



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

SROVNÁNÍ ANALYTICKÉHO A NUMERICKÉHO ŘEŠENÍ VYBRANÝCH ÚLOH SLOŽENÝCH TĚLES Z PŘEDMĚTU PRUŽNOST A PEVNOST II

COMPARISON OF ANALYTICAL AND NUMERICAL SOLUTION OF SELECTED PROBLEMS OF
COMPOUND BODIES FROM STRENGTH OF MATERIALS II

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Marek Tichý

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Oldřich Ševeček, Ph.D.

BRNO 2023

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	Marek Tichý
Studijní program:	Základy strojního inženýrství
Studijní obor:	Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce:	Ing. Oldřich Ševeček, Ph.D.
Akademický rok:	2022/23

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Srovnání analytického a numerického řešení vybraných úloh složených těles z předmětu Pružnost a pevnost II

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Náplní práce bude deformačně napěťová analýza vybraných složených těles z předmětu Pružnost a pevnost II (sestavěných z kombinace momentové skořepiny, kruhové/mezikruhové desky, tenkého disku, případně kombinace válcových těles) a to analytickým i numerickým přístupem založeným na metodě konečných prvků. Cílem bude definovat omezení analytického řešení včetně oblasti jeho použitelnosti a vysvětlit případné odlišnosti ve výsledcích obou přístupů. Numerické řešení bude realizováno v SW Ansys s tím, že model bude plně parametrický, aby umožnil výpočet různých geometrických variant dané úlohy. Analytické řešení bude potom zpracováno ve vybraném matematickém SW. Dosažené výsledky a výstupy práce budou využity jako demonstrační materiál ve výuce předmětu Pružnost a pevnost II.

Cíle bakalářské práce:

- 1) Sestavit přehled různých složených těles sestavených ze základních těles předmětu PPII a současně reprezentující konkrétní reálné úlohy z technické praxe.
- 2) S využitím zvoleného matematického SW vytvořit analytický model a provést analytické řešení vybraných složených těles PPII.
- 3) Provést numerické řešení úloh z bodu 2) s využitím metody konečných prvků a SW Ansys.
- 4) Porovnat analytické a numerické řešení vybraných úloh a analyzovat rozdíly obou přístupů při různých geometrických/rozměrových variantách zvolených složených těles.
- 5) Zhodnotit dosažené výsledky a případná omezení analytického řešení (oblast jeho platnosti).

Seznam doporučené literatury:

ONDRÁČEK, E., VRBKA, J., JANÍČEK, P., Mechanika těles - Pružnost a Pevnost II, skripta, Nakladatelství VUT Brno, 1991.

TIMOSHENKO, S. Theory of Plates and Shells. 2nd ed. New York: McGraw-Hill book company, 1970.

TIMOSHENKO, S. Strength of Materials, Part II. – Advanced theory and Problems. New York, 1941.

VENTSEL, E. and KRAUTHAMMER, T. Thin Plates and Shells - Theory, Analysis and Applications. New York: Marcel Dekker AG, 2001.

ANSYS Inc. ANSYS Release 2021 User's Manual. Pennsylvania: Swanson Analysis Sys. Inc, 2021, www.ansys.com.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2022/23

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jiří Hlinka, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Bakalářská práce se zabývá deformačně napěťovou analýzou vybraných složených těles z předmětu Pružnost a pevnost II. K analytickým výpočtům byl použit program Wolfram Mathematica a k numerickým výpočtům byl použit program Ansys Workbench, který využívá metodu konečných prvků. Byl sestaven přehled některých složených těles z technické praxe a z nich byla vybrána dvě složená tělesa s různými geometrickými variantami, na kterých bylo provedeno porovnání analytického a numerického přístupu za předpokladu malých a velkých deformací. Výsledky obou řešení jsou porovnány v grafech a zhodnoceny.

Klíčová slova

složené těleso, deformačně-napěťová analýza, Ansys, analytické řešení, numerické řešení, Pružnost a pevnost II

Abstract

The Bachelor's thesis deals with stress-strain analysis of selected compound bodies from the subject of Elasticity and Strength II. The Wolfram Mathematica software was used for analytical calculations, and for the numerical calculations was used software called Ansys Workbench, which uses the finite element method. An overview of some compound bodies from engineering practice was compiled, and two compound bodies with different geometric variations were selected for the purpose of comparing the analytical and numerical approaches under assumptions of small and large deformations. The results of both solutions are compared in graphs and evaluated.

Key words

compound body, stress-strain analysis, Ansys, analytical solution, numerical solution, Elasticity and Strength II

Bibliografická citace

TICHÝ, Marek. *Srovnání analytického a numerického řešení vybraných úloh složených těles z předmětu Pružnost a pevnost II* [online]. Brno, 2023 [cit. 2023-05-18]. Dostupné z: <https://www.vut.cz/studenti/zav-prace/detail/149722>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce Oldřich Ševeček.

Prohlášení autora

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma **Srovnání analytického a numerického řešení vybraných úloh složených těles z předmětu Pružnost a pevnost II** vypracoval samostatně s použitím odborné literatury a pramenů, které jsou uvedeny v seznamu zdrojů na konci práce.

V Brně dne 26. května 2023

Marek Tichý

Poděkování

Děkuji svému vedoucímu práce Ing. Oldřichu Ševečkovi, Ph.D. za jeho odborné vedení, ochotu, vstřícnost a cenné rady, které mi poskytnul během psaní této bakalářské práce.

Obsah

1	Úvod.....	1
2	Cíle bakalářské práce	2
3	Obecná pružnost a pevnost.....	3
3.1	Elementární prvek	3
3.2	Základní rovnice.....	3
3.2.1	Rovnice rovnováhy elementárního prvku.....	3
3.2.2	Geometrické rovnice	4
3.2.3	Konstitutivní vztahy Hookovského materiálu	6
3.3	Okrajové podmínky.....	8
4	Vybraná elementární tělesa obecné pružnosti a pevnosti.....	9
4.1	Válcová momentová skořepina	9
4.1.1	Typický elementární prvek	9
4.1.2	Deformace.....	10
4.1.3	Uvolněný prvek.....	10
4.1.4	Napjatost v bodě tělesa	11
4.1.5	Rovnice pro řešení přímé úlohy	11
4.2	Kruhová a mezikruhová deska.....	13
4.2.1	Typický elementární prvek	14
4.2.2	Deformace.....	14
4.2.3	Uvolněný prvek.....	14
4.2.4	Napjatost v bodě tělesa	15
4.2.5	Rovnice pro řešení přímé úlohy	15
4.3	Kruhová stěna	16
4.3.1	Typický elementární prvek	17
4.3.2	Deformace.....	17
4.3.3	Uvolněný prvek.....	18
4.3.4	Napjatost v bodě tělesa	18
4.3.5	Rovnice pro řešení přímé úlohy	18
5	Metoda konečných prvků.....	20
5.1	Lagrangeův variační princip	20
6	Přehled nejčastěji využívaných složených těles v technické praxi.....	21
6.1	Tlakové nádoby	21
6.2	Přírubové spoje.....	21

6.3	Tělesa spojená lisováním.....	22
6.4	Nádrže na kapaliny.....	22
7	Analýza vybraných složených těles.....	23
7.1	Válcová nádoba s rovným dnem a vnitřním tlakem.....	23
7.1.1	Uvolnění analytického modelu.....	23
7.1.2	Řešení skořepiny.....	24
7.1.3	Řešení stěny.....	25
7.1.4	Řešení desky.....	25
7.1.5	Řešení deformačních podmínek.....	26
7.1.6	Numerický model.....	27
7.1.7	Výsledky.....	28
7.1.8	Zhodnocení.....	37
7.2	Válcová nádoba naplněná kapalinou.....	38
7.2.1	Uvolnění analytického modelu.....	38
7.2.2	Řešení skořepiny.....	39
7.2.3	Řešení stěny.....	40
7.2.4	Řešení desky.....	41
7.2.5	Řešení deformačních podmínek.....	41
7.2.6	Numerický model.....	42
7.2.7	Výsledky.....	42
7.2.8	Zhodnocení.....	50
8	Závěr.....	51
	Seznam použitých zdrojů.....	53
	Seznam použitých symbolů, veličin a zkratk.....	55

1 Úvod

Hlavním cílem bakalářské práce je provedení deformačně-napěťové analýzy vybraných složených těles sestavených ze základních těles předmětu Pružnost a pevnost II. V technické praxi jsou to tlakové nádoby (obr. 1.1) tvořené ze skořepiny a rovného, či půlkulového dna, nádrže na kapaliny, skořepiny s přírubou (obr. 1.2) nebo třeba lisované spoje (obr. 1.3).

Nejprve bude vymezena teorie obecné pružnosti a pevnosti a budou popsány tělesa použitá pro vytvoření složených těles, aby bylo zcela jasné, jak se k jednotlivým vzorcům a postupům došlo. Poté budou sestaveny analytické modely řešení a ty budou porovnány s modely numerickými. Všechna tělesa budou mít různé rozměrové varianty, aby bylo možné stanovit omezení analytického řešení.

Analytické výpočty jsou u řešení složených těles velmi složité, často se jedná o několik rovnic s goniometrickými funkcemi o mnoha neznámých, proto bude k těmto výpočtům použit program Wolfram Mathematica, který umožňuje vytvořit plně parametrické řešení, což výrazně zjednoduší výpočty. K numerickým výpočtům bude použit program Ansys Workbench, který pro výpočty využívá metody konečných prvků. Konkrétně se bude využívat statická strukturální analýza.

Na závěr práce budou zhodnoceny dosažené výsledky a stanoví se omezení analytického a numerického řešení.



Obr. 1.1: Tlakové nádoby [18]



Obr. 1.2: Přírubová trubka [19]

Obr. 1.3: Lisovaný spoj trubek [20]

2 Cíle bakalářské práce

1. Sestavení přehledu různých složených těles vytvořených ze základních těles předmětu Pružnost a pevnost II reprezentujících konkrétní reálné tělesa využívané v praxi.
2. Vytvoření parametrického analytického modelu pro vybraná složená tělesa pomocí vhodného softwaru a provést řešení.
3. Vytvoření parametrického numerického modelu s využitím metody konečných prvků a softwaru Ansys pro řešení úloh z bodu 2.
4. Porovnání analytického a numerického řešení vybraných úloh a analýza obou přístupů pro různé geometrické varianty zvolených složených těles.
5. Zhodnocení dosažených výsledků a stanovení omezení analytického řešení.

3 Obecná pružnost a pevnost

Tato kapitola se bude zabývat vymezením obecné pružnosti a pevnosti. V přímé úloze obecné pružnosti a pevnosti se určuje napjatost a deformace tělesa při známé geometrii, zatížení, materiálu a vazbách tělesa. Základními veličinami je 15 neznámých, které mohou být případně závislé na čase. V této práci se časově proměnné konstanty nebudou řešit a bude existovat pouze stav nezatížený a zatížený. Těchto 15 základních veličin jsou 3 složky vektoru posuvu \vec{u} , 6 složek tenzoru přetvoření T_ε a 6 složek tenzoru napětí T_σ [1]:

$$u = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

3.1 Elementární prvek

Elementární prvek je základním prvkem pružnosti a pevnosti. Tento prvek může mít různou násobnost a v obecné pružnosti a pevnosti musí být ke splnění předpokladů prvek trojnásobně elementární [2]. Prvky mají libovolný tvar a nacházejí se uvnitř tělesa, kde mezi nimi nesmí být mezery a prvky se nesmí překrývat, což zajistí spojitost a jednoznačnost tělesa [1].

3.2 Základní rovnice

K vyřešení všech neznámých funkcí obecné pružnosti a pevnosti slouží rovnice rovnováhy elementárního prvku, geometrické rovnice a konstitutivní rovnice. V následující kapitole bude naznačeno odvození těchto rovnic.

3.2.1 Rovnice rovnováhy elementárního prvku

Jedním z předpokladů obecné pružnosti a pevnosti je předpoklad malých deformací. Díky tomuto předpokladu je možné uvolnit elementární prvek v zatíženém stavu bez uvažování jeho deformace a vyjádřit si tak jeho silové vazby s okolím. Rovnice rovnováhy neboli Cauchyho rovnice pak vyjadřují podmínky statické rovnováhy uvolněného vnitřního elementárního prvku (obr. 3.1). V těžišti můžou působit tíhové, odstředivé nebo elektromagnetické síly, které by se značily jako objemové zatížení. Odvození rovnic rovnováhy [1]:

$$\begin{aligned} -\sigma_x dydz + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \tau_{xy} dx dz \\ + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{xz} dx dy \\ + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right) dx dy + O_x dx dy dz = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Po úpravě vznikne:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dx dy dz + O_x dx dy dz = 0. \quad (3.5)$$

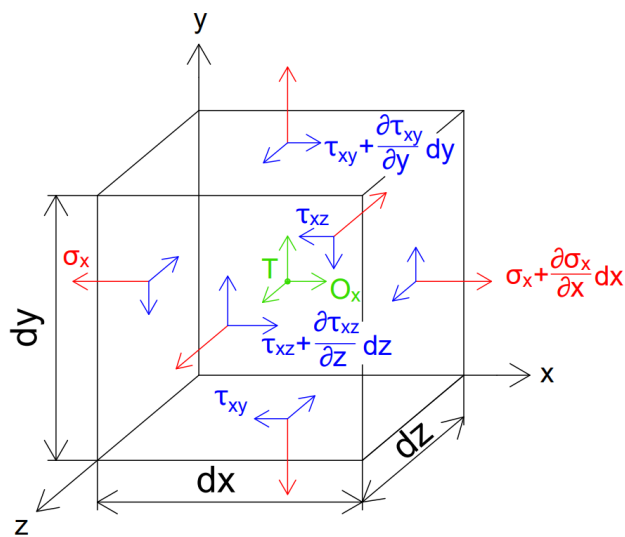
Vykrácením elementárního objemu $dx dy dz$ je odvozen finální tvar:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + O_x = 0. \quad (3.6)$$

Podobným způsobem jsou odvozeny rovnice rovnováhy pro směr v ose y a z:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + O_y = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + O_y = 0. \quad (3.8)$$



Obr. 3.1: Uvolněný elementární prvek ([1], upraveno)

3.2.2 Geometrické rovnice

Geometrické rovnice představují vztahy mezi posuvy a přetvořeními. Zatěžováním tělesa, které se jako celek nepohybuje, měníme jeho geometrii. Všechny jeho body, kromě bodů na ose symetrie a bodů v místě vazeb mění svoji polohu, která je popsána deformačním posuvem. Posuv v bodě A [1]:

$$u_A = (u, v, w)_A. \quad (3.9)$$

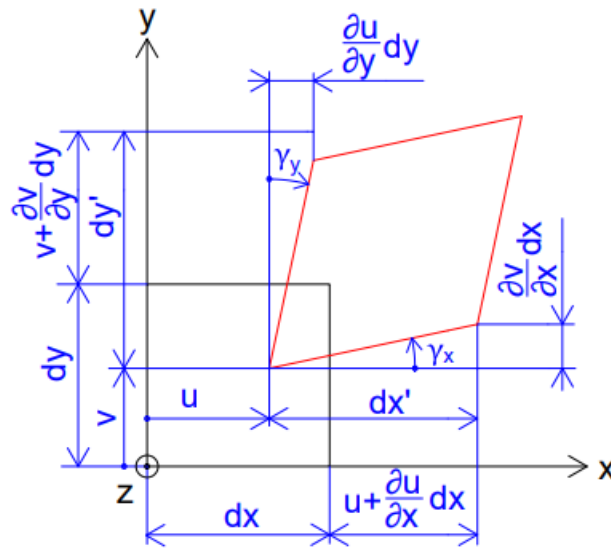
Deformace tělesa je určena množinou deformačních posuvů $\{\vec{u}\}$ všech bodů tělesa [1]. Nyní bude odvozeno poměrné délkové a úhlové přetvoření dle obr. 3.2 [1]:

$$\varepsilon_x = \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u - dx}{dx} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (3.10)$$

Odvození pro směry y a z by bylo obdobné a vznikne rovnice tvaru [1]:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (3.11)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (3.12)$$



Obr. 3.2: Průřez zadních stěn do roviny xy nezdeformovaného a zdeformovaného elementárního prvku ([1], upraveno)

Změny úhlů mezi stěny elementárního prvku dle obr. 3.2 [1]:

$$\tan \gamma_x = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx'}. \quad (3.13)$$

Za předpokladu malých deformací, tedy i malých úhlů lze rovnici (3.13) psát:

$$\begin{aligned} \gamma_x &= \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx'} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx} \\ &= \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Člen $\frac{\partial u}{\partial x}$ v rovnici (3.14) je velmi malé číslo oproti 1, proto lze psát výsledný tvar úhlu:

$$\gamma_x = \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.15)$$

Odvození pro úhel γ_y je obdobné a vznikne tvar:

$$\gamma_y = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3.16)$$

Úhlové přetvoření γ_{xy} je součtem úhlů (3.15) a (3.16):

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3.17)$$

Pro roviny yz a xz by se postupovalo obdobně a lze získat tvary úhlových přetvoření:

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (3.18)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (3.19)$$

Pokud jsou úhlová přetvoření nulová, pak se délková přetvoření nazývají hlavní a souřadnicový systém, ve kterém tato délková přetvoření leží udává hlavní směry. V tenzoru přetvoření se to projeví nulovými hodnotami mimo diagonálu.

3.2.3 Konstitutivní vztahy Hookovského materiálu

Konstitutivní vztahy neboli zobecněný Hookův zákon vyjadřuje závislost mezi přetvořením a napjatostí v bodě tělesa [2]. V obecné pružnosti a pevnosti je předpoklad o materiálu, který omezuje řešení úloh pouze pro homogenní, izotropní, lineární elastický materiál, který je charakterizován následovně [1]:

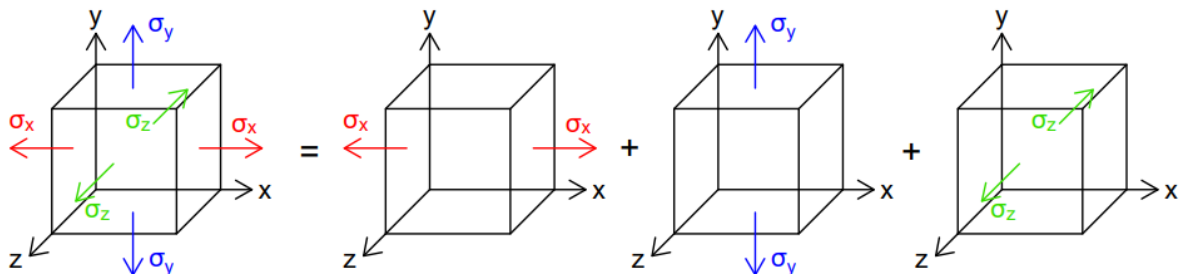
1. Hlavní směry deformace a napjatosti jsou shodné.
2. Materiálové vlastnosti jsou určeny dvěma nezávislými veličinami, a to modulem pružnosti v tahu E a Poissonovou konstantou μ .
3. Závislost mezi souřadnicemi tenzorů napětí a přetvoření jsou lineární.

Pro odvození konstitutivních vztahů pro víceosou napjatost se bude vycházet z Hookova zákona pro jednoosou napjatost [7]:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x. \quad (3.20)$$

Ve směrech y a z nepůsobí žádné napětí, ale vznikne v nich záporné přetvoření [7]:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu \varepsilon_x = -\mu \frac{\sigma_x}{E}. \quad (3.21)$$



Obr. 3.3: Trojosá napjatost působící na elementární prvek vyjádřená superpozicí [1]

Protože se jedná o Hookovský materiál, je možné využít superpozici, proto bude trojosá napjatost vyjádřená superpozicí tří jednoosých napjatostí (obr. 3.3) a pro přetvoření platí [1]:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + (-\mu\varepsilon_y) + (-\mu\varepsilon_z) = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E}. \quad (3.22)$$

Po úpravách lze psát:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]. \quad (3.23)$$

Pro ostatní směry by se postupovalo analogicky a byly by odvozeny tvary:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)], \quad (3.24)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]. \quad (3.25)$$

Na elementární prvek dle obr. 3.3 nepůsobí žádné smykové napětí, proto platí, že je souřadnicový systém hlavní a napětí $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ jsou napětí hlavní. Tyto rovnice však neplatí pouze pro hlavní souřadnicový systém, proto je potřeba doplnit ještě rovnice pro smykové napětí a úhlové přetvoření. Z Mohrovy kružnice lze vyjádřit vztah [1]:

$$\frac{\gamma_{\rho max}}{2} = \varepsilon_1. \quad (3.26)$$

Po úpravě (3.26):

$$\gamma_{\rho max} = 2\varepsilon_1. \quad (3.27)$$

V rovnici (3.23) budou indexy x, y, z zaměněny za indexy 1, 2, 3, protože se jedná o hlavní směry a rovnice bude dosazena do (3.27):

$$\gamma_{\rho max} = 2 \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]. \quad (3.28)$$

Jelikož leží střed Mohrovy kružnice v počátku, tak $\sigma_1 = \tau_{\rho max}$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau_{\rho max}$ a lze psát [1]:

$$\gamma_{\rho max} = \frac{2}{E} [\tau_{\rho max} - \mu(0 + [-\tau_{\rho max}])]. \quad (3.29)$$

Po úpravě je získán vztah:

$$\gamma_{\rho max} = \frac{2(1 + \mu)}{E} \tau_{\rho max} = \frac{\tau_{\rho max}}{G}, \quad (3.30)$$

kde G je modul pružnosti ve smyku. Pro jednotlivé úhlové přetvoření lze tedy psát [1]:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad (3.31)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \quad (3.32)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}. \quad (3.33)$$

3.3 Okrajové podmínky

Ze samostatných rovnic, odvozených v předchozí kapitole by vzniklo nekonečně mnoho řešení, proto existují okrajové podmínky, které omezí řešení tak, aby vyhovovalo těmto podmínkám. Okrajové podmínky lze rozdělit do 3 skupin [1]:

1. Silové okrajové podmínky
2. Geometrické okrajové podmínky
3. Ostatní okrajové podmínky

Silové okrajové podmínky se nacházejí v místech vazeb tělesa a vyjadřují statickou vazbu tělesa s okolím. Dále mohou popisovat spojení mezi složenými tělesy. Geometrické okrajové podmínky vyjadřují posuvy na hranicích tělesa. [8]

4 Vybraná elementární tělesa obecné pružnosti a pevnosti

Následující kapitola popíše vlastnosti vybraných elementárních těles, které budou použity pro tvorbu složených těles a deformačně-napěťovou analýzu. Bude se jednat o kruhovou stěnu, kruhovou desku a momentovou skořepinu. Na těchto tělesech jsou průběhy posuvů a napětí zajímavé a v technické praxi jsou tato tělesa velmi významná.

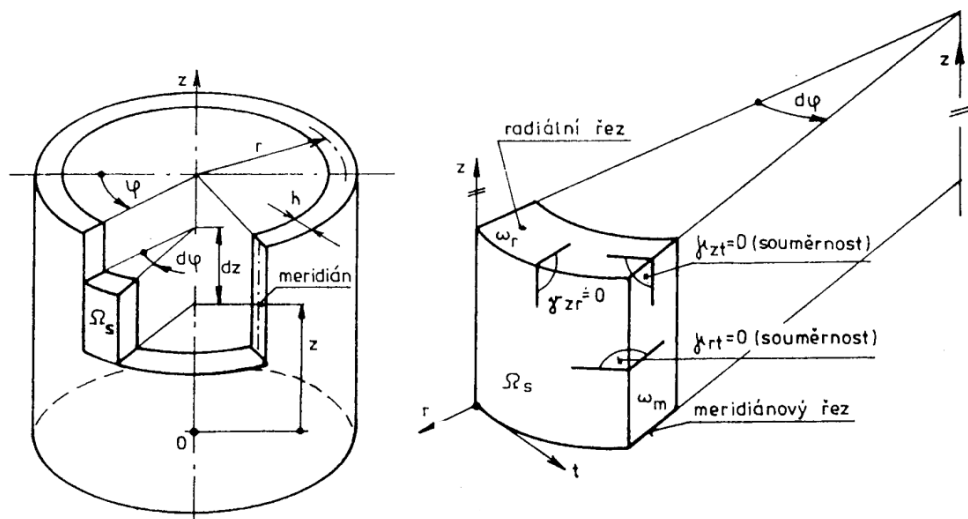
V této práci se budou zkoumat pouze tělesa, která jsou osově symetrická, proto bude často využíván válcový souřadnicový systém místo kartézského.

