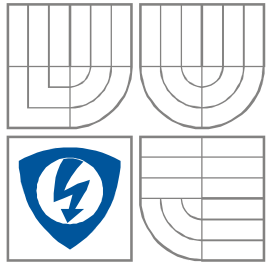


**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



**FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH  
TECHNOLOGIÍ**  
**ÚSTAV EXPERIMENTÁLNÍ A TEORETICKÉ  
ELEKTROTECHNIKY**

**FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND  
COMMUNICATION**  
**DEPARTMENT OF RADIO ELECTRONICS**

## **NUMERICKÉ MODELOVANIE POHYBU VOLNÝCH IÓNOV**

Numerical modeling of free ions movement

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**  
BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**  
AUTHOR

**LUBOŠ SUKUP**

**VEDOUCÍ PRÁCE**  
SUPERVISOR

**doc. Ing. Pavel Fiala, Ph.D.**

---

# LICENČNÍ SMLOUVA POSKYTOVANÁ K VÝKONU PRÁVA UŽÍT ŠKOLNÍ DÍLO

uzavřená mezi smluvními stranami:

## 1. Pan/paní

Jméno a příjmení:                      Luboš Sukup  
Bytem:                                      Pod hájokm 10, Skalica, 909 01, Slovenská republika  
Narozen/a (datum a místo):        10. dubna 1985 v Brně

(dále jen „autor“)

a

## 2. Vysoké učení technické v Brně

Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií  
se sídlem Údolní 53, Brno, 602 00  
jejímž jménem jedná na základě písemného pověření děkanem fakulty:  
prof. Dr. Ing. Zbyněk Raida, předseda rady oboru Elektronika a sdělovací technika  
(dále jen „nabyvatel“)

### Čl. 1

#### Specifikace školního díla

1. Předmětem této smlouvy je vysokoškolská kvalifikační práce (VŠKP):

- disertační práce
  - diplomová práce
  - bakalářská práce
  - jiná práce, jejíž druh je specifikován jako .....
- (dále jen VŠKP nebo dílo)

Název VŠKP:                                Numerické modelování pohybu volných iontů

Vedoucí/ školitel VŠKP:                doc. Ing. Pavel Fiala, Ph.D.

Ústav:                                        Ústav radioelektroniky

Datum obhajoby VŠKP:                \_\_\_\_\_

VŠKP odevzdal autor nabyvateli\*:

- v tištěné formě                      – počet exemplářů: 2
- v elektronické formě – počet exemplářů: 2

2. Autor prohlašuje, že vytvořil samostatnou vlastní tvůrčí činností dílo shora popsané a specifikované. Autor dále prohlašuje, že při zpracovávání díla se sám nedostal do rozporu s autorským zákonem a předpisy souvisejícími a že je dílo dílem původním.

3. Dílo je chráněno jako dílo dle autorského zákona v platném znění.

4. Autor potvrzuje, že listinná a elektronická verze díla je identická.

---

\* hodící se zaškrtněte

---

**Článek 2**  
**Udělení licenčního oprávnění**

1. Autor touto smlouvou poskytuje nabyvateli oprávnění (licenci) k výkonu práva uvedené dílo nevýdělečně užít, archivovat a zpřístupnit ke studijním, výukovým a výzkumným účelům včetně pořizování výpisů, opisů a rozmnoženin.
2. Licence je poskytována celosvětově, pro celou dobu trvání autorských a majetkových práv k dílu.
3. Autor souhlasí se zveřejněním díla v databázi přístupné v mezinárodní síti
  - ihned po uzavření této smlouvy
  - 1 rok po uzavření této smlouvy
  - 3 roky po uzavření této smlouvy
  - 5 let po uzavření této smlouvy
  - 10 let po uzavření této smlouvy  
(z důvodu utajení v něm obsažených informací)
4. Nevýdělečné zveřejňování díla nabyvatelem v souladu s ustanovením § 47b zákona č. 111/ 1998 Sb., v platném znění, nevyžaduje licenci a nabyvatel je k němu povinen a oprávněn ze zákona.

**Článek 3**  
**Závěrečná ustanovení**

1. Smlouva je sepsána ve třech vyhotoveních s platností originálu, přičemž po jednom vyhotovení obdrží autor a nabyvatel, další vyhotovení je vloženo do VŠKP.
2. Vztahy mezi smluvními stranami vzniklé a neupravené touto smlouvou se řídí autorským zákonem, občanským zákoníkem, vysokoškolským zákonem, zákonem o archivnictví, v platném znění a popř. dalšími právními předpisy.
3. Licenční smlouva byla uzavřena na základě svobodné a pravé vůle smluvních stran, s plným porozuměním jejímu textu i důsledkům, nikoliv v tísní a za nápadně nevýhodných podmínek.
4. Licenční smlouva nabývá platnosti a účinnosti dnem jejího podpisu oběma smluvními stranami.

V Brně dne: 6. června 2008

.....  
Nabyvatel

.....  
Autor

---

## Prehlásenie

Prehlasujem, že svoju bakalársku prácu na téma Numerické modely pohybu voľných iónov som vypracoval samostatne pod vedením vedúceho bakalárskej práce a s použitím odbornej literatúry a ďalších informačných zdrojov, ktoré sú všetky citované v práci a uvedené v zozname literatúry na konci práce.

Ako autor uvedenej bakalárskej práce ďalej prehlasujem, že v súvislosti s vytvorením tejto bakalárskej práce som neporušil autorské práva tretích osôb, a hlavne som nezasiahol nedovoleným spôsobom do cudzích autorských a som si plne vedomí následkov porušenia ustanovenia § 11 a nasledujúcich autorského zákona č. 121/2000 Sb., vrátane možných trestnoprávných dôsledkov vyplývajúcich z ustanovenia § 152 trestného zákona č. 140/1961 Sb.

V Brne dňa 6. júna 2008

.....  
podpis autora

## Pod'akovanie

Ďakujem vedúcemu bakalárskej práce doc. Ing. Pavlovi Fialovi, Ph.D. za účinnú metodickú, pedagogickú a odbornú pomoc a ďalšie cenné rady pri spracovávaní mojej bakalárskej práce.

V Brně dne 6. júna 2008

.....  
podpis autora

---

## Abstrakt

Práca sa zaoberá pohybom voľných iónov v prostredí, ktoré je ovplyvnené pôsobením elektrického poľa, magnetického poľa a ich vzájomným pôsobením. V prvej časti je práca zameraná na numerické metódy, ktoré riešia modelové situácie. Tu je dôležité vhodne zvoliť správnu numerickú metódu riešenia.

Druhá časť práce popisuje vplyv jednotlivých polí na ióny a vplyv prostredia na výsledný pohyb. Posledná experimentálna časť je zameraná na model valcového kondenzátora ako senzora, ktorý modeluje nehomogénne elektrické pole.

**Kľúčové slova:** voľné ióny, elektrické pole, magnetické pole, metóda konečných prvkov, metóda konečných objemov, valcový kondenzátor.

## Abstract

This work deals of movement free ions in environment, which is affected by acting of electric field, magnetic field and their interacting. In first part is work focused on numerical methods, which solve exemplars situations. Here is important to properly choose adequate numerical method.

Second part of this work interprets influence of these fields on the ions and influence of environment on final motion. The last experimental part is focused on model of cylindrical capacitor as a sensor, which models nonuniform electric field.

**Key words:** free ions, electric field, magnetic field, finite element method, finite volume method, cylindrical capacitor.

---

# OBSAH

OBSAH .....	6
1 Úvod .....	7
2 Numerické modely pohybu vhodné na sledovanie voľných iónov .....	8
2.1 Metóda konečných diferencií (MKD) .....	10
2.2 Metóda konečných prvkov (MKP) .....	10
2.3 Metóda hraničných prvkov (MHP) .....	12
2.3.1 Princíp metódy .....	12
2.3.2 Stokesova veta .....	12
2.4.3 Metóda hraničných prvkov .....	13
2.5 Metóda konečných objemov (MKO) .....	14
2.5.1 MKO pre 1 D difúziu ustáleného stavu .....	15
2.5.2 MKO pre 2 D difúzie ustáleného stavu .....	17
2.5.3 MKO pre 3 D difúzie ustáleného stavu .....	19
2.6 Porovnanie metód konečných prvkov a konečných objemov .....	20
2.6.1 Metóda konečných prvkov .....	20
2.6.2 Metóda konečných objemov .....	20
3 Pohyb nabitých častíc v elektrickom a magnetickom poli .....	22
3.1 Pohyb nabitých častíc v homogénnom elektrickom poli .....	22
3.2 Pohyb nabitých častíc v homogénnom a stacionárnom magnetickom poli .....	23
3.3 Pohyb nabitých častíc v homogénnom elektrickom a stacionárnom magnetickom poli .....	24
3.4 Pohyb nabitých častíc v reálnom prostredí .....	25
3.4.1 Pohyb nabitých častíc v kvapaline .....	25
3.4.2 Pohyb nabitých častíc v plyne .....	26
4 Fyzikálny model - Maxwellove rovnice .....	26
5 Numerický model pohybu nabitých častíc .....	27
6 Počítačový model – riešenie pomocou valcového kondenzátora .....	29
6.1 častice s rovnakou hmotnosťou rovnakým nábojom a rôznymi vzdialenosťami .....	30
6.2 meranie pohybu častíc so stredne veľkou hmotnosťou .....	33
6.3 meranie pohybu rôzne nabitých častíc .....	36
7 Záver .....	39
8 Literatúra .....	40
9 Prílohy .....	41

# 1 Úvod

Téma Numerické modelovanie pohybu voľných iónov sa zaoberá možnosťami výpočtu pohybu či už kladne alebo záporne nabitých častíc v elektrickom poli, magnetickom poli a v kombinácii týchto polí. Práca je zameraná na numerické metódy výpočtu ako sú Metóda konečných prvkov, Metóda konečných diferencií a Metóda konečných objemov, ich využitie v praxi. Keďže modelovanie polí je dostáva sa táto téma výrazne no popredia v rôznych odvetví nášho života či už sa to jedná a pôsobenie elektrického pola na ióny alebo využitie týchto metód výpočtu v strojnóm alebo v stavebnóm inžinierstve je táto bakalárska práca aktuálna.

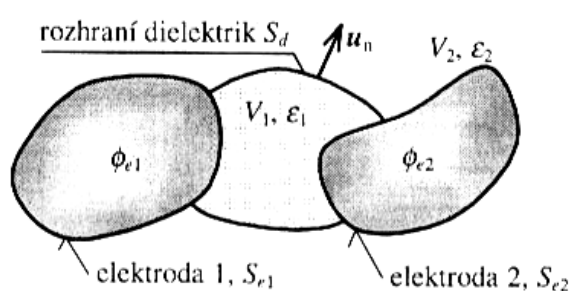
Na kvalitatívne vyšší stupeň návrhu senzoru pre sledovanie pohybu voľných nábojov vo vzduchu je nevyhnuté vytvoriť numerický model úlohy. Na základe výsledkov analýzy je možné navrhnúť základnú koncepciu senzoru a ten experimentálne testovať. Tieto experimenty slúžia tiež k overeniu presnosti numerické analýzy. V minulosti sa zameralo len na výrobu experimentálneho modelu, a na základe experimentov sa stanovovali hypotézy a tie sa zdĺhavo overovali čo bolo hlavne náročné na čas realizácie senzoru. A výsledná realizácia senzora sa predĺžila až na niekoľko desiatok týždňov.

Súčasný navrhnutý postup výrazne skráti dobu navrhovania a testovania senzoru. Preto v posledných 20 rokoch dochádza a výraznému pokroku v numerických metódach modelovaní polí

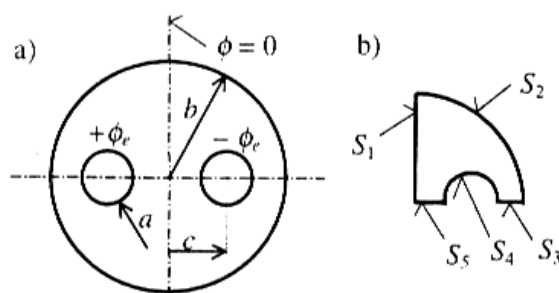
Táto práca je zameraná na analýzu pohybu iónov e elektrickom stacionárnom poli, kde som za pomoci modelovacieho programu pozoroval zmeny pohybu častíc pri zmenách elektrického poľa alebo pri zmene parametrov častíc. V závere práce som zhodnotil namerané výsledky s predpokladanými teóriami. Analýzy slúžili k vytvoreniu numerického modelu senzoru pohybu voľných iónov vo vzduchu.

## 2 Numerické modely pohybu vhodné na sledovanie voľných iónov

Analytické metódy výpočtu sú publikované [1] a sústreďujú sa hlavne na situácie, pri ktorých dochádza k stretu prinajmenšom dvoch prostredí s rôznymi vlastnosťami. Na obecnom príklade si ukážeme a sformulujeme rovnice potrebné pre výpočet poľa.



Obr.1 Obecný elektrostatičný problém



Obr.2 Príklad okrajovej podmienky

Na obrázku 1 je naznačená úloha. Sú zadané geometrie elektród s povrchmi  $S_{e1}$  a  $S_{e2}$  a so známymi potenciálmi  $\Phi_{e1}$  a  $\Phi_{e2}$  a v oblasti  $V_1$  a  $V_2$  s permitivitami  $\epsilon_1$  a  $\epsilon_2$ . Ak sa vyskytujú voľné elektróny tak je známa aj ich objemová hustota alebo plošná hustota. Problém analýzy je možné formulovať dvomi spôsobmi:

1. Je treba nájsť potenciálnu funkciu  $\Phi(x, y, z)$ , ktorá splní Poissonovu rovnicu v celej oblasti a ďalej okrajové podmienky: potenciál na elektródach  $\Phi_e$  bude  $\Phi_{e1}$  a  $\Phi_{e2}$  a na rozhraní medzi dielektrikami bude splnená podmienka spojitosti normálovej zložky indukcie

$$D_{n2} - D_{n1} = \sigma \quad (1)$$

2. Je potrebné nájsť také rozloženie hustoty voľného náboja na elektródach a na rozhraní medzi dielektrikami  $\sigma + \sigma'$  podľa

$$D_n = \sigma \quad (2)$$

a

$$E_n = \frac{\sigma + \sigma'}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_c}{\epsilon_0},$$

ktoré zaistia okrajové podmienky. Problém sa tak prevedie na problém vákuu a pole vnútri oblasti sa vypočíta pomocou Coulombova zákona.

