prvků (MKP) na tuzemských i zahraničních univerzitách.

Rešeršní část práce obsahuje krátký teoretický úvod do MKP a programu ANSYS a poté se soustředí na řešení prutových soustav, viz kap. 3.

V rámci hlavní části práce byl v první fázi proveden průzkum náplně studia na různých univerzitách a následně byly vybrány univerzity, především technického zaměření, osloveny. Taktéž byly prohledávány jejich veřejně dostupné materiály, avšak toto pátrání nepřineslo žádné očekávané výsledky. Celkově byl nakonec kontaktován dvojciferný počet univerzit napříč celým světem a téměř všemi kontinenty. Podařilo se získat podklady z jedné tuzemské, z jedné německé a z jedné americké univerzity, viz kap. 4.1. Mnoho univerzit zůstalo s odpovědí dlužno – lze se domnívat, že za tím stojí nejspíše neochota poskytovat ostatním školám svoje vlastní materiály.

Vzhledem k počtu získaných úloh z jiných škol a vzhledem k malé složitosti těchto příkladů bylo přistoupeno k vytvoření vlastních nezávislých návrhů typů úloh, viz kap. 4.2. V těchto návrzích bylo využito zajímavých prutových konstrukcí, které lze různě v Česku i ve světě spatřit. Po dohodě s vedoucím práce bylo nakonec vytvořeno zadání úlohy pracující s dřevěným modelem prutové konstrukce střechy známého brněnského autobusového nádraží, tzv. Zvonařky (kap. 4.2.3). Pro danou konstrukci byl vytvořen výpočtový model v programu ANSYS Classic s využitím prvků BEAM189 a SHELL181, viz kap. 4.3.2. Výpočet ukázal, že v místech vazebních podmínek ve střední části konstrukce dochází k největší deformaci prutů a tudíž je zde největší nebezpečí porušení konstrukce (Obr. 4.12).

Následně byl realizován i fyzický model střechy autobusového nádraží pomocí špejlí z lipového dřeva, dřevotřískové desky a tavné pistole, který pak byl následně zatěžován pomocí betonové tvárnice a plastových boxů s vodou, viz kap. 4.3.3. Při zatížení hmotností 47 kg došlo ke zborcení modelu (Obr. 4.16). Vlastní váha fyzického mostu byla $m = 3,6 \text{ kg}$, výsledný poměr únosnosti a vlastní váhy činí tedy 13,06. K destrukci konstrukce došlo v místech uchycení podpěr celé prutové soustavy, což koresponduje s výsledky, které naznačoval i výpočet pomocí MKP.

Průhyb konstrukce při zatěžování byl měřen pomocí posuvného měřítka (viz protokol v příloze). Jeho hodnoty byly o něco větší než v MKP výpočtu. Tato odchylka je nejspíše způsobena především nepřesnostmi při výrobě fyzického modelu (rozdílné délky špejlí apod.) a tím, že spojení špejlí tavnou pistolí není (na rozdíl od simulace v ANSYSu) ve skutečnosti zcela tuhé. Další nepřesnosti může způsobovat použití veřejně dostupných materiálových konstant a anizotropní chování dřeva vzhledem k vedení vláken.

Přínos této práce tkví tedy především v rešerši úloh řešených v rámci výuky metody konečných prvků na různých univerzitách, a ve vypracování požadovaného zadání nové úlohy, která byla řešena jak numerickým výpočtem, tak i provedením pokusu na fyzickém modelu. Úplné zadání projektu je vyhotoveno v příloze 1.