4.1 Válcová momentová skořepina

Válcová momentová skořepina je těleso s tenkou stěnou, jehož geometrie vznikne rotací meridiánové křivky kolem osy z , což je v případě válcové skořepiny přímka [1]. Skořepina se označuje jako momentová, pokud je na koncích spojena s tělesem, jehož tuhost je v radiálním směru odlišná a tím vznikají v místě spojení momenty. Aby se jednalo o skořepinu, poloměr válce musí být minimálně desetkrát větší než tloušťka stěny válce. Zatížení, vazby, tloušťka stěny, materiálové charakteristiky, deformace i napjatost jsou rotačně symetrické [5]. Skořepiny se dělí na krátké a dlouhé. Válcové momentové skořepiny bývají v praxi tlakové nádoby a nádoby s kapalinami zakončené rovným nebo půlkulovým dnem.

4.1.1 Typický elementární prvek

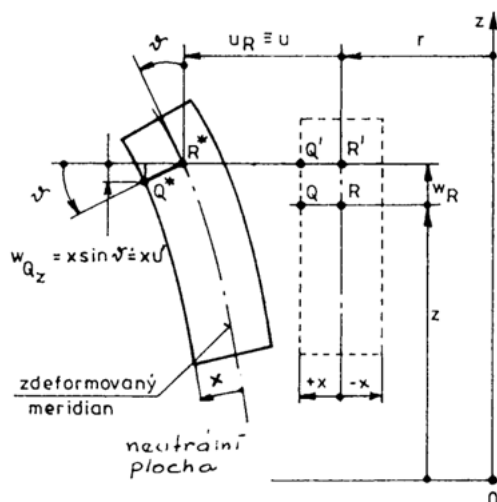
Jedná se o dvojnásobně elementární prvek uvolněný dvěma meridiánovými a dvěma radiálními řezy, které jsou na sebe kolmé (obr. 4.1) [1]. Na rozdíl od kruhové desky a stěny je poloměr u skořepiny značen ke střednicové ploše, protože je tloušťka stěn výrazně menší vzhledem k poloměru válce.



Obr. 4.1: Geometrický tvar tělesa a uvolněný elementární prvek [1]

4.1.2 Deformace

Elementární prvek se deformuje tak, že meridiánová křivka, která byla před zatížením přímkou se po deformaci stane obecnou křivkou, takže se těleso, které bylo válcem změnilo na obecnou, rotačně symetrickou plochu [4]. Dojde k posuvu bodů v radiálním směru, který je značen u a v osové směru, který je značen w [1]. Právě úhly mezi řezy zůstanou zachovány, takže nedojde k úhlovému přetvoření. Na obr. 4.2 lze vidět, že dojde také k natočení střednicové plochy, které je značeno ϑ [1].



Obr. 4.2: Deformace elementárního prvku [1]

Tenzor přetvoření (4.1) je tvořen z nulových úhlových přetvoření a nenulových délkových přetvoření. Meridiánové a obvodové řezy jsou hlavními řezy, tím pádem jsou obvodový a osový směr směry hlavními. V bodě skořepiny tedy vzniká trojosá deformace [1]:

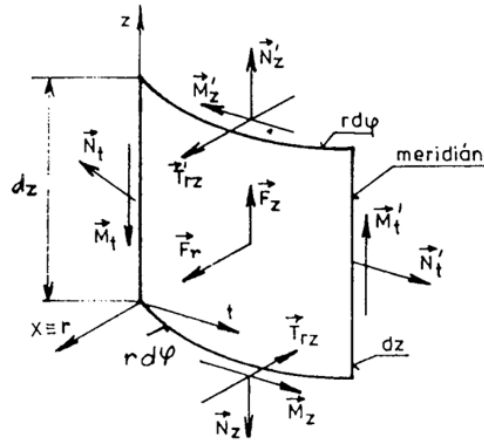
$$T_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_r & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_t \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

4.1.3 Uvolněný prvek

Na uvolněný prvek působí zatížení (obr. 4.3) [1]:

- Radiální moment \mathcal{M}_z
- Tangenciální moment \mathcal{M}_t
- Osová síla \mathcal{N}_z
- Radiální tlak p_r
- Osový tlak p_z
- Tangenciální síla \mathcal{N}_t
- Posouvající síla \mathcal{T}_{zr}

Jelikož se jedná o liniové síly a momenty, jsou značeny psacím písmem a stejným způsobem je to i u ostatních těles.



Obr. 4.3: Uvolněný elementární prvek [1]

Takto uvolněný prvek musí být ve statické rovnováze, ze které po úpravách vyplynou rovnice rovnováhy [1]:

$$\frac{d\mathcal{N}_z}{dz} + p_z = 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{dT_{rz}}{dz} - \frac{\mathcal{N}_t}{r} + p_r = 0, \quad (4.3)$$

$$\frac{d\mathcal{M}_z}{dz} - \mathcal{T}_{rz} = 0. \quad (4.4)$$

4.1.4 Napjatost v bodě tělesa

Napjatost v bodě tělesa je na momentové skořepině dvouosá, jedná se tedy o rovinnou deformaci. Radiální napětí je rovno nule. Tenzor napětí má tvar [1]:

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_t(r) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_z(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

4.1.5 Rovnice pro řešení přímé úlohy

Patří zde rovnice rovnováhy, které jsou již v kapitole 4.1.3, geometrické rovnice (4.6, 4.7, 4.8) a konstitutivní vztahy (4.9, 4.10) [1]:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad (4.6)$$

$$\varepsilon_t = \frac{u}{r}, \quad (4.7)$$

$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz} = \frac{dw_R}{dz} - x \frac{d^2u}{dz^2}, \quad (4.8)$$

kde R je bod na střednici skořepiny (obr. 4.2),

$$\sigma_z = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_z + \mu\varepsilon_t), \quad (4.9)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_t + \mu\varepsilon_z). \quad (4.10)$$

Dosažením geometrických rovnic do konstitutivních vztahů a provedením statické ekvivalence lze po úpravách získat vztahy pro momenty a posouvající sílu [1]:

$$\mathcal{M}_z = -B \frac{d^2 u}{dz^2}, \quad (4.11)$$

$$\mathcal{M}_t = -B\mu \frac{d^2 u}{dz^2} = \mu \mathcal{M}_z, \quad (4.12)$$

$$\mathcal{T} = -B \frac{d^3 u}{dz^3}. \quad (4.13)$$

Osovou a tangenciální sílu lze vyjádřit přímo z rovnic rovnováhy [1]:

$$\mathcal{N}_z = C_0 - \int p_z dz = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\frac{dw_R}{dz} + \mu \frac{u}{r} \right), \quad (4.14)$$

$$\mathcal{N}_t = \mu \mathcal{N}_z + Eh \frac{u}{r} = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\frac{u}{r} + \mu \frac{dw_R}{dz} \right). \quad (4.15)$$

Úpravou rovnic statické rovnováhy a statické ekvivalence lze odvodit diferenciální rovnici pro radiální posuv bodů střednicové plochy skořepiny, která je tvaru [1]:

$$\frac{d^4 u}{dz^4} + 4\beta^4 u = \frac{1}{B} \left[p_r - \frac{\mu}{r} \mathcal{N}_z \right], \quad (4.16)$$

kde β je zavedený zástupný symbol, který slouží pro ulehčení řešení diferenciální rovnice a lze spočítat [1]:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{r^2 h^2}}. \quad (4.17)$$

Homogenní řešení rovnice (4.16) je:

$$\frac{d^4 u}{dz^4} + 4\beta^4 u = 0. \quad (4.18)$$

Matematickými úpravami je možné odvodit vztah pro radiální posuv:

$$u = u_h + u_p = e^{-\beta z} (C_1 \sin \beta z + C_2 \cos \beta z) + e^{\beta z} (C_3 \sin \beta z + C_4 \cos \beta z) + u_p, \quad (4.19)$$

kde u_p je partikulární část řešení tvaru:

$$u_p = \frac{r^2}{Eh} \left[p_r - \frac{\mu}{r} \mathcal{N}_z \right] = \frac{r^2}{Eh} \left[p_r - \frac{\mu}{r} \left(C_0 - \int p_z dz \right) \right]. \quad (4.20)$$

Natočení skořepiny je derivací radiálního posuvu [1]:

$$\vartheta = \frac{du}{dz} \quad (4.21)$$

Při analýze skořepin je třeba určit, zda se jedná o dlouhou nebo krátkou skořepinu. U krátké skořepiny totiž platí, že se konce skořepiny vzájemně ovlivňují, zatímco u dlouhé skořepiny se konce neovlivňují a počítá se každý konec skořepiny zvlášť [2]. To znamená, že u dlouhé

skořepiny vypadnou integrační konstanty C_3 a C_4 (4.19). Zda se jedná o dlouhou, či krátkou skořepinu v případě oceli lze vyjádřit vztahem [1]:

$$(2,5 \div 6) \cdot \sqrt{rh} \leq L \rightarrow \text{Dlouhá skořepina.} \quad (4.22)$$

Výsledné vztahy pro napětí:

$$\sigma_t = \frac{N_t}{h} + \frac{M_t}{J} x = \frac{N_t}{h} + \frac{12M_t}{h^3} x, \quad (4.23)$$

$$\sigma_z = \frac{N_z}{h} + \frac{M_z}{J} x = \frac{N_z}{h} + \frac{12M_z}{h^3} x. \quad (4.24)$$

Osový posuv w na střednici:

$$w(x=0) = w_R = \frac{1-\mu^2}{Eh} \int N_z dz - \frac{u}{r} \int u dz. \quad (4.25)$$

4.2 Kruhová a mezikruhová deska

Jedná se nejčastěji o dna nádob s nízkým vnitřním tlakem, dna pístů, přepážky či membrány. Zatížení a vazby musí být rotačně symetrické a kolmé na střednici [1]. Pro různé poměry tloušťky ku poloměru se využívá různých teorií. Desky je možné rozdělit podle tloušťky do těchto skupin [1]:

- **Thusté desky**

Poměr tloušťky desky ku poloměru je u tlustých desek mezi 1/10 a 1/5. U takových desek je nutné uvažovat ohybové i smykové napětí. Průhyby na tlusté desce jsou malé a prodloužení radiálních vláken po deformaci a membránová napětí jsou zanedbatelné. Normála ke střednici zůstává po zatížení přímkou, která ale nemusí být kolmá na rovinu střednice. V technické praxi se téměř nevyužívají a počítají se pomocí Mindlinovy teorie.

- **Tenké desky s malými průhyby**

Poměr tloušťky desky ku poloměru je u tenkých desek mezi 1/50 a 1/10. U těchto desek se zanedbává smykové napětí. Maximální průhyb je 1/4 tloušťky desky, jinak by se nejednalo o lineární problém. Je zde předpoklad malých deformací střednicové plochy. Normála ke střednici zůstává normálou i po zatížení a body střednicové plochy se přemísťují pouze ve směru osy z . Tyto desky jsou v technické praxi nejčastějším typem a jsou řešeny pomocí Kirchhoffovy teorie, která bude využita i v této práci při výpočtu úloh.

- **Tenké desky s velkými průhyby**

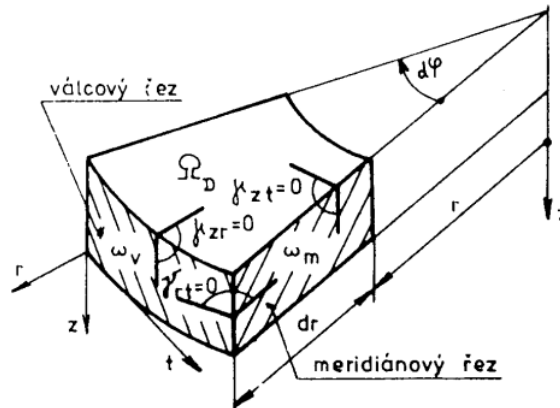
Znovu se jedná o tenké desky, ale pro velké průhyby již úloha není lineární. Uvažují se zde i membránová napětí.

- **Membrány**

Jedná se o velmi tenké struktury s poměrem tloušťky desky ku poloměru v rozmezí od 1/50 do 1/80. Uvažuje se konstantní napětí po tloušťce desky a namáhání pouze na tah.

4.2.1 Typický elementární prvek

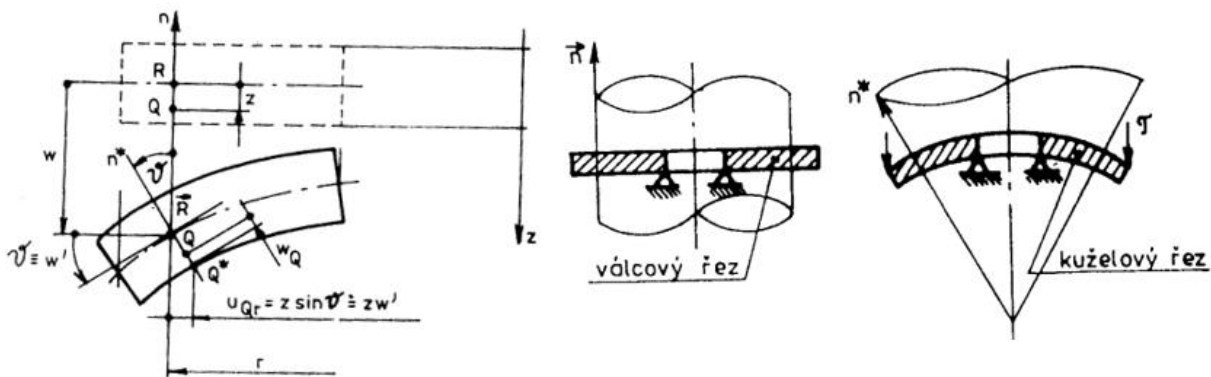
Jedná se o dvojnásobně elementární prvek uvolněný válcovým a meridiánovým řezem (obr. 4.4) [1]. Tyto řezy jsou na sebe kolmé.



Obr. 4.4: Uvolněný elementární prvek desky [1]

4.2.2 Deformace

Elementární prvek se deformuje tak, že body, které ležely před zatížením v meridiánové rovině, zůstanou v této rovině ležet i po zatížení a válcové řezy se změny na řezy kuželové (obr. 4.5) [1]. Posuv kolmý na střednici neboli průhyb je značen w a je posuvem nezávislým a natočení vůči nezatíženému stavu je značeno ϑ .



Obr. 4.5: Deformace desky [1]

Tensor přetvoření má nulové úhlové přetvoření a nenulové délkové přetvoření, což znamená, že tato přetvoření jsou hlavní a tenzor napětí má tvar [1]:

$$T_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_r & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_t & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

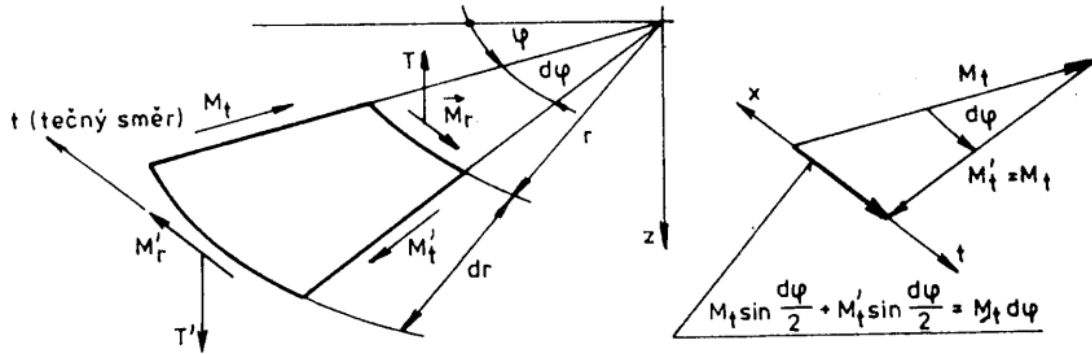
4.2.3 Uvolněný prvek

Na uvolněný prvek působí zatížení (obr. 4.6) [1]:

- Radiální moment \mathcal{M}_r
- Tečný moment \mathcal{M}_t

- Osový tlak p_z
- Posouvající síla T

V důsledku nulových úhlových přetvoření jsou meridiánové a válcové řezy hlavními řezy a působí v nich hlavní napětí σ_r a σ_t . Tato napětí jsou rozložena lineárně po tloušťce desky. Smykové napětí τ_{rt} je nulové a ostatní smyková napětí jsou zanedbatelná vzhledem k hlavním napětím, proto se ve výpočtech neuvažují.



Obr. 4.6: Uvolněný elementární prvek [1]

Z uvolnění se po úpravách získají rovnice rovnováhy [1]:

$$\mathcal{M}_r - \mathcal{M}_t + r \frac{d\mathcal{M}_r}{dr} = T \cdot r, \quad (4.27)$$

$$\frac{dT}{dr} + \frac{T}{r} + p_z(r) = 0. \quad (4.28)$$

4.2.4 Napjatost v bodě tělesa

Deska má dvouosou napjatost a tenzor napětí je [1]:

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_r(r) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_t(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

4.2.5 Rovnice pro řešení přímé úlohy

Patří zde rovnice rovnováhy (4.27, 4.28), geometrické vztahy (4.30, 4.31, 4.32, 4.33) a konstitutivní vztahy (4.43, 4.35) [1]:

$$\varepsilon_r = -z \frac{d\vartheta}{dr}, \quad (4.30)$$

$$\varepsilon_t = -z \frac{\vartheta}{r}, \quad (4.31)$$

$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz}, \quad (4.32)$$

$$\vartheta = \frac{dw}{dr}, \quad (4.33)$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_r + \mu \varepsilon_t), \quad (4.34)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1 - \mu^2} \left[-z \frac{\vartheta}{r} + \mu \left(-z \frac{d\vartheta}{dr} \right) \right]. \quad (4.35)$$

Dosazením geometrických rovnic do konstitutivních vztahů a provedením statické ekvivalence vzniknou rovnice pro výpočet momentů [1]:

$$\mathcal{M}_r = -\frac{Et^3}{12(1 - \mu^2)} \left(\frac{d\vartheta}{dr} + \mu \frac{\vartheta}{r} \right), \quad (4.36)$$

$$\mathcal{M}_t = -\frac{Et^3}{12(1 - \mu^2)} \left(\frac{\vartheta}{r} + \mu \frac{d\vartheta}{dr} \right). \quad (4.37)$$

Stejně jako skořepiny je zavedena ohybová tuhost desky:

$$B = \frac{Et^3}{12(1 - \mu^2)}. \quad (4.38)$$

Pro odvození natočení budou dosazeny rovnice momentů (4.36, 4.37) do rovnic rovnováhy a vznikne nehomogenní diferenciální rovnice druhého řádu [1]:

$$\frac{d^2\vartheta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\vartheta}{dr} - \frac{\vartheta}{r^2} = -\frac{\mathcal{T}}{B}. \quad (4.39)$$

Řešení této diferenciální rovnice má tvar:

$$\vartheta = C_1 r + \frac{C_2}{r} + \vartheta_p = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{1}{rB} \int \left(r \int \mathcal{T} dr \right) dr. \quad (4.40)$$

Průhyb vznikne integrací natočení [1]:

$$w = \int \vartheta dr + C_3. \quad (4.41)$$

Po úpravě:

$$\begin{aligned} w &= C_1 \frac{r^2}{2} + C_2 \ln r + C_3 + w_p \\ &= C_1 \frac{r^2}{2} + C_2 \ln r + C_3 - \int \left[\frac{1}{rB} \int \left(r \int \mathcal{T} dr \right) dr \right] dr. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Zjednodušené vztahy pro výpočet napětí lze vyjádřit z rovnic momentů (4.36, 4.37) a konstitutivních vztahů (4.34, 4.35) [1]:

$$\sigma_r = \frac{12\mathcal{M}_r}{t^3} z, \quad (4.43)$$

$$\sigma_t = \frac{12\mathcal{M}_t}{t^3} z, \quad (4.44)$$

kde z nabývá hodnot $\pm \frac{t}{2}$, tzn. spodní a horní povrch desky.

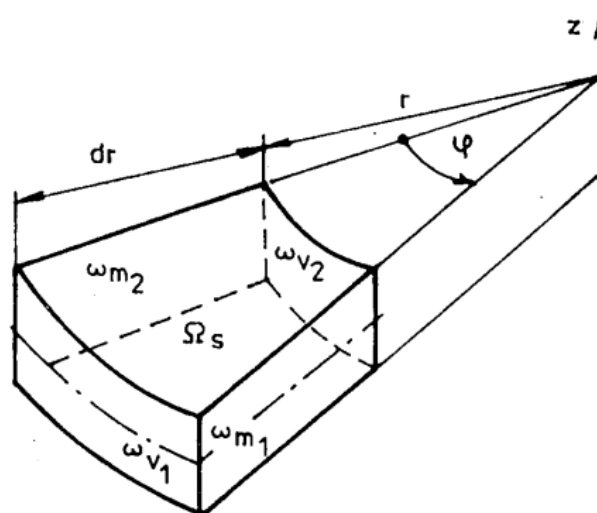
4.3 Kruhová stěna

Stejně jako v případě desky se jedná zejména o dna nádob. Teorie desek však neuvažuje radiální zatížení, se kterým stěna počítá. Aby byla úloha z hlediska pružnosti a pevnosti řešitelná, musí v úloze figurovat rotační symetrie z hlediska geometrie, materiálu, zatížení i vazeb [1].

Kruhová stěna musí být tenkostěnná, zpravidla by měla být tloušťka stěny ku poloměru menší než 1/5, jinak by se jednalo o válcové těleso.

4.3.1 Typický elementární prvek

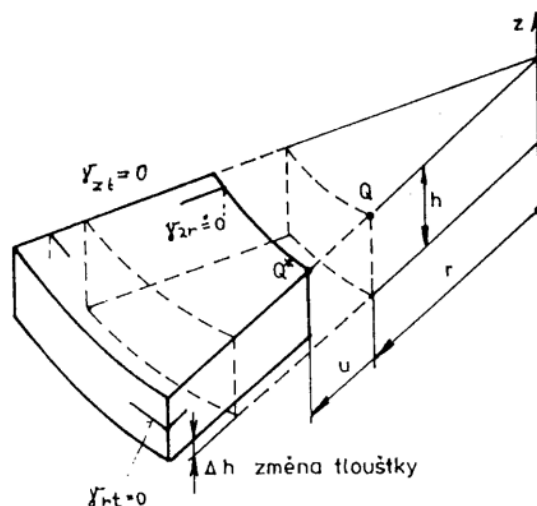
Jedná se o dvojnásobně elementární prvek uvolněný válcovým a meridiánovým řezem, které jsou na sebe kolmé (obr. 4.7) [1].



