



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ENERGETICKÝ ÚSTAV

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
ENERGY INSTITUTE

VODNÍ RÁZ V OBLASTI NÍZKYCH TLAKŮ LOW PRESSURE WATER HAMMER

DIPLOMOVÁ PRÁCE
MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

BC. RICHARD SCHULTZ

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

ING. DANIEL HIMR PH.D.

BRNO 2012

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Energetický ústav

Akademický rok: 2011/2012

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

student(ka): Bc. Richard Schultz

který/která studuje v **magisterském navazujícím studijním programu**

obor: **Fluidní inženýrství (2301T036)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Vodní ráz v oblasti nízkých tlaků

v anglickém jazyce:

Low pressure water hammer

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Vodní ráz způsobuje problémy v potrubních systémech nejen kvůli vysokému nárůstu tlaku, ale i kvůli jeho poklesu. Tlak může být v některých okamžicích dokonce nižší než tlak nasycených par a vzniká kavitace, která může způsobovat zvýšenou erozi povrchu potrubí. Numerická simulace tohoto jevu je poměrně obtížná, protože se musí uvažovat dvoufázové médium.

Cíle diplomové práce:

Student získá teoretické i praktické znalosti o vodním rázu, způsobech jeho řešení a dějích, které probíhají v potrubí během nestacionárního proudění. V rámci diplomové práce také provede experiment na zkušebním okruhu v laboratoři OFI.

Seznam odborné literatury:

Brdička, M., Samek, L., Sopko B.:Mechanika kontinua, Akademia, Praha 2000, ISBN 80-200-0772-5

Záruba, J.:Water Hammer in Pipe-line Systems, Academia, Praha 1993, ISBN 80-200-0363-0

Koyš, J.:Modelování tlakových pulsací v pružných potrubích, Diplomová práce, VUT FSI v Brně, 2007

Panko, M.:Tlumení tlakových pulsací v pružných potrubích, Diplomová práce, VUT FSI v Brně, 2008

Vedoucí diplomové práce: Ing. Daniel Himr, Ph.D.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2011/2012.

V Brně, dne 15.11.2010

L.S.

doc. Ing. Zdeněk Skála, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.
Děkan fakulty



Abstrakt

Predmetom diplomovej práce „Vodný ráz v oblasti nízkych tlakov“ je riešiť problematiku dynamického chovania kvapaliny v oblasti nízkych tlakov.

V práci je rozpracovaná problematika vplyvu zmeny tlaku na rýchlosť zvuku v kvapaline. Problém je riešený v časovej oblasti pomocou metódy Lax - Wendroff v teoretickom rozboře.

Nakoniec je matematický model riešený pomocou metódy Lax - Wendroff konfrontovaný s experimentom.

Klíčové slová

Metóda Lax - Wendroff, rýchlosť zvuku, prietok, tlak, okrajová podmienka, počiatočná podmienka, časový krok

Abstract

The subject of the submitted thesis „Low pressure water hammer“ is handling the problems of dynamic conduct of water in low pressures.

In this work are developed problems of the effect of changing pressure on the speed of sound in liquid. The problem is solved in the time domain using the Lax - Wendroff method in the theoretical analysis.

At the end the mathematical model solved using Lax - Wendroff method is confront with the experiment.

Key words

Lax - Wendroff method, speed of sound, flow, pressure boundary condition, initial condition, time step



Bibliografická citácia

SCHULTZ, R. *Vodní ráz v oblasti nízkých tlaků*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2012. 51 s. Vedoucí diplomové práce Ing. Daniel Himr, Ph.D.



Čestné prehlásenie

Prehlasujem, že túto diplomovú prácu som vypracoval samostatne bez cudzej pomoci. Vychádzal som pritom zo svojich znalostí, odborných konzultácií a doporučenej literatúry uvedenej v zozname.

V Brne, dňa 23.5.2012

.....
podpis



Pod'akovanie

Chcel by som poďakovať všetkým ktorí sa na tejto diplomovej práci podieľali a to vedome, alebo aj nevedome.

Najväčšia vďaka patrí vedúcemu mojej diplomovej práce, pánovi Ing. Danielovi Himrovi Ph.D., ktorý mi vždy ochotne pomáhal pri riešení problémov a bol trpezlivý pri všetkých konzultáciách.

Ďalej by som sa rád poďakoval pracovníkom laboratórií za nachystanie meracej trate.



Obsah

1	Úvod	10
2	Rýchlosť zvuku	11
2.1	Rýchlosť zvuku vo vzduchu	11
2.2	Rýchlosť zvuku vo vode.....	11
2.3	Určenie rýchlosti zvuku v zmesi kvapalina + plyn	13
2.4	Vplyv potrubia na rýchlosť zvuku	15
3	Numerická metóda	16
3.1	Lax – Wendroff	16
3.2	Rovnice pre ventil	25
3.2.1	Odvedenie odporu R	25
3.2.2	Vzorec pre vplyv ventilu na začiatku potrubia	26
3.2.3	Vzorec pre vplyv ventilu na konci potrubia	28
4	Výpočet	30
5	Experiment	31
5.1	Popis skúšobnej trate	31
5.2	Postup experimentu.....	33
5.3	Grafické vyhodnotenia experimentu a matematického modelu.....	35
5.4	Vplyv nelineárnosti.....	42
6	Fotodokumentácia	44
7	Záver	47
8	Zoznam použitých zdrojov	48
9	Zoznam použitých symbolov a označení	49
10	Príloha	51



1 Úvod

Témou diplomovej práce je riešenie problematiky dynamického chovania dvojfázovej kvapaliny pri uvažovaní vplyvu zmeny rýchlosti zvuku v závislosti na tlaku v kvapaline. V jednej časti sa rieši numerický výpočet, t.j. matematický model tlakových pulzácií v závislosti na zmene rýchlosti zvuku v kvapaline. Z experimentov totiž vychádza že modely používané v literatúrach nezodpovedajú skutočnosti. Touto prácou sa pokúsim čo najviac priblížiť realite. V druhej časti bude experiment na trati, ktorý sa následne porovná pomocou nameraných hodnôt s numerickým riešením.

Diplomová práca z časti vychádza z diplomových prác Ing. Jána Koyša, ktorý ju vypracoval pre konštantnú rýchlosť zvuku pri zmene tlaku a Ing. Martina Panka, ktorý porovnával rôzne metódy riešenia a uvažoval rýchlosť zvuku v kvapaline ako funkciu tlaku.

V tejto diplomovej práci je použitá metóda riešenia Lax - Wendroff, ktorá bude nakoniec konfrontovaná s experimentom.



2 Rýchlosť zvuku

Rýchlosť zvuku je rýchlosť šírenia tlakových vln v rôznom látkovom prostredí ľubovoľného skupenstva. Najdôležitejšou charakteristikou prostredia z hľadiska šírenia zvuku je veľkosť rýchlosti zvuku v danom prostredí. V kvapalinách a pevných látkach je rýchlosť zvuku vyššia ako vo vzduchu. Jej veľkosť v danom materiáli závisí na jeho hustote a pružnosti. Pružnosť je pritom ovplyvnená veľkosťou väzbových síl medzi jednotlivými molekulami materiálu. Vo všetkých prostrediach sa zvuk šíri ako postupné pozdĺžne vlnenie, aj keď v pevných látkach môže vznikáť vlnenie priečne, to však má inú rýchlosť.

Šírenie zvuku je ovplyvnené aj prekážkami na ktoré zvukové vlnenie dopadá. Prejavuje sa odraz a ohyb zvukového vlnenia. Zvláštnym prípadom odrazu zvuku od rozľahlej prekážky je ozvena. [6]

2.1 Rýchlosť zvuku vo vzduchu

Vo vzduchu sa zvuk šíri ako pozdĺžne postupné vlnenie, t.j. dochádza k stlačovaniu a rozpínaniu vzduchu, čo sa prejaví periodickými zmenami tlaku vzduchu.

Veľkosť rýchlosti zvuku vo vzduchu závisí na jeho zložení (napr.: nečistoty, vlhkosť), ale najviac na teplote. Vo vzduchu s teplotou t (°C) má zvuk rýchlosť o veľkosti [6]:

$$v_z = (331,82 + 0,61 \cdot t) \quad (1)$$

V rovnici (1) číslo 331,82 znamená teoretickú hodnotu rýchlosti zvuku v m/s, pri teplote 0°C. Predpokladá sa ideálny plyn, rýchlosť zvuku v_z závisí len na teplote a nie na tlaku, alebo hustote plynu.

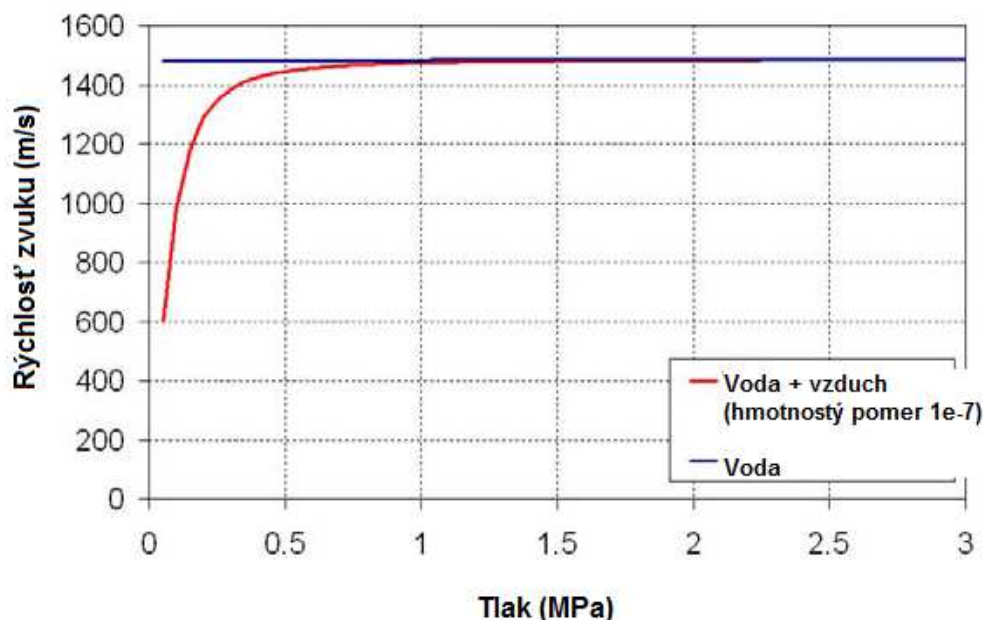
2.2 Rýchlosť zvuku vo vode

Rýchlosť zvuku vo vode je stanovená experimentálnymi meraniami na približne 1500 m/s. Avšak keď sa zoberú do úvahy premenné, ako obsah vzduchu, tlak, teplota, pevné častice vo vode (napríklad v prípade dopravovania hydrozmesí) a vlastnosti potrubia tak sa zistí, že rýchlosť zvuku je závislá na daných premenných a môže byť výrazne nižšia ako 1500 m/s.



Na rychlosti zvuku vo vode závisí rýchlosť šírenia tlakovej vlny pri vodnom ráze. Preto sa táto práca zaoberá vplyvom zmeny rýchlosti zvuku pri zmene tlaku. Túto závislosť vidno na obr. 1, kde rýchlosť zvuku v kvapaline pri znížení tlaku pod 0,5 MPa výrazne klesá.

Vodný ráz je spôsobený zmenami rýchlosti prúdenia kvapaliny. Jeho veľkosť závisí na vlastnostiach kvapaliny, potrubia a samozrejme rýchlosti zmeny prúdenia. Objem plynu v kvapaline je tiež veľmi dôležitý, pretože má vplyv na rýchlosť zvuku a mení tvar tlakových pulzácií. Pulzácie môžu byť úplne odlišné pre rôzne hodnoty statického tlaku. Môže sa objaviť aj kavitácia, ak pri vodnom ráze klesne statický tlak v kvapaline pod tlak nasýtených pár. Vodný ráz je veľmi dôležitý jav a je potrebné ho simulovať výpočtovo. [1]



Obrázok 1: Graf závislosti rýchlosti zvuku na tlaku [2]



2.3 Určenie rýchlosti zvuku v zmesi kvapalina + plyn

Podrobné matematické odvodenie závislosti rýchlosti zvuku na tlaku je uvedené v [1]. Na nasledujúcich riadkoch sú stručne popísané najdôležitejšie body.

Ideálna kvapalina je nestlačiteľná a nemôže nadobudnúť rovnovážneho stavu pri namáhaní na šmyk, tým pádom je v nej rýchlosť zvuku nekonečne veľká. Reálna kvapalina má rýchlosť zvuku menšiu, ale aj tak dosť vysokú, nad 1000 m/s a považuje sa za konštantnú.

Ak sa však v kvapaline vyskytne plyn, v akomkoľvek objemovom množstve, zmenia sa okamžite vlastnosti kvapaliny. Je to dané aj tým, že plyn je na rozdiel od kvapaliny výrazne stlačiteľnejší.

