



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

POPIS NAPJATOSTI A DEFORMACE NA ČELE VYHNUTÝCH TRHLIN ZATÍŽENÝCH VE SMYKOVÝCH ZÁTĚŽNÝCH MÓDECH

DESCRIPTION OF STRESS AND STRAIN STATES AT FRONT OF INCLINED CRACKS LOADED BY SHEAR
MODES

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Marek Roh

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Jana Horníková, Ph.D.

BRNO 2017



Zadání diplomové práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	Bc. Marek Roh
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Inženýrská mechanika a biomechanika
Vedoucí práce:	doc. Ing. Jana Horníková, Ph.D.
Akademický rok:	2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č. 111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Popis napjatosti a deformace na čele vyhnutých trhlin zatížených ve smykových zátěžných módech

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Sestavení modelu vzorku obsahujícího trhlínu s vyhnutým čelem, zatíženého ve smykových módech, v programovém prostředí ANSYS. Analýza bude zaměřena na konfigurace, které nebyly dosud modelovány.

Cíle diplomové práce:

Cílem je stanovení pole napětí v blízkém okolí čela vyhnuté trhliny a posouzení vlivu geometrie trhlín na velikost J-integrálu a součinitelů intenzity napětí podél čela trhlíny.

Seznam literatury:

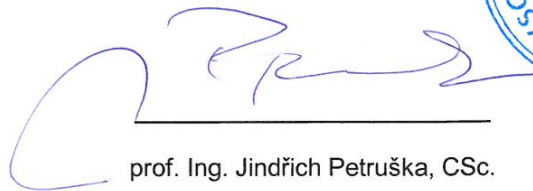
Anderson T. L.: Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications. CRC Press. Texas, 1995.

ANSYS verze 14.0. Users Manual. Houston, USA, 2012.


Pokluda J., Trattnig G., Martinschitz C. a Pippan R.: Straightforward Comparison of Fatigue Crack Growth under Modes II and III. International Journal of Fatigue 30, (2008) 1498 - 1506.

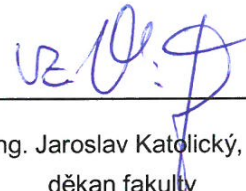
Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17.

V Brně, dne 4. 11. 2016



prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu





doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá posouzením vlivu délky trhliny a úhlu jejího vyhnutí na napjatostní a deformační podmínky na jejím čele u vzorku, který je zatížený smykem. V první části této práce jsou rozebrány jednotlivé přístupy, vedoucí k popisu výše zmíněných podmínek, druhá část se pak zabývá sestavením modelu, kterým jsou určovány lomové parametry, jejichž hodnoty jsou porovnány v části třetí.

Summary

The primary objective of this masters thesis is to assess the effects of the length of crack and the angle, of which is this crack inclined on the stress and strain states at its front for the test sample loaded under shear. The first part of this thesis will analyze the individual approaches that lead to the description of the aforementioned conditions. The second part deals with the FEM model assembly, which will lead to the fracture parameters, the values of which will be compared in part three.

Klíčová slova

Lomová mechanika, vyhnutá trhlina, smykové zátěžné módy, součinitel intenzity napětí, J-integrál, MKP

Keywords

Fracture Mechanics, Inclined Crack, Shear Modes, Stress Intensity Factor, SIF, J-Integral, FEM

ROH, M. *Popis napjatosti a deformace na čele vyhnutých trhlín zatížených ve smykových zátěžných módech*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 63 s. Vedoucí doc. Ing. Jana Horníková, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci na téma *Popis napjatosti a deformace na čele vyhnutých trhlin zatížených ve smykových zátěžných módech* vypracoval samostatně pod vedením vedoucí diplomové práce doc. ing. Jany Horníkové, Ph.D. a s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu, který tvoří přílohu této práce.

Bc. Marek Roh

Tímto bych rád poděkoval všem, kteří se na této práci jakýmkoliv způsobem podíleli, jak kantorům Vysokého učení technického v Brně za předávání vědomostí, bez nichž bych se neobešel, jak při řešení diplomové práce, tak snad i v budoucím životě tak své rodině a přátelům za morální podporu s blížícím se termínem odevzdání. Zejména pak děkuji vedoucí své práce doc. ing. Janě Horníkové, Ph.D. za cenné poznatky a připomínky, které mě vždy naváděly správným směrem. A v neposlední řadě směřuje velké díky k mé přítelkyni Barboře, která mě i přes mou nevoli k práci vždy nějakým záhadným způsobem přemluvila.

Bc. Marek Roh

Obsah

Obsah	12
1 Úvod	13
2 Problémová situace	14
2.1 Formulace problému	14
2.2 Cíle řešení problému	14
3 Lomová mechanika	15
3.1 Lineárně elastická lomová mechanika	15
3.1.1 Energetické kritérium	16
3.1.2 Napěťové kritérium	18
3.2 Elasto-plastická lomová mechanika	21
3.2.1 Koncepce J-integrálu	21
3.3 Numerické metody v lomové mechanice	25
3.3.1 Metoda konečných prvků	25
3.3.2 Použití vhodných prvků	26
3.3.3 Tvorba sítě okolo trhliny	26
3.3.4 Model tělesa s trhlinou	29
3.3.5 Výpočty parametrů lomové mechaniky	29
4 Komplexní analýza problému	34
4.1 Systém podstatných veličin $\sum(\Omega)$	36
4.2 Metody řešení problému	37
4.3 Množina vstupních údajů do výpočtového algoritmu	37
5 Výpočty	38
5.1 Předloha	38
5.2 Model materiálu	39
5.3 Sestavení modelu	40
5.3.1 Model s hrubou sítí	40
5.3.2 Submodel	41
5.4 Ověření platnosti výsledků ze sestaveného modelu	44
5.4.1 Zatížení tahem	45
5.4.2 Zatížení krutem	46
5.4.3 Zatížení smykem	47
5.4.4 Kvalita sítě a její vliv na hodnoty zkoumaných parametrů	48
6 Výsledky	51
6.1 Závislost délky trhliny a úhlu jejího vyhnutí na hodnoty K_i	52
6.2 Ověření výsledků experimentálně naměřenými hodnotami	55
7 Závěr	58
Seznam použitých zdrojů	60

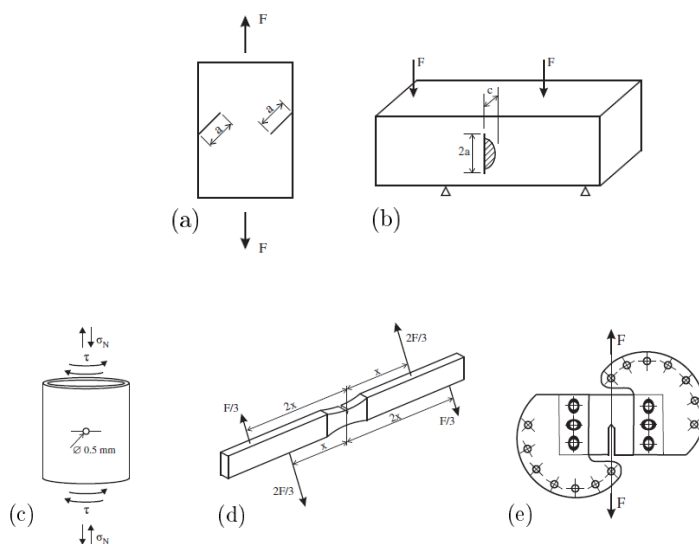
1. Úvod

Lom je problém, kterému společnost čelí už od dob, kdy se začaly objevovat první lidské výtvořiny a s rozvojem techniky je tento problém snad ještě výraznější než v minulých stoletích. Kupříkladu velké letecké katastrofy, stojící stovky lidských životů, jsou úzce spjaté s rozvojem moderního leteckého průmyslu a v minulosti nebyly tak ožehavým tématem, jako tomu je dnes [1].

Naštěstí pokroky v oboru lomové mechaniky nám pomáhají takové potenciální hrozby předvídat a následně na ně patřičným způsobem reagovat. Nebylo tomu tak ale vždy. Porozumění tomu, jak k poruchám v materiálu dochází se znatelně zlepšilo až od období druhé světové války, před kterým byl obor lomové mechaniky prakticky neexistující a i v současnosti je stále čemu se učit [1].

Teprve po roce 1970 se totiž začalo se systematickým studiem únavových poruch součástí s trhlinami zatíženými ve smykových módech. Do té doby byly studie prováděny pouze pro čistý mód I, kde se předpokládalo, že smykové módy II a III jsou podél čela trhliny nulové. Z inženýrské praxe je však zřejmé, že reálné trhliny na součástech nejsou nikdy dokonale rovinné a napjatost v součástech bývá zpravidla víceosá a právě toto jsou faktory, které vedou ke vzniku smíšených módů. Z výše zmíněného je zřejmé, že pro správné porozumění dané problematice je třeba brát v zřetel také módy II a III [3, 2].

V průběhu let byla pro účely výzkumu šíření smykově zatížených trhlin vyvinuta řada vzorků a testovacích procedur. V raných letech byly prováděny experimenty na vzorcích s trhlinami zatíženými ve smíšených módech I+II a II+III, jak zobrazují obr. 1.1a reps. 1.1b. Zatížení trubkového vzorku krutem (obr. 1.1c) a speciální variace čtyřbodového ohybu vzorku se čtvercovým průřezem a vrubem umístěným v jeho středu (obr. 1.1d) byly trvale využívány po mnoho let. Poslední testovací konfigurace (obr. 1.1e) je spolu s konfigurací zpracovávanou v této práci, která bude podrobněji popsána v následujících kapitolách, doposud široce využívána pro experimenty a s nimi souvisejícími konečnoprvkovými analýzami [4].



Obrázek 1.1: Některé z testovacích procedur vyvinutých za účelem výzkumu šíření trhlin zatížených smykovými zátěžnými módy. [4]

2. Problémová situace

Přestože řešení pole napětí na čele trhlin zatížených v módu I je dokonale propracováno, tak u módu II, v němž se trhliny šíří při smykovém zatížení, tomu tak není. I tento mód však při šíření trhlin hraje důležitou roli a pro smykově zatížené trhliny je rozhodující. S přihlédnutím k faktu, že reálné trhliny nejsou nikdy dokonale rovinné, nýbrž křivolaké, je úkolem právě této diplomové práce posoudit, jaký vliv má velikost úhlu vyhnutí a délka trhliny na velikosti součinitelů intenzity napětí. Výsledky této práce by měli být zajímavé pro řešení reálných trhlin.

2.1. Formulace problému

Vzhledem k výše zmíněnému byl na ústavu materiálového inženýrství Erich Schmid v Rakouském Lubnu vyvinut speciální test, který je na jediném vzorku schopen vyvolat růst trhlin v čistých módech II a III a smíšených módech II+III. Tento test bude v následujících kapitolách podrobněji popsán, jelikož slouží jako předloha pro sestavení modelů vzorků obsahujících trhlínu s vyhnutým čelem, zatížených ve smykových módech, v programovém prostředí ANSYS. Mým úkolem v rámci této práce je sestavit tyto modely za účelem výše zmíněného posouzení vlivu úhlu vyhnutí trhliny na velikosti součinitelů intenzity napětí.

2.2. Cíle řešení problému

Cílem je poskytnout čtenáři teoretický základ pro pochopení dané tematiky a následně s využitím těchto znalostí stanovit pole napětí v blízkém okolí čela vyhnuté trhliny a posouzení vlivu geometrie této trhliny na velikost J-integrálu a součinitelů intenzity napětí podél jejího čela na výše zmiňovaných vzorcích.

3. Lomová mechanika

Lomová mechanika je vědní inženýrský obor, zabývající se poruchami součástí způsobenými iniciací a růstem trhliny. Lomová mechanika se zaměřuje na jednu trhlinu, pro niž byly vytvořeny teoretické koncepty a experimentální techniky, které mají za úkol podat odpovědi na následující otázky [5]:

- Dojde k růstu trhliny při daném zatížení?
- Pokud ano, kterým směrem a jak rychle poroste?
- Dojde k zastavení růstu trhliny?
- Jaká je maximální dovolená délka trhliny?
- Jakou velikost trhliny lze pro danou součást ještě tolerovat?
- Jaká je zbytková životnost součásti či konstrukce v závislosti na délce trhliny a daném zatížení?

Nad odpověďmi pracuje hned několik vědních oborů a každý přichází se svými vlastními koncepty, teoriemi a terminologií. Jako výsledek se lomová mechanika rozděluje do následujících podoblastí [5]:

- *Experimentální lomová mechanika*
- *Lineárně elastická lomová mechanika*
- *Elasticko-plastická či nelineárně elastická lomová mechanika*
- *Dynamická lomová mechanika*
- *Numerické metody v lomové mechanice*
- *Únava materiálu*

V rámci této práce budou v následujících oddílech podrobněji popsány pouze oblasti lineárně elastické a elasticko-plastické lomové mechaniky a s nimi spojené řešení MKP. Ostatní oblasti lomové mechaniky nemají pro řešení této práce význam a proto se jimi zabývat nebudou.

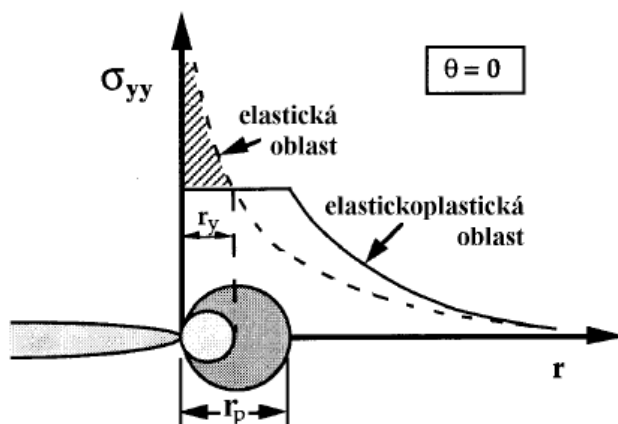
3.1. Lineárně elastická lomová mechanika

Široká oblast lomové mechaniky využívá koncepty a teorie předpokládající chování materiálu podle Hookova zákona. Této oblasti se říká *lineárně elastická lomová mechanika* (LELM). Níže budou podrobněji popsány přístupy jak energetické, tak napěťové, ve zkratce však lze říci, že kritéria vycházející z výše zmíněných přístupů se od sebe odlišují množstvím materiálového objemu v nich uvažovaném. Kritéria energetická bývají často označována jako *globální*, protože uvažují velké množství objemu materiálu. Na druhou stranu kritéria napěťová jsou založena na stavu napjatosti na čele trhliny a protože se

3.1. LINEÁRNĚ ELASTICKÁ LOMOVÁ MECHANIKA

pozornost vztahuje na malý objem materiálu okolo tohoto místa, jsou proto označovány jako kritéria *lokální*.

Předpoklady pro lineárně elastické chování materiálu vedou na nekonečně velká napětí na čela trhliny. Je však zřejmé, že ve skutečnosti se toto dít nebude. V okolí čela trhliny se tak budou objevovat oblasti s trvalými plastickými deformacemi a průběh napětí ve směru od čela trhliny tak bude mít jiný průběh (viz. obr. 3.1). Použitím podmínek plasticity (max τ , HMM) můžeme tyto oblasti určit a za předpokladu, že jsou dostatečně malé, můžeme využít principů LELM [5].



Obrázek 3.1: Rozdílný průběh napětí v elastickém a elasto-plastickém materiálu [6]

3.1.1. Energetické kritérium

Energetický přístup říká, že k růstu trhliny dojde v momentě, kdy je uložená energie dostatečná k překonání povrchové energie materiálu. Tuto formulaci sestrojil Griffith na základě prvního zákona termodynamiky, který říká, že soustava přejde z jednoho stavu do druhého pouze tehdy, pokud celková energie soustavy klesne. Za předpokladu, že práce spojená s přírůstkem lomové plochy dA má být uhrazena elastickou energií, která se uvolní v okolí rostoucí trhliny, má Griffithova energetická bilance následující vztah:

$$\frac{dW}{dA} = \frac{dW_{el}}{dA} + \frac{dW_s}{dA} = 0 \quad (3.1a)$$

nebo

$$-\frac{dW_{el}}{dA} = \frac{dW_s}{dA}, \quad (3.1b)$$

kde W je celková energie systému, W_{el} je elastická energie, která je v systému akumulována a W_s je práce spojená s tvorbou nových povrchů [6].

Na Griffithovu práci následně navázal Irwin a upravil kritérium tak, aby bylo použitelné pro řešení problémů z inženýrské praxe. Toho docílil tak, že definoval veličinu *rychlost růstu trhliny* (G), představující energii potřebnou k velmi malému (inkrementálnímu) růstu trhliny. V rov. 3.1b lze G chápat jako jednu její stranu:

$$G = -\frac{dW_{el}}{dA}. \quad (3.2)$$

Ze vztahu výše je patrné, že slovo "rychlost" nepředstavuje derivaci dráhy na čase, ale je chápáno jako rychlost změny potenciální energie soustavy v závislosti na růstu lomové

plochy. A protože je G počítáno derivací potenciální energie, ve skutečnosti má význam síly a proto je označováno jako *hnací síla trhliny*. Druhá strana rov. 3.1b, označovaná též jako *houževnatost materiálu*, odpovídá kritické hodnotě, při níž dojde k šíření trhliny

$$G_c = \frac{dW_s}{dA}. \quad (3.3)$$

Takto tedy Irwin z Griffithovy energetické bilance (3.1) sestrojil kritérium, které říká, že k lomu dojde v momentě, kdy se hnací síla trhliny G rovná houževnatosti materiálu G_c

$$G = G_c. \quad (3.4)$$

Jedním ze základních předpokladů lomové mechaniky je ten, že houževnatost materiálu (v tomto případě G_c) je brána jako materiálová charakteristika a nezávisí tedy na geometrii ani velikosti tělesa s trhlinou a lze ji nějakým způsobem měřit [6, 1].