Obr. 4.7: Uvolněný elementární prvek stěny [1]

4.3.2 Deformace

Elementární prvek se deformuje tak, že body, které ve výchozím stavu ležely v meridiánové rovině, v této rovině zůstanou i při deformaci prvku a válcovým řezům se změni poloměry (obr. 4.8). Tloušťka stěny se mění v závislosti na zatěžování. [1]



Obr. 4.8: Zdeformovaný elementární prvek [1]

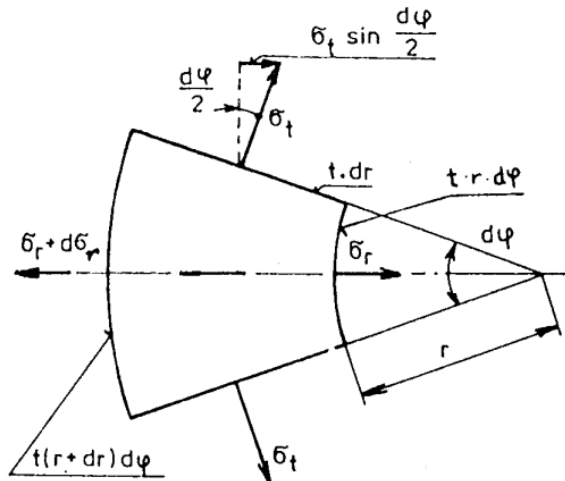
V důsledku zachování válcových a meridiánových řezů při deformaci jsou úhlová přetvoření nulová a tyto řezy jsou tedy hlavními řezy. V bodě tělesa vzniká trojosá deformace a tenzor přetvoření má tvar [1]:

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_z & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_r & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_t \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

4.3.3 Uvolněný prvek

Na uvolněný prvek působí zatížení (obr. 4.9) [1]:

- Radiální napětí σ_r
- Obvodové napětí σ_t



Obr. 4.9: Uvolněný elementární prvek ([1], upraveno)

Působící napětí na elementární prvek jsou rozložena po tloušťce stěny rovnoměrně a oproti desce zde nepůsobí žádný osový tlak [1]. Použitím silové rovnováhy v radiálním směru vznikne tvar rovnice rovnováhy [1]:

$$\sigma_r - \sigma_t + r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0. \quad (4.46)$$

4.3.4 Napjatost v bodě tělesa

Jelikož jsou smyková napětí nulová, vzniká v obecném bodě tělesa dvouosá napjatost a tenzor napětí má tvar [1]:

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_r(r) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_t(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.47)$$

4.3.5 Rovnice pro řešení přímé úlohy

Patří zde rovnice rovnováhy (4.46), geometrické vztahy (4.48, 4.49, 4.50) a konstitutivní vztahy (4.51, 4.52) [1]:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad (4.48)$$

$$\varepsilon_t = \frac{u}{r}, \quad (4.49)$$

$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz}, \quad (4.50)$$

$$\sigma_r = 2G\varepsilon_r + \lambda e, \quad (4.51)$$

$$\sigma_t = 2G\varepsilon_t + \lambda e, \quad (4.52)$$

kde:

$$e = \varepsilon_r + \varepsilon_t + \varepsilon_z, \quad (4.53)$$

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}. \quad (4.54)$$

Dosazením geometrických vztahů do vztahů konstitutivních vzejde tvar pro výpočet napětí [1]:

$$\sigma_r = C_1 \frac{E}{1 - \mu} - C_2 \frac{E}{1 + \mu} \frac{1}{r^2}, \quad (4.55)$$

$$\sigma_t = C_1 \frac{E}{1 - \mu} + C_2 \frac{E}{1 + \mu} \frac{1}{r^2}. \quad (4.56)$$

Jsou zavedeny konstanty:

$$A = C_1 \frac{E}{1 - \mu}, \quad (4.57)$$

$$B = C_2 \frac{E}{1 + \mu}. \quad (4.58)$$

Postupným dosazením geometrických vztahů do konstitutivních vztahů a následně do rovnic rovnováhy je určena diferenciální rovnice druhého řádu (4.59) a její řešení (4.60) [1]:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0, \quad (4.59)$$

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r}. \quad (4.60)$$

5 Metoda konečných prvků

Metoda konečných prvků (MKP) je numerická metoda pro řešení diferenciálních rovnic, které popisují chování fyzikálních systémů. MKP převádí spojité funkce na funkce o konečném počtu neznámých parametrů. Využívá se zejména pro komplikované úlohy, které jsou analytickou metodou těžce popsateľné nebo nepopsateľné a značně urychlí dobu výpočtu. [3]

Program Ansys využívá metodu konečných prvků a bude proto využit pro numerické výpočty daných úloh. Výsledné grafy a hodnoty budou vytaženy v podobě textových souborů a převedeny do programu Wolfram Mathematica, kde budou srovnány s analytickým řešením.

Stejně jako při analytickém řešení úloh obecné pružnosti a pevnosti má MKP za cíl určit 15 neznámých funkcí, které jsou vázány rovnicemi rovnováhy, geometrickými rovnicemi a konstitutivními vztahy. Nutností je také předepsání okrajových podmínek, které představují uložení tělesa, známé posuvy a bez kterých by existovalo nekonečně mnoho řešení a výpočet by se zhroutil.

5.1 Lagrangeův variační princip

„Mezi všemi funkcemi posuvů, které zachovávají spojitost tělesa a splňují geometrické okrajové podmínky, se realizují ty, které udělají celkové potenciální energii Π stacionární hodnotu.“ [3]

Vyjádření stacionární hodnoty, která zároveň představuje minimum [3]:

$$\Pi = W - P, \quad (5.1)$$

kde W je energie napjatosti tělesa Ω :

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (5.2)$$

a P je potenciál vnějšího zatížení:

$$P = \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{o} dV + \int_{\Gamma_p} \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS. \quad (5.3)$$

Ve vztazích (5.1, 5.2, 5.3) vystupují sloupcové matice posuvů \mathbf{u}^T , přetvoření $\boldsymbol{\varepsilon}^T$, napětí $\boldsymbol{\sigma}^T$, objemového zatížení \mathbf{o}^T a plošného zatížení \mathbf{p}^T [3].

Jelikož je potenciální energie obecně závislá na spojitých funkcích u , v , w , je třeba tyto funkce diskretizovat, což znamená, že se ze spojitého problému stane problém s konečným počtem parametrů. Aproximační funkce posuvů se vypočítají [3]:

$$u(x, y, z) = \sum_{i=1}^l N_i(x, y, z) \cdot u_i, \quad (5.4)$$

kde $N_i(x, y, z)$ je bázová funkce, která je známá a předem daná a u_i je neznámý koeficient představující složku posuvu v uzlovém bodě sítě [3]. Obdobně by vypadaly posuvy v a w . Aproximační funkce se dosadí do výrazu pro potenciální energii (5.1) a tím se přejde od spojitého problému k problému s konečným počtem parametrů [3].

Existuje spousta zdrojů o metodě konečných prvků, a proto nebude tato metoda v bakalářské práci více rozebrána.

6 Přehled nejčastěji využívaných složených těles v technické praxi

Tato kapitola pojedná o různých typech složených těles sestavených ze základních těles obecné pružnosti a pevnosti a jejich výskytu v technické praxi.

6.1 Tlakové nádoby

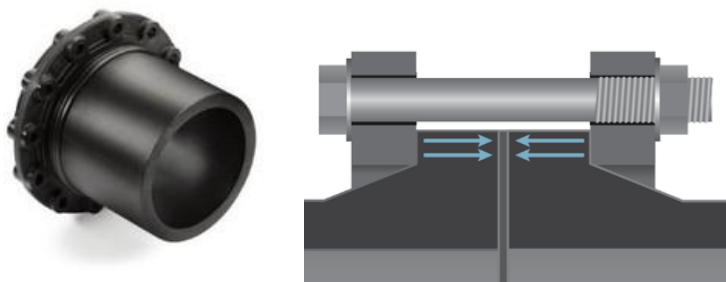
Tlakové nádoby (obr. 6.1) jsou nejrozšířenějším typem složených těles. Jedná se o nádoby určené k udržování plynů nebo kapalin, ve kterých je odlišný tlak, než je tlak okolí. Jsou široce rozšířené v oblasti chemického a petrochemického průmyslu, v průmyslu ropy a zemního plynu či v potravinářství [9]. Tlakové nádoby mohou mít tvar válce nebo koule a mohou být položeny svisle nebo vodorovně. U tlakových nádob, které jsou položeny svisle by nestačila analýza pomocí znalostí z předmětu Pružnost a pevnost II, ale bylo by nutné provést kontrolu na vzpěrnou stabilitu, aby nedošlo k tzv. zborcení nádoby [2]. Podle tlaku, který nádoby uchovávají se využívají nádoby s různým zakončením. Pokud je tlak malý, bude stačit tlaková nádoba s rovným dnem (stěnodeska), pokud je tlak uvnitř nádoby větší, využívají se nádoby s eliptickým, torosférickým či půlkulovým dnem (skořepina) [9]. Je to z důvodu toho, že zde díky plynulosti přechodu mezi válcovou skořepinou a půlkulovým dnem nevzniká tak velký koncentrátor napětí, jako u válcové skořepiny s rovným dnem [4].



Obr. 6.1: Tlakové nádoby [15][16]

6.2 Přírubové spoje

Přírubové spoje (obr. 6.2) jsou dalším příkladem složeného tělesa ze skořepiny či válcového tělesa a stěnodesky. Využívají se ke spojování potrubí s různými druhy materiálu nebo v místech, kde je požadován rozebíratelný spoj [10]. Příruby jsou spojeny navzájem pomocí šroubů, které vyvolávají axiální sílu na stěnodesku, což je typický příklad úlohy předmětu Pružnosti a pevnosti II.



Obr. 6.2: Příruba a tlak od šroubů [10]

6.3 Tělesa spojená lisováním

V technické praxi se často využívá spojení lisováním. Např. pro spojení potrubí s různými tvarovými prvky, či s dalším potrubím za účelem vzniku nerozebíratelného spoje je lisování ideální volbou (obr. 6.3) [11]. Je vhodné zejména pro dobré těsnicí vlastnosti a bezpečnost. Z pohledu Pružnosti a pevnosti se jedná o válcová tělesa vložené v sobě s přesahem.

Další případ, ve kterém se využívá lisovaného spoje je u lisování ozubených kol na hřídel nebo lisování hřídelů do ložisek. Znovu jde o případ dvou válcových těles působících na sebe vzájemným tlakem.



Obr. 6.3: Lisovaný spoj potrubí s tvarovým prvkem [14]

6.4 Nádrže na kapaliny

Nádrže na kapalinu, např. pro skladování pitné vody (obr. 6.4) jsou vytvořeny převážně pro namáhání hydrostatickým tlakem. Jde o skořepinu s rovným dnem položenou na podpoře.



Obr. 6.4: Velkoprostorová nádrž pro skladování kapalin bez tlaku [17]

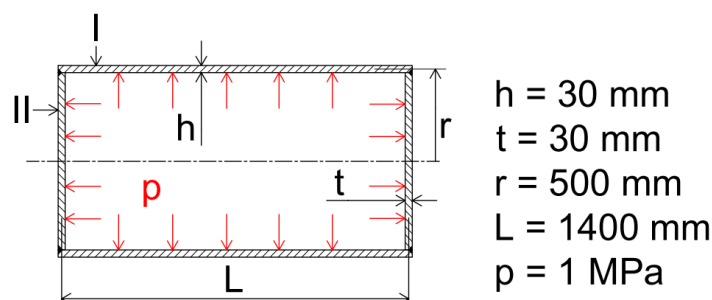
7 Analýza vybraných složených těles

V této kapitole bude provedena deformačně-napětěová analýza 2 vybraných složených těles. Každé těleso bude řešeno pro různé rozměry. Nejprve bude odvozen analytický model řešení, poté bude ukázána tvorba numerického modelu a výsledky budou porovnány. Numerický model bude počítat s velkými deformacemi i malými deformacemi, aby bylo jasně vidět omezení analytického řešení. Odchyłka těchto řešení bude zaznamenána pomocí relativní chyby:

$$\delta = \frac{100\%}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_{i,num} - x_{i,anal}}{x_{i,num}} \right| \quad (7.1)$$

7.1 Válcová nádoba s rovným dnem a vnitřním tlakem

Jedná se o složené těleso, které se skládá ze dvou těles (obr. 7.1). První těleso je válcová membránová skořepina. Jak už bylo řečeno v kapitole 4.1, skořepina je momentová, pokud na ni působí moment. V tomto případě zde vznikne moment kvůli skokové změně tuhosti, která je způsobena přítomností stěnodesky na okrajích skořepiny [4]. Druhé těleso je stěnodeska, která se při zatížení radiální silou chová jako stěna a při zatížení momentem a osovou silou se chová jako deska. Takové těleso musí být řešeno zvlášť pomocí superpozice.



Obr. 7.1: Zadání prvního složeného tělesa

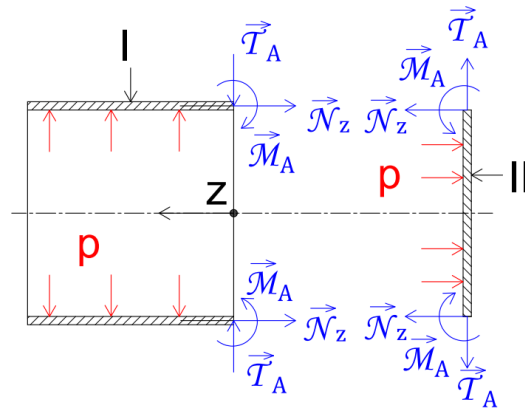
7.1.1 Uvolnění analytického modelu

Nejprve je třeba určit, zda se jedná o dlouhou či krátkou skořepinu. Bude využit vzorec (4.21):

$$6 \cdot \sqrt{rh} = 6 \cdot \sqrt{500 \cdot 30} = 734,8 \text{ mm} \leq 1400 \text{ mm} \quad (7.2)$$

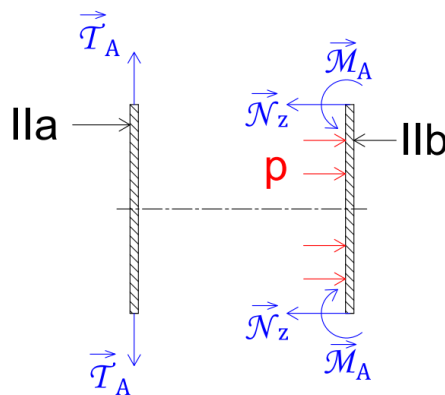
→ Dlouhá skořepina.

Protože se jedná o dlouhou skořepinu a konce skořepiny se vzájemně neovlivňují, bude řešen pouze jeden konec skořepiny (druhý konec je symetrický) (obr. 7.2).



Obr. 7.2: Uvolnění prvního složeného tělesa

Jak již bylo zmíněno na začátku úlohy, stěnodeska bude řešena pomocí superpozice (obr. 7.3).



Obr. 7.3: Uvolnění stěnodesky

Nyní je třeba zjistit, jaké síly a momenty působí mezi jednotlivými tělesy. Stanovení neznámých parametrů:

$$NP = \{\mathcal{M}_A, \mathcal{T}_A, \mathcal{N}_z\}. \quad (7.3)$$

Osová síla \mathcal{N}_z se zjistí z rovnováhy sil:

$$\sum F_z = 0: \mathcal{N}_z 2\pi r - p\pi r^2 = 0 \rightarrow \mathcal{N}_z = \frac{pr}{2}. \quad (7.4)$$

Zbylé parametry budou určeny z deformačních podmínek:

$$u^I = u^{IIa}, \quad (7.5)$$

$$\vartheta^I = \vartheta^{IIb}. \quad (7.6)$$

Deformační podmínka (7.5) říká, že radiální posuv v místě spojení na skořepině musí být stejný jako radiální posuv na stěně a deformační podmínka (7.6) říká, že natočení v místě spojení musí být stejné na skořepině i desce.

7.1.2 Řešení skořepiny

Stanovení okrajových podmínek v místě spojení ($z = 0$):

$$\mathcal{M}_z = \mathcal{M}_A, \quad (7.7)$$

$$\mathcal{T}_{rz} = \mathcal{T}_A. \quad (7.8)$$

Radiální posuv pro dlouhou skořepinu je tvaru:

$$u^I = e^{-\beta z} (C_1 \sin \beta z + C_2 \cos \beta z) + u_p^I, \quad (7.9)$$

kde:

$$u_p^I = \frac{r^2}{Eh} \left(p - \frac{\mu}{r} \mathcal{N}_z \right) \rightarrow u_p^I = \frac{r^2}{Eh} \left(p - \frac{\mu p}{2} \right). \quad (7.10)$$

Natočení se vypočte ze vztahu (4.21) a bude tvaru:

$$\vartheta^I = \frac{du^I}{dz} \quad (7.11)$$

Nyní bude dosazena rovnice (7.9) do rovnic (4.11, 4.12, 4.13) pro výpočet momentů a osových síly a tyto rovnice budou následně dosazeny do rovnic okrajových podmínek (7.7, 7.8). Tímto se získají integrační konstanty C_1 a C_2 , které jsou v závislosti na neznámých parametrech. Integrační konstanty se dosadí do rovnic (7.9, 7.11), což jsou deformační podmínky na skořepině.

Až budou známy velikosti neznámých parametrů, dopočítá se osový posuv dle (4.25) a napětí dle (4.23, 4.24).

7.1.3 Řešení stěny

Okrajové podmínky pro $r = 0$:

$$u^{IIa} = 0 \quad (7.12)$$

a pro $r = r$:

$$\sigma_r = \frac{\mathcal{T}_A}{t} = A - \frac{B}{r}. \quad (7.13)$$

Z první okrajové podmínky lze odvodit, že integrační konstanta B je rovna nule, proto platí:

$$\sigma_r = A \quad (7.14)$$

Dosadí-li se do rovnice (4.56), integrační konstanta bude tvaru:

$$C_1^{IIa} = A \cdot \frac{1 - \mu}{E} \quad (7.15)$$

Tato integrační konstanta je dosazena do (4.59) a radiální posuv v místě spojení je roven:

$$u^{IIa} = C_1^{IIa} \cdot r = A \cdot \frac{1 - \mu}{E} \cdot r = \frac{\mathcal{T}_A}{t} \cdot \frac{1 - \mu}{E} \cdot r \quad (7.16)$$

Napětí bude po zjištění neznámých parametrů určeno ze vztahů (4.55, 4.56).

7.1.4 Řešení desky

Okrajové podmínky pro $r = 0$:

$$\vartheta^{IIb} = 0 \quad (7.17)$$

a pro $r = r$:

$$\mathcal{M}_r = \mathcal{M}_A. \quad (7.18)$$

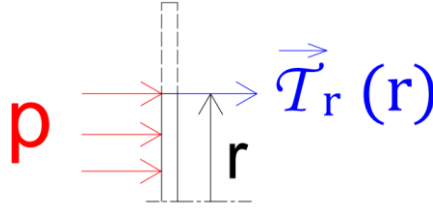
Stejně jako u stěny, protože se jedná o plné těleso, tak je konstanta C_2^{Ib} nulová a vztah pro natočení bude tvaru:

$$\vartheta^{Ib} = C_1^{Ib} \cdot r + \vartheta_p^{Ib}, \quad (7.19)$$

kde partikulární část natočení je tvaru:

$$\vartheta_p^{Ib} = -\frac{1}{rB} \int \left(r \int (\tau_r dr) dr \right) \quad (7.20)$$

Liniová síla τ_r je určena ze silové rovnováhy na uvolněné desce (obr. 7.4).



Obr. 7.4: Uvolnění desky

Výpočet liniové síly τ_r pomocí silové rovnováhy:

$$\sum F_z = 0: \tau_r \cdot 2\pi r + p\pi r^2 = 0 \rightarrow \tau_r = -\frac{pr}{2} \quad (7.21)$$

Tato liniová síla bude dosazena do vztahu (7.20) a získá se rovnice pro partikulární natočení:

$$\vartheta_p^{Ib} = -\frac{1}{rB} \int \left(r \int \left(-\frac{pr}{2} dr \right) dr \right) = \frac{pr^3}{16B} \quad (7.22)$$

Následně je rovnice (7.19) i s partikulárním řešením dosazena do vztahu pro výpočet momentu (4.36) a ten dosazen do okrajové podmínky (7.17):

$$\mathcal{M}_r = -\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{d\vartheta}{dr} + \mu \frac{\vartheta}{r} \right) = \mathcal{M}_A. \quad (7.23)$$

Z této rovnice je určena integrační konstanta C_1^{Ib} závislá na neznámém parametru \mathcal{M}_A , která je dosazena do deformační podmínky (7.6). Po zjištění hodnot neznámých parametrů je napětí vykresleno dle (4.43, 4.44).

7.1.5 Řešení deformačních podmínek

Dosazením rovnic do deformačních podmínek vznikne soustava dvou rovnic o dvou neznámých parametrech \mathcal{M}_A a \mathcal{T}_A , které jsou obsaženy v integračních konstantách:

$$e^{-\beta z} (C_1 \sin \beta z + C_2 \cos \beta z) + \frac{r^2}{Eh} \left(p - \frac{\mu p}{2} \right) = \frac{\mathcal{T}_A}{t} \cdot \frac{1-\mu}{E} \cdot r, \quad (7.24)$$

$$\frac{du^I}{dz} = C_1^{Ib} \cdot r + \frac{pr^3}{16B}. \quad (7.25)$$

Rovnice nebudou detailněji rozepsány, protože jejich řešení bylo provedeno v programu Mathematica (obr. 7.5) za pomoci příručky pro práci s programem [12].

```
In[2137]= sol = Solve[{u1 - u2a == 0, v1 - v2b == 0}, {MA0, TA0}]
```

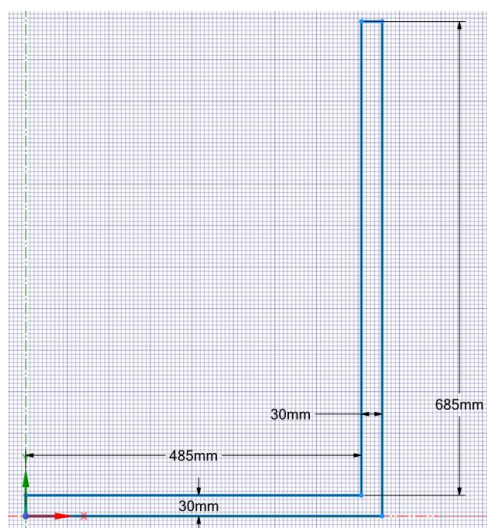
```
Out[2137]= {{MA0 -> -28011.5, TA0 -> 313.569}}
```

Obr. 7.5: Vyřešení deformačních podmínek v programu Mathematica

Vyřešením těchto rovnic se získají hledané parametry \mathcal{M}_A a \mathcal{T}_A a následně je možné vykreslit grafy posuvů a napětí.

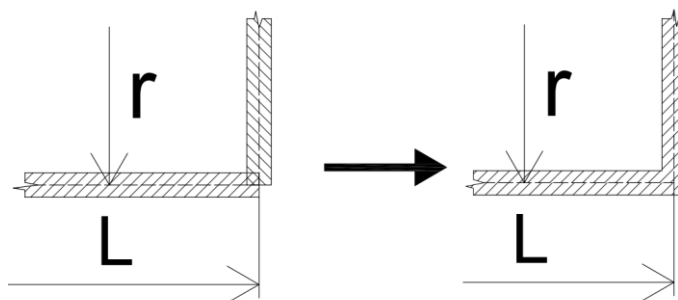
7.1.6 Numerický model

Nejprve je vytvořena geometrie tělesa. Vzhledem k tomu, že je těleso rotačně symetrické, náčrt je zhotoven ve 2D, který je Ansys schopný rotovat kolem osy (obr. 7.6). Protože se jedná o dlouhou skořepinu, která je na obou koncích spojena stejně se stěnodeskou, bude řešena stejně jako v analytickém případě pouze jedna část skořepiny (obr. 7.9) (druhá část by byla symetrická).



