

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

ŘEŠENÍ INVERZNÍCH ÚLOH V OBLASTI VÝMĚNÍKŮ HMOTY A TEPLA

SOLUTION OF INVERSE PROBLEMS IN THE AREA OF MATERIAL AND HEAT
EXCHANGERS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

TEREZA BROŽOVÁ

VEDOUcí PRÁCE
SUPERVISOR

doc. RNDr. JAN ČERMÁK, CSc.

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2011/2012

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Tereza Brožová

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Řešení inverzních úloh v oblasti výměníků hmoty a tepla

v anglickém jazyce:

Solution of inverse problems in the area of material and heat exchangers

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Matematický model dynamického chování výměníků hmoty a tepla lze standardně popsat pomocí soustavy diferenciálních rovnic. Kvalitativní analýza tohoto modelu vyžaduje zodpovězení základních otázek týkajících se existence a jednoznačnosti řešení, jeho stability apod.

Cíle bakalářské práce:

Cílem práce by mělo být provedení rešerší matematického popisu dynamického chování výměníků hmoty a tepla, založeném na systému diferenciálních rovnic. V této souvislosti by práce měla obsahovat hierarchii těchto modelů dle složitosti jejich popisu. U nejjednoduššího modelu se předpokládá formulace základní inverzní úlohy a její exaktní vyřešení. U složitějších modelů pak provedení analýzy řešitelnosti a jednoznačnosti, příp. stability. Práce by měla také diskutovat otázky měřitelnosti parametrů získaných řešením inverzní úlohy, a otázky kontrolovatelnosti a měřitelnosti parametrů, které popisují daný model.

Seznam odborné literatury:

Anger, G. Inverse Problems in Differential Equations. Plenum Publishing Corp., New York, 1990.

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jan Čermák, CSc.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2011/2012.

V Brně, dne 16.11.2011

L.S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.
Děkan fakulty

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá dynamickým chováním výměníků tepla, které je popsáno systémem diferenciálních rovnic. V této souvislosti obsahuje obecné informace o nezbytném teoretickém základu týkající se především přenosu tepla. Dále zmiňuje základní typy uspořádání výměníků tepla, které se mohou v praxi vyskytnout. Hlavním cílem práce je zodpovědět otázky říditelnosti, pozorovatelnosti a identifikovatelnosti parametrů obdržené řešením příslušné inverzní úlohy.

Summary

This bachelor's thesis deals with the dynamic behavior of heat exchangers which is described by the system of differential equations. In this connection it includes a general information about necessary theoretical background especially concerning heat transfer. Further, it mentions also the basic types of arrangement of heat exchangers that may occur in practice. The main goal is to answer the questions of controllability, observability and identifiability of the parameters obtained by solving corresponding inverse problem.

Klíčová slova

prostup tepla, výměna tepla, identifikovatelnost, říditelnost, pozorovatelnost

Keywords

heat transfer, heat exchange, identifiability, controllability, observability

BROŽOVÁ, T. *Řešení inverzních úloh v oblasti výměníků hmoty a tepla*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2012. 51 s. Vedoucí doc. RNDr. Jan Čermák, CSc.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci „Řešení inverzních úloh v oblasti výměníků hmoty a tepla“ zpracovala samostatně pod vedením RNDr. Jana Krejčího, PhD. a doc. RNDr. Jana Čermáka, CSc. za použití zdrojů uvedených v seznamu, jež je součástí této práce.

Tereza Brožová

Na tomto místě bych ráda poděkovala RNDr. Janu Krejčímu, PhD. za jeho odborné vedení, cenné připomínky a rady při zpracovávání této bakalářské práce. Dále bych chtěla poděkovat doc. RNDr. Janu Čermákovi, CSc. za jeho hodnotné rady a připomínky. Zejména chci poděkovat svým rodičům Zdeňce a Vojtěchu Brožovým za vše, co mi do života dali a také za to, že mi umožnili studovat. Dále děkuji celé své rodině za jejich toleranci, ochotu a podporu.

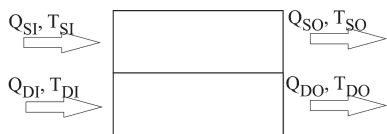
Tereza Brožová

Obsah

1 Úvod	8
2 Použitý matematický aparát	9
2.1 Teorie řízení	10
2.2 Inverzní úloha	10
3 Vlastnosti parametrů a modelu	12
3.1 Rozdíl mezi systémem, modelem systému a experimentem	12
3.1.1 Identifikovatelnost parametru a modelu	14
3.2 Obecná lineární teorie systémů a popis lineárního uspořádání systémů . . .	15
3.2.1 Stavově proměnný popis lineárního systému	15
3.2.2 Řiditelnost	16
3.2.3 Pozorovatelnost	16
4 Apriorní vnitřní vazby	18
4.1 Rovnice kontinuity	18
4.2 Zákon zachování energie	18
5 Rychlostní profil	19
6 Přenos tepla	21
6.1 Sdílení tepla prouděním	21
7 Účinnost výměníku tepla	27
8 Základní typy uspořádání	28
9 Řešení inverzní úlohy křížového uspořádání	36
9.1 Teplota vzorku je v celém výměníku konstantní	36
9.2 Teplota vzorku je v celém výměníku konstantní a parametry k_D a w chceme identifikovat	37
9.3 Teplota vzorku je v celém výměníku konstantní a je identifikován parametr $X = e^{-\frac{k_D w}{Q_D} l}$ a A	37
9.4 Identifikace teplotního profilu vzorku. Počítačová tomografie teploty	38
9.5 Identifikace koeficientu prostupu tepla závisajícího na poloze	42
10 Výsledky a diskuze	44
11 Závěr	46
12 Seznam použitých symbolů	49

1. Úvod

Cílem práce je zpracovat problém identifikace parametrů v jednotlivých systémech obsahujících 2 vstupy a 2 výstupy. Obecné schéma takové soustavy je znázorněno na obrázku 1.1.



Obr. 1.1: Základní uspořádání systému

Příkladem může být výměník tepla nebo chemický reaktor. V případě výměníku tepla systém charakterizujeme vstupním průtokem vzorku Q_{SI} , vstupní teplotou vzorku T_{SI} , výstupním průtokem vzorku Q_{SO} , výstupní teplotou T_{SO} . Chladicí okruh charakterizujeme vstupním průtokem chladicí kapaliny Q_{DI} a její teplotou T_{DI} a výstupním tokem chladicí kapaliny Q_{DO} a její teplotou T_{DO} . Indexy jsou vzaty z počátečních písmen anglických popisů S- Sample, I-Input, O-Output, D-Dialysate. Model popisuje mimo jiné i klíčovou část umělé ledviny, dialyzátor. Dalším příkladem modelu je průtokový chemický reaktor či dialyzační jednotka u pacientů léčených hemodialýzou. Tento systém popisujeme vstupním a výstupním průtokem krve Q_{SI} , Q_{SO} , vstupní a výstupní koncentrací krve C_{SI1} , C_{SO1} , vstupním a výstupním průtokem dialyzátu Q_{DI} , Q_{DO} , vstupní a výstupní koncentrací dialyzátu C_{DI1} a C_{DO1} . Dalším příkladem modelu je chladicí okruh jaderného reaktoru, ohřívačky, chladiče, kondenzátory, vakuové aplikace, odparky, výparníky, klimatizační technika. Všechny příklady můžeme s jistou mírou aproximace vyjádřit jediným matematickým modelem. V případě tekutin je situace výrazně komplikovanější, neboť obecně neplatí předpoklad nestlačitelnosti a jejich hustota závisí na tlaku a teplotě. Z tohoto důvodu se budeme zabývat pouze kapalinami. Naším cílem bude stanovit některé z parametrů v okruhu vzorku, který je často nepřístupný přímému měření, na základě měření v druhém okruhu, který je přístupný pro měření.

Abychom mohli stanovit dané parametry, je třeba nejdříve objasnit některé základní vlastnosti a zákony úzce spjaté s naším systémem. V druhé kapitole proto zmíníme základní matematické prostředky, které budeme používat. Ve třetí kapitole objasníme pojmy systém, model, experiment, ale také identifikovatelnost, pozorovatelnost a říditelnost. V další kapitole uvedeme fyzikální zákony, které se váží k našemu problému. V kapitole páté popíšeme rychlostní profil kapaliny a v šesté kapitole uvedeme pravidla pro přenos tepla. Účinnost výměníku budeme definovat v sedmé kapitole. V osmé kapitole se pak budeme věnovat řešenému problému a zmíníme základní typy uspořádání. Devátá kapitola obsahuje demonstraci získaných výsledků na konkrétních příkladech. Poslední desátá kapitola pak shrnuje dosažené výsledky.

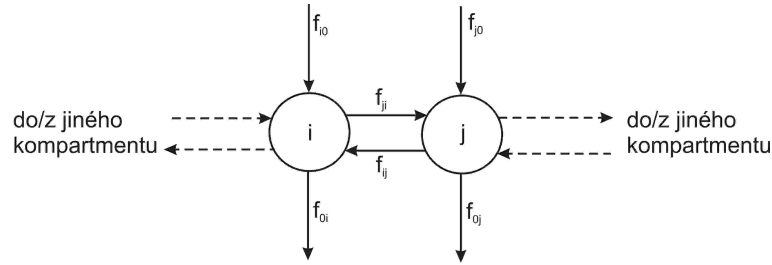
Bakalářská práce vychází z odborné stáže studentky u firmy BVT Technologies, a.s. Během této stáže byly řešeny inverzní problémy diferenciálních rovnic a jejich součástí je i tato bakalářská práce. Stáž proběhla pod vedením RNDr. Jan Krejčí, PhD. (BVT Technologies, a.s.) a Dr. Mark O'Connel (Probe Scientific, UK).

2. Použitý matematický aparát

V této práci se budeme zabývat výměníky tepla, jež si můžeme představit jako systém složený z několika kompartmentů (viz [1], [2]), ve kterých je buď chlazená kapalina anebo chladičí kapalina. Proto můžeme náš případ popsat pomocí rovnice, která popisuje systém s n kompartmenty. Nejobecnější formu této rovnice vystihuje následující vztah

$$\begin{aligned} \frac{dx_i(t)}{dt} = & f_{i0}(x_1(t), \dots, x_n(t)) + \sum_{j=1, j \neq i}^n f_{ij}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ & - \sum_{j=1, j \neq i}^n f_{ji}(x_1(t), \dots, x_n(t)) - f_{0i}(x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (2.1)$$

kde x_i popisuje charakteristickou vlastnost materiálu v kompartmentu i , v našem případě se jedná o množství tepla v jednotkovém objemu (viz [3]). Dále f_{ij} je přítok do sledovaného kompartmentu a f_{ji} vyjadřuje výtok ze sledovaného kompartmentu. f_{i0} udává tok z okolí do kompartmentu i . f_{0i} je tok ze sledovaného kompartmentu do okolí. Pokud jsou průtoky ze všech kompartmentů do okolí nulové ($f_{0i} = 0, i = 1, 2, \dots, n$), systém se nazývá uzavřený. V opačném případě je otevřený. Rovnice (2.1) je schematicky znázorněna pro 2 z n kompartmentů na obrázku 2.1.

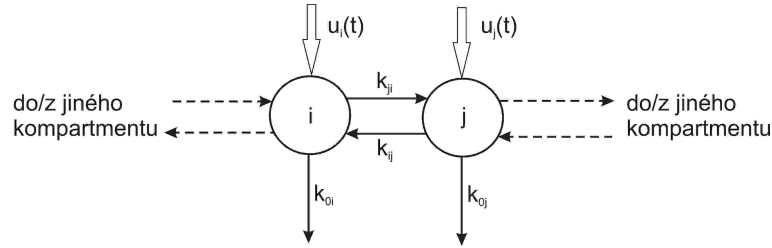


Obr. 2.1: Dva kompartmenty obecného modelu popsaného rovnicí (2.1)
(Upraveno podle Godfreye (viz [2]))

Jak vidíme z (2.1), model je popsán soustavou diferenciálních rovnic prvního řádu. V aplikacích se nejčastěji pracuje s lineárním modelem, pro který platí, že průtoky jsou přímo úměrné množství látky v kompartmentu, ze kterého vycházejí. To lze vyjádřit následující rovnicí

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1, j \neq i}^n k_{ij}x_j(t) - \sum_{j=1, j \neq i}^n k_{ji}x_i(t) - k_{0i}x_i(t) + u_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.2)$$

kde vstupní průtok f_{i0} z okolí píšeme jako $u_i(t)$, což je standardní označení v teorii řízení lineárních systémů. Rovnici (2.2) můžeme znázornit následovně:



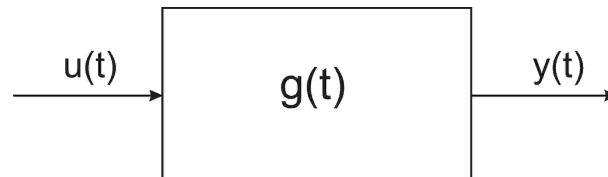
Obr. 2.2: Dva kompartmenty lineárního modelu popsaného rovnicí (2.2)
(Upraveno podle Godfreye (viz [2]))

Z uvedených příkladů je patrné, že k našemu řešení budeme používat diferenciální rovnice. Jejich problematika je blíže popsána např. v [4].

2.1. Teorie řízení

V této práci se zabýváme řešením inverzních úloh výměníku tepla, tedy chceme zjistit, jaká je teplota zkoumaného vzorku a následně ji regulovat. K tomu použijeme poznatky z teorie řízení.

Její základní schéma je znázorněno na obrázku 2.3, kde $u(t)$ je vstup, $y(t)$ je odezva systému na daný vstupní impuls a funkce $g(t)$ popisuje regulační systém.



Obr. 2.3: Schéma regulačního systému

Teorie řízení je blíže popsána např. v [2], [5].

2.2. Inverzní úloha

Inverzní úloha je široký pojem a jeho přesné vymezení jde nad rámec této práce. Pro diferenciální rovnice rozumíme inverzní úlohou úlohu, jejímž cílem je určit hodnotu některého koeficientu rovnice známého typu ze znalosti určitých funkcí řešení (viz [6]).

Inverzní úlohy řešíme mnoha různými metodami. Uvedme si jako příklad řešení pomocí Fredholmovy integrální rovnice prvního druhu, kterou v závěru práce použijeme. Fredholmova integrální rovnice prvního druhu je dána vztahem

$$g(x) = \int_a^b F(\xi, x) f(\xi) d\xi,$$

kde hledanou neznámou je $f(x)$. Dále $F(\xi, x)$ je daná funkce definovaná na uzavřeném čtverci $\langle a, b \rangle \times \langle a, b \rangle$ a $g(x)$ je daná funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$ (viz [7]).

Jinou ilustrací inverzní úlohy formulované pro evoluční rovnice je úloha nalézt funkci $f(x, y)$ na oblasti $\Omega = \{(x, y); x \in \mathbb{R}, y > 0\}$, když víme, že musí být splněny vztahy

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + u_{yy} + \Phi(t)f(x, y), & (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(x, y, 0) &= 0, & (x, y) \in \Omega, \\ u(x, 0, t) &= m(x, t), & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u_y(x, 0, t) &= n(x, t), & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \end{aligned}$$

v nichž $n(x, t)$, $m(x, t)$ a $\Phi(t)$ jsou dané známé funkce (viz [8]). Tento problém je abstrakcí problému nalezení rozložení hustoty radioaktivních materiálů v zemské kůře ($f(x, y)$) na základě sledování její teploty a toku tepla na povrchu, které jsou vytvořeny radioaktivním rozpadem. Zákon rozpadu radioaktivních látek dává pro funkci $\Phi(t)$ vyjádření $\Phi(t) = e^{-\xi t}$ a funkce $m(x, t)$, $n(x, t)$ reprezentují teplotu a tok tepla na povrchu zemské kůry, tedy veličiny, které lze alespoň v jistém stupni abstrakce považovat za známé a měřitelné (viz [6]).