Jestliže však chceme měřit lomovou houževnatost, musíme nejprve dokázat, že je tato veličina nezávislá na zatěžovacích podmínkách. V extrémních případech dochází ke dvěma typům zatěžování – měkké (obr. 3.2), u kterého je $F = konst$ a tvrdé zatěžování (obr. 3.3), u kterého je posuv $\Delta = konst$. Celková energie systému lze vyjádřit následovně

$$W = W_{el} - W_F, \quad (3.5)$$

kde W_{el} odpovídá deformační energii uložené v tělese a W_F odpovídá energii spojené s prací vnějších sil. Zavedeme-li veličiny F (síla), Δ (posuv), a (délka trhliny) a $C = \frac{\Delta}{F}$ (poddajnost), pak je s přihlédnutím k obr. 3.2 a 3.3 zřejmé, že

$$W_{el} = \frac{1}{2} F \Delta \quad (3.6)$$

$$W_F = F \Delta. \quad (3.7)$$

Pro měkké zatížení tělesa s trhlinou o šířce B platí, že $F = konst$ a $W = W_{el} - W_F$. Dosazením a úpravou získáme vztah:

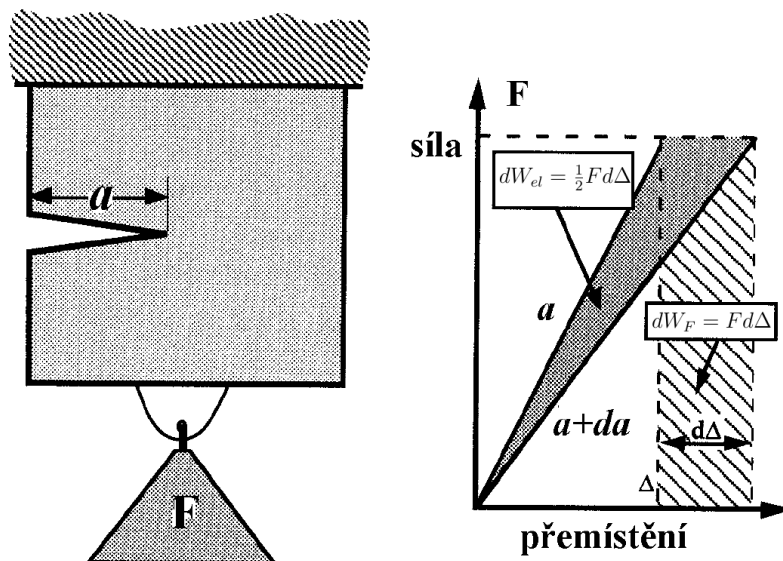
$$G = \frac{dW}{dA} = -\frac{1}{B} \left(\frac{dW}{da} \right) = \frac{1}{2B} F^2 \left(\frac{dC}{da} \right)_{F=konst} \quad (3.8)$$

Pro tvrdé zatížení platí, že $W_F = 0$ a $\Delta = konst$ a obdobně jako u rov. 3.8 dosazením a úpravou získáme:

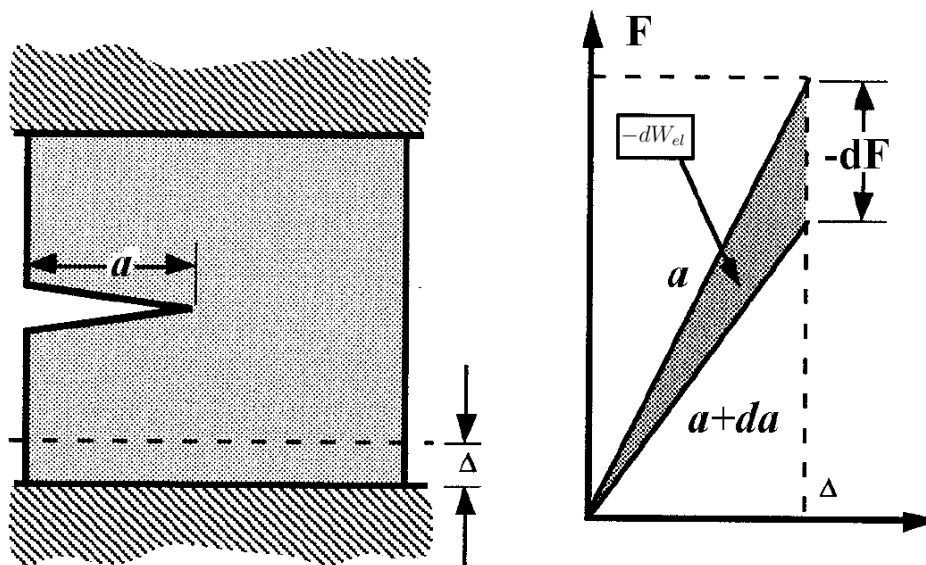
$$G = \frac{dW}{dA} = \frac{1}{B} \left(\frac{dW}{da} \right) = -\frac{1}{2B} F^2 \left(\frac{dC}{da} \right)_{\Delta=konst} \quad (3.9)$$

Z rovnic 3.8 a 3.9 je zřejmé, že hnací síla trhliny je stejná pro oba typy zatěžování, tedy [6]

$$\left(\frac{dW_{el}}{da} \right)_{F=konst} = - \left(\frac{dW_{el}}{da} \right)_{\Delta=konst}. \quad (3.10)$$



Obrázek 3.2: Měkké zatěžování konstantní silou [6, 1]



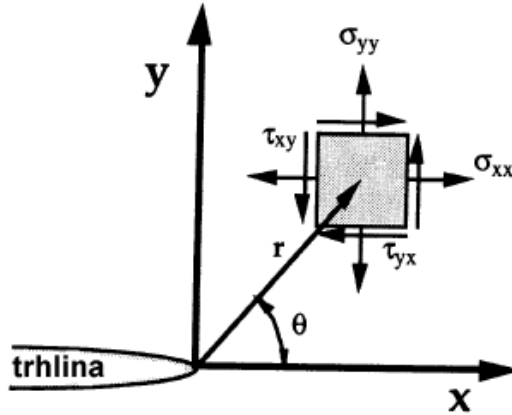
Obrázek 3.3: Tvrdé zatížení při konstantním posuvu [6, 1]

3.1.2. Napěťové kritérium

Přestože bylo energetické hledisko navržené Griffithem precizně zpracováno, v konstrukčerské praxi je jen velmi těžko použitelné. Hlavním problémem byly výpočty hnací síly trhliny G pro trhlínu zatíženého tělesa o libovolném tvaru. S řešením problému přišli například Irwin, Westergaard, Sneddon či Williams, kteří jako první odvodili napjatost na čele ostré trhliny. Pokud je definován polární souřadnicový systém s počátkem na čele trhliny (obr. 3.4), pak napjatost jakéhokoliv tělesa s trhlínou popisuje následující funkce [1, 6]

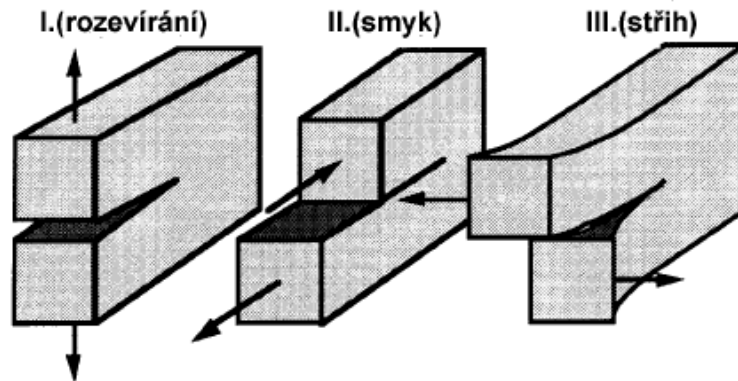
$$\sigma_{ij} = \left(\frac{k}{\sqrt{r}} \right) f_{ij}(\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^{\frac{m}{2}} g_{ij}^{(m)}(\theta), \quad (3.11)$$

kde σ_{ij} vyjadřuje tenzor napětí, r a θ jsou polární souřadnice (obr. 3.4), k je konstantou a f_{ij} je bezrozměrnou funkcí závislou na parametru θ . Členy vyšších řádů sice závisí na geometrii, avšak řešení vždy obsahuje první člen, který úměrný $1/\sqrt{r}$. Tím pádem se i napětí v blízkosti čela trhliny bude s $1/\sqrt{r}$ měnit a to nezávisle na geometrii tělesa. Rovnice 3.11 tak vyjadřuje singularitu napětí, které je asymptotické vzhledem k $r = 0$. Obdobně se také dá ukázat, že jako se pole napětí v blízkosti čela trhliny mění s členem $1/\sqrt{r}$, tak se posuvy mění se členem \sqrt{r} [1].



Obrázek 3.4: Zavedení souřadného systému v čele trhliny. Osa z je kolmá na stránku. [6]

Irwin dále studoval chování trhlín a představil tři zátěžné módy, které se užívají dodnes. Tyto módy jsou znázorněny na obr. 3.5. U módu I je zatížení normálové na rovinu trhliny a vede tak k jejímu rozevírání. Mód II je označován jako *rovinný* a mód III jako *antirovinný*. U obou těchto módů je trhlina zatížena pouze smykově. Libovolné zatížení trhliny může být určeno superpozicí těchto tří módů [1]. V praxi pak bylo prokázáno, že u smykově zatížených trhlín dochází k odklonu do módu I, ve kterém se pak trhlina primárně šíří. Proto jsou také teorie a experimenty u trhlín zatížených v normálovém módu I zpracovány mnohem precizněji, nežli je tomu u módů smykových [7].



Obrázek 3.5: Tři zátěžové módy, kterým může být vystavena trhlina.[6]

Avšak v každém z těchto zátěžných módů se projevuje singularita $1/\sqrt{r}$ na čele trhliny, přičemž konstanta k a funkce f_{ij} se pro jednotlivé módy liší. Pro vhodnější popis byla zavedena veličina *součinitel intenzity napětí* (nebo též faktor intenzity napětí) K , která nahrazuje původní konstantu k , přičemž $K = k\sqrt{2\pi}$. Součiniteli intenzity napětí se

3.1. LINEÁRNĚ ELASTICKÁ LOMOVÁ MECHANIKA

obvykle přiřazuje index, který odlišuje, ke kterému zátěžnému módu se daný součinitel vztahuje (K_I , K_{II} , K_{III}). Takto pak mohou být zapsány rovnice popisující pole napětí v lineárně elastickém materiálu [1]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sigma_{ij}^{(I)} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(I)}(\theta) \quad (3.12a)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sigma_{ij}^{(II)} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(II)}(\theta) \quad (3.12b)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sigma_{ij}^{(III)} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(III)}(\theta), \quad (3.12c)$$

kde rov. 3.12a popisuje pole napětí pro mód I, rov. 3.12b pro mód II a 3.12c pro mód III. Pro zatížení ve smíšených módech, tedy pokud je přítomno více módů najednou, platí princip superpozice a složky napětí způsobené těmito módy se prostě sčítají [1]

$$\sigma_{ij}^{(celk.)} = \sigma_{ij}^{(I)} + \sigma_{ij}^{(II)} + \sigma_{ij}^{(III)}. \quad (3.13)$$

Součinitel intenzity napětí popisuje amplitudu singularity na čele trhliny. To znamená, že napětí v blízkém okolí čela trhliny se zvyšují přímo úměrně s rostoucím K . Pokud však K známe, můžeme pomocí něj určit nejen všechny napěťové parametry, ale i všechna přetvoření či posuvy jako funkce r a θ . K tedy zcela definuje podmínky v oblasti, kde dominuje singularita [1].

Budeme-li tedy předpokládat, že v materiálu dojde k lokální poruše při určité kombinaci napětí a přetvoření, pak k růstu trhliny dojde při určité kritické hodnotě K . Tato hodnota K_c se nazývá *lomovou houževnatostí*, je materiálovou charakteristikou a nezávisí tedy na geometrii ani velikosti tělesa s trhlinou. Nezávislost na geometrii však platí pouze za určitých podmínek a to konkrétně tehdy, když je plastická zóna malá v porovnání s tloušťkou tělesa a je tak dosaženo rovinné deformace na rozhraní mezi elastickou a plastickou zónou. Dále je třeba podotknout, že i v případě, kdy je omezena plasticita na čele trhliny se hodnoty K_c liší pro jednotlivé zátěžné módy, tedy [1]

$$K_{Ic} \neq K_{IIc} \neq K_{IIIc}$$

Většina materiálů je citlivější k lomu při normálových tahových napětích spíše než při napětích smykových. Jak již bylo výše zmíněno, u smykově zatížených trhlín dochází k odklonu do módu I, módy II a III tedy k šíření trhliny obvykle nevedou. Jinými slovy hodnoty K_{IIc} a K_{IIIc} bývají obvykle vyšší než hodnoty K_{Ic} [1].

Do této chvíle tedy byly představeny dva parametry popisující chování trhlín: *rychlost šíření trhliny* G a *součinitel intenzity napětí* K . G popisuje změnu energie napjatosti při malém přírůstku trhliny (tedy globální vlastnost), zatímco parametr K popisuje napětí a posunutí v blízkosti čela trhliny (tedy vlastnost lokální). Pro lineárně elastický materiál jsou spolu tyto parametry jednoznačně spjaty a pro jednotlivé typy zatížení platí následující rovnice [1]:

$$G = \frac{K_I^2}{E'} \quad (3.14a)$$

$$G = \frac{K_{II}^2}{E'} \quad (3.14b)$$

$$G = \frac{K_{III}^2}{2G_s}, \quad (3.14c)$$

kde $E' = E$ pro rovinnou napjatost, $E' = \frac{E}{1 - \mu^2}$ pro rovinnou deformaci, G_s je modul pružnosti ve smyku a μ je Poissonova konstanta.

3.2. Elasto-plastická lomová mechanika

Pokud je plastická zóna na čele trhliny již příliš velká, obvykle

$$r_p \geq 5 - 10\% a_t,$$

kde r_p je poloměr plastické zóny a a_t je celková délka trhliny, pak pole napětí a deformací, využívaných pro výpočty LELM, již nejsou platná.

Obdobný předpoklad platí také pro nelineárně elastické materiály, jako jsou například kompozity a polymery. Pro tyto případy platí, že popis růstu trhliny již nemůže být vyjádřen pomocí součinitelů intenzity napětí. Z tohoto důvodu byly zavedeny nové parametry, které mají za úkol popsat podmínky na čele trhliny v elasto-plastickém materiálu. Jeden takový parametr se nazývá *kritické rozevření trhliny* δ (dále. CTOD¹), druhý se pak nazývá *J-integrál* a oba mohou být použity jako lomová kritéria [1, 5]. Jejich kritické hodnoty jsou totiž odhadem lomové houževnatosti materiálu téměř nezávislé na rozměrech tělesa s trhlinou i pro relativně velké plastické zóny na jejím čele. Samozřejmě jistá omezení platí i v případech parametrů J a δ , avšak tato omezení jsou mnohem méně svazující než požadavky LELM [1]. A přesto, že jsou výpočty EPLM výpočtově náročnější, obecně platí, že tyto výpočty jsou platné i v oblastech LELM [7].

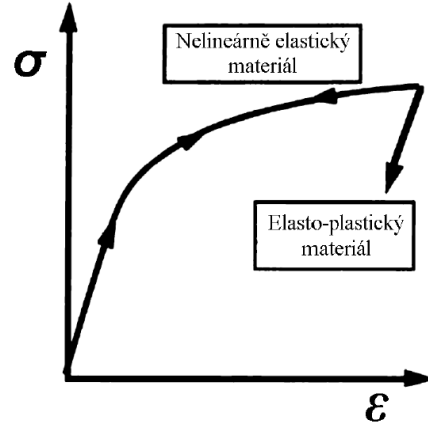
3.2.1. Koncepce J-integrálu

Dalším parametrem pro určení chování trhlín je, jak již bylo výše zmíněno, parametr J . Idealizací elasto-plastických deformací jako deformací nelineárně-elastických rozšířil Rice roku 1968 lomovou mechaniku daleko za oblast platnosti LELM. Na obr. 3.6 je ukázáno chování elasto-plastického a nelineárně elastického materiálu při jednoosé tahové zkoušce. Jde vidět, že u obou typů materiálů se při zatěžování materiál chová identicky a rozdíl nastává až při odtížení, při kterém se nelineárně-elastický materiál vrací po téže křivce zpátky do místa nulového napětí a deformace, zatímco elasto-plastický materiál se vrací po přímce se směrnici rovné Youngovu modulu pružnosti E . Jinými slovy, pokud budeme elasto-plastický materiál odlehčovovat nebo cyklicky zatěžovat, nelze jeho chování popsat jednou jedinou rovnicí, protože jedné hodnotě napětí budou odpovídat dvě či více hodnot pretvoření. Budeme-li však předpokládat, že se napětí ve zkoumaném tělese zvyšuje monotónně a k odtížení nedojde, pak se oba modely materiálu chovají identicky a lze tedy materiál elasto-plastický nahradit materiálem nelineárně elastickým [1].

Deformační teorie plasticity, která svazuje deformace a napětí v materiálu je tedy ekvivalentní s teorií nelineární elasticity. Toho Rice využil a prokázal, že rychlost šíření trhliny v nelineárním materiálu J , může být zapsána jako na integrační cestě nezávislý křivkový integrál.

¹Z anglického *crack tip opening displacement*

3.2. ELASTO-PLASTICKÁ LOMOVÁ MECHANIKA



Obrázek 3.6: Napětí vs. přetvoření nelineárně elastického a elastoplastického materiálu při jednoosé tahové zkoušce. [1, 7]

Pod pojmem J -integrál chápeme trojsložkový vektor \vec{J} ve trojrozměrném prostoru, jehož hodnoty se získají integrací po křivce Γ . V každém bodě této křivky se určují hodnoty deformačních elastických energií z hodnot napětí a deformací [5] a vektor \vec{J} lze zapsat jako:

$$J_k = \int_{\Gamma} \left(wn_k - t_i \frac{\partial u_i}{x_k} \right) d\Gamma, \quad (3.15)$$

kde \vec{n} je jednotkový vektor normálový na Γ , t_i označujeme jako vektor povrchových sil, w je hustota deformační energie definovaná vztahem:

$$w = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}. \quad (3.16)$$

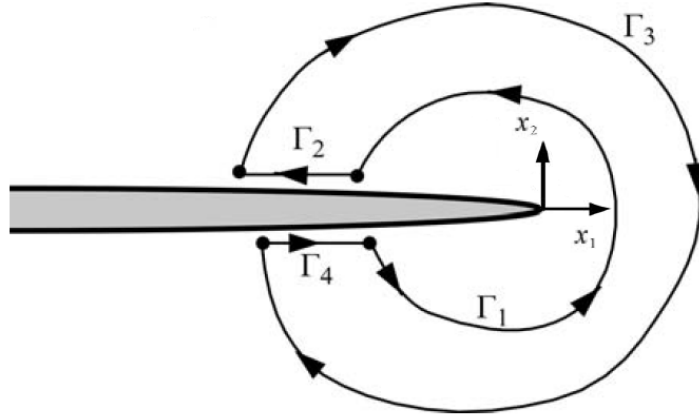
Uvažujeme-li lokální souřadný systém s počátkem na čele trhliny s osou x_1 ve směru trhliny, jako je tomu na obr. 3.7, pak to, co obecně nazýváme J -integrálem v lomové mechanice, je první složka vektoru \vec{J} , tedy složka ve směru x_1 [5].

$$J = J_1 = \int_{\Gamma} \left(wn_1 - t_i \frac{\partial u_i}{x_1} \right) d\Gamma \quad (3.17)$$

Pokud chceme vyšetřit nezávislost J -integrálu na integrační cestě, volíme jako tuto cestu uzavřenou křivku, která obíhá okolo čela trhliny a podél obou jejích lící. Tato křivka je zobrazena na obr. 3.7. Hodnota integrálu pro uzavřenou křivku je rovna nule a lze ji určit jako součet příspěvků jeho jednotlivých částí.