Uvažuje sa zmes, ktorá je tvorená kvapalinou a plynom. Závislosť rýchlosti zvuku na množstve vzduchu obsiahnutom v kvapaline je znázornená na obr. 2. Adiabatická rýchlosť zvuku v plynnom prostredí sa spočíta zo vzťahu:

$$v_{0p} = \sqrt{krT} \quad (2)$$

Hustota zmesi je daná vzťahom:

$$\rho_s = \frac{m_k + m_p}{V_k + V_p} \quad (3)$$

Zo stavovaj rovnice sa dosadí za objem plynu V_p a vyjadří sa tak objem kvapaliny pomocou hustoty:

$$\rho_s = \frac{m_k + m_p}{\frac{m_k}{\rho_k} + \frac{m_p r T}{p}} \quad (4)$$

V rovnici (3) vidno že m_k+m_p vyjadruje celkovú hmotnosť zmesi. Môže sa teda upraviť rovnica (4) na vzorec pre hustotu zmesi, ktorá je závislá na tlaku a hmotnostnom zlomku plynu v kvapaline:

$$\rho_s = \frac{\rho_k \cdot p}{(1 - M_p) \cdot p + M_p \cdot r \cdot T \cdot \rho_k} \quad (5)$$



Podobným způsobem možno postupovať aj u modulu pružnosti zmesi. Jedná sa o súčet prevrátenej hodnôt modulu elasticity plynu a kvapaliny:

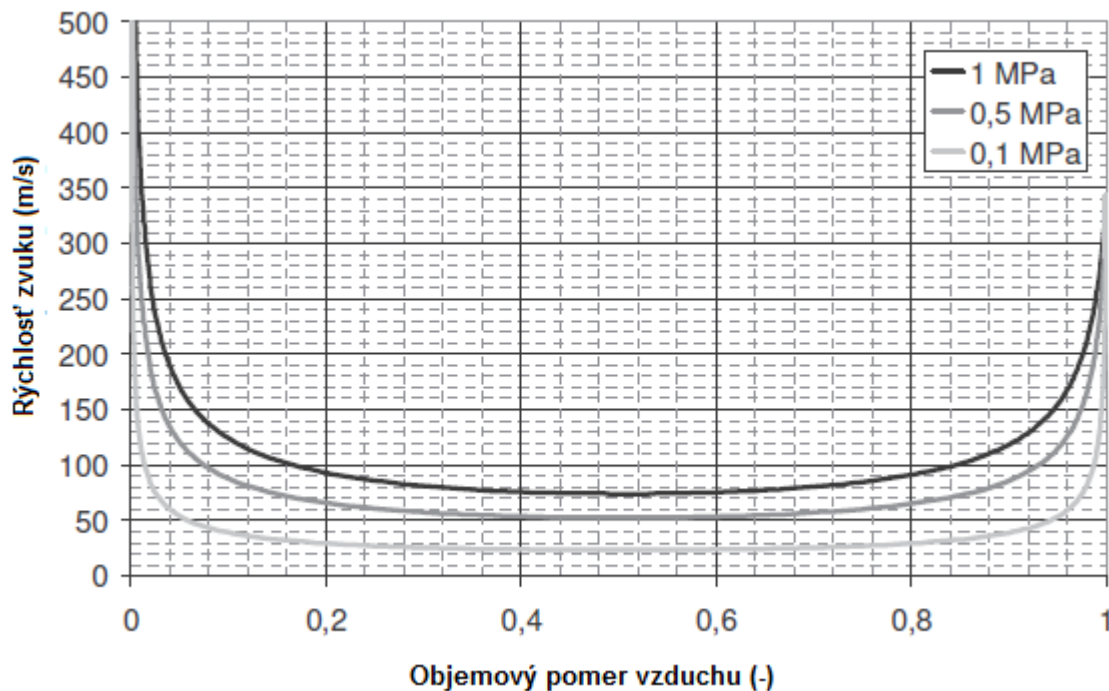
$$\frac{1}{K_s} = \frac{O_k}{K_k} + \frac{O_p}{K_p} \quad (6)$$

Predpokladá sa adiabatické chovanie, preto $K_p = \kappa \cdot p$ a $K_k = v_p^2 \cdot \rho_v$. Ak sa objemové zlomky zapíšu ako podiel objemu za ktoré sa dosadí zo stavovej rovnice v prípade plynu, a podiel hmotnosti a hustoty v prípade kvapaliny, vznikne po úprave vzťah pre modul pružnosti zmesi:

$$K_s = \frac{[(1 - M_p) \cdot p + M_p \cdot r \cdot T \cdot \rho_k] \cdot v_p^2 \cdot \kappa \cdot p \cdot \rho_k}{v_k^2 \cdot \rho_k^2 \cdot M_p \cdot r \cdot T + \kappa \cdot p^2 \cdot (1 - M_p)} \quad (7)$$

Jedná sa o funkčnú závislosť na tlaku a hmotnostnom zlomku plynu v zmesi. Výsledná rýchlosť zvuku v kvapaline v závislosti na tlaku je daná vzťahom:

$$v_s = \sqrt{\frac{K_s}{\rho_s}} \quad (8)$$



Obrázok 2: Rýchlosť zvuku v závislosti na množstve vzduchu [1]



2.4 Vplyv potrubia na rýchlosť zvuku

Potrubie, jeho materiál, hrúbka steny Δ a vnútorný priemer D majú výrazný vplyv na konečnú rýchlosť zvuku v potrubí. Vplyv materiálu potrubia zahŕňa Youngov modul pružnosti E (modul pružnosti materiálu v ťahu). Youngov modul sa zistil na [7]. Preto treba brať do úvahy aj objemový modul potrubia, ktorý je funkciou materiálu aj geometrie:

$$K_{pot} = E \cdot \frac{\Delta}{D} \quad (9)$$

Pre určenie celkového modulu pružnosti zmes – potrubie K_c sa použije nasledovný vzťah, v ktorom figuruje K_{pot} :

$$\frac{1}{K_c} = \frac{1}{K_s} + \frac{1}{K_{pot}} \quad (10)$$

Výsledná rýchlosť zvuku v kvapaline bude po zobrazení do úvahy K_c rovná:

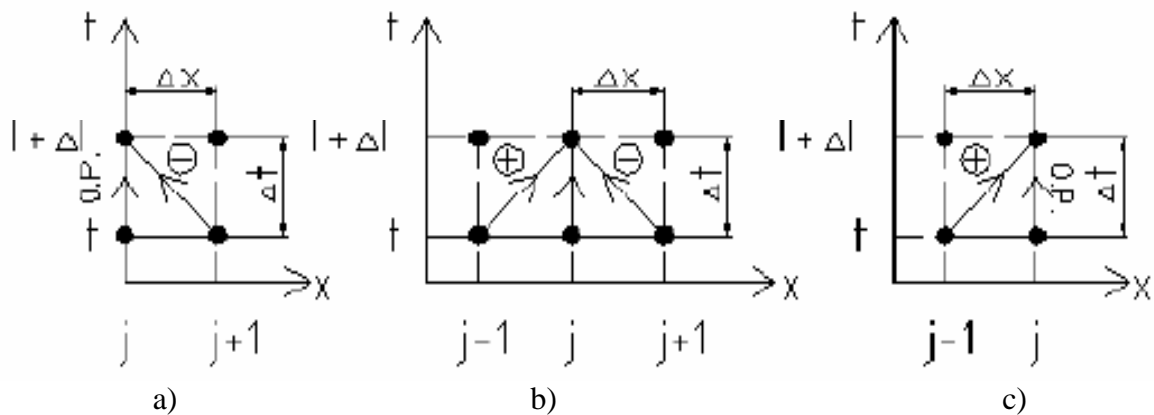
$$v_s = \sqrt{\frac{K_c}{\rho_s}} \quad (11)$$

3 Numerická metóda

3.1 Lax – Wendroff

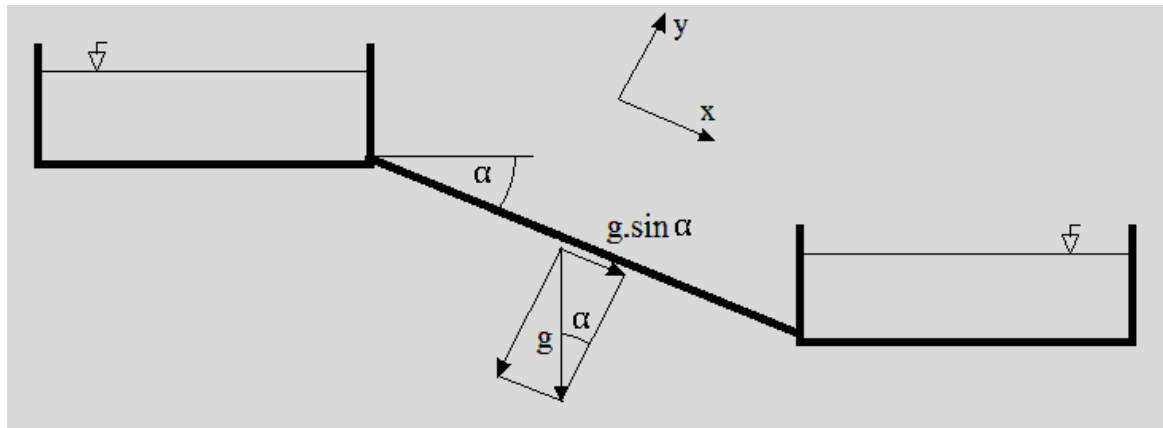
Rovnice silovej rovnováhy a kontinuity, ktoré definujú matematický model, predstavujú hyperbolický problém a nemôžu byť riešené pomocou analytickej matematiky, pretože riešenie je neznáme. Avšak numerická matematika poskytuje niektoré nástroje. Napríklad metóda charakteristík, Lax - Friedrichs metóda, Lax - Wendroff metóda, atď. Niektoré z nich sa dajú aplikovať pre hyperbolické rovnice prúdenia tekutín, iné zas nie. Podrobné rozobratie a porovnanie jednotlivých metód je v prácach [3] a [5].

Metóda Lax - Wendroff bola vybratá preto, lebo umožňuje počítanie s premenlivou rýchlosťou zvuku bez nutnosti meniť časový krok výpočtu. Táto numerická metóda vyšších rádov presností je vhodná pre riešenie pohybových rovníc. Využíva rozvoj funkcie do Taylorovej rady v čase, pri riešení uvažuje polynóm druhého stupňa a tri body z predchádzajúceho riešenia. Tlak a prietok sa zisťujú na základe skorej vypočítaných hodnôt tlaku a prietoku v bodoch predchádzajúceho časového intervalu (obr. 3) a z počiatočných a okrajových podmienok. [2] [3]



Obrázok 3: Znáznorenie metódy Lax – Wendroff [2]

- Krok riešenia počiatočného uzlu
- Krok riešenia vnútorného uzlu
- Krok riešenia koncového uzlu



Obrázok 4: Vplyv gravitácie

Základné schéma metódy vyplýva z rozvoja funkcie do Taylorovej rady druhého stupňa:

$$f_{x_j}^{t+\Delta t} = f_{x_j}^t + \Delta t \cdot \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{x_j} + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \left. \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right|_{x_j} \quad (12)$$

Pre rovnicu typu:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_s \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

Možno písať:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -v_s \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \quad (14)$$

Z toho vyjadrená derivácia:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -v_s \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial t} = -v_s \cdot \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial t} = -v_s \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(-v_s \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \right) = v_s^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (15)$$

Derivácia (15) dosadená do základného schéma (12):

$$f_{x_j}^{t+\Delta t} = f_{x_j}^t - v_s \cdot \Delta t \cdot \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{x_j} + v_s^2 \cdot \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \left. \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right|_{x_j} \quad (16)$$



Diferencia (16) rozpísaná v smere x:

$$f_{x_j}^{t+\Delta t} = f_{x_j}^t - v_s \cdot \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta x} \cdot (f_{x_{j+1}}^t - f_{x_{j-1}}^t) + v_s^2 \cdot \frac{\Delta t^2}{2 \cdot \Delta x^2} \cdot (f_{x_{j+1}}^t - 2 \cdot f_{x_j}^t + f_{x_{j-1}}^t) \quad (17)$$

Vo výpočte sa uvažujú prietokové a tlakové pulzácie. Keďže je model trati sklonený pod istým uhlom, ako vidno na obr. 4, treba vo výpočte uvažovať vplyv gravitácie. Berie sa do úvahy zrýchľujúca zložka v smere osi x, $g \cdot \sin \alpha$. Z toho dôvodu uvažujeme rovnicu silovej rovnováhy v tvare:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{S}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\lambda}{2 \cdot D \cdot S} \cdot |Q| \cdot Q = S \cdot g \cdot \sin \alpha \quad (18)$$

Tvar rovnice (18) bol odvodený od pohybovej rovnice Navier - Stokes pre trubicu s uvažovaním trenia na jej povrchu, pričom bolo predpokladané, že straty trením sú pri dynamickom aj statickom deji totožné. S ohľadom k predpokladaným Machovým číslam $M \ll 1$ sa neuvažuje nelineárny člen.[5] Uhol α vyjadruje sklon potrubia od vodorovnej hladiny. Kvôli zjednodušeniu výpočtu sa zavedie konštanta:

$$g \cdot \sin \alpha = g_z \quad (19)$$

Po dosadení do rovnice (18) vzťah (19) vyjde tvar rovnice z ktorého sa bude vychádzať :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{S}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\lambda}{2 \cdot D \cdot S} \cdot |Q| \cdot Q = S \cdot g_z \quad (20)$$

A taktiež sa musí riešiť rovnica kontinuity:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{k}{S} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (21)$$

Podrobnejšie rozobratie tematiky numerického modelovania vodného rázu je v [4].

Jednorozmerné nestacionárne prúdenie v potrubí je popísané sústavou rovníc (20) a (21). Aby sa dala sústava riešiť súčasne, treba zaviesť maticový tvar týchto rovníc:

$$w = \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & S \\ k & \rho \\ S & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2 \cdot D \cdot S} \cdot |Q| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} S \cdot g_z \\ 0 \end{pmatrix}$$



Tým pádom maticový zápis rovnice silovej rovnováhy a rovnice kontinuity vyzerá nasledovne:

$$\frac{\partial}{\partial t} w + K \cdot \frac{\partial}{\partial x} w + B \cdot w = Z \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} w = -K \cdot \frac{\partial}{\partial x} w - B \cdot w + Z \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} w = -K \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \cdot \partial t} w - B \cdot \frac{\partial}{\partial t} w + \frac{\partial Z}{\partial t} \quad (24)$$

Po úprave:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} w = -K \cdot \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} w - B \cdot \frac{\partial}{\partial t} w + \frac{\partial Z}{\partial t} \quad (25)$$

Dosadené do rovnice (25) za deriváciu matice w podľa času (23):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} w = -K \cdot \frac{\partial \left(-K \cdot \frac{\partial}{\partial x} w - B \cdot w + Z \right)}{\partial x} w - B \cdot \left(-K \cdot \frac{\partial}{\partial x} w - B \cdot w + Z \right) + \frac{\partial Z}{\partial t} \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} w = K \cdot K \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} w + K \cdot B \cdot \frac{\partial}{\partial x} w - K \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} + B \cdot K \cdot \frac{\partial}{\partial x} w + B \cdot B \cdot w + B \cdot Z + \frac{\partial Z}{\partial t} \quad (27)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2 \cdot \Delta x} \left(w_{x_{j+1}}^t - w_{x_{j-1}}^t \right) \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{\Delta x^2} \left(w_{x_{j+1}}^t - 2 \cdot w_{x_j}^t + w_{x_{j-1}}^t \right) \quad (29)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{1}{2 \cdot \Delta x} \left(Z_{x_{j+1}}^t - Z_{x_{j-1}}^t \right) \quad (30)$$



$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} (Z_{x_j}^t - Z_{x_j}^{t+\Delta t}) \quad (31)$$

Dosadené do základného schéma Lax - Wendroff (16):

$$\begin{aligned} w_{x_j}^{t+\Delta t} = w_{x_j}^t - \Delta t \cdot & \left(K \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x_j}^t + B \cdot w_{x_j}^t - Z_{x_j}^t \right) + \frac{\Delta t^2}{2} \\ & \cdot \left(K \cdot K \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x_j}^t + K \cdot B \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x_j}^t + B \cdot K \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x_j}^t - K \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} \Big|_{x_j}^t \right. \\ & \left. - B \cdot Z_{x_j}^t + \frac{\partial Z}{\partial t} \Big|_{x_j}^t + B \cdot B \cdot w_{x_j}^t \right) \end{aligned} \quad (32)$$