3. Vlastnosti parametrů a modelu

Je nezbytné zodpovědět otázku chování systému pro dané vstupní a počáteční parametry, což následně eliminuje možné chyby v měření. Proto je jednodušší problém rozložit do několika stupňů. Nejprve sestavíme model pro daný systém. K tomu musíme znát strukturu systému. Připomeňme, že některé otázky týkající se uvedeného problému můžeme zodpovědět, aniž by model byl jednoznačný.

Daná struktura systému je určena všemi neznámými parametry, proto je nezbytné identifikovat je.

Modelování a simulace nám umožňuje pochopit základní a podstatné vlastnosti systému, a tak jej lépe popsat. Proto je nezbytné definovat základní vlastnosti parametrů.

Vstupní parametry chladicího okruhu, tj. vstupní průtok a jeho teplotu, můžeme bez zásadních omezení přesně nastavovat, tedy řídit. Výstupní parametry, tj. výstupní průtok a jeho teplota, nejsou říditelné, protože jsou ovlivněny přítomností okruhu chlazeného vzorku. Nejsou však žádná principiální omezení výstupní parametry měřit. Můžeme je tedy kvantitativně pozorovat. Cílem je určit, za jakých podmínek je vstup a výstup vzorku měřitelný. Případně za jakých podmínek je možno určit teplotní profil ve výměníku na základě řízení vstupu chladicí kapaliny a měření teploty vystupující kapaliny. To nás vede k otázce říditelnosti, identifikovatelnosti a pozorovatelnosti parametrů okruhu vzorku. Je zřejmé, že nejsou-li parametry říditelné, mohou být ještě pozorovatelné. Pojmy říditelnost, pozorovatelnost a identifikovatelnost budou přesně zavedeny později.

3.1. Rozdíl mezi systémem, modelem systému a experimentem

Je nezbytné rozlišovat pojmy systém, model systému a experiment.

Systém je soubor navzájem propojených a vzájemně závislých složek tvořící integrovaný celek (viz [9]). Modelem rozumíme zjednodušení systému, které obsahuje všechny jeho podstatné vlastnosti v daném stupni přesnosti modelu, a podstatné vlastnosti systému jsou vyjádřeny matematickými vztahy a parametry. Matematické vztahy mohou být:

- soustavy lineárních rovnic,
- soustavy algebraických rovnic,
- soustavy transcendentních rovnic,
- soustavy diferenciálních rovnic,
- soustavy parciálních diferenciálních rovnic,
- soustavy integrálních rovnic,
- soustavy diferenčních rovnic,
- soustavy funkcionálních rovnic,
- soustavy množinových vztahů,

- soustavy logických relací,
- soustavy numerických modelů realizovaných na počítači,
- soustavy algoritmů,
- soustavy statistických relací.

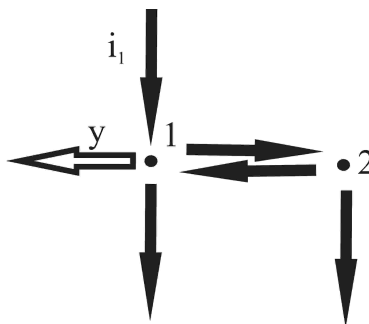
Matematický vztah může být vytvořen i kombinací výše uvedených soustav. Výpis jsme provedli, aby byla zřejmá bohatost matematických vztahů, která není často doceněna ani správně využita.

Následně na tomto systému provádíme experimenty. Experimentem nazýváme metodický postup pokusů a omylů prováděný s cílem ověřit nebo stanovit platnost hypotézy (viz [10]). Srovnáním předpovědi modelu o výsledcích s experimentem určíme, zda je model vyhovující nebo nevyhovující. Proto, abychom mohli model použít obecně, musíme identifikovat jeho parametry. To se nám obecně nemusí podařit. Tedy může nastat situace, že model vyhovuje, ale parametry nejsou identifikovatelné. Takový příklad popisuje následující nelineární soustava rovnic.

$$\begin{aligned} f\left(x_1, \frac{r_1}{r_2}, r_3\right) &= 0, \\ f\left(x_2, \frac{r_1}{r_2}, r_3\right) &= 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

kde funkce f je funkce tří proměnných, dále x_1 , x_2 jsou vstupní parametry a r_1 , r_2 , r_3 jsou neznámé. I přesto, že budeme pracovat s přesnými veličinami, čímž předejdeme vzniku chyb měření, se může stát, že některé parametry nelze pozorovat a identifikovat. Rovnice $f(x, \frac{r_1}{r_2}, r_3) = 0$, popisuje model systému, který závisí na nezávislé proměnné x . Pro dvě hodnoty nezávislé proměnné x ($x = x_1$ a $x = x_2$) dostaneme dvě rovnice pro dvě neznámé $\frac{r_1}{r_2}$ a r_3 . Z rovnic však nemůžeme stanovit ani r_1 ani r_2 , protože jsou v podílu. Při praktické realizaci měření se přidává další nejistota ovlivňující identifikovatelnost, kterou je přesnost měření a statistické vlastnosti naměřených dat.

Musíme dbát, aby model správně vystihoval systém, čímž se předejde vzniku chyb. Těch se můžeme také dopustit špatnou volbou experimentu, ze kterého se nejsme schopni o zkoumané vlastnosti nic dozvědět.



Obr. 3.1: Příklad neidentifikovatelného systému
(Upraveno podle Jacqueze (viz [1]))

Pro sestavení správného modelu systému musíme znát jeho strukturu. Na obrázku 3.1 vidíme strukturu systému, jehož vstup přivádíme v místě 1 a zde také měříme jeho výstup.

V tomto případě nejsme schopni vyhodnotit výstup systému, neboť v bodě 2 dochází ke ztrátám do okolí. Tyto ztráty nedokážeme blíže specifikovat, a tedy ani zahrnout do našeho modelu.

Z předchozích příkladů je zřejmé, že je pro nás nezbytné přesně určit strukturu systému. Proto zavádíme pojem strukturální identifikovatelnost. Chis (viz [11]) rozlišuje strukturální a praktickou identifikovatelnost, přičemž za strukturální identifikovatelnost označuje teoretickou vlastnost struktury modelu závislé pouze na systémové dynamice, pozorování a podnětech funkce. Praktická identifikovatelnost je pak úzce spjata s experimentálními daty a experimentálním šumem.

3.1.1. Identifikovatelnost parametru a modelu

Hlavním cílem je nalézt souvislosti mezi modelem a jeho identifikovatelností. Pokud známe strukturu systému, můžeme sestavit jeho model, který je určen pomocí neznámých parametrů. Abychom mohli získat požadované informace na výstupu, musíme tyto parametry nejprve identifikovat. Ty určíme pomocí experimentů. V systému obvykle nemůžeme měřit všechna uspořádání, avšak pro některé z nich můžeme určit všechny parametry, což je důležité ke zjištění, zda nějaký dílčí experiment můžeme provést na daném systému. Na druhou stranu se může stát, že i přesto, že nemůžeme pro daný experiment určit všechny parametry, můžeme díky němu zodpovědět zásadní otázky navrhovaného experimentu. Tento problém můžeme považovat za čistě matematický, a tak se vyhnout komplikacím statistického odhadu z dat obsahujících odchylky měření. I přesto, že budeme pracovat s přesnými veličinami, tedy předejdeme chybám statistického odhadu, se však může stát, že některé parametry nebudeme schopni identifikovat, jak už jsme demonstrovali příkladem soustavy nelineárních rovnic (3.1).

Podle Jacqueze (viz [1]) model nazýváme identifikovatelný, pokud můžeme měřit všechna uspořádání, neboli můžeme určit všechny jeho parametry. Allman (viz [12]) se odkazuje na definici identifikovatelnosti, ve které požaduje, aby pro libovolné dvě různé hodnoty parametrů $\theta \neq \theta'$ z parametrického prostoru Θ , byly jejich odpovídající pravděpodobnostní rozdělení P_θ a $P_{\theta'}$ odlišné. Parametrickým prostorem rozumíme vhodný podprostor \mathbb{R}^n , kde n je počet parametrů. Jinak řečeno požaduje injektivitu parametrizace modelu. Dále budeme vycházet z definice podle Jacqueze.

Identifikaci musíme vztáhnout na definici parametru. Toto není zřejmá otázka. Teplota na vstupu chladicího okruhu je identifikovatelná (měřitelná a dokonce řiditelná), to ale neznamená, že teplota na vstupu chladicího okruhu je parametr. Teplota na vstupu chlazeného okruhu může být parametr nebo hledaný výsledek. Definice parametrů ve vztahu k modelu je klíčová pro řešení identifikovatelnosti.

Parametr je jednoznačně identifikovatelný, pokud pouze jediná jeho hodnota po dosazení do modelu udává výsledky v souladu s experimentem. Takovýto parametr též označujeme globálně identifikovatelným.

Může se stát, že daný parametr je jednoznačně identifikovatelný jen na nějaké oblasti. Takový parametr nazýváme lokálně identifikovatelný. Jacquezova (viz [1]) definice lokální identifikovatelnosti je následující. Pokud konečná množina hodnot parametru je v souladu s výsledky pokusu, nazýváme parametr lokálně identifikovatelný. Identifikovatelnost můžeme definovat také následovně. Parametr nazveme lokálně identifikovatelný, pokud existuje libovolné okolí v parametrickém prostoru, ve kterém je daný parametr jednoznačně identifikovatelný (viz [12]). Vzhledem ke konečnému počtu hodnot, které jsou

v souladu s výsledky pokusu a popisem modelu, ke každé hodnotě parametru existuje okolí (v prostoru parametrů a jeho metricy) v němž neexistuje další hodnota parametru, jejímž dosažením do modelu je obdržen výsledek v souladu s experimentem.

Naopak parametr označujeme jako neidentifikovatelný, je-li nekonečná množina hodnot parametru v souladu s výsledky experimentu (viz [1]). Tedy neexistuje konečná množina hodnot parametru, která by identifikovala systém.

Model je parametricky identifikovatelný, někdy říkáme též jednoznačně identifikovatelný, pokud všechny parametry jsou jednoznačně identifikovatelné (viz [1]). Tedy pro daný model neexistuje parametr, který by byl globálně neidentifikovatelný. Identifikovatelnost modelu můžeme definovat také následovně. Model je identifikovatelný, pokud platí, že ϕ je hodnota parametru modelu, y je naměřený údaj a $F(y, \phi)$ je distribuční funkce dat. A pokud pro všechny dvojice $(\phi_0, \phi) \in \Phi$ a pro všechny $y \in S_Y$ platí: $F(y, \phi_0) = F(y, \phi)$ právě tehdy, když $\phi_0 = \phi$, kde Φ označuje soubor všech možných hodnot parametru a S_Y je množina všech možných naměřených údajů (viz [13]).

Někdy je obtížné zaručit jednoznačnou identifikovatelnost modelu, proto zavádíme slabší pojem lokální identifikovatelnosti. Existuje-li více parametrů téhož pravděpodobnostního rozdělení jako ϕ_0 , ale současně můžeme nalézt otevřené okolí ϕ_0 , které neobsahuje žádný z těchto parametrů, potom daný model nazýváme lokálně identifikovatelný (viz [13]). Termín lze také definovat podle Jacqueze (viz [1]). Pokud všechny parametry jsou identifikovatelné a nejméně jeden parametr je pouze lokálně identifikovatelný, pak model nazýváme lokálně identifikovatelný.

Model nazýváme neidentifikovatelný, pokud jedna či více hodnot parametrů je neidentifikovatelná. Jinak řečeno, pokud je model určen pomocí n parametrů a pouze m z nich, kde $m < n$, je jednoznačně identifikovatelných. Je možné vytvořit submodel popsáný m parametry, který je identifikovatelný.

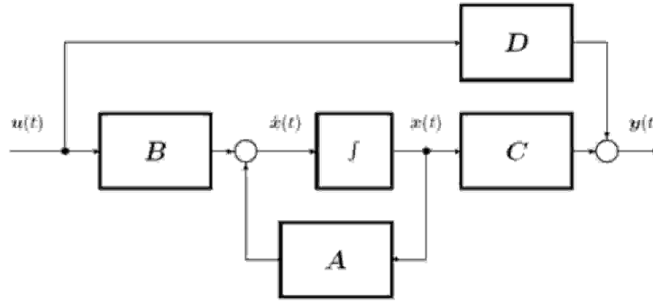
3.2. Obecná lineární teorie systémů a popis lineárního uspořádání systémů

3.2.1. Stavově proměnný popis lineárního systému

Stavy dynamického systému jsou hodnoty jistých proměnných nazývané stavové proměnné. Nechť $\mathbf{x}(t)$ je vektor stavových proměnných $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{u}(t)$ je vektor nenulových vstupních hodnot typu $s \times 1$. Dále $\mathbf{y}(t)$ je vektor výstupních hodnot typu $p \times 1$. Pak hlavní lineární systém popisujeme pomocí dynamických rovnic

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t),\end{aligned}\tag{3.2}$$

kde $\mathbf{A}(t)$ je typu $n \times n$, $\mathbf{B}(t)$ typu $n \times s$, $\mathbf{C}(t)$ typu $p \times n$ a $\mathbf{D}(t)$ typu $p \times s$. Základní schéma lineárního systému je znázorněno na obrázku 3.2.



Obr. 3.2: Struktura lineárního systému

3.2.2. Řiditelnost

V praxi je často nutné výstupy systému nejen měřit, ale i řídit (například pokud se chladí kapalina na předem stanovenou teplotu). Řiditelnost systému je rovněž nezbytná k jeho stabilizaci.

Základy teorie říditelnosti a pozorovatelnosti položili Kalman (viz [10]) a Chen (viz [14]). Jacquez (viz [1]) uvádí definici říditelnosti podle Kalmana (viz [10]):

Lineární dynamický systém (3.2) je plně říditelný v t_0 , pokud není algebraicky ekvivalentní¹ se systémem určeným pomocí rovnic typu

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}_1(t)}{dt} &= \mathbf{A}_{11}(t)\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_{12}(t)\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{B}_1(t)\mathbf{u}(t), \\ \frac{d\mathbf{x}_2(t)}{dt} &= \mathbf{A}_{22}(t)\mathbf{x}_2(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_1(t)\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{C}_2(t)\mathbf{x}_2(t),\end{aligned}$$

kde $\mathbf{x}_1 = (x_1, \dots, x_k)^T$ je stavový vektor typu $k \times 1$, $\mathbf{x}_2 = (x_{k+1}, \dots, x_n)^T$ je stavový vektor typu $(n - k) \times 1$. Dále matice \mathbf{A}_{11} je typu $k \times k$, matice \mathbf{A}_{12} je typu $k \times (n - k)$, \mathbf{A}_{22} je typu $(n - k) \times (n - k)$, \mathbf{B}_1 je typu $k \times s$, \mathbf{C}_1 je typu $p \times k$, \mathbf{C}_2 je typu $p \times (n - k)$, $\mathbf{y}(t)$ je typu $p \times 1$ a $\mathbf{u}(t)$ je typu $s \times 1$.

Jinak vyjádřeno, je nemožné nalézt řídicí systém, ve kterém stavové proměnné mohou být separovány do dvou skupin \mathbf{x}_1 a \mathbf{x}_2 , takových že \mathbf{x}_2 není ovlivněn pomocí \mathbf{x}_1 nebo vstupními parametry systému. Neboli existuje podsystém systému, který není ovlivňován zbylou částí systému ani vstupními informacemi. Takovýto systém není plně říditelný.