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = 0 \quad (3.18)$$

Předpokládejme, že líce trhliny nejsou zatíženy, tedy $t_i = 0$. Rovněž jednotkový vektor \vec{n} směřuje na lících trhliny pouze ve směru x_2 , tedy $n_1 = 0$. Je zřejmé, že na částech křivky Γ_3 a Γ_4 budou hodnoty integrace nulové a J -integrál se skládá pouze z příspěvků integrálů podél křivek Γ_1 a Γ_2 . Pokud integrujeme podél křivky proti směru hodinových ručiček, je výsledná hodnota kladná, naopak pokud integrujeme po směru hodinových ručiček, je



Obrázek 3.7: Uzavřená integrační cesta okolo vrcholu trhliny. [1]

výsledek záporný. S touto znaménkovou konvencí je zřejmé, že hodnoty integrálů podél křivky Γ_1 a Γ_2 jsou totožné [5].

S těmito poznatky můžeme říci, že jakýkoliv integrál po neuzavřené křivce, která začíná na lici trhliny, vede okolo jejího čela a končí na lici protilehlé, bude mít vždy stejnou hodnotu a je tedy nezávislý na integrační cestě [5].

Hutchinson, Rice a Rosenberg také prokázali, že J dokáže jednoznačně popsat napětí a deformace v nelineárním materiálu. Z výše zmíněného tedy vyplývá, že J -integrál lze chápat jak jako parametr energetický, tak jako parametr napěťový [1, 8].

J jako hnací síla trhliny

Obdobně jako v části 3.1.1 Rice prokázal, že křivkový J -integrál představený v této kapitole odpovídá rychlosti šíření trhliny v nelineárně elastických materiálech a je nezávislý na způsobu zatěžování. Celkovou energii systému lze podobně jako v případě lineárně elastického materiálu (rov. 3.5) zapsat jako [1, 8]:

$$W = U - W_F, \quad (3.19)$$

kde W je celková potenciální energie systému, U je deformační energie uložená v tělese a W_F je energie spojená s prací vnějších sil. Z obr. 3.8 je patrné, že změna doplňkové deformační energie dU^* při měkkém zatěžování se oproti změně deformační energie $-dU$ tvrdého zatěžování liší o $\frac{1}{2}dFd\Delta$, která je však zanedbatelně malá oproti dU . Obdobně jako pro paramter G lze J -integrál zapsat pro měkké zatížení tělesa s jednotkovou tloušťkou jako [1]:

$$J = \left(\frac{dU^*}{da} \right)_F = \int_0^F \left(\frac{\partial \Delta}{\partial a} \right)_F dF. \quad (3.20)$$

Pro tvrdé zatěžování, pro které $W_F = 0$, je

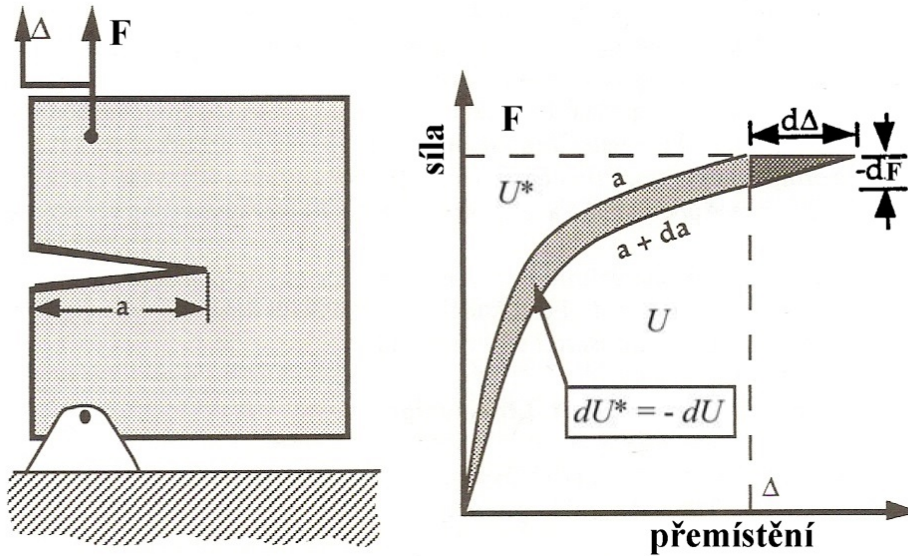
$$J = - \left(\frac{dU}{da} \right)_\Delta = - \int_0^\Delta \left(\frac{\partial F}{\partial a} \right)_\Delta d\Delta. \quad (3.21)$$

Integrací těchto rovnic lze jasně dokázat to, co je patrné z obr. 3.8, tedy, že J pro měkké zatěžování je stejné jako J pro tvrdé zatěžování. Můžeme tedy J prohlásit za zobecněnou

3.2. ELASTO-PLASTICKÁ LOMOVÁ MECHANIKA

verzi rychlosti šíření trhliny. Za předpokladu, že uvažujeme materiál lineárně elastický, pak $J = G$ [1].

Při aplikaci těchto poznatků pro řešení elasto-plastických materiálů je však nutné si uvědomit, že rychlost šíření trhliny již nelze, tak jako do této chvíle, definovat jako potenciální energii *wolněnou* při šíření trhliny v elastickém materiálu. Většina deformační energie se totiž elasto-plastickým materiálem absorbuje při růstu trhliny nebo při odtížení tělesa. Proto je vhodnější rychlost šíření trhliny, raději než energii uvolněnou, definovat jako energii absorbovanou vzorky s podobnými délkami trhlín. Energetická formulace J je mimořádně významná při experimentálních měřeních J [1].



Obrázek 3.8: Rychlost šíření trhliny v nelineárním materiálu. [8, 1]

J jako faktor intenzity napětí

Hutchinson, Rice a Rosenberg nezávisle na sobě prokázali, že J -integrál popisuje podmínky na čele trhliny. Jejich předpoklady vycházeli z Ramberg-Osgoodovi rovnice a prokázali, že pokud má J zůstat nezávislé na integrační cestě, pak se musí napětí a deformace v elasto-plastickém materiálu měnit v závislosti na $1/r$ v blízkosti čela trhliny. Ve vzdálenostech velmi blízkých k čelu trhliny, kde dominuje plastická deformace, je deformace elastická zanedbatelná v porovnání s celkovou. Tyto dvě podmínky vedou k předpokladu, že se závislosti napětí a deformací v blízkosti čela trhliny dají zapsat jako následující mocninné funkce [1]

$$\sigma_{ij} = k_1 \left(\frac{J}{r} \right)^{\frac{1}{1+n}} \quad (3.22a)$$

$$\varepsilon_{ij} = k_2 \left(\frac{J}{r} \right)^{\frac{n}{1+n}}, \quad (3.22b)$$

u nichž k_1 a k_2 jsou konstanty úměrnosti a n se v Ramberg-Osgoodově rovnici nazývá koeficient deformačního zpevnění. V oblasti LELM platí, že $n = 1$ a rov. 3.22 tak předpovídá lineárně elastickou singularitu $1/\sqrt{r}$. Vhodnou aplikací okrajových podmínek lze získat skutečné rozložení napjatosti a deformace, které označujeme jako HRR singularitu,

pojmenovanou po Hutchinsonovi, Riceovi a Rosenbergovi. Je zřejmé, že J popisuje amplitudu HRR singularity, stejně jako součinitel intenzity K popisuje amplitudu lineárně elastické singularity. Proto můžeme říct, že J integrál poskytuje úplný popis napjatosti v rámci plastické zóny na čele trhliny a lze ho uvažovat jako parametr napětový [1].

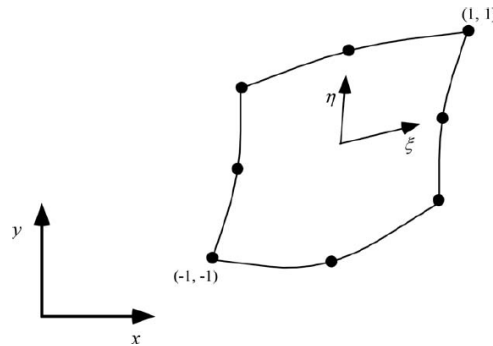
3.3. Numerické metody v lomové mechanice

Jak již bylo několikrát zmíněno, při výpočtech LELM a EPLM se určuje parametr šíření trhliny, který se dále porovnává s jeho kritickou hodnotou určenou z experimentů a to za účelem určení chování trhliny. Parametry zmíněné v této kapitole (G , K , δ a J) se při značném úsilí dají určit analyticky, ale výpočty bývají mnohdy velmi složité i pro jednoduché úlohy. Použitím numerických metod je možné určit hodnoty výše zmiňovaných parametrů mnohem přímočařeji a to i pro praktické problémy. Programy pro výpočty metodou konečných prvků jsou velmi dostupné a mohou být mimo jiné použity právě pro výpočty hodnot parametrů šíření trhliny. Jedním z takových programů je i program ANSYS, ve kterém jsou zpracovávány výpočty právě této diplomové práce. Přestože nové postupy a implementace do těchto programů jsou stále ve vývoji, při drobné adaptaci sítě se dají použít i klasické elementy. Například výpočty J -integrálů a K faktorů jsou již v těchto programech standardem. Kromě metod MKP lze použít i metody hraničních prvků (MHP), ale programy využívající tyto metody nejsou tak dostupné, jako je tomu u metody konečných prvků [5].

3.3.1. Metoda konečných prvků

Při použití metody konečných prvků se zkoumaná oblast diskretizuje na malé podoblasti označované jako prvky nebo též elementy. Prvků existuje několik druhů, od jednodimenzionálních prutových prvků, přes dvoudimenzionální rovinné prvky po třídimenzionální tělesa. Jednotlivé prvky jsou mezi sebou spojeny v bodech zvaných uzly (nody) a v těchto uzlech je prosazována spojitost posuvů [1].

Uvnitř každého prvku se zavádí tzv. isoparamterický lokální souřadný systém (ξ, η) , v němž se souřadnice mění od -1 do 1 , jak je zobrazeno na obr. 3.9, kde má levý dolní uzel souřadnice $(-1, -1)$ a pravý horní uzel $(1, 1)$. Všimněte si, že tento lokální systém nemusí být ortogonální [1].



Obrázek 3.9: Lokální a globální souřadný systém pro dvoudimenzionální prvek [1].

3.3. NUMERICKÉ METODY V LOMOVÉ MECHANICE

Uvažujeme-li bod uvnitř prvku, pak jeho globální souřadnice jsou získány pomocí následujících vztahů

$$x = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta)x_i \quad (3.23a)$$

$$y = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta)y_i, \quad (3.23b)$$

kde n je počet uzlů v prvku a N_i je tvarová funkce odpovídající uzlu i , jehož souřadnice jsou (x_i, y_i) v globálním souřadném systému a (ξ_i, η_i) v parametrickém souřadném systému [1].

Tvarové funkce jsou polynomy, které pomáhají kvantifikovat pole veličiny uvnitř elementu. Nabývají hodnot 1 v uzlu i , zatímco v ostatních uzlech nabývají hodnot 0. Stupeň polynomu závisí na množství prvků uvnitř elementu. Například pro element, který má uzly pouze v rozích, bude N_i lineární. Pokud budou hrany elementu rozděleny jedním elementem, jako je tomu například na obr. 3.9, pak je třeba užít kvadratických interpolací [1].

Rovnice posuvů mají následující podobu

$$u = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta)u_i \quad (3.24a)$$

$$v = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta)v_i, \quad (3.24b)$$

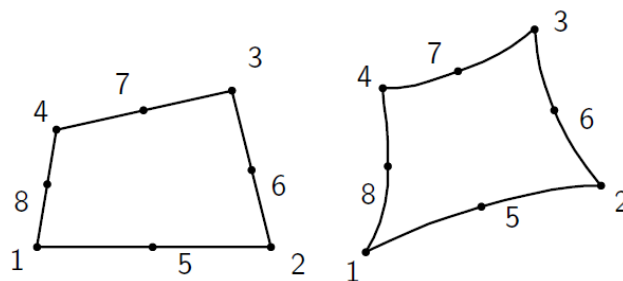
kde (u_i, v_i) jsou nodální posuvy v závislosti na x a y . Poměrné deformace lze určit derivací posuvů $\varepsilon = \partial u$.

3.3.2. Použití vhodných prvků

Při řešení problémů z lomové mechaniky je klíčem k úspěchu správné vymodelování tělesa včetně oblasti okolo trhliny a následné určení požadovaných parametrů. Aby bylo dosaženo co možná nejpřesnějších výsledků, je třeba zvolit správné prvky. Pro dvoudimenzionální úlohy je doporučeno využít prvků vyšších řádů s 8 uzly, pro třídimeznionální úlohy pak prvky vyšších řádů s 20 uzly. V programu ANSYS lze takové prvky najít pod označením *PLANE183* a *SOLID186*, u obou těchto prvků dochází ke kvadratické interpolaci nodálních posuvů. To znamená, že přestože mají hrany prvků původně charakter úseček, po deformaci mohou nabývat tvarů parabolických (viz. obr. 3.10). Přetvoření, která se určují jako derivace posuvů, jsou v lokálním souřadném systému prvku víceméně lineární a stejně tak i napětí, která jsou přímo úměrná přetvořením. Navíc lze pomocí těchto prvků provádět elasto-plastické výpočty, podporují též hyperelasticitu, velké deformace, napětová zpevnění či creep. Jejich využití je tedy široké i mimo oblasti lomové mechaniky [5, 9].

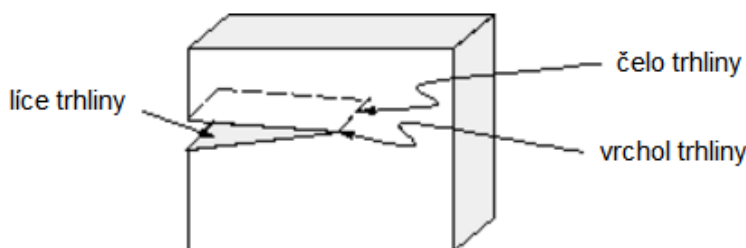
3.3.3. Tvorba sítě okolo trhliny

Tvorba sítě kolem trhliny je nejdůležitější součástí modelů s trhlinou a je nezbytná pro správné určení parametrů popisujících chování trhliny. Ve dvoudimenzionálních úlohách



Obrázek 3.10: Deformace osmi-uzlových prvků s kvadratickými bázovými funkcemi [5]

se místo styku lící trhliny nazývá vrchol, ve třídimenzionálních úlohách pak čelo trhliny. Toto je znázorněno na obr. 3.11. Při tvorbě sítě se uzly na horní a dolní líci trhliny mohou



Obrázek 3.11: Čelo a vrchol trhliny. [9]

nacházet na stejných souřadnicích, nesmí však být spojené.

Pokud je materiál uvažován jako lineárně elastický, pak bylo v této kapitole ukázáno, že se napětí mění v závislosti na $1/\sqrt{r}$ a deformace v závislosti na \sqrt{r} , kde r je vzdálenost od čela trhliny (viz. obr. 3.4). Velmi velké gradienty napětí na čele trhliny mohou být popsány pouze velmi malými elementy, nicméně bylo zjištěno, že zjemňování sítě nevede k její konvergenci. Důvodem této nepřijatelné závislosti sítě je singularita okolo trhliny, která nemůže být popsána běžnými bázovými funkcemi elementů.

Jedním řešením může být změna bázových funkcí elementů tak, aby tuto singularitu dokázali postihnout. Výsledkem jsou pak tzv. *obohacené prvky*, které jsou použitelné pouze v okolí trhliny. Dalším řešením může být změna variačního principu, který je základem MKP. To vede k tzv. *hybridním prvkům*, u kterých jsou napětí neznámými uzlovými proměnnými. Použití těchto prvků však mnohdy vyžaduje implementaci těchto prvků a nových postupů s nimi spojených, což nemusí být vždy proveditelné u komerčních MKP řešičů [5].

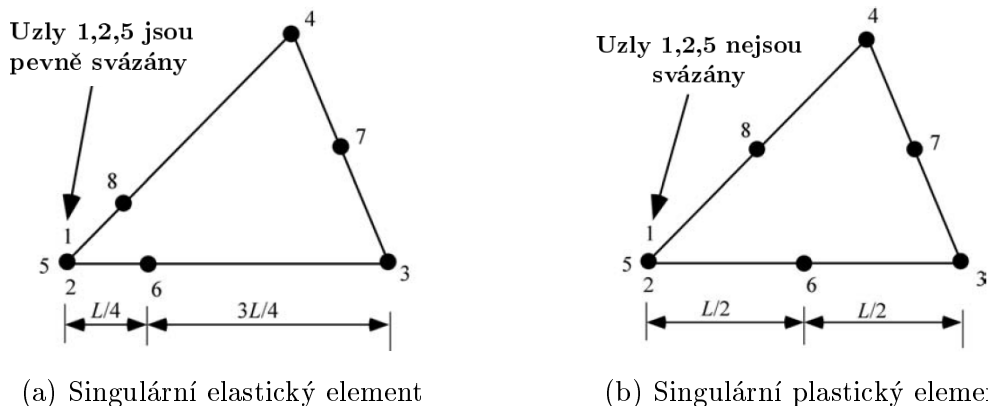
Naštěstí je zde i možnost, jak napětí okolo čela trhliny spočítat poměrně velmi přesně s využitím pouze drobné úpravy klasických prvků. Tyto prvky se označují jako tzv. *singulární prvky* [9] a vznikají tak, že se klasický osmi-uzlový čtyřúhelník (resp. šestistěn) degeneruje na trojúhelník (resp. klín) a meziuzly se přesunou k uzlu na vrcholu nebo čele trhliny tak, že rozdělí hrany prvku v poměru 1 : 3. Dále se do vrcholu či čela trhliny shlukují uzly (např. I,P,L na obr. 3.14a), které zabírají stejné místo v prostoru.