6 SEZNAM POŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] GOŠOVÁ, Věra, ed. Projektová výuka. In: *Metodický portál* [online]. Praha: Věra Gošová, 2012 [cit. 2018-03-02]. Dostupné z: http://wiki.rvp.cz/Knihovna/1.Pedagogicky_lexikon/P/Projektová_výuka
- [2] PILLWEIN, Veronika. An Introduction to Finite Element Methods. *ISSAC '15 Proceedings of the 2015 ACM on International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*. 1. New York: ACM, 2015, **2015**(1), s. 19-20. DOI: 10,1145 / 2.755.996,2756685. ISBN 978-1-4503-3435-8. Dostupné také z: <https://dl.acm.org/citation.cfm?id=2756685>
- [3] KARMAZÍNOVÁ, Marcela. *Konstrukce a dopravní stavby* [online]. Brno, b.r. [cit. 2018-03-12]. Dostupné z: <http://www.unium.cz/getMaterial.php?name=opory-modul-2&mid=3b3212c4cd7982b883508f518dc60be4>. Elektronická skripta. VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA STAVEBNÍ.
- [4] PETRUŠKA, Jindřich. *MKP v inženýrských výpočtech* [online]. Brno, b.r. [cit. 2018-03-10]. Dostupné z: <http://www.umt.fme.vutbr.cz/cs/studium/studijni-materialy.html>. Elektronická skripta.
- [5] FODOR, Ján. *Deformačně-napěťová analýza prutových soustav metodou konečných prvků* [online]. Brno: Vysoké učení technické v Brně. Fakulta strojního inženýrství, 2015 [cit. 2018-03-13]. Dostupné z: <http://hdl.handle.net/11012/40523>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně. Fakulta strojního inženýrství. Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce Tomáš Návrat.
- [6] ANSYS - *Simulation Driven Product Development*. [online]. b.r. [cit. 2018-03-13]. Dostupné z: <http://www.ansys.com/>
- [7] JANÍČEK, Přemysl. *Mechanika těles: pružnost a pevnost I*. Mechanika těles: pružnost a pevnost I. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2004. ISBN 80-214-2592-x.
- [8] FLORIÁN, Zdeněk. *Mechanika těles: statika*. Vyd. 7. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007. ISBN 978-80-214-3440-0.
- [9] Těžní věž. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001 [cit. 2018-04-19]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Těžní_věž#cite_note-1
- [10] TOMA, Pavel a Jozef SUCHOMEL. *Základné charakteristiky lesných drevín* [online]. b.r. [cit. 2018-05-08]. ISBN 978-80-8093-112-4. Dostupné z: <http://www.nlcsk.sk/files/1708.pdf>
- [11] Aglomerované materiály. *Nábytkářský informační systém* [online]. b.r. [cit. 2018-05-15]. Dostupné z: <http://www.n-i-s.cz/cz/aglomerovane-materialy/page/190/>
- [12] RSTAB pro statické výpočty prutových konstrukcí. In: *Software pro navrhování a výpočty konstrukcí* [online]. b.r. [cit. 2018-04-19]. Dostupné z: <https://www.dlupal.com/cs/produkty/rstab/zakladni-informace>
- [13] TĚŽNÍ VĚŽE NA OSTRAVSKU. In: *Rajče.net* [online]. 2009 [cit. 2018-04-19]. Dostupné z: http://industry.rajce.idnes.cz/TEZNI_VEZE_NA_OSTRAVSKU/#HLUBINA.jpg

- [14] VRBKA, Jan. *Pružnost a Pevnost I* [online]. Brno, 2011 [cit. 2018-05-08]. Dostupné z: <http://docplayer.cz/43734670-Pruznost-a-pevnost-i.html>. Učební text. Fakulta strojního inženýrství VUT v Brně.