Jiný přístup vystihuje Chen (viz [14]) ve své definici říditelnosti. Systém je plně říditelný, pokud vzhledem k počátečnímu stavu $\mathbf{x}(t_0)$ může být uveden do předepsaného stavu $\mathbf{x}(t_1)$ v konečném čase $t_1 - t_0$, a to při jakémkoliv počátečním stavu.

3.2.3. Pozorovatelnost

Pozorovatelnost, někdy také označována jako měřitelnost, určuje, zda je možné z hodnot naměřených na výstupu provést nějaké závěry o systému či nikoliv. Tedy zda jsme

¹Řekneme, že dva algebraické výrazy jsou ekvivalentní, pokud hodnoty získané symbolickou substitucí proměnných jsou stejné jako hodnoty původního výrazu (viz [15]).

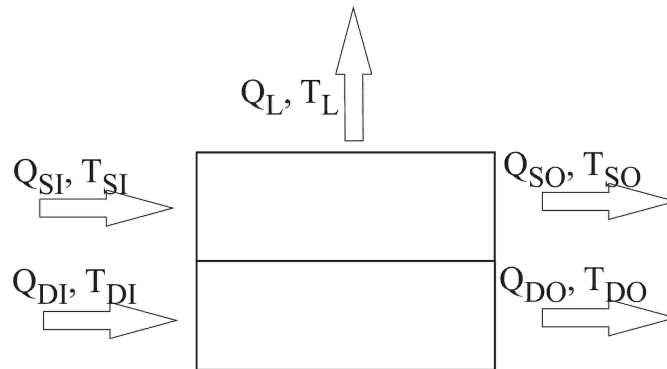
schopni na základě výstupu určit chování vstupního systému. Jednu z definic pozorovatelnosti formuloval Jacquez (viz [1]), který vychází z Kalmanovy (viz [10]) definice.

Lineární dynamický systém je plně pozorovatelný v t_0 , pokud není algebraicky ekvivalentní se systémem určeným pomocí rovnic typu

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}_1(t)}{dt} &= \mathbf{A}_{11}(t)\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{B}_1(t)\mathbf{u}(t), \\ \frac{d\mathbf{x}_2(t)}{dt} &= \mathbf{A}_{21}(t)\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_{22}(t)\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{B}_2(t)\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_1(t)\mathbf{x}_1(t),\end{aligned}$$

kde $\mathbf{B}_2(t)$ je typu $(n - k) \times s$, $\mathbf{A}_{21}(t)$ je typu $(n - k) \times k$ a ostatní jsou stejného typu jako v případě říditelnosti. Neboli systém je plně pozorovatelný, pokud je nemožné rozdělit \mathbf{x} do dvou skupin takových, že jedna nemá vliv na druhou skupinu nebo výstupy. Systém je tedy plně pozorovatelný, pokud se všechny způsoby řízení mohou projevit na výstupu.

Pokud je systém uzavřený, nedochází k úniku tepla či kapaliny a můžeme řešit otázku identifikovatelnosti. Pokud však systém není uzavřený a navíc obsahuje nesespecifické interakce s okolím, není identifikovatelný a úloha ztrácí smysl. Takovéto uspořádání vystihuje obrázek 3.3.



Obr. 3.3: Znázornění ztrát do okolí

4. Apriorní vnitřní vazby

K systému se váží některé fyzikální zákony, ze kterých jeho model vychází.

4.1. Rovnice kontinuity

V systému vycházíme z předpokladu, že kapalina je nestlačitelná, a tak se v systému nemůže nijak hromadit. Tedy součet toků na vstupu se musí rovnat součtu toků na výstupu. Musí tedy platit rovnice kontinuity

$$Q_{SI} + Q_{DI} = Q_{SO} + Q_{DO},$$

(význam užitých symbolů je uveden na straně 8, případně v seznamu použitých symbolů).

4.2. Zákon zachování energie

Za předpokladu tepelně izolovaného systému se tepelný tok na vstupu musí rovnat tepelnému toku na výstupu. To nám umožňuje formulovat zákon zachování energie

$$Q_{SI}T_{SI}c_S + Q_{DI}T_{DI}c_D = Q_{SO}T_{SO}c_S + Q_{DO}T_{DO}c_D,$$

kde c_S je měrná tepelná kapacita vzorku a c_D je měrná tepelná kapacita chladiva.

5. Rychlostní profil

Vzhledem k povaze našeho systému je nezbytné formulovat základní hydrodynamické vlastnosti, které se k němu váží. Ty pak významně ovlivňují proces výměny tepla a tedy i účinnost výměníku.

Mezi fyzikální vlastnosti kapalin, které ovlivňují její hydrodynamiku, patří hustota a viskozita. Hustota ρ je hmotnost vztažená na objem kapaliny, neboli $\rho = \frac{m}{V}$. Její jednotkou je $\frac{kg}{m^3}$. Další vlastností je viskozita. Rozlišujeme dva druhy viskozit: kinematickou a dynamickou. Dynamická viskozita η udává vztah mezi třecím napětím τ a změnou rychlosti v v závislosti na poloze, tedy

$$\tau = \eta \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Kinematická viskozita ν se pak zavádí pomocí dynamické viskozity η a hustoty kapaliny ρ jako

$$\nu = \frac{\eta}{\rho},$$

její jednotka je $\frac{m^2}{s}$. Viskozita kapaliny klesá s rostoucí teplotou.

Výsledný rychlostní profil je významně ovlivňován typem proudění kapaliny. Abychom mohli popsat proudění kapaliny, zavádíme pojmy trajektorie částice a proudnice. Trajektorií částice rozumíme dráhu, po které se pohybuje částice tekutiny. Proudnice je pak pomyslná čára, jejíž tečny v libovolném bodě jsou vždy ve směru rychlosti. Proudění kapaliny může být buď laminární, nebo turbulentní.

Při laminárním proudění se všechny částice kapaliny pohybují ve vrstvách, tedy částice se nepohybují napříč průřezem. Třecí, někdy také nazývané jako smykové, napětí τ dosahuje své maximální hodnoty na povrchu stěny a s rostoucí vzdáleností od stěny jeho hodnota klesá.

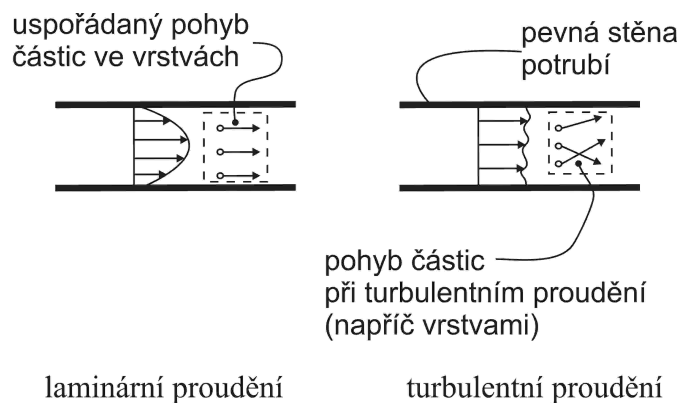
Naopak v případě turbulentního proudění se částice pohybují napříč vrstvami. Celý pohyb je ovlivňován tlakem, hustotou, teplotou a rychlostí proudění. Tyto veličiny se při turbulentním proudění zcela náhodně mění v závislosti na čase.

Hranici mezi turbulentním a laminárním prouděním charakterizuje tzv. kritická hodnota Reynoldsova čísla Re , které závisí na tvaru potrubí či stěny, po které kapalina proudí. Reynoldsovo číslo pro jednorozměrné proudění v potrubí je dáno vztahem

$$Re = \frac{v_s \phi}{\nu}$$

a jeho kritická hodnota je $Re_{krit} = 2320$. v_s určuje střední rychlost v potrubí, ϕ je jeho průměr a ν je kinematická viskozita. Pro $Re \leq Re_{krit}$ je proudění laminární a v opačném případě, tedy $Re > Re_{krit}$, má proudění turbulentní charakter.

Typ proudění významně ovlivňuje rychlostní profil. Tento vliv jsme schematicky znázornili na obrázku 5.1.



Obr. 5.1: Rychlostní profil v potrubí v závislosti na typu proudění

Proudění je také přímo ovlivněno povrchem stěny. Tuto závislost vyjadřujeme pomocí tzv. třecího součinitele λ . Ten závisí na typu proudění, které můžeme určit pomocí Reynoldsova čísla. Tedy λ je pro laminární proudění dáno vztahem

$$\lambda = \frac{A}{Re},$$

kde A je funkcí tvaru průřezu. Pro turbulentní proudění λ úzce souvisí s drsností povrchu stěny. Proto pro hladké potrubí definujeme třecího součinitele λ jako

$$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}}$$

pro $Re_{krit} \leq Re \leq 8 \cdot 10^4$. (viz [16])

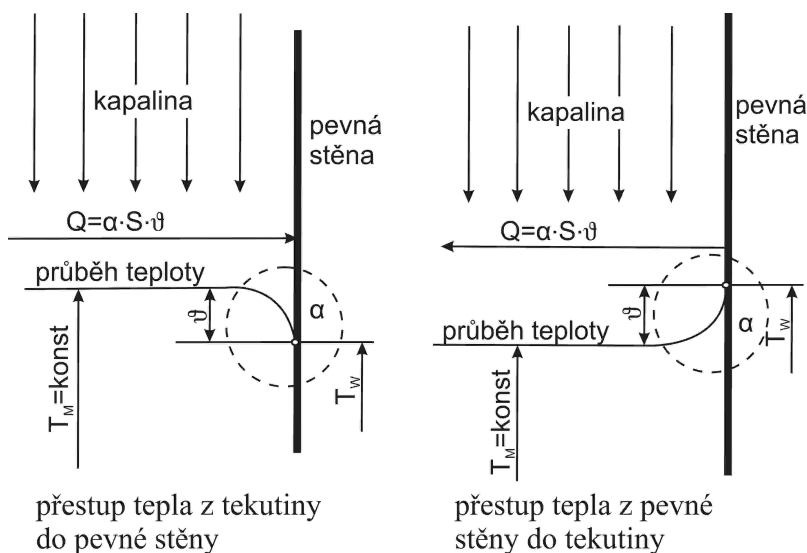
6. Přenos tepla

Přenos tepla může probíhat třemi způsoby: vedením, prouděním a zářením. Přenos tepla vedením (kondukcí) je založen na přímém kontaktu dvou těles o různých teplotách, kdy těleso o vyšší teplotě předává teplo chladnějšímu tělesu. Proudění (konvekce) se vyskytuje u tekutin, kdy je rozdíl teplot v celém objemu vyrovnáván prouděním tekutiny. A nakonec může být teplo přenášeno také zářením (radiací). Typickým příkladem radiace je přenos tepla ze Slunce. Ve vesmíru je vakuum, tedy zde nejsou žádné částice, které by mohly přenášet teplo konvekcí a zároveň, zde není žádný přímý kontakt mezi Sluncem a Zemí, neboli nemůže probíhat kondukcí, což znamená, že bez radiace by nemohl být možný život na Zemi. Příkladem konvekce může být ohřev vody v rybníku, kde se pomocí neustálého proudění kapaliny vyrovnává teplota v celém objemu. S kondukcí se setkáváme, např. položíme-li ruku na rozpálenou plotnu, kdy plotna o vyšší teplotě předává teplo naší chladnější ruce. Celá výměna tepla trvá až do okamžiku přerušení kontaktu, tedy okamžiku ucuknutí. Na tomto příkladu je také zjevné, že čím větší je tepelný rozdíl ruky a plotny, tím více tepla je předáno, neboli tím více se spálíme. Z čehož plyne přímá závislost přenosu tepla na rozdílu teplot těles.

6.1. Sdílení tepla prouděním

V našem případě se budeme zabývat konvekcí i kondukcí, neboť v proudících kapalinách dochází při přenosu tepla k oběma dějům. Který z mechanismů v systému převládá, závisí na fyzikálních vlastnostech kapaliny a na typu proudění. Proto musíme brát v úvahu veškeré hydrodynamické vlastnosti systému.

Proudí-li kapalina kolem pevné stěny, je přenos tepla výrazně ovlivňován hydrodynamickými ději. Jak vyplývá z rychlostního profilu, částice kapaliny proudící těsně nad povrchem pevné stěny, mají rychlost blízkou nule, tedy dochází k jejich ulpívání, a tak vytvářejí rychlostní mezní vrstvu. Množství sdíleného tepla významně ovlivňuje také typ proudění, který může být turbulentní či laminární. Bude-li proudit v okolí pevné stěny velké množství kapaliny, bude docházet ke vzniku turbulentního proudění a to bude mít za následek vznik jiného typu teplotní mezní vrstvy než při laminárním prouděním. Teplotní mezní vrstva je tenká vrstva, která se nachází v bezprostřední blízkosti povrchu stěny a ve které dochází k velkým změnám teploty. Ty jsou způsobeny přestupem tepla z pevné stěny do kapaliny či obráceně. Průběh teploty v blízkosti stěny, tedy podstata teplotní mezní vrstvy, je znázorněn na obrázku 6.1.



Obr. 6.1: Přestup tepla v blízkosti pevné stěny
(Upraveno podle Kalčíka a Sýkory (viz [17]))

Přestup tepla můžeme popsat pomocí Newtonova ochlazovacího zákona

$$\begin{aligned}\tilde{Q} &= \alpha S(T_M - T_W) \quad \dots \text{ochlazování,} \\ \tilde{Q} &= \alpha S(T_W - T_M) \quad \dots \text{ohřívání.}\end{aligned}\tag{6.1}$$

kde \tilde{Q}^1 značí tepelný tok a jeho jednotkou je W , α je součinitel přestupu tepla, S je velikost kontaktní plochy, T_W je teplota stěny a T_M značí střední teplotu kapaliny. Indexy jsou převzaty z počátečních písmen anglických názvů W - wall, M - mean. Součinitel přestupu tepla udává, kolik tepla projde stěnou o velikosti $1m^2$, pokud je teplotní spád $1K$, tedy $\Delta T = |T_M - T_W| = 1K$. Ze vztahu (6.1) plyne také jeho jednotka $[\alpha] = \frac{W}{m^2 \cdot K}$. Součinitel závisí na fyzikálních vlastnostech kapaliny, na rychlosti proudění kapaliny a tvaru povrchu stěny. Proto se jeho hodnota určuje experimentálně v závislosti na různých činitelích. V praxi se ukázalo, že součinitel přestupu tepla závisí na velkém počtu proměnných faktorů, které ovlivňují množství sdíleného tepla. Tedy $\alpha = f(v, T_W, T_M, \lambda, c, \rho, \eta, \Phi, w, h, l)$, kde w, h, l značí rozměry tělesa, Φ charakterizuje tvar tělesa, v je rychlost kapaliny, λ je tepelná vodivost, jejíž jednotka je $\frac{W}{m \cdot K}$ a vyjadřuje ochotu materiálu vést teplo, c je měrné teplo s jednotkou $\frac{J}{kg \cdot K}$, ρ je hustota kapaliny a η je její dynamická viskozita s jednotkou $\frac{N \cdot s}{m^2}$.

Kapalina svým prouděním vytváří na stěně mezní vrstvu, ve které se její rychlost blíží k nule. Tedy můžeme předpokládat, že se v ní teplo sdílí pouze vedením. To vystihuje tzv. Fourierův zákon:

$$\tilde{q} = -\lambda \text{grad}(T),$$

kde \tilde{q} udává měrný tepelný tok. Mínus na pravé straně rovnice vystihuje, že tepelný tok jde vždy proti gradientu teploty, tedy z místa o vyšší tepelné energii do místa o nižší tepelné

¹Z klasické termodynamiky je symbol Q používán pro označení tepla či tepelného toku. Současné jsme v předchozích kapitolách jako Q označili tok kapaliny, což je standardní označení v hydrodynamice. Proto budeme tepelný tok značit jako \tilde{Q} . Z tohoto důvodu je třeba v několika následujících stránkách dbát na rozdíl mezi Q a \tilde{Q} .