Rozpísaná a zjednodušená diferencia v smere x. Všetky priestorové derivácie v rovnici (32) sa nahradia centrálnymi diferenciami:

$$\begin{aligned} w_{x_j}^{t+\Delta t} = w_{x_j}^t - \Delta t \cdot & \left[K \cdot \frac{1}{2 \cdot \Delta x} (w_{x_{j+1}}^t - w_{x_{j-1}}^t) + B \cdot w_{x_j}^t - Z_{x_j}^t \right] + \frac{\Delta t^2}{2} \\ & \cdot \left[K \cdot K \cdot \frac{1}{\Delta x^2} (w_{x_{j+1}}^t - 2 \cdot w_{x_j}^t + w_{x_{j-1}}^t) + K \cdot B \right. \\ & \cdot \frac{1}{2 \cdot \Delta x} (w_{x_{j+1}}^t - w_{x_{j-1}}^t) + B \cdot K \cdot \frac{1}{2 \cdot \Delta x} (w_{x_{j+1}}^t - w_{x_{j-1}}^t) \\ & \left. - K \cdot \frac{1}{2 \cdot \Delta x} (Z_{x_{j+1}}^t - Z_{x_{j-1}}^t) - B \cdot Z_{x_j}^t + \frac{1}{\Delta t} (Z_{x_j}^t - Z_{x_j}^{t+\Delta t}) \right. \\ & \left. + B \cdot B \cdot w_{x_j}^t \right] \end{aligned} \quad (33)$$

Roznásobené matice použité vo vzťahu (33):

$$K \cdot K = \begin{pmatrix} 0 & S \\ k & \rho \\ S & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & S \\ k & \rho \\ S & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ \rho & k \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \quad (34)$$

$$K \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & S \\ k & \rho \\ S & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2 \cdot D \cdot S} \cdot |Q| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k \cdot \frac{\lambda}{2 \cdot D \cdot S^2} \cdot |Q| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (35)$$



$$B \cdot K = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2 \cdot D \cdot S} \cdot |Q| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{S}{\rho} \\ \frac{k}{S} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\lambda}{2 \cdot D} \cdot |Q| \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (36)$$

$$B \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2 \cdot D \cdot S} \cdot |Q| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2 \cdot D \cdot S} \cdot |Q| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\lambda}{2 \cdot D \cdot S} \cdot |Q|\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (37)$$

Rovnica (33) rozpísaná do matic:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{x_j}^{t+\Delta t} &= \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{x_j}^t - \Delta t \\ &\cdot \left[\frac{1}{2 \cdot \Delta x} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{S}{\rho} \\ \frac{k}{S} & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{x_{j+1}}^t - \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{x_{j-1}}^t \right) + \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2 \cdot D \cdot S} \cdot |Q| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\ &\cdot \left. \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{x_j}^t - \begin{pmatrix} S \cdot g_z \\ 0 \end{pmatrix}_{x_j}^t \right] + \frac{\Delta t^2}{2} \\ &\cdot \left[\frac{1}{\Delta x^2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{k}{\rho} & 0 \\ 0 & \frac{k}{\rho} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{x_{j+1}}^t - 2 \cdot \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{x_j}^t + \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{x_{j-1}}^t \right) + \frac{1}{2 \cdot \Delta x} \right. \\ &\cdot \left. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k \cdot \frac{\lambda}{2 \cdot D \cdot S^2} \cdot |Q| & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{x_{j+1}}^t - \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{x_{j-1}}^t \right) + \frac{1}{2 \cdot \Delta x} \right. \\ &\cdot \left. \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\lambda}{2 \cdot D} \cdot |Q| \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{x_{j+1}}^t - \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{x_{j-1}}^t \right) \right. \\ &+ \left. \begin{pmatrix} \left(\frac{\lambda}{2 \cdot D \cdot S} \cdot |Q|\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{x_j}^t - \frac{1}{2 \cdot \Delta x} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{S}{\rho} \\ \frac{k}{S} & 0 \end{pmatrix} \right. \\ &\cdot \left. \left(\begin{pmatrix} S \cdot g_z \\ 0 \end{pmatrix}_{x_{j+1}}^t - \begin{pmatrix} S \cdot g_z \\ 0 \end{pmatrix}_{x_{j-1}}^t \right) - \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2 \cdot D \cdot S} \cdot |Q| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S \cdot g_z \\ 0 \end{pmatrix}_{x_j}^t \right. \\ &\left. + \frac{1}{\Delta t} \cdot \left(\begin{pmatrix} S \cdot g_z \\ 0 \end{pmatrix}_{x_j}^t - \begin{pmatrix} S \cdot g_z \\ 0 \end{pmatrix}_{x_j}^{t-\Delta t} \right) \right] \quad (38) \end{aligned}$$



Rovnica (38) rozpísaná na zložky:

- Zložka pre prietok:

$$\begin{aligned} Q_{x_j}^{t+\Delta t} = Q_{x_j}^t - \Delta t & \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot \Delta x} \cdot \frac{S}{\rho} \cdot (p_{x_{j+1}}^t - p_{x_{j-1}}^t) + \frac{\lambda}{2 \cdot D \cdot S} \cdot |Q_{x_j}^t| \cdot Q_{x_j}^t \right. \\ & \left. - (S \cdot g_z)_{x_j}^t \right] + \frac{\Delta t^2}{2} \\ & \cdot \left[\frac{1}{\Delta x^2} \cdot \frac{k}{\rho} \cdot (Q_{x_{j+1}}^t - 2 \cdot Q_{x_j}^t + Q_{x_{j-1}}^t) + \frac{1}{2 \cdot \Delta x} \cdot 0 + \frac{1}{2 \cdot \Delta x} \right. \\ & \cdot \frac{\lambda}{2 \cdot D \cdot \rho} \cdot |Q_{x_j}^t| \cdot (p_{x_{j+1}}^t - p_{x_{j-1}}^t) + \left(\frac{\lambda}{2 \cdot D \cdot S} \right)^2 \cdot (Q_{x_j}^t)^3 \\ & \left. - \frac{\lambda}{2 \cdot D \cdot S} \cdot |Q| \cdot (S \cdot g_z)_{x_j}^t + \frac{1}{\Delta t} \left((S \cdot g_z)_{x_j}^t - (S \cdot g_z)_{x_j}^{t-\Delta t} \right) \right] \end{aligned} \quad (39)$$

- Zložka pre tlak:

$$\begin{aligned} p_{x_j}^{t+\Delta t} = p_{x_j}^t - \Delta t \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot \Delta x} \cdot \frac{k}{S} \cdot (Q_{x_{j+1}}^t - Q_{x_{j-1}}^t) + 0 - 0 \right] + \frac{\Delta t^2}{2} \\ \cdot \left[\frac{1}{\Delta x^2} \cdot \frac{k}{\rho} \cdot (p_{x_{j+1}}^t - 2 \cdot p_{x_j}^t + p_{x_{j-1}}^t) + \frac{1}{2 \cdot \Delta x} \cdot k \right. \\ \cdot \frac{\lambda}{2 \cdot D \cdot S^2} \cdot |Q_{x_j}^t| \cdot (Q_{x_{j+1}}^t - Q_{x_{j-1}}^t) + \frac{1}{2 \cdot \Delta x} \cdot 0 + 0 \\ \left. - \frac{1}{2 \cdot \Delta x} \cdot 0 - 0 + \frac{1}{\Delta t} \cdot 0 \right] \end{aligned} \quad (40)$$

Po úprave rovníc (39) a (40) možno písať:

$$\begin{aligned} Q_{x_j}^{t+\Delta t} = Q_{x_j}^t \cdot \left[1 - \frac{\Delta t \cdot \lambda}{2 \cdot D \cdot S} \cdot |Q_{x_j}^t| - \frac{\Delta t^2 \cdot k}{\rho \cdot \Delta x^2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\Delta t \cdot \lambda}{2 \cdot D \cdot S} \cdot Q_{x_j}^t \right)^2 \right] + Q_{x_{j-1}}^t \\ \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta t^2 \cdot k}{\rho \cdot \Delta x^2} + Q_{x_{j+1}}^t \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta t^2 \cdot k}{\rho \cdot \Delta x^2} + p_{x_{j+1}}^t \\ \cdot \left(\frac{\Delta t^2 \cdot \lambda}{8 \cdot \Delta x \cdot D \cdot \rho} \cdot |Q_{x_j}^t| - \frac{\Delta t \cdot S}{2 \cdot \Delta x \cdot \rho} \right) + p_{x_{j-1}}^t \\ \cdot \left(\frac{\Delta t \cdot S}{2 \cdot \Delta x \cdot \rho} - \frac{\Delta t^2 \cdot \lambda}{8 \cdot \Delta x \cdot D \cdot \rho} \cdot |Q_{x_j}^t| \right) + \Delta t \cdot S \cdot g_z \\ \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta t \cdot \lambda}{2 \cdot D \cdot S} \cdot |Q_{x_j}^t| \right) + \frac{\Delta t}{2} \cdot \left((S \cdot g_z)_{x_j}^t - (S \cdot g_z)_{x_j}^{t-\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (41)$$



$$\begin{aligned} p_{x_j}^{t+\Delta t} = & p_{x_j}^t \cdot \left(1 - \frac{\Delta t^2 \cdot k}{\rho \cdot \Delta x^2} \right) + Q_{x_{j+1}}^t \cdot \left(\frac{\Delta t^2 \cdot k \cdot \lambda}{8 \cdot \Delta x \cdot D \cdot S^2} \cdot |Q_{x_j}^t| - \frac{\Delta t \cdot k}{2 \cdot \Delta x \cdot S} \right) \\ & + Q_{x_{j-1}}^t \cdot \left(\frac{\Delta t \cdot k}{2 \cdot \Delta x \cdot S} - \frac{\Delta t^2 \cdot k \cdot \lambda}{8 \cdot \Delta x \cdot D \cdot S^2} \cdot |Q_{x_j}^t| \right) + p_{x_{j+1}}^t \\ & \cdot \frac{\Delta t^2 \cdot k}{2 \cdot \Delta x^2 \cdot \rho} + p_{x_{j-1}}^t \cdot \frac{\Delta t^2 \cdot k}{2 \cdot \Delta x^2 \cdot \rho} \end{aligned} \quad (42)$$

Rovnice (41) a (42) obsahujú objemový modul pružnosti k . Zohľadňuje sa v ňom premena rýchlosti zvuku v závislosti na tlaku, geometrické a materiálové vlastnosti potrubia. Vo výpočte sa za k dosadzuje celkový modul objemovej pružnosti K_c odvodený v predchádzajúcich kapitolách.

Pre zjednodušenie zápisu sa zavedú konštanty:

- Pre Q:

$$a = \frac{\Delta t \cdot \lambda}{2 \cdot D \cdot S}$$

$$b = \frac{\Delta t^2 \cdot k}{2 \cdot \Delta x^2 \cdot \rho}$$

$$c = \frac{\Delta t^2 \cdot \lambda}{8 \cdot \Delta x \cdot D \cdot \rho}$$

$$d = \frac{\Delta t \cdot S}{2 \cdot \Delta x \cdot \rho}$$

$$e = \Delta t \cdot S \cdot g_z$$

$$f = \frac{\Delta t}{2}$$

- Pre p:

$$g = \frac{\Delta t^2 \cdot k \cdot \lambda}{8 \cdot \Delta x \cdot D \cdot S^2}$$

$$h = \frac{\Delta t \cdot k}{2 \cdot \Delta x \cdot S}$$

$$i = \frac{\Delta t^2 \cdot k}{2 \cdot \Delta x^2 \cdot \rho}$$

Zavedie sa zápis s dosadenými konštantami. Dostali sme vzťahy pre uzlové body:

Výpočtové vzťahy pre vnútorné uzlové body:

$$\begin{aligned} Q_{x_j}^{t+\Delta t} = & Q_{x_j}^t \cdot \left[1 - a \cdot |Q_{x_j}^t| - b + \frac{1}{2} \cdot (a \cdot Q_{x_j}^t)^2 \right] + Q_{x_{j-1}}^t \cdot \frac{1}{2} \cdot b + Q_{x_{j+1}}^t \cdot \frac{1}{2} \cdot b \\ & + p_{x_{j+1}}^t \cdot (c \cdot |Q_{x_j}^t| - d) + p_{x_{j-1}}^t \cdot (d - c \cdot |Q_{x_j}^t|) + e \\ & \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot |Q_{x_j}^t| \right) + g \cdot ((S \cdot g_z)_{x_j}^t - (S \cdot g_z)_{x_j}^{t-\Delta t}) \end{aligned} \quad (43)$$



$$p_{x_j}^{t+\Delta t} = p_{x_j}^t \cdot (1 - b) + Q_{x_{j+1}}^t \cdot (g \cdot |Q_{x_j}^t| - h) + Q_{x_{j-1}}^t \cdot (h - g \cdot |Q_{x_j}^t|) + p_{x_{j+1}}^t \cdot i + p_{x_{j-1}}^t \cdot i \quad (44)$$

Treba ešte vytvoriť vzťahy pre počiatkové uzlové body. Vytvorí sa tak, že sa zanedbá rovnica silovej rovnováhy a použije sa rovnica kontinuity. V rovnici kontinuity sa nahradia priestorové a časové derivácie diferenciami ako na obr. 3:

$$\frac{p_{x_{j+1}}^t - p_{x_j}^t}{\Delta t} + \frac{4 \cdot k}{\pi \cdot D^2} \cdot \frac{(Q_{x_{j+1}}^{t+\Delta t} - Q_{x_j}^{t+\Delta t})}{\Delta x} = 0 \quad (45)$$

Uvažovaním okrajovej podmienky pre tlak dostaneme vzťah pre výpočet prietoku a uvažovaním okrajovej podmienky pre prietok dostaneme vzťah pre výpočet tlaku:

$$Q_{x_j}^{t+\Delta t} = \frac{\pi \cdot D^2 \cdot \Delta t}{4 \cdot \Delta x \cdot k} \cdot (p_{x_{j+1}}^t - p_{x_j}^t) + Q_{x_{j+1}}^{t+\Delta t} \quad (46)$$

$$p_{x_j}^{t+\Delta t} = -\frac{4 \cdot k \cdot \Delta t}{\pi \cdot D^2 \cdot \Delta x} \cdot (Q_{x_{j+1}}^{t+\Delta t} - Q_{x_j}^{t+\Delta t}) + p_{x_j}^t \quad (47)$$

Podobne ako v prípade počiatkových uzlov sa zanedbá rovnica silovej rovnováhy a uvažuje sa len rovnica kontinuity. Priestorové a časové derivácie sa nahradia diferenciami podľa obr. 3:

$$\frac{p_{x_{j+1}}^{t+\Delta t} - p_{x_{j+1}}^t}{\Delta t} + \frac{4 \cdot k}{\pi \cdot D^2} \cdot \frac{(Q_{x_{j+1}}^{t+\Delta t} - Q_{x_{j+1}}^t)}{\Delta x} = 0 \quad (48)$$

Uvažovaním okrajovej podmienky pre tlak dostaneme vzťah pre výpočet prietoku a uvažovaním okrajovej podmienky pre prietok dostaneme vzťah pre výpočet tlaku:

$$Q_{x_{j+1}}^{t+\Delta t} = Q_{x_j}^t - \frac{\pi \cdot D^2 \cdot \Delta x}{4 \cdot k \cdot \Delta t} \cdot (p_{x_{j+1}}^{t+\Delta t} - p_{x_{j+1}}^t) + Q_{x_j}^{t+\Delta t} \quad (49)$$

$$p_{x_{j+1}}^{t+\Delta t} = p_{x_j}^t - \frac{4 \cdot k \cdot \Delta t}{\pi \cdot D^2 \cdot \Delta x} \cdot (Q_{x_{j+1}}^{t+\Delta t} - Q_{x_{j+1}}^t) + p_{x_{j+1}}^t \quad (50)$$



3.2 Rovnice pre ventil

Ventil vo výpočte vystupuje ako odpor proti prúdeniu kvapaliny. Aby sme ho mohli uvažovať, je treba si odvodiť rovnicu ktorá bude predstavovať uzatváranie ventilu (zvyšovanie miestneho odporu R) v závislosti na čase. Ventily a teda aj odpory sú dva, schématicky nakreslené na obr. 5. Jeden je umiestnený na výstupe z hornej nádrže a druhý na vstupe do dolnej nádrže.