Pohybová rovnica nabitých častíc v elektrostatičkom poli.

$$[M] \ddot{x} + [L] \dot{x} + [K] x = F \quad (4)$$

Úlohy sa môžu výrazne zjednodušiť, ak vykazujú geometrickú symetriu. Takýmto spôsobom zjednodušenia dokážeme znížiť počet premenných. Podľa počtu súradníc rozoznávame úlohy jedno-, dvoj-, trojrozmerné (1D, 2D, 3D).

Symetrickú úlohu je možné zjednodušiť využitím platných okrajových podmienok. Príklad (obr. 1.1b) je symetrický koaxiálny kábel, u ktorého je potrebné nájsť 2D pole. Vzhľadom k symetrii príkladu je možné počítať pole len v jednom kvadrante.

Pri výpočtu poľa vnútri oblasti, na ktorej sú zadané podmienky, hovoríme o vnútornej úlohe. Ak počítame v neobmedzenej oblasti, hovoríme o vonkajšej úlohe. Toto triedenie je dôležité pri numerických úlohách, v ktorých sú niektoré hodné na vonkajšie úlohy alebo na vnútorné.

Ak je v úlohe zadaný potenciál hranice, nazýva sa úloha Dirichletova, a pri zadaní intenzity na hranici úloha Neumanova.

Tieto analytické metódy výpočtu sú obmedzené na 1D a 2D úlohy s jednoduchými podmienkami. Tieto metódy sa hlavne používali v minulosti. Teraz s nástupom vyspelej počítačovej techniky a ich postupným vývojom sa vyvíjajú aj účinnejšie numerické metódy, ktoré umožňujú modelovať reálne 2D a 3D polia. Najrozšírenejšie metódy sú:

- **Metóda konečných diferencií**
- **Metóda konečných prvkov**
- **Metóda hraničných prvkov**
- **Metóda konečných objemov.**

Spoločným rysom numerických metód je náhrada presného riešenia diferenciálnymi alebo integrálnymi rovnicami riešením približným.

Každá úloha je zadaná:

- Popisom geometrie. Oblasť, v ktorej sa hľadá riešenie, sa rozdelí na pod oblasti a tie sa delia na elementy určené uzlami a ich súradnicami.
- Popisom materiálových vlastností a pod oblastí.
- Diferenciálnou alebo integrálnou rovnicou poľa.
- Popisom okrajových podmienok na hraniciach pod oblastí.
- Popisom rozloženia zdrojov v pod oblastiach a na plochách.
- Ďalšími vzťahmi, odvodenými z vypočítanej veličiny.

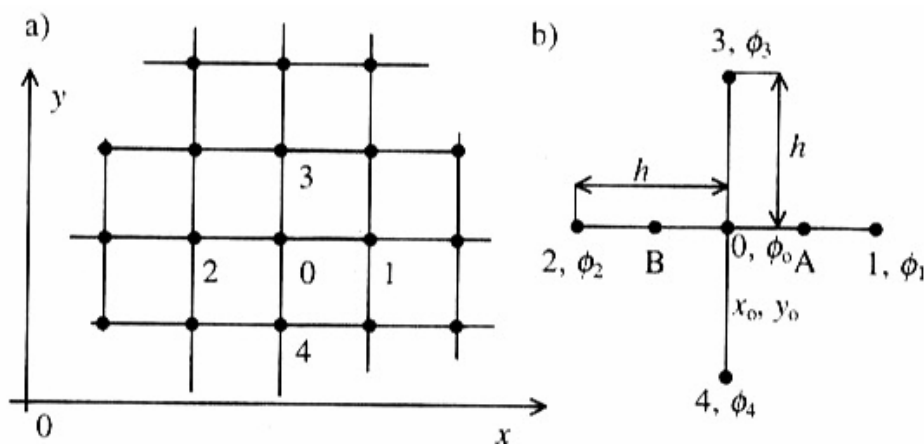
A tak výsledkom numerického riešenia je sústava rovníc. K ich riešeniu je možné využiť nasledovné metódy :

- **Presnej (finitní) metódy** – teoreticky presné riešenie sa získa po konečnom množstve krokov
- **Iteračne (približné) metódy** – k presnému riešeniu konverguje nekonečná postupnosť vektorov (efektívnosť iteračných metód závisí na voľbe počiatkovej aproximácie a rýchlosti konvergenencie), problémom je tu počiatková aproximácia.

## 2.1 Metóda konečných diferencií (MKD)

Táto metóda publikovaná [1] a vychádza z fyzikálneho modelu úlohy. Podstatou riešenia MKD je náhrada parciálnych derivácií podľa nich ich diferenciami. Všeobecný postup pozostáva z:

1. Oblasť, v ktorej nás zaujíma rozloženie potenciálu pokryjeme sieťou. Pre 2D úlohu volíme sieť štvorcovú, obdĺžnikovú, polárnu, pre 3D úlohu ich priestorové ekvivalenty. V uzloch siete zavedieme hľadané potenciály.
2. V každom uzle nahradíme parciálne derivácie v Poissovej rovnici numerickými deriváciami vyjadrených z hodnôt potenciálov v uzle a v susedných uzloch.
3. Postup opakujeme so všetkými uzlami kde je neznámy potenciál. Tak dostaneme sústavu rovníc pre uzlové potenciály.
4. Sústavu vyriešime.
5. Z vypočítaných potenciálov stanovíme aproximáciou intenzitu a ďalšie veličiny.



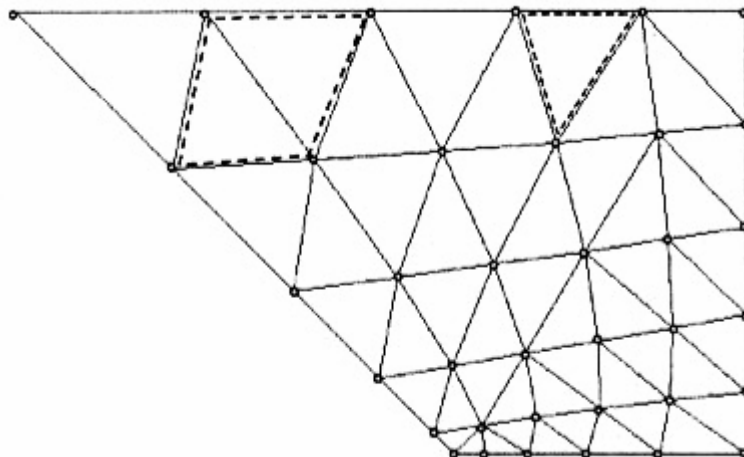
Obr.3 Príklad siete pre metódu konečných diferencií v 2D úlohe

MKD sa komplikuje na rozhraniach so zložitou geometriou a na rozhraniach so skokovou zmenou permitivity. Pri výpočte statických polí je MKD vytlačovaná metódou konečných prvkov.

## 2.2 Metóda konečných prvkov (MKP)

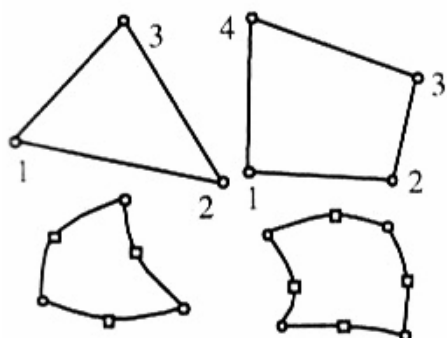
Metóda konečných prvkov je publikovaná [1]. Tá poskytuje väčšiu flexibilitu k tomu, aby modelovala ako metóda konečných diferencií alebo metóda konečných objemov. Táto metóda je využívaná pri riešení štruktúrnych, mechanických úlohách a pri riešení problémov dynamiky tekutín.

Podobne ako u MKD zavádzajú sa v oblasti, kde sa počíta pole, uzly a uzlové potenciály. Uzly ale môžu byť rozložené nepravidelne a môžu tak sledovať tvar hraničných plôch. V miestach kde sa predpokladá prudká zmena poľa, tam sa zavedie väčšia hustota siete. Metóda je vzhľadom k NKD kvalitatívne odlišná. Je založená na aproximácii výsledného riešenia po častiach spojitou funkciou. ( príklad rozloženia siete je na obr. 3)

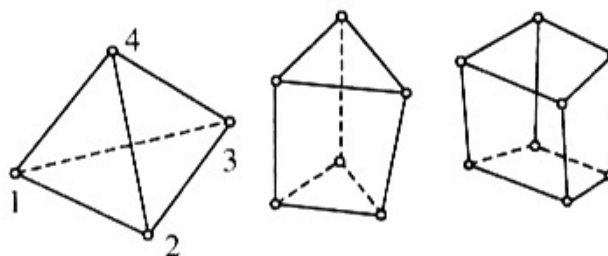


Obr.4 Príklad rozloženia siete uzlov

Tak ako u MKD sa zostaví sústava rovníc pre neznáme uzlové hodnoty. Koefficienty matice sústavy a pravých strán sa nepočítajú diferencií, nahradzujúce derivácie, ale ako integrály cez elementárne plôšky alebo objemy, a v ich vrchoch sú uzly. Tieto elementárne útvary sa volajú *konečné prvky*. Na obr. 3 je naznačený konečný prvok tvaru trojuholníka štvoruholníka. Základné rovinné prvky sú na obr.4. Parabolický prvok ma zakrivené hrany s ďalším uzlom na hrane.



Obr.5 Rovinné prvky



Obr.6 Elementárne priestorové prvky

Postup pri aplikácii MKP pozostáva z týchto častí:

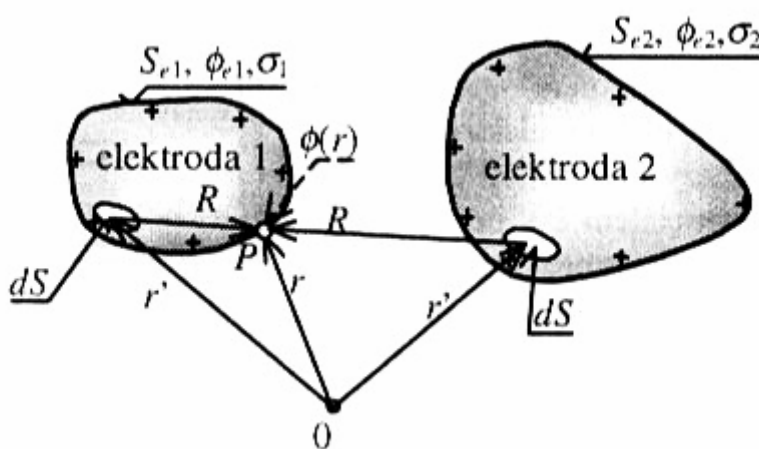
1. Generácia siete prvkov s uzlami.
2. Aproximácia potenciálu na jednotlivých prvkoch z uzlových hodnôt.
3. Dosadením zvolenej aproximácie do diferenciálnej rovnice alebo jeho ekvivalentu a zostavenie rovníc pre neznáme uzlové hodnoty.
4. Vyriešenie sústavy.
5. Spracovanie dodatočných požiadavkov.

## 2.3 Metóda hraničných prvkov (MHP)

Metóda hraničných prvkov je publikovaná [1]. Je podobná metóda ako MKP. Numerická metóda je založená na formulácii integrálnych rovníc a využíva efektu Stokesovej vety. I keď analytické riešenie integrálnych rovníc je obtiažne, ich numerické riešenie na počítači je relatívne jednoduché.

### 2.3.1 Princíp metódy

V tomto odstavci sa pokúsim formulovať integrálne rovnice tak, aby umožnili stanoviť elektrostatické pole, spôsobené elektródami, pripojenými na zadaný potenciál za prítomnosti rôznych dielektrík.



Obr.7 Príklad odvodenia integrálnej rovnice

Potenciál v koncovom bode  $P$  vektoru  $r$  na prvej elektróde je daný

$$\phi_{e1}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{\sigma(r')}{R(r, r')} dS \quad S_e = S_{e1} + S_{e2} \quad R(r, r') = |r - r'| \quad (5)$$

Povrch elektród si rozdelíme na  $NE$  plôch veľkostí  $\Delta S_j$ . Po úpravách dostaneme:

$$Q_i = \epsilon_0 \sum_{i=1}^{NE_i} q_i \Delta S_i \quad (6)$$

Je to celkový náboj  $i$ -tej elektródy s  $NE_i$  plôškami.

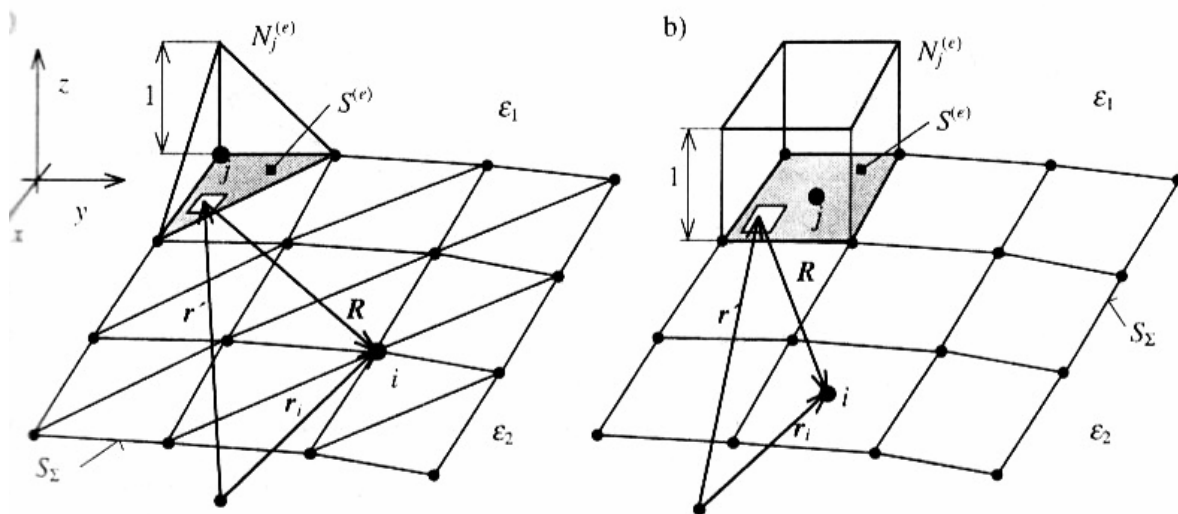
### 2.3.2 Stokesova veta

$$\oint_{\gamma=\partial S} K \cdot dl = \iint_S (\text{rot}K) \cdot dS \quad (7)$$

Prevod cirkulácie poľa po uzatvorenej krivke (krivkového integrálu) na plošný integrál

### 2.4.3 Metóda hraničných prvkov

Metóda využíva princíp diskretizácie plôch, vystupujúcich v integrálnych rovniciach, na prvky a aproximáciou hľadané hustoty tvarovými funkciami na prvkoch a aproximačnými funkciami uzlov, tak isto ako MKP. Hľadáme rozloženie  $q = \sigma_c / \epsilon_0$  na ploche  $S_\Sigma$  predstavujúci povrch elektród a rozhranie medzi dielektrikami. Plochu  $S_\Sigma$  rozdelíme na plošné prvky s plochou  $S^{(e)}$  a na prvkoch zavedieme tvarové funkcie. Na obr.5 je plocha v 3D priestore rozdelená na lineárne trojuholníky s naznačenou lineárnou tvarovou funkciou. V MHP je možné použiť aj konštantnú aproximačnú funkciu (podľa obr.5 b.) Dôvod prečo môžeme požiť aj konštantné aproximačné funkcie je ten, že tieto funkcie sa nederivujú, ako v MPK, ale len integrujú.