Při řešení problémů LELM jsou tyto uzly pevně svázány a výše zmíněné modifikace provedené na prvku v něm vytváří umělé singularity, které jsou téměř shodné s teoretickým průběhem singularity $1/\sqrt{r}$ a vedou tak ke zvýšení přesnosti výpočtů [1, 7].

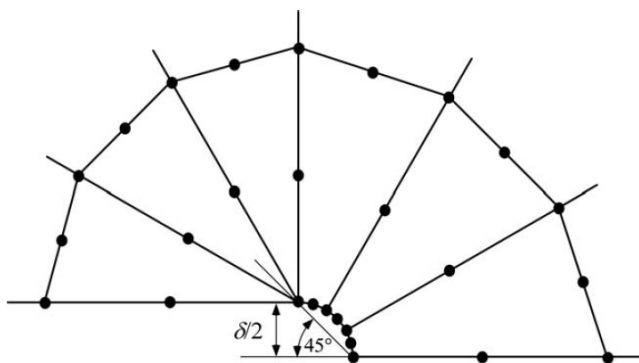
Při tvorbě plastické zóny však singularita $1/\sqrt{r}$ nadále neexistuje a proto je použití elastických singulárních prvků nevhodné pro elasto-plastické problémy. Prvek vykazu-

3.3. NUMERICKÉ METODY V LOMOVÉ MECHANICE

jící požadované vlastnosti pro elasto-plastické výpočty je však velmi podobný prvku pro výpočty elastické. Opět se jedná o degenerovaný čtyřúhelník či šestistěn, avšak uzly ve vrcholu trhliny nejsou pevně svázány a poloha meziuzlů je nezměněna (obr. 5.7). Takto se vytváří umělá singularita $1/r$, která odpovídá skutečné napjatosti na čele trhliny pro plně plastické nezpevňující materiály [1]. Další výhodou těchto elementů je možnost určení parametru δ (CTOD) z deformované sítě. Přestože se původně uzly na čele trhliny nacházely na stejném místě, deformací elementu se od sebe oddělily. Parametr δ tak může být určen z deformovaného tvaru trhliny prostřednictvím metody průsečíku 90 (viz. obr. 3.13).

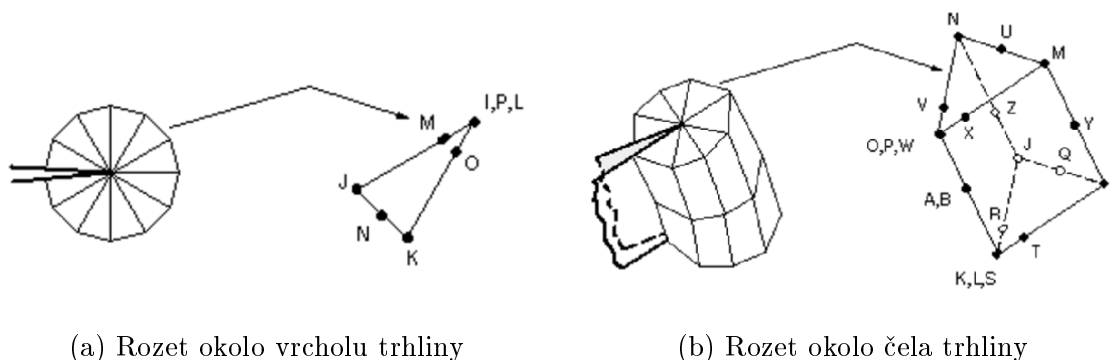


Obrázek 3.12: Elementy vhodné pro použití okolo vrcholu trhliny při elastických nebo elastoplastických výpočtech [1]



Obrázek 3.13: Deformovaný tvar plastických singulárních elementů. Uzly roztahují a tak lze měřit CTOD [1].

Pro většinu problémů je nejefektivnějším řešením tvorby sítě tělesa obsahujícího trhlínu vytvořit kolem jejího čela tzv. rozet (obr. 3.14), kde jsou kolem tohoto čela vyskládány singulární prvky. Dále je vhodné, aby několik prvních řad elementů okolo rozetu tvořilo soustředné kružnice. Tím se vyhneme potížím při volbě kontur pro výpočty parametrů lomové mechaniky. V neposlední řadě je třeba mít na paměti, že v blízkosti trhliny se vyskytují největší gradienty napětí a přetvoření, a proto by síť v těchto místech měla být co nejjemnější [5, 9, 1].



(a) Rozet okolo vrcholu trhliny

(b) Rozet okolo čela trhliny

Obrázek 3.14: Uspořádání singulárních prvků [9]

3.3.4. Model tělesa s trhlinou

Jak již bylo výše zmíněno, při modelování tělesa s trhlinou v programu ANSYS se pro problémy lomové mechaniky doporučují prvky 183 a 186.

Pro 2D úlohy je vhodné při tvorbě sítě využít příkazu `KSCON`, který automaticky vytvoří singulární elementy okolo zvoleného uzlu ve vrcholu trhliny. Další parametry tohoto příkazu umožní uživateli kontrolu nad poloměrem první řady elementů a počtem prvků v obvodovém směru. Obecně pak platí, že pro rozumné výsledky by:

- První řada elementů měla mít poloměr min. $a/8$, kde a je délka trhliny
- V obvodovém směru měl být nejméně jeden prvek každých 30 – 40
- Prvky okolo vrcholu trhliny neměly být deformované a měly tvořit rovnoramenné trojúhelníky [9].

Při modelování 3D úloh není možné použít příkaz `KSCON` a je proto třeba dát si pozor, aby čelo trhliny leželo podél hrany KO (viz. obr. 3.14b). Dále by měla být splněna následující doporučení:

- Pravidla pro určení velikosti elementů jsou stejná jako pro 2D úlohu, navíc by poměr stran v žádném směru neměl přesáhnout 4 : 1
- Pro zakřivená čela trhliny závisí velikost prvků podél tohoto čela na lokální křivosti. Hrubým odhadem by se pro kruhové zakřivení čela měl vyskytovat alespoň jeden prvek na každých 15 – 30.

3.3.5. Výpočty parametrů lomové mechaniky

Hodnoty J -integrálu mohou být určeny numericky, tak jak byl definován v části 3.15, tedy podél křivek obklopujících čelo trhliny. Výhodou této metody je její použitelnost jak pro lineární, tak pro nelineární problémy a její nezávislost na integrační cestě (elastické materiály) umožní uživateli určení J ve větší vzdálenosti od čela trhliny, kde je numerická přesnost větší. Pro problémy zahrnující závislost na integrační cestě, jako například plastické deformace či tepelná namáhání, je po drobné úpravě hodnoty J -integrálu ve větších vzdálenostech od čela trhliny taktéž možno určit [1].

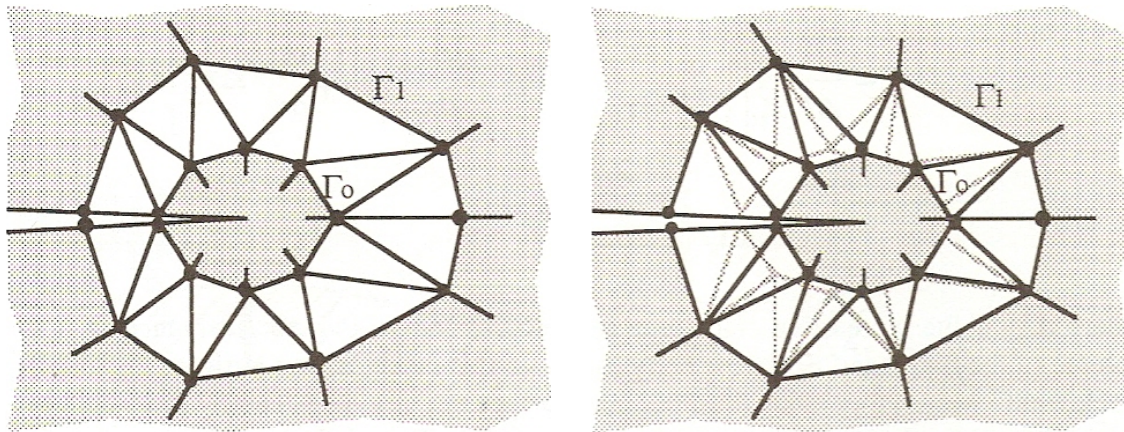
3.3. NUMERICKÉ METODY V LOMOVÉ MECHANICE

Problém však nastává, chceme-li počítat prostorové úlohy. V tomto případě totiž integrace podél křivek přechází na integraci po povrchu, kterou je velmi obtížné numericky formulovat [1].

Novější formulace J však přicházejí s řešením v podobě náhrady křivkového integrálu integrálem plošným pro dvoudimenzionální úlohy a náhradou integrace povrchů integrací objemů pro trojrozměrné úlohy. Navíc tyto úpravy dávají mnohem lepší výsledky a jsou snáze implementovatelné do numerické podoby. Prvním takovým přístupem byla derivace matice tuhosti u metody virtuálního prodloužení trhliny (dále VCE) [1]. Tento přístup byl následně několikrát upraven a vylepšen, čímž se stal velmi dostupným a používaným řešením při výpočtech parametrů lomové mechaniky.

VCE metoda

Základní myšlenkou přístupu VCE je fakt, že rychlost šíření trhliny (tedy změnu energie) lze spočítat ve dvou krocích jako energii tělesa s trhlinou délky a a následné porovnání se stejným tělesem s trhlinou o velikosti $a + \Delta a$. Namísto dvojnásobné analýzy celého tělesa s drobným rozdílem délky trhliny Δa , lze rychlost šíření trhliny určit z matice tuhosti tak, že se uvažuje pouze malá oblast sítě okolo trhliny, jejíž vnější hranice má zabráněny posuvy a počítá se její vliv na globální matici tuhosti pro trhlinu délky a a $a + \Delta a$. Změna matice tuhosti pak odpovídá rychlosti šíření trhliny. Výhodou je, že není nutné měnit síť celého tělesa, pouze síť ohraničenou křivkami Γ_0 a Γ_1 , jak ukazuje obr. 3.15.



(a) Počáteční stav

(b) Stav po virtuálním prodloužení trhliny

Obrázek 3.15: Virtuální prodloužení trhliny. Elementy mezi Γ_0 a Γ_1 jsou deformované aby postihli přírůstek trhliny. [1]

Je rovněž prokázáno, že rychlost šíření trhliny určená pomocí tohoto přístupu odpovídá hodnotám J -integrálů a je nezávislá na volbě vnitřních hranic Γ_0 a vnějších hranic Γ_1 . Nevýhodou je těžkopádná numerická formulace této metody a také její nevhodnost použití pro tepelná namáhání.

Tento postup upravil následně deLorenzi, díky němuž není tato metoda aplikovatelná pouze pro MKP řešení a navíc nadále není třeba užití diferenciálních numerických metod [5, 1].

J-integrál

Shih formuloval integrální postup, který je základem pro numerické výpočty hodnot J -integrálů. Jeho postup je velmi podobný metodě VCE, je univerzální a může být použit při výpočtech jak kvazistatických a dynamických, tak dokonce termálních analýz elastických, plastických nebo viskoplastických materiálů. Metodu jako takovou lze snadno interpretovat v numerické podobě a její účinnost je velmi dobrá.

Aplikací věty o divergenci dochází ve 2D k úpravě definice původního J -integrálu z křivkového na plošný, který je ohraničen křivkami Γ a tvoří tak uzavřenou plochu Ω . Pro nejjednodušší 2D případ má Shihova formulace pro numerický výpočet následující podobu:

$$J = \int_{\Omega} \left[\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - w \delta_{ij} \right] \frac{\partial q}{\partial x_i} d\Omega, \quad (3.25)$$

kde σ_{ij} je tenzor napětí, u_j je vektor posuvů, w je hustota deformační energie, δ_{ij} je Kroneckerova delta, x_i je označení osy a q je označováno jako tzv. vektor posuvu trhliny a bude podrobněji popsán níže.

Diskretizovaná podoba J -integrálu je pak dána vztahem:

$$J = \sum_{ie=1}^{ne} \left[\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - w \delta_{ij} \right] \frac{\partial q}{\partial x_i} w_{iw} \Omega_{ie}, \quad (3.26)$$

kde ne je počet prvků, které budou integrovány, w_{iw} je váhová funkce a Ω_{ie} je plocha reprezentovaná prvkem ie .

V MKP úlohách je Γ_0 často uvažováno jako čelo trhliny a tedy integrační plocha Ω odpovídá ploše uvnitř Γ_1 . Hranice křivky Γ_1 by se měla shodovat s hranami prvků. Ve všech uzlech uvnitř této plochy je třeba definovat vektor q , který je označován jako vektor posuvu trhliny.

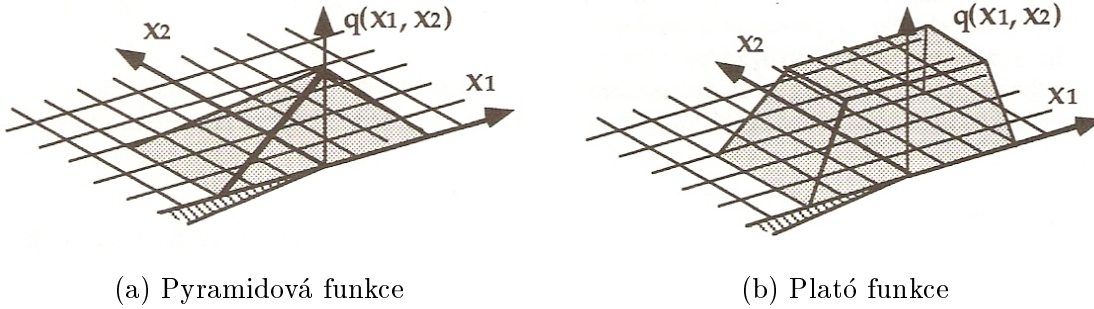
Vytvoříme-li lokální souřadnicový systém začínající na čele trhliny s osou x_1 ve směru předpokládaného rozšíření trhliny, pak směr vektoru q odpovídá právě ose x_1 tohoto lokálního souřadnicového systému. Hodnoty tohoto vektoru pro uzly ležící na vnitřní hranici Γ_0 (která obvykle odpovídá vrcholu trhliny) odpovídají $q = 1$ a $q = 0$ pro uzly ležící na vnější hranici Γ_1 [1]. Shih prokázal, že při výpočtech J -integrálu nezáleží na tvaru funkce q za předpokladu, že výše zmíněné hranice jsou správně popsány. Jednou možností tvaru q je pyramidová funkce, kde je $q = 1$ pouze pro vrchol trhliny a lineárně přechází do $q = 0$ na vnější hranici. Další možností, kterou využívá například program ANSYS je tzv. plátó funkce, která má tvar náhorní plošiny, a u které platí pro všechny uzly uvnitř plochy Ω , kromě uzlů na vnějším okraji, že $q = 1$ (viz. obr. 3.16) [1, 10].

Pro 3D úlohy přechází plošný integrál na integrál objemový, který je opět počítán přes skupinu prvků. Implementace tohoto integrálu je složitější, nicméně princip zůstává podobný jako pro 2D úlohy [10].

Výpočet J -integrálu v programovém prostředí ANSYS probíhá při fázi řešení poté, co se dokončí napěťová analýza a hodnoty se ukládají do souboru s výsledky. Iniciační výpočtu J -integrálu se spouští příkazem CINT a aby výpočet správně proběhl, je nutné nejprve zadat některé esenciální parametry [10].

Vůbec nejdůležitější pro výpočty J -integrálů je vytvoření komponent, které obsahují uzly na čele trhliny a správné přiřazení směru předpokládaného rozšíření trhliny pro tyto

3.3. NUMERICKÉ METODY V LOMOVÉ MECHANICE



Obrázek 3.16: Příklady q funkcí pro dvourozměrnou úlohu. [1].

uzly. Pro 2D úlohy je situace poměrně jednoduchá, protože je třeba vytvořit pouze jedinou komponentu obsahující uzel na vrcholu trhliny a tomuto uzlu pak přiřadit odpovídající směr. Pro 3D úlohy, zejména pak se zakřiveným čelem trhliny je situace podstatně složitější, protože je třeba definovat všechny uzly podél tohoto čela a z nich pak vytvořit komponenty. Všechny tyto uzly musí být propojené a musí tvořit jedinou křivku. Tato křivka se pak nazývá čelo trhliny. Dále se pro každý jednotlivý uzel musí vytvořit lokální souřadnicový systém na čele trhliny s osou ve směru odpovídající jejímu předpokládanému rozšíření v daném místě a tento parametr pak obdobně jako u 2D úlohy definovat do příkazu CINT.

Pro 2D úlohy je první kontura pro plošnou integraci J -integrálu vyhodnocována pro prvky, které obsahují komponentu s vrcholem trhliny. Druhá kontura je vyhodnocována pro prvky, které jsou přilehlé na první konturu a tento postup je opakován pro všechny další kontury. Pro 3D úlohy je volba kontur pro objemovou integraci vyhodnocována tožně jako pro plošnou integraci 2D úloh. Aby bylo dosaženo správných výsledků, je třeba zajistit, aby žádná kontura nedosáhla volného povrchu tělesa. Na obr. 3.17 je znázorněna síť okolo vrcholu trhliny, na které jsou znázorněny první tři kontury pro plošnou integraci a která zároveň splňuje požadavky přednesené v části 3.3.3.

Součinitelé intenzity napětí

Obdobně jako výpočet J -integrálů, je výpočet součinitelů intenzity napětí založen na plošné integraci pro 2D úlohy a objemové integraci pro 3D úlohy. Metoda určení těchto parametrů se nazývá tzv. interakční integrál.