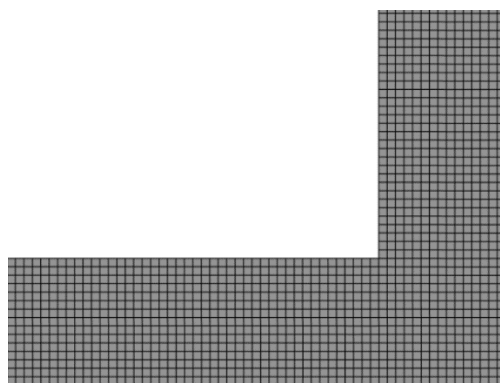
Obr. 7.6: Geometrie prvního tělesa vytvořená ve SpaceClaimu

Při modelování geometrie nastává první problém, a to takový, že analytický model počítá pouze se střednicemi a až při řešení napětí se do výpočtů přidává tloušťka těles. U modelování geometrie bylo potřeba rozhodnout, jakým způsobem budou tělesa spojena, aby se řešení co nejvíce přibližovalo analytice. Na obr. 7.7 je vidět, jakým způsobem byla geometrie určena. Nejprve byly nakresleny střednice těles, kterým se dodala tloušťka a schodek v rohu byl doplněn, aby v tom místě nevznikala kritická místa, se kterými analytický model nepočítá.

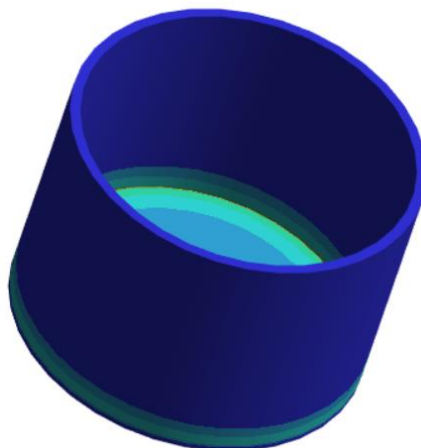


Obr. 7.7: Zvolené modelování tělesa

Po vytvoření geometrie a nastavení materiálu se přešlo do modelu, kde bylo nastaveno, že se jedná o axisymetrickou úlohu a byly vytvořeny cesty po střednicích a površích těles, aby bylo možné vykreslit grafy a porovnat je s analytickým modelem. Byla vytvořena síť prvků (obr. 7.8) s kvadratickým elementárním prvkem o velikosti 2 mm. Celkově bylo vytvořeno 28 278 uzlů a 9015 prvků. Nebylo by potřeba tvořit tak jemnou síť, ale protože se jedná o jednoduché těleso, kde výpočty nezaberou tolik času, proto je zvolen tak malý prvek. Byly zadány okrajové podmínky a zatížení. Celý soubor je v příloze bakalářské práce. Modelování dalšího tělesa v programu Ansys probíhalo stejným postupem a nebude již tak detailně popisováno.



Obr. 7.8: Síť konečných prvků prvního tělesa



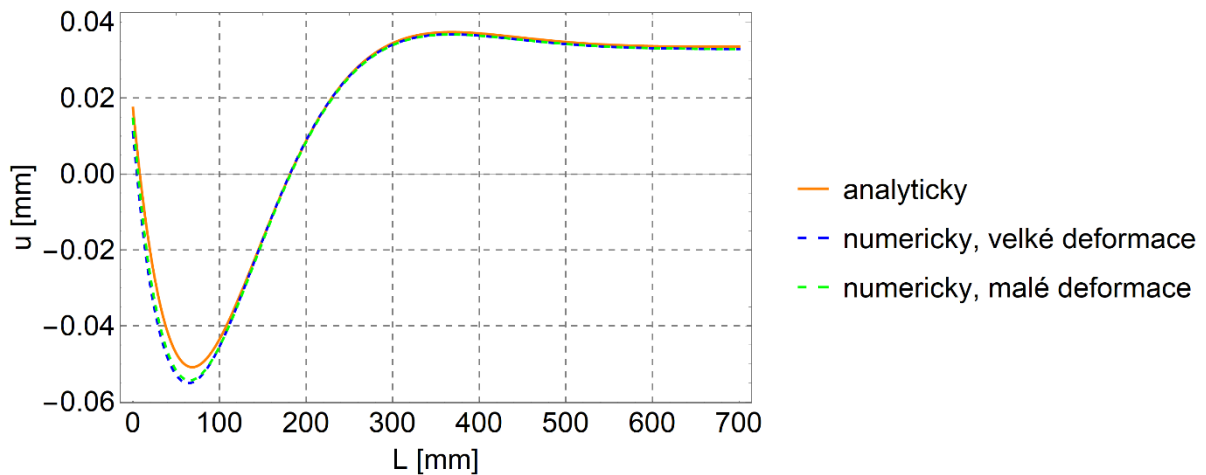
Obr. 7.9: Zobrazení poloviny prvního složeného tělesa ve 3D

7.1.7 Výsledky

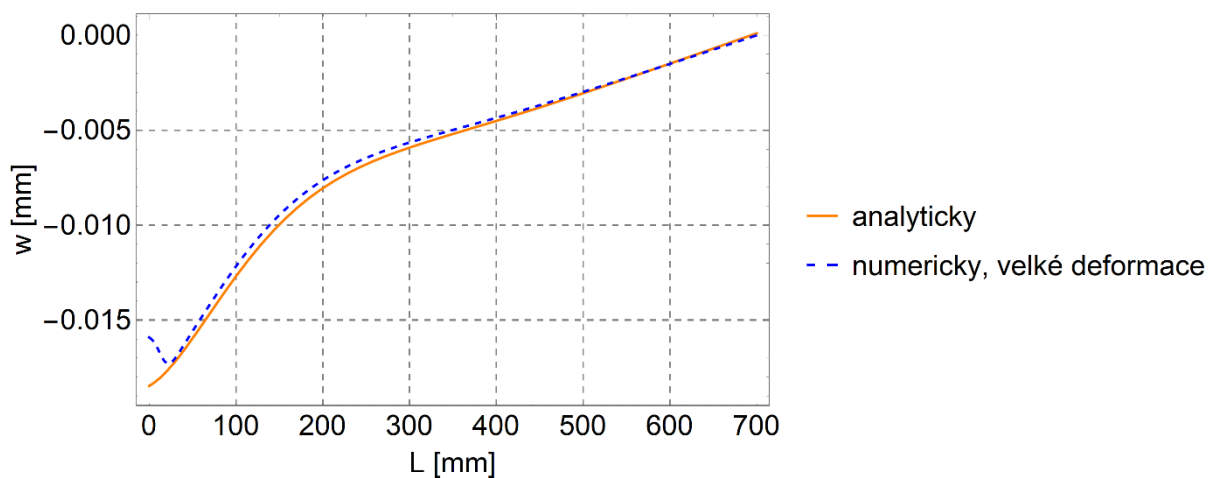
Nyní budou vykresleny grafy výsledků dle rozměrů v tab. 7.1.

Tab. 7.1: Zadání rozměrů pro analýzu prvního tělesa a vypočtené neznámé parametry

ROZMĚRY	p [MPa]	r [mm]	L [mm]	h [mm]	t [mm]	T_A [N/mm]	M_A [Nmm/mm]	N_z [N/mm]
a)	1	500	1400	30	30	313,6	-28011,5	250
b)				40	20	282,4	-30707,4	
c)				50	10	213,9	-31203,8	
d)				20	40	259,7	-18178,3	
e)				10	50	100,1	-4262,7	

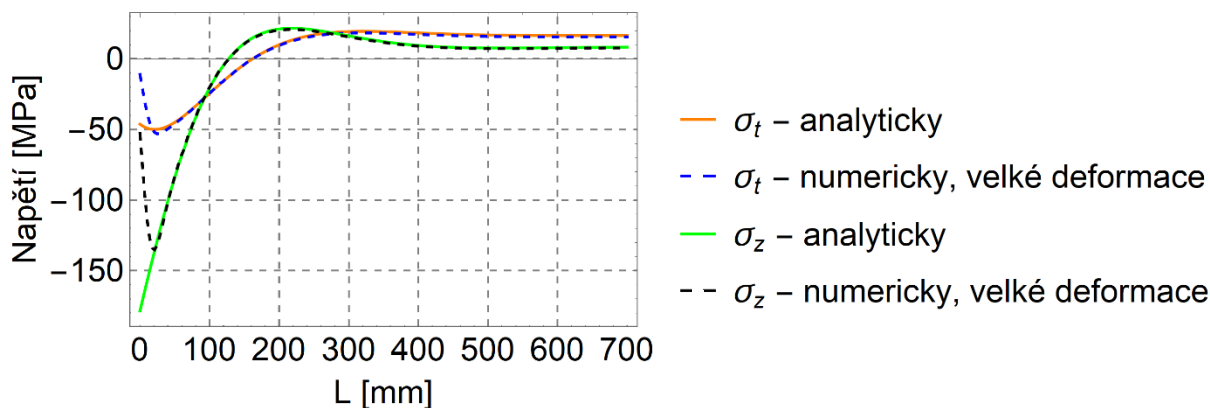


Obr. 7.10: Radiální posuv po střednici skořepiny pro rozměry a) z tab. 7.1

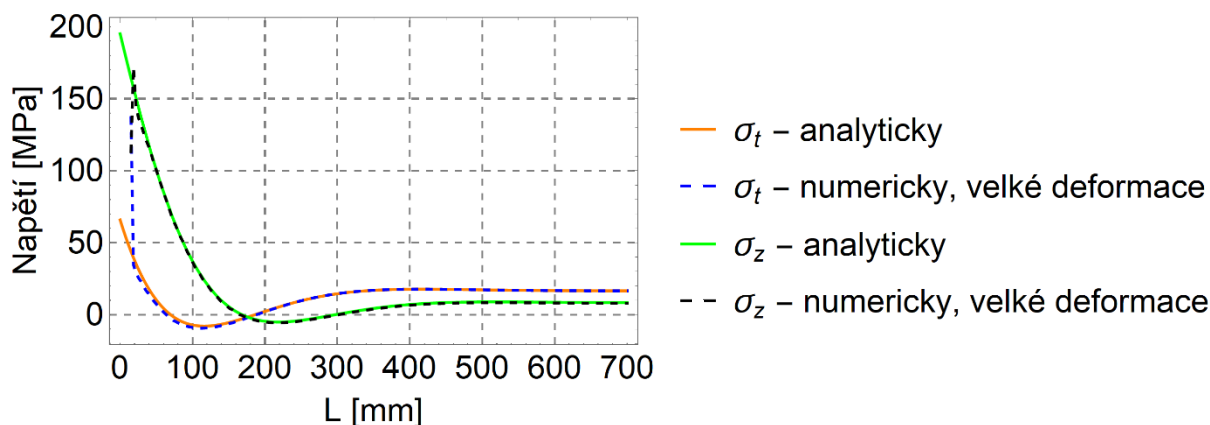


Obr. 7.11: Osový posuv po střednici skořepiny pro rozměry a) z tab. 7.1

Průběhy posuvů analytického řešení jsou velmi přesné a sedí s řešením numerickým. Dle obr. 7.10 lze konstatovat, že předpoklad dlouhé skořepiny byl správný, protože se hodnota radiálního posuvu v dostatečné vzdálenosti od místa spojení ustálí na konstantní hodnotě v důsledku působení konstantního membránového napětí. Průběh osového posuvu (obr. 7.11) je roven nule v místě skořepiny $L = 700 \text{ mm}$, což odpovídá polovině skořepiny. V tomto místě se nachází symetrie, což je důvod nulového osového posuvu. V místě spojení skořepiny se stěnodeskou se výsledek analytického modelu a numerického liší, a to je způsobeno tím, že v numerickém modelu je spojení v rámci objemu tělesa, kdežto v analytickém řešení je spojení na úrovni střednic. Jakmile jedno těleso začne zasahovat do druhého, numerický model to zohlední a analytický ne.



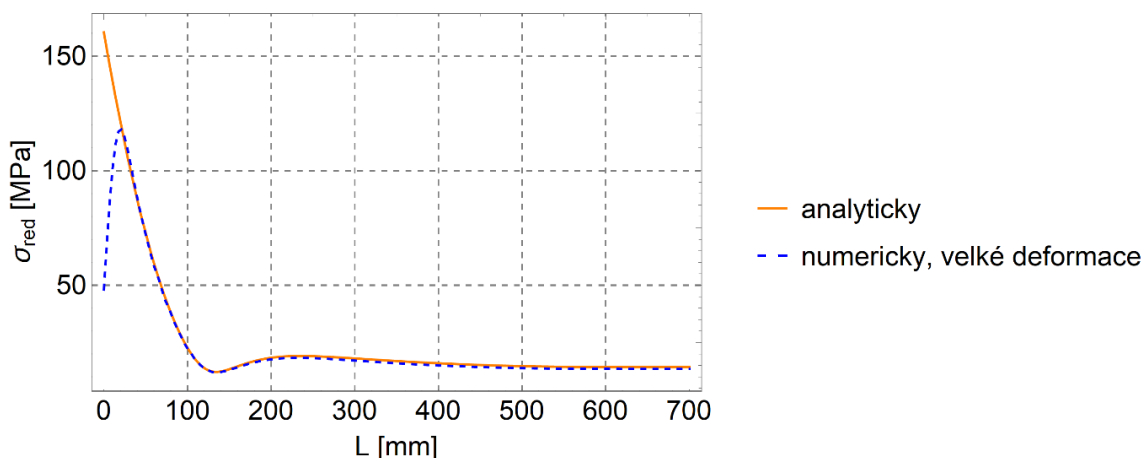
Obr. 7.12: Napětí na vnější straně skořepiny pro rozměry a) z tab. 7.1



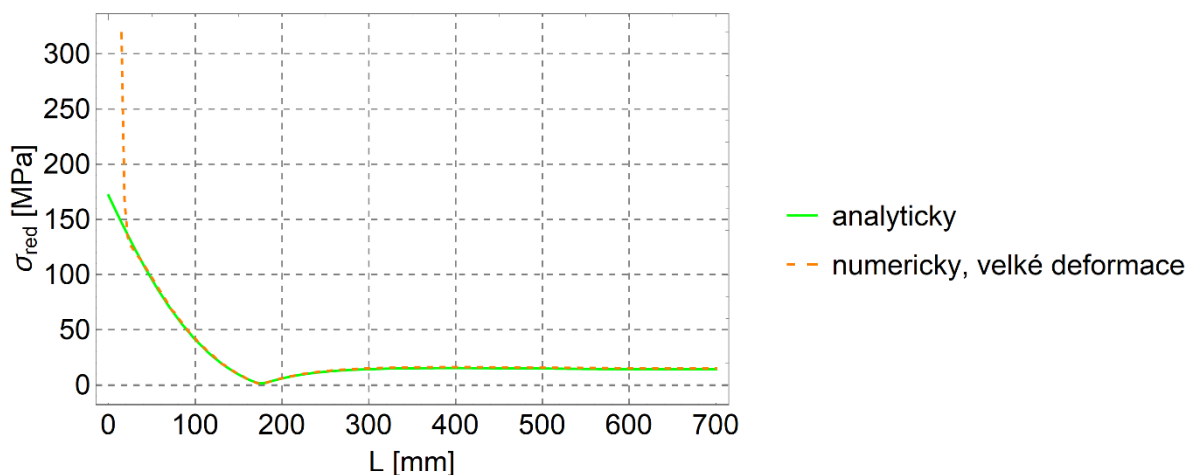
Obr. 7.13: Napětí na vnitřní straně skořepiny pro rozměry a) z tab. 7.1

Průběhy napětí na vnější straně skořepiny (obr. 7.12) vypočítané analyticky přesně sedí s průběhy určenými numericky až na místo spojení. Odchylna je znovu způsobená napojením na druhé těleso.

Na vnitřní straně skořepiny je nutno brát v potaz, že cesta v numerickém modelu, která vede po vnitřní straně skořepiny, není stejně dlouhá jako délka střednice, protože by vstupovala v místě spojení skořepiny a stěnodesky do stěnodesky a hodnoty napětí by nebyly relevantní. I přesto jsou odchylky napětí na vnitřní straně větší (obr. 7.13) z důvodu singularity v rohu spojení. Singularita a její vážnost je vysvětlena dále v dokumentu.



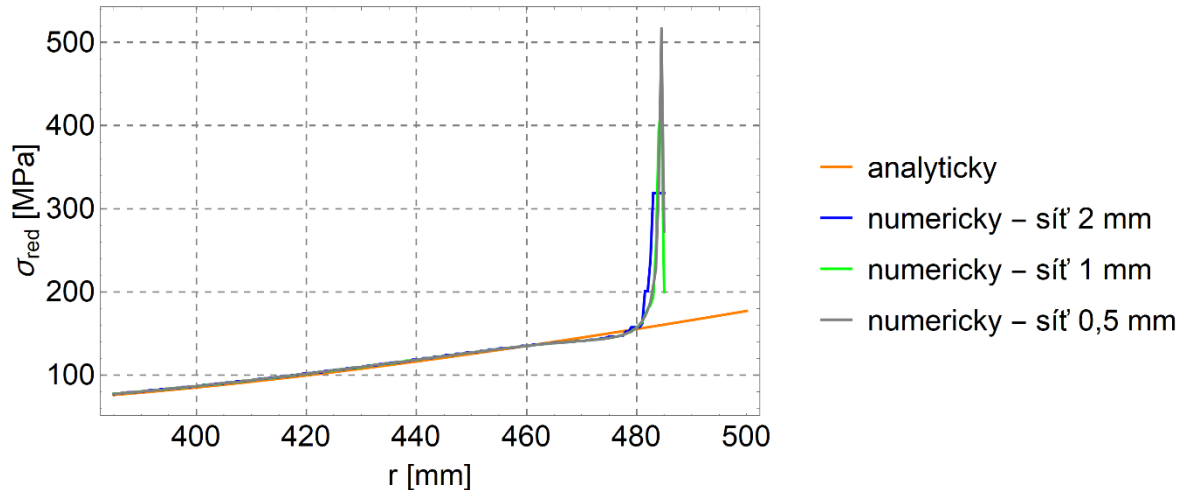
Obr. 7.14: Redukované napětí dle HMH na vnější straně skořepiny pro rozměry a) z tab. 7.1



Obr. 7.15: Redukované napětí dle HMH na vnitřní straně skořepiny pro rozměry a) z tab. 7.1

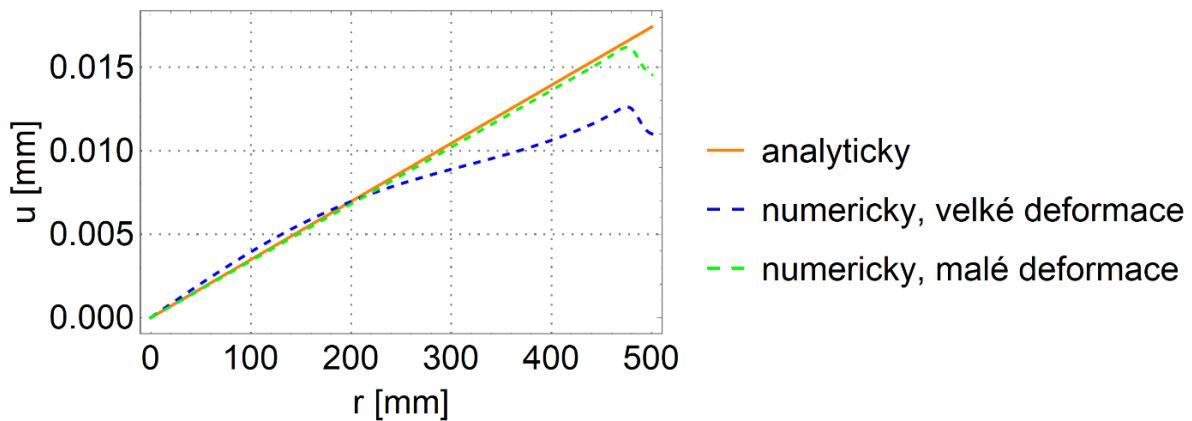
Hlavním výstupem analýzy je redukované napětí, které říká, jaké celkové napětí na těleso působí. Na obr. 7.14, 7.15 lze vidět, že je analytický výpočet velmi blízký tomu numerickému, což je dáno splněním předpokladů obecné pružnosti a pevnosti pro výpočet těchto těles. Relativní odchylky numerického řešení od analytického jsou vyznačeny v tab. 7.2.

Tělesa s ostrými hranami jsou problematická při řešení numerickou metodou. V těchto místech se nacházejí koncentrátoři napětí, proto zde napětí vzroste na vysokou hodnotu. V numerickém modelu v těchto místech vznikají singularity, což jsou místa, ve kterých se zhuštěním sítě konečných prvků roste napětí do nekonečna (obr. 7.16). V reálném tělese se singularity nevyskytují, protože neobsahují ostré rohy, ale vždy je v nich rádius.



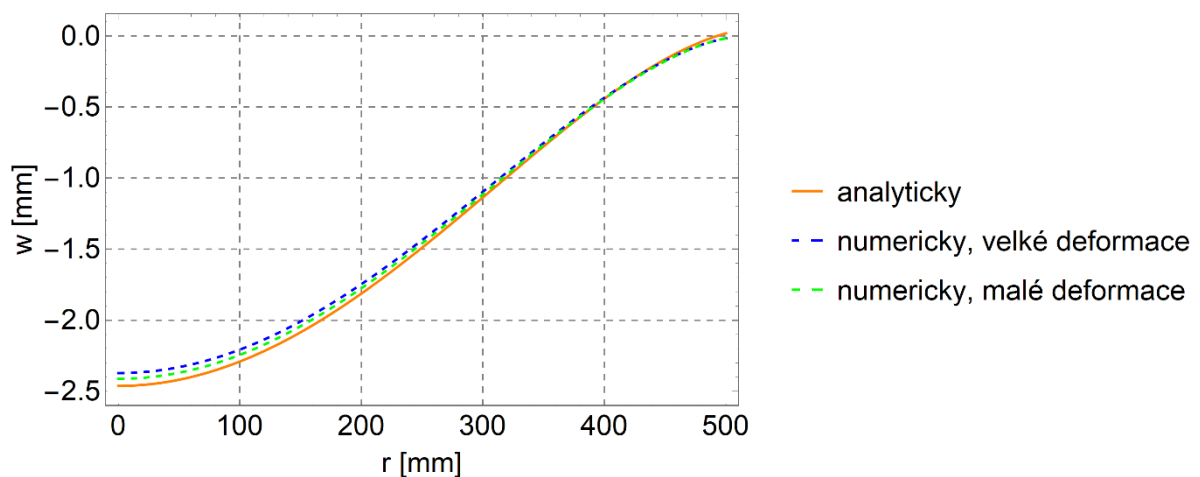
Obr. 7.16: Detail na redukované napětí na vnitřní straně skořepiny pro analytický model a numerický model s různou velikostí prvku sítě

Na obr. 7.16 lze vidět skoková hodnota redukovaného napětí pro různé velikosti prvků sítě vzniklá přítomností singularity v ostré hraně. Se zahuštěním sítě klesá hodnota délky, na které napětí skokově vzroste, a proto lze konstatovat, že není nutné kvůli tak malému místu předimenzovat celou nádobu. V reálném tělese bude v tomto místě rádius, a tak hodnota nevzroste tak kriticky.