Obr.8 Diskretizácia plôch a tvarové funkcie MHP

Hľadanú hustotu  $q$  aproximujeme z uzlových hodnôt aproximačnými funkciami a dostaneme

$$q(r') = \sum_{j=1}^{NU} q_j N_j(r') \quad (8)$$

kde  $NU$  je počet uzlov. Využitím tejto aproximácie dostaneme

$$\phi_e(r) - \frac{1}{4\pi} \int \sum_{j=1}^{NU} q_j N_j(r') \frac{1}{R(r,r')} dS(r') = res(r, q_1, \dots, q_{NU}) \quad (9)$$

Rovnica má určitý zbytok  $res$ , ktorý závisí na polohe  $r$  a uzlových hodnotách  $q_1, \dots, q_{NU}$ . Tento zbytok je možné minimalizovať rôznymi metódami.

Na rozdiel od MPK a MKD je výsledná matica hustá a zle podmienená. Na druhej strane je dimenzia úlohy znížená o 1, tj. V 3D úlohe sa neznáma hľadá na ploche, v 2D úlohe na krivke. Na presnosť nám stačí menej rovníc. Ďalšou výhodou je, že úloha nemusí mať uzatvorenú hranicu a je vhodná na riešenie priestorovo neobmedzených polí. A ďalej, že počítaná veličina  $q$  je zhodná s intenzitou poľa na elektróde.

## 2.5 Metóda konečných objemov (MKO)

Je publikovaná [2] metóda konečných objemov je založená na integráli princípu zachovaní  
 Obecný postup riešenia MKO je:

1. konkrétna voľba kontrolných objemov
2. voľba typu aproximácie
3. určenie numerickými metódami hodnoty integrálov a tokov

V metóde konečných objemov je počítaná oblasť (doména)  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  mriežkovo rozdelená na súbor neprekrývajúcich sa riadiacich objemov, ktoré pokrývajú celú oblasť. Nech  $P$  označíme ako mriežku domény  $\Omega$  s kontrolnými objemami  $T \in P$ .

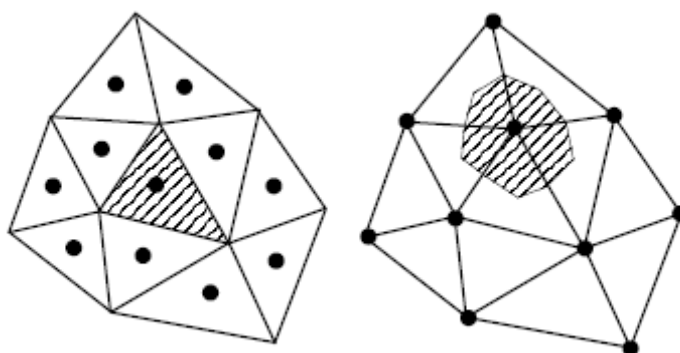
Nech  $h_T$  značí dĺžkovú stupnicu priradenou s každým kontrolným objemom  $T$  tj.  
 $h_T \equiv \text{daim}(T)$

Pre každý kontrolný objem je daný:

$$\frac{d}{dt} \int_T u dx + \int_{\partial T} f(u) \cdot dv = 0 \quad (10)$$

Integrál zákona zachovania tvrdí, že rýchlosť zmeny celkového množstva substancie s hustotou  $u$  v nemennom kontrolnom objeme  $T$  sa rovná celkovému toku substancie cez hranicu  $\partial T$ .

V metóde konečných objemov je voľba kontrolnej oblasti flexibilná, ako je vidieť na obrázku.



A. bunkovo centrovaná

B. vrcholovo centrovaná.

Obr.9

Obrázok ukazuje 2-D mriežkovanie použité v metóde konečných objemov. V bunkovo centrovanej metóde konečných objemov je vidieť v obr. a., že trojuholníky tu sami slúžia ako jednotlivé kontrolné objemy. Oproti vrcholovo centrovanej metóde, ukázanej na obr. b., kontrolné objemy sú dané pomocou vrcholov trojuholníkov v mriežke.

Toto je rozdiel proti metóde konečných prvkov kde sme úplne viazaní na mriežku. Typický príklad mriežkovania v MKP je zobrazený na obr. b.

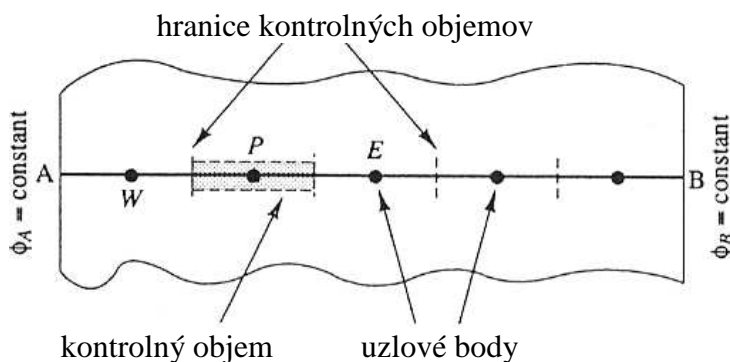
Typy diskretizácií v metóde konečných objemov:  
Godunova diskretizácia

## 2.5.1 MKO pre 1 D difúziu ustáleného stavu

Uvažujme ustálený stav rozptylu vlastností  $\Phi$  v jednorozmernej doméne definovanej v obr.

$$\frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) + S = 0 \quad (11)$$

Regulovaná sústava podlieha kde  $\Gamma$  je koeficient difúzie a  $S$  je zdrojový člen. Hraničné hodnoty  $\Phi$  v  $A$  a  $B$  sú pevne stanovené.

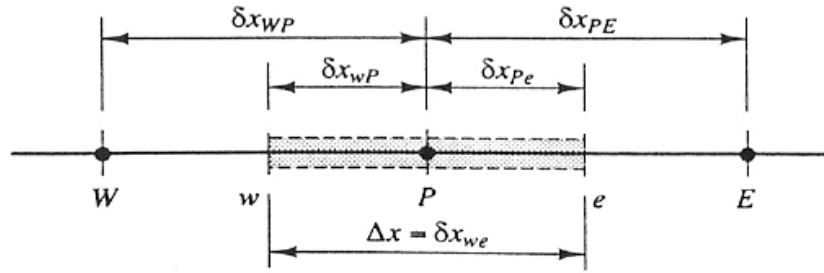


Obr.10 Určenie uzlových bodov

Pri generácii siete prvkov je prvým rozdelenie uvažovanej oblasti na diskkrétne oblasti. Umiestnime niekoľko uzlových bodov medzi body A a B. Hranice kontrolných objemov sú posunuté do stredu medzi určenými bodmi. Tak sú kontrolné objemy obklopené kontrolným objemom. Toto je postup nastavenia k tomu, aby sa vztýčili kontrolné objemy blízko okrajov oblasti pôsobnosti, takým spôsobom, že prirodzené hranice sa zhodujú s kontrolným objemom hranice.

Hlavný uzlový bod je identifikovaný ako P a jeho susedia v 1D priestore. Uzly vpravo a vľavo sú značené ako W a E. Ľavá strana uvažovaného objemu je uvedená ako 'w' a pravá časť nášho objemu je uvedená ako 'e'. Vzdialenosti medzi P, W, a E sú značené ako  $\delta x_{WP}$  a  $\delta x_{WE}$ . A šírka kontrolného objemu je  $\Delta = g \delta x_{we}$ .

Obr 4.2



Obr.11 Popis konečného objemu

U diskretizácie je hlavným krokom spojenie rovníc cez kontrolne objemy tak aby výsledok diskretizačných rovníc sa rovnal v uzlových bodoch, konkrétne v bode P. Pre hore uvedený kontrolný objem je rovnica takáto:

$$\int_{\Delta V} \frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) dV + \int_{\Delta V} S dV = \left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w + \bar{S} \Delta V = 0 \quad (12)$$

Kde A je tu plocha prierezu čela kontrolného objemu  $\Delta V$  je objem a  $\bar{S}$  je priemerná hodnota emitora S cez kontrolný objem. Rovnica ukazuje, že difúzne prúdenie  $\phi$  toku opúšťajúce východnú časť E mínus difúzne prúdenie  $\phi$  toku vstupujúce do západnej časti je rovná generácie toku  $\phi$ . To predstavuje rovnovážnu rovnicu toku cez kontrolný objem.

K tomu aby sa dali odvodiť diskretizačné rovnice je potrebné vedieť rozhranie difúzneho koeficienta  $\Gamma$  a gradienta  $d\phi/dx$  pri plôške 'e' a pri plôške 'w'. Ďalej sú hodnoty vlastností toku  $\phi$  a difúzných koeficientov definované a využité v uzlových bodoch. V jednotnej mriežke interpolovaných hodnotami  $\Gamma_e$  a  $\Gamma_w$  sú dané

$$\Gamma_w = \frac{\Gamma_w + \Gamma_p}{2} \quad (13)$$

$$\Gamma_e = \frac{\Gamma_e + \Gamma_p}{2} \quad (14)$$

Podmienky difúzneho prúdenia sú dané

$$\left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e = \Gamma_e A_e \left( \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} \right) \quad (15)$$

$$\left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w = \Gamma_w A_w \left( \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} \right) \quad (16)$$

Pri dosadení do vzťahu (12)

$$\Gamma_e A_e \left( \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} \right) - \Gamma_w A_w \left( \frac{\phi_E - \phi_W}{\delta x_{WP}} \right) + (S_u + S_p \phi_P) = 0 \quad (16)$$

Alebo

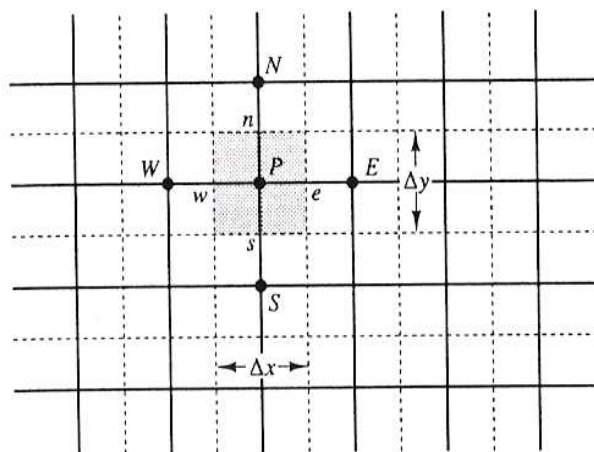
$$\left( \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e + \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w - S_p \right) \phi_P = \left( \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w \right) \phi_W + \left( \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e \right) \phi_E + S_u \quad (17)$$

Táto diskreditácia sa musí urobiť na každý uzlový bod. To nám prejde so sústavy rovníc prípadne matíc.

## 2.5.2 MKO pre 2 D difúzie ustáleného stavu

Princíp je ten istý ako u 1D len sa pridá ďalší rozmer. Uvažujme ustálený difúzny stav popisujúci rovnicou

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S = 0 \quad (18)$$



Obr.12 Konečný objem v 2 D mriežke

Integrovaná rovnica difúzneho ustáleného stavu je

$$\int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx \cdot dy + \int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx \cdot dy + \int_{\Delta V} S_\phi dV = 0 \quad (19)$$

A dosadením za  $\Delta y = A_e = A_w$  a za  $\Delta x = A_n = A_s$  dostaneme

$$\left[ \Gamma_e A_e \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \Gamma_w A_w \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] + \left[ \Gamma_n A_n \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n - \Gamma_s A_s \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s \right] + \bar{S} \Delta V = 0 \quad (20)$$

Ako predtým táto rovnica predstavuje rovnováhu generácie  $\phi$  v kontrolnom objeme a tokmi cez bunkové steny.