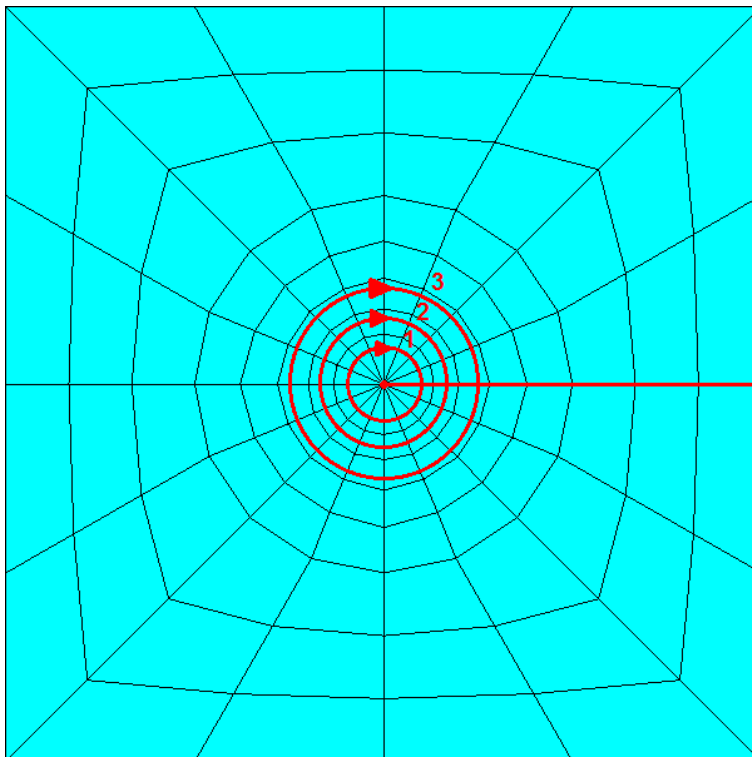
J -integrál pro zatížení trhliny, složený z překrývaného příspěvku zatížení skutečných a pomocných polí, se dá určit v bodě s jako [11]

$$J^S(s) = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} c_1(s) \int_{\Gamma(s)} \left[\frac{1}{2} (\sigma_{ik} + \sigma_{ik}^{pom}) (\varepsilon_{ik} + \varepsilon_{ik}^{pom}) \delta_{lj} - (u_{i,l} + u_{i,l}^{pom}) (\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{pom}) \right] n_j d\Gamma, \quad (3.27)$$

kde $\sigma_{ij}^{pom.}$, $\varepsilon_{ij}^{pom.}$ a $u_i^{pom.}$ jsou pomocné složky polí napětí, poměrných přetvoření a posuvů, c a n jsou normálové jednotkové vektory vztahované k čelu trhliny resp. k integrační křivce Γ .

Interakční integrál je část integrálu $J^S(s)$, která odpovídá interakci mezi skutečnými a pomocnými poli a dá se zapsat jako [11]

$$I(s) = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} c_1(s) \int_{\Gamma(s)} \left[\frac{1}{2} (\sigma_{ik} \varepsilon_{ik}^{pom} + \sigma_{ik}^{pom} \varepsilon_{ik}) \delta_{lj} - u_{i,l} \sigma_{ij}^{pom} - u_{i,l}^{pom} \sigma_{ij} \right] n_j d\Gamma. \quad (3.28)$$



Obrázek 3.17: Příklady kontur pro plošnou integraci 2D úlohy, jak je volí program ANSYS.

Aplikací věty o divergenci a spolu s podmínkami pomocných polí se rov. 3.28 upraví do podoby vhodné pro MKP použití [11].

Chceme-li pak z interakčního integrálu zjistit hodnoty součinitelů intenzity napětí, obdobně jako vztah mezi G a K (rov. 3.14), lze interakční integrál vyjádřit pomocí K následovně

$$I(s) = \frac{2}{E'}(K_I K_I^{pom} + K_{II} K_{II}^{pom}) + \frac{1}{G_s} K_{III} K_{III}^{pom}, \quad (3.29)$$

kde $E' = E$ pro rovinnou napjatost, $E' = \frac{E}{1 - \mu^2}$ pro rovinnou deformaci, G_s je modul pružnosti ve smyku a μ je Poissonova konstanta. Substitucí $K_I^{pom} = 1$ a $K_{II}^{pom} = K_{III}^{pom} = 0$ do rov. 3.29 lze získat hodnotu $K_I(s)$ z interakčního integrálu $I(s)$. Obdobně lze z rov. 3.29 určit K_{II} a K_{III} dosazením $K_{II}^{pom} = 1$ a $K_I^{pom} = K_{III}^{pom} = 0$, resp. $K_{III}^{pom} = 1$ a $K_I^{pom} = K_{II}^{pom} = 0$ [11].

V porovnání s klasickou metodou extrapolací posuvů nabízí metoda interakčních integrálů přesnější výsledky, menší nároky na velikost sítě a hlavně jednoduchost použití [10]. V programu ANSYS se pro výpočty součinitelů intenzity napětí využívá, obdobně jako pro výpočty J -integrálů, příkazu CINT.

Samotná realizace je pak úplně stejná jako v případě realizace J -integrálu – uživatel musí vytvořit komponenty obsahující všechny uzly na čele trhliny a přiřadit jim směr předpokládaného rozšíření trhliny. Samotný výpočet faktorů intenzity napětí v programovém prostředí ANSYS probíhá ve fázi řešení poté, co se dokončí napěťová analýza a hodnoty se ukládají do souboru s výsledky [10].

4. Komplexní analýza problému

Pod touto analýzou si lze představit jakési „desatera“ potřebných dílčích analýz, vedoucích k plnohodnotnému a věrohodnému řešení problému. Komplexní analýza je obsahově nejpodstatnější část expertízy správného vyřešení expertního problému a proto by k ní mělo být přistupováno velmi zodpovědně [13]. První tři dílčí analýzy tohoto „desatera“ již byly zpracovány a popsány v kap. 2 a zde již opakovány nebudou. Analýzy následující na výše zmíněné tři jsou:

4. **Analýza nadřazených restrikcí:** Vzhledem k tomu, že se jedná o diplomovou práci, nejdůležitější omezení se vztahují na její obsahovou formu, formální náležitosti, grafickou a stylistickou úpravu atp.

Zadavatelem byla zadána geometrie vzorku, který byl zmíněn v kap. 2 a bude podrobněji popsán v kap. 5. Geometrie tohoto vzorku byla zadána fixně tak, jak byla použita při reálných experimentech. Při výrobě vzorku jsem se souhlasem zadavatele upravil pouze geometrii vrubu za účelem zjednodušení tvorby modelu. U vzorku byl požadován lineárně-elastický a izotropní model materiálu odpovídající oceli, avšak konkrétní materiálové charakteristiky nebyly nijak specifitěji zadány. Zatížení vzorku bylo zadáno fixně a bude popsáno v následující kapitole.

Při řešení práce jsem omezen na využití programu ANSYS. Z právního hlediska musí uživatel při užívání komerčních softwarů využívat pouze legálních licencí takového softwaru. Tyto legální licence bohužel nevlastním, takže jsem byl nucen při práci využít školních počítačů, na nichž jsou tyto licence dostupné. Školní počítače však mají slabou hardwarovou výbavu a výpočty jsou proto časově náročnější.

Celá práce navíc musí být zpracována, svázána a odevzdána nejpozději do 26. května 2017.

5. **Analýza možností využití informačních zdrojů:** Vedoucí a zadavatel této diplomové práce pí. doc. ing. Jana Horníková, Ph.D., spolu s pány prof. RNDr. Pavlem Šanderou, CSc. a prof. RNDr. Jaroslavem Pokludou, CSc. se již problému smykově zatížených trhlin v několika svých pracích věnovali, nebo jim dohlíželi a právě tyto práce a znalosti výše zmíněných osob se ukázaly býti velmi cenným zdrojem informací, na nichž jsem mohl položit základy své práce. Dalším cenným zdrojem se ukázala být kniha T.L. Andersona s názvem *Fracture mechanics* [1], v níž jsou dopodrobna a uceleně popsány základy lomové mechaniky. Navíc je část této knihy také věnována řešení problémů metodou MKP. V neposlední řadě se jako neocenitelný zdroj informací dá označit obecně internet, kde se dají informace získávat mnohdy snadněji a rychleji než získáváním těchto informací v knihách či od osoby znalé daného tématu.

Během několika desetiletí od vzniku lomové mechaniky se stal tento obor respektovaným a přinesl řadu ucelených konceptů a teorií, které byly popsány v kap. 3. V dnešní době, kdy jsou počítače rok od roku výkonnější je možné tyto teorie převést do numerické podoby a například pomocí metod MKP pak určovat parametry lomové mechaniky mnohem efektivněji a daleko za hranice použitelnosti analytických odvození a výpočtů. Vzhledem k těmto poznatkům lze říci, že problém zpracováváný v této diplomové práci je řešitelný, protože existují a jsou k dispozici takové

počítače s takovými softwary, na nichž jsou matematické teorie a metody vedoucí k řešení problému realizovatelné.

6. **Analýza stupně ostrosti problému:** Problém se označuje jako ostrý za předpokladu, že je možné dostatečně přesně vymezit všechny kroky vedoucí k jeho řešení [13] – v rámci této diplomové práce není problém tyto kroky poměrně přesně vymezit. Motivace zadavatele, formulace problémové situace, cíle řešení problému již byly poměrně dopodrobna popsány. Volba metody řešení, vstupní údaje do algoritmů, nutnost použití konkrétního SW a HW bylo popsáno výše a vše to spadá pod nadřazené restriktce. Z toho lze vyvodit, že problém je **ostrý**.
7. **Vymezení hranic problému:** Trhliny vyskytující se na namáhaných součástech či konstrukcích bývají zřídka dokonalé rovinné a vystavené pouze jednoosým stavům napjatosti. Tyto faktory však vedou ke vzniku smíšených zátěžných módů na danou trhlinu. Smykové módy II a III nejsou popsány tak dokonale jako je tomu u módu I. V reálných tělesech se mohou vyskytovat trhliny vyhnuté, zakřivené či dokonce zalomené, každá trhlinka jinak dlouhá a jinak zatížená. Zatížené součásti a konstrukce mohou být z různých materiálů, jinak tepelně zpracovány, jinak vyrobeny atd. Úplné vymezení hranic problému, jímž se zabývá tato diplomová práce, je proto velmi široké a úplné zpracování není jak z časových, tak i například obsahových omezení, která se k této práci vztahují, možné. Proto se práce idealizuje pouze na smykové zatížení tělesa s trhlinou, která je uvažována rovinná, určité délky a , úhlu vyhnutí α a zkoumá se vliv právě těchto parametrů na velikosti lomových parametrů.
8. **Analýza stupně naléhavosti problému:** V roce 1983 byla vytvořena ekonomická studie, zabývající se právě problémy lomové mechaniky. Tato studie odhaduje, že roční náklady spojené s problémy lomu součástí či konstrukcí ve Spojených státech amerických činily v roce 1978 zhruba 119 miliard amerických dolarů, což v té době byly zhruba 4 % hrubého národního produktu. Dále se v této studii odhaduje, že použitím tehdejší technologie a dalším výzkumem v oblasti lomové mechaniky, by se dala výše zmíněná částka snížit o více než polovinu. Od roku 1983 oblast lomové mechaniky urazila velký kus cesty, avšak téma zpracovávané v rámci této práce stále není dokonale prostudováno. Dá se očekávat, že hlubší studium šíření trhlin ve smykových zátěžných módech jistě povede k nějakým, ať již například ekonomickým benefitům.
9. **Analýza možností kooperací:** Práce je zpracovávána pod vedením doc. ing. Jany Horníkové, Ph.D. s odborným konzultantem v podobě prof. RNDr. Pavla Šandery, CSc. Experimentální koncept, na němž práce staví, byl vyvinut na ústavu materiálového inženýrství Erich Schmid v Rakouském Lubnu a model simulující tento test je v rámci této práce zpracováván v programovém prostředí ANSYS.
10. **Analýza možností ověření správnosti řešení:** Vzhledem k praktičtějším posouzení těchto parametrů je požadováno je řešení tohoto modelu použitím výpočtového modelování na úkor experimentů. Lze ověřit, zda vytvořený model dává takové výsledky, které odpovídají teorii přednesené v kap. 3. Tomuto se věnuje celá část kap. 5.

4.1. Systém podstatných veličin $\Sigma(\Omega)$

- **Objekt Ω**

Vzorek s trhlinou zatížený smykem na speciálně vyvinutém testovacím zařízení.

- **Podmnožina S0** – obsahuje veličiny popisující **prvky okolí** objektu

Experimenty na tomto vzorku byly prováděny v laboratorním prostředí při konstantní teplotě a vzdušné vlhkosti na testovacím zařízení, v němž byl vzorek upnut.

- **Podmnožina S1** – obsahuje veličiny popisující **strukturu a topologii** objektu

Testovaný vzorek je 100 mm dlouhá válcová tyč s průměrem $\varnothing d = 25$ mm, v jejímž středu se nachází 6.5 mm hluboký vrub, na jehož čele byla vytvořena obvodová trhlina. Tato trhlina byla vytvořena podél celého obvodu testovaného vzorku, je určité délky a a je vyhnutá o určitý úhel α .

- **Podmnožina S2** – obsahuje veličiny popisující **vazby** objektu k okolí

Vzorek je v určité vzdálenosti od jeho středu upnut v čelistech testovacího zařízení.

- **Podmnožina S3** – obsahuje **aktivační** veličiny

K aktivaci dochází zatížením vzorku, které je způsobeno vzájemným posuvem čelistí testovacího zařízení, v nichž je tento vzorek upnut. Posuv čelistí může být buď řízený, nebo vyvolaný určitou silou.

- **Podmnožina S4** – obsahuje tzv. **ovlivňující** veličiny

Na zatížení trhliny vzorku má vliv její geometrie stejně jako geometrie vzorku, materiál, z kterého byl vzorek vyroben, velikost síly či posuvu vyvíjeného strojem na vzorek a způsob (rozumějte vzdálenost) jeho upnutí na tomto stroji. Nepředpokládá se žádné ovlivnění vzorku teplotou či vlhkostí okolního prostředí.

- **Podmnožina S5** – obsahuje **strukturně-vlastnostní** veličiny

Trhlina se nachází po celém obvodu tělesa. Předpokládá se, že je ostrá, rovinná, určité délky a určitého úhlu vyhnutí. Nachází se na vzorku s určitými materiálovými charakteristikami zatíženého určitou silou či posuvem.

- **Podmnožina S6** – obsahuje **procesní** a **stavové** veličiny

Silovým či deformačním působením stroje na vzorek dochází k zatížení trhliny. Pokud je trhlina nevyhnutá, tak bude podél celého svého čela vystavena pouze čistým nebo smíšeným zátěžným módům II a III.

- **Podmnožina S7** – obsahuje tzv. **projevové** veličiny

V důsledku zatížení trhliny vznikají na jejím čele koncentrace napětí a deformací, které vedou ke vzniku malých či větších oblastí s trvalými plastickými deformacemi.

- **Podmnožina S8** – obsahuje veličiny **důsledkové**

Překročením určité kritické kombinace výše zmíněných napětí a přetvoření dochází na vzorku k lokální poruše, jinými slovy růstu trhliny, což může mít za následek až lom celého vzorku.

Vzhledem k tomu, že cílem je stanovení závislosti lomových parametrů K_i a J na délce trhliny a jejím úhlu vyhnutí, je třeba uvažovat všechny parametry jako deterministické, aby se do výsledků nevnášely odchylky způsobené stochastickým chápáním parametrů.

4.2. Metody řešení problému

Problém řešený v rámci této diplomové práce je z oblasti lomové mechaniky. Požaduje se posouzení vlivu délky a úhlu vyhnutí trhliny na hodnoty parametrů lomové mechaniky. Vzhledem k praktičtějšímu posouzení těchto parametrů je požadováno řešení tohoto modelu použitím výpočtového modelování na úkor experimentů. Výpočtové modelování je možné využít přístupem diferenciálním, který vede k analytické podobě anebo variačním přístupem, který vede na numerické metody (MKP). Velká většina problémů, snad kromě těch nejjednodušších, analyticky řešit nelze a nejinak je tomu v případě problému řešeného v rámci této diplomové práce. Navíc je již v současné době k dispozici takový HW a SW, na němž je tento problém řešitelný a proto bude řešení problému probíhat v programovém prostředí ANSYS, ve kterém se zkoumaný vzorek s trhlinou diskretizuje na konečný počet prvků se svými uzlovými body. Výpočtový algoritmus se pak skládá z těchto kroků:

1. vytvoření systému podstatných veličin
2. tvorba dílčích výpočtových modelů
3. zajišťování vstupních údajů do algoritmů tohoto modelování
4. realizace výpočtů a jejich vyhodnocení.

Vzhledem k tomu, že vstupem do řešení problému jsou vlastnosti okolí, určitá topologie a geometrie objektu, jeho vazby na okolí, aktivace tohoto objektu, ovlivňující a strukturně-vlastnostní veličiny a výstupem z algoritmu a tedy jeho řešením jsou projevy a důsledky, jedná se o problém přímý.

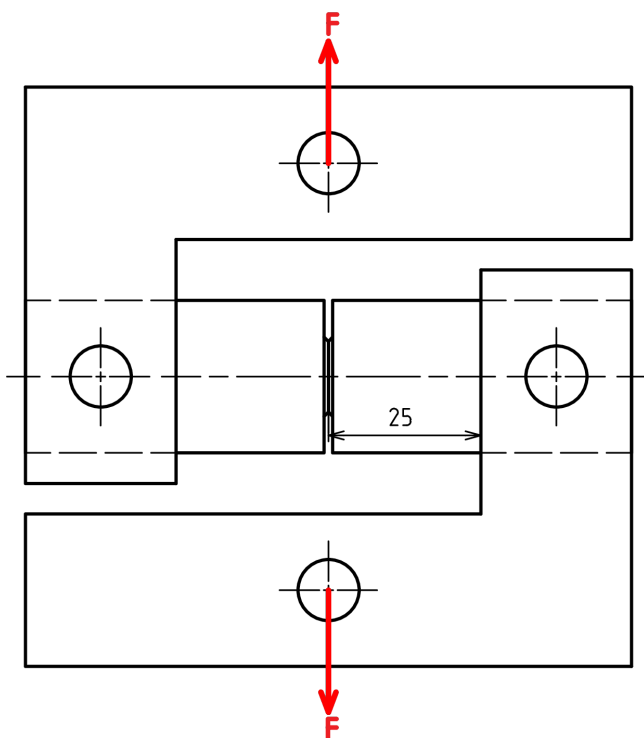
4.3. Množina vstupních údajů do výpočtového algoritmu

Při řešení daného problému je třeba určit geometrii modelu, geometrii trhliny na tomto modelu umístěné a okrajové podmínky vstupující do výpočtu. Rovněž je třeba definovat materiál, ze kterého má být model vytvořen. Důležitá je vhodná volba metody výpočtu a vstupní údaje pro takovou metodu nezbytné (výpočet J -integrálu a K -faktoru, kde musí uživatel definovat uzly na čele trhliny a směr jejího předpokládaného rozšíření) nebo volba matematických operací, které daný výpočet realizují (při velkém množství prvků je v určitých případech vhodnější využít iteračních metod, které nemají tak krvavé nároky na operační paměť jako přímé eliminační metody).