3.2.1 Odvodenie odporu R

Vychádza sa z rovnice pre počiatočnú podmienku Lax – Wendroff (47):

$$p_{x_j}^{t+\Delta t} = -\frac{4 \cdot k \cdot \Delta t}{\pi \cdot D^2 \cdot \Delta x} \cdot (Q_{x_{j+1}}^{t+\Delta t} - Q_{x_j}^{t+\Delta t}) + p_{x_j}^t \quad (51)$$

A zo vzorca pre výpočet miestnych strát, kde je definovaný odpor R :

$$p_H - p_1 = R \cdot |Q_1| \cdot Q_1 \quad (52)$$

kde

$$R = \frac{\xi \cdot 8}{\pi^2 \cdot D^4} \quad (53)$$

Keďže súčiniteľ miestnych strát ξ sa limitne blíži k nekonečnu v prípade zavretého ventilu, zavedie sa prietokový súčiniteľ K_V . K_V je v podstate inverzná hodnota ξ . Odpor R sa dá dopočítať zo vzťahov pre prietokový súčiniteľ K_V :

$$K_v = K_{vmax} \cdot z^n \quad (54)$$

a

$$K_v = Q_1 \cdot \sqrt{\frac{\rho}{p_H - p_1}} \cdot 10 \quad (55)$$

Vzťah (52) pre prietokový súčiniteľ sa upraví do tvaru rovnice pre výpočet miestnych strát:

$$p_1 = p_H - \frac{100 \cdot |Q_1| \cdot Q_1}{K_v^2} \cdot \rho \quad (56)$$



$$p_H - p_1 = \frac{100 \cdot \rho}{K_v^2} \cdot |Q_1| \cdot Q_1 \quad (57)$$

Zo vzorca (57) sa vytne odpor R , ktorý je definovaný nasledovne:

$$R = \frac{100 \cdot \rho}{K_v^2} \quad (58)$$

V nasledujúcich krokoch sa bude narábať s odporom R vyjadreným vo vzťahu (58).



Obrázok 5: Schematické znázornenie zapojených odporov

3.2.2 Vzorec pre vplyv ventilu na začiatku potrubia

Aby sa menil prietok v závislosti na uzavretí ventilu, treba odvodiť vzorec pre Q_1 . Dosiahne sa toho tak, že zo vzorca pre určenie miestnych strát sa dosadí do rovnice pre počiatočnú podmienku tlaku Lax – Wendroff. Najprv si však upravíme rovnicu Lax – Wendroff, čo sa indexov týka. Premenné, ktoré nemajú označenie $t=0=t_0$ sa vyskytujú v nasledujúcom časovom kroku a teda $t=t_0+\Delta t$.

$$p_1 = -\frac{4 \cdot k \cdot \Delta t}{\pi \cdot D^2 \cdot \Delta x} \cdot (Q_2 - Q_1) + p_1^{t=0} \quad (59)$$

Z rovnice pre určenie miestnych strát (52) sa odvodí čomu sa rovná p_1 :

$$p_1 = -R \cdot |Q_1| \cdot Q_1 + p_H \quad (60)$$

Po vložení rovnice pre určenie miestnych strát (60) do rovnice Lax - Wendroff (59) dostaneme vzťah:

$$R \cdot |Q_1| \cdot Q_1 + \frac{4 \cdot k \cdot \Delta t}{\pi \cdot D^2 \cdot \Delta x} \cdot Q_1 - \frac{4 \cdot k \cdot \Delta t}{\pi \cdot D^2 \cdot \Delta x} \cdot Q_2 - p_H + p_1^{t=0} = 0 \quad (61)$$



Pre jednoduchosť zápisu a výpočtu sa zavedie konštanta:

$$A = \frac{4 \cdot k \cdot \Delta t}{\pi \cdot D^2 \cdot \Delta x}$$

Upravený vzťah (61) so zavedenou konštantou:

$$R \cdot |Q_1| \cdot Q_1 + A \cdot Q_1 - A \cdot Q_2 - p_H + p_1^{t=0} = 0 \quad (62)$$

Vzťah (62) je kvadratickou rovnicou, ktorej korene sa musia vyriešiť. Spraví sa ešte jedna úprava, aby sa dalo ľahšie narábať s rovnicou. Podelí sa odporom R za ktorý sa dosadí rovnica (58):

$$|Q_1| \cdot Q_1 + \frac{A \cdot (K_{vmax} \cdot z^n)^2}{100 \cdot \rho} \cdot Q_1 + \frac{(-A \cdot Q_2 - p_H + p_1^{t=0}) \cdot (K_{vmax} \cdot z^n)^2}{100 \cdot \rho} = 0 \quad (63)$$

Kvadratická rovnica (63) má koeficienty a , b , c rovné:

$$a = 1$$

$$b = \frac{A \cdot (K_{vmax} \cdot z^n)^2}{100 \cdot \rho}$$

$$c = \frac{(-A \cdot Q_2 - p_H + p_1^{t=0}) \cdot (K_{vmax} \cdot z^n)^2}{100 \cdot \rho}$$

Korene kvadratickej rovnice sa vypočítajú pomocou príslušného vzorca:

$$Q_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot c}}{2}$$

Vychádza sa z koreňa kvadratickej rovnice Q_{11} a dostáva sa tak rovnica pre výpočet prietoku za ventilom na začiatku potrubia v ktorom je zohľadnený vplyv uzavretia ventilu.



3.2.3 Vzorec pre vplyv ventilu na konci potrubia

V tomto prípade sa vychádza podobne ako v prípade pre začiatok potrubia, z rovnice pre koncový bod tlaku Lax – Wendroff (50) a rovnice pre určenie miestnych strát (52).

$$p_{x_{j+1}}^{t+\Delta t} = p_{x_j}^t - \frac{4 \cdot k \cdot \Delta t}{\pi \cdot D^2 \cdot \Delta x} \cdot (Q_{x_{j+1}}^{t+\Delta t} - Q_{x_{j+1}}^t) + p_{x_{j+1}}^t \quad (64)$$

Indexovo upravená rovnica pre určenie miestnych strát (52):

$$p_{20} - p_D = R \cdot |Q_{20}| \cdot Q_{20} \quad (65)$$

Využije sa odvodený vzťah pre odpor R (58):

$$R = \frac{100 \cdot \rho}{K_v^2} \quad (66)$$

Indexovo upravená rovnica Lax – Wendroff pre koncový tlak:

$$p_{20} = - \frac{4 \cdot k \cdot \Delta t}{\pi \cdot D^2 \cdot \Delta x} \cdot (Q_{20} - Q_{19}) + p_{20}^{t=0} \quad (67)$$

A dosadená do nej rovnica pre určenie miestnych strát (52):

$$p_D + R \cdot |Q_{20}| \cdot Q_{20} + \frac{4 \cdot k \cdot \Delta t}{\pi \cdot D^2 \cdot \Delta x} \cdot Q_{20} - \frac{4 \cdot k \cdot \Delta t}{\pi \cdot D^2 \cdot \Delta x} \cdot Q_{19} - p_{20}^{t=0} = 0 \quad (68)$$

Pre jednoduchosť zápisu a výpočtu sa zavedie konštanta:

$$A = \frac{4 \cdot k \cdot \Delta t}{\pi \cdot D^2 \cdot \Delta x}$$

Upravený vzťah:

$$R \cdot |Q_{20}| \cdot Q_{20} + A \cdot Q_{20} - A \cdot Q_{19} + p_D - p_{20}^{t=0} = 0 \quad (69)$$



Vzťah (69) je kvadratickou rovnicou, ktorej korene sa musia vyriešiť. Spraví sa ešte jedna úprava, aby sa dalo ľahšie narábalo s rovnicou. Podelí sa odporom R za ktorý sa dosadí rovnica (58):

$$|Q_{20}| \cdot Q_{20} + \frac{A \cdot (K_{vmax} \cdot z^n)^2}{100 \cdot \rho} \cdot Q_{20} + \frac{(-A \cdot Q_{19} - p_D + p_{20}^{t=0}) \cdot (K_{vmax} \cdot z^n)^2}{100 \cdot \rho} = 0 \quad (70)$$

Kvadratická rovnica (70) má koeficienty a , b , c rovné:

$$a = 1$$

$$b = \frac{A \cdot (K_{vmax} \cdot z^n)^2}{100 \cdot \rho}$$

$$c = \frac{(-A \cdot Q_{19} - p_D + p_{20}^{t=0}) \cdot (K_{vmax} \cdot z^n)^2}{100 \cdot \rho}$$

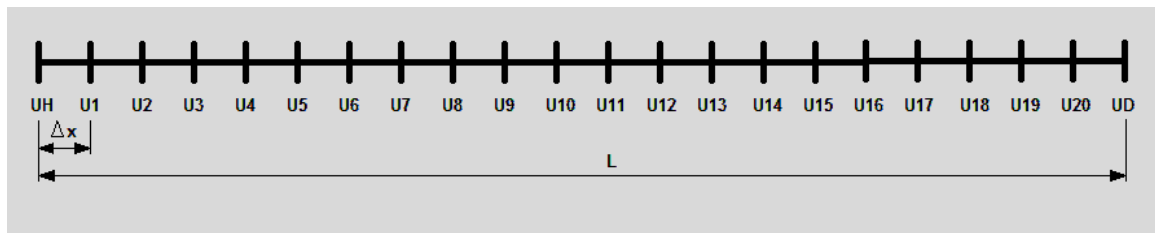
Korene kvadratickej rovnice sa vypočítajú pomocou príslušného vzorca:

$$Q_{20 \ 1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot c}}{2}$$

Vychádza sa z koreňa kvadratickej rovnice $Q_{20 \ 1}$ a dostáva sa tak rovnica pre výpočet prietoku za ventilom na konci potrubia, v ktorom je zohľadnený vplyv uzavretia ventilu.



4 Výpočet



Obrázok 6: Numerický model potrubia

Model potrubia

Dĺžka potrubia	$L = 58,26 \text{ m}$
Priemer potrubia	$D = 0,029 \text{ m}$
Hrúbka steny potrubia	$\Delta = 0,005 \text{ m}$
Hustota kvapaliny	$\rho = 998 \text{ kg/m}^3$
Koeficient trenia	$\lambda = 0,03$
Modul pružnosti potrubia	$E_{\text{pot}} = 0,8 \cdot 10^9 \text{ Pa}$
Modul pružnosti vody	$E_k = 2,2 \cdot 10^9 \text{ Pa}$
Počet uzlových bodov	$i = 22$
Vzdialenosť medzi uzlovými bodmi	$\Delta x = 2,7619 \text{ m}$
Zvolený časový krok	$\Delta t = 0,001 \text{ s}$

Výpočet, alebo aj namodelovanie problému bolo uskutočnené pomocou software MS Excel. Skĺbili sa v ňom rovnice odvodené vo vyššie uvedených kapitolách. Výpočet bol prevedený na trati rozdelenej na 22 bodov, ako na obr. 6, v ktorých sa dopočítavali premenné tlak p a prietok Q . Trať mala sklon α , a na rozdiel od experimentu lineárny priebeh. Vstupné hodnoty sú konštantný tlak v hornej nádrži p_H , ktorý zodpovedá výške hornej úrovne hladiny a odpor R , ktorého hodnota je definovaná relatívnym otvorením ventilu z . V prípade že ventil je úplne otvorený je $z = 1$, v prípade ak je ventil úplne zatvorený je $z = 0$. Výstupnými hodnotami sú tlaky a prietoky dopočítané vo všetkých bodoch.

Vplyv gravitácie bol zohľadnený aj v počiatočných podmienkach, kde sa udával tlak v hornej nádrži p_H a pomocou Bernoulliho rovnice s uvažovaním spádu sa dopočítal tlak v dolnej nádrži p_D tak, aby sa tlaky rovnali tlakom nameraných v experimente. Výpočet bol prevedený s premenlivou rýchlosťou zvuku závislou na zmene tlaku, bez vplyvu deformácie potrubia.



Dôležitým prvkom vo výpočte pomocou metódy Lax - Wendroff je časový krok výpočtu Δt . Zvolený bol $\Delta t = 0,001$ s, čo mu dodalo vyššiu presnosť výpočtu a podmienka veľkosti časového kroku u metódy Lax - Wendroff bola splnená:

$$\Delta x \geq v_s \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t \leq \frac{\Delta x}{v_s}$$

$$0,001 \leq \frac{2,7619}{360,63}$$

$$0,001 \leq 0,00766$$

Matematický model potrubia odvodený v tejto práci berie do úvahy skutočnosť, že v reálnom systéme dochádza k zmene rýchlosti zvuku v závislosti na tlaku.