Aproximáciou môžeme napísať výrazy pre toky cez plochy kontrolného objemu.

$$\text{Tok cez západnú (west) plochu} \quad \Gamma_w A_w \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_w = \Gamma_w A_w \frac{(\phi_P - \phi_w)}{\delta x_{WP}} \quad (21)$$

$$\text{Tok cez východnú (east) plochu} \quad \Gamma_e A_e \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_e = \Gamma_e A_e \frac{(\phi_E - \phi_P)}{\delta x_{PE}} \quad (22)$$

$$\text{Tok cez južnú (south) plochu} \quad \Gamma_s A_s \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_s = \Gamma_s A_s \frac{(\phi_P - \phi_S)}{\delta x_{SP}} \quad (23)$$

$$\text{Tok cez severnú (north) plochu} \quad \Gamma_n A_n \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_n = \Gamma_n A_n \frac{(\phi_N - \phi_P)}{\delta x_{PN}} \quad (24)$$

Dosadením do hore uvedenej rovnice dostávame

$$\Gamma_e A_e \frac{(\phi_E - \phi_P)}{\delta x_{PE}} - \Gamma_w A_w \frac{(\phi_P - \phi_w)}{\delta x_{WP}} + \Gamma_n A_n \frac{(\phi_N - \phi_P)}{\delta x_{PN}} - \Gamma_s A_s \frac{(\phi_P - \phi_S)}{\delta x_{SP}} + \bar{S} \Delta V = 0 \quad (25)$$

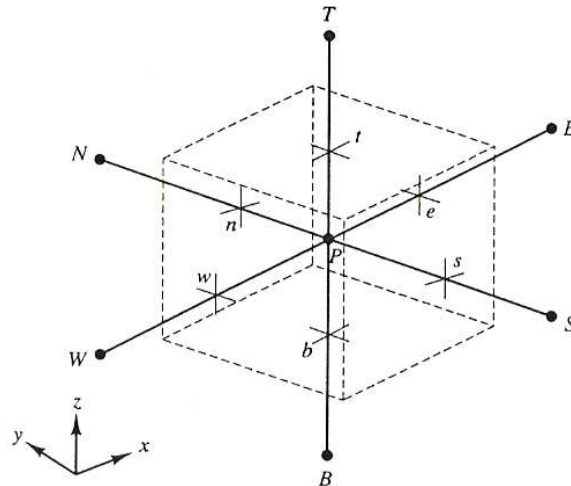
Ak je zdrojový výraz reprezentovaný v linearizovanej forme  $\bar{S} \Delta V = S_u + S_P \phi_P$  táto rovnica môže byť prepísaná na :

$$\left( \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}} + \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} + \frac{\Gamma_s A_s}{\delta x_{SP}} + \frac{\Gamma_n A_n}{\delta x_{PN}} - S_P \right) \phi_P = \left( \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}} \right) \phi_w + \left( \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} \right) \phi_E + \left( \frac{\Gamma_s A_s}{\delta x_{SP}} \right) \phi_S + \left( \frac{\Gamma_n A_n}{\delta x_{PN}} \right) \phi_N + S_u \quad (26)$$

### 2.5.3 MKO pre 3 D difúzie ustáleného stavu

Rovnovážny dyfúzny stav v 3 D situácii je popísaný rovnicou

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + S = 0 \quad (27)$$



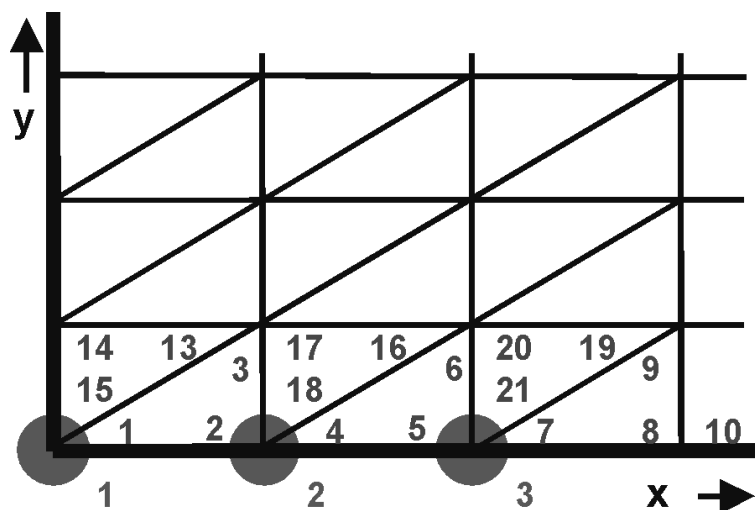
Obr.13 Konečný objem v 3 D úlohe

Typický kontrolný objem v 3 D úlohe je ukázaný na obr. Ďalší postup je identický ako v 2 D úlohe, s tým rozdielom, že sa pridá ďalší rozmer a tým je úloha komplikovanejšia. Ďalším rozmerom nám pribúda jeden prvok a tým sa zväčšujú výsledné matice.

## 2.6 Porovnanie metód konečných prvkov a konečných objemov

### 2.6.1 Metóda konečných prvkov

Podstata MKO je rozdelenie oblasti výpočtu na určitý počet konečných prvkov, ktorých



Obr.14 Mriežka konečných prvkov

rozmery nemusia byť rovnaké. MKO vychádza z predstavy rozdelenia telesa na pod oblasti a vyjadrenie celkovej potenciálnej energie telesa ako súčet potenciálnych energií týchto pod oblastí.

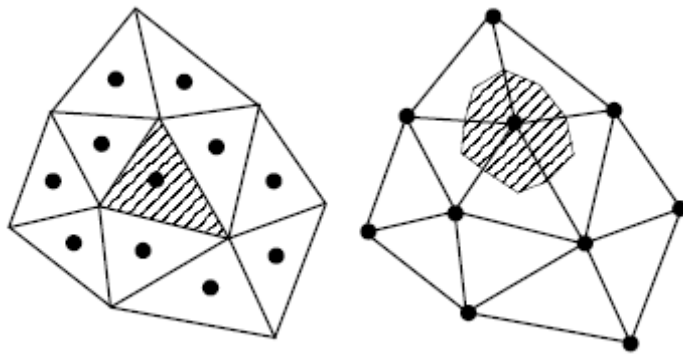
Pri metóde konečných prvkov aproximácia prebieha po častiach lineárnych funkcií.

### 2.6.2 Metóda konečných objemov

U metódy konečných objemov je oblasť výpočtu rozdelená a uzlové body, tie tvoria stredy kontrolných objemov a definujú jeho vlastnosti, a na hranice kontrolných objemov. Hlavným krokom je spojenie rovníc cez kontrolne objemy tak aby výsledok diskretizačných rovníc sa rovnal v uzlových bodoch

Metóda konečných objemov využíva integrálneho tvaru bilančných rovníc aproximácie toku cez hranice kontrolného objemu.

Výhoda MKO je tá, že pri určovaní kontrolných objemov nie sme priamo závislí od danej mriežky. ako vidieť z obr. môžeme si určiť polohu kontrolného objemu,



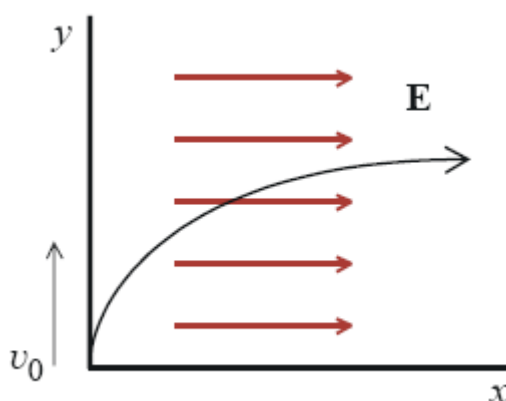
Obr.15 Určenie polohy konečného objemu

oproti tomu v MKP máme konečné prvky plne určené mriežkou obr.15.

### 3 Pohyb nabitých častíc v elektrickom a magnetickom poli

V predošlých článkoch sme sa zaoberali metódami výpočtu. Ktoré budú použité na výpočty pohybov nabitých častíc. Teraz si načrtne elementárne prípady pohybu častíc a to v homogénnom elektrickom poli a magnetickom poli.

#### 3.1 Pohyb nabitých častíc v homogénnom elektrickom poli.



Obr.16 smer šírenia elektrónu v elektrickom poli

Je publikované [8]. Pole urýchľuje elektrón ( elektrón je elementárna častica a nám pre príklad postačí), a preň platí

$$F = m\left(\frac{dv}{dt}\right), F = QE \quad (28)$$

kde:

Q - veľkosť náboja

E - veľkosť intenzity elektrického poľa

Vektor síl F z (10) je doplnený do pohybovej rovnice (4) a získa sa tak model pohybu nabitých častíc v elektrostatickom poli.

$$[M] \ddot{x} + [L] \dot{x} + [K] x = m\left(\frac{dv}{dt}\right) \quad (29)$$

Teda ide o pohyb rovnomerne zrýchlený v smere elektrického poľa. Rovnica jeho dráhy je

$$y = \frac{QEx^2}{2mv_0^2 \cos^2 \alpha} + x \operatorname{tg} \alpha \quad (30)$$

Tieto rovnice platia pre prostredie, v ktorom sa neuvažuje vplyv prostredia na časticu.

Každá voľna elektricky nabitá častica sa v elektrickom poli pohybuje v smere danom znamienkom svojho náboja a orientáciou elektrického poľa. Je jasné, že menej objemné častice s väčším nábojom sa budú pohybovať rýchlejšie ako častice objemné majúci malý

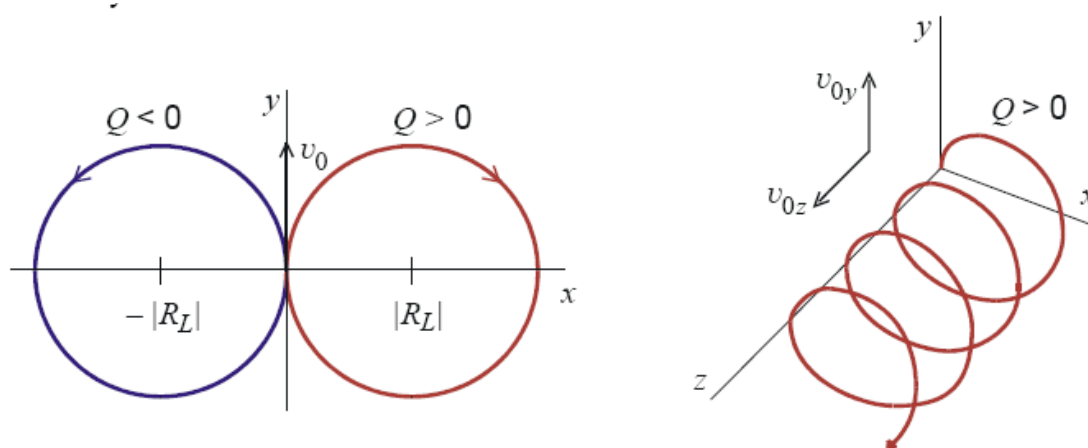
elektrický náboj. Absolútna rýchlosť pohybu iónu v elektrickom poli o jednotkovej intenzite je daná vzťahom:

$$v = p_i * E = (p_i * U) / l$$

kde:

$v$  je okamžitá rýchlosť iónu,  $p_i$  je pohyblivosť iónu,  $E$  je intenzita elektrického pola,  $U$  je napätie,  $l$  je vzdialenosť elektród.

### 3.2 Pohyb nabitých častíc v homogénnom a stacionárnom magnetickom poli



Obr.17 Ukážka pohybu nabitých častíc v magnetickom poli

Magnetické pole je publikované [6] a je tvorené okolo vodiča s prúdom, okolo permanentného magnetu, pohybujúcej sa častice s prúdom, atd. Magnetické pole je znázornené vektorom magnetickej indukcie  $B$ . Je to vektorová veličina a teda okrem veľkosti má daný aj smer a ten sa určí pomocou Flemingovho pravidla pravej ruky.

Magnetická sila je kolmá ako na smer rýchlosti častice tak aj na magnetické pole. Ak sa častica pohybuje v magnetickom poli magnetická sila zakrivuje trajektóriu, po ktorej sa častica pohybuje. Výsledkom je v najjednoduchšom prípade pohyb častice po kružnici.

Homogénne magnetické pole mení len smer pohybu (vektor hybnosti) častíc. Na časticu pôsobí Lorenzova (bez prítomnosti elektrickej sily je Lorenzova sila totožná so silou magnetickej):

$$\vec{F}_m = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (31)$$

Ak je:  $\vec{V} \perp \vec{B}$

Tak sa jedná o pohyb po kružnici s polomerom  $r$  (odstredivá sila vyrovnáva Lorenzovu silu)

$$m \frac{v^2}{r} = QvB \Rightarrow r = \frac{mv}{QB} = \frac{p}{QB} \quad (32)$$

Pre uhlovú rýchlosť:

$$m \frac{v^2}{r} = mv \quad \omega = QvB \Rightarrow \omega \frac{QB}{m} \quad (33)$$

V relativistickom prípade závisí hmotnosť na rýchlosti:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (34)$$

Smer rýchlosti voči smeru B

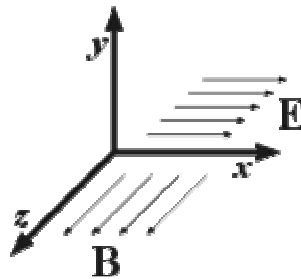
$$v_{\perp} = v \cdot \cos \alpha \quad \text{a} \quad v_{\parallel} = v \cdot \sin \alpha \quad (35)$$

V rovine kolmej na intenzitu magnetického poľa priemet pohybu kružnice s polomerom:

$$r = \frac{mv}{QB} \cos \alpha = \frac{p}{QB} \cos \alpha \quad (36)$$

Výsledný pohyb sa koná po šrúbovici s osou v smere intenzity B.

### 3.3 Pohyb nabitých častíc v homogénnom elektrickom a stacionárnom magnetickom poli



Obr.18 smer šírenia intenzity magnetického a elektrického poľa

Je publikované [6]. Ako je známe, pohyb častíc závisí na niekoľkých faktoroch. Ide hlavne o smer a veľkosť a smer elektrického a magnetického poľa, počiatočná rýchlosť častíc, náboj častíc a tiež ich hmotnosť. Je známe, že elektrické pole časticu urýchľuje a magnetické pole zakrivuje jej trajektóriu. V kombinovanom elektrickom a magnetickom poli sa pohyb častice skladá z dvoch častí.

1. Driftu, tj. odvažovanie častíc konštantnou rýchlosťou kolmo na obidve polia. Obecné tento typ pohybu nie je možné zložiť ako pohyb v elektrickej a magnetickej komponente a koná sa po krivkách, ktoré sa volajú trichoidy.
2. Elektrická zložka pole rovnobežná s polom magnetickým urýchľuje kladne a záporne nabitú časticu na opačné strany. Častica, ktorá má rýchlosť rovnobežnú s magnetickými siločiarami nie je magnetickým polom ovplyvnená.

Na časticu v elektromagnetickom poli pôsobí Lorentzova sila

$$F = Q(E + (v \times B)) \quad (37)$$

Po dosadení predpisu pre silu

$$F = m \cdot \ddot{r} \quad (38)$$

dostávame sústavu troch diferenciálnych rovníc druhého rádu ktoré musíme riešiť

$$\ddot{r} = \frac{Q}{m} (E + (v \times B)) \quad (39)$$

### 3.4 Pohyb nabitých častíc v reálnom prostredí

Zatiaľ sme uvažovali pohyb nabitých častíc, či už kladných alebo záporných, v ideálnom prostredí kde na ne okrem magnetickej a elektrickej sily žiadna iná sila nepôsobila. V opačnom prípade je nutné zaradiť do úvahy aj silu, ktorá pôsobí proti pohybu nabitej častice. Sila odporu prostredia je daná:

$$F_{\text{prostr.}} = 6 \cdot \pi \cdot \nu \cdot r \cdot v \quad (31)$$

kde:

$\nu$  je viskozita prostredia,  $r$  je polomer iónu,  $v$  je rýchlosť pohybu iónu,  $\pi$  je Ludolfovo číslo.