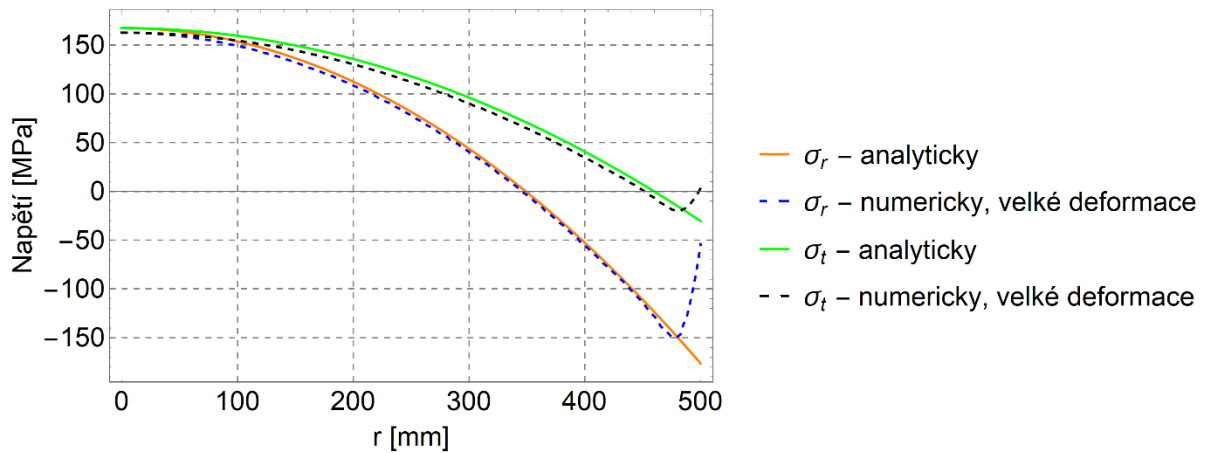
Obr. 7.17: Radiální posuv po střednici na stěnodesce pro rozměry a) z tab. 7.1

Pro případ stěnodesky je zobrazen i numerický výpočet zahrnující malé deformace (obr. 7.17) z důvodu velké odchylky při numerickém výpočtu s velkými deformacemi. Z obrázku plyne, že analytický výpočet je počítán správně, protože je shodný s výpočtem numerickým při malých deformacích, ale nevystihuje realitu. V reálném modelu již nejde o lineární problém, a tak lze konstatovat, že analytický výpočet není dostatečně přesný.

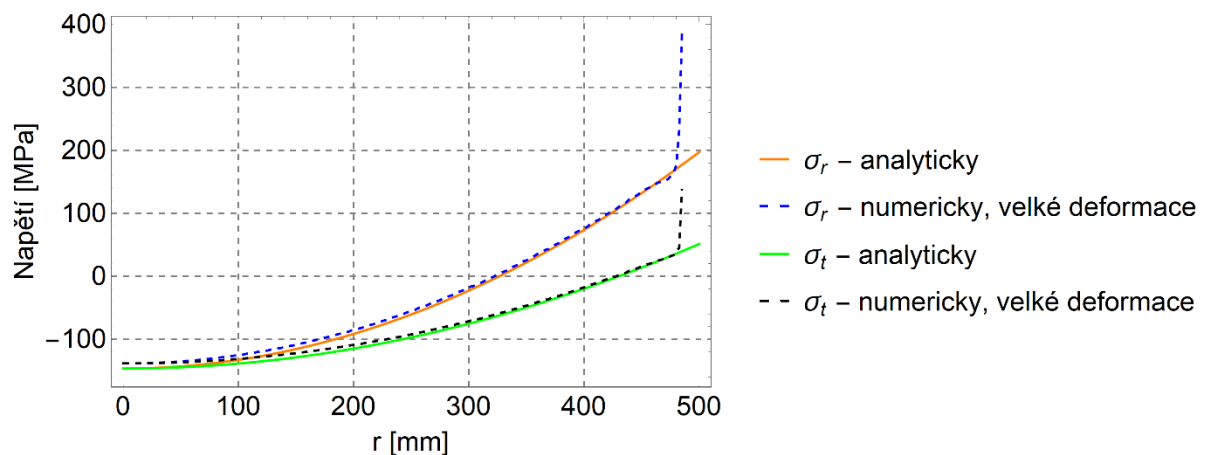


Obr. 7.18: Průhyb po střednici stěnodesky pro rozměry a) z tab. 7.1

Průhyb stěnodesky je maximální ve středu desky a nabývá hodnoty -2,5 mm (obr. 7.18), což je v souladu s předpokladem, kdy průhyb ku tloušťce nesmí být větší než $1/4$. Zároveň musí být tloušťka desky ku jejímu poloměru v rozmezí od $1/50$ do $1/10$, což je taktéž splněno, proto je analytický i numerický výpočet velmi podobný.

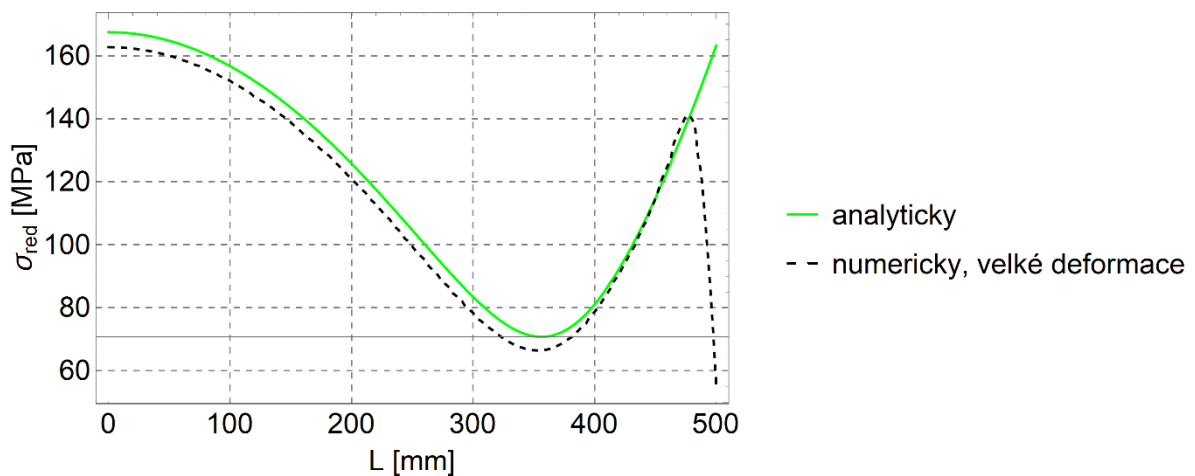


Obr. 7.19: Napětí na vnější straně stěnodesky pro rozměry a) z tab. 7.1

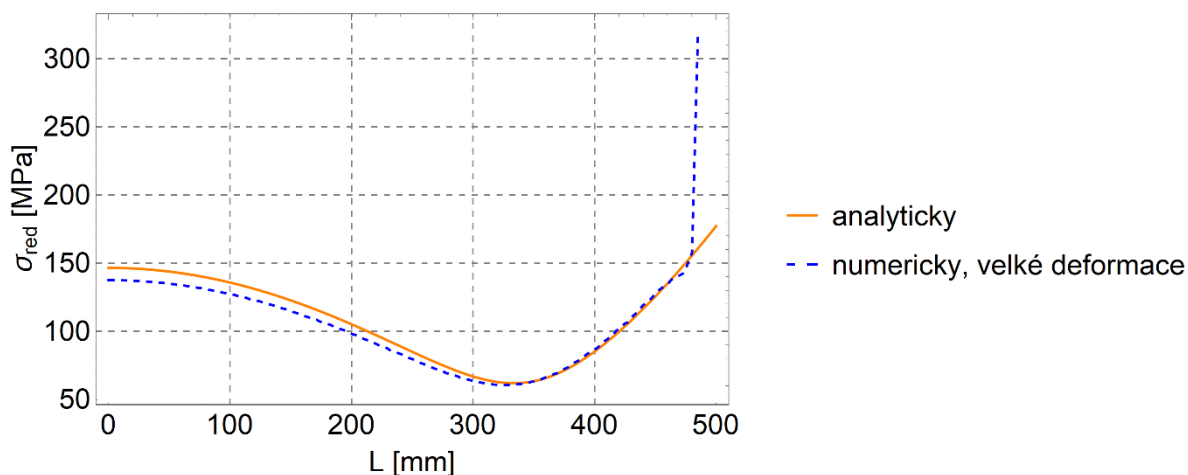


Obr. 7.20: Napětí na vnitřní straně stěnodesky pro rozměry a) z tab. 7.1

Na obr. 7.19, 7.20 je vidět, že jsou napětí na vnitřní a vnější straně symetrické. Jelikož je stěnodeska plná, tak je radiální napětí a tangenciální napětí ve středu stěnodesky stejné. Stejně jako u skořepiny, největší odchylka nastává v místě spojení skrz napojení na druhé těleso, které není schopné analytické řešení popsat. Znovu je odchylka větší na vnitřní straně stěnodesky (7.20) a to z důvodu singularity, která se nachází v rohu v místě spojení.



Obr. 7.21: Redukované napětí dle HMM na vnější straně stěnodesky pro rozměry a) z tab. 7.1



Obr. 7.22: Redukované napětí dle HMM na vnitřní straně stěnodesky pro rozměry a) z tab. 7.1

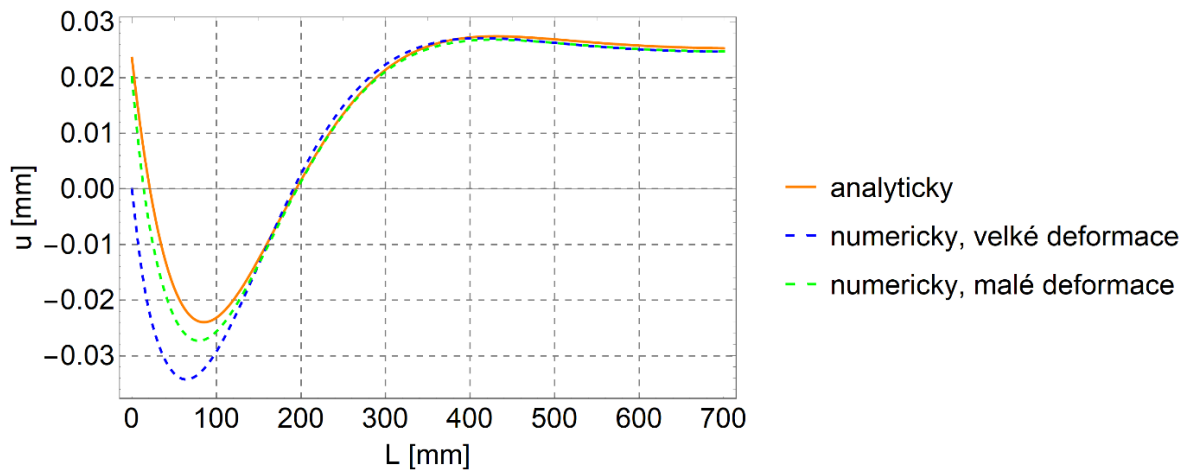
Průběhy redukovaných napětí na stěnodesce (obr. 7.21, 7.22) jsou si podobná v obou případech a relativní chyba je kolem 5 %, stejně jako tomu bylo u redukovaného napětí na skořepině (tab. 7.2, 7.3). Toto napětí je nejdůležitějším výstupem při napěťové analýze těles, a proto bude v další analýze zhodnocena chyba analytického a numerického řešení v závislosti na změně rozměrů tělesa dle tab. 7.1.

Tab. 7.2: Relativní chyba mezi analytickým a numerickým řešením s velkými deformacemi v závislosti na rozměrech těles

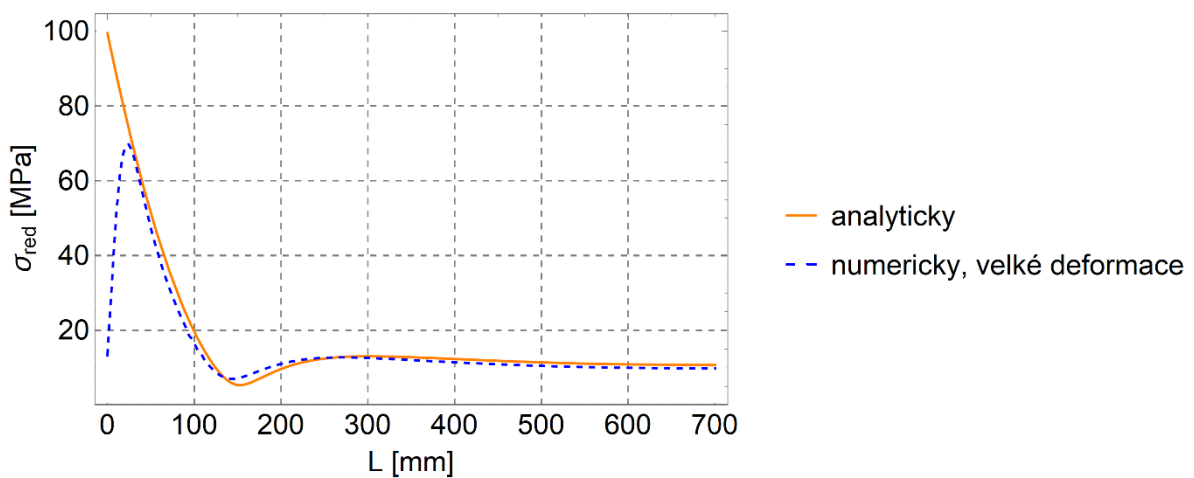
p [MPa]	r [mm]	L [mm]	h [mm]	t [mm]	Relativní chyba δ [%]					
					Stěnodeska			Skořepina		
					w	σ_{red} - vnitřní	σ_{red} - vnější	u	σ_{red} - vnitřní	σ_{red} - vnější
1	500	1400	30	30	7,20	4,98	5,47	5,85	4,93	6,00
			40	20	20,84	11,54	12,59	19,35	9,04	11,73
			50	10	570,50	291,71	166,28	48,36	36,17	33,33
			20	40	8,92	9,71	9,18	10,96	7,87	6,80
			10	50	7,32	11,08	8,80	30,35	6,81	24,00

Tab. 7.3: Relativní chyba mezi analytickým a numerickým řešením s malými deformacemi v závislosti na rozměrech těles

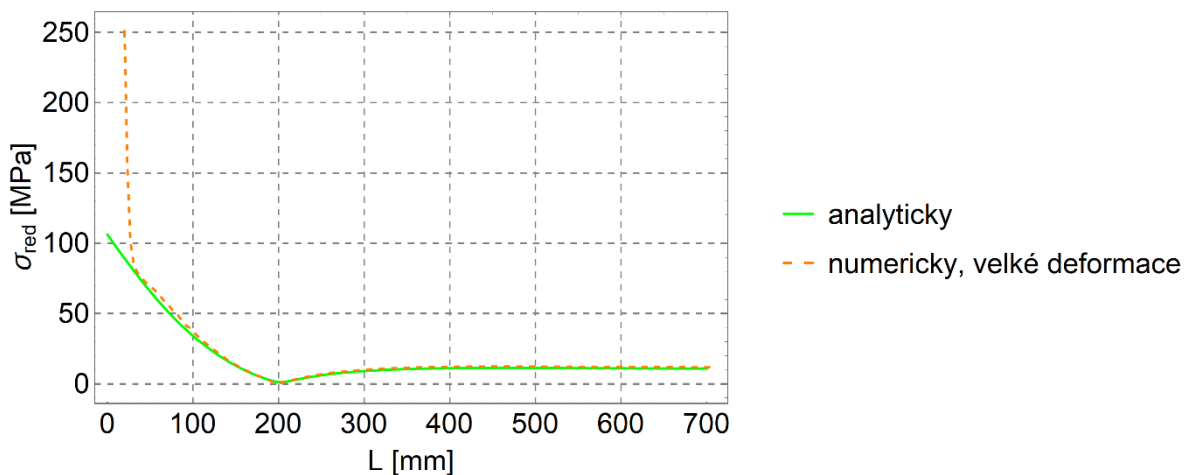
p [MPa]	r [mm]	L [mm]	h [mm]	t [mm]	Relativní chyba δ [%]					
					Stěnodeska			Skořepina		
					w	σ_{red} - vnitřní	σ_{red} - vnější	u	σ_{red} - vnitřní	σ_{red} - vnější
1	500	1400	30	30	6,06	3,21	4,28	5,26	4,90	5,20
			40	20	14,43	4,72	7,59	8,57	8,54	8,43
			50	10	81,78	8,85	6,75	12,12	13,43	16,18
			20	40	8,13	8,61	8,28	9,01	7,54	6,78
			10	50	7,06	10,56	8,22	20,49	6,71	23,08



Obr. 7.21: Radiální posuv po střednici skořepiny pro případ b) z tab. 7.1

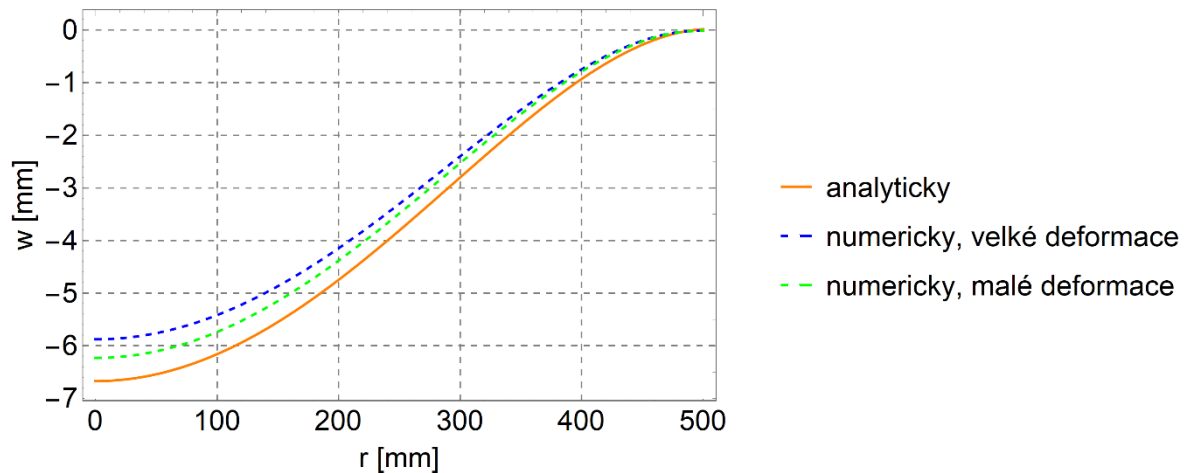


Obr. 7.22: Redukované napětí dle HMH na vnější straně skořepiny pro případ b) z tab. 7.1

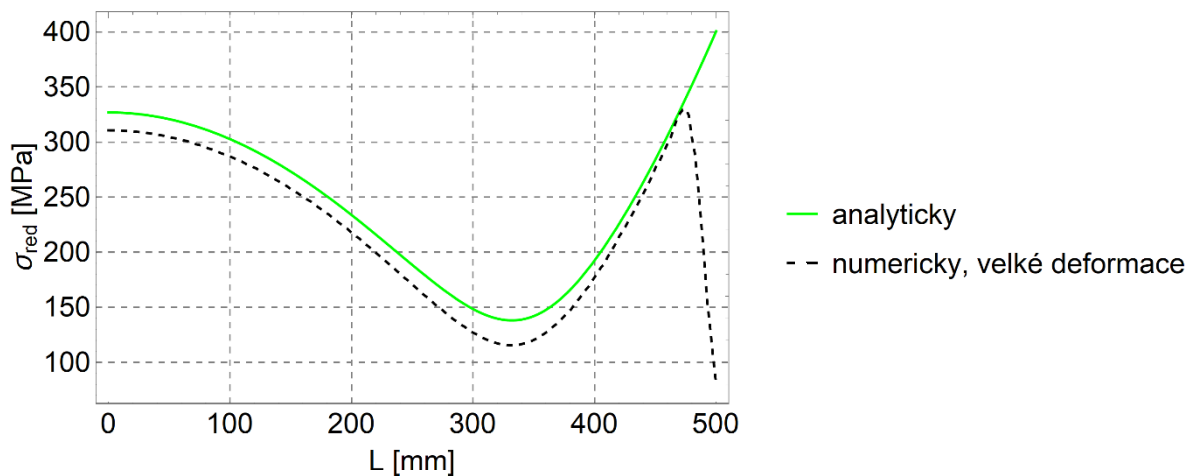


Obr. 7.23: Redukované napětí dle HMH na vnitřní straně skořepiny pro případ b) z tab. 7.1

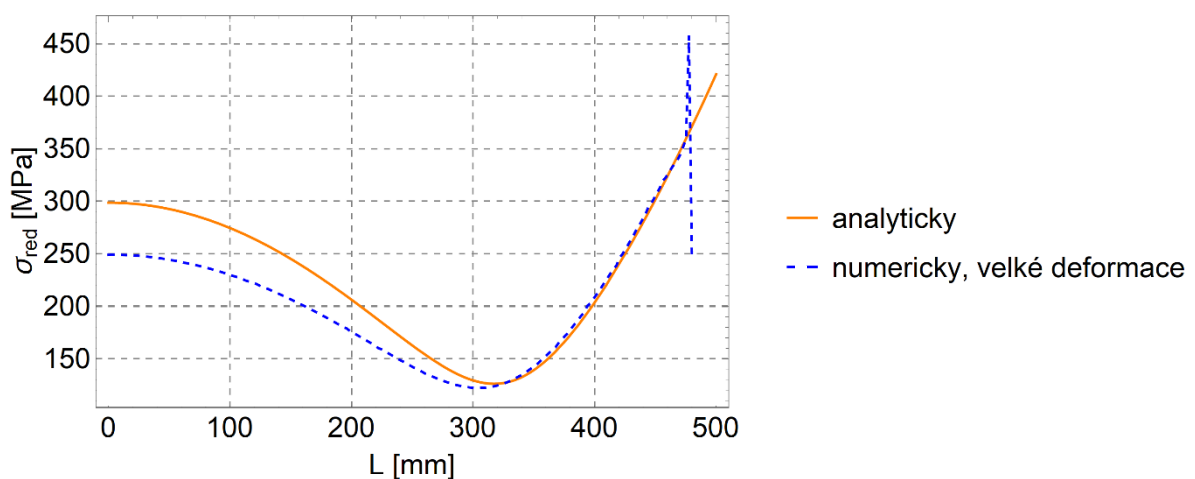
Na obr. 7.21 lze vidět, že se analytické a numerické řešení výrazně liší. To může být způsobeno tím, že se tloušťka skořepiny blíží maximu, aby se jednalo o skořepinu, a ne válcové těleso. Redukované napětí je stále dostatečně přesné (obr. 7.22, 7.23) a relativní chybu lze vidět v tab. 7.2, 7.3.



Obr. 7.24: Průhyb po střednici stěnodesky pro případ b) z tab. 7.1

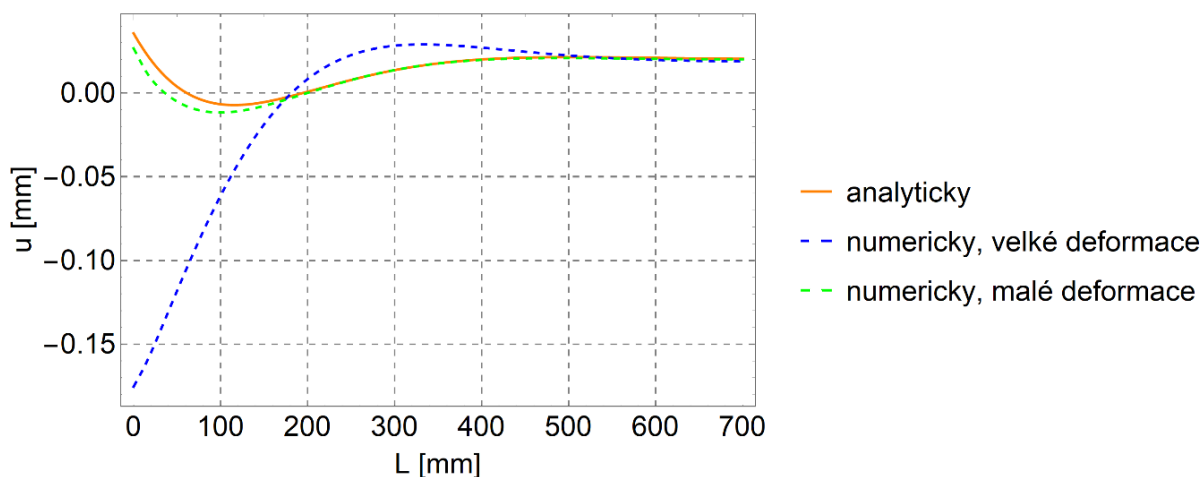


Obr. 7.25: Redukované napětí dle HMH na vnější straně stěnodesky pro případ b) z tab. 7.1

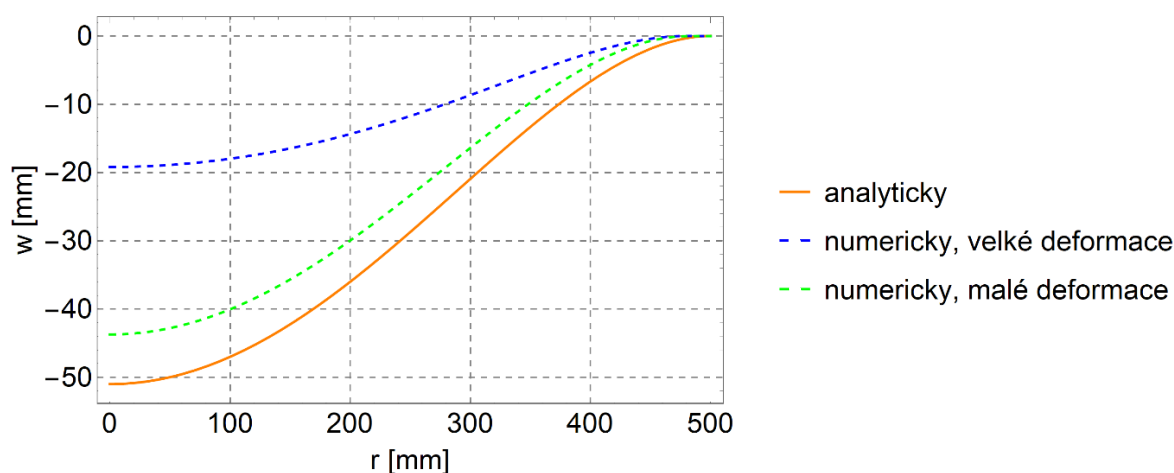


Obr. 7.26: Redukované napětí dle HMH na vnitřní straně stěnodesky pro případ b) z tab. 7.1

Průhyb po střednici stěnodesky se ve středu desky liší zhruba o 1 mm (obr. 7.24) a numericky vypočtené maximum je necelých 7 mm. Podle Kirchhoffovy teorie by měl být maximální průhyb desky roven $1/4$ tloušťky desky, což je v tomto případě 5 mm. Jelikož je průhyb větší, dalo se s odchylkou od numerického řešení počítat. Analytické řešení je tak nepřesné, což se projeví i u redukovaného napětí (obr. 7.25, 7.26).