Z experimentálnych meraní boli vybrané tri, pre rôzny prietok Q . Pri každom meraní pre daný prietok bol uvažovaný prípad uzatvárania horného a dolného ventilu. Tieto merania boli následne namodelované metódou Lax - Wendroff s využitím vzťahu pre závislosť rýchlosti zvuku na čase (6) a porovnané v priložených grafoch. Údaje s ktorými prebiehal výpočet sú uvedené v tab. 1.

5 Experiment

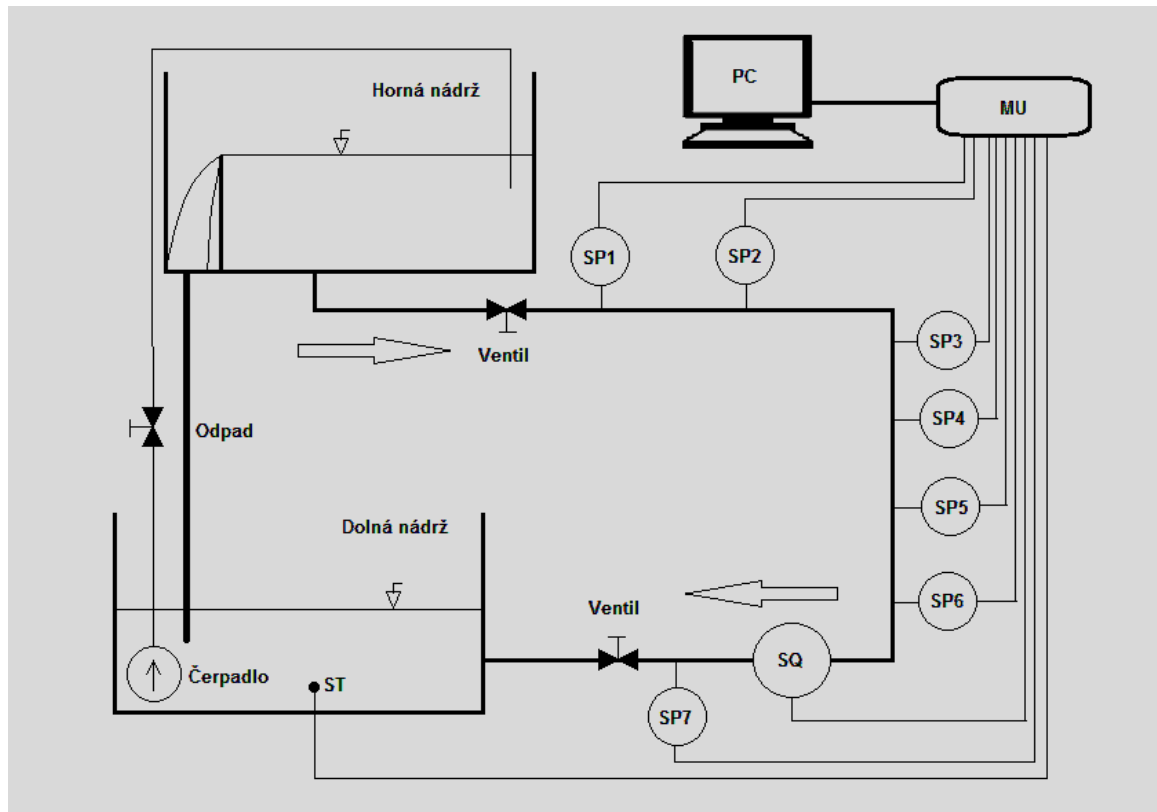
5.1 Popis skúšobnej trate

Výpočtový model bol odskúšaný na testovacom hydraulickom okruhu v hydraulickej laboratórii VUT. Skladá sa z hornej a dolnej nádrže, ktoré sú prepojené pomocou potrubia o dĺžke $L = 58,26$ m a vnútornom priemere $D = 0,029$ m s dvoma guľovými ventilmi, horným a dolným. Dolný ventil slúžil zároveň aj ako regulátor prietoku. Horná nádrž má prepád do dolnej nádrže, ktorý zabezpečuje konštantnú výšku hladiny. Bolo použitých sedem snímačov tlaku, jeden indukčný prietokomer a snímač teploty umiestnený v dolnej nádrži. Hadica, ktorá tvorila okruh bola z materiálu polypropylén. Modul pružnosti polypropylénu podľa [7] je v rozmedzí $1,5 - 2,0 \cdot 10^9$ Pa. Avšak modul pružnosti bol volený $0,8 \cdot 10^9$ Pa. S touto hodnotou sa výsledky výpočtu blížili viac hodnotám z experimentu.

V hadici boli umiestnené snímače tlaku. Prvý snímač, ktorý bol umiestnený za horným ventilom a posledný, ktorý bol umiestnený pred dolným ventilom boli prichytené v hadici pomocou oceľových vložiek. Ostatných päť snímačov bolo ukotvených v hadici priamo pomocou závitov bez prídavných vložiek. Rozmiestnenie snímačov je vidno na obr. 7 a na priloženej fotodokumentácii.



Informácie o trati sú uvedené v tab. 1. Výstupné signály z tlakových snímačov a prietokomeru boli privedené na kartu zapojenú k počítaču, kde sa zaznamenávali nasnímané hodnoty. Podrobnosti o meracej technike možno nájsť v tab. 2.



Obrázok 7: Experimentálny okruh

Tabuľka č.1: Popis trate

Dĺžka potrubia od hornej nádrže po dolnú	$L = 58,26 \text{ m}$
Výška hladiny v hornej nádrži	$h_H = 0,2 \text{ m}$
Spád	$H = 2,5 \text{ m}$
Priemer potrubia	$D = 0,029 \text{ m}$
Hrúbka steny potrubia	$\Delta = 0,005 \text{ m}$
Doba zatvárania ventilu	$0,1 \text{ s}$



Tabuľka č.2: Použitá meracia technika

SP1	snímač tlaku DMP 331, výrobca BD SENZORS s.r.o. Uh. Hradiště, merací rozsah 1000 kPa (A), presnosť $\pm 0,25\%$ z rozsahu, prúdový výstup 0–20 mA, výr. číslo 320839
SP2	snímač tlaku DMP 331, výrobca BD SENZORS s.r.o. Uh. Hradiště, merací rozsah 600 kPa (A), presnosť $\pm 0,25\%$ z rozsahu, prúdový výstup 0–20 mA, výr. číslo 114261197
SP3	snímač tlaku DMP 331, výrobca BD SENZORS s.r.o. Uh. Hradiště, merací rozsah 600 kPa (A), presnosť $\pm 0,25\%$ z rozsahu, prúdový výstup 0–20 mA, výr. číslo 360969
SP4	snímač tlaku DMP 331, výrobca BD SENZORS s.r.o. Uh. Hradiště, merací rozsah 600 kPa (A), presnosť $\pm 0,25\%$ z rozsahu, prúdový výstup 0–20 mA, výr. číslo 320840
SP5	snímač tlaku DMP 331, výrobca BD SENZORS s.r.o. Uh. Hradiště, merací rozsah 600 kPa (A), presnosť $\pm 0,25\%$ z rozsahu, prúdový výstup 0–20 mA, výr. číslo 1249737
SP6	snímač tlaku DMP 331, výrobca BD SENZORS s.r.o. Uh. Hradiště, merací rozsah 600 kPa (A), presnosť $\pm 0,25\%$ z rozsahu, prúdový výstup 0–20 mA, výr. číslo 1249736
SP7	snímač tlaku DMP 331, výrobca BD SENZORS s.r.o. Uh. Hradiště, merací rozsah 1000 kPa (A), presnosť $\pm 0,25\%$ z rozsahu, prúdový výstup 0–20 mA, výr. číslo 168497
SQ	indukčný prietokomer typ MQI 99-C: DN32 / PN 16, ELA Brno, merací rozsah 0-4 l/s, presnosť $\pm 0,5\%$ z 10% až 100% Q_{max} , prúdový výstup 4-20 mA, výr. č. 98627
ST	snímač teploty vody typ HSO-5021A2L HIT s.r.o., rozsah 0-50°C, prúdový výstup 4-20mA, presnosť $\pm 0,1\%$
NZ	jednosmerný stabilizovaný zdroj NZ 224 Rawet, $U_N=24$ V.
MU	meracia ústredňa NI 9188, 8-portů, Ethernet komunikácia 1 Gb, meracia karta NI 9203 16-bit prúdový prevodník, 200 kS/s
PC	PC Intel Core 2 Duo typ LENOVO ThinkPad

5.2 Postup experimentu

Hadickou, ktorá spájala hornú a dolnú nádrž pretekala účinkom gravitačného zrýchlenia voda. Obtokom, ktorý bol zabezpečený pomocou čerpadla sa voda vracala naspäť z dolnej do hornej nádrže. Obe nádrže boli otvorené, tým pádom tlak pôsobiaci na hladiny mal hodnoty atmosférického tlaku. Spočiatku boli oba ventily plne otvorené kvôli ustáleniu prietoku. Následne sa horný ventil uzavrel manuálne s čo najväčšou možnou rýchlosťou, aby sa dosiahol totálny ráz. Doba uzatvárania bola určená približne na hodnotu 0,1 s, s ktorou sa pracovalo vo výpočte. Ráz bolo jednak počuť a zároveň vidieť na obrazovke počítača v ktorom sa zhromažďovali údaje zo snímačov tlaku, prietoku a teploty vody v závislosti na



čase. Časový krok záznamu údajov bol $\Delta t_{exp} = 0,0005$ s. Snímač tlaku bol vzdialený od ventilu 0,2 m, z čoho je vidno zmenu tlaku ihneď za ventilom. Výstupy z merania sú znázornené v grafoch pre rôzne prietoky. Pre overenie správnosti bolo meranie pre každý prietok opakované niekoľko krát. Doby merania sa mierne líšili, mali rozmedzie od 10 do 20 s, čo úplne stačilo k zaznamenaní vodného rázu.

Po každom meraní bolo nutné previesť odvzdušňovanie okruhu, aby ďalšie meranie nebolo ovplyvnené zbytkovým vzduchom v okruhu, ktorý sa po experimente nahromadil na stenách potrubia. Síce len v malom množstve, ale aj tak mal výrazný vplyv na výsledný ráz. Z toho dôvodu je pri každom grafe v tabuľke ako počiatočná hodnota uvedený hmotnostný zlomok plynu. Určil sa odhadom pri ladení vypočítaných hodnôt na hodnoty z experimentu.

Keď sa odmerali uzatvárania horného ventilu, nasledovalo uzatváranie dolného ventilu, ktoré prebiehalo podobne. Prietoky pre ktoré sa meranie uskutočnilo boli rovnaké ako pri uzatváraní horného ventilu. Nastavovali sa privretím, prípadne otvorením dolného ventilu pred ktorým bol umiestnený prietokomer. Keďže sa jednalo o guľový ventil, tak nastavenie prietoku bolo občas dosť obtiažne a zdĺhavé.

Vplyvom geometrických rozdielov namodelovanej trate a experimentálnej trate nie sú výsledky úplne totožné. Ako vidno na priloženej fotodokumentácii, experimentálna trať má zložitejší tvar, nelineárny priebeh potrubia a snímače umiestnené v rôznych vzdialenostiach. Trať ktorá bola namodelovaná v počítači má naopak lineárny charakter.

Okrem geometrických vlastností tratí má vplyv na výsledné hodnoty aj vlastnosť materiálu potrubia. Je tým myslené tlmenie, ktoré vo výpočte nebolo uvažované a má vplyv na výsledné amplitúdy a vlnové dĺžky hodnôt tlakov vynesných v grafoch. V správe [8] sa berie do úvahy tlmenie materiálu s výsledkami experimentu z toho istého okruhu. Výsledky výpočtu sú priaznivejšie.



5.3 Grafické vyhodnotenia experimentu a matematického modelu

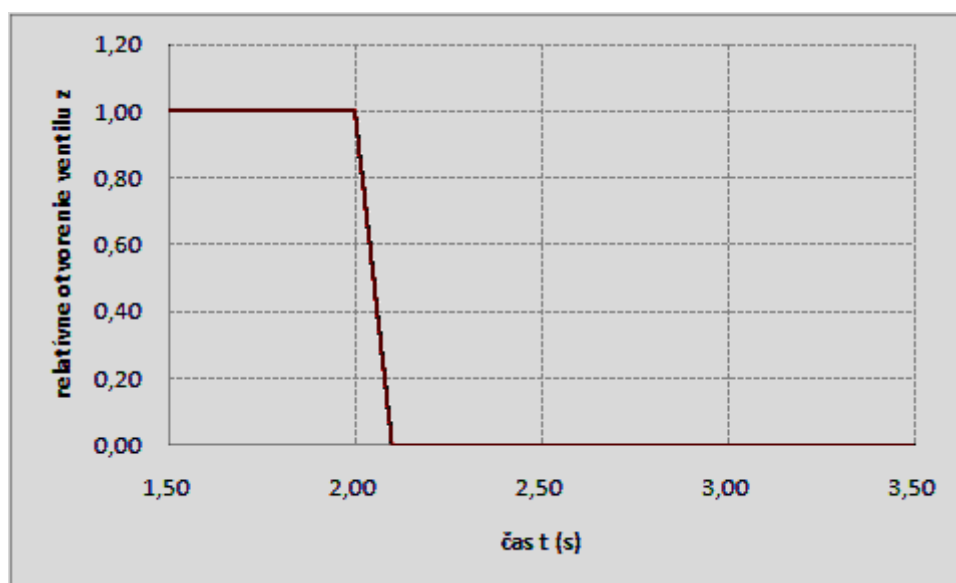
V tejto časti práce sú grafické výstupy z MS Excel, kde sú znázornené rýchlosti zatvárania ventilov, prietokové charakteristiky a charakteristiky tlakov vypočítaných a nameraných hodnôt z experimentu. Pre každý prietok sú priložené počiatkové a okrajové podmienky spolu s grafmi pre uzatváranie horného a dolného ventilu.