Sčítaním sily elektrickej a sily odporu prostredia dostaneme rovnicu:

$$F = F_{\text{el}} - F_{\text{prostr.}} = E \cdot Q - 6 \cdot \pi \cdot \nu \cdot r \cdot v \quad (32)$$

Z rovnice je vidno, že celková sila, ktorá pôsobí na nabitú časticu v nemennom prostredí je závislá na jej rozmeroch a veľkosti náboja častice. Ako je vidieť z rovnice (32) jej rýchlosť je priamo úmerná jej náboju a nepriamo úmerná veľkosti častice.

$$v = \frac{E \cdot Q}{6 \cdot \pi \cdot \nu \cdot r} \quad (33)$$

#### 3.4.1 Pohyb nabitých častíc v kvapaline

Ak sa v kvapaline už nachádzajú voľné ióny a nepôsobí na nich žiadna vonkajšia sila ich pohyb je výsledkom vzájomnej interakcie medzi sebou a teda pohyb je neusporiadaný a chaotický. Po vytvorení elektrického poľa v kvapaline, ktoré vznikne vložением katódy a anódy sa voľné ióny začnú pohybovať usporiadane a v kvapaline vzniká elektrický prúd. Látkové zmeny vyvolané priechodom prúdu v kvapaline na elektródach sa nazýva elektrolýza.

### 3.4.2 Pohyb nabitých častíc v plyne

Za normálnych podmienok je vzduch izolant. Vede elektrický prúd len, ak je ionizovaný. (rozloženie molekúl na ióny) taktiež ako aj v kvapaline bez vonkajšieho zdroja elektrickej energie pohyb iónov je chaotický a neusporiadaný a ich pohyb je taktiež výsledkom vzájomnej interakcie.

## 4 Fyzikálny model - Maxwellove rovnice

Keďže sa zaoberáme časovo premennými elektromagnetickými poliami a tieto polia sú popísané Maxwellovými rovnicami je dobré spomenúť jeho prvé dve rovnice, lebo tie majú zásadný význam v časovo premenných poliach.

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (\text{I}) \qquad \operatorname{rot} H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (\text{II})$$

Podľa týchto rovníc je vírové pole elektrické zviazané s časovou zmenou poľa magnetického a vírové pole magnetické s elektrickým prúdom a časovou zmenou poľa elektrického.

Rovnice (III) a (IV) určujú zdroje nevírových polí vektorov D a B. Ich význam pri analýze premenných polí je menší, lebo predstavujú len počiatočné podmienky pre (I) a (II).

$$\operatorname{div} D = \rho \quad (\text{III}) \qquad \operatorname{div} B = 0 \quad (\text{IV})$$

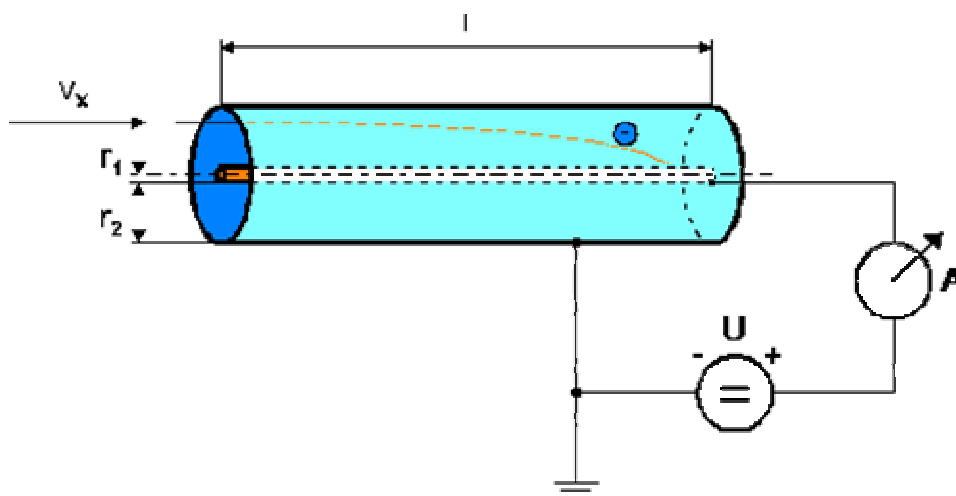
Podľa uvedených modelov riešenia PDR je navrhnutý numerický model aspiračného kondenzátora .

## 5 Numerický model pohybu nabitých častíc

Problematiku pohybu nabitých častíc v elektromagnetickom poli budeme simulovať pomocou programu ANSYS. Internetová stránka je [www.ansys.com](http://www.ansys.com). Tento program využíva na modelovanie a výpočet používa metódu konečných prvkov. Je určený na riešenie rozsiahlych lineárnych a nelineárnych úloh z veľa kategórií: štruktúrálnej, teplotnej, teplotne-mechanickej, elektromagnetickej, akustickej atď.

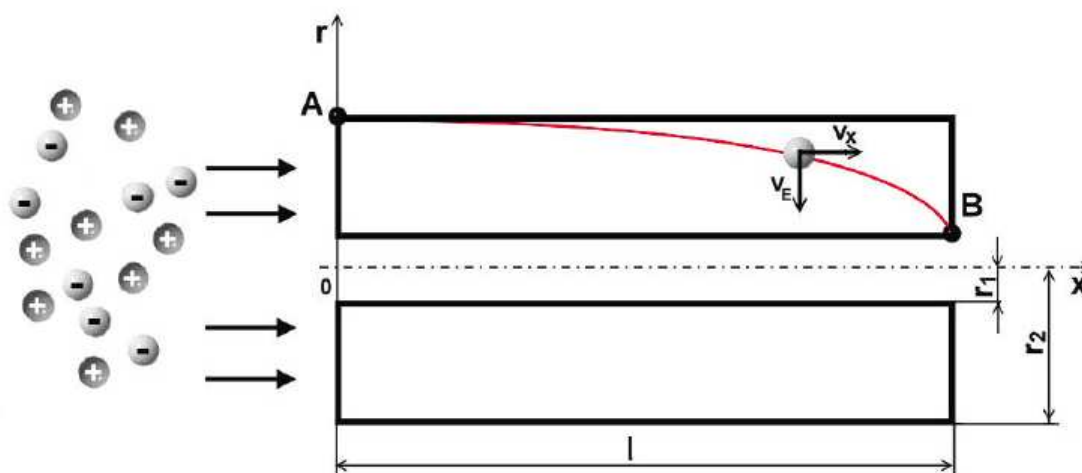
Model aspiračného kondenzátora je publikovaný [5].

Na obr. 19 je nakreslené schéma aspiračného kondenzátora.



Obr.19 Schéma aspiračného kondenzátora

Model bude riešiť združenú elektromagnetickú úlohu pohybu častice v elektromagnetickom poli s rovnicou (29) a (37).



Obr.20 Pohyb nabitých častíc vnútri aspiračného kondenzátora

Ión vychádza z počiatočného bodu A o súradniciach  $x(0) = 0$  a  $r(0) = r_2$ . Pohybová rovnica je vyjadrená

$$m\ddot{x} + l\dot{x} + kx = F \quad (34)$$

Kde  $\ddot{x} = a$ ,  $\dot{x} = v = konst$ ,  $x = x$  a  $F = f(F_x, F_E)$ ,

Rýchlosť  $v_x$  je vyjadrená ako

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad (35)$$

je to rýchlosť prúdenia vzduchu to je spôsobené ventilátorom nasávajúcim voľne ióny.

Pôsobením elektrického poľa  $E_{AK}$  sa ión pohybuje k nasávajúcej elektróde rýchlosťou

$$v_E = \frac{dr}{dt} = k \cdot E_{AK} \quad (36)$$

Kde  $v_E$  je rýchlosť iónov pôsobením intenzity elektrického poľa  $E_{AK}$ ,  $k$  je pohyblivosť ióna,  $E_{AK}$  je intenzita elektrického poľa vnútri valcového aspiračného kondenzátora.

Intenzita elektrického poľa vnútri valcového kondenzátora je daná vzťahom

$$E_{AK} = \frac{U_{AK}}{r \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \quad (37)$$

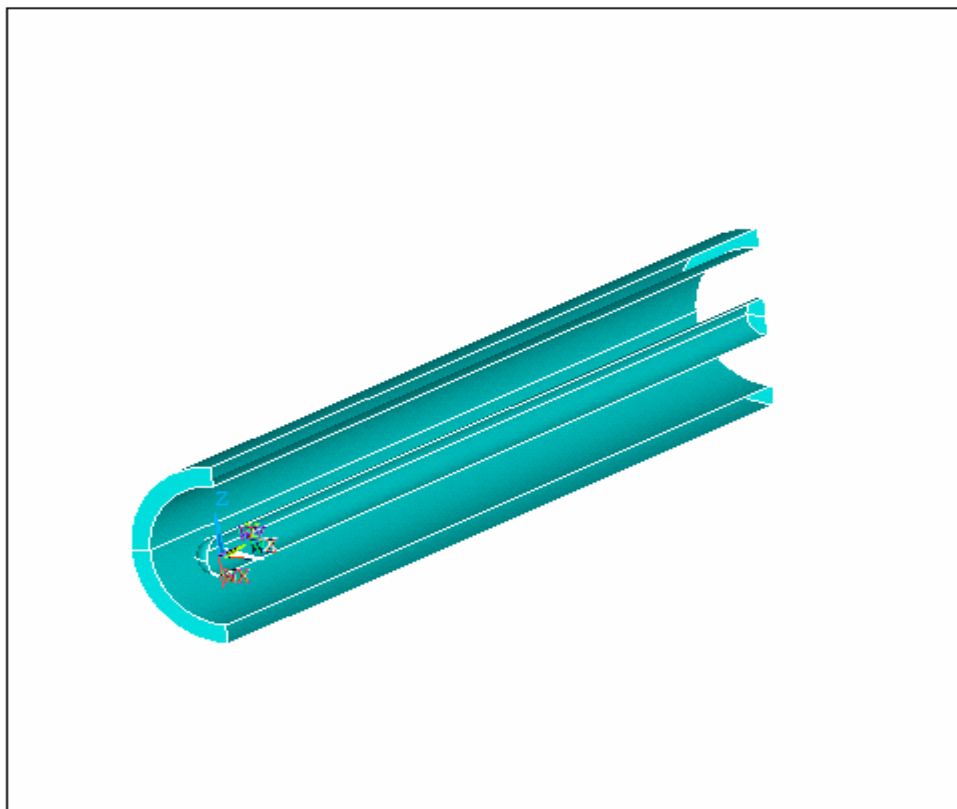
kde  $U_{AK}$  je napätie medzi elektródami.

Výsledná sila, ktorá pôsobí na ión je súčtom sily pohybovej sily ktorá je daná veľkosťou elektrického poľa a Lorenzovej sily

$$F = Q(E_{AK} + (v \times B_{AK})) \quad (38)$$

ktorej zdrojom je pôsobenie magnetickej a elektrickej sily.

## 6 Počítačový model – riešenie pomocou valcového kondenzátora.



Obr.21 zjednodušený model valcového kondenzátora

Na obrázku 21 je znázornený model valcového kondenzátora kde vnútorná časť predstavuje elektródu s nami zadaným napätím. Na tomto modeli sme testovali pôsobenie elektrického poľa na ióny.

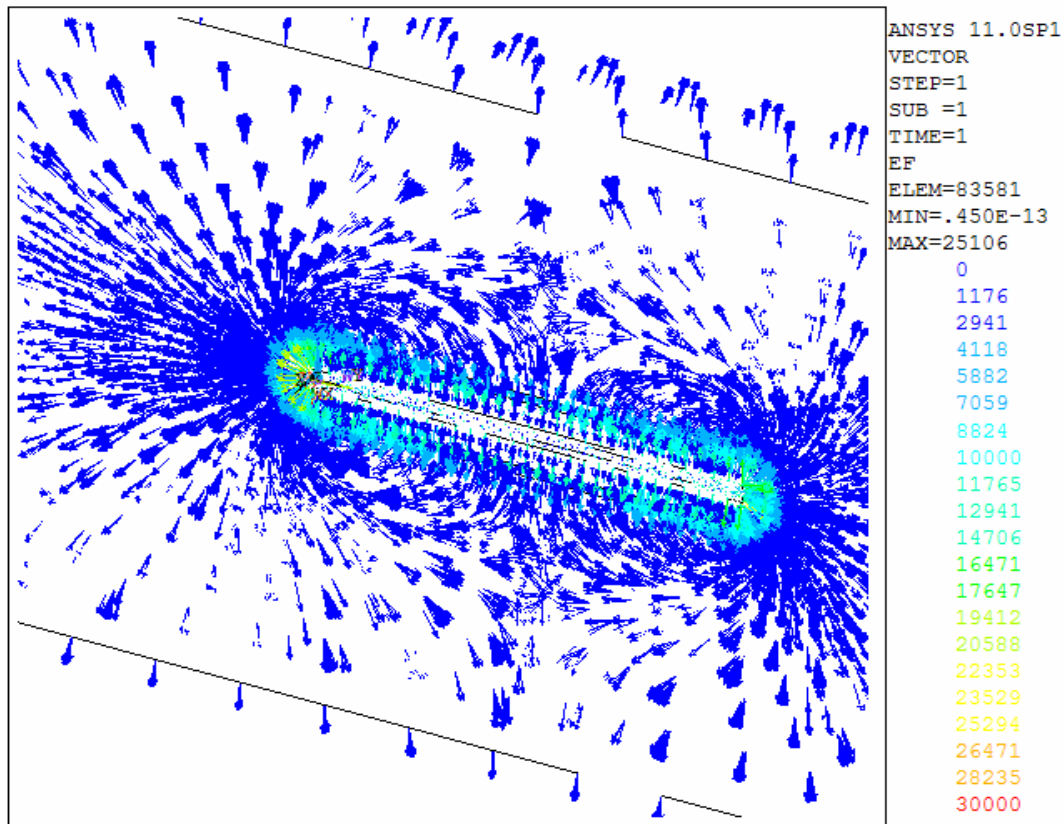
Budeme testovať častice:

1. častice s rovnakou hmotnosťou, rovnakým nábojom a rôznymi vzdialenosťami
2. častice s hmotnosťou  $9,01\text{E}-20$  kg a nábojom  $1,6\text{E}-15$  kg
3. vplyv napätia elektródy na pohyblivosť častíc

Tabuľka 1: súradnice zvolených bodov a ich parametre

Číslo častice	súradnice			náboj	hmotnosť
	x[m]	y[m]	z[m]		
1	-0,03	-0,07	0,08	-1,60E-19	9,10E-31
2	-0,01	0,08	0,05	-1,60E-19	9,10E-31
3	0,03	-0,12	-0,08	-1,60E-19	9,10E-31

Pohyb častíc sa zaznamenával v rozmedzí  $0,1\mu\text{s}$  až  $0,1\text{s}$ . Pri zmenách napätia na elektróde sme zadávali hodnoty  $0,1\text{V}$ ,  $1\text{V}$ ,  $10\text{V}$  a  $100\text{V}$ .