5. Výpočty

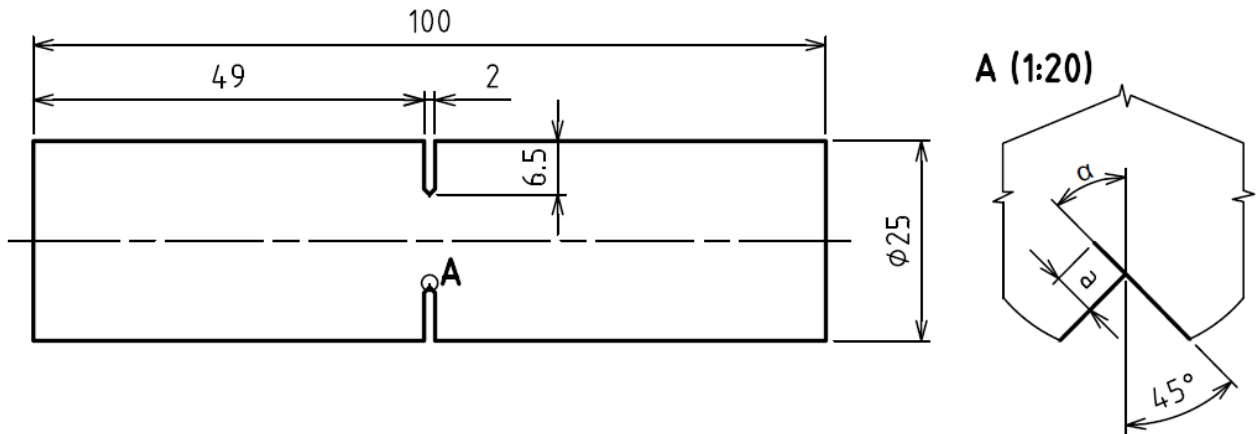
5.1. Předloha

Jako předlohu pro model, který jsem měl za úkol vytvořit v rámci této diplomové práce, abych posoudil vliv geometrie trhliny zatížené ve smykových zátěžných módech na velikost J-integrálu a součinitelů intenzity napětí podél jejího čela, slouží speciální testovací zařízení vyvinuté na ústavu materiálového inženýrství Erich Schmid v Rakouském Lubnu (obr. 5.1), které převádí tahové síly na čistý smyk u zatíženého vzorku s obvodovou trhlinou umístěnou v jeho středu[3]. Na obr. 5.2 je znázorněn vzorek užívaný pro testování na výše zmíněném testovacím zařízení. Jedná se o 100 mm dlouhou válcovou tyč s průměrem $\varnothing d = 25\text{mm}$ v jejímž středu se nachází 6.5mm hluboký vrub, na jehož čele byla vytvořena obvodová trhlina. V rámci této práce budu předpokládat, že trhlina, která byla na vrubu vytvořena, je délky a a je vyhnutá pod úhlem α , jako je znázorněno v detailu A na obr. 5.2. Pro tuto konkrétní testovací konfiguraci platí, že ve středu testovaného vzorku je

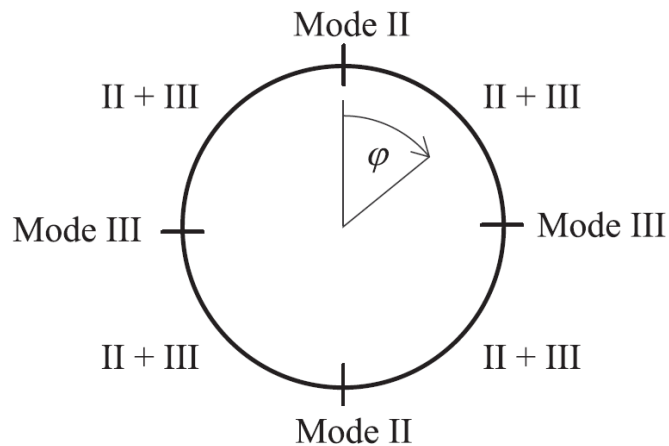


Obrázek 5.1: Zatížení zkušební vzorku [3]

nulový ohybový moment a proto se pro nevyhnutou trhlinu nepředpokládá žádný příspěvek od zatěžovacího módu I [3]. Na obr. 5.3 je pak znázorněn průběh zátěžných módů v závislosti na úhlové souřadnici φ . V horním a dolním bodě, kde $\varphi = 0^\circ$ a $\varphi = 180^\circ$ je trhlina zatížena čistě v módu II, po stranách ($\varphi = 90^\circ$ a $\varphi = 270^\circ$) pak čistě v módu III. V kterémkoliv jiném místě po obvodu je trhlina zatížena kombinací módů II a III [3].



Obrázek 5.2: Geometrie zkušební vzorku. [3]



Obrázek 5.3: Schématické znázornění rozložení zatěžovacích módů podél obvodové trhliny na průřezu testovacího vzorku. [3]

5.2. Model materiálu

V rámci této diplomové práce se uvažuje, že testované vzorky byly vytvořeny z izotropního lineárně-elastického materiálu, který odpovídá oceli s těmito materiálovými charakteristikami:

$$E = 210\,000 \text{ MPa}$$

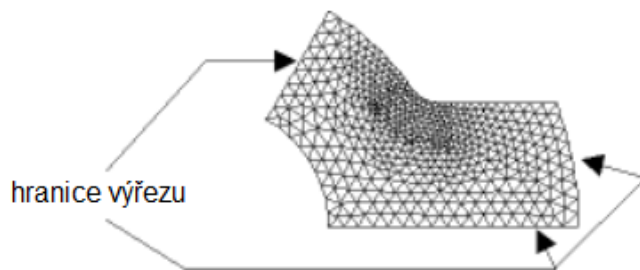
$$\mu = 0.3,$$

Diplomová práce tedy spadá do oblasti lineárně-elastické lomové mechaniky, v níž jsou významnými lomovými parametry rychlost šíření trhliny a součinitel intenzity napětí. První jmenovaný parametr však lze nahradit J -integrálem, jak bylo dokázáno v části 3.15, který je univerzálnější a je použitelný i v oblastech NELM a EPLM.

5.3. Sestavení modelu

V části 3.3 bylo řečeno, že pro získání kvalitních výsledků součinitelů intenzity napětí a J -integrálu musí být síť okolo čela trhliny co nejjemnější. Vezmeme-li v úvahu rozměry tělesa, které jsou řádově v cm a rozměry trhliny, jejíž délka dosahuje řádově desetin mm a vezmeme-li v potaz, že jak bylo řešeno v části 3.3.4, musí první řada prvků okolo čela trhliny mít poloměr minimálně $a/8$, nejlépe však ještě menší a na tuto řadu musí navazovat dostatečný počet řad dalších, aby kontur nutných při výpočtech parametrů lomové mechaniky bylo dostatečné množství, zkušenému čtenáři jistě dojde, že model takového tělesa jako celku je v podstatě nemožné vytvořit tak, aby byl výpočet realizovatelný. Množství prvků, které by takový model obsahoval, by bylo enormní a i velice kvalitní počítače by měly problém takovou úlohu spočítat, nemluvě o čase, který by jediný výpočet trval. Chceme-li dostávat rozumné výsledky v poměru *výpočetní čas:kvalita výsledků*, musíme se tedy ubírat jinou cestou.

Technika, kterou lze v tomto případě využít, se nazývá metoda submodelování. Základní myšlenkou této metody je ignorování zanedbatelně malých oblastí (v našem případě trhliny) celého vzorku nebo konstrukce, které nemají vliv na odezvu modelu tohoto vzorku či konstrukce jako celku. Tento model mívá zpravidla velmi hrubou síť. Následně se z něj vyřízne pouze malá oblast obsahující místo našeho zájmu a protože je tato vyříznutá oblast oproti celkovému modelu malá, může se na ní vytvořit mnohem jemnější síť, jak je zobrazeno na obr. 5.5. Důležitým pojmem jsou tzv. hranice výřezu submodelu¹, které reprezentují hranice, po nichž byl submodel vyříznut z hrubého modelu (obr. 5.4). Je zřejmé, že pokud budeme submodel vyřezávat z 2D tělesa, pak tyto hranice budou křivky, u 3D těles pak plochy. Na hranicích výřezů se u hrubého modelu určují posuvy a ty následně slouží jako okrajové podmínky pro submodel.



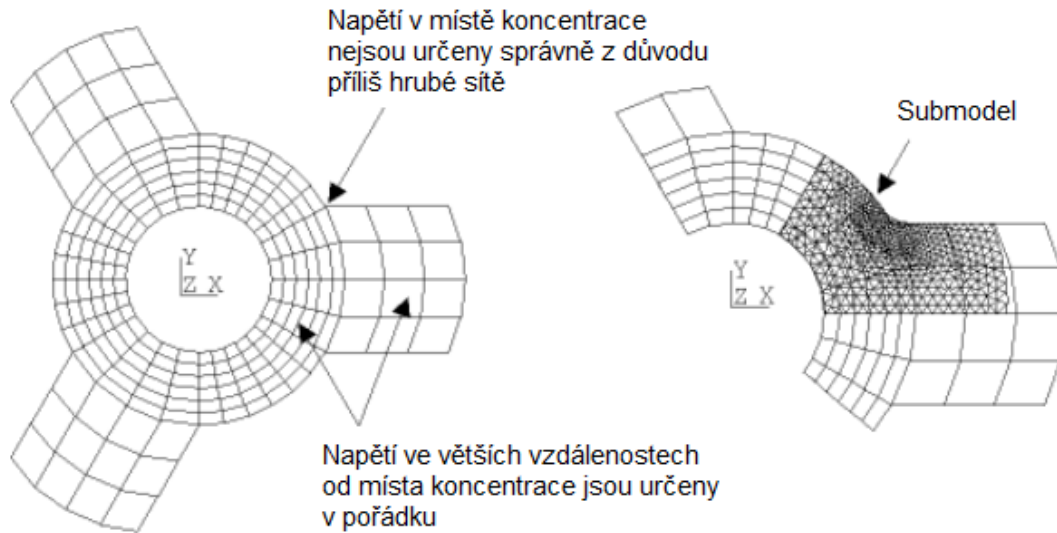
Obrázek 5.4: Hranice podél nichž byl submodel vyříznut z modelu s hrubou sítí. [12]

Submodelování je založeno na Saint-Venantově principu, který říká, že pokud nahradíme skutečnou silovou soustavu působící na těleso jinou, staticky ekvivalentní soustavou (v případě submodelování posuvy na hranicích výřezu), pak napjatost v obou tělesech je stejná s výjimkou míst, v nichž je aplikováno zatížení. V praxi to znamená, že pokud jsou hranice výřezu dostatečně vzdálené od míst koncentrací napětí, pak v těchto místech můžeme čekat rozumné výsledky.

5.3.1. Model s hrubou sítí

S výše zmíněnými poznatky o modelu s hrubou sítí a submodelu je zřejmé, že model s hrubou sítí představuje model celého tělesa, v mém případě vzorku z obr. 5.2, který

¹Z anglického *cut-boundaries*



Obrázek 5.5: Model s hrubou a submodel překrývající část hrubého modelu. [12]

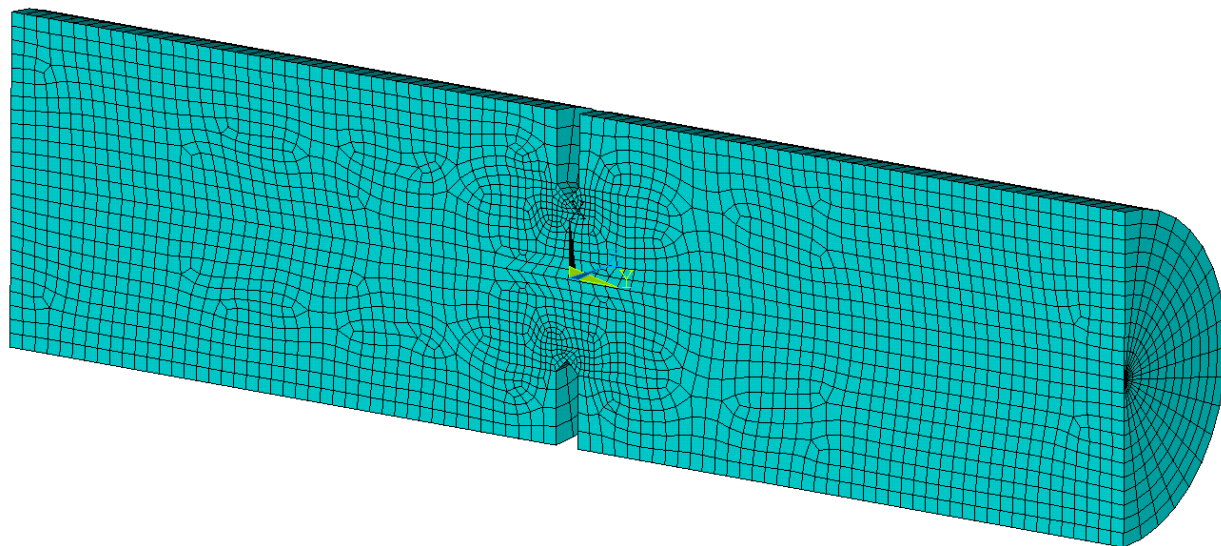
nemusí mít nijak zvlášť kvalitní síť, protože se na něm určují pouze posuvy na hranicích výřezu. Protože se jedná o válcovou tyč s vrubem a trhlinou, modeloval jsem vzorek jako 3D těleso podle zadané geometrie. Při vytváření modelu v programovém prostředí ANSYS jsem nejprve vytvořil síť z rovinných prvků 183, kterou jsem následně rotoval kolem osy rotace, čímž se vytvořil 3D model z prvků 186. Jak bylo uvedeno v části 3.3.2, právě tyto prvky jsou vhodné pro výpočty parametrů lomové mechaniky. Rotací rovinné sítě je zajištěna možnost parametrického zadání délky a úhlu vyhnutí trhliny jak u hrubého modelu, tak u submodelu. Důležité je po rotaci smazat rovinné prvky, které jsou-li zohledněny při výpočtech, vedou ke špatným výsledkům.

Vzhledem k výše zmíněným poznatkům ohledně modelů s hrubou sítí není třeba síť v okolí trhliny nijak výrazně zjemňovat, teoreticky není třeba trhlinu vůbec modelovat. Dále bylo pro urychlení výpočtů využito jedné roviny symetrie. Výsledný model tělesa s trhlinou je znázorněn na obr. 5.6.

Předpokládáme-li souřadný systém zavedený ve středu válcového vzorku, kde osa y směřuje v axiálním směru a osa x a osa z ve směru radiálním, jako je tomu na obr. 5.6, pak byly okrajové podmínky aplikovány, s přihlédnutím k obr. 5.1 na jedné straně vzorku, jako zamezení všech stupňů volnosti pro všechny uzly na povrchu pláště vzorku ve vzdálenosti $y \geq 25$ mm, kde je vzorek pevně uchycen v čelistech testovacího zařízení. Na straně druhé byl pro všechny uzly na povrchu pláště vzorku ve vzdálenosti $y \leq -25$ mm předepsán referenční posuv $u_x = 0.1$ mm, který odpovídá zhruba $F = 20$ kN působící dle obr. 5.1 na vzorek. Po výpočtu statické analýzy modelu s hrubou sítí je třeba uložit databázi s výsledky a geometrií!

5.3.2. Submodel

Při vytváření submodelu je již třeba brát v potaz veškeré poznatky z kapitoly 3.3. Stěžejní oblastí při modelování tělesa s trhlinou je právě oblast v jejím blízkém okolí. Je třeba brát v potaz, jak program dané parametry počítá a zejména při určování parametrů lomové mechaniky je správně sestavená síť v blízkém okolí trhliny klíčem k rozumným



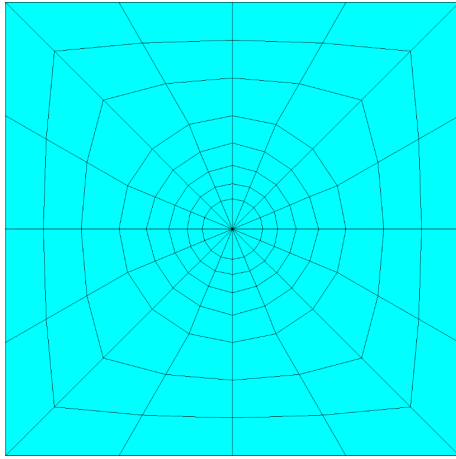
Obrázek 5.6: Model s hrubou sítí vzorku s trhlinou.

výsledkům. Na obr. 3.17 a 5.7a je znázorněno jak by taková síť měla zhruba vypadat – měla by obsahovat singulární prvky s dostatečně malým poloměrem a prvky na ně navazující tvořící soustředné kružnice, které se využijí jako integrační kontury pro výpočty součinitelů intenzity napětí a J -integrálů.

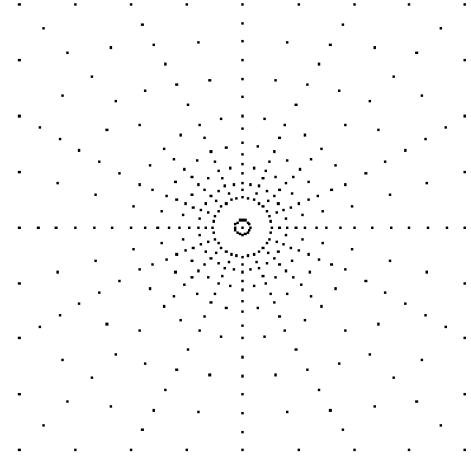
Geometrie

Právě těmito poznatky jsem se řídil při tvorbě submodelu. Ten jsem vytvořil obdobným způsobem, jako v případě modelu s hrubou sítí z prvků 183 a 186. Nejprve jsem vytvořil 2D geometrii submodelu s parametrickou trhlinou, u níž lze měnit její délku a a úhel vyhnutí α (viz. detail A na obr. 5.2). V okolí této trhliny jsem vytvořil síť na těchto parametrech závislou, což v praxi znamená, že při změně parametrů a a α zůstane tato síť stejná, globální síť submodelu se této změně přizpůsobí, stejná však nezůstane. Pro vytvoření singulárních prvků u sítě v okolí čela trhliny jsem využil příkazu `KSCON` a poloměr první řady jsem zadal jako $a/15$. Na obr. 5.7b jde vidět, že meziuzly těchto singulárních prvků jsou skutečně posunuty do $1/4$ délky strany elementu k uzlu na čele trhliny. Tímto je zaručena singularita $1/\sqrt{r}$ pro lineárně elastickou úlohu.