Počiatkové podmienky

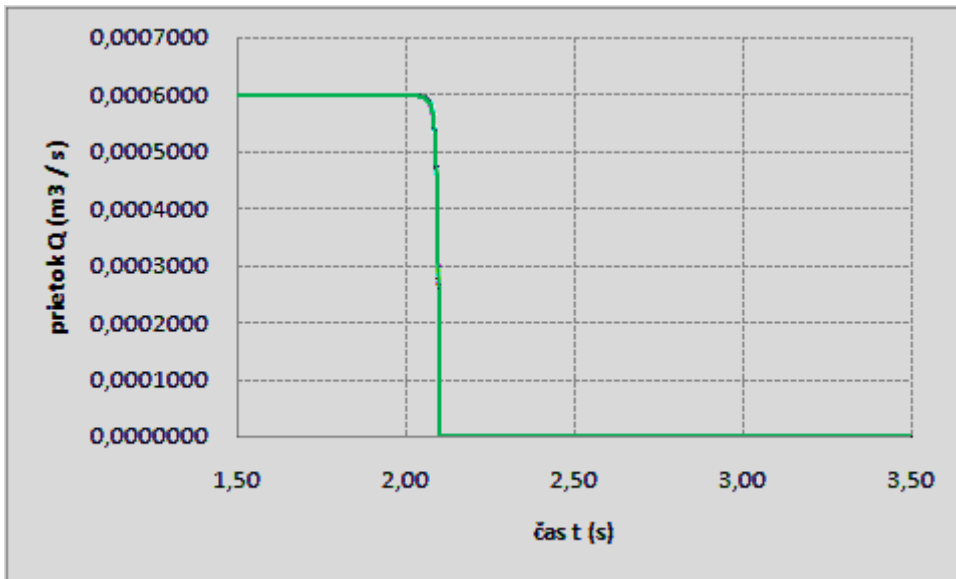
Počiatok potrubia	$p_1 = 98370 \text{ Pa}$
	$Q_1 = 0,0006 \text{ m}^3/\text{s}$
Koniec potrubia	$p_{20} = 95480 \text{ Pa}$
	$Q_{20} = 0,0006 \text{ m}^3/\text{s}$
Teplota kvapaliny	$T = 248,9 \text{ K}$
Hmotnostné zlomky vzduchu:	
uzatváranie horného ventilu	$M_p = 4,5 \cdot 10^{-6}$
uzatváranie dolného ventilu	$M_p = 2,1 \cdot 10^{-6}$

Okrajové podmienky

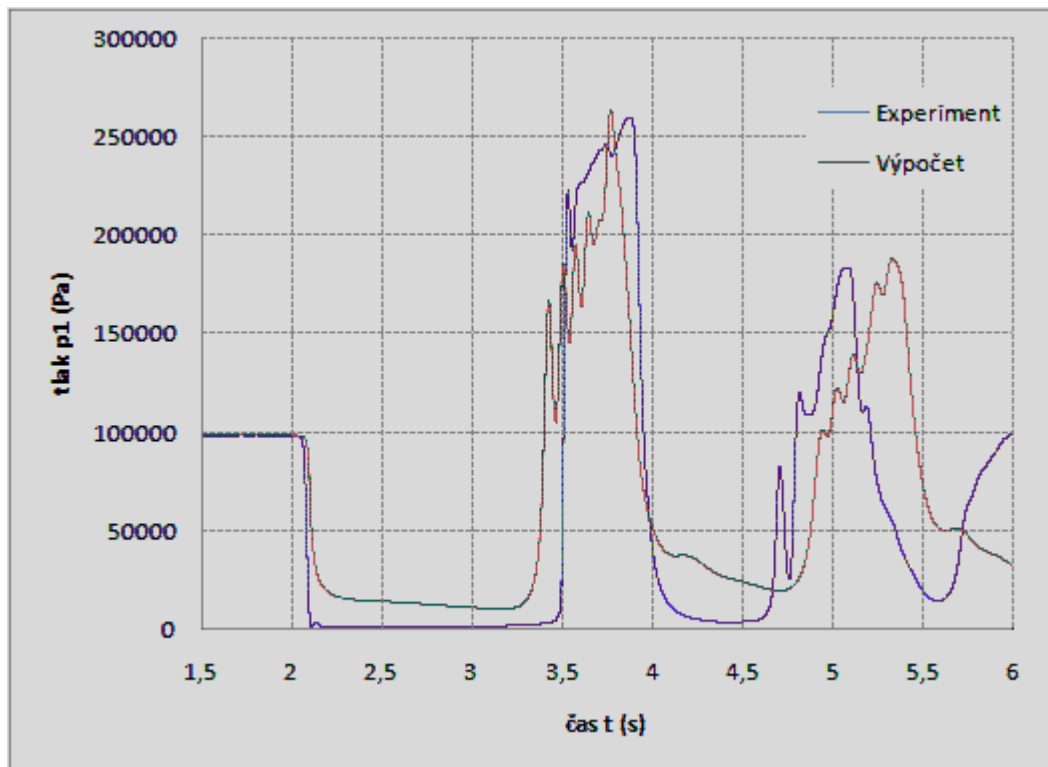
Tlak na výstupe z hornej nádrže	$p_H = 98521 \text{ Pa}$
Tlak na vstupe do dolnej nádrže	$p_D = 95330 \text{ Pa}$
Odpor – otvorenie ventilu	$R = R(t)$



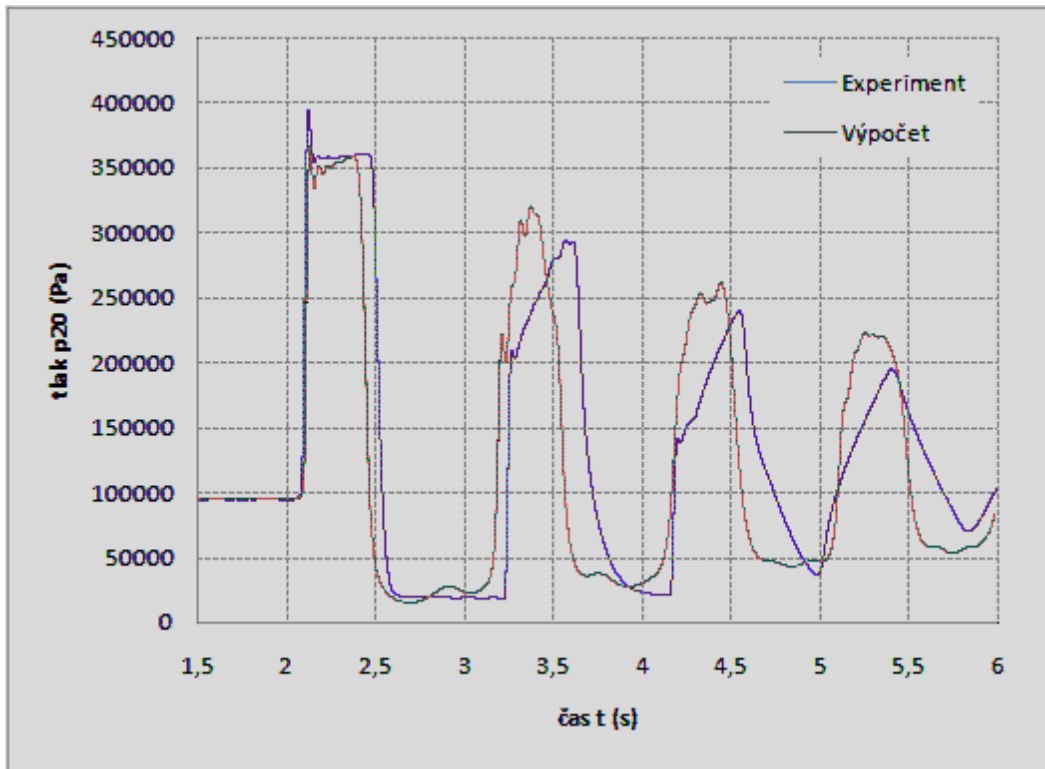
Obrázok 8: Uzatváranie ventilu – platí pre všetky prietoky



Obrázok 9: Závislosť zmeny prietoku na čase za ventilom



Obrázok 10: Porovnanie nameraných a vypočítaných hodnôt – uzatváranie horného ventilu



Obrázok 11: Porovnanie nameraných a vypočítaných hodnôt – uzatváranie dolného ventilu

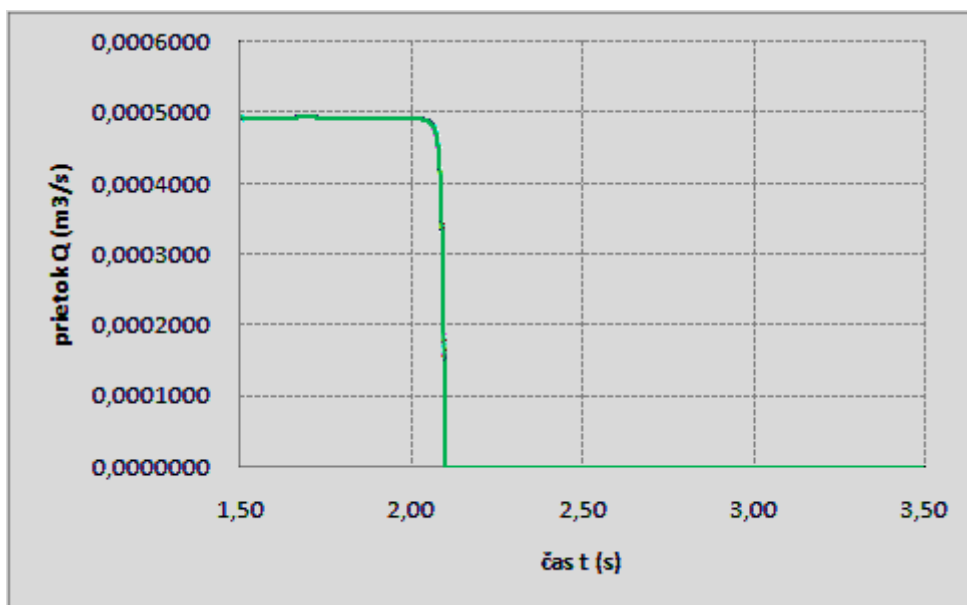


Počiatkové podmienky

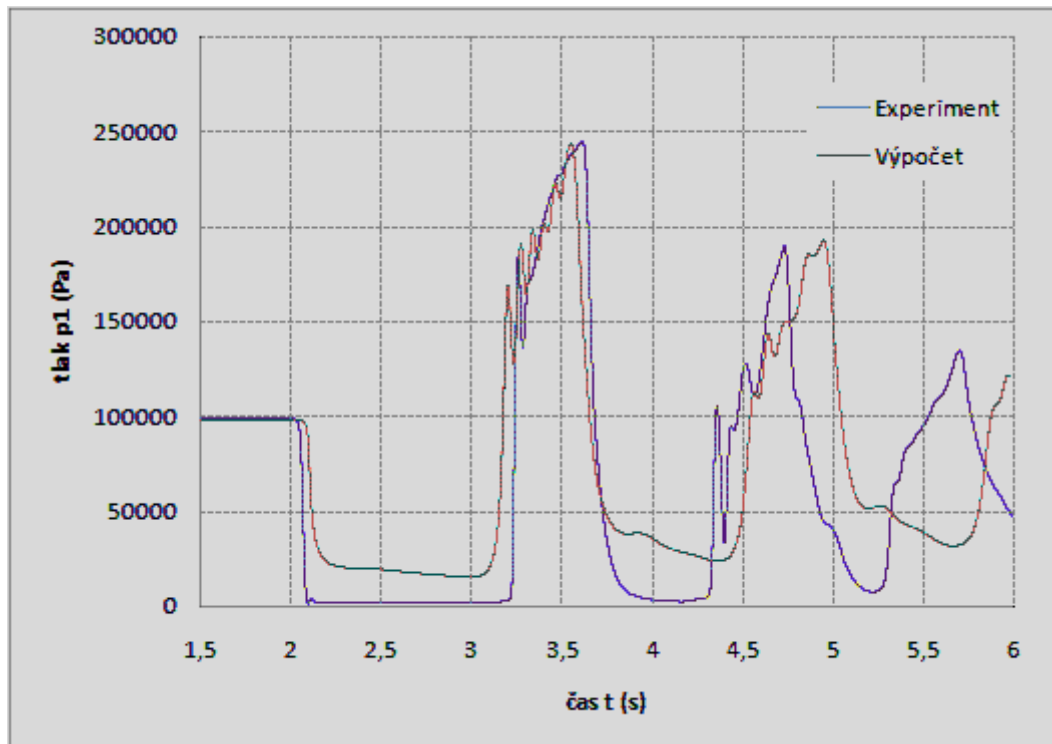
Počiatok potrubia	$p_1 = 98730 \text{ Pa}$
	$Q_1 = 0,00049 \text{ m}^3/\text{s}$
Koniec potrubia	$p_{20} = 102700 \text{ Pa}$
	$Q_{20} = 0,00049 \text{ m}^3/\text{s}$
Teplota kvapaliny	$T = 248,2 \text{ K}$
Hmotnostný zlomok vzduchu	
uzatváranie horného ventilu	$M_p = 4,2 \cdot 10^{-6}$
uzatváranie dolného ventilu	$M_p = 1,3 \cdot 10^{-6}$

Okrajové podmienky

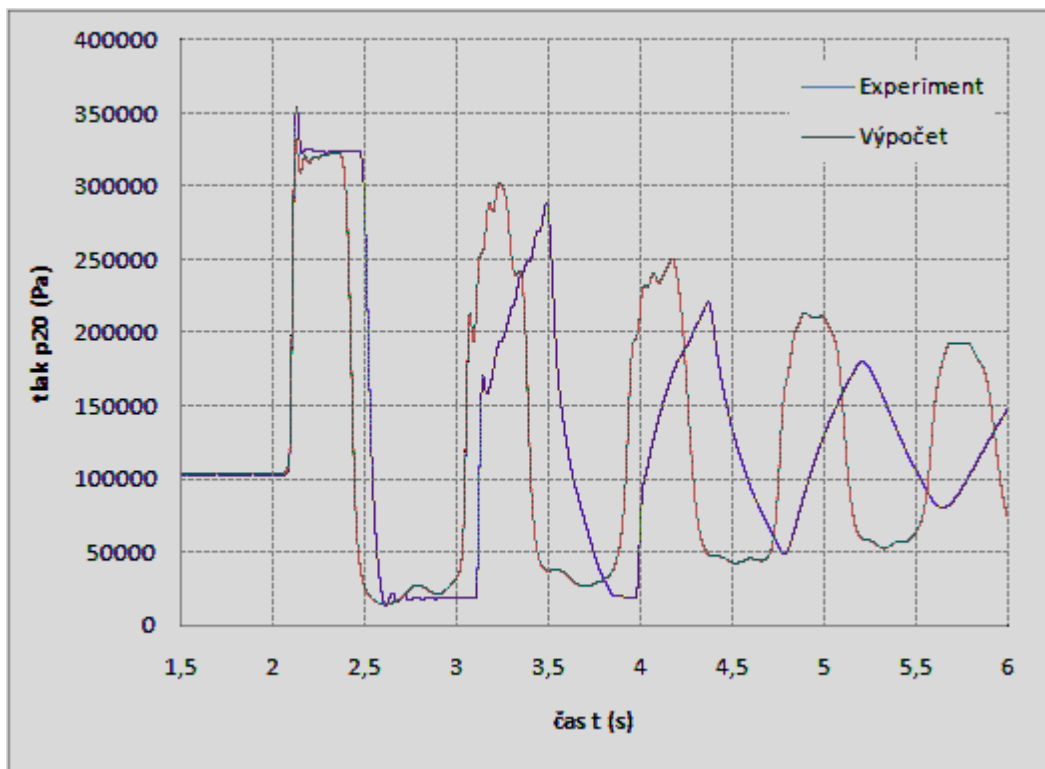
Tlak na výstupe z hornej nádrže	$p_H = 98521 \text{ Pa}$
Tlak na vstupe do dolnej nádrže	$p_D = 102900 \text{ Pa}$
Odpor – otvorenie ventilu	$R = R(t)$