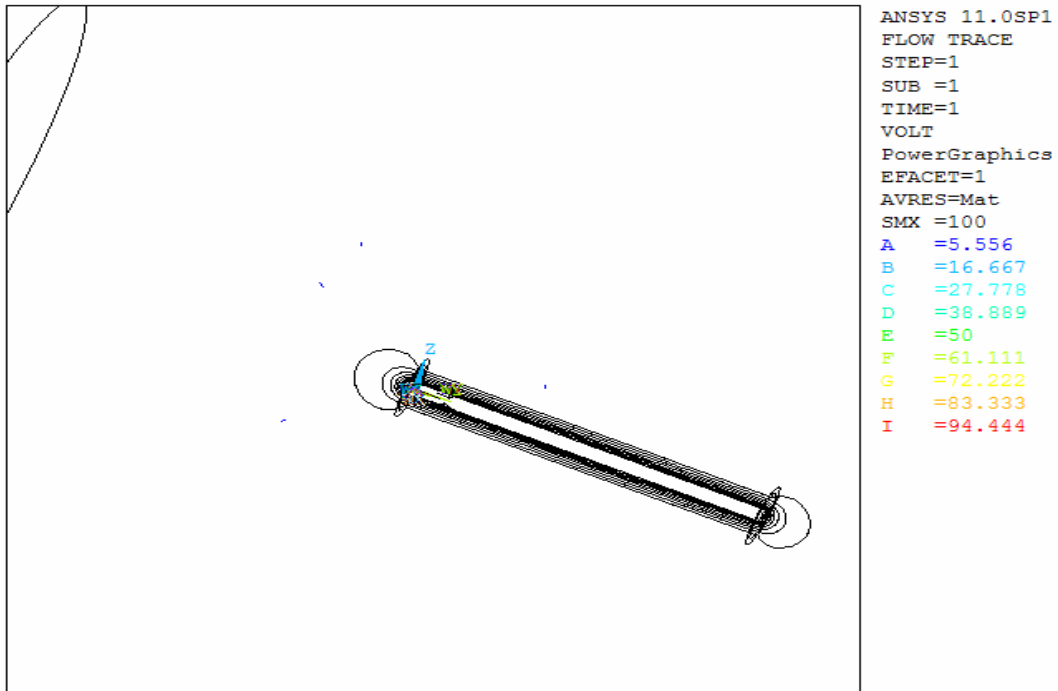
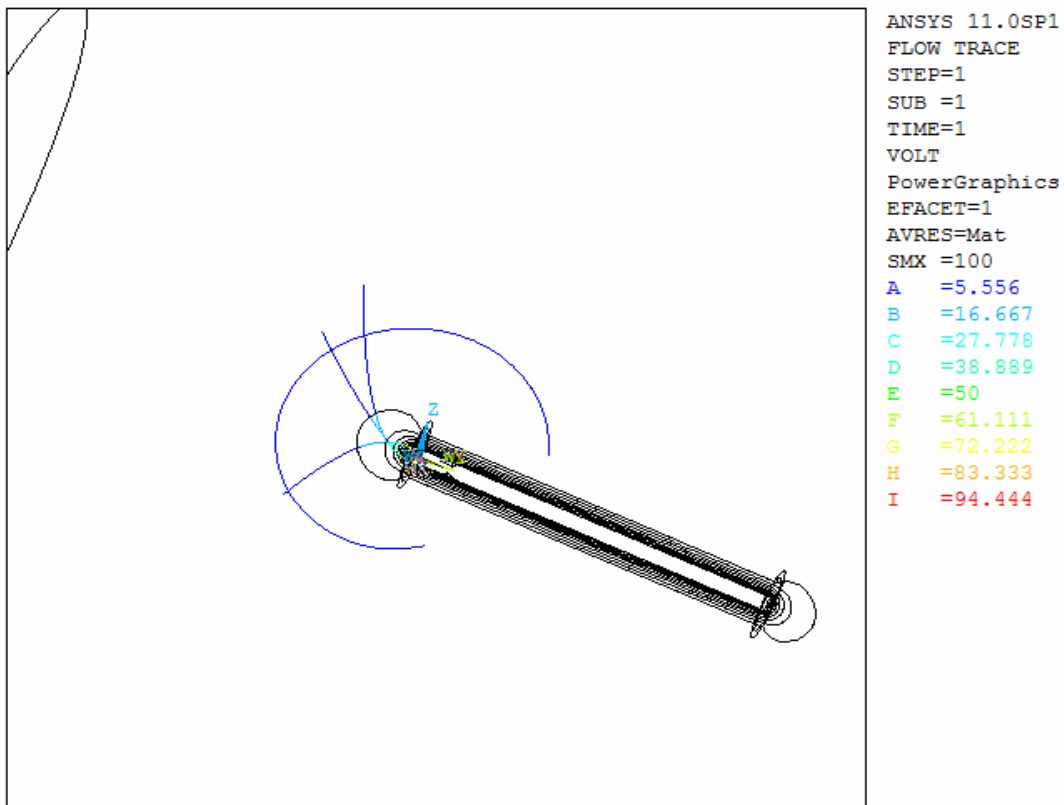


Obr. 22 smery šírenia pôsobenia elektrickej sily.

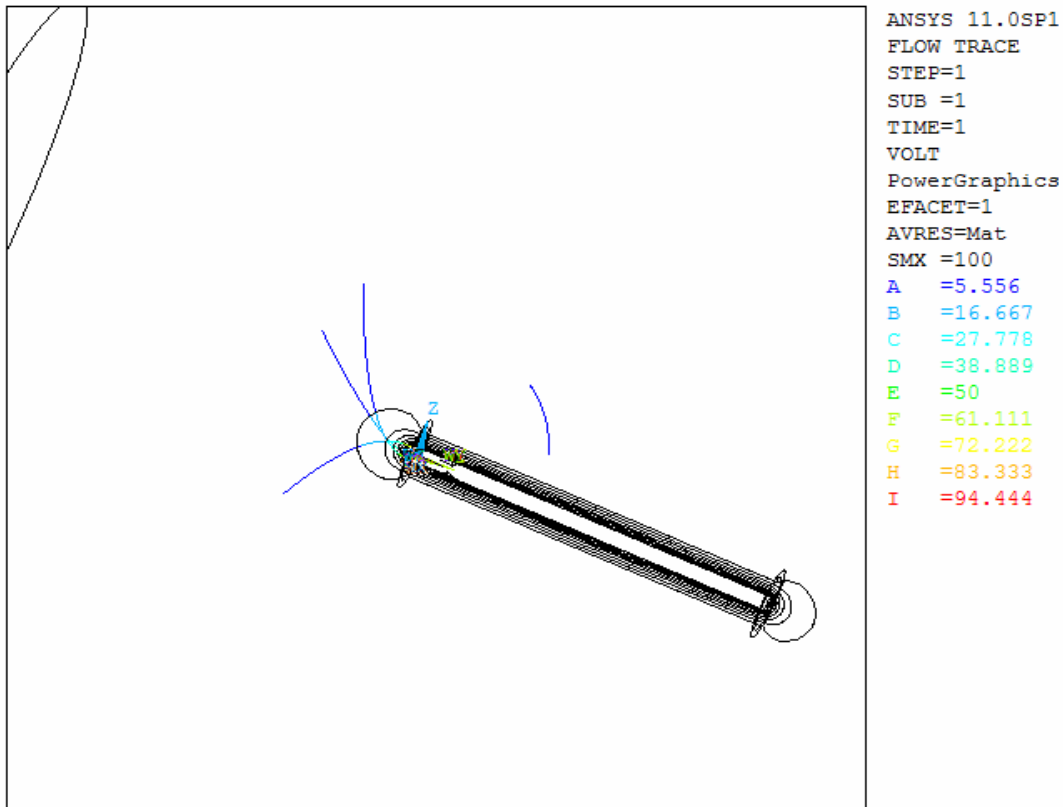
Na obr. 22 sú znázornené predpokladané dráhy pohybu častíc vložené to tohto poľa.

## 6.1 častice s rovnakou hmotnosťou rovnakým nábojom a rôznymi vzdialenosťami

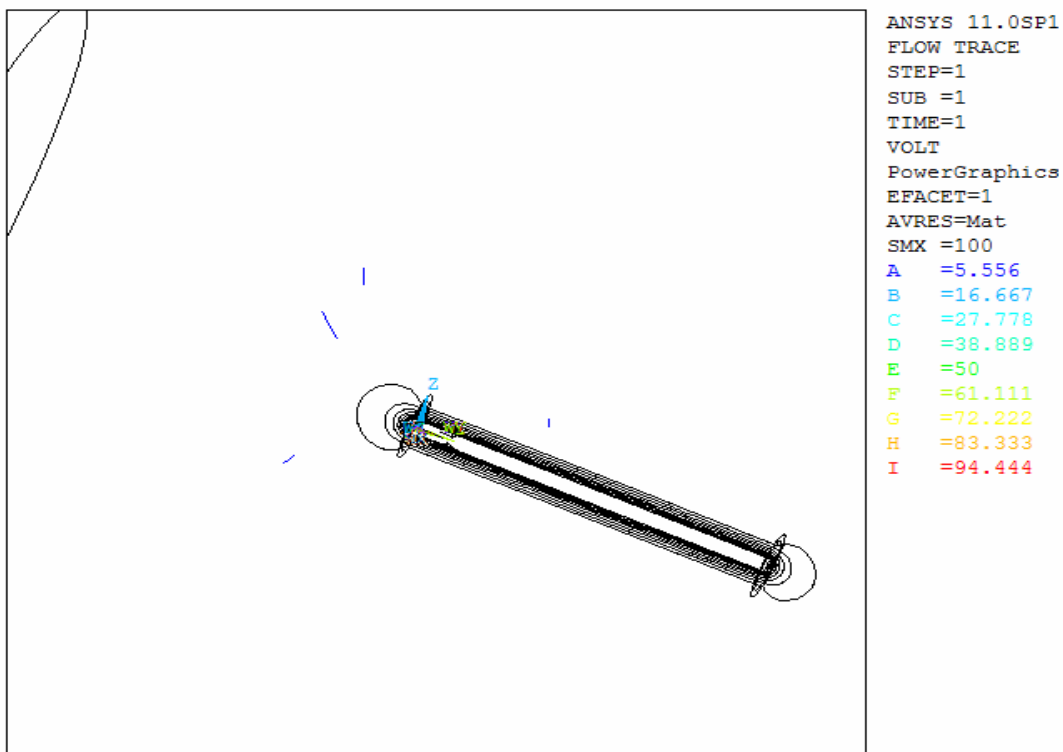
Pri tomto meraní mali častice hmotnosť a náboj elektrónu. Na obr. 23 je pôsobenie  $F_e$  pri čase  $0,1\mu\text{s}$  a napätie na elektróde je  $U=100\text{V}$ . a na obr. 24 je znázornená urazená dráha v čase  $1\mu\text{s}$ .

Obr. 23 pohyb častíc v  $0,1\mu\text{s}$ Obr.24 pohyb častíc v  $1\mu\text{s}$

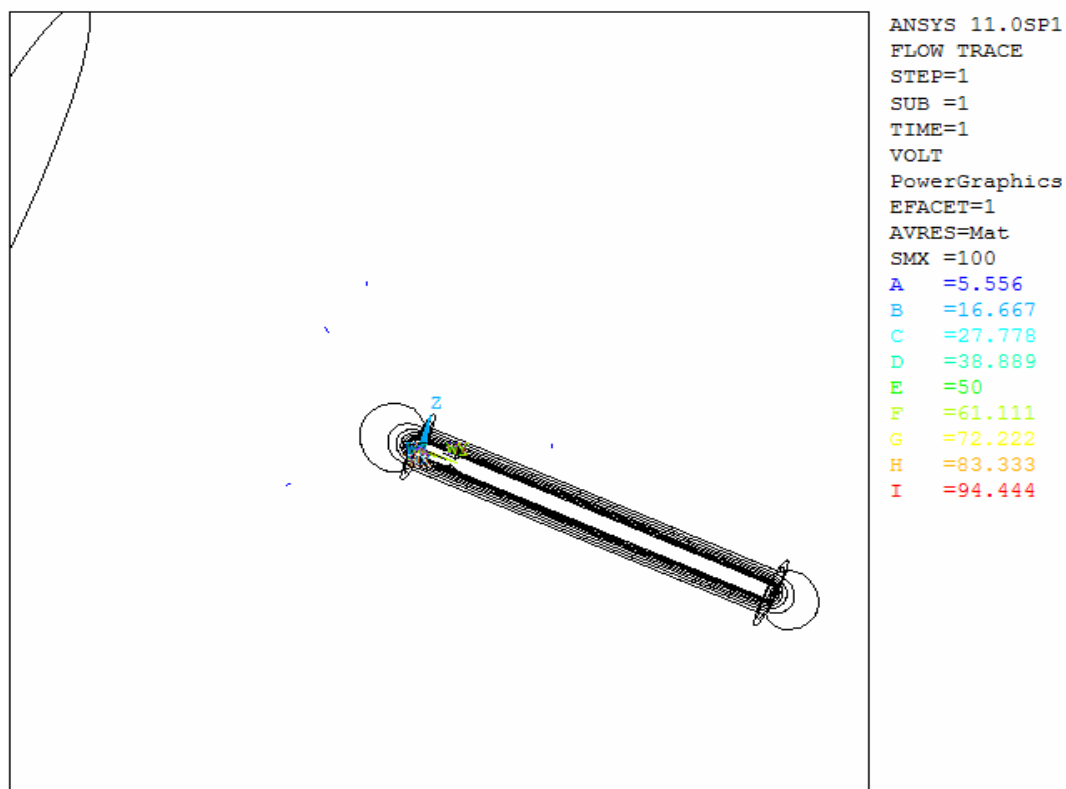
Na Obr. 25 je znázornená dráha častice po čase  $1\mu\text{s}$  a s napätím elektródy 10V.