Obr. 7.27: Radiální posuv na skořepině pro případ c) z tab. 7.1



Obr. 7.28: Osový posuv na stěnodesce pro rozměry c) z tab. 7.1

Z obr. 7.27 je zřejmé, že toto těleso již nejde dál počítat jako skořepinu. Tloušťka skořepiny ku jejímu poloměru je $1/10$, a tak se jedná spíše o tlustostěnné válcové těleso. Osový posuv vypočtený analyticky a numericky s malými deformacemi se sobě přibližuje, ale správný výsledek je numericky počítaný s velkými deformacemi (obr. 7.28). Průhyb na stěnodesce je obrovský a Kirchhoffova teorie není v tomto případě použitelná. V tento moment již nemá smysl vyobrazovat další grafy, protože jsou odchylky opravdu veliké. Pro další rozměry tělesa jsou vypsány relativní chyby v tab. 7.2, 7.3.

7.1.8 Zhodnocení

Pro základní rozměry těles stanovené předem schválně, aby vyhovovaly všem nutným předpokladům připadá nejmenší relativní chyba. Výsledné průběhy nejsou úplně totožné, jelikož analytický model počítá s působením sil od druhého tělesa pouze v jednom bodě (resp. po obvodě) v místě spojení střednic. Relativní chyba pro základní rozměry mezi analytickým řešením a numerickým s předpokladem velkých deformací, se ale pohybuje kolem 5 % (tab. 7.2), což je přijatelná hodnota.

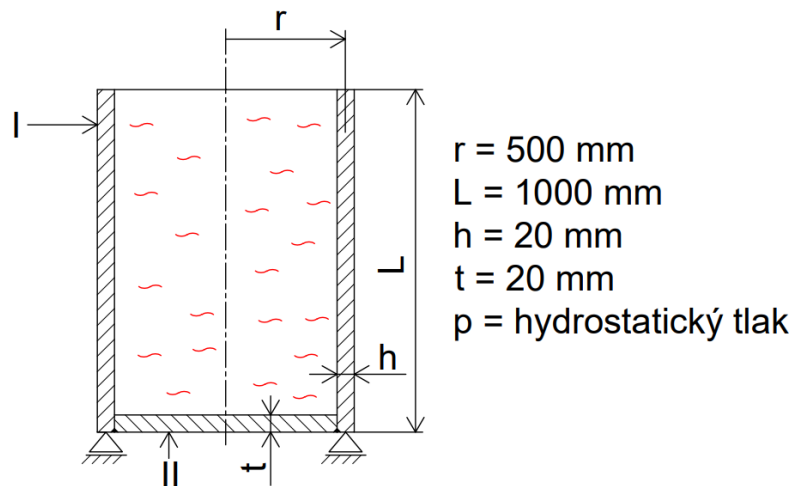
Při ztenčení stěnodesky a přidáním materiálu skořepině byla největším problémem stěnodeska, kdy kvůli velkému průhybu nebyly splněny předpoklady pro analytický výpočet, což vedlo k obrovské relativní chybě. Tloušťka stěnodesky byla v případě b) z tab. 7.1 20 mm a maximální průhyb téměř 7 mm (obr. 7.24), což nesplňuje předpoklad malého průhybu, a tak se

nedá použít Kirchhoffova teorie. U skořepiny byly hodnoty chyby menší, stále však přesahovaly 30 %. Skořepina se v ten moment chová na hranici skořepiny a tlustostěnného válcového tělesa. Při opačné změně rozměrů chyby nedosahovaly tak velkých hodnot.

Tab. 7.3 ukazuje, že numerický model s předpokladem malých deformací se více blíží analytickému řešení, relativní chyby jsou menší než v tab. 7.2, ale tento model nevystihuje realitu.

7.2 Válcová nádoba naplněná kapalinou

Jedná se o těleso složené ze dvou těles, momentové skořepiny a stěnodesky (obr. 7.29). Řešení tohoto tělesa je podobné tomu prvnímu, jen zde místo tlaku konstantního působí tlak hydrostatický, těleso má pouze jedno dno a je položeno na podpoře.



Obr. 7.29: Zadání druhého složeného tělesa

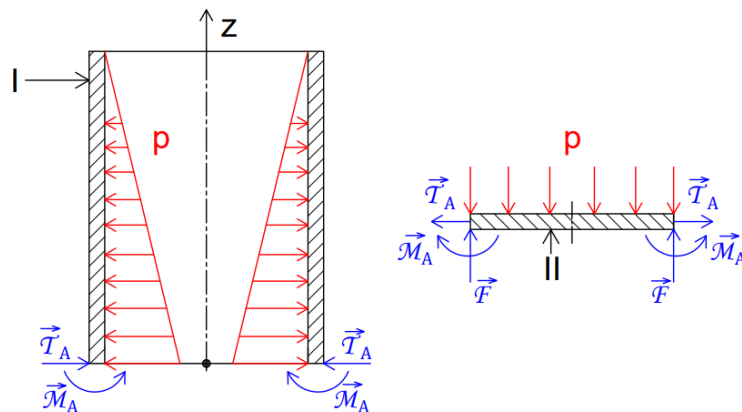
7.2.1 Uvolnění analytického modelu

Jako první je určeno, o jaký typ skořepiny se jedná dle (3.21):

$$6 \cdot \sqrt{rh} = 6 \cdot \sqrt{500 \cdot 20} = 600 \text{ mm} \leq 1000 \text{ mm} \quad (7.26)$$

\rightarrow Dlouhá skořepina.

Pro dlouhou skořepinu se počítá se zkrácenou verzí vzorce (4.19), protože se konce skořepiny navzájem neovlivňují. Uvolněné těleso:



Obr. 7.30: Uvolnění druhého složeného tělesa

Znovu je těleso II zatíženo silami jak v radiálním směru, tak momentem a silou osovou, bude nutné jej tedy rozdělit na stěnu a desku. Na obr. 7.30 lze vidět neznámé parametry (7.27) vyznačené modrou barvou.

$$NP = \{\mathcal{M}_A, \mathcal{T}_A, \mathcal{F}\}. \quad (7.27)$$

Rozdíl oproti prvnímu příkladu je však v tom, že tělesa na sebe vzájemně působí jen silou \mathcal{T}_A a momentem \mathcal{M}_A . Normálová síla v ose z totiž působí jen na stěnodesku a je daná podporou v tomto místě. To, že skořepina nepůsobí na stěnodesku silou v ose z je dané tím, že je zanedbána vlastní tíha skořepiny [6]. Sílu od podpory je možné spočítat ze statické rovnováhy v ose z (obr. 7.30):

$$\sum F_z = 0: p \cdot \pi r^2 = \mathcal{F} \cdot 2\pi r \rightarrow \mathcal{F} = \frac{pr}{2}. \quad (7.28)$$

Tlak působící na dno nádoby dosazený do (7.28) je konstantní hydrostatický tlak daný vztahem:

$$p = \rho Lg, \quad (7.29)$$

kde $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ a za předpokladu vody jako kapaliny je $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$.

Liniový moment a síla budou stanoveny z deformační podmínky v místě spojení:

$$u^I = u^{IIa}, \quad (7.30)$$

$$\vartheta^I = \vartheta^{IIb}, \quad (7.31)$$

kde u^{IIa} je radiální posuv na stěně, ϑ^{IIb} je natočení na desce, u^I je radiální posuv na skořepině a ϑ^I je natočení na skořepině.

7.2.2 Řešení skořepiny

Nejdříve jsou stanoveny okrajové podmínky pro $z = 0$:

$$\mathcal{M}_z = \mathcal{M}_A, \quad (7.32)$$

$$\mathcal{T}_{rz} = \mathcal{T}_A. \quad (7.33)$$

Moment i posouvající síla na skořepině vycházejí ze vztahů (4.11, 4.13), k nimž je třeba stanovit radiální posuv:

$$u^I = e^{-\beta z} (C_1 \sin \beta z + C_2 \cos \beta z) + u_p^I, \quad (7.34)$$

kde:

$$u_p^I = \frac{r^2}{Eh} \left(p - \frac{\mu}{r} \mathcal{N}_z \right) = \frac{r^2 p}{Eh} \quad (7.35)$$

Tlak v parciálním řešení radiálního posuvu již není konstantní, ale proměnlivý v závislosti na hloubce:

$$p = (L - z)\rho g \quad (7.36)$$

Nicméně v místě spojení ($z = 0$) je tlak maximální a stejně velký jako na stěnodesce, proto bude do výpočtu deformační podmínky (7.30) dosazena za tlak vypočtená konstantní hodnota.

Výpočet momentu a posouvající síly a dosazení do okrajových podmínek:

$$\mathcal{M}_z = -B \frac{d^2 u}{dz^2} = \mathcal{M}_A, \quad (7.37)$$

$$\mathcal{T}_{rz} = -B \frac{d^3 u}{dz^3} = \mathcal{T}_A. \quad (7.38)$$

Tyto výpočty nebudou dále rozebrány, protože jsou řešeny pomocí programu Mathematica a soubor s těmito výpočty se nachází v příloze. Ukázka vyřešení integračních konstant z okrajových podmínek v tomto programu je na obr. 7.31.

```

In[613]= z = 0;
In[614]= (* ((L-z)ρ*g) - (μ*((L-z)ρ*g)/2) *)
In[615]= u01[z_] := e-β*z * (c11 * Sin[β * z] + c12 * Cos[β * z]) + (r2 / (EE * h)) * p;
In[616]= v01 = u01' [z]
Out[616]=
1. (0. + 0.0128541 c11) - 0.0128541 (0. + 1. c12)

In[617]= mz1 = -B1 * (u01'' [z])
Out[617]=
-1.53846 × 108 (-0.0257081 (0. + 0.0128541 c11) +
1. (0. - 0.000165227 c12) + 0.000165227 (0. + 1. c12))

In[618]= trz1 = -B1 * (u01''' [z])
Out[618]=
-1.53846 × 108
(1. (0. - 2.12384 × 10-6 c11) + 0.000495681 (0. + 0.0128541 c11) -
0.0385622 (0. - 0.000165227 c12) - 2.12384 × 10-6 (0. + 1. c12))

In[619]= s = Solve[{MA0 - mz1 == 0, TA0 - trz1 == 0}, {c11, c12}]
Out[619]=
{{c11 → 0. + 0.0000196699 MA0,
c12 → -0.0000196699 MA0 - 0.00153025 TA0}}

```

Obr. 7.31: Ukázka kódu v Mathematice

Druhou veličinou potřebnou k počtu deformačních podmínek je natočení, které dané vztahem:

$$\vartheta^I = \frac{du^I}{dz} \quad (7.39)$$

Po zjištění neznámých parametrů budou vykresleny napětí dle vztahů (4.23, 4.24) a osový posuv dle (4.25).

7.2.3 Řešení stěny

V případě stěny je řešení úplně stejné jako v prvním příkladě. Nejprve jsou tedy stanoveny okrajové podmínky pro $r = 0$:

$$u^{IIa} = 0 \quad (7.40)$$

a pro $r = r$:

$$\sigma_r = \frac{\mathcal{T}_A}{t} = A - \frac{B}{r}. \quad (7.41)$$

Lze dokázat, že kvůli první okrajové podmínce (7.40) je konstanta B rovna nule, a proto je radiální napětí rovno konstantě A. Dosazením do rovnice (4.57) bude zjištěna integrační konstanta C_1^{IIa} :

$$C_1^{IIa} = A \cdot \frac{1 - \mu}{E} = \sigma_r \cdot \frac{1 - \mu}{E} = \frac{\mathcal{T}_A}{t} \cdot \frac{1 - \mu}{E}. \quad (7.42)$$

Dosazením této konstanty do rovnice pro posuv vznikne tvar:

$$u^{IIa} = C_1^{IIa} \cdot r = \frac{\mathcal{T}_A}{t} \cdot \frac{1 - \mu}{E} \cdot r. \quad (7.43)$$

Po vyřešení neznámých parametrů bude napětí stěny řešeno dle vztahů (4.55, 4.56).

7.2.4 Řešení desky

Okrajové podmínky pro $r = 0$:

$$\vartheta^{IIb} = 0 \quad (7.44)$$

a pro $r = r$:

$$\mathcal{M}_r = \mathcal{M}_A. \quad (7.45)$$

Podle okrajových podmínek je vidět, že je deska řešena stejně jako v prvním příkladě. Jedná se o plnou desku, proto je konstanta C_2^{IIb} z rovnice (4.40) nulová a natočení je tvaru:

$$\vartheta^{IIb} = C_1^{IIb} \cdot r + \vartheta_p^{IIb}, \quad (7.46)$$

kde partikulární řešení je:

$$\begin{aligned} \vartheta_p^{IIb} &= -\frac{1}{rB} \int \left(r \int (\mathcal{T}_r dr) dr \right) = \\ &= -\frac{1}{rB} \int \left(r \int \left(-\frac{pr}{2} dr \right) dr \right) = \frac{pr^3}{16B}. \end{aligned} \quad (7.47)$$

Síla \mathcal{T}_r je zjištěna stejně jako v prvním příkladě (obr. 7.4). Dosazením natočení (7.46) do rovnice pro výpočet momentů (4.36) a následným dosazením do okrajové podmínky (7.45) vznikne rovnice:

$$\mathcal{M}_r = -\frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} \left(\frac{d\vartheta}{dr} + \mu \frac{\vartheta}{r} \right) = \mathcal{M}_A, \quad (7.48)$$

ze které je určena integrační konstanta C_1^{IIb} v závislosti na neznámém parametru \mathcal{M}_A a rovnice (7.46) s dosazenou integrační konstantou je dosazena do deformační podmínky (7.31). Po vypočtení neznámých parametrů je napětí na desce zjištěno z rovnic (4.43, 4.44).

7.2.5 Řešení deformačních podmínek

Dosazením rovnic získaných z řešení jednotlivých těles vznikne soustava dvou rovnic o dvou neznámých parametrech \mathcal{M}_A a \mathcal{T}_A , které se nachází v integračních konstantách C_1, C_2, C_1^{IIb} :

$$e^{-\beta z} (C_1 \sin \beta z + C_2 \cos \beta z) + \frac{r^2 p}{Eh} = \frac{\mathcal{T}_A}{t} \cdot \frac{1 - \mu}{E} \cdot r \quad (7.49)$$

$$\frac{du^I}{dz} = C_1^{IIb} \cdot r + \frac{pr^3}{16B} \quad (7.50)$$

Do rovnic nebude detailněji dosazeno, výpočty byly provedeny v programu Mathematica (obr. 7.32).

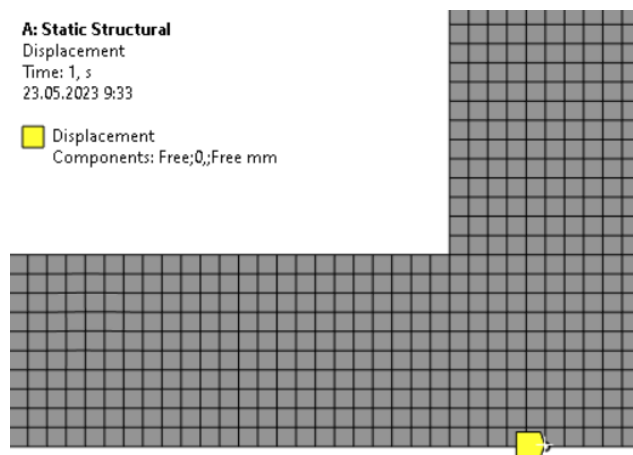
```
In[633]= sol = Solve[{u1 - u2a == 0, v1 - v2b == 0}, {MA0, TA0}]
Out[633]= {{MA0 -> -279.665, TA0 -> 3.77106}}
```

Obr. 7.32: Výpočet deformačních podmínek v programu Mathematica

7.2.6 Numerický model

Numerický model je vytvořen stejně jako v prvním příkladě, tzn. nejprve jsou nakresleny střednice podle zadaných hodnot a poté je jim přidána tloušťka. Úloha je řešena jako 2D axisymetrická. Síť konečných prvků (obr. 7.33) má 24021 uzlů a 7500 kvadratických prvků s velikostí 2 mm. Prvky jsou zvoleny tak malé z důvodu malé náročnosti výpočtu. Vytvořené cesty pro vykreslení grafů mají na vnější straně nádoby stejnou délku jako střednice a na vnitřní straně jsou kratší o polovinu tloušťky tělesa, do kterého by cesta s délkou stejnou jako střednice zasahovala, což bude vidět na grafech.

Rozdíl mezi analytickým modelem a numerickým je ve vazbě. Zatímco v analytickém řešení na stěnodesce působí síla od podpory na střednici, v numerickém modelu působí tato síla na spodní stranu stěnodesky (obr. 7.33), což odpovídá reálnému modelu nádoby položené na podpoře. Čím bude stěnodeska tenčí, tím bude vazba numerického modelu podobnější vazbě analytického modelu.



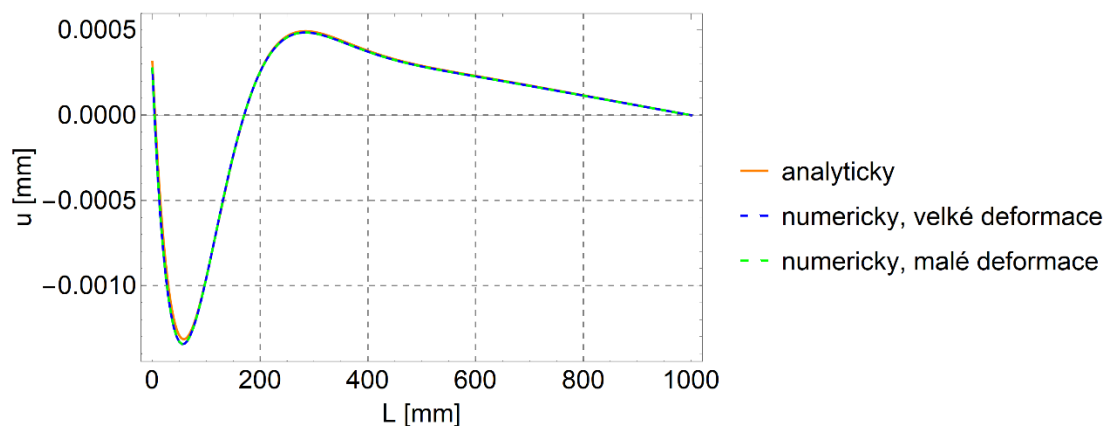
Obr. 7.33: Síť konečných prvků a vazba

7.2.7 Výsledky

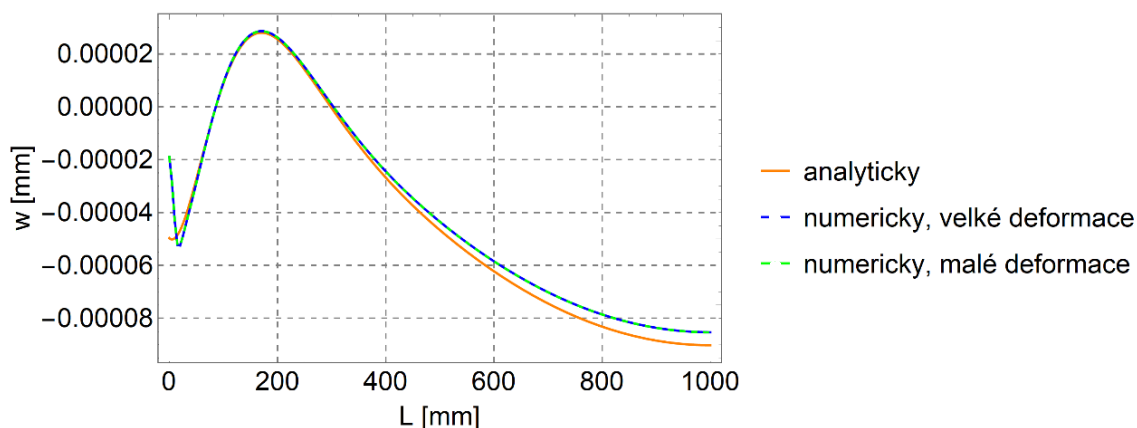
Nyní budou vykresleny grafy výsledků dle rozměrů v tab. 7.4.