Obrázok 12: Závislosť zmeny prietoku na čase za ventilom



Obrázok 13: Porovnanie nameraných a vypočítaných hodnôt – uzatváranie horného ventilu



Obrázok 14: Porovnanie nameraných a vypočítaných hodnôt – uzatváranie dolného ventilu

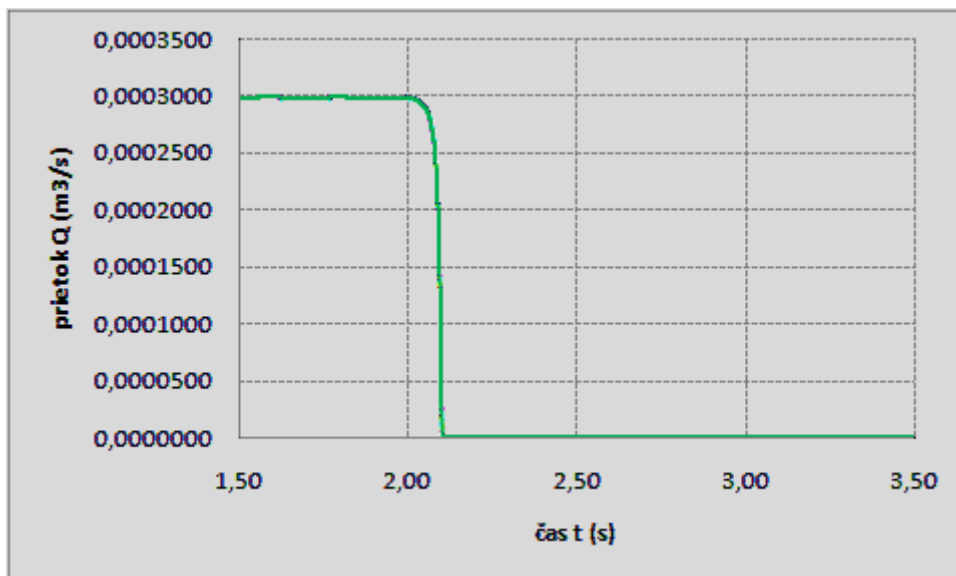


Počiatočné podmienky

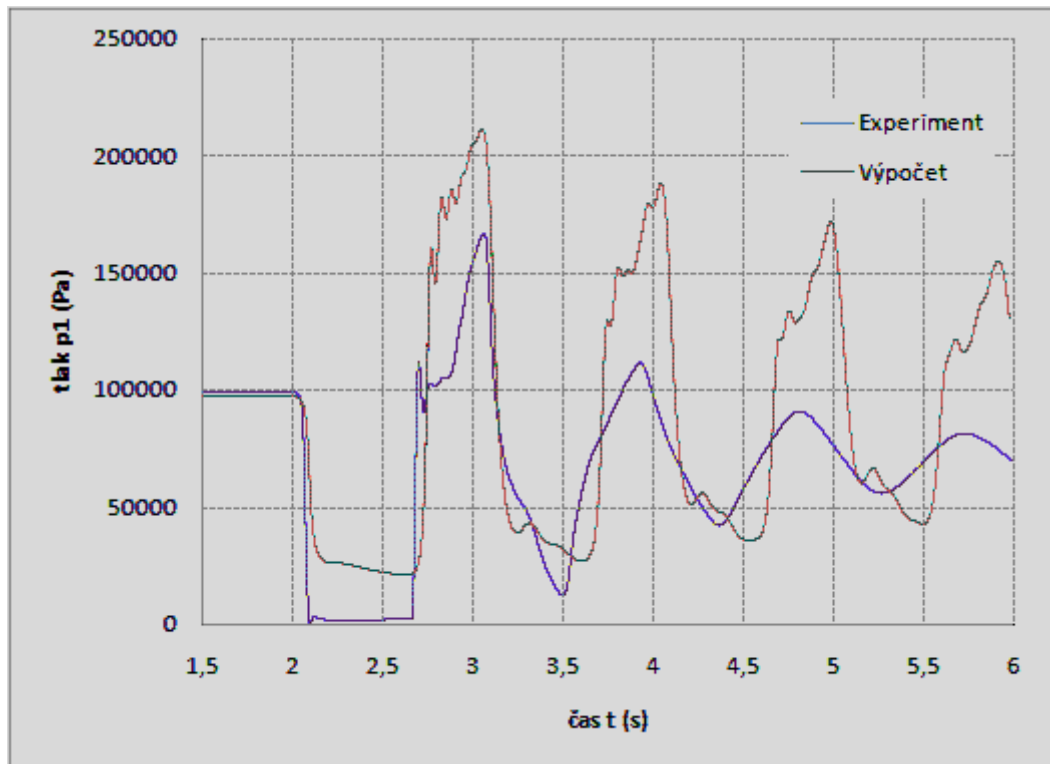
Počiatok potrubia	$p_1 = 99370 \text{ Pa}$
	$Q_1 = 0,0003 \text{ m}^3/\text{s}$
Koniec potrubia	$p_{20} = 115500 \text{ Pa}$
	$Q_{20} = 0,0003 \text{ m}^3/\text{s}$
Teplota kvapaliny	$T = 248,9 \text{ K}$
Hmotnostný zlomok vzduchu	
uzatváranie horného ventilu	$M_p = 1,9 \cdot 10^{-6}$
uzatváranie dolného ventilu	$M_p = 1,0 \cdot 10^{-6}$

Okrajové podmienky

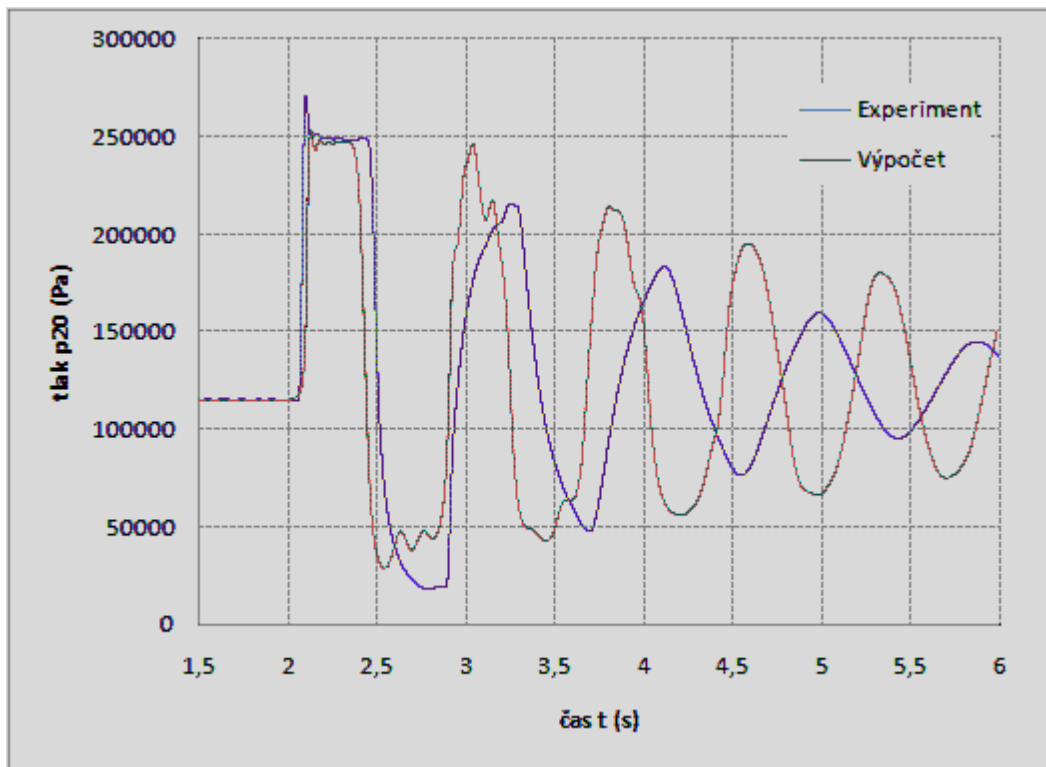
Tlak na výstupe z hornej nádrže	$p_H = 98521 \text{ Pa}$
Tlak na vstupe do dolnej nádrže	$p_D = 116300 \text{ Pa}$
Odpor – otvorenie ventilu	$R = R(t)$



Obrázok 15: Závislosť zmeny prietoku na čase za ventilom



Obrázok 16: Porovnanie nameraných a vypočítaných hodnôt – uzatváranie horného ventilu

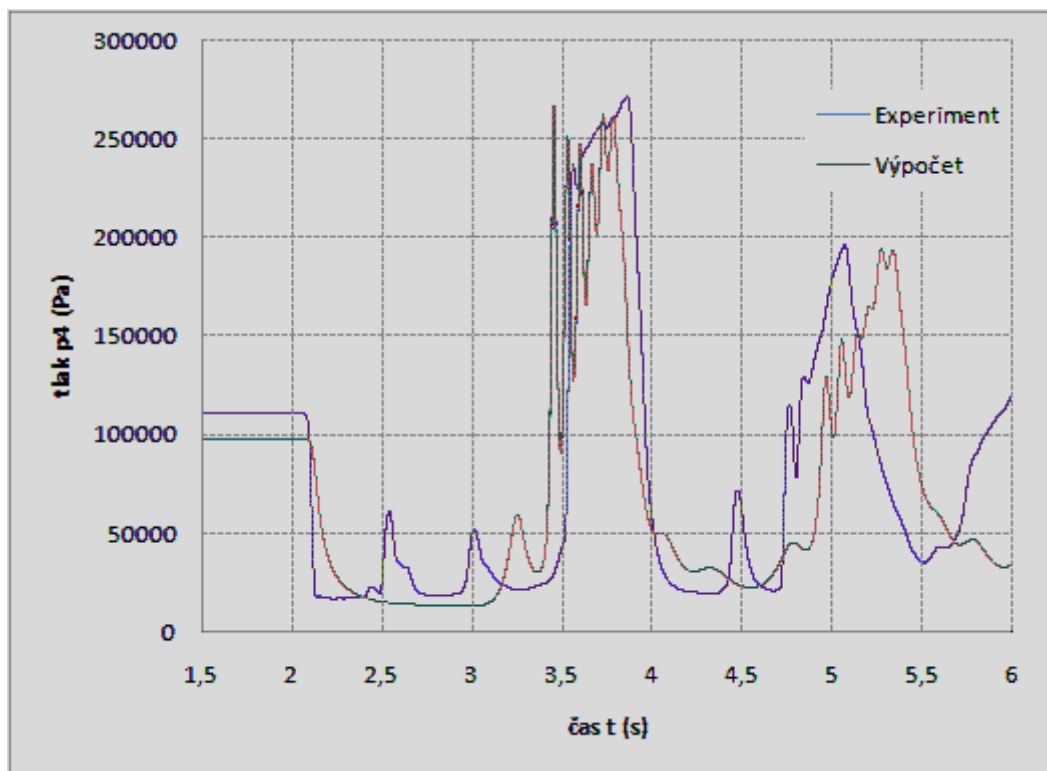


Obrázok 17: Porovnanie nameraných a vypočítaných hodnôt – uzatváranie dolného ventilu

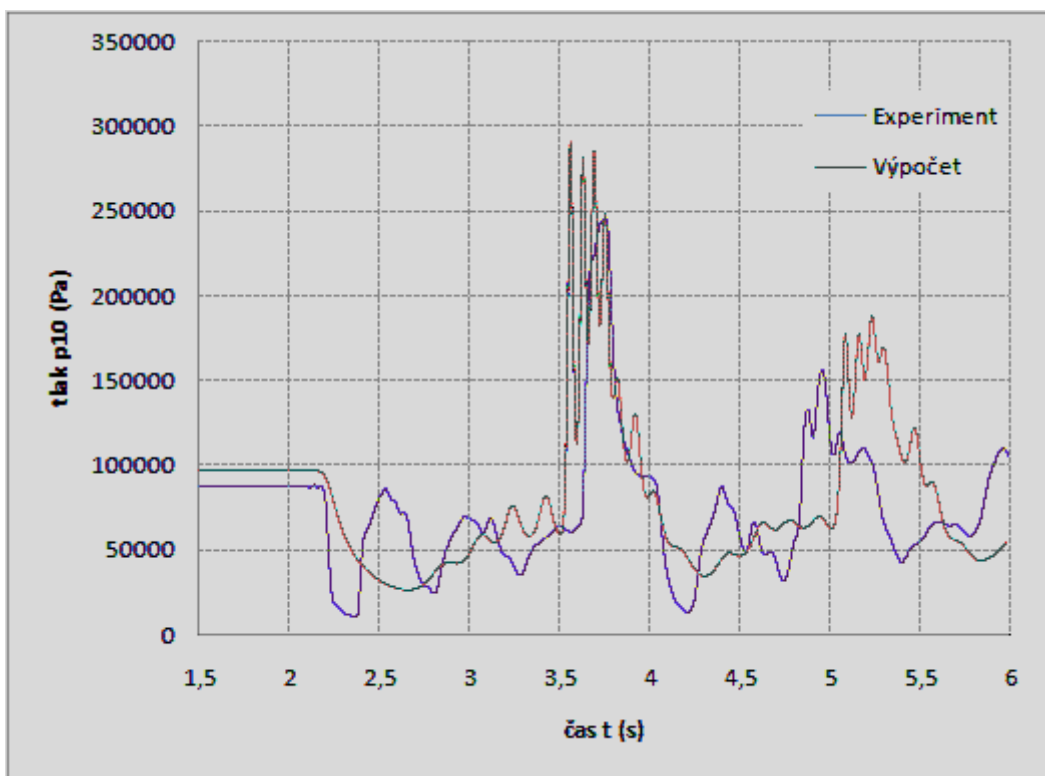
5.4 Vplyv nelineárnosti

V nasledujúcich troch grafoch je názorne vidieť vplyv nelineárnosti experimentálnej trate. Boli vybrané tri dĺžkovo podobné body na výpočtovom modeli potrubia a experimente. Je vidno rozdielnych počiatočných tlakov na experimentálnej trati oproti vypočítaným hodnotám, ktoré sú zapríčinené nerovnomerným spádom trati.