Na tuto síť v okolí čela trhliny se naváže síť zbývajících částí submodelu a ve výsledku tyto sítě tvoří takový průřez submodelu, který se následně využije k vytvoření 3D modelu obdobně jako v případě modelu s hrubou sítí a to konkrétně rotací rovinné sítě okolo osy vzorku, čímž se vytvoří takový prstenec, který je zobrazen na obr. 5.8. Vzhledem k tomu, že příkaz `KSCON` není využitelný pro 3D modelování tak tím, že využijeme rotace rovinné sítě předem vytvořené a obsahující singulární prvky zajistíme, že podél čela obvodové trhliny bude vytvořen rozet singulárních prvků přesně tak, jako je znázorněno na obr. 3.14b. Rovněž je třeba dbát na velikosti prvků a jejich poměry stran. Při rotaci je třeba zvolit kolik prvků po obvodu výsledného tělesa se má vytvořit a čím je menší trhlina, tím více prvků musí uživatel při rotaci v obvodovém směru vytvořit. Například pro trhlina délky $a = 0.2$ mm jsem musel vytvořit jeden prvek každý 1° , zatímco při trhlině nepatrně menší

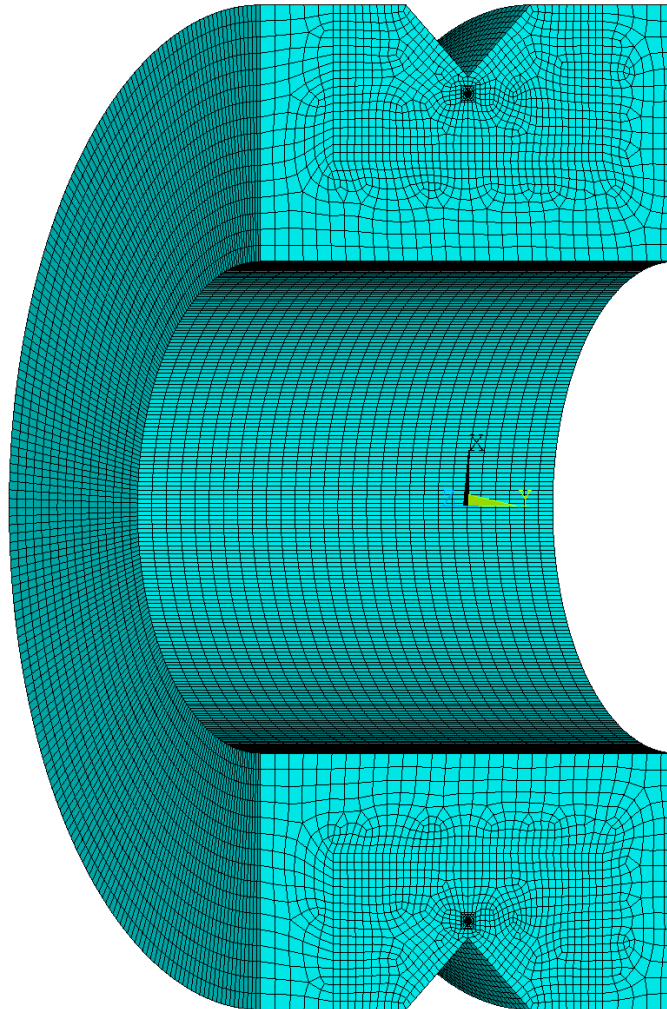


(a) Prvky okolo čela trhliny



(b) Mapa uzlů těchto prvků

Obrázek 5.7: Prvky okolo čela trhliny a rozmístění uzlů v těchto prvcích. Jde vidět, jak je první řada uzlů přiblížená k uzlu na čele trhliny.



Obrázek 5.8: Submodel

5.4. OVĚŘENÍ PLATNOSTI VÝSLEDKŮ ZE SESTROJENÉHO MODELU

$a = 0.1$ mm je třeba již vytvořit 2 prvky na každý 1° , což v praxi znamená dvojnásobný počet prvků celého submodelu, který samozřejmě vede k delším výpočetním časům.

Okrajové podmínky

Jakmile je vytvořen submodel, je nutné definovat okrajové podmínky. Ty se vzhledem k poznatkům řečeným v části 5.3 zadávají jako posuvy určené z hranic výřezů modelu s hrubou sítí. V programovém prostředí ANSYS se k tomu využívá speciální sada příkazů. Nejprve je třeba na submodelu zvolit všechny uzly na hranicích výřezů. Vzhledem k tomu, že se jedná o 3D model, tak se volí všechny uzly na plochách, podél nichž byl submodel vyříznut z modelu hrubého. Následně se na tyto uzly nahrají posuvy z databáze výsledků statické analýzy modelu z hrubou sítí. Pokud na modelu s hrubou sítí byly zadány ještě nějaké jiné okrajové podmínky než silové či deformační, je nutné je definovat i pro submodel a to přesně tak, jak byly definovány pro model původní. Mezi takové podmínky patří například gravitační zrychlení, tepelné namáhání či podmínky symetrie.

Definování uzlů podél čela trhliny

Dalším krokem vedoucím k určení lomových parametrů je vytvoření komponent obsahujících všechny uzly podél čela trhliny. Nejdříve je potřeba definovat všechny uzly podél čela trhliny, čehož se dá docílit mnoha způsoby. Já jsem například zvolil křivky, které odpovídají čelu trhliny a z nich následně separoval příkazem NSLL uzly na nich ležící. Pro každý jednotlivý uzel je pak třeba vytvořit komponentu a pro každý jednotlivý uzel je třeba vytvořit lokální souřadný systém s počátkem právě v tomto uzlu, jehož jedna osa bude směřovat směrem předpokládaného prodloužení trhliny. Ten je u obvodové trhliny, která je uvažována na vzorku (obr. 5.2) takový, že osa x_1 , která tento směr definuje, bude v každém bodě na čele trhliny (rozumějte v každém uzlu) normálou na toto čelo a vyhnutá bude o úhel α , o který je vyhnutá i celá trhlina.

Bez nadsázky lze říct, že správné definování směru předpokládaného prodloužení trhliny je vůbec nejdůležitější vstupní údaj při výpočtech parametrů intenzity napětí a J -integrálů a je třeba důkladně zkontrolovat, zda výsledky lomových parametrů skutečně odpovídají tomu, co od nich lze očekávat. Této problematice se věnuje následující část této práce.

5.4. Ověření platnosti výsledků ze sestrojeného modelu

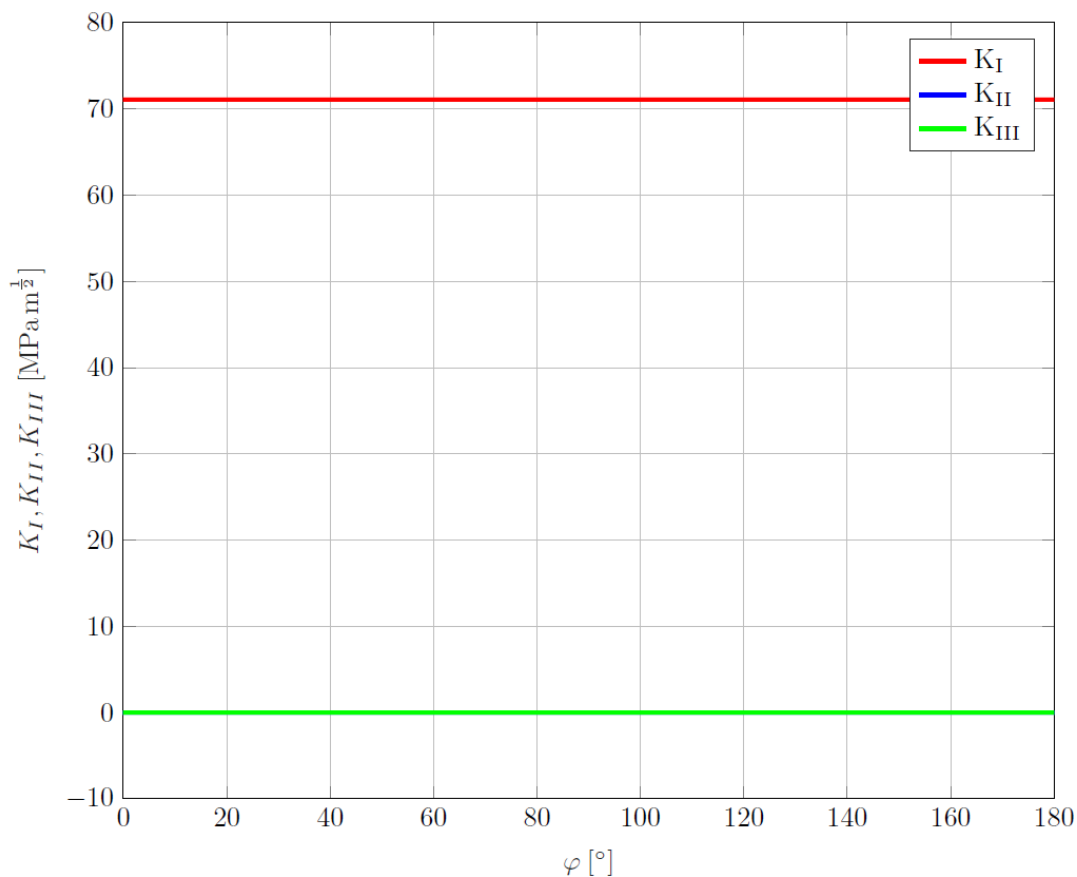
Jakmile je takto připravený model s hrubou sítí a submodel, může se přistoupit k samotným výpočtům.

Jak již bylo zmíněno výše, nejprve se provede statická analýza modelu s hrubou sítí, z níž se určí a uloží do databáze posuvy ve všech uzlech tohoto modelu. Následně se vytvoří submodel, na nějž se zadají nestandardní okrajové podmínky jako v našem případě symetrie, definují se hranice výřezu a z databáze modelu s hrubou sítí se nahrají na tyto hranice posuvy jako zbývající okrajové podmínky. Následně se provede statická analýza submodelu a po ní následuje určení lomových parametrů.

Abych ověřil, zda určené lomové parametry mnou vytvořeného modelu dávají smysl, rozhodl jsem se provést celkem 3 zkušební analýzy vzorku s nevyhnutou trhlinou s cílem ověřit, zda výsledky vypočtených lomových parametrů odpovídají teorii z kap. 3. Jednou takovou analýzou je zatížení vzorku tahem, druhou pak zatížení krutem a třetí pak přímo zatížení smykem.

5.4.1. Zatížení tahem

Zatížení tahem je realizováno jednoduše změnou radiálního posuvu, jak je tomu v případě smykového zatížení, za posuv axiální na všechny uzly představující čelistmi upnutou část vzorku / modelu s hrubou sítí. Referenční hodnotu posuvu jsem zvolil čistě náhodně jako $u_y = 0.1$ mm a tak je simulována tahová zkouška. Zatížíme-li takto vzorek s nevyhnutou trhlinou, bude docházet pouze k jejímu rozevírání, jinými slovy bude zatížena čistě v módu I. Je tedy zřejmé, že lze očekávat vysoké hodnoty K_I a hodnoty K_{II} a K_{III} nulové nebo zanedbatelně malé. Dále je zřejmé, že vzhledem k symetričnosti zatížení lze očekávat konstantní průběh součinitelů intenzity napětí ve všech místech podél čela obvodové trhliny.



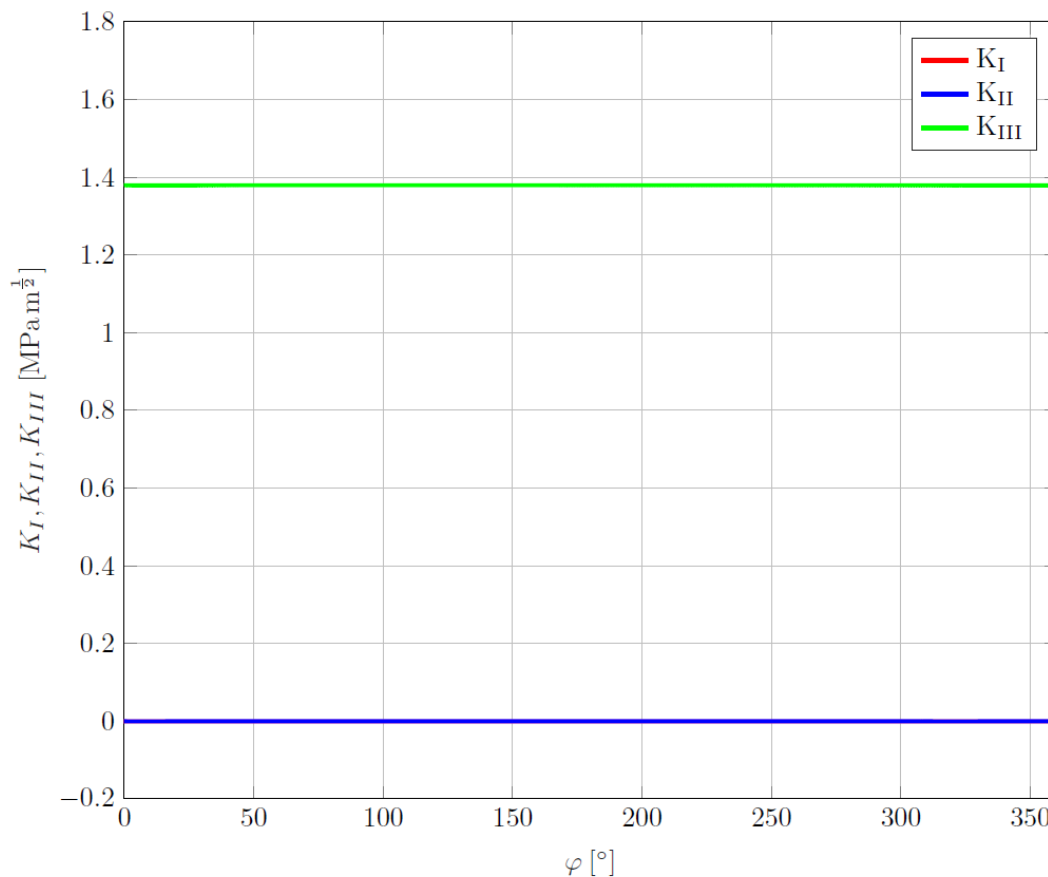
Obrázek 5.9: Průběh K_I , K_{II} a K_{III} podél čela obvodové trhliny v závislosti na úhlu φ při zatížení vzorku tahem.

Na obr. 5.10 je znázorněno, jaké hodnoty K_i byly získány výpočtem v programu ANSYS pro zatížení krutem. Z obrázku je zřejmé, že hodnoty K_i korespondují s tím, co bylo napsáno výše a můžeme tedy výpočet prohlásit za platný.

5.4. OVĚŘENÍ PLATNOSTI VÝSLEDKŮ ZE SESTROJENÉHO MODELU

5.4.2. Zatížení krutem

Realizovat zatížení krutem není tak jednoduché, jako zatížení tahem, protože prvkům 186 nelze předepsat rotace či momenty jako okrajové podmínky. Toho lze docílit jediné tak, že všechny uzly, jimž tyto podmínky chceme předepsat, svážeme s jedním uzlem tzv. *master uzlem*¹. Jedná se o fiktivní prvek, který je v programu ANSYS je označen číslem 184, a který je schopen přenést právě výše zmíněné rotace a momenty na všechny uzly s ním svázané. V praxi to znamená, že zamezíme-li všem uzlům na jedné straně, kde je vzorek upnut v čelistech stroje, všechny stupně volnosti a na druhé straně vzorku uzly svážeme s tímto *master uzlem*, kterému předepíšeme silovou či deformační okrajovou podmínku, simulujeme tím zkoušku krutem, u které je obvodová trhlina zatížena čistě v módu III. Zatížení je stejně jako v případě zatížení tahem symetrické a tedy lze opět očekávat konstantní a relativně vysoké hodnoty K_{III} oproti zanedbatelným nebo nulovým hodnotám K_I a K_{II} . Referenční hodnotu momentu jsem zvolil náhodně jako $M_k = 10\,000\text{ N mm}^{-1}$.



Obrázek 5.10: Průběh K_I , K_{II} a K_{III} podél čela obvodové trhliny v závislosti na úhlu φ při zatížení vzorku krutem.

Z obrázku je patrné, že přesně tak, jak bylo očekáváno, je průběh hodnot K_{III} podél celého čela trhliny konstantní a hodnoty K_I a K_{II} jsou nulové.

¹Z anglického master node

5.4.3. Zatížení smykem

Jakmile jsou ověřené hodnoty lomových parametrů vypočítaných pro namáhání vzorku tahem a krutem, je třeba ověřit, zda i hodnoty u zatížení smykem, které je stěžejní součástí této práce, jsou u vzorku s nevyhnutou trhlinou určovány správně. Realizace tohoto zatížení již byla popsána výše v částech 5.3.1 a 5.3.2, proto není nutné ji znovu opakovat.

Hodnoty K-faktorů

Zatížení aplikované na trhlínu již není symetrické a průběh módů podél čela obvodové trhliny v závislosti na úhlové souřadnici φ je zobrazeno na obr. 5.3. V pracích p. Inž. Žáka [14, 7] a pí. doc. Ing. Jany Horníkové, Ph.D. [3], které se věnovaly právě problematice smykově zatížené nevyhnuté trhliny bylo zjištěno, že průběh jednotlivých součinitelů intenzity napětí podél čela obvodové trhliny lze pro jednotlivé zátěžné módy popsat jedinou rovnicí s předpisem:

$$K_{II}(\varphi) = K_{II}(0^\circ) \cos(\varphi) \quad (5.1a)$$

$$K_{III}(\varphi) = K_{III}(90^\circ) \sin(\varphi). \quad (5.1b)$$

Závislost součinitelů intenzity napětí K_{II} a K_{III} je tedy sinusoida, u níž se hodnoty K_{II} a K_{III} mění v závislosti na úhlové souřadnici φ podél čela obvodové trhliny a maximálních hodnot nabývají v místech $K_{II}(0^\circ)$ a $K_{III}(90^\circ)$, dále pak $K_{II}(180^\circ)$ a $K_{III}(270^\circ)$. Hodnoty $K_{II}(0^\circ)$ a $K_{III}(90^\circ)$, proto můžeme označit jako amplitudy a jsou jedinou proměnnou při určování závislostí $K_{II}(\varphi)$ a $K_{III}(\varphi)$. Tím je myšleno, že budeme-li měnit délku trhliny, či její úhel vyhnutí, předpokládá se, že se u $K_{II}(\varphi)$ a $K_{III}(\varphi)$ bude měnit pouze jejich amplituda.