7 SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK, SYMBOLŮ A VELIČIN

7

<i>MKP</i>		- Metoda konečných prvků
<i>NNTN</i>		- stykové vazby s neutrálním stykem
<i>u, v, w</i>	[mm]	- posuvy v souřadnicovém systému x,y,z
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	[mm]	- délkové přetvoření
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$	[rad]	- úhlové přetvoření
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	[MPa]	- normálové napětí v osách x,y,z
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$	[MPa]	- smyková napětí
<i>E</i>	[MPa]	- modul pružnosti v tahu
<i>G</i>	[MPa]	- modul pružnosti ve smyku
μ	[-]	- Poissonovo číslo
Π	[J]	- celková energie tělesa
<i>W</i>	[J]	- energie napjatosti tělesa
<i>P</i>	[J]	- potenciál vnějšího zatížení
Ω		- řešené těleso
Γ_p		- plocha řešeného tělesa
<i>K</i>		- matice tuhosti soustavy
<i>U</i>		- matice deformačních parametrů
<i>U^T</i>		- transponovaná matice deformačních parametrů
<i>F</i>		- matice celkového zatížení
γ		- střednice prutu
ψ		- plocha příčného průřezu prutu
<i>T</i>		- těžiště příčného průřezu prutu
<i>l</i>	[mm]	- délka střednice
<i>h_{max}</i>	[mm]	- největší rozměr příčného průřezu
<i>F_{krit}</i>	[N]	- kritická síla mezního stavu vzpěrné stability
α	[-]	- součinitel uložení prutu
<i>J_y</i>	[mm ⁴]	- osový kvadratický moment
σ_{RED}	[MPa]	- redukované napětí
ρ	[kg/m ³]	- hustota
$\varnothing d$	[mm]	- průměr průřezu
<i>w</i>	[%]	- vlhkost dřeva
<i>t</i>	[mm]	- tloušťka
<i>m</i>	[kg]	- hmotnost
<i>V</i>	[dm ³]	- objem

8 SEZNAM OBRÁZKŮ A GRAFŮ

Obr. 2.1: Rozdělení nosníků [3]	13
Obr. 2.2: Typy trámových mostů [3]	13
Obr. 2.3: Příhradové hlavní nosníky [3]	14
Obr. 2.4: Typy oblouků [3]	14
Obr. 2.5: Oblouky podle poměru tuhosti [3]	15
Obr. 3.1: Řešené těleso [4]	17
Obr. 3.2: Geometrické předpoklady	21
Obr. 3.3: Prutová soustava	22
Obr. 3.4: Hodnoty součinitele uložení [14]	22
Obr. 4.1: Nosníky	23
Obr. 4.2: Součást parní linky	23
Obr. 4.3: Blok motoru	24
Obr. 4.4: Kmitání	25
Obr. 4.5: Kolejová náprava	25
Obr. 4.6: Dřevěná konstrukce pavilónu [12]	26
Obr. 4.7: Těžební věž Hlubina [13]	28
Obr. 4.8: ÚAN Brno Zvonařka – pohled na parkoviště [9]	30
Obr. 4.9: ÚAN Brno Zvonařka – pohled na konstrukci [9]	30
Obr. 4.10: Model prutové části konstrukce střechy	33
Obr. 4.11: Model střechy v programu ANSYS	34
Obr. 4.12: Průhyb střechy ve směru osy z při zatížení modelu vahou 47 kg	34
Obr. 4.13: Lepení modelu	35
Obr. 4.14: Podpěry	35
Obr. 4.15: Zatěžování fyzického modelu	36
Obr. 4.16: Zborcení modelu.	36
Graf 4.1 Průhyb fyzického modelu	37
Graf 4.2 Průhyb numerické simulace	37

9 SEZNAM TABULEK**9**

Tab. 1: Mechanické vlastnosti lipového dřeva [10]	32
Tab. 2 Mechanické vlastnosti třískové desky tloušťky $t = 7mm$ [11]	32
Tab. 3: Použité vlastnosti materiálů	32
Tab. 4: Rozměry modelu prutové konstrukce	33

10. SEZNAM PŘÍLOH

Příloha 1:	Zadání projektu
Příloha 2:	ANSYS Classic log file
Příloha 3:	Laboratorní protokol

Zadání projektu

Název projektu:

Návrh střechy autobusového nádraží a parkoviště ze špejlí a její analýza pomocí MKP

Úvod do problému:

U střech autobusových nádraží se s ohledem na bezpečnost lidí, kteří se pohybují pod střechou nástupiště, uplatňují vysoké požadavky na únosnost a odolnost vůči různým mezním provozním situacím. Případná porucha konstrukce střechy může v krajním případě vyústit až k jejímu zborcení. Může tak dojít k velmi závažným následkům. Při posouzení odolnosti konstrukce vůči mezním stavům se v současné době obvykle využívají numerické simulace ve spojení s experimentální verifikací navržené konstrukce. Pro možnost experimentální verifikace je třeba zhotovit fyzický model.



Obrázek 1 Příklad řešení střechy autobusového nádraží [2]



Obrázek 2 Příklad řešení střechy autobusového nádraží [2]

Formulace problému:

Projekt je zaměřen na návrh střechy autobusového nádraží prutové konstrukce, která bude sloužit i jako parkoviště pro autobusy tak, aby poměr tíhy, kterou může být střecha staticky zatížena a tíhy střechy byl maximální. Model střechy je vytvořen z dřevěných špejlí o stejném průřezu a materiálu, přičemž je možné upravit jejich délku s ohledem na navržené rozměry konstrukce. Pro spojení jednotlivých špejlí je možné využít libovolný materiál (například nit, plastickou hmotu, plast z tavné pistole a podobně), který modeluje uvažovanou vazbu mezi jednotlivými pruty.

Cíle projektu:

Cílem projektu je navrhnout a vyrobit střechu autobusového nádraží ze špejlí s co nejvyšším poměrem únosnosti a tíhy konstrukce. Na základě numerické simulace pomocí MKP bude provedena optimalizace úlohy. Zvolená finální varianta bude poté vyrobena, přičemž je nutné experimentálně verifikovat výsledky MKP analýzy a ověřit vlastní funkčnost konstrukce.

Výstupy projektu a kritéria hodnocení:

MKP model – kritériem hodnocení je postup tvorby a korektnost výpočtového modelu
Fyzický model – kritériem hodnocení je velikost poměru únosnosti a hmotnosti konstrukce

Výstupy:

- List zodpovědnosti, Ganttův diagram, Mapa projektu
- Technická zpráva
- Závěrečná prezentace

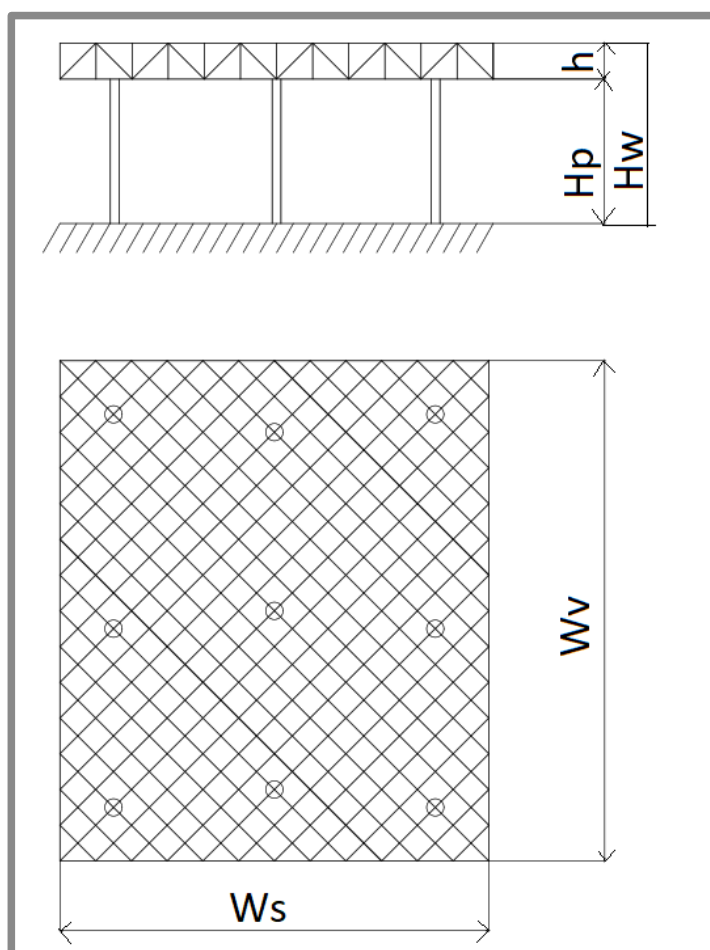
Kritériem hodnocení pro společné projekty je splnění všech pokynů pro jejich vypracování, úplnost a věcná správnost.