Tab. 7.4: Rozměry těles druhé úlohy a vypočtené neznámé parametry

ROZMĚRY	r [mm]	L [mm]	h [mm]	t [mm]	TA [N/mm]	MA [Nmm/mm]	F [N/mm]
a)	500	1000	20	20	3,77	-279,67	2,45
b)			10	10	5,27	-286,35	
c)			5	5	7,49	-291,78	
d)			40	10	2,54	-305,82	
e)			50	10	2,16	-306,12	



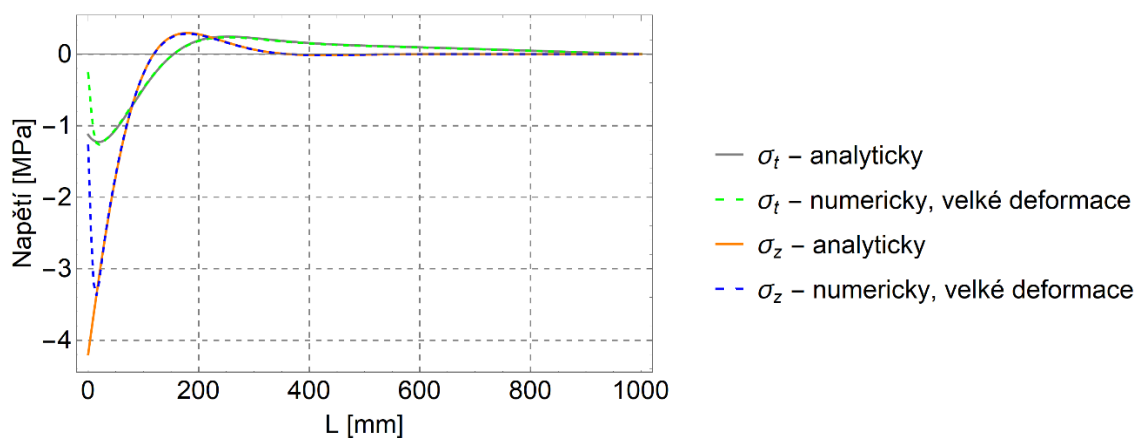
Obr. 7.34: Radiální posuv podél střednice skořepiny pro rozměry a) z tab. 7.4



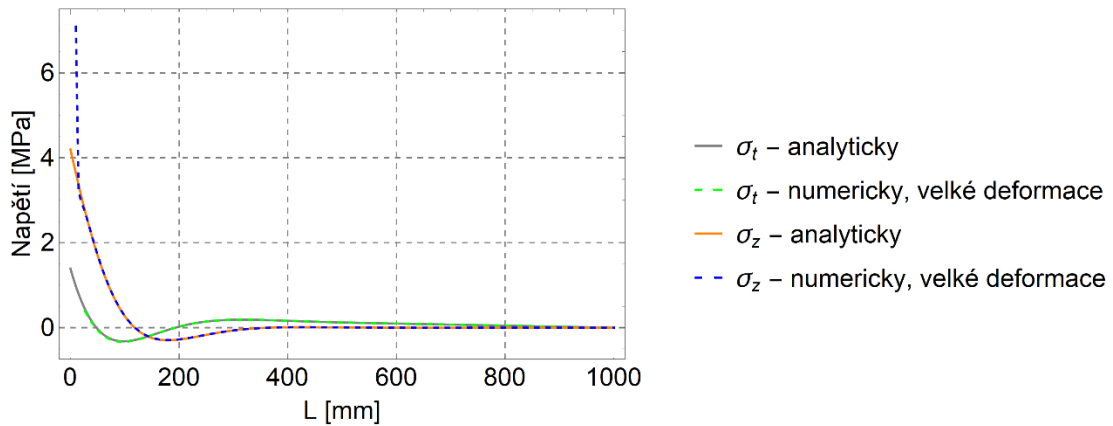
Obr. 7.35: Osový posuv podél střednice skořepiny pro rozměry a) z tab. 7.4

Radiální posuv podél střednice skořepiny (obr. 7.34) vychází shodně v obou přístupech řešení. Posuv roste směrem od horní části nádoby spolu s hydrostatickým tlakem až po místo, kde začne působit moment kvůli spojení se dnem nádoby. Protože jsou splněny předpoklady pro analytický výpočet skořepiny, analytické výsledky radiálního posuvu jsou velmi podobné výsledkům numerickým a relativní chyba je znázorněna v tab. 7.5, 7.6.

Osový posuv (obr. 7.35) už nevyhází tak přesně, což může být způsobeno vazbou, která se mírně liší v obou řešeních.

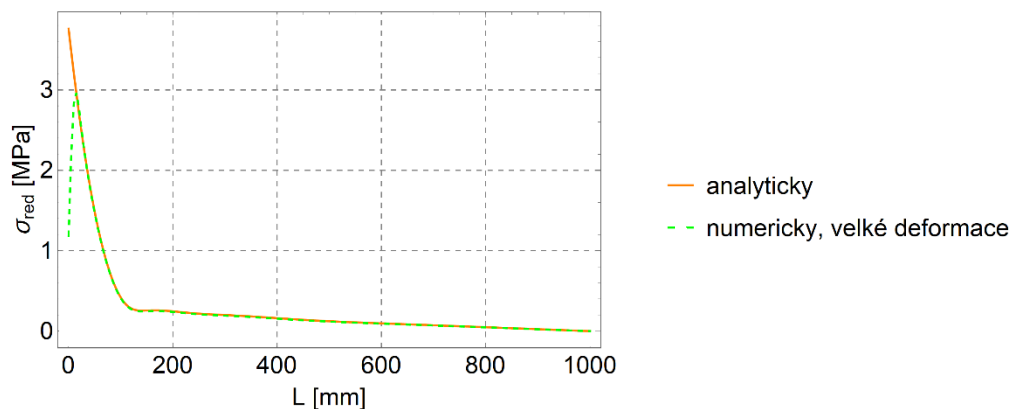


Obr. 7.36: Napětí na vnější straně skořepiny pro rozměry a) z tab. 7.4

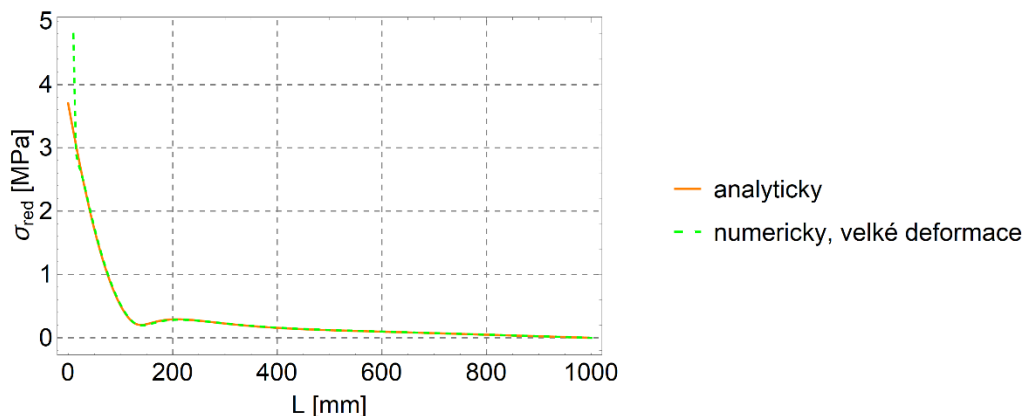


Obr. 7.37: Napětí na vnitřní straně skořepiny pro rozměry a) z tab. 7.4

Je zobrazeno pouze napětí řešené analyticky a numericky s velkými deformacemi, protože je zatím numerické řešení malých i velkých deformací identické. Napětí na vnější straně (obr. 7.36) a vnitřní straně skořepiny (obr. 7.37) je shodné v obou přístupech až na místo spojení těles. Tato odchylka je způsobená tím, že numerický model je schopný zachytit působení od druhého tělesa po tloušťce spojení těles, kdežto analytický model počítá s působením síly od druhého tělesa pouze na konci střednice v jednom bodě (po obvodě).



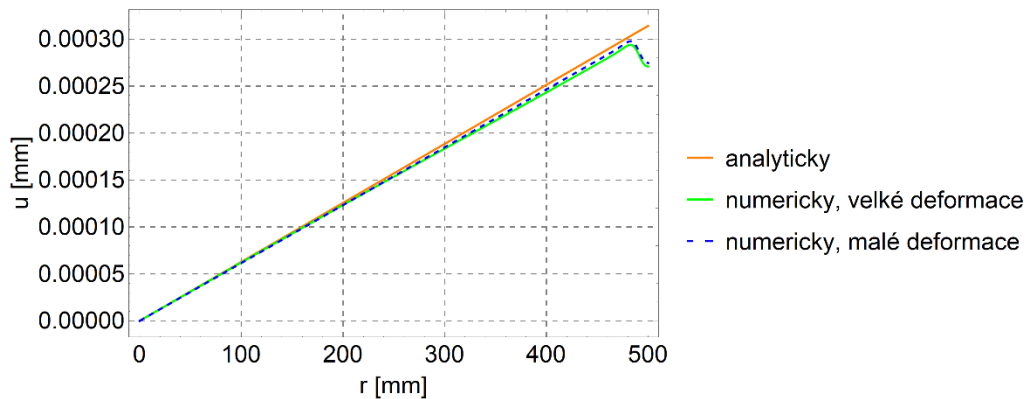
Obr. 7.38: Redukované napětí dle HMM na vnější straně skořepiny pro rozměry a) z tab. 7.4



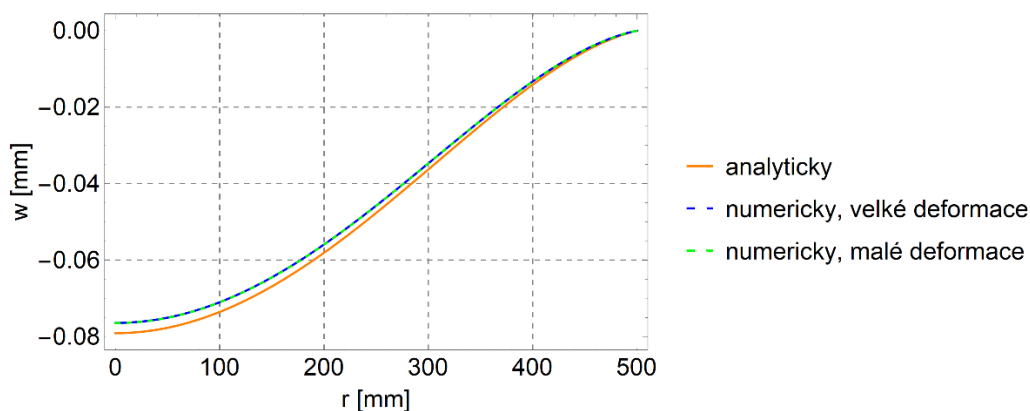
Obr. 7.39: Redukované napětí dle HMM na vnitřní straně skořepiny pro rozměry a) z tab. 7.4

Poslední vykreslenou veličinou na skořepině je redukované napětí na obou stranách skořepiny (obr. 7.38, 7.39). To vychází z hodnot osového a tečného napětí, které vyšly velmi přesně, proto i redukované napětí vychází podobně v obou přístupech. Jelikož je redukované napětí

důležitým výstupním faktorem, bude vypočtena relativní chyba řešení pro různé varianty rozměrů těles z tab. 7.4.



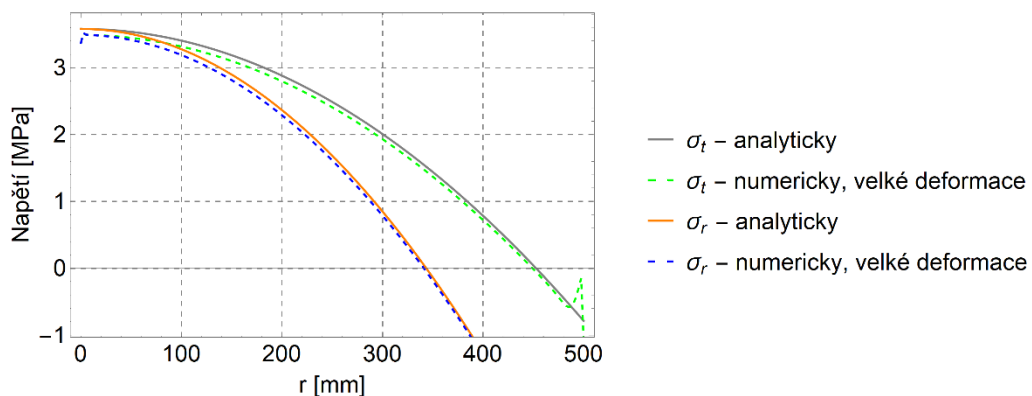
Obr. 7.40: Radiální posuv po střednici stěnodesky pro rozměry a) z tab. 7.4



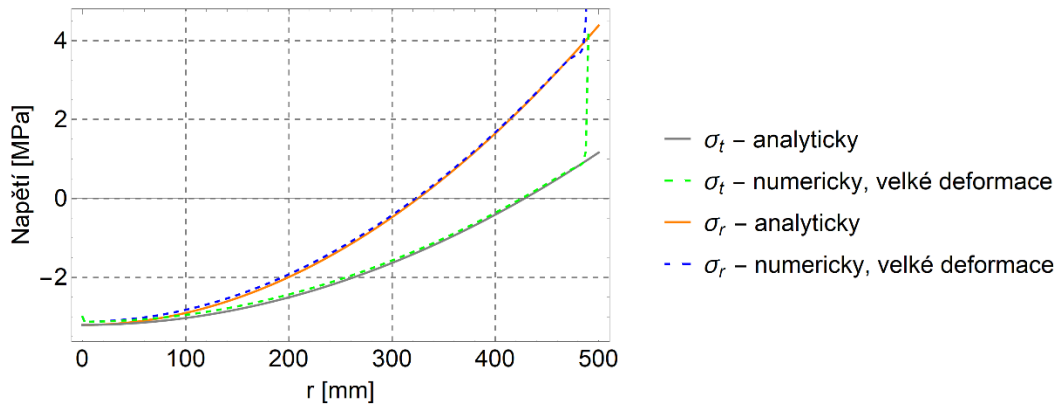
Obr. 7.41: Osový posuv po střednici stěnodesky pro rozměry a) z tab. 7.4

V případě stěnodesky je na průběhu radiálního posuvu (obr. 7.40) vidět, že se křivka s numericky vypočítaným posuvem mírně liší při malých a velkých deformacích, což je způsobeno rozdílným výpočtem za předpokladu malých a velkých deformací. Při změně rozměrů bude sledována větší odchylka.

Osový posuv na stěnodesce (obr. 7.41) vykazuje mírnou odchylku v jejím středu. Tato odchylka bude zřejmě způsobena rozdílným zadáním vazby v přístupech, stejně jako tomu bylo v případě osového posuvu na skořepině (obr. 7.35).

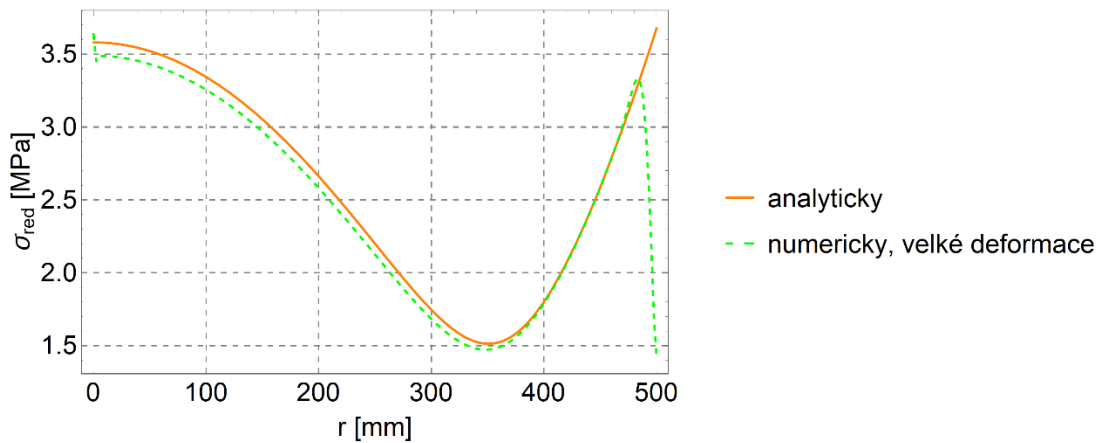


Obr. 7.42: Napětí na vnější straně stěnodesky pro rozměry a) z tab. 7.4

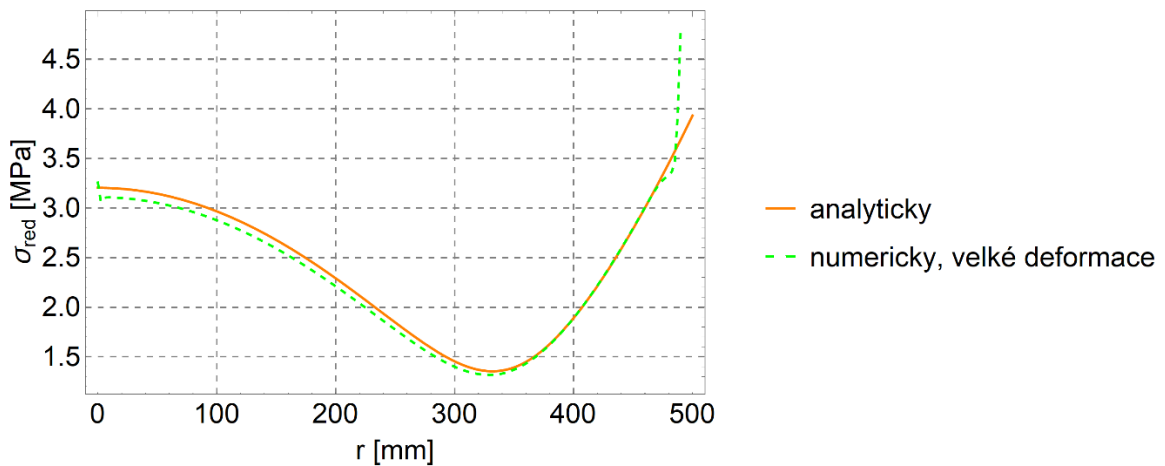


Obr. 7.43: Napětí na vnitřní straně stěnodesky pro rozměry a) z tab. 7.4

Napětí na vnější a vnitřní straně stěnodesky (obr. 7.42, 7.43) je symetrické a na každé straně je v jejím středu rovno napětí radiální napětí tečnému.

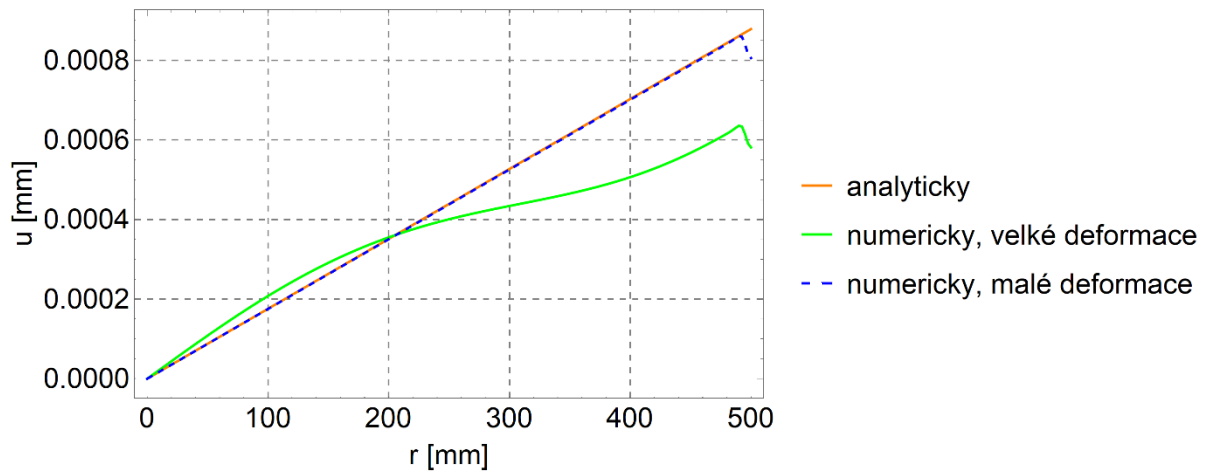


Obr. 7.44: Redukované napětí dle HMM na vnější straně stěnodesky pro rozměry a) z tab. 7.4



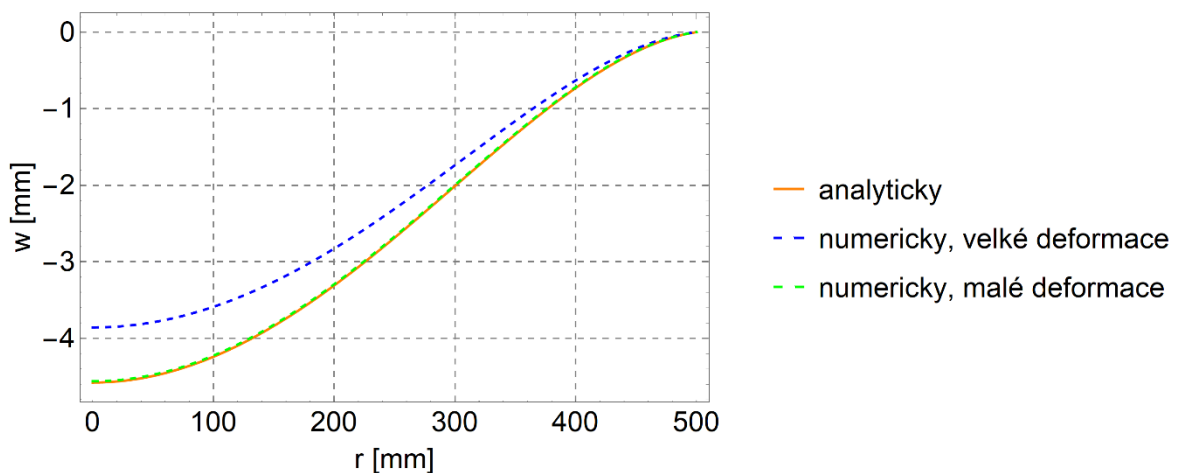
Obr. 7.45: Redukované napětí dle HMM na vnitřní straně stěnodesky pro rozměry a) z tab. 7.4

Průběhy redukovaného napětí na obou stranách (obr. 7.44, 7.45) jsou pro oba přístupy přesné a jejich relativní chyba je vyznačena v tab. 7.5, 7.6, ve které je i zadání různých rozměrů těles.

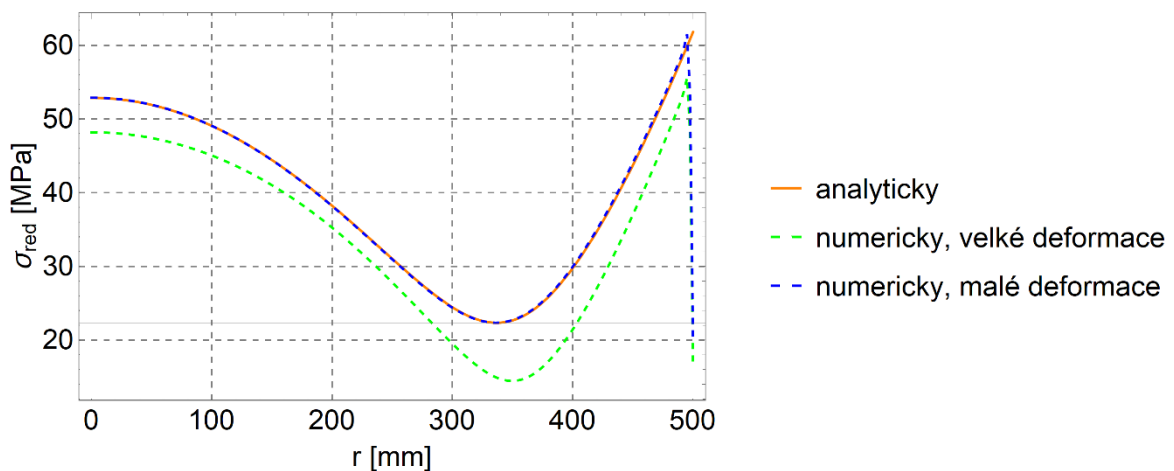


Obr. 7.46: Radiální posuv po střednici stěnodesky pro rozměry b) z tab. 7.4

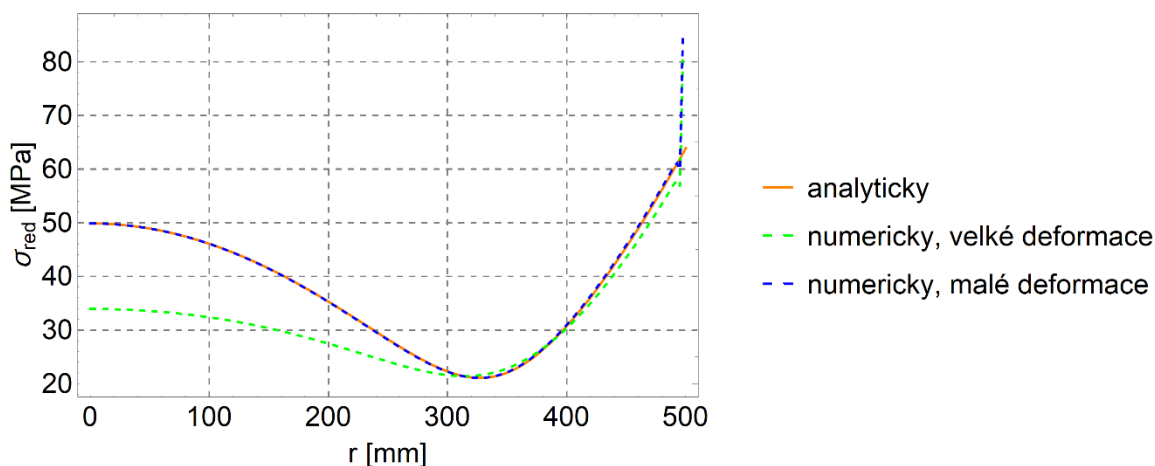
Pro případ b) z tab. 7.4 je jediný zajímavý graf průběh radiálního posuvu na stěnodesce (obr. 7.46), na kterém lze pozorovat velkou odchylku numerického řešení s velkými deformacemi od numerického řešení s malými deformacemi a analytického řešení. Tato křivka již není lineární, a proto lze konstatovat, že analytické řešení už je velmi nepřesné a neodpovídá realitě.