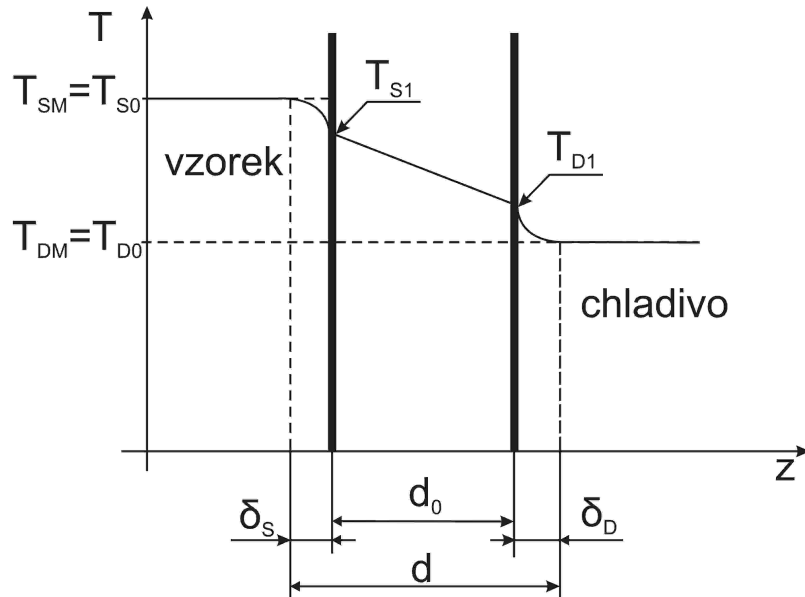
energii. Nyní můžeme za předpokladu Fourierova zákona vyjádřit rovnici pro měrný tepelný tok našeho systému.

$$\tilde{q} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right), \quad (6.2)$$

kde n charakterizuje směr normály k pevné stěně a $-\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)$ určuje teplotní spád. Budeme-li předpokládat, že mezní vrstva má konečnou tloušťku δ a teplotní rozdíl je $(T_W - T_M)$, můžeme (6.2) přeformulovat jako

$$\tilde{q} = \alpha(T_W - T_M) = \frac{\lambda}{\delta}(T_W - T_M).$$

Předpokládejme, že teplota vzorku T_S je vyšší než teplota chladiva T_D . Součinitel prostupu tepla u , který pokrývá celou oblast jevů spojenou s přenosem tepla z oblasti vzorku do oblasti chladicí kapaliny, je charakteristický parametr výměníku. Obecně je velmi obtížné jej určit. Jeho význam je zřejmý z obrázku 6.2.



Obr. 6.2: Teplotní profil v aktivní části výměníku tepla

Teplotu v oblasti vzorku, která není ovlivněna přítomností kontaktní plochy, označujeme T_{SM} . Kontaktní plocha ovlivňuje teplotu vzorku tak, že v jeho bezprostřední blízkosti vzniká tzv. mezní vrstva tloušťky δ_S , ve které dochází k poklesu teploty až na teplotu T_{S1} . Taktéž je z druhé strany kontaktní plochy ovlivňována teplota chladiva. V místě, kde už není jeho teplota ovlivňována, má hodnotu T_{DM} a přímo na kontaktní ploše má teplotu T_{D1} . Za podmínky ustáleného stavu, neboli $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, je pokles teploty uvnitř kontaktní plochy definován pomocí teplotní vodivosti materiálu, ze kterého je zhotovena. Teplotní tok uvnitř je pak charakterizován jako

$$\tilde{q} = -\lambda \frac{T_{D1} - T_{S1}}{d_0},$$

kde d_0 je tloušťka kontaktní plochy. Látka o teplotě T_{SM} vstupuje do mezní vrstvy o tloušťce δ_S . Tato změna je způsobena převážně hydrodynamicky, následkem proudění.

Šířka vrstvy je v rozmezí $1 - 100\mu m$ a závisí na typu proudění, čímž myslíme buď laminární, nebo turbulentní, dále na viskozitě kapaliny a často také na specifických hydrodynamických vlastnostech. Teplu musí nejprve z mezní vrstvy přejít do stěny výměníku, jíž následně prostupuje podle Fourierova zákona $\tilde{q} = -\lambda grad(T)$. A pak na rozhraní stěny a chladiva přechází teplo ze stěny do mezní vrstvy chladiva podle jeho součinitele přestupu tepla a z ní dále do celého objemu, kde je jeho teplota T_{DM} . Tedy celkový tepelný tok můžeme formulovat jako

$$\tilde{q} = \frac{\Delta T}{R}, \quad (6.3)$$

kde R představuje celkový tepelný odpor a $\Delta T = |T_{SM} - T_{DM}|$ je teplotní spád. Ten vyjádříme jako

$$R = \frac{1}{\alpha_S} + \frac{\lambda_W}{d_0} + \frac{1}{\alpha_D},$$

kde α_S je součinitel přestupu tepla vzorku, α_D je součinitel přestupu chladiva, λ_W je tepelná vodivost stěny a d_0 je její šířka. Po dosazení do (6.3) dostáváme

$$\tilde{q} = \frac{T_{SM} - T_{DM}}{\frac{1}{\alpha_S} + \frac{\lambda_W}{d_0} + \frac{1}{\alpha_D}}.$$

Nyní nahradíme celkový odpor za celkový součinitel prostupu tepla výměníku

$$u = \frac{1}{R},$$

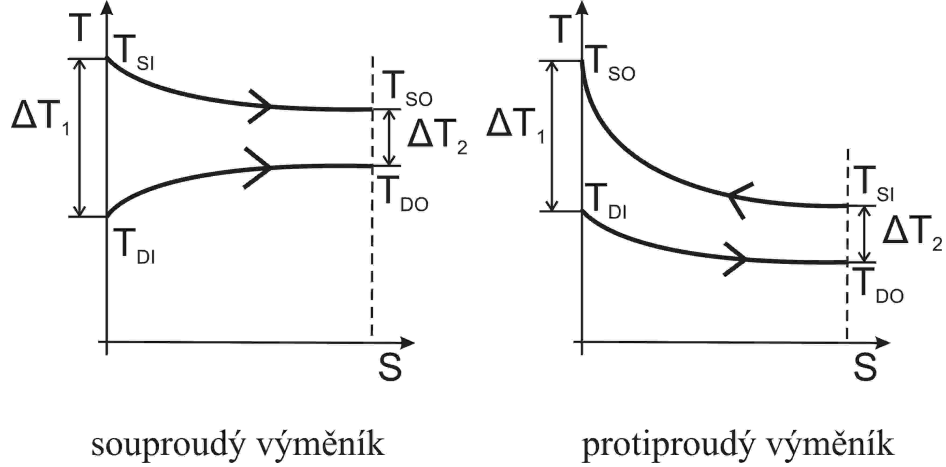
jehož jednotka je $\frac{W}{m^2K}$. Po dosazení do (6.3) získáváme

$$\tilde{q} = u\Delta T_S,$$

kde ΔT_S je střední teplotní spád výměníku, který se mění podél jeho plochy a u je součinitel prostupu tepla. Nyní můžeme vyjádřit závislost součinitele prostupu tepla jako

$$u = \frac{\tilde{q}}{\Delta T_S}.$$

Nyní uvažujme dva případy, které mohou nastat, tzv. souproutý (paralelní) a protiproutý (antiparalelní) výměník tepla. Na následujícím obrázku můžeme vidět průběhy teplot vzorku i chladiva. Opět předpokládáme, že teplota vzorku je větší než teplota chladiva.



Obr. 6.3: Teplotní profil souproudého a protiproudého výměníku tepla

Změnu tepelného toku $d\tilde{Q}_S$ uvolněného z teplejší tekutiny, dle našeho předpokladu ze vzorku, můžeme vyjádřit jako

$$d\tilde{Q}_S = \tilde{m}_S c_S dT_S,$$

kde dT_S je změna teploty vzorku a \tilde{m}_S je hmotnostní tok vzorku. Podobně změna tepelného toku dodaného chladnější tekutině je

$$d\tilde{Q}_D = \tilde{m}_D c_D dT_D,$$

kde dT_D je změna teploty chladiva a \tilde{m}_D je hmotnostní tok chladiva. Pokud $dT_D < 0$, jedná se o protiproudé uspořádání, a je-li $dT_D > 0$, mluvíme o souproudém výměníku.

Jelikož v ustáleném stavu platí, že teplo odevzdané teplejší látkou se musí rovnat teplu, které chladnější látka přijme. Tedy můžeme formulovat

$$d\tilde{Q} = -d\tilde{Q}_S = \pm d\tilde{Q}_D.$$

Po dosazení a úpravě získáváme

$$d\tilde{Q} = -\tilde{m}_S c_S dT_S = \pm \tilde{m}_D c_D dT_D. \quad (6.4)$$

Pro změnu rozdílu teplot platí

$$d(\Delta T) = d(T_S - T_D) = dT_S - dT_D, \quad (6.5)$$

kde ΔT byl zaveden výše jako rozdíl teploty chlazené T_S a chladicí kapaliny T_D . Tento rozdíl je spojitá funkce závislá na prostorové souřadnici, a proto má smysl její derivace. Nyní do (6.5) dosadíme za dT_S a dT_D z (6.4), tj.

$$d(\Delta T) = -\frac{d\tilde{Q}}{\tilde{m}_S c_S} \mp \frac{d\tilde{Q}}{\tilde{m}_D c_D} = d\tilde{Q} \left(-\frac{1}{\tilde{m}_S c_S} \mp \frac{1}{\tilde{m}_D c_D} \right).$$

Tepelný tok prostupem tepla je dán vztahem

$$\tilde{Q} = u \Delta T dS.$$

Změnu rozdílu teplot pak můžeme vyjádřit jako

$$d(\Delta T) = u\Delta T dS \left(-\frac{1}{\tilde{m}_{SCS}} \mp \frac{1}{\tilde{m}_{DCD}} \right).$$

Tuto diferenciální rovnici (uvedenou v tzv. diferenciálním tvaru) vyřešíme a obdržíme řešení

$$\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = uS \left(-\frac{1}{\tilde{m}_{SCS}} \mp \frac{1}{\tilde{m}_{DCD}} \right) = uS \left(\frac{T_{SM} - T_{S0}}{\tilde{Q}} - \frac{T_{DM} - T_{D0}}{\tilde{Q}} \right).$$

Pro tepelný tok platí

$$\tilde{Q} = uS\Delta T_{TG},$$

kde ΔT_{TG} je střední logaritmický teplotní spád a je dán vztahem

$$\Delta T_{TG} = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}}.$$

Hodnoty ΔT_1 a ΔT_2 pro souproudý a protiproudý výměník plynou z obrázku 6.3. (viz [18])

7. Účinnost výměníku tepla

Účinnost se používá v mnoha oblastech, zejména v inženýrství. Účinnost udává srovnání skutečné a teoretické hodnoty výkonu, což nám umožňuje vyhodnotit efektivnost zařízení. Teoretickou hodnotu získáme výpočtem z modelu, který zachovává veškeré fyzikální zákony.

Pro tepelný výměník zavádíme účinnost¹ jako

$$E = \frac{\tilde{q}}{\tilde{q}_{opt}} = \frac{\tilde{q}}{uS(\bar{T}_S - \bar{T}_D)}, \quad (7.1)$$

kde S je velikost kontaktní plochy s jednotkou m^2 a u je součinitel prostupu tepla (viz [19]). \bar{T}_S je průměrná teplota v chlazeném okruhu a je tedy dána vztahem

$$\bar{T}_S = \frac{T_{SI} + T_{SO}}{2}.$$

Analogicky \bar{T}_D je průměrná teplota v chladicím okruhu

$$\bar{T}_D = \frac{T_{DI} + T_{DO}}{2}.$$

Ze vztahu (7.1) je patrné, že účinnost závisí na materiálu, ze kterého je zhotovena kontaktní plocha, a na vlastnostech proudících kapalin v obou okruzích. Také závisí na velikosti kontaktní plochy a její šířce.

Ze vztahu (7.1) je zřejmé, že účinnost je nezáporné číslo. Současně však z druhého zákona termodynamiky, který lze slovně formulovat také tak, že nelze sestrojít perpetuum mobile druhého druhu (za perpetuum mobile druhého druhu považujeme stroj, který přeměňuje teplo na jiný druh energie, přičemž neporušuje zákon zachování energie), vyplývá, že účinnost nemůže být $E \geq 1$. Lze tedy konstatovat, že účinnost nabývá hodnot z intervalu $(0, 1)$.

¹Účinnost se obvykle označuje jako η , ale tento symbol jsme již použili pro dynamickou viskozitu. Proto pro účinnost použijeme E z anglického slova effectivity.

8. Základní typy uspořádání

V předchozích kapitolách jsme shrnuli základní teoretické předpoklady, které se váží k výměně tepla. Nyní budeme aplikovat tyto poznatky na konkrétní případ.

Nejjednodušší model výměníku tepla se skládá ze dvou částí. První je kompartment, ve kterém se nachází chladicí médium DC (dialysate compartment¹). Teplota chladicího média je známá a říditelná. Také jeho rychlostní profil je známý. Jeho výstupní teplota je měřitelná (viz [1]). Druhou částí je pak kompartment se vzorkem, který je centrem daného měření, SC (sample compartment). Jeho vlastnosti, jako je teplota nebo hydrodynamika chlazené kapaliny, nejsou známy. A naším cílem je tyto parametry určit.

Pokud je dán přesný popis DC a SC, čímž myslíme vstupní i okrajové podmínky, tvar rychlostního profilu proudící kapaliny, specifické teplo a tepelná vodivost, můžeme vyřešit přímý problém, který je vhodně definován pomocí soustavy parabolických parciálních diferenciálních rovnic.

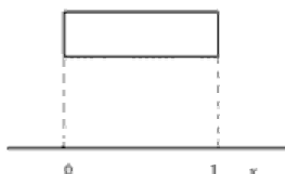
Avšak cíl řešení problému termodynamiky se sestává z analýzy chladicího média na výstupu. Tato analýza nám spolu s některými nezbytnými podmínkami umožňuje charakterizovat teplotu vzorku. Toto je typickým inverzním problémem parciálních diferenciálních rovnic. Ten spočívá v tom, že pro danou rovnici je známá jen část počátečních a okrajových podmínek a cílem je z nich určit zbytek podmínek pomocí dat naměřených na jednom určeném místě.

Řešení inverzního problému je mnohem složitější než řešení přímého problému. Proto budou demonstrovány tři příklady s různou složitostí.

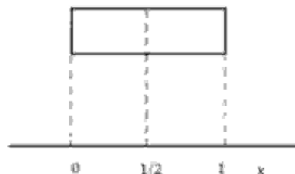
První příklad se zabývá tyčí, která je tepelně izolovaná, viz obrázek 8.1. Pokud je dána rovnice, která řídí proces, a vstupní i okrajové podmínky, můžeme určit vývoj teplotního pole. Avšak může nastat situace, že levá strana nebude dostupná pro měření. To znamená, že není pozorovatelná, nebo zde nejsme schopni nastavit okrajové podmínky, tedy není říditelná. Následně vyvstává otázka, zda lze z měření teploty v jeho středu a na jeho pravé straně určit teplotu levého konce. Jestliže není žádná informace o levé straně tyče, jako např. je-li tepelně izolována, udržována na konstantní teplotě, nelze úlohu vyřešit. Analogicky může být nezbytné určit počáteční rozložení teploty $T(x, 0)$ z měření $T(1, t)$ a $T(\frac{1}{2}, t)$, což je také obecně nemožné.