Obr. 25 pohyb častíc pri  $1\mu\text{s}$  a napätím elektródy 10V



Obr. 26 pohyb častíc pri  $1\mu\text{s}$  a napätím elektródy 1V

Obr. 27 pohyb častíc pri  $1 \mu\text{s}$  a napätím elektródy  $0,1\text{V}$ 

Pri tomto pokuse kde sa menilo napätie pri rovnakom postavení záporne nabitých častíc je vidno ako a akou silou elektrické pole pôsobí na častice. Z meraní je zrejmé, že čím má zdroj šírenia elektrickej sily vyššie napätie tak doba pôsobenia elektrickej sily na to aby uviedla časticu do pohybu je kratšia.

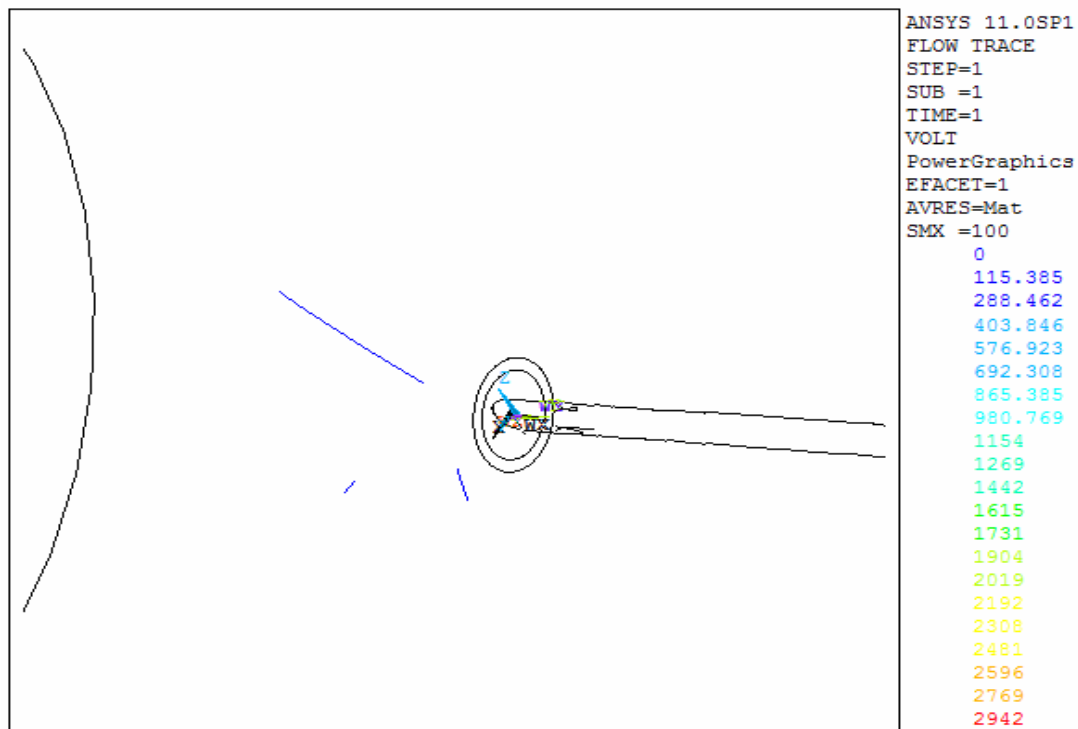
V čase  $1\mu\text{s}$  je už rozdiel v dráhe ktorú častice v rôzne veľkých poliach značný. V elektrickom poli, ktoré je budené napätím o  $100\text{V}$  všetky testované častice dorazili ku zdroju. Oproti tomu v poli so zdrojom napätia  $0,1\text{V}$  ako je vidieť na obr. 27 minimálnu dráhu.

## 6.2 meranie pohybu častíc so stredne veľkou hmotnosťou

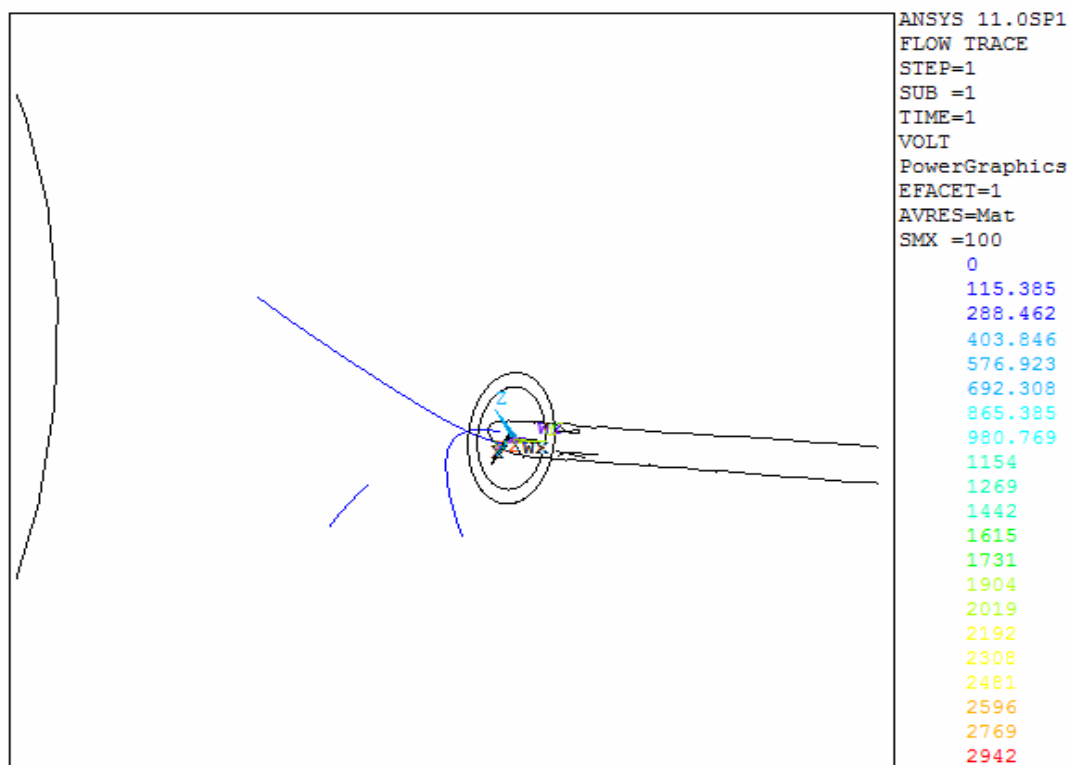
V tomto meraní sme sledovali pohyb častíc, ktorých hodnoty sú rôzne od hodnôt elektrónu. Meranie bolo uskutočnené pri napätí elektródy  $U=100\text{V}$ . Súradnice skúmaných častíc sú rovnaké ako v predošlom meraní.

V tabuľke 2 sú zadané súradnice a parametre skúmaných častíc

číslo častice	súradnice			náboj	hmotnosť
	x[m]	y[m]	z[m]		
4	-0,03	-0,07	0,08	$-1,60\text{E}-15$	$9,10\text{E}-20$
5	-0,01	0,08	0,05	$-1,60\text{E}-15$	$9,10\text{E}-20$
6	0,03	-0,12	-0,08	$-1,60\text{E}-15$	$9,10\text{E}-20$



Obr.28 Vzdialenosť záporne nabitých častíc po 50 ms.

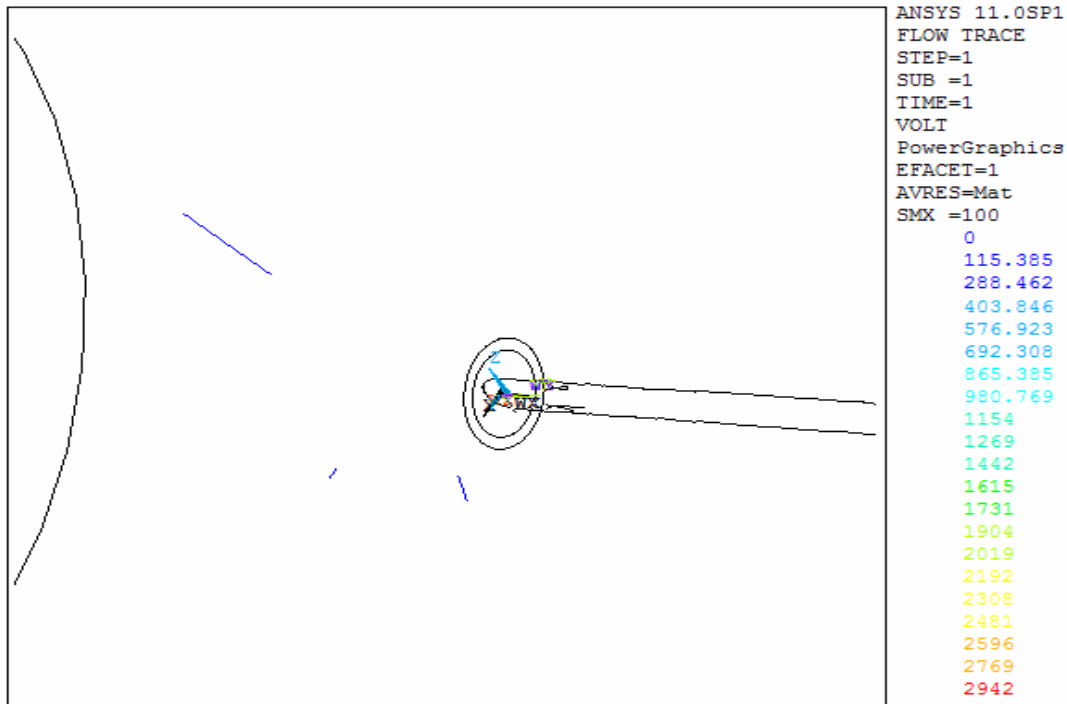


Obr.29 vzdialenosť záporne nabitých častíc po 0.9 ms

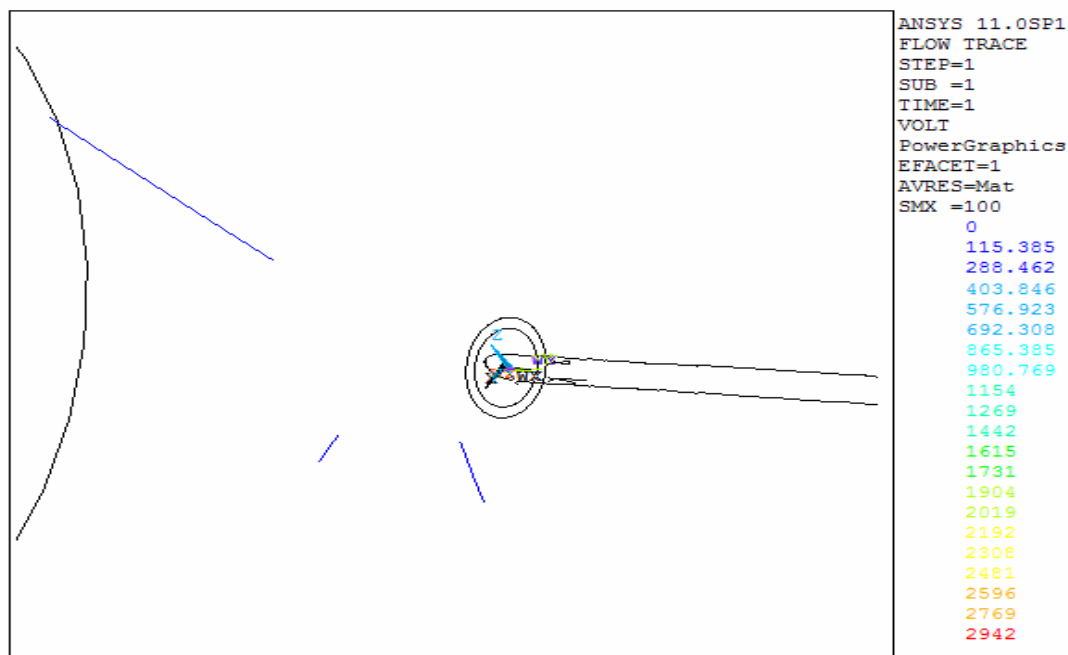
Ďalšia dvojica obrázkov obr. 30 31 ukazuje pohyb kladne nabitých častíc v elektrostatickom poli so zdrojom elektrického poľa o napätí 100V.

V tabuľke 3 sú zadané súradnice a parametre skúmaných častíc

Číslo častice	súradnice			náboj	hmotnosť
	x[m]	y[m]	z[m]		
7	-0,03	-0,07	0,08	1,60E-19	9,10E-31
8	-0,01	0,08	0,05	1,60E-19	9,10E-31
9	0,03	-0,12	-0,08	1,60E-19	9,10E-31



Obr.29 vzdialenosť kladne nabitých častíc po 0.5 ms



Obr.32 vzdialenosť kladne nabitých častíc po 90 ms

Na obr. 28 a 29 je znázornený pohyb častíc, ktorých hmotnosť bola zvýšená o  $10^{10}$  je tu je viditeľný vplyv pôsobenia hmotnosti na zrýchlenie častíc na ktoré pôsobí elektrické pole. Podľa vzorca (28) kde

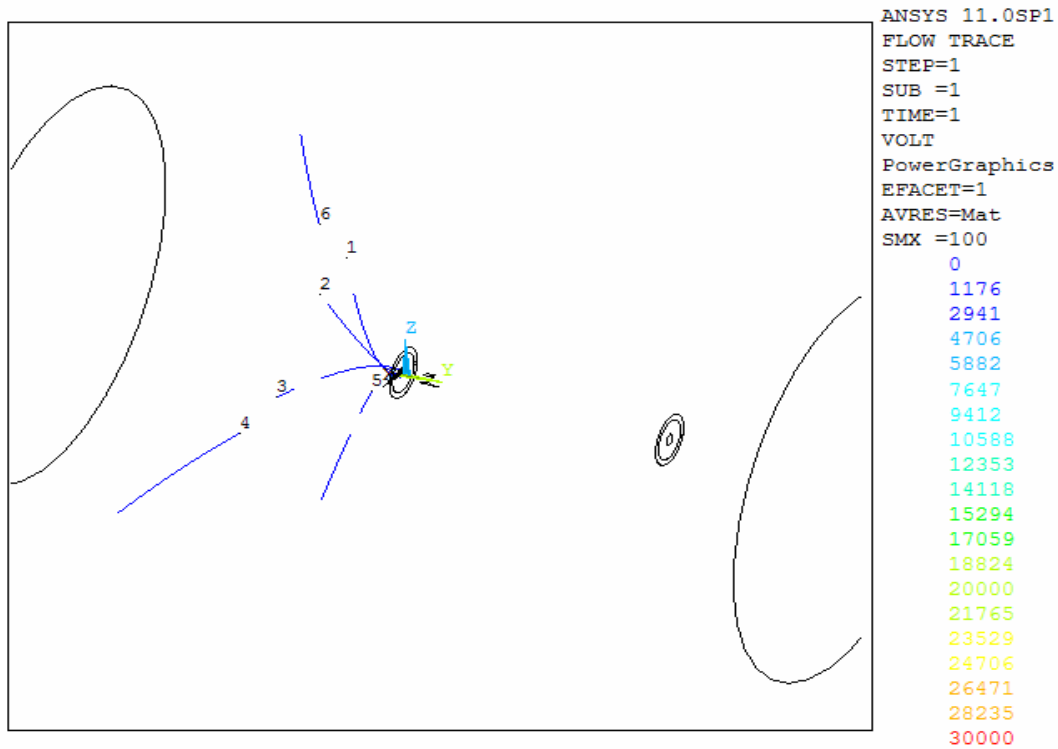
$$F = QE \longrightarrow m * a = Q * E \longrightarrow a = \frac{Q * E}{m}$$

z rovnice je vidno, že zrýchlenie je nepriamo úmerné hmotnosti a priamo úmerné náboju iónu a veľkosti sily elektrického poľa.