Výstup:**Kritéria hodnocení:**

Fyzický model konstrukce	U fyzického modelu bude posouzena celková funkčnost, únosnost v poměru k vlastní tíze, provozuschopnost a dodržení definovaných omezení.
Elektronická data z numerického řešení na CD nebo DVD	Správnost a věrohodnost výsledků numerického řešení, úroveň výpočtového modelu reálné situace z hlediska řešení problému.
Projektová dokumentace shrnující postup řešení, technickou dokumentaci, experimentální výsledky a závěry	Posouzena bude účelnost a správnost řešení; úroveň a validita experimentálních výsledků a jejich porovnání s numerickým řešením MKP a schopnost vyvodit patřičné závěry. Nezbytné je splnění požadavků kladených na strukturu závěrečné zprávy.
Prezentace projektu	Posouzena bude schopnost interpretovat a prezentovat výsledky řešení projektu.

Základní parametry výstupu:

- Výsledná varianta musí být vyrobena a musí být experimentálně verifikována její funkčnost.
- Fyzický model musí umožňovat realizaci experimentu. Při statické zátěžové zkoušce bude závaží postupně přidáváno na plochu střechy.
- Uložení střechy bude respektovat reálné uložení střešních konstrukcí. Podpěry budou pevně uchyceny k základnímu tělesu, tak aby bylo zamezeno všem posuvům a natočení.
- Plocha střechy bude realizována z jednoho kusu dřevotřískové desky
- Rozměry které musí být zachovány jsou následující (viz. Obrázek 3):
 Výška zachovaného průjezdného prostoru $H_p = 150 \text{ mm}$
- Volitelné rozměry:
 Výška sítě h
 Celková výška střechy $H_w = H_p + h$
 Šířka sítě W_s
 Hloubka sítě W_v
- Rozměry budou voleny tak, aby byly zachovány následující nerovnosti:
 $h < H_p$ $W_s < W_v$



Obrázek 3 Schématický náčrt střešní konstrukce

Hlavní etapy řešení projektu:

- Rešeršní studie řešení
- Návrh možných konstrukčních variant
- MKP analýza navržených variant, stanovení tíhy a předpokládané únosnosti
- Optimalizace a výběr finálního konstrukčního řešení
- Výroba finální zvolené konstrukce
- Realizace experimentů
- Vyhodnocení výsledků měření a porovnání s výsledky pomocí MKP

Termíny:

Termíny kontrolovaných dílčích výstupů a konzultací jsou uvedeny v časovém plánu semestru.

Technické zajištění:

Studentům je k dispozici počítačová učebna se SW, studentská dílna a výuková laboratoř Ústavu konstruování. Pro realizaci je možné nakoupit nezbytné součásti v rámci stanoveného rozpočtového stropu.

Náklady na řešení projektu:

Materiálové náklady 500,- Kč.

Doporučená literatura a zdroje:

- [1] Moaveni, S.: Finite Element Analysis: Theory and Applications with ANSYS Prentice Hall; 2nd edition, 2003
- [2] Těžní věž. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001 [cit. 2018-04-19]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Těžní_věž#cite_note-1