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}$$



Obr. 8.1: a) Přímý problém



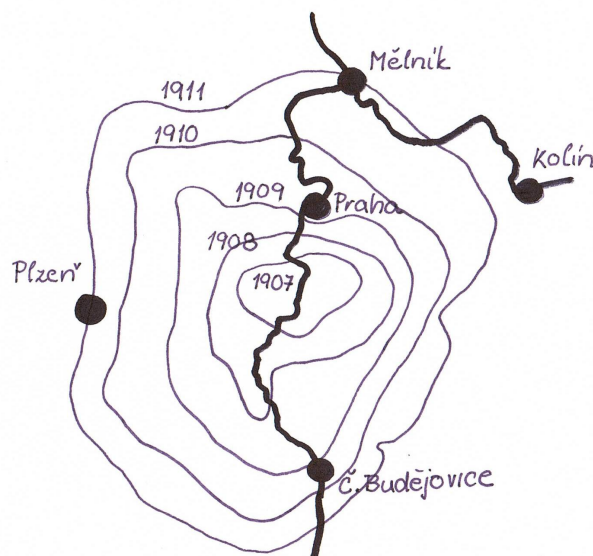
b) Inverzní problém

¹Matematický model, který popisuje výměnu tepla, je stejný s modelem popisujícím výměnu hmoty. Zde se standardně používá označení dialysate compartment a sample compartment, proto z důvodu jednoznačnosti názvosloví použijeme stejné označení.

$$\begin{array}{ll}
T(0, t) = f_0(t) & T(0, t) = ? \\
T(1, t) = f_1(t) & T\left(\frac{1}{2}, t\right) = f_{\frac{1}{2}}(t) \\
T(x, 0) = g(x) & T(1, t) = f_1(t) \\
& T(x, 0) = ?
\end{array}$$

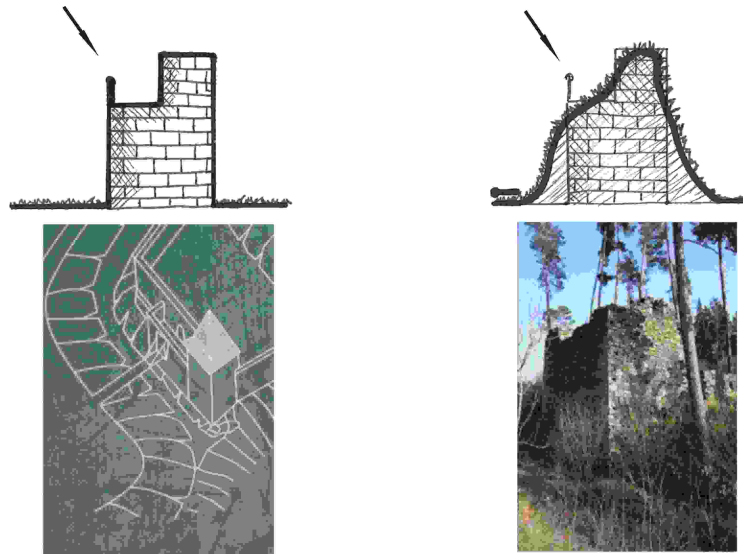
Následující příklad popisuje složitější případ, který také vede k inverzní úloze. Na obrázku 8.2 je rozšíření ondater na území České republiky v jednotlivých letech. V [20] je dokázáno, že šíření ondater je statistický difúzní proces. Inverzní úloha spočívá v určení počtu ondater, které byly zpočátku vysazeny, dále také na jakém místě a kdy se to stalo.

Řešení tohoto problému je přesně známé. Stalo se tak v Dobříši v roce 1905, kdy zdejší kníže Colloredo Mannsfeld vysadil 5 ondater (viz [20]).



Obr. 8.2: Rozšíření ondater na území ČR v jednotlivých letech (viz [21])

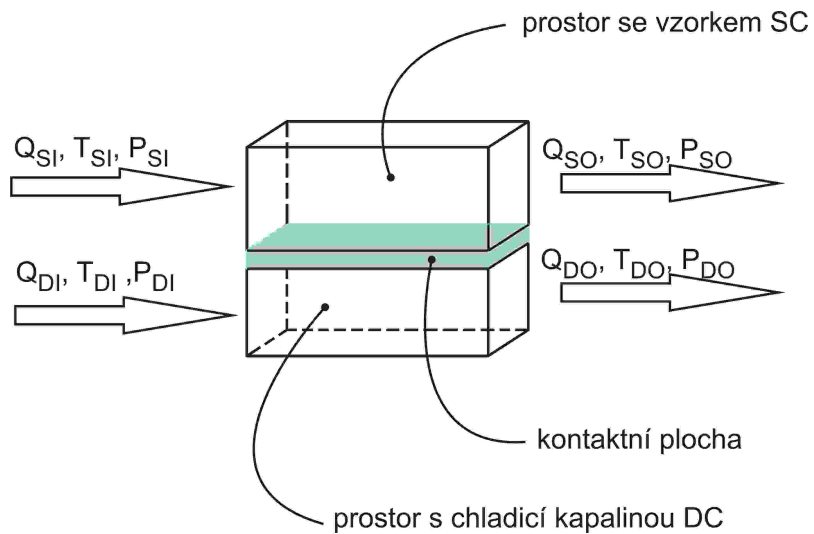
Nejsložitější úlohou je rekonstrukce některých památek, viz obrázek 8.3. Povětrnostní vlivy můžeme považovat za difúzní proces. Avšak to není jediná možná aproximace, protože došlo i k jiným (antropomorfním) procesům. V případě, že zábradlí na obrázku 8.3 upadne (ukazuje na něj šipka), je nemožné vytvořit algoritmus, který by ho byl schopen rekonstruovat, protože to nelze považovat za difúzní proces.



Obr. 8.3: Příklad rekonstrukce památek

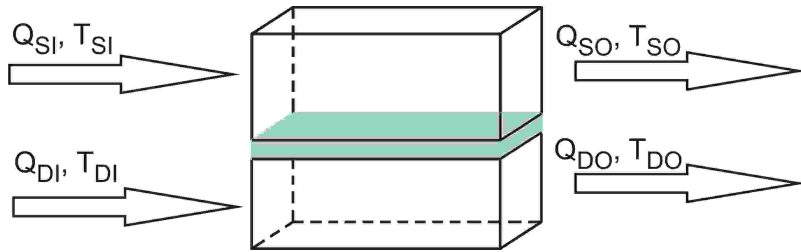
Inverzní úlohy nemusí mít jednoznačné a stálé řešení. Řešení můžeme určit pouze pokud existují některé další podmínky (někdy skryté vnitřní podmínky).

Na obrázku 8.4 je schematicky znázorněn nejjednodušší model výměníku tepla. Jeho strukturu popisujeme pomocí parametrů: průtok vzorku Q_{SI} , jeho teplota T_{SI} a tlak P_{SI} na vstupu a průtok Q_{SO} , teplota T_{SO} a tlak P_{SO} vzorku na výstupu. Analogicky používáme všechny parametry i pro chladicí medium.

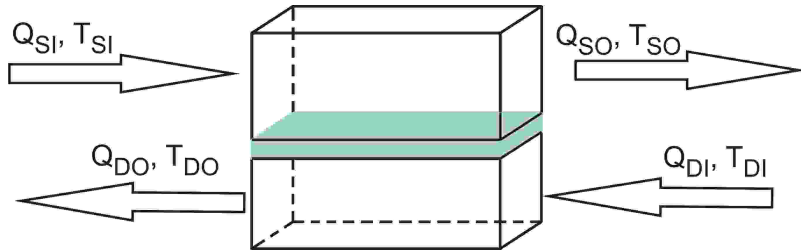


Obr. 8.4: Schematické znázornění výměníku tepla

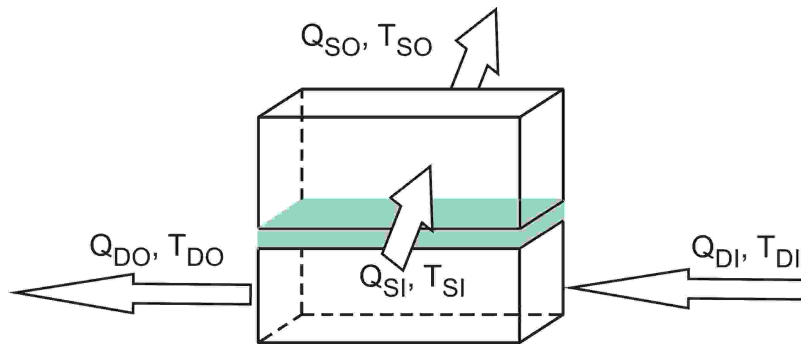
Závislost na směru toků tekutin můžeme rozdělit do tří základních uspořádání, jak můžeme vidět na obrázcích 8.5, 8.6 a 8.7.



Obr. 8.5: Paralelní uspořádání



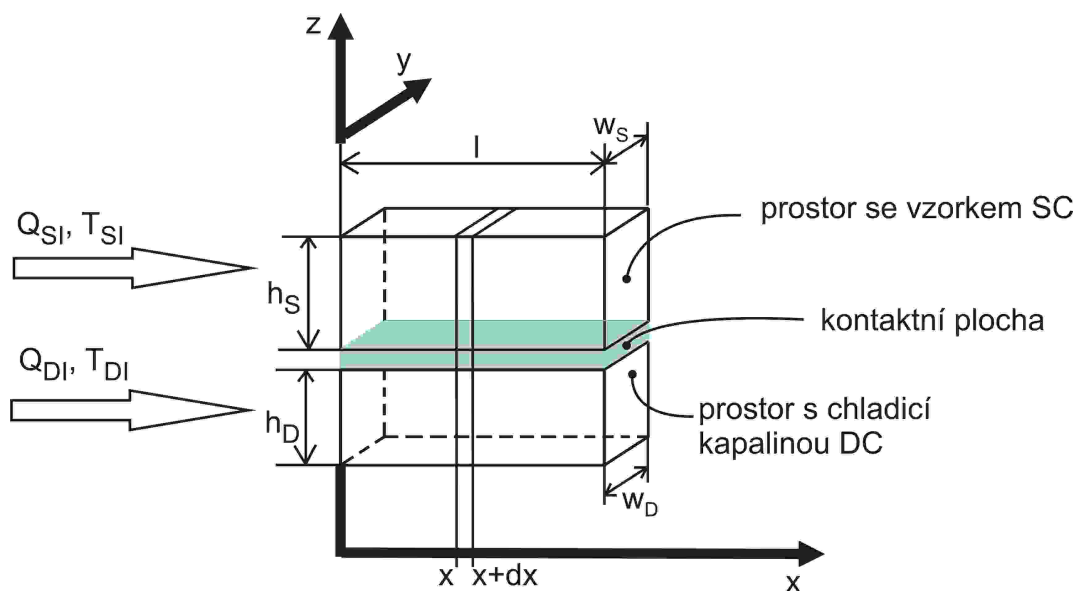
Obr. 8.6: Antiparalelní uspořádání



Obr. 8.7: Křížové uspořádání

Z obrázků 8.5, 8.6 a 8.7 je patrné, že při paralelním uspořádání tok vzorku a chladicího media svírá úhel 0° , pro antiparalelní uspořádání je stejný úhel roven 180° a u křížového uspořádání je úhel roven 90° . Je nezbytné tyto situace rozlišovat, neboť dochází k zásadním změnám vzájemného působení obou kapalin.

Pro sestavení bilanční rovnice je nezbytné definovat geometrické parametry výměníku, viz obrázek 8.8.



Obr. 8.8: Geometrické parametry výměníku tepla

Pro řešení inverzní úlohy musíme definovat některé podmínky, které se k systému vztahují.

1. Kapalina je nestlačitelná.
2. Kapalina se v systému nikde nehromadí a současně ani neztrácí. Tepelný výměník, je uzavřený systém. Tedy platí $Q_{DI} = Q_{DO} = Q_D$, $Q_{SI} = Q_{SO} = Q_S$.
3. Výměna tepla je uskutečněna prostřednictvím jeho vedení přes kontaktní plochu.
4. Systém je uzavřený z hlediska energie.
5. Oblast, ve které dochází k tepelné výměně je stejná jak u vzorku, tak i u chladicího media. $w_S = w_D = w$
6. Kapalina má ideální rychlostní profil, který je konstantní v průřezu $w \times h_S$ případně $w \times h_D$. Tlakové gradienty nevznikají.
7. Teplota je v celém objemu $dx \times w \times h_S$ případně $dx \times w \times h_D$ konstantní. Nevzniká teplotní polarizace ve směru osy z .
8. Parametry výměníku jsou homogenní a časově nezávislé.

První podmínku můžeme vyjádřit jako

$$Q_{SI} + Q_{DI} = Q_{SO} + Q_{DO}.$$

Podmínka 4 znamená, že nedochází ke ztrátám energie, což formulujeme jako

$$Q_{SI}T_{SI}c_S + Q_{DI}T_{DI}c_D = Q_{SO}T_{SO}c_S + Q_{DO}T_{DO}c_D.$$

Podmínka číslo 6 je velmi silná a je těžké ji zajistit. Jak jsme uvedli v předchozí kapitole, rychlostní profil ovlivňuje mnoho faktorů jako např. hustota, teplota, průtok a drsnost

povrchu. Například teplota se ve výměníku výrazně mění, což má také vliv na její rychlostní profil. A poslední podmínka číslo 8 vyjadřuje, že tepelná propustnost a geometrické rozměry nezávisí na poloze a času. Vstupní a výstupní teplota má konstantní profil v rovině $w \times h_S$ a $w \times h_D$ pro $x = 0$.

Za těchto podmínek můžeme formulovat bilanční rovnici pro chladicí i chlazenou kapalinu.

$$\frac{\partial T_S(x, t)}{\partial t} dxwh_S c_S \rho_S = \underbrace{Q_{SI} T_S(t, x) c_S \rho_S}_1 - \underbrace{Q_{SO} T_S(t, x + dx) c_S \rho_S}_2 - \underbrace{udxw \left(T_S(t, x+) - T_D(t, x + \varepsilon dx) \right)}_3, \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial T_D(x, t)}{\partial t} dxwh_D c_D \rho_D = \underbrace{Q_{DI} T_D(t, x) c_D \rho_D}_1 - \underbrace{Q_{DO} T_D(t, x + dx) c_D \rho_D}_2 + \underbrace{udxw \left(T_S(t, x+) - T_D(t, x + \varepsilon dx) \right)}_3 \quad (8.2)$$

Člen na levé straně (8.1) a (8.2) popisuje změnu tepla v objemu $dxwh_S = dV_S$. Tato změna je způsobena členy na pravé straně rovnice. Na pravé straně rovnice (8.1) jsme označili celkem tři členy. První člen popisuje množství tepla přijatého objemem dV_S prouděním. Druhý člen pak udává množství tepla odevzdaného objemem pomocí proudění. A nakonec třetí člen určuje množství tepla předaného chladicí kapalině plochou dxw , kde u je součinitel prostupu tepla. Obdobný popis lze aplikovat i na rovnici (8.2).