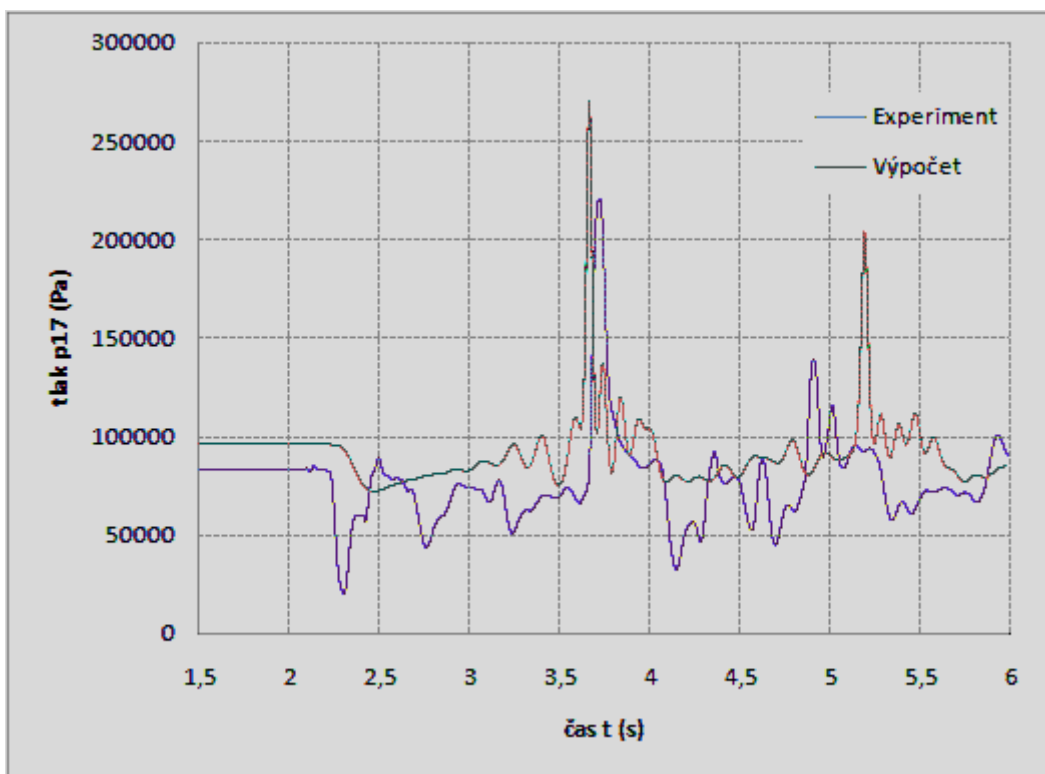
Ak by sme chceli mať model výpočtu nasimulovaný s čo najväčšou presnosťou na experimentálnu trať, bolo by potrebné umiestniť na trať minimálne rovnaké množstvo tlakových snímačov ako na výpočtovom modeli a medzi jednotlivými snímačmi by sa vo výpočte musel uvažovať iný súčiniteľ dĺžkových strát spolu s uvažovaním rôznych výškových rozdielov medzi jednotlivými snímačmi. Takýto výpočet spolu s modelom je už lepšie riešiť prostredníctvom programovacieho jazyka. Výpočet v programe MS Excel by bol dosť komplikovaný a zdĺhavý. Dĺžkové straty by v tom prípade boli pravdepodobne zrovnateľné. Grafy sú vykreslené pre prietok $Q = 0,0006 \text{ m}^3/\text{s}$.



Obrázok 18: Vplyv nelineárnosti – hodnoty z tlakového snímača SP2 a uzlu U4



Obrázok 19: Vplyv nelineárnosti – hodnoty z tlakového snímača SP4 a uzlu U10



Obrázok 20: Vplyv nelineárnosti – hodnoty z tlakového snímača SP6 a uzlu U17



6 Fotodokumentácia



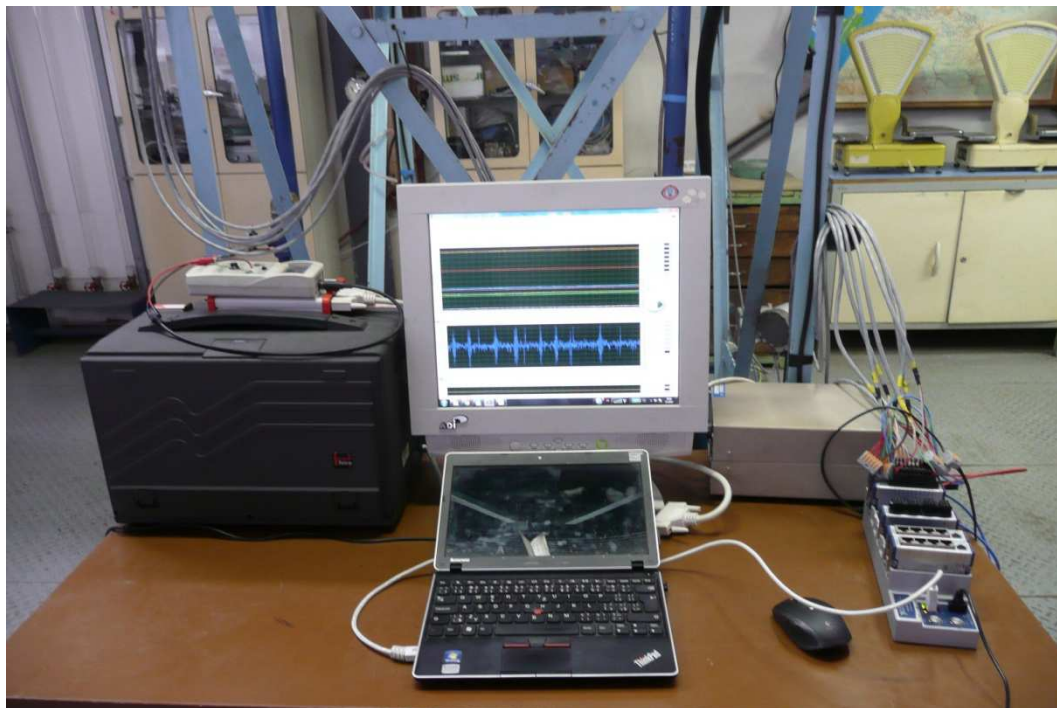
Obrázok 21: Experimentálna meracia trať



Obrázok 22: Prietokomer, tlakový snímač a dolný guľový uzáver



Obrázok 23: Horný guľový uzáver a snímač tlaku



Obrázok 24: PC spolu s meracou ústredňou



Obrázok 25: Uzatváranie horného ventilu



7 Záver

V tejto práci je navrhnutý matematický model riešenia tlakových pulzácií s premenlivou rýchlosťou zvuku v závislosti na tlaku v kvapaline. Uvažovala sa zmes kvapalina a plyn, teda voda a vzduch, a predpokladalo sa adiabatické chovanie. Práve vzduch vo vode významne ovplyvňuje rýchlosť zvuku. Vzduch je totiž oproti vode výrazne stlačiteľnejší a tým sa mení objemový modul pružnosti zmesi prúdiacej v potrubí. Výpočet prebiehal s upravenými vzťahmi Navier – Stokes a rovnicou kontinuity odvodenými v predchádzajúcich kapitolách, ktoré sa implantovali do matematického modelu Lax – Wendroff. V rovnici kontinuity sa nachádzala premenná objemový modul pružnosti k , vďaka ktorému sa mohla uvažovať premenlivá rýchlosť zvuku. Zahŕňala jednak objemový modul pružnosti zmesi a objemový modul pružnosti potrubia, ktorý má tiež významný vplyv na rýchlosť zvuku.

Metóda Lax – Wendroff bola použitá pre jej dobrú presnosť a konvergenciu. Keďže mala trať spád, bolo treba taktiež uvažovať vplyv gravitácie v časovom priestore. Tento problém sa vyriešil upravením rovnice Navier – Stokes s uvažovaním zložky gravitačného zrýchlenia v smere prúdenia.

Pri grafickom porovnaní nameraných hodnôt tlaku z experimentu a hodnôt z výpočtového modelu je vidno rozdiely vo vlnovej dĺžke a amplitúde priebehov tlaku. Najvýraznejší rozdiel je v prípade prietoku $Q = 0,0003 \text{ m}^3/\text{s}$, kde sa pri danom module pružnosti potrubia nepodarilo príliš priblížiť k nameraným hodnotám. Z toho vyplýva, že matematický model je skôr vhodný pre vyššie prietoky. Taktiež v grafickom porovnaní vidno, že výpočtová metóda je vhodnejšia pre uzatváranie dolného ventilu, kde tlak najprv prudko stúpne. V tomto prípade je amplitúda výpočtu blízko amplitúde experimentu a aj vlnová dĺžka nie je až tak rozdielna ako v prípade uzatvárania horného ventilu.

Ladenie výpočtu na experiment prebiehalo počiatočnou zmenou modulu pružnosti potrubia. Jeho hodnota, vzhľadom na čo najtesnejšie priblíženie k experimentálnym hodnotám, bola zvolená $E_{pot} = 0,8 \cdot 10^9 \text{ Pa}$. Presná hodnota pre materiál použitý na experimentálny okruh totiž nie je známa. Ďalšia vec, ktorú bolo potrebné uvažovať pri ladení výpočtu na experiment, bol hmotnostný zlomok plynu M_p . Keďže dochádzalo k zavzdušňovaniu trate po každom ráze, je táto hodnota rôzna pre každé meranie a výpočet.

Kavitácia vo výpočte nebola uvažovaná. Výsledky ale aj napriek tomu odpovedajú vodnému rázu s uvažovaním kavitácie.

Významný vplyv na výsledné priebehy vypočítaných tlakov má neuvažovanie tlmenia materiálu potrubia spolu s nelineárnym priebehom experimentálnej trate. V práci [5] a správe [8] sa uvažuje popri premennej rýchlosti zvuku v závislosti na tlaku tiež tlmenie v materiály potrubia. Výsledky numerickej simulácie potom kopírujú vernejšie výsledky z merania. Výpočet s nelineárnym priebehom trate nebol uskutočnený z dôvodu časovej náročnosti výpočtu. Každopádne, riešenie takého modelu je možné brať ako námet pre budúci vývoj k téme vodného rázu v oblasti nízkych tlakov.



8 Zoznam použitých zdrojov

- [1] Himr D., Habán V. and Pochylý F.: *Sound Speed in the Mixture Water-Air*, 2009, Engin. Mechanics, 255
- [2] Himr D. a Habán V.: *Simulation of low pressure water hammer*, 2010 IOP Publishing Ltd.
- [3] Koyš, J.: *Modelování tlakových pulsací v pružných potrubích*, Diplomová práce, VUT FSI v Brně, 2007
- [4] Záruba, J.: *Water Hammer in Pipe-line Systems*, Academia, Praha 1993, ISBN 80-200-0363-0
- [5] Panko, M.: *Tlumení tlakových pulsací v pružných potrubích*, Diplomová práce, VUT FSI v Brně, 2008
- [6] Reichl J, Všetická M.: *Rýchlost zvuku* [online], Encyklopedie fyziky, 2006 – 2012 [cit. 1.5.2012]. Dostupné z: <<http://fyzika.jreichl.com>>
- [7] The Engineering ToolBox. *Young Modulus (Tensile Modulus) for common materials* [online], 2012 [cit. 1.5.2012]. Dostupné z: <<http://www.engineeringtoolbox.com/>>
- [8] Himr, D., Hudec, M., Habán, V.: *Analýza a numerická simulace vodního rázu v kavitační oblasti na zkušebním okruhu OFI*. Technická zpráva VUT-EU13303-QR-06-12. Brno 2012.



9 Zoznam použitých symbolov a označení

Symbol	Jednotka	Popis
a, b, c	-	koeficienty kvadratickej rovnice
D	m	priemer potrubia
E	Pa	modul pružnosti v ťahu
E_{pot}	Pa	modul pružnosti potrubia
E_k	Pa	modul pružnosti kvapaliny
g	m/s^2	gravitačné zrýchlenie
h_H	m	výška hladiny v hornej nádrži
H	m	spád
i	-	počet uzlových bodov
k	Pa	objemový modul pružnosti
K_k	Pa	objemový modul pružnosti kvapaliny
K_p	Pa	objemový modul pružnosti plynu
K_v	m^3/s	prietokový súčiniteľ
K_{vmax}	m^3/s	maximálny prietokový súčiniteľ
L	m	dĺžka potrubia
M_p	-	hmotnostný zlomok plynu
m_k	kg	hmotnosť kvapaliny
m_p	kg	hmotnosť plynu
O_k	-	objemový zlomok kvapaliny
O_p	-	objemový zlomok plynu
p	Pa	tlak
Q	m^3/s	prietok
$Q_{1,2}$	-	korene kvadratickej rovnice
r	J/kg.K	špecifická plynová konštanta
S	m^2	plocha prierezu potrubia
R	$1/m^2$	odpor
T	K	teplota
t	s	čas
U	-	uzlový bod
V	m^3	objem
V_k	m^3	objem kvapaliny
V_p	m^3	objem plynu
v	m/s	rýchlosť prúdenia kvapaliny



v_s	m/s	rýchlost' zvuku v kvapaline s plynom
v_{0p}	m/s	adiabatická rýchlost' zvuku v plyne
v_z	m/s	rýchlost' zvuku vo vzduchu
x	m	priestorová súradnica
z	-	relatívne otvorenie ventilu
α	rad	uhol sklonu potrubia
Δ	m	hrúbka steny potrubia
Δp_{ref}	Pa	referenčná hodnota tlaku (10^5 Pa)
Δt	s	časový krok výpočtu
Δt_{exp}	s	časový krok merania
Δx	m	dĺžka kroku výpočtu
	-	adiabatický exponent
λ	-	súčiniteľ dĺžkových strát
ρ	kg/m^3	hustota
ρ_s	kg/m^3	hustota zmesy
ρ_k	kg/m^3	hustota kvapaliny
ρ_{ref}	kg/m^3	referenčná hustota ($1000 kg/m^3$)
ξ	-	súčiniteľ miestnych strát
π	-	Ludolfovo číslo



10 Příloha

Příloha 1. CD