Obr. 7.47: Osový posuv po střednici stěnodesky pro rozměry c) z tab. 7.4



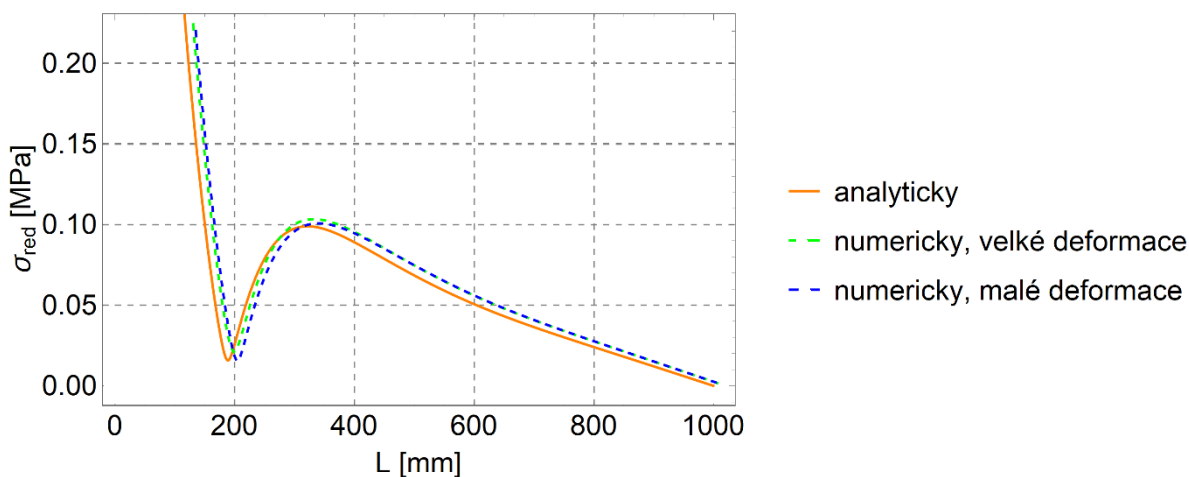
Obr. 7.48: Redukované napětí dle HMM na vnější straně stěnodesky pro rozměry c) z tab. 7.4



Obr. 7.49: Redukované napětí dle HMH na vnitřní straně stěnodesky pro rozměry c) z tab. 7.4

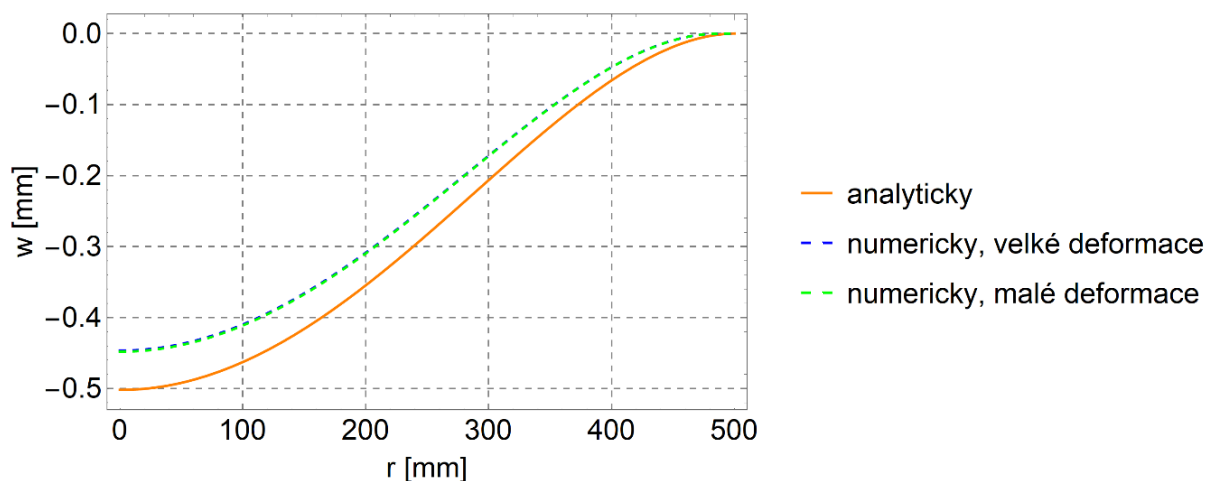
Průběh osového posuvu na stěnodesce (obr. 7.47) řešený analyticky se již výrazně liší od numerického řešení, které počítá s velkými deformacemi. Stěnodeska je již moc tenká a maximální průhyb nevyhovuje předpokladům pro výpočet průhybu desky podle Kirchhoffovy teorie. Numerický výpočet počítající s malými deformacemi je sice shodný s analytickým řešením, ale neodpovídá realitě. Stejně je tomu tak i u redukovaného napětí na obou stranách stěnodesky (obr. 7.48, 7.49). Numerické řešení s předpokladem malých deformací kopíruje analytické řešení přesně, kdežto numerické řešení zahrnující velké deformace je rozdílné a odpovídalo by realitě.

Průběhy posuvu a redukovaného napětí na skořepině nejsou pro rozměry b) z tab. 7.4 vykresleny, jelikož je relativní chyba stále malá a analytické řešení je dostačující pro reálný popis.

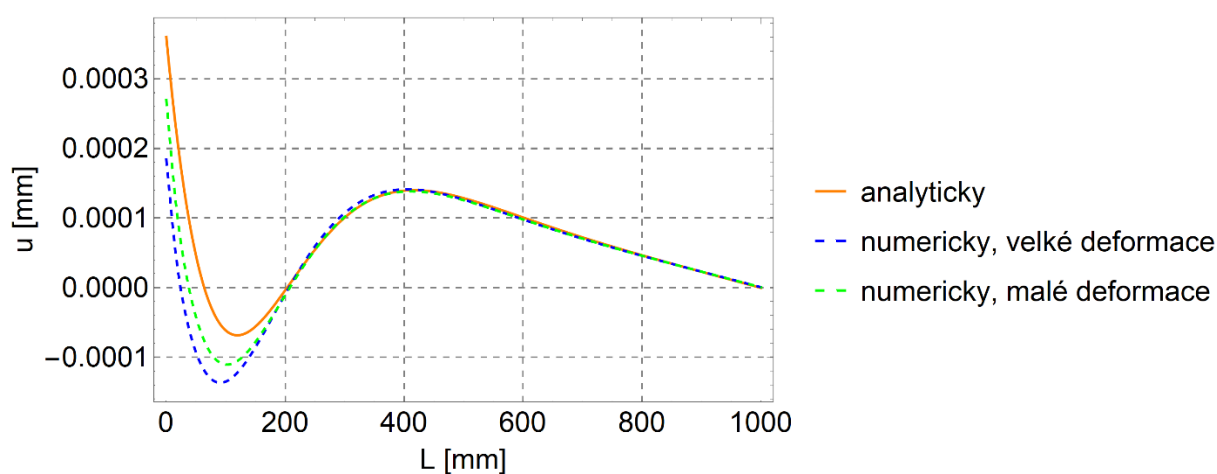


Obr. 7.50: Redukované napětí dle HMH na vnitřní straně skořepiny pro rozměry d) z tab. 7.4

Pro zvolený rozměr d) z tab. 7.4 se relativní chyba redukovaného napětí na vnitřní straně skořepiny (obr. 7.50) zvedne (tab. 7.5, 7.6). Zvláštní je však to, že s analytickým řešením nesedí už ani numerické řešení s předpokladem malých deformací. Tento jev se projeví i na průhybu stěnodesky (obr. 7.51), kde je vidět, že analytické řešení se liší od obou numerických řešení.



Obr. 7.51: Osový posuv stěnodesky po střednici pro rozměry d) z tab. 7.4



Obr. 7.52: Radiální posuv podél střednice skořepiny pro rozměry e) z tab. 7.4

Analytické řešení se už dost liší při porovnání s numerickým řešením radiálního posuvu na skořepině pro rozměry e) z tab. 7.4. Relativní chyba je zachycena v tab. 7.5 a je možné říct, že už se nejedná o skořepinu, protože je tloušťka stěny skořepiny ku jejímu poloměru 1/10, a proto se jedná už spíše o válcové těleso.

Tab. 7.5: Relativní chyba mezi analytickým a numerickým řešením s velkými deformacemi v závislosti na rozměrech těles

r [mm]	L [mm]	h [mm]	t [mm]	Relativní chyba δ [%]					
				Stěnodeska			Skořepina		
				w	σ_{red} - vnitřní	σ_{red} - vnější	u	σ_{red} - vnější	σ_{red} - vnější
500	1000	20	20	5,31	2,71	3,33	2,30	2,06	4,13
		10	10	3,66	2,00	1,80	2,95	3,20	2,10
		5	5	17,42	20,85	19,56	8,86	4,65	3,64
		40	10	54,63	7,18	16,90	21,36	16,35	12,17
		50	10	107,18	9,68	31,49	43,13	22,70	20,30

Tab. 7.6: Relativní chyba mezi analytickým a numerickým řešením s malými deformacemi v závislosti na rozměrech těles

r [mm]	L [mm]	h [mm]	t [mm]	Relativní chyba δ [%]					
				Stěnodeska			Skořepina		
				w	σ_{red} - vnitřní	σ_{red} - vnější	u	σ_{red} - vnitřní	σ_{red} - vnější
500	1000	20	20	5,24	2,65	3,27	2,26	2,07	4,13
		10	10	2,85	1,08	1,27	2,74	3,31	2,08
		5	5	1,14	0,33	0,36	3,18	3,86	2,58
		40	10	52,23	6,51	16,89	25,81	19,13	9,54
		50	10	101,02	9,00	31,21	29,04	26,66	14,90

7.2.8 Zhodnocení

Nejprve byly všechny grafy druhého složeného tělesa vykresleny pro základní rozměry zvolené tak, aby bylo vyhověno všem předpokladům pro řešení pomocí analytického modelu. Výsledky se shodovali s řešením numerickým a pro předpoklad malých i velkých deformací vycházela relativní chyba od 2 do 3 %.

Poté byly tloušťky stěn zmenšeny na polovinu (tab. 7.4 b)) a relativní chyba vyšla ještě menší. Pouze radiální posuv na stěnodesce se lišil při numerickém výpočtu pomocí malých a velkých deformací (obr. 7.46). Stěnodeska již tedy byla pro výpočet radiálního posuvu příliš tenká a analytický model by neodpovídal realitě.

Znovu byla zmenšena tloušťka o polovinu, což bylo kritické zejména pro stěnodesku (tab. 7.5 c)), pro kterou byl již průhyb příliš velký, nebyly splněny předpoklady malých deformací, tím pádem není Kirchhoffova teorie použitelná. Relativní chyba pro stěnodesku při těchto rozměrech byla kolem 20 %. Zmenšení rozměrů nebyl problém pro skořepinu až do míst největšího hydrostatického tlaku, kde se nacházely největší odchylky analytického od numerického řešení.

Při posledních změnách rozměrů se zanechala ideální tloušťka stěnodesky určená pomocí relativní chyby, tedy 10 mm a zvětšovala se tloušťka skořepiny. Při hodnotě $h = 40$ mm (tab. 7.5) začaly hodnoty relativní chyby rychle stoupat, a tak lze říct, že už se nejedná skořepinu, ale spíše o tlustostěnné válcové těleso.

Tab. 7.6 pouze znázorňuje, že při řešení numerickým s malými deformacemi je toto řešení bližší analytickému než při velkých deformacích.

8 Závěr

Bakalářská práce se zabývala deformačně napěťovou analýzou některých složených těles z oblasti předmětu Pružnost a pevnost II. Konkrétně to byla tělesa složená z momentové válcové skořepiny, kruhové desky a stěny. Cílem bylo vytvořit analytický model pomocí obecné pružnosti a pevnosti, porovnat ho s numerickým modelem využívajícím metodu konečných prvků a stanovit omezení použitelnosti analytického řešení. Složená tělesa měla různé geometrické varianty.

Nejprve byla představena obecná pružnost a pevnost a byly odvozeny základní vzorce využívané v předmětu Pružnost a pevnost II. Pro samotné rovnice existuje nekonečně mnoho řešení, a proto byly představeny okrajové podmínky, díky kterým je možné stanovit výsledky.

V další části práce byly ukázány základní vlastnosti vybraných elementárních těles, ze kterých se skládaly složená tělesa. Šlo především o to, ukázat náznak odvození rovnic pro analytické řešení přímé úlohy a stanovit předpoklady k použitelnosti analytického řešení. Analytický model byl počítán v programu Wolfram Mathematica. Tyto vytvořené modely jsou součástí bakalářské práce v příloze. Numerické řešení využívá tzv. diskretizaci, což je přeměna spojitě úlohy na úlohu s konečným počtem prvků. Bylo provedeno pouze hrubé naznačení převodu spojitě funkce na funkci diskrétní, protože numerický model byl sestaven v programu Ansys Workbench, který počítal úlohu sám.

Tato práce měla také za cíl udělat přehled různých složených těles reprezentujících reálné úlohy z technické práce, což bylo splněno v kapitole 6. Nejčastějším typem složeného tělesa je nádoba s vnitřním tlakem či nádoba obsahující kapalinu. Takové nádoby jsou hojně využívány v průmyslu chemickém, potravinářském nebo ropném. Dále jsou to přírubové spoje a spoje lisované.

V 7. kapitole došlo na deformačně napěťovou analýzu 2 vybraných složených těles, a to válcové nádoby s vnitřní tlakem a nádrže na kapalinu položenou na podpoře. U obou těles byl nejprve vytvořen analytický model řešení s popisem, jak se k němu došlo a poté byl vytvořen model numerický. V numerickém modelu byla zobrazena vytvořená síť konečných prvků a její parametry. Po dopočítání všech neznámých parametrů byly vykresleny výsledky všech posuvů a napětí pro základní rozměry úloh daných tab. 7.1 a) a 7.4 a).

Průběhy posuvů a napětí u prvního i druhého tělesa byly pro základní rozměry těles velmi podobné pro řešení oběma způsoby až na místo spojení elementárních těles. V tomto místě počítá analytické řešení se spojením s druhým tělesem pouze na úrovni střednic, zatímco numerické řešení bere v potaz tloušťku těles a spojení počítá v rámci objemů těles. To způsobí, že jakmile se průběh vykreslované veličiny dostane na úroveň spojení, dojde ke změně tuhosti tělesa a křivka průběhu numerického řešení se odtrhne od křivky analytické. To se dá považovat za omezení analytického řešení, protože zde není správná hodnota řešení. Naopak nevýhodou numerického řešení je nutnost pohlídat si velikost prvku na povrchu těles v místech ostrých rohů, protože s jemnější sítí zde roste hodnota napětí do nekonečna, což se v grafu projeví jako špička. V této práci bylo ale ověřeno, že s jemnější sítí také klesá délka, na které je tato napěťová špička vyvolaná, a tak není potřeba kvůli tomuto místu předdimenzovat zbytečně celé těleso. Navíc v tomto místě nikdy nebude ostrá hrana, ale vždy se tam bude vyskytovat rádius.

Po změně rozměrů těles začala stoupat relativní chyba, kterou lze vidět v tab. 7.2, 7.3, 7.5, 7.6. Byla stanovena relativní chyba analytického řešení od numerického řešení s velkými

deformacemi a chyba analytického řešení od numerického s malými deformacemi. Podle očekávání vycházela relativní chyba pro předpoklad malých deformací u numerického řešení menší než s předpokladem velkých deformací. U stěnodesky nejvíce rostla chyba při jejím ztenčení, protože tlak, který byl neměnný při všech rozměrech těles vyvolal průhyb na desce, který nesplňoval předpoklady pro výpočet pomocí Kirchhoffovy teorie. Naopak u skořepiny byl větší problém, když byla tloušťka stěny větší, v ten moment se totiž těleso dostávalo na hranici mezi skořepinou a tlustostěnným válcovým tělesem.

Závěrem lze říct, že bakalářská práce dosáhla stanovených cílů a poskytla užitečné poznatky o deformačním a napětovém stavu složených těles.

Seznam použitých zdrojů

- [1] ONDRÁČEK, Emanuel. *Mechanika těles: pružnost a pevnost II*. Vyd. 4., přeprac., V Akademickém nakladatelství CERM 2. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006. ISBN 80-214-3260-8.
- [2] TIMOSHENKO, S. *Strength of Materials, Part II. - Advanced theory and Problems*. 3rd ed. New York: D. Van Nostrand company, 1941. ISBN 9780898746211.
- [3] PETRUŠKA, Jindřich. *MKP v inženýrských výpočtech*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojíního inženýrství, 2011. Dostupné z: <http://www.umt.fme.vutbr.cz/images/opory/MKP%20v%20inzenyrskych%20vypoctech/RIV.pdf>
- [4] VENTSEL, Eduard a Theodor KRAUTHAMMER. *Thin Plates and Shells - Theory, Analysis and Applications*. New York: Marcel Dekker, 2001. ISBN 0-8247-0575-0.
- [5] TIMOSHENKO, S. *Theory of Plates and Shells*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill book company, 1970. ISBN 0-07-085820-9.
- [6] JANÍČEK, Přemysl a Jindřich PETRUŠKA. *Pružnost a pevnost II: úlohy do cvičení*. Vyd. 3. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007. ISBN 978-80-214-3441-7.
- [7] HORNÍKOVÁ, Jana, Pavel ŠANDERA, Jiří BURŠA a Přemysl JANÍČEK. *Pružnost a pevnost* [online]. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2002 [cit. 2023-05-25]. ISBN 80-7204-268-8. Dostupné z: <http://beta.fme.vutbr.cz/cpp/>
- [8] HALAMA, Radim, L. ADÁMKOVÁ a F. FOJTÍK. *Pružnost a pevnost* [online]. Ostrava, 2011 [cit. 2023-05-25]. Dostupné z: https://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/pruznost_pevnost_obraz.pdf. Interaktivní studijní materiál. Vysoká škola báňská.
- [9] Pressure Vessels: Types, Design, Supports, Applications, Materials. In: *The piping mart* [online]. 2022 [cit. 2023-05-26]. Dostupné z: <https://blog.thepipingmart.com/other/pressure-vessels-types-design-supports-applications-materials/>
- [10] Přírubové spoje jako nedílná součást PE potrubí. In: *Tzbinfo* [online]. 2022 [cit. 2023-05-26]. Dostupné z: <https://voda.tzb-info.cz/armatury-provodovod/24620-prirove-spoje-jako-nedilna-soucast-pe-potrubi>
- [11] Spojovat trubky lisováním? Díl 1. – Materiály, těsnění, způsoby lisování. In: *Tzbinfo* [online]. 2022 [cit. 2023-05-26]. Dostupné z: <https://vytapeni.tzb-info.cz/potrubi-a-armatury/23328-spojovat-trubky-lisovanim-dil-1-materialy-tesneni-zpusoby-lisovani>
- [12] *Wolfram Language and System* [online]. 2023 [cit. 2023-05-25]. Dostupné z: <https://reference.wolfram.com/language/>
- [13] *Ansys* [online]. 2023 [cit. 2023-05-25]. Dostupné z: <https://www.ansys.com/>

- [14] Měděné trubky a tvarovky: typy, značení, vlastnosti uspořádání měděného potrubí. In: *Engineerx.decorexpro* [online]. 2019 [cit. 2023-05-26]. Dostupné z: <https://engineerx.decorexpro.com/cs/santeh/tools/mednye-truby-i-fitingi.html>
- [15] Tlaková nádoba SICC 100. In: *Industrien* [online]. 2023 [cit. 2023-05-26]. Dostupné z: https://www.industrien.cz/tlakove-nadoby-vzdusniky/tlakova-nadoba-sicc-100/?gad=1&gclid=Cj0KCQjwjryjBhD0ARIsAMLvnF8ZQK_hJOovstTcAYN7Ygty7FaDnebiaGQarkaUkYZkCHJGXWC1jq4aAqImEALw_wcB
- [16] TLAKOVÁ NÁDOBA SICC 725Z. In: *Industrien* [online]. 2023 [cit. 2023-05-26]. Dostupné z: <https://www.industrien.cz/tlakove-nadoby-vzdusniky/tlakova-nadoba-sicc-725z/>
- [17] Nerezová nádrž na pitnou vodu. In: *Unimont PACOV* [online]. 2023 [cit. 2023-05-26]. Dostupné z: <https://www.unimontpacov.cz/velkoprostorove-nadrze>
- [18] Pressure vessels. In: *PRESSVESS* [online]. [cit. 2023-05-26]. Dostupné z: <https://www.pressvess.co.uk/products/pressure-vessels/>
- [19] FF (TP) - přírubová trubka. In: *Tran-sig-ma* [online]. [cit. 2023-05-26]. Dostupné z: [http://www.tran-sig-ma.eu/product/334/FF_\(TP\)_-_prirubova_trubka.htm](http://www.tran-sig-ma.eu/product/334/FF_(TP)_-_prirubova_trubka.htm)
- [20] Rozvody s lisovanými spoji. In: *ASB-portal* [online]. 2008 [cit. 2023-05-26]. Dostupné z: <https://www.asb-portal.cz/stavebnictvi/technicka-zarizeni-budov/osvetleni-a-elektroinstalace/rozvody-s-lisovanymi-spoji>

Seznam použitých symbolů, veličin a zkratk

Veličina/symbol	Jednotka	Popis
\vec{u}	–	Vektor posuvu
T_ε	–	Tenzor přetvoření
T_σ	–	Tenzor napětí
σ	<i>MPA</i>	Normálové napětí
τ	<i>MPA</i>	Smykové napětí působící ve směru xy
O	<i>N</i>	Objemové zatížení působící ve směru x
ε	–	Poměrné délkové přetvoření
γ	–	Poměrné úhlové přetvoření
E	<i>MPA</i>	Modul pružnosti v tahu
G	<i>MPA</i>	Modul pružnosti ve smyku
μ	–	Poissonova konstanta
u	<i>mm</i>	Posuv v radiálním směru
w	<i>mm</i>	Posuv v axiálním směru
t	<i>mm</i>	Posuv v tečném směru
ϑ	°	Natočení
\mathcal{M}	$\frac{N \cdot mm}{mm}$	Měrný ohybový moment
\mathcal{T}	$\frac{N}{mm}$	Měrná posouvající síla
\mathcal{N}	$\frac{N}{mm}$	Měrná normálová síla
p	<i>MPA</i>	Tlak
h	<i>mm</i>	Tloušťka stěny skořepiny
r	<i>mm</i>	Poloměr
B	<i>MPA · mm³</i>	Ohybová tuhost skořepiny/desky
β	$\frac{1}{mm}$	Zavedená konstanta
C	–	Integrační konstanta

L	mm	Délka skořepiny
e	–	Poměrná změna objemu
J	mm^4	Kvadratický moment
Π	–	Potenciální energie
W	–	Napjatost
P	–	Potenciál vnějšího zatížení
HMH	–	Energetická hypotéza
σ_{red}	MPa	Redukované napětí