Za předpokladu podmínky číslo 2, tedy $Q_{DI} = Q_{DO} = Q_D$, $Q_{SI} = Q_{SO} = Q_S$ můžeme (8.1) a (8.2) formulovat následovně:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_S}{\partial t} &= -\frac{Q_S}{wh_S} \cdot \frac{\partial T_S}{\partial x} + \frac{u}{h_S \rho_S c_S} (T_S - T_D), \\ \frac{\partial T_D}{\partial t} &= -\frac{Q_D}{wh_D} \cdot \frac{\partial T_D}{\partial x} - \frac{u}{h_D \rho_D c_D} (T_S - T_D), \end{aligned} \quad (8.3)$$

kde $\frac{Q_S}{wh_S}$, $\frac{Q_D}{wh_D}$ jsou rychlosti kapalin blízko povrchu oblasti, kde probíhá tepelná výměna, a $T_S = T_S(x, t)$ a $T_D = T_D(x, t)$. Platí-li podmínka 6, pak je rychlost nezávislá na ose z a y . Z důvodu větší přehlednosti zavedme následující substituci

$$a_{11} = -\frac{Q_S}{wh_S}, \quad a_{12} = -\frac{u}{h_S \rho_S c_S}, \quad a_{21} = -\frac{Q_D}{wh_D}, \quad a_{22} = -\frac{u}{h_D \rho_D c_D}.$$

Tedy soustavu rovnic (8.3) můžeme psát jako

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_S}{\partial t} &= a_{11} \frac{\partial T_S}{\partial x} - a_{12} (T_S - T_D), \\ \frac{\partial T_D}{\partial t} &= a_{21} \frac{\partial T_D}{\partial x} + a_{22} (T_S - T_D). \end{aligned} \quad (8.4)$$

Nyní si z druhé rovnice soustavy 8.4 vyjádříme neznámou T_S jako

$$T_S = \frac{-\frac{\partial T_D}{\partial t} + a_{21} \frac{\partial T_D}{\partial x} + a_{22} T_D}{a_{22}}.$$

Poté dosadíme za T_S do první rovnice soustavy (8.4), čímž získáváme rovnici

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 T_D}{\partial t^2} + a_{21} \frac{\partial^2 T_D}{\partial x \partial t} + a_{22} \frac{\partial T_D}{\partial t} = & -a_{11} \frac{\partial^2 T_D}{\partial x \partial t} + a_{11} a_{21} \frac{\partial^2 T_D}{\partial x^2} + a_{11} a_{22} \frac{\partial T_D}{\partial x} \\ & - a_{12} \frac{\partial T_D}{\partial t} + a_{12} a_{21} \frac{\partial T_D}{\partial x}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Rovnici (8.5) nyní převedeme na kanonický tvar. Nejprve odečteme pravou stranu rovnice od levé

$$-a_{11} a_{21} \frac{\partial^2 T_D}{\partial x^2} + (a_{11} + a_{21}) \frac{\partial^2 T_D}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 T_D}{\partial t^2} + (a_{12} + a_{22}) \frac{\partial T_D}{\partial t} - (a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21}) \frac{\partial T_D}{\partial x} = 0.$$

Následně zavedeme transformaci

$$t = b_{21} \xi + b_{22} \tau, \quad x = b_{11} \xi + b_{12} \tau, \quad T_D = U(\xi, \tau) = U$$

Po provedení transformace dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{1}{(b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21})^2} & \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} (-a_{11} b_{22} b_{12} - a_{11} a_{21} b_{22}^2 - a_{21} b_{22} b_{12} - b_{12}^2) \right. \\ & + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \tau} (a_{11} b_{22} b_{11} + a_{21} b_{21} b_{12} + a_{11} b_{21} b_{12} + a_{21} b_{22} b_{11} \\ & + 2a_{11} a_{21} b_{22} b_{21} + 2b_{12} b_{11}) \\ & + \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} (-a_{11} a_{21} b_{21}^2 - a_{21} b_{21} b_{11} - a_{11} b_{21} b_{11} - b_{11}^2) \\ & + \frac{\partial U}{\partial \xi} (-a_{22} b_{12} b_{11} b_{22} - a_{11} a_{22} b_{22}^2 b_{11} + a_{11} a_{22} b_{22} b_{12} b_{21} - a_{12} b_{12} b_{11} b_{22} \\ & - a_{12} a_{21} b_{22}^2 b_{11} + a_{12} a_{21} b_{22} b_{12} b_{21} + a_{12} b_{12}^2 b_{21} + a_{22} b_{12}^2 b_{21}) \\ & + \frac{\partial U}{\partial \tau} (-a_{22} b_{12} b_{11} b_{21} + a_{11} a_{22} b_{22} b_{11} - a_{11} a_{22} b_{12} b_{21}^2 - a_{12} b_{12} b_{11} b_{22} \\ & \left. + a_{12} a_{21} b_{21} b_{22} b_{11} - a_{12} a_{21} b_{21}^2 b_{12} + a_{12} b_{11}^2 b_{22} + a_{22} b_{11}^2 b_{22}) \right) = 0, \end{aligned}$$

kde $(b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}) \neq 0$ je podmínka regularity transformace. Po úpravách dostáváme rovnici ve tvaru

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \tau} - \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{a_{12} a_{22}}{-2a_{11} a_{21} + a_{11}^2 + a_{21}^2} \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0.$$

Nyní opět zavedeme druhou transformaci

$$U = U(\xi, \tau) = V(\xi, \tau) e^{-c_1 \tau - c_2 \xi} = V e^{-c_1 \tau - c_2 \xi},$$

čímž dostáváme

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \tau} e^{-c_1 \tau - c_2 \xi} + \frac{\partial V}{\partial \tau} (-c_2 e^{-c_1 \tau - c_2 \xi} - e^{-c_1 \tau - c_2 \xi}) + \frac{\partial V}{\partial \xi} \left(-c_1 e^{-c_1 \tau - c_2 \xi} + \frac{a_{12} a_{22} e^{-c_1 \tau - c_2 \xi}}{-2a_{11} a_{21} + a_{11}^2 + a_{21}^2} \right) \\ & + V \left(c_1 c_2 e^{-c_1 \tau - c_2 \xi} + c_1 e^{-c_1 \tau - c_2 \xi} - \frac{a_{12} a_{22} c_2 e^{-c_1 \tau - c_2 \xi}}{-2a_{11} a_{21} + a_{11}^2 + a_{21}^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Rovnici upravíme a obdržíme tvar

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{a_{11} a_{22}}{-2a_{11} a_{21} + a_{11}^2 + a_{21}^2} V = 0.$$

Po zavedení substituce $p^2 = \frac{a_{12} a_{22}}{-2a_{11} a_{21} + a_{11}^2 + a_{21}^2}$ dostáváme

$$\frac{\partial^2 V(\xi, \tau)}{\partial \xi \partial \tau} + p^2 V(\xi, \tau) = 0. \quad (8.6)$$

Rovnice (8.6) je kanonický tvar rovnice (8.5). Z kanonického tvaru vidíme, že daná rovnice je hyperbolická. Ještě jednou zavedeme substituci

$$\xi = x + t, \quad \tau = x - t,$$

po jejímž provedení obdržíme rovnici ve tvaru

$$\frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial t^2} + 4p^2 V(x, t) = 0. \quad (8.7)$$

Rovnice (8.7) se nazývá Gordon-Kleinova rovnice (viz [22]). Ta má různá partikulární řešení

$$\begin{aligned} V(x, t) &= \cos(\lambda t)(A \cos(\mu t) + B \sin(\mu t)), & -4p^2 &= -\lambda^2 + \mu^2, \\ V(x, t) &= \sin(\lambda t)(A \cos(\mu t) + B \sin(\mu t)), & -4p^2 &= -\lambda^2 + \mu^2, \\ V(x, t) &= e^{\pm \mu t}(A \cos(\lambda t) + B \sin(\lambda t)), & -4p^2 &= -\lambda^2 - \mu^2, \\ V(x, t) &= e^{\pm \lambda t}(A \cos(\mu t) + B \sin(\mu t)), & -4p^2 &= \lambda^2 + \mu^2, \\ V(x, t) &= e^{\pm \lambda t}(A e^{\mu t} + B e^{-\mu t}), & -4p^2 &= \lambda^2 - \mu^2, \\ V(x, t) &= A I_0(\xi) + B K_0(\xi), & \xi &= \frac{\sqrt{4p^2}}{a} \sqrt{a^2(t + C_1)^2 - (x + C_2)^2}, \end{aligned}$$

kde A, B, C_1, C_2 jsou libovolné konstanty a $I_0(\xi), K_0(\xi)$ jsou modifikované Besselovy funkce.

9. Řešení inverzní úlohy křížového uspořádání

Křížové uspořádání je charakterizováno nerovností $w_D = w_S = w \ll l$ viz. obrázek 8.7. Změnu teploty T_S v chlazeném okruhu můžeme vzhledem k relativně krátké vzdálenosti w zanedbat. V ustáleném stavu je systém popsán rovnicí

$$\frac{Q_D}{w} \frac{\partial T_D(x)}{\partial x} - k_D(T_S(x) - T_D(x)) = 0, \quad (9.1)$$

kteřou získáváme z druhé rovnice soustavy (8.3), kde $\frac{\partial T_D}{\partial t} = 0$ a $k_D = \frac{u}{c_D \rho_D}$. Protože (9.1) v této aproximaci závisí pouze na jedné proměnné x , nahrazujeme parciální derivace normálními. Okrajová podmínka splývá s podmínkou říditelnosti vstupní teploty chladicího média, neboli

$$T_D(0) = T_{DI}(t),$$

kde t je parametr. Naopak pozorovatelnost jeho výstupní teploty vystihujeme jako

$$T_D(l) = T_{DO}(t).$$

Rovnici (9.1) můžeme přepsat ve tvaru

$$\frac{dT_D(x)}{dx} - \frac{k_D w}{Q_D} (T_S(x) - T_D(x)) = 0. \quad (9.2)$$

V rovnici (9.2) se vyskytuje jediný parametr $\vartheta = \frac{k_D w}{Q_D}$. Tento parametr závisí na průtoku Q_D , který je říditelný, a dvou neznámých veličinách k_D a w . Rovnice (9.2) je lineární diferenciální rovnice, jejíž řešení je

$$T_D(x) = T_{DI}(t)e^{-\vartheta x} + e^{\vartheta x} \int_0^x \vartheta T_S(\xi) e^{\vartheta \xi} d\xi.$$

A pro hodnotu $x = l$ nabývá tvaru

$$T_D(l) = T_{DI}(t)e^{-\vartheta l} + e^{\vartheta l} \int_0^l \vartheta T_S(\xi) e^{\vartheta \xi} d\xi. \quad (9.3)$$

Analýza identifikovatelnosti bude demonstrována na 5 příkladech.

9.1. Teplota vzorku je v celém výměníku konstantní

Nejprve definujeme parametr, který chceme identifikovat jako $T_S(0) = A$. Protože změnu teploty T_S podél kontaktní plochy výměníku zanedbáváme, můžeme psát $T_S(x) = A$. Pak řešení (9.3) je

$$T_{DO}(t) = T_{DI}(t)e^{-\vartheta l} + A(1 - e^{-\vartheta l}). \quad (9.4)$$

Parametr A nemůžeme obecně identifikovat, protože parametr ϑ je neznámý. Pokud by platilo, že $A = T_{DI}(t)$, mohli bychom (9.4) zjednodušit na tvar

$$T_{DO}(t) = T_{DI}(t).$$

Pro tento speciální případ je systém identifikovatelný. Toto je příkladem singulární identifikovatelnosti.

Parametr ϑ můžeme měřit pomocí kalibrace systému, tzn. musíme změřit teplotu v chlazeném okruhu. Avšak parametr ϑ je měřitelný za speciálních podmínek, když A je známé. Je proto nezbytné změřit teplotu chlazeného okruhu nezávislou metodou, například umístěním teploměru do chlazeného okruhu. Této situace nemůžeme dosáhnout změnou říditelného vstupu T_{DI} a měřením pozorovatelného výstupu T_{DO} , s výjimkou singulární identifikovatelnosti pro $A = T_{DI}(t)$. Zachováme-li důsledně zadání, není systém identifikovatelný. Tepelná účinnost výměníku je v tomto případě

$$E = 1 - e^{-\vartheta l}.$$

9.2. Teplota vzorku je v celém výměníku konstantní a parametry k_D a w chceme identifikovat

Na začátku opět definujeme parametry, které chceme identifikovat. V tomto případě jsou to parametry $T_S(0) = A$, k_D a w . Z předchozího příkladu plyne $T_S(x) = A$. Také předpokládáme, že $w > 0$, tedy šířka kontaktní plochy je nenulová, a $k_D > 0$, tudíž probíhá přenos tepla. Pak řešením (9.3) je

$$T_{DO}(t) = T_{DI}(t)e^{-\frac{k_D w}{Q}l} + A(1 - e^{-\frac{k_D w}{Q}l}).$$

Všechny parametry nemohou být identifikovatelné, protože k_D a w jsou v součinu. Pokud k_D nabývá hodnot $\frac{k_D}{\beta}$ a w hodnot $\bar{w}\beta$ je součin $\bar{k}_D\bar{w} = k_D w$. Hodnoty k_D a w nejsou identifikovatelné. Je nemožné získat k_D a w jakýmkoli nastavením $T_{DI}(t)$ a měřením $T_{DO}(t)$. Tento model není identifikovatelný až na výjimku singulární identifikovatelnosti pro $A = T_{DI}(t)$. Inverzní úloha tohoto problému nemá řešení. Parametr můžeme získat pouze pokud k_D , w jsou identifikované či v singulárním případě $A = T_{DI}(t)$.

9.3. Teplota vzorku je v celém výměníku konstantní a je identifikován parametr $X = e^{-\frac{k_D w}{Q_D}l}$ a A

Nejprve opět definujeme parametr, který chceme identifikovat jako $T_S(0) = A$. Z předchozích příkladů plyne $T_S(x) = A$. A současně předpokládáme, že Q_0 je nastavitelný na dvě hodnoty Q_0 a $\frac{Q_0}{2}$. Dále je dán parametr $X = e^{-\frac{k_D w}{Q_D}l}$, který je definován na intervalu $X \in \langle 0, 1 \rangle$. Pro průtoky Q_0 a $\frac{Q_0}{2}$ má rovnice (9.3) řešení

$$\begin{aligned} T_{DO}(t, Q_0) &= T_{DI}(t)X + A(1 - X), \\ T_{DO}(t, \frac{Q_0}{2}) &= T_{DI}(t)X^2 + A(1 - X^2). \end{aligned} \tag{9.5}$$

Soustava rovnic (9.5) obsahuje dvě neznámé A a X . Ty mohou být vyjádřeny prostřednictvím výsledků. Existují dvě řešení

$$\begin{aligned}
A &= T_{DI}(t), \\
A &= \frac{T_{DO}(t, \frac{Q_0}{2})T_{DI}(t) - T_{DO}^2(t, Q_0)}{T_{DO}(t, \frac{Q_0}{2})T_{DI}(t) - 2T_{DO}(t, Q_0)}.
\end{aligned}
\tag{9.6}$$

První rovnice soustavy (9.6) vede na rovnici

$$T_{DO}(t, Q_0) = T_{DI}(t).$$

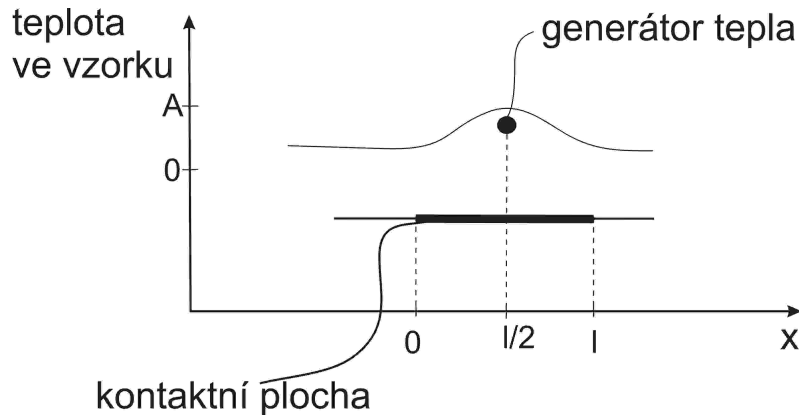
To je případ singulární identifikovatelnosti. Systém není identifikovatelný jako celek, protože X může nabývat libovolných hodnot na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. V případě druhé rovnice soustavy (9.6) má úloha řešení. Potřebnou hodnotu A můžeme identifikovat.

$$X = \frac{T_{DO}(t, Q_0)(T_{DI}(t) - T_{DO}(t, Q_0)) - T_{DO}(t, \frac{Q_0}{2})(T_{DI}(t) - T_{DO}(t, \frac{Q_0}{2}))}{(T_{DO}(t, Q_0) - T_{DI}(t))^2}. \tag{9.7}$$

Model není globálně identifikovatelný, ale je lokálně identifikovatelný. V blízkosti podmínky $T_{DO}(t, Q_0) = T_{DI}(t)$ není identifikovatelný.