### 6.3 meranie pohybu rôzne nabitých častíc

V tabuľke 4 sú zadané súradnice a parametre skúmaných častíc

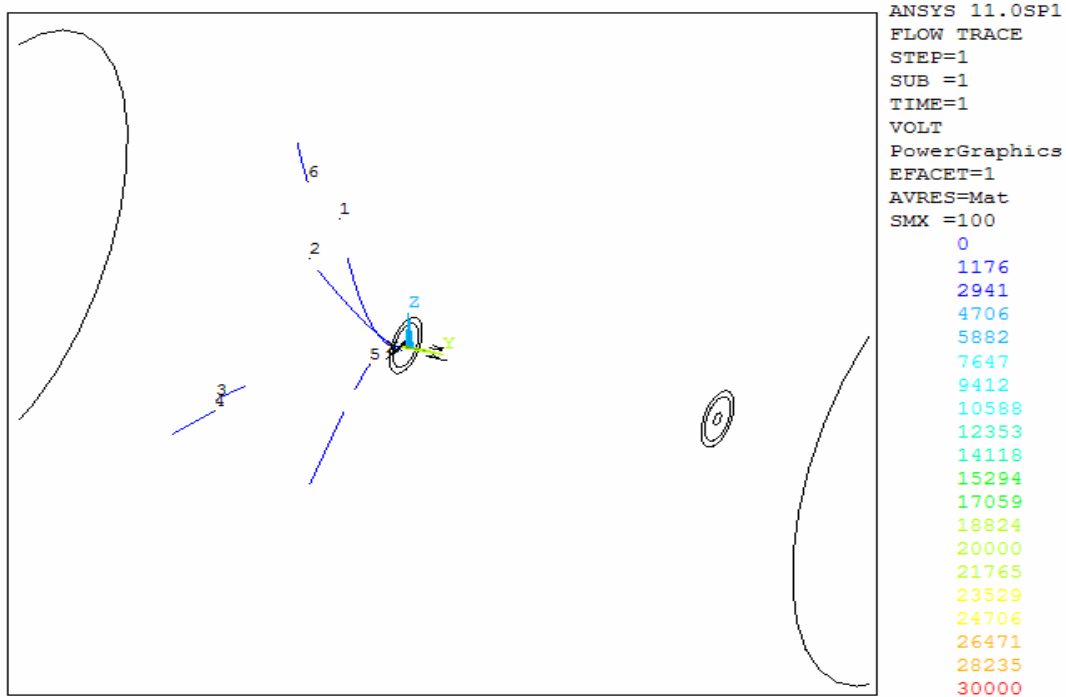
číslo častice	súradnice			náboj	hmotnosť
	x[m]	y[m]	z[m]		
1	-0,03	-0,07	-0,08	-1,60E-19	9,1E-31
2	-0,01	0,08	0,05	-1,60E-19	9,1E-31
3	0,03	-0,12	0,07	-1,60E-19	9,1E-31
4	0,03	-0,12	-0,08	1,6E-19	9,1E-31
5	-0,01	-0,03	-0,03	1,6E-19	9,1E-31
6	-0,04	-0,1	0,1	1,6E-19	9,1E-31



Obr. 33 poloha iónov v čase 1  $\mu$ s pri napätí zdroja šírenia elektického poľa 100V

V tabuľke 5 sú zadané súradnice a parametre skúmaných častíc.

číslo častice	súradnice			náboj	hmotnosť
	x[m]	y[m]	z[m]		
1	-0,03	-0,07	-0,08	-1,60E-15	9,10E-20
2	-0,01	0,08	0,05	-1,60E-15	9,10E-20
3	0,03	-0,12	0,07	-1,60E-15	9,10E-20
4	0,03	-0,12	-0,08	1,60E-15	9,10E-20
5	-0,01	-0,03	-0,03	1,60E-15	9,10E-20
6	-0,04	-0,1	0,1	1,60E-15	9,10E-20



Obr. 34 poloha iónov v čase 0,8 ms pri napätí zdroja šírenia elektického poľa 100V

Z obrázkov je vidno ako pôsobí na rýchlosť pohybu parametre iónov. Pri hmotnosti platí nepriama úmera. Pri veľkosti náboja platí priama úmera.

## 7 Záver

Prvá časť práce sa zoberá numerickými modelmi na riešenie pohybu voľných iónov a ich vhodným využitím. Pri modelovaní tejto úlohy bol použitý program spoločnosťou ANSYS. Ich program využíva modelovanie polí pomocou Metódy konečných prvkov. Ako model bol použitý valcový kondenzátor. V ďalšej časti je popísaný rozbor pohybu častíc v elektrickom, magnetickom a elektromagnetickom poli.

Meranie pribiehalo len v elektrostatickom poli kde sa postupne menili parametre. Veľkosť sily elektrického poľa, vzdialenosti iónov a menili sa aj ich hmotnosti. Výsledky potvrdili teóriu kde veľkosť sily a intenzity elektrického poľa je priamo úmerná rýchlosti častíc a nepriamo úmerná času za ktorý sa častica uvedie do pohybu.

Pri zmenách hmotnosti častíc pri rovnakom náboji je badateľný nárast času, za ktorý sa častica uvedie do pohybu a za aký čas urazí rovnakú dráhu oproti častici s menšou hmotnosťou.

## 8 Literatúra

- [1] DĚDEK, Libor, DĚDKOVÁ, Jarmila. *Elektromagnetismus*. 2. vyd. Brno : Vutium, 2000. 232 s. ISBN 80-214-1548-7
- [2] Barth, T.J. and Ohlberger, M., "Finite Volume Methods: Foundation and Analysis", Encyclopedia of Computational Mechanics, Volume 1, Fundamentals, John Wiley and Sons, Ltd, 2004.
- [3] *Wikipedia, the free encyclopedia* [online]. 2001- [cit. 2006-11-20]. Dostupný z WWW: <[http://en.wikipedia.org/wiki/Finite\\_volume\\_method](http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_volume_method)>.
- [4] VERSTEEG H.K and MALALASEKERA W. *Introduction computational fluid dynamics – The finite volume method*. Longman and scientific and fechnical, 1995.
- [5] KAREL, Tomáš. *Návrh elektronického senzoru koncentrace vzdušných iontů*. Brno, [2004?]. 63 s. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií. Vedoucí diplomové práce Doc. Ing. Pavel Fiala Ph.D.
- [6] ŘEZÁČ, Karel. Pohyb částic ve zkříženém elektrickém a magnetickém poli. [online]. FEL ČVUT. 2003 [cit. 2008-03-23]. Dostupný z WWW: <[http://www.aldebaran.cz/applets/pl\\_crosselmg/pinelmg.html](http://www.aldebaran.cz/applets/pl_crosselmg/pinelmg.html) >.
- [6] *Aldebaran* [online]. 2003 [cit. 2008-02-12]. Dostupný z WWW: <[http://www.aldebaran.cz/applets/pl\\_crosselmg/pinelmg.html](http://www.aldebaran.cz/applets/pl_crosselmg/pinelmg.html)>.
- [7] *FyzWeb* [online]. [2003- ] [cit. 2008-06-10]. Dostupný z WWW: <[http://fyzweb.cz/materialy/aplety\\_hwang/CasticeVmagPoli/qvb\\_cz.html](http://fyzweb.cz/materialy/aplety_hwang/CasticeVmagPoli/qvb_cz.html)>.
- [8] VÁVROVÁ, Jaroslava. *Ciselniky.dasta.mzcr.cz* [online]. [2003] [cit. 2008-03-04]. Dostupný z WWW: <[http://ciselniky.dasta.mzcr.cz/CD\\_DS4/hypertext/AJAZE.htm](http://ciselniky.dasta.mzcr.cz/CD_DS4/hypertext/AJAZE.htm)>.

## 9 Prílohy

### Príloha I

Časť zdrojového kódu nákresu aspiračného kondenzátora v programe ANSYS

```
fini
/CLEAR,START

fini
/PREP7
/VIEW,1,0,0,1
/VUP,1,Z
ET,1,solid123

!* geometrie
RECTNG,0,0.005,0,0.23,
RECTNG,0.018,0.023,0,0.23,
PCIRC, ,0.005,270,360,
RECTNG,0,0.18,-0.3,0.38,
FLST,2,4,5,ORDE,2
FITEM,2,1
FITEM,2,-4
APTN,P51X
FLST,2,2,5,ORDE,2
FITEM,2,1
FITEM,2,5
AADD,P51X
FLST,2,3,5,ORDE,3
FITEM,2,2
FITEM,2,-3
FITEM,2,6
FLST,8,2,3
FITEM,8,12
FITEM,8,15
VROTAT,P51X, , , , ,P51X, ,360, ,
FLST,2,2,6,ORDE,2
FITEM,2,1
FITEM,2,4
VADD,P51X
FLST,2,4,6,ORDE,4
FITEM,2,2
FITEM,2,5
FITEM,2,8
FITEM,2,11
VADD,P51X
FLST,2,3,6,ORDE,3
FITEM,2,7
FITEM,2,10
FITEM,2,13
VADD,P51X
FLST,2,4,6,ORDE,4
FITEM,2,3
FITEM,2,6
FITEM,2,9
FITEM,2,12
VADD,P51X
!*
```

```
!*  
  
FLST,5,4,4,ORDE,4  
FITEM,5,13  
FITEM,5,29  
FITEM,5,47  
FITEM,5,65  
CM,_Y,LINE  
LSEL, , , ,P51X  
CM,_Y1,LINE  
CMSEL,,_Y  
!*  
LESIZE,_Y1, , ,15, , , , ,1  
!*  
FLST,5,16,4,ORDE,13  
FITEM,5,12  
FITEM,5,14  
FITEM,5,28  
FITEM,5,30  
FITEM,5,-32  
FITEM,5,46  
FITEM,5,48  
FITEM,5,-50  
FITEM,5,64  
FITEM,5,66  
FITEM,5,-68  
FITEM,5,75  
FITEM,5,-76  
CM,_Y,LINE  
LSEL, , , ,P51X  
CM,_Y1,LINE  
CMSEL,,_Y  
!*  
LESIZE,_Y1, , ,8, , , , ,1  
!*  
  
FLST,5,12,4,ORDE,12  
FITEM,5,2  
FITEM,5,6  
FITEM,5,8  
FITEM,5,-9  
FITEM,5,11  
FITEM,5,25  
FITEM,5,34  
FITEM,5,36  
FITEM,5,43  
FITEM,5,52  
FITEM,5,54  
FITEM,5,61  
CM,_Y,LINE  
LSEL, , , ,P51X  
CM,_Y1,LINE  
CMSEL,,_Y  
!*  
LESIZE,_Y1, , ,30, , , , ,1  
!*  
FLST,5,25,4,ORDE,15  
FITEM,5,15  
FITEM,5,17  
FITEM,5,20  
FITEM,5,-22  
FITEM,5,26
```

```
FITEM,5,37
FITEM,5,-40
FITEM,5,44
FITEM,5,-45
FITEM,5,55
FITEM,5,-59
FITEM,5,62
FITEM,5,-63
FITEM,5,69
FITEM,5,-74
CM,_Y,LINE
LSEL,, , ,P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL,,_Y
!*
LESIZE,_Y1, , ,9, , , , ,1
!*
```

```
FLST,5,4,4,ORDE,4
FITEM,5,7
FITEM,5,10
FITEM,5,35
FITEM,5,53
CM,_Y,LINE
LSEL,, , ,P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL,,_Y
!*
LESIZE,_Y1, , ,3, , , , ,1
!*
```

```
FLST,5,4,4,ORDE,4
FITEM,5,3
FITEM,5,23
FITEM,5,41
FITEM,5,59
CM,_Y,LINE
LSEL,, , ,P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL,,_Y
!*
LESIZE,_Y1, , ,5, , , , ,1
!*
```

```
FLST,5,8,4,ORDE,8
FITEM,5,3
FITEM,5,23
FITEM,5,26
FITEM,5,41
FITEM,5,44
FITEM,5,59
FITEM,5,62
FITEM,5,73
CM,_Y,LINE
LSEL,, , ,P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL,,_Y
!*
LESIZE,_Y1, , ,4, , , , ,1
!*
```

```
FLST,5,8,4,ORDE,8
FITEM,5,17
FITEM,5,24
FITEM,5,27
FITEM,5,42
```

```
FITEM,5,45
FITEM,5,60
FITEM,5,63
FITEM,5,74
CM,_Y,LINE
LSEL,,,P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL,_,_Y
!*
LESIZE,_Y1,,,4,,,,,1
!*
```

```
FLST,5,4,4,ORDE,4
FITEM,5,1
FITEM,5,5
FITEM,5,33
FITEM,5,51
CM,_Y,LINE
LSEL,,,P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL,_,_Y
!*
LESIZE,_Y1,,,3,,,,,1
```

```
!*FLST,2,3,6,ORDE,3
!*FITEM,2,1
!*FITEM,2,-2
!*FITEM,2,4
!*VLIST,P51X
MOPT,AMESH,DEFA
MOPT,QMESH,DEFA
MOPT,VMESH,DEFA
MOPT,TIMP,3
MOPT,PYRA,ON
MOPT,AORD,0
MOPT,SPLIT,1
MSHKEY,0
MSHMID,0
MSHPATTERN,0
KEYW,ACCEPT,0
!*
MSHAPE,0,2D
```