9.4. Identifikace teplotního profilu vzorku. Počítačová tomografie teploty

Předchozí příklady měly ukázat, jak důležité je správně definovat parametr, který má být identifikován. Nyní modelováním ukážeme řešení obtížnějšího problému. Jeho podstata spočívá v otázce, zda řízením parametrů vstupu chladicího okruhu a měřením teploty výstupní kapaliny lze provést identifikaci teplotního průběhu uvnitř chladiče. Předpokládáme, že uvnitř chladiče probíhá chemická reakce, která generuje teplo. Lze si to představit například takovým způsobem, že uvnitř v místě $\frac{l}{2}$ ulpěla na styčné ploše mezi chlazenou a chladicí kapalinou nečistota, která obsahuje katalyzátor, který spouští lokální chemickou reakci v chlazeném mediu. Tato reakce je zdrojem tepla, viz obrázek 9.1. Pro numerickou demonstraci toho příkladu je použit teplotní profil $A + B(\sin(\frac{\pi x}{l}))^2$



Obr. 9.1: Nehomogenní struktura vzorku. V blízkosti kontaktní plochy je generátor tepla, který dodává do vzorku teplo. Profil je aproximován pomocí $A + B(\sin(\frac{\pi x}{l}))^2$.

Inverzní úloha se skládá z hledání neznámého teplotního profilu vzorku prezentovaného modelu. Naším cílem je získat teplotní profil vzorku v závislosti na poloze, tedy $T_S(x)$. Efektivní součinitel prostupu tepla ve vzorku $K = k_D w$ je znám a nezávisí na čase a délce aktivní části kontaktní plochy. Neboli K je známá konstanta. Průtok Q můžeme řídit v omezené oblasti (Q_{min}, Q_{max}) , kde je teplotní profil stálý a nezávislý na čase. Pro naše řešení je nezbytné vyřešit rovnici

$$T_{DO}(t, Q) = T_{DI}(t)e^{-\frac{Kl}{Q}} + \int_0^l T_S(\xi)e^{\frac{K\xi}{Q}} d\xi e^{-\frac{Kl}{Q}} \frac{K}{Q} \quad (9.8)$$

pro $T_S(\xi)$. Zavedeme-li substituci $a = \frac{K\xi}{Q}$ a následně vyjádříme ξ jako $\xi = \frac{aQ}{K}$. Pak přejde integrál (9.8) na tvar

$$T_{DO}(t, Q) = T_{DI}(t)e^{-\frac{Kl}{Q}} + \int_0^{\frac{Kl}{Q}} T_S\left(\frac{aQ}{K}\right)e^a da e^{-\frac{Kl}{Q}}. \quad (9.9)$$

Jelikož teplota vzorku závisí na ξ a to závisí na průtoku Q , tedy i teplota vzorku $T_S(\xi) = T_S\left(\frac{aQ}{K}\right)$ je funkcí průtoku Q . Průtok Q je námi nastavitelný, tedy říditelný a proces identifikace výstupní teploty chladiwa $T_{DO}(t, Q)$ závisí na jeho změně. Je patrné, že pro $Q = konst$ nemá rovnice řešení. Vstupní teplota $T_{DI}(t)$ je říditelná a nezávisí na průtoku. Průtok Q můžeme řídit nezávisle na jakémkoli parametru. Za těchto podmínek můžeme dosáhnout změny výstupní teploty $T_{DO}(t, Q)$ s ohledem na její vstupní hodnoty $T_{DI}(t)$ změnou průtoku. Předchozí úvahu lze stručně vyjádřit jako

$$\delta_{T_{DI}(t)} T_{DO}(t, Q) = e^{-\frac{Kl}{Q}}.$$

Variace výstupní teploty $T_{DO}(t, Q)$ podle $T_{DI}(t)$ nezávisí na teplotním profilu vzorku. Libovolnou změnou teplotního režimu na vstupu chladičího okruhu nelze identifikovat průběh teploty v chlazeném okruhu. To znamená, že můžeme nastavit $T_{DI}(t) = 0$ bez újmy na obecnosti. Získáváme tak finální Fredholmovu rovnici prvního druhu ve tvaru

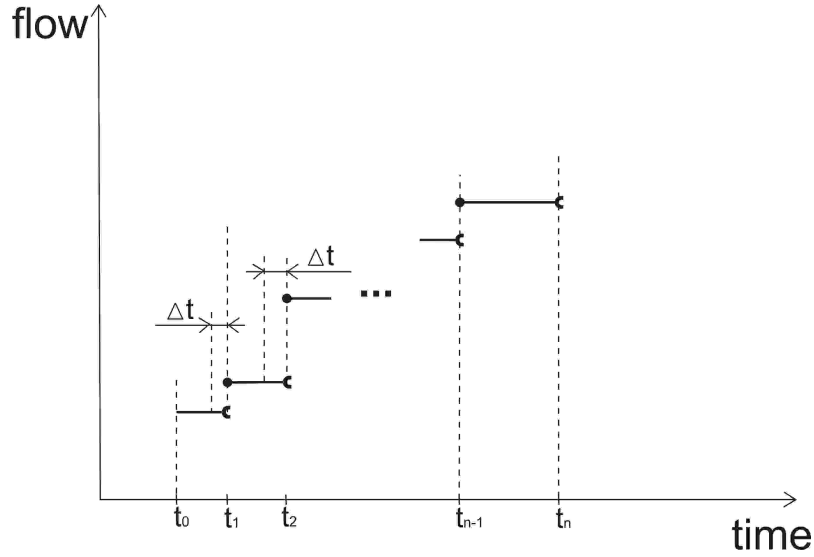
$$T_{DO}(t, Q) \frac{Q}{K} e^{\frac{Kl}{Q}} = \int_0^l T_S(\xi) e^{\frac{K\xi}{Q}} d\xi. \quad (9.10)$$

Úlohu určování identifikovatelnosti jsme převedli na úlohu zjišťování existence řešení Fredholmovy rovnice prvního druhu. Její řešení je blíže popsáno v [7], [23], [24]. Při jejím řešení může nastat situace, že rovnice nemá jednoznačné řešení. V současnosti nejsme schopni na základě našich poznatků jednoznačnost řešení dané úlohy dokázat. A současně je známé, že pro periodické funkce není její řešení jednoznačné. Nicméně z fyzikální podstaty problému je velmi nepravděpodobné, že při našich předpokladech (vstupní teplota je nulová a průtok je konstantní) bude výstupní teplota kmitat. Proto dále předpokládáme, že (9.10) má jednoznačné řešení.

Výrazně komplikovanější otázkou (a na základě našich znalostí stále ještě není plně vyřešena) je numerická identifikovatelnost. $T_{DO}(t, Q)$ můžeme pozorovat s jistou přesností. Experimentální uspořádání nám může dát limitní hodnoty Q_{min}, Q_{max} a přesnost nastavení průtoku Q . Všechny tyto překážky mohou předcházet skutečnosti, že detaily identifikovatelnosti nemůžeme řešit obecně, nýbrž je musíme vždy vyřešit zvlášť pro konkrétní případy.

V použitém modelu předpokládáme, že v každém okamžiku je systém v rovnováze. Jinými slovy, všechny změny teploty, proudění a ostatních parametrů jsou pomalejší

než časová konstanta nastavení rovnovážného stavu. Algoritmus nastavení průtoku je na obrázku 9.2



Obr. 9.2: Algoritmus nastavování průtoků

V algoritmu musíme splnit následující podmínky

$$\begin{aligned} t_i - t_{i-1} &> \tau_{\text{rovnovážná poloha}}, \\ t_n - t_0 &< \tau_{\text{změna teplotního profilu}}, \end{aligned}$$

kde $\tau_{\text{rovnovážná poloha}}$ je doba, za kterou se průtok ustálí, a $\tau_{\text{změna teplotního profilu}}$ charakterizuje čas, za který dojde ke změně teplotního profilu. $\tau_{\text{rovnovážná poloha}}$ je časová konstanta dějů, které nastanou po změně průtoku a která popisuje přechod do nového rovnovážného stavu. Pro $\tau_{\text{změna teplotního profilu}}$ platí, že, bude-li děj probíhat velmi dlouho, dojde k ustálení plné rovnováhy. V našem případě se vyčerpá katalytická aktivita látky, která je zdrojem tepla a způsobuje nerovnovážný profil teploty. Reakce odezní a vznikne standardní profil teploty ve výměníku tepla. Podmínka $t_i - t_{i-1} > \tau_{\text{rovnovážná poloha}}$ nám říká, že průtok nemůžeme měnit spojitě. Při spojitě změně průtoku bychom museli znát přechodovou funkci popisující změnu teploty v závislosti na změně průtoku. Tu bychom získali řešením parciální diferenciální rovnice

$$\frac{\partial T_D}{\partial t} = \frac{\partial T_D}{\partial x} + K(x)(T_S - T_D).$$

Protože jsme však $\frac{\partial T_D}{\partial t}$ zanedbali, je nutno použít omezený počet diskrétních průtoků a měření teploty na výstupu provádět po ustálení rovnováhy. Výstupní teplotu chladiva můžeme změřit pouze v čase Δt , tedy ještě před další změnou toku. To může mít vliv na přesnost měření výstupní teploty chladiva $T_{DO}(t, Q)$.

Nejjednodušší metoda řešení rovnice (9.10) se skládá z rozvinutí $T_S(\xi)$ do Taylorovy řady v bodě $\frac{l}{2}$. Pokud konverguje, můžeme vyměnit sumu za integrál a získáme

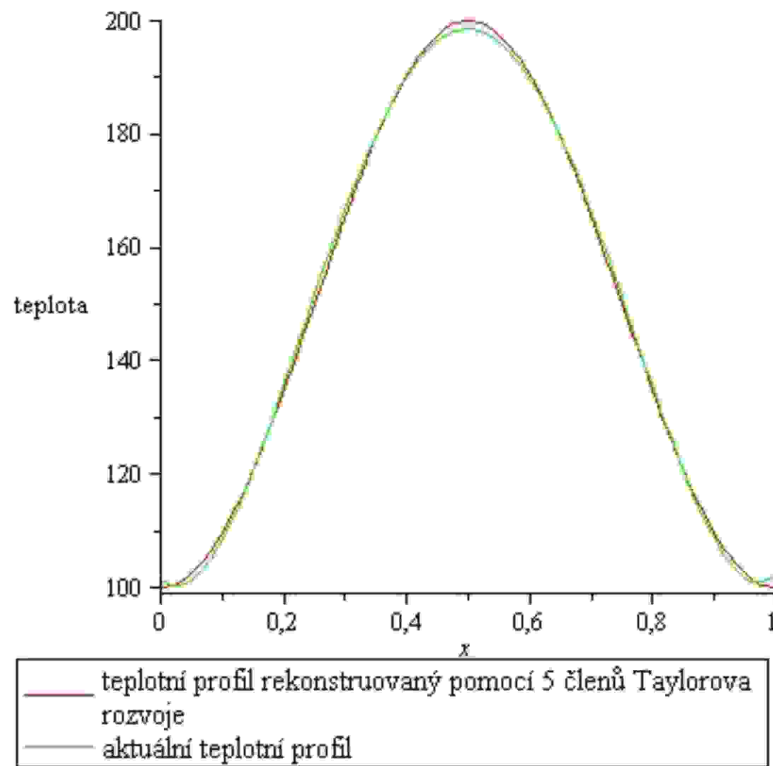
$$\frac{K}{Q_j} e^{\frac{Kl}{Q_j}} T_{DO}(t, Q_j) = \sum_{i=0}^n \frac{d^i T_S(\xi)}{d\xi^i} \Big|_{\xi=\frac{l}{2}} \frac{1}{i!} \int_0^l \left(\frac{l}{2} - \xi\right)^i e^{\frac{K\xi}{Q_j}} d\xi \quad j = 0, \dots, n. \quad (9.11)$$

Rovnice (9.11) je systém $n + 1$ lineárních rovnic za podmínky $\left. \frac{d^n T_S(\xi)}{d\xi^n} \right|_{\xi=\frac{l}{2}}$. Tu můžeme vyřešit a funkci $T_S(\xi)$ následně znovu rekonstruovat s přesností $\frac{d^n T_S \xi}{d\xi^n}$.
 Proces zahrnující vliv toku vhodnými body je demonstrován příkladem v tabulce 1.

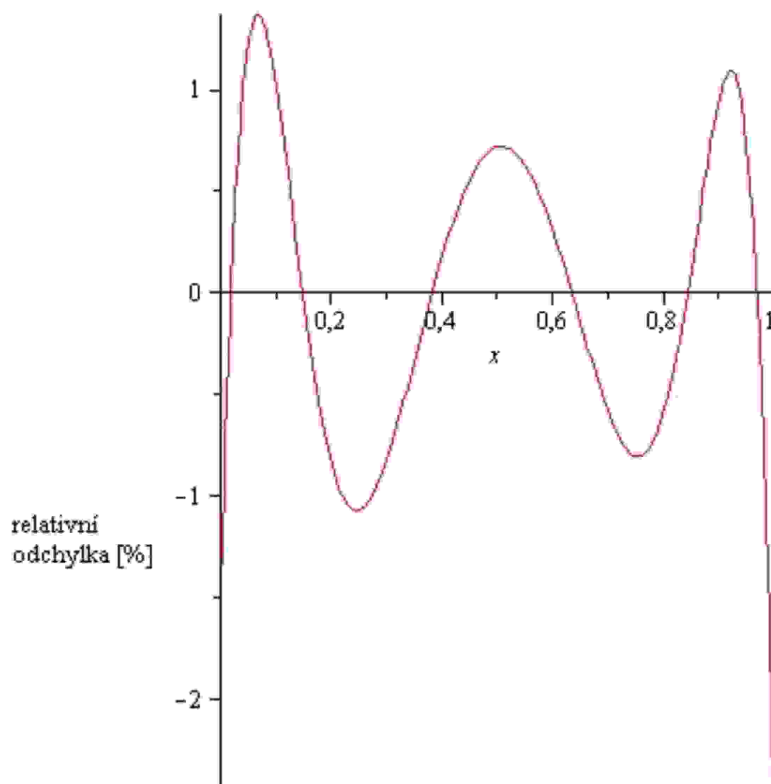
průtok Q [l/min]	telota T_{DO} [°C]	účinnost E
1/8	119	0,586
1/4	133	0,655
1/2	126	0,621
1	94	0,463
2	59	0,291

Tabulka 1

$T_{DI} = 0^\circ\text{C}$, $T_{SI} = 200^\circ\text{C}$, $T_{SO} = 100^\circ\text{C}$, $l = 1\text{m}^2$, $K = 1\text{m}^2/\text{min}$



Obr. 9.3: Srovnání skutečného teplotního profilu a profilu určeného pomocí pěti členů Taylorova rozvoje



Obr. 9.4: Relativní odchylka teplotního profilu a jeho rekonstrukce

Taylorovým rozvojem viz obrázek 9.3

Na tomto příkladu procesu identifikace jsme ukázali teoretický základ počítačové tomografie teploty.

9.5. Identifikace koeficientu prostupu tepla závisícího na poloze

Nejobtížnějším příkladem je identifikace efektivního součinitele prostupu tepla $K(x)$ závisícího na prostorové souřadnici.

$$Q \frac{\partial T_D}{\partial x} + K(x)(T_S - T_D) = 0$$

V tomto případě je výsledkem nelineární integrální rovnice

$$T_{DO}(t, Q) = T_{DI}(t) e^{-\frac{1}{Q} \int_0^l K(\xi) d\xi} + e^{-\frac{1}{Q} \int_0^l K(\xi) d\xi} \int_0^l T(\xi) e^{-\frac{1}{Q} \int_0^\xi K(\eta) d\eta} \frac{K(\xi)}{Q} d\xi.$$

Je zřejmé, že tuto rovnici lze řešit pouze numericky a veškeré otázky spojené s existencí řešení, s jeho jednoznačností, případně numerickou stabilitou tohoto řešení jsou velmi obtížné a v tomto okamžiku není v našich silách ji řešit. Rovnice je uvedena pouze pro ilustraci, že v jistých podmínkách lze formulovat matematický problém, který umožňuje identifikovat profil přenosu tepla uvnitř výměníků. Řešení tohoto problému má největší

praktický dopad, neboť umožňuje pouze kontrolou parametru vstupu chlazeného okruhu stanovit kvalitu výměníku. Tedy určit místa, kde dochází k intenzivnějšímu přenosu tepla, tedy místa, kde může být například koroze ztečena přepážka mezi chlazeným a chladicím okruhem. Nebo nalézt místa, kde jsou v chladiči výměníku tepla usazeniny, které brání přestupu tepla.

10. Výsledky a diskuze

Uvedli jsme základní problematiku týkající se řešení inverzních úloh výměníků tepla. Jedním z nejdůležitějších kroků při jejich řešení je správně stanovit model systému, který zahrnuje všechny podstatné parametry, které jej ovlivňují.

Máme-li správně stanovený model systému, můžeme začít řešit inverzní úlohu, při které se snažíme o identifikaci parametrů. Struktura řešení inverzní úlohy se skládá ze šesti bodů.

1. Navrhnout odpovídající matematický model systému.
2. Analýza obecného modelu, která zahrnuje veškerá omezení vyplývající z jeho struktury.
3. Definování parametrů, které chceme identifikovat.
4. Stanovit podmínky omezující parametry, které chceme identifikovat.
5. Analýza identifikovatelnosti parametru.
6. Řešení inverzní úlohy, která je ekvivalentní s identifikovatelností parametrů. Odvození analytických matematických vztahů, které popisují potřebné parametry. Pokud nelze odvodit matematický vztah, který popisuje daný problém, navrhne numerický postup identifikace parametrů.

Tento postup jsme aplikovali na několika modifikacích konkrétního příkladu (viz devátá kapitola).

V prvním příkladě jsme uvažovali teplotu vzorku T_S v celém výměníku konstantní, $T_S(x) = A$, a jako parametr, který chceme identifikovat, jsme zvolili teplotu vzorku T_S . I přes toto zjednodušení není možné parametr T_S obecně identifikovat, neboť závisí na neznámém parametru ϑ . Jeho identifikace se nám podaří ve speciálním případě, pokud $A = T_{DI}$.

V dalším případě jsme opět uvažovali konstantní teplotu vzorku $T_S(x) = A$ v celém výměníku a za parametry, které chceme identifikovat, jsme zvolili T_S , k_D a w . Protože parametry k_D a w jsou v součinu, nemůžeme je identifikovat. Tedy inverzní úloha obecně nemá řešení.

Ve třetím příkladu jsme definovali nový parametr $X = e^{-\frac{k_D w}{Q_D} l}$, který závisel na k_D a w . Parametr X je definovaný na intervalu $(0, 1)$. Pro dva zvolené průtoky Q_0 a $\frac{Q_0}{2}$ jsme získali dvě řešení rovnice (9.3). Z rovnice (9.7) plyne, že pro $T_{DO}(t, Q_0) = T_{DI}(t)$ není úloha identifikovatelná. Tento případ není globálně identifikovatelný, avšak je lokálně identifikovatelný za podmínky $T_{DO}(t, Q_0) \neq T_{DI}(t)$. Z tohoto příkladu plyne, že zavedeme-li vhodně parametr X , umožní nám to stanovit hledanou teplotu T_S .

V následujícím příkladu jsme určovali teplotní profil ve vzorku. Z rovnice (9.9) je patrné, že teplota vzorku T_S závisí na průtoku Q . Ten můžeme libovolně nastavovat, a tak měnit výstupní teplotu chladiwa T_{DO} . Tedy pokud vhodně zvolíme škálu průtoků a provedeme měření výstupní teploty chladiwa T_{DO} , můžeme určit skutečné rozložení teploty ve výměníku v závislosti na poloze. To může být časově i finančně podstatně jednodušší než jiná (např. fyzikální) metoda, jak sledovat teplotní profil. Případně,

dojde-li k poruše ve výměníku, můžeme snadno určit přesné místo poruchy, a tak předejít komplikacím spojených s demontáží celého chladícího zařízení.

Nakonec jsme uvedli příklad identifikace efektivního součinitele prostupu tepla $K(x)$ v závislosti na poloze. Výsledkem úlohy je nelineární integrální rovnice, kterou nejsme schopni v daném okamžiku řešit.

11. Závěr

Cílem této práce bylo shrnout základní poznatky týkající se přenosu tepla a identifikovatelnosti teploty vzorku řešením inverzní úlohy. Nejprve jsme uvedli základní pojmy a fyzikální zákony s touto problematikou spojené. Poté jsme zmínili nejjednodušší typy uspořádání tepelných výměníků, se kterými se můžeme setkat v praxi.

Výměníky tepla se dnes hojně používají všude tam, kde je potřeba předejít přehřátí objektu, např. u elektroniky, chemického reaktoru, motoru, chladicího boxu. Abychom mohli regulovat teplotu daného objektu, musíme ji nejprve určit. Průběh teploty je popsán pomocí diferenciální rovnice. Teplotu pak určíme jako řešení inverzní úlohy. Tímto způsobem jsme také schopni určit teplotní profil v celém výměníku, což je základem metod, které jsou podobné počítačové tomografii. To je zcela nezbytné pro případnou údržbu konstrukce. Určíme-li přesné místo poruchy, můžeme ji snadněji odstranit. Nakonec jsme všechny tyto poznatky aplikovali na několika příkladech křížového uspořádání, které je nejjednodušší, a řešili otázku identifikovatelnosti tohoto modelu.

Reference

- [1] JACQUEZ, John A. *Compartmental Analysis in Biology and Medicine*. 2. vyd. Ann Arbor: The University of Michigan Press, 1985.
- [2] GODFREY, Keith. *Compartmental models and their application*. New York: Academic Press, 1983, xiv, 293 p. ISBN 01-228-6970-2.
- [3] SANDBERG, I. On the mathematical foundations of compartmental analysis in biology, medicine, and ecology. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* [online]. 1978, roč. 25, č. 5, s. 273-279 [cit. 2012-04-12]. ISSN 0098-4094. DOI: 10.1109/TCS.1978.1084473. Dostupné z: <<http://ieeexplore.ieee.org/lpdocs/epic03/wrapper.htm?arnumber=1084473>>
- [4] REKTORYS, Karel. *Přehled užití matematiky*. 7. vyd. Praha: Prometheus, 2000, xxxii, 874 s. ISBN 80-719-6179-5.
- [5] ŠVARC, Ivan. *Automatizace: automatické řízení*. 1. vyd. Brno: CERM, 2002, 201 s. ISBN 80-214-2087-1.
- [6] ŠTĚDRÝ, Milan. *O některých inverzních úlohách*. Praha, 1986, 28 s.
- [7] LANDWEBER, L. An Iteration Formula for Fredholm Integral Equations of the First Kind. *American Journal of Mathematics* [online]. 1951, roč. 73, č. 3, s. 615- [cit. 2012-04-21]. ISSN 00029327. DOI: 10.2307/2372313. Dostupné z: <<http://www.jstor.org/stable/2372313?origin=crossref>>
- [8] LAVRENTIEV, M. M., VASILJEV, V. G., ROMANOV, V. G. *Multidimensional inverse Problems for differential equations*. Berlin, Heidelberg, N.Y: Springer, 1970. ISBN 978-354-0052-821.
- [9] System. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2012-05-08 [cit. 2012-05-10]. Dostupné z: <<http://en.wikipedia.org/wiki/System>>
- [10] KALMAN, R. E. Mathematical Description of Linear Dynamical Systems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series A: Control* [online]. 1963, roč. 1, č. 2, s. 152- [cit. 2012-02-08]. ISSN 08874603. DOI: 10.1137/0301010. Dostupné z: <<http://link.aip.org/link/SJCODC/v1/i2/p152/s1>>
- [11] CHIS, Oana-Teodora, Julio R. BANGA, Eva BALSACANTO a Johannes JAEGER. Structural Identifiability of Systems Biology Models: A Critical Comparison of Methods. *PLoS ONE* [online]. 2011-11-22, roč. 6, č. 11, e27755- [cit. 2012-02-08]. ISSN 1932-6203. DOI: 10.1371/journal.pone.0027755. Dostupné z: <<http://dx.plos.org/10.1371/journal.pone.0027755>>
- [12] ALLMAN, Elizabeth S., Catherine MATIAS a John A. RHODES. Identifiability of parameters in latent structure models with many observed variables. *The Annals of Statistics* [online]. 2009, roč. 37, 6A, s. 3099-3132 [cit. 2012-02-12]. ISSN 0090-5364. DOI: 10.1214/09-AOS689. Dostupné z: <<http://projecteuclid.org/euclid.aos/1250515381>>

- [13] HUANG, Q.-H. Model Identifiability. In: EVERITT, B. a D. C. HOWELL. *Encyclopedia of statistics in behavioral science*. Hoboken, N.J.: John Wiley, 2005, s. 1249-1251. ISBN 0-470-86080-4.
- [14] CHEN, C. T. *Introduction to Linear System Theory*. Holt, Rinehart and Winston, NY, 1970.
- [15] Equivalent Expression. [online]. [cit. 2012-05-14]. Dostupné z: <http://www.icoachmath.com/math_dictionary/Equivalent_Expression.html>
- [16] DRÁBKOVÁ, Sylva a Milada KOZUBKOVÁ. *Cvičení z mechaniky tekutin*. 1. vyd. Ostrava: Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, 2002, 141 s. ISBN 80-248-0039-X.
- [17] KALČÍK, Josef a Karel SÝKORA. *Technická termomechanika*. Praha: Academia, 1973, 536 s.
- [18] PAVELEK, Milan. *Termomechanika*. 1. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2011, 192 s. ISBN 978-80-214-4300-6.
- [19] FFAKHERI, Ahmad. Heat Exchanger Efficiency. *Journal of Heat Transfer*. 2007, roč. 129, č. 9, s. 1268-1276. ISSN 00221481. DOI: 10.1115/1.2739620. Dostupné z: <<http://link.aip.org/link/JHTRAO/v129/i9/p1268/s1>>
- [20] BECKER, Kurt. Muskrats in Central Europe and their control. *Proc. Fifth Vertebrate Pest Conference 1972*, s. 18-21.
- [21] MANDL, Petr. *Pravděpodobnostní dynamické modely*. Praha: Academia, 1985.
- [22] *EqWorld* [online]. 2004 [cit. 2012-05-16]. Dostupné z: <<http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/lpde/lpde203.pdf>>
- [23] HANSON, R. J. A Numerical Method for Solving Fredholm Integral Equations of the First Kind Using Singular Values. *SIAM Journal on Numerical Analysis* [online]. 1971, roč. 8, č. 3, s. 616-622 [cit. 2012-04-28]. Dostupné z: <<http://www.jstor.org/stable/2949679>>
- [24] STRAND, Otto Neall a Ed. R. WESTWATER. Statistical Estimation of the Numerical Solution of a Fredholm Integral Equation of the First Kind. *Journal of the ACM* [online]. 1968, roč. 15, č. 1, s. 100-114 [cit. 2012-04-28]. ISSN 00045411. DOI: 10.1145/321439.321445. Dostupné z: <<http://portal.acm.org/citation.cfm?doid=321439.321445>>

12. Seznam použitých symbolů

Q_{SI}	vstupní průtok vzorku
T_{SI}	vstupní teplota vzorku
Q_{SO}	výstupní průtok vzorku
T_{SO}	výstupní teplota vzorku
T_{SM}	teplota vzorku, která není ovlivněna přítomností kontaktní plochy
T_{S1}	teplota vzorku na kontaktní ploše
\bar{T}_S	průměrná teplota vzorku
c_S	měrná tepelná kapacita vzorku
α_S	součinitel přestupu tepla vzorku
w_S	šířka vzorku
h_S	výška vzorku
ρ_S	hustota vzorku
δ_S	tloušťka mezní vrstvy v oblasti vzorku
Q_{DI}	vstupní průtok chladiva
T_{DI}	vstupní teplota chladiva
Q_{DO}	výstupní průtok chladiva
T_{DO}	výstupní teplota chladiva
T_{DM}	teplota chladiva, která není ovlivněna přítomností kontaktní plochy
T_{D1}	teplota chladiva na kontaktní ploše
\bar{T}_D	průměrná teplota chladiva
c_D	měrná tepelná kapacita chladiva
α_D	součinitel přestupu tepla chladiva
w_D	šířka chladiva
h_D	výška chladiva
ρ_D	hustota chladiva
δ_D	tloušťka mezní vrstvy v oblasti chladiva
k_D	parametr $k_D = \frac{u}{c_D \rho_D}$

Q_L	průtokové ztráty
T_L	tepelné ztráty
T_M	střední teplota kapaliny
T_W	teplota stěny
ΔT	teplotní spád
ΔT_S	střední teplotní spád
ΔT_{TG}	střední logaritmický teplotní spád
α	součinitel přestupu tepla
u	součinitel prostupu tepla
S	velikost kontaktní plochy
\tilde{Q}	tepelný tok
\tilde{q}	měrný tepelný tok
\tilde{m}_S	hmotnostní tok chladiva
\tilde{m}_D	hmotnostní tok vzorku
R	tepelný odpor
Φ	tvar tělesa
λ	teplotní vodivost
λ_W	teplotní vodivost kontaktní plochy
η	dynamická viskozita
ν	kinematická viskozita
Re	Reynoldsovo číslo
v_S	střední rychlost
ϕ	průměr
w	šířka
h	výška
l	délka
c	měrná tepelná kapacita (někdy také specifické teplo)
ρ	hustota

d_0	tloušťka kontaktní plochy
d	tloušťka kontaktní plochy dohromady s mezními vrstvami ($d = \delta_S + d_0 + \delta_D$)
δ	tloušťka mezní vrstvy
$d\tilde{Q}_S$	změna tepelného toku vzorku
$d\tilde{Q}_D$	změna tepelného toku chladiwa
v	rychlost kapaliny
X	parametr $X = e^{-\frac{k_D w}{Q_D} l}$
ϑ	parametr $\vartheta = \frac{k_D w}{Q_D}$
K	efektivní součinitel prostupu tepla,
DC	kompartiment chladiwa
SC	kompartiment vzorku