Na obr. 5.11 jsou znázorněny hodnoty K_i , jak je spočítal program ANSYS. Hodnoty K_i byly spočítány pro jednotlivé uzly podél čela trhliny. Abych ověřil, zda skutečně odpovídají výše zmíněným rov. 5.1a a 5.1b, proložil jsem hodnoty jednotlivých K_i křivkou s daným předpisem v programu Matlab. Bylo zjištěno, že hodnoty K_{II} se dají proložit křivkou

$$K_{II}(\varphi) = a_1 \cos(\varphi),$$

kde koeficient $a_1 = 5.594 \text{MPa m}^{\frac{1}{2}}$ se odlišuje od $K_{II}(0^\circ)$ až na třetím desetinném místě pouze o jednu tisícinu. Proložením hodnot K_{III} funkcí

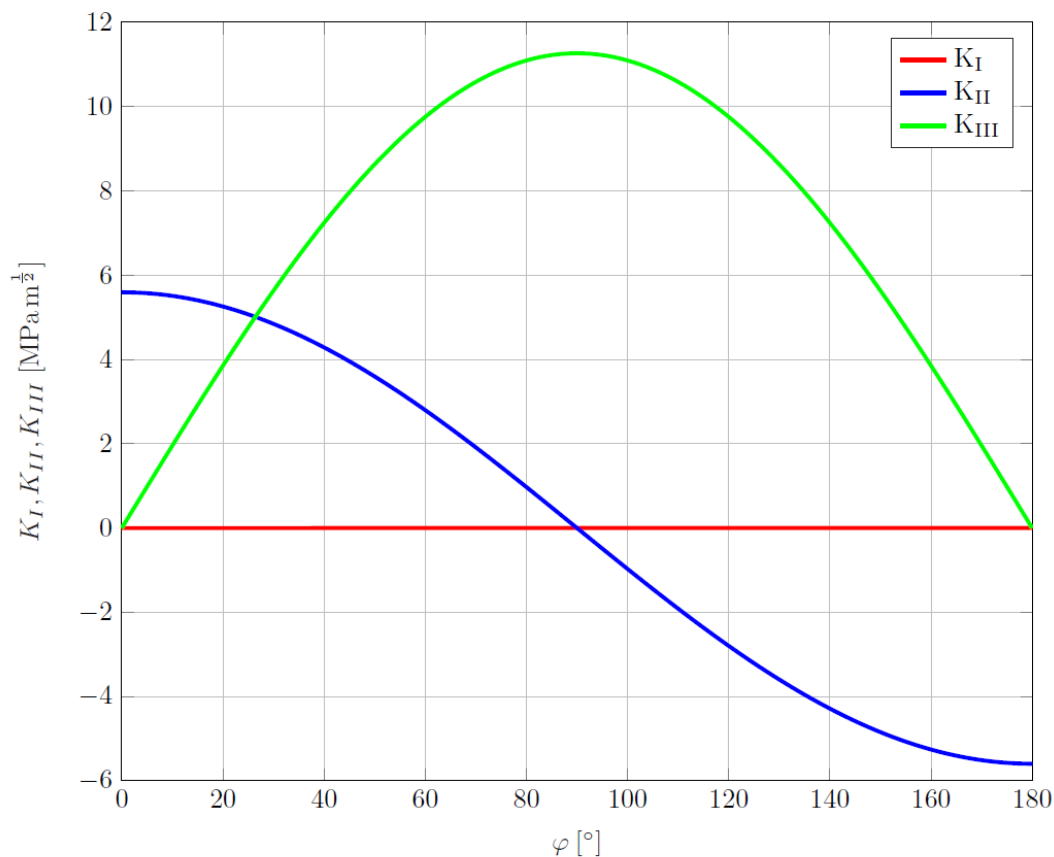
$$K_{III}(\varphi) = a_2 \sin(\varphi),$$

získáme koeficient $a_2 = 11.27 \text{MPa m}^{\frac{1}{2}}$, který se opět poměrně velmi přesně shoduje s hodnotou $K_{III}(90^\circ)$. Přesnost proložení byla programem Matlab definována koeficientem determinace R^2 , který pro obě křivky nabýval hodnot $R^2 = 1$. V praxi to znamená, že každou změnu K_i dokonale popisuje změna úhlu φ u funkce křivky, již se hodnoty K_i prokládají. Můžeme tedy říct, že takto proložené hodnoty K_{II} a K_{III} se shodují s předpisy rov. 5.1a resp. 5.1b.

Hodnoty J-integrálů

Obdobným způsobem lze popsat i průběhy J -integrálů. V části 3.15 bylo ukázáno, že pro lineárně-elastický materiál lze J uvažovat jako rychlost šíření trhliny G , pro kterou platil

5.4. OVĚŘENÍ PLATNOSTI VÝSLEDKŮ ZE SESTROJENÉHO MODELU



Obrázek 5.11: Průběh K_I , K_{II} a K_{III} podél čela nevyhnuté obvodové trhliny v závislosti na úhlu φ při smykovém zatížení vzorku.

princip superpozice jednotlivých zátěžných módů ze vztahů 3.14. Jestliže se tyto poznatky aplikují, lze hodnotu J integrálu popsat následující rovnicí:

$$J = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'} + \frac{K_{III}^2}{2G_s}. \quad (5.2)$$

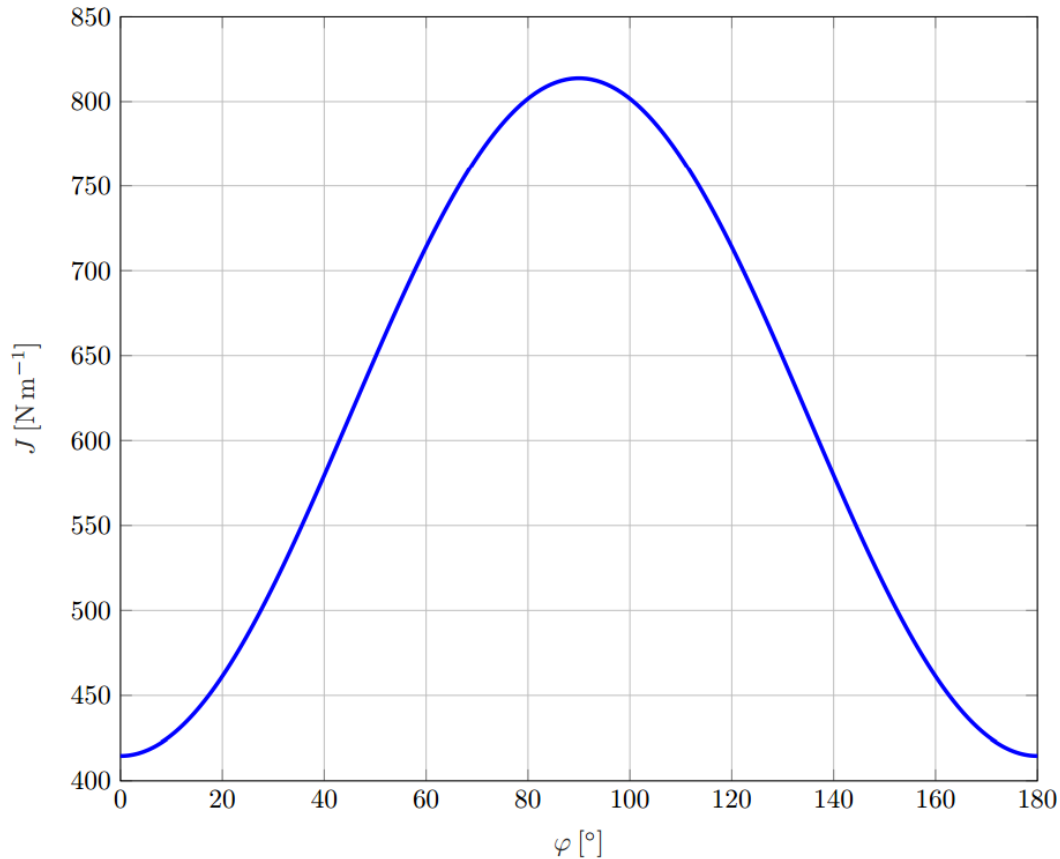
Kombinací této rovnice s rovnicemi 5.1 a s přihlédnutím k faktu, že pro smykově zatížený vzorek s nevyhnutou trhlinou je příspěvek K_I nulový, byl navržen vztah, který nahrazuje určené hodnoty J -integrálu jedinou funkcí [3]:

$$J = J(0^\circ) \cos^2(\varphi) + J(90^\circ) \sin^2(\varphi). \quad (5.3)$$

Na obr. 5.12 jsou znázorněny hodnoty J , jak byly pro tento typ zatížení spočítány programem ANSYS. Tyto hodnoty byly, obdobně jako v případě hodnot K_i , proloženy křivkou s předpisem odpovídajícím rov. 5.3 v programu Matlab. Přesnost proložení popsaná koeficientem determinace byla $R^2 = 1$. Opět tedy lze říct, že změny hodnot J popisuje daný model a tedy i rov. 5.3 dokonale.

5.4.4. Kvalita sítě a její vliv na hodnoty zkoumaných parametrů

Vzhledem k výsledkům z předchozích částí lze tedy říct, že model je s veškerými náležitostmi sestaven správně. To však neznamená, že hodnoty určené programem ANSYS jsou



Obrázek 5.12: Průběh J podél čela nevyhnuté obvodové trhliny v závislosti na úhlu φ při smykovém zatížení vzorku.

správné. Prozatím se totiž posuzovaly pouze z kvalitativního hlediska a bylo zjištěno, že hodnoty lomových parametrů podél čela obvodové odpovídají očekávání pro všechny zkoumané typy zatížení.

Abychom mohli říct, že hodnoty spočítané programem ANSYS jsou skutečně správné a použitelné v praxi, musíme ještě posoudit hledisko kvantitativní. Toho se v MKP úlohách dosáhne posouzením kvality sítě a jejího vlivu na námi zkoumané parametry. U úloh statických analýz obvykle stačí síť zjemňovat, dokud nedosáhneme požadovaného procentuálního rozdílu mezi zkoumanými parametry (obvykle 5%), čímž se rovněž dosáhne optimálního poměru mezi výpočtovým časem a kvalitou výsledků.

Při řešení takto komplexního problému, jako je tato diplomová práce, však nelze s jistotou říci, že kvalita výsledků záleží pouze na jemnosti sítě, která se navíc musí vyšetřovat zvlášť jak pro model s hrubou sítí, tak pro submodel. Dále je navíc třeba si uvědomit, že nejdůležitější oblastí při řešení problémů lomové mechaniky je oblast okolo čela trhliny. Proto je třeba navíc spolu s kvalitou sítě vyšetřit, jaký vliv na hodnoty lomových parametrů má velikost a počet singulárních elementů. Všechny tyto poznatky je pak třeba zkombinovat do co nejvhodnější podoby, aby výsledky byly dostatečně přesné a výpočet netrval zbytečně dlouhou dobu.

Při kvalitativním ověřování výsledků lomových parametrů jsem tedy nejprve zvlášť vyšetřil kvalitu sítě submodelu s referenční velikostí a počtem singulárních elementů ($r = a/15$ a $n = 16$), vztaženou k referenční hrubé síti modelu, kde tento model s hru-

5.4. OVĚŘENÍ PLATNOSTI VÝSLEDKŮ ZE SESTROJENÉHO MODELU

bou sítě měl ve výsledku 18 414 elementů. Bylo zjištěno, že při takovýchto referenčních hodnotách neměla změna kvality sítě submodelu na výsledné hodnoty parametrů lomové mechaniky skoro žádný vliv a rozdíly mezi jednotlivými hodnotami se pohybovaly v desetinách procenta. Pro uvažovanou délku trhliny $a = 0.2$ mm znázorňuje rozdíly hodnot lomových parametrů následující tabulka:

Počet prvků submodelu	$K_{II}(0^\circ)$	$K_{III}(90^\circ)$	max(%)
100 440	169.6	341.7	
300 060	169.3	341.5	0.18%
1 024 020	169.8	341.9	0.35%

Tabulka 5.1: Znázornění kvality sítě submodelu na hodnoty K

Dále jsem provedl obdobnou analýzu pro kvalitu sítě modelu s hrubou sítí. Zde byl naopak referenční submodel o 300 060 prvcích se stejným poloměrem a počtem singulárních elementů jako v předchozím případě, tedy $r = a/15$ a $n = 16$ a rozdíly byly, při stejné délce trhliny $a = 0.2$ mm, již výraznější:

Počet prvků modelu s hr. sítí	$K_{II}(0^\circ)$	$K_{III}(90^\circ)$	max(%)
18 414	165.6	333.5	
49 068	169.3	341.5	2.4%
177 408	170.13	343.1	0.5%

Tabulka 5.2: Znázornění kvality sítě modelu s hrubou sítí na hodnoty K

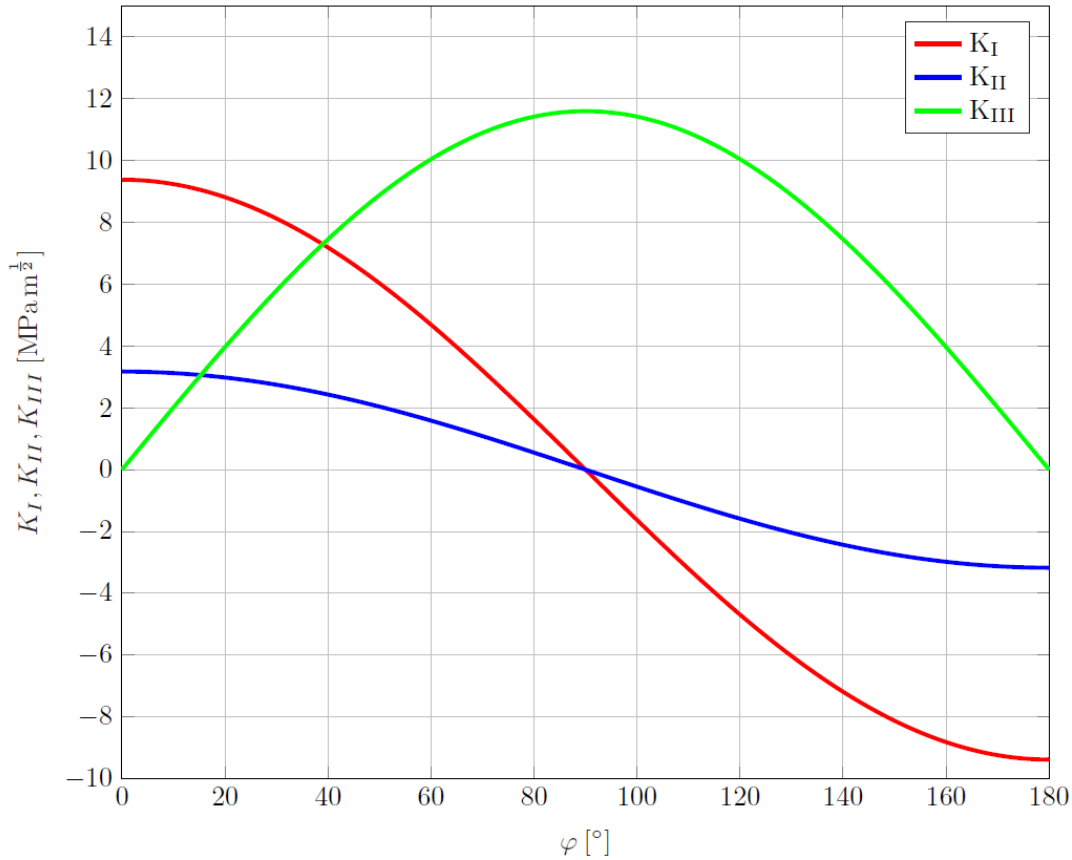
Na závěr jsem ověřil kvalitu sítě v blízkém okolí trhliny. Jak již bylo výše zmíněno, tak do této chvíle byl referenční poloměr singulárních elementů $a/15$ a jejich počet celkem 16. Při takovéto hodnotě poloměru stačí při tvorbě 3D modelu rotací jeden prvek na každý 1° tak, aby byly dodrženy dostatečně malé poměry stran elementů.

Zmenšování poloměru singulárních elementů vede k tomu, že se zmenší i prvky na ně navazující a takovéto celkové zmenšení sítě v okolí trhliny vede k tomu, že je třeba přidávat počty prvků v obvodovém směru při tvorbě 3D sítě tak, aby byl zachován dostatečně malý poměr stran prvků. Konkrétně při poloměru $a/15$ jsem zmiňoval jeden prvek každý 1° , při $a/28$ to jsou 4 prvky na každý 1° , tedy dochází k čtyřnásobnému navýšení celkového počtu prvků submodelu. Zvětšení počtu singulárních elementů v okolí čela trhliny vede k obdobné situaci, navíc se však zvýší počet integrovaných elementů, což vede k několikanásobně delším výpočtům hodnot lomových parametrů. Standardní doba celého výpočtu pro poloměr $a/15$ byla na daném počítači zhruba půl hodiny. Navýšením počtu singulárních elementů ze 16 na 32 se doba výpočtu protáhla až na dvě a půl hodiny. Zmenšením poloměru z $a/10$ na $a/15$, ani přidáním počtu singulárních elementů, se však nedosáhlo nijak výrazného procentuálního rozdílu mezi hodnotami lomových parametrů. Ty byly obdobně jako při vyšetřování kvality sítě submodelu v desetinách procenta.

Vzhledem k tomu, že výpočtový čas se pro jednotlivé modely (vyjma toho s milionem prvků) nijak zvlášť nelišil, rozhodl jsem se, a to hlavně z estetických důvodů, volit střední počty prvků jak pro model s hrubou sítí, tak submodel, pro který jsem navíc zvolil 16 singulárních elementů o poloměru $r = a/15$.

6. Výsledky

Aby bylo možné určit závislosti lomových parametrů na proměnných a a α , je nejprve nutné zjistit, jak se K_i a J budou chovat při vyhnutí trhliny. Proto jsem provedl výpočet s trhlinou délky $a = 0.5$ mm a úhlem vyhnutí $\alpha = 45^\circ$. Tímto výpočtem jsem zjistil, že při změně úhlu α dochází podél čela trhliny k indukci módu I, jehož součinitel intenzity napětí K_I je, stejně jako tomu bylo v případě nevyhnuté trhliny pro součinitele K_{II} a K_{III} , možné popsat sinusoidou. Toto je znázorněno na obr. 6.1.



Obrázek 6.1: Průběh K_I , K_{II} a K_{III} podél čela obvodové trhliny vyhnuté o úhel $\alpha = 45^\circ$ v závislosti na úhlu φ při smykovém zatížení vzorku.

Proložením bodů (K_i) získaných pro jednotlivé uzly podél čela trhliny v programu Matlab byly ověřeny závislosti:

$$K_I(\varphi) = K_I(0^\circ) \cos(\varphi) \quad (6.1a)$$

$$K_{II}(\varphi) = K_{II}(0^\circ) \cos(\varphi) \quad (6.1b)$$

$$K_{III}(\varphi) = K_{III}(90^\circ) \sin(\varphi). \quad (6.1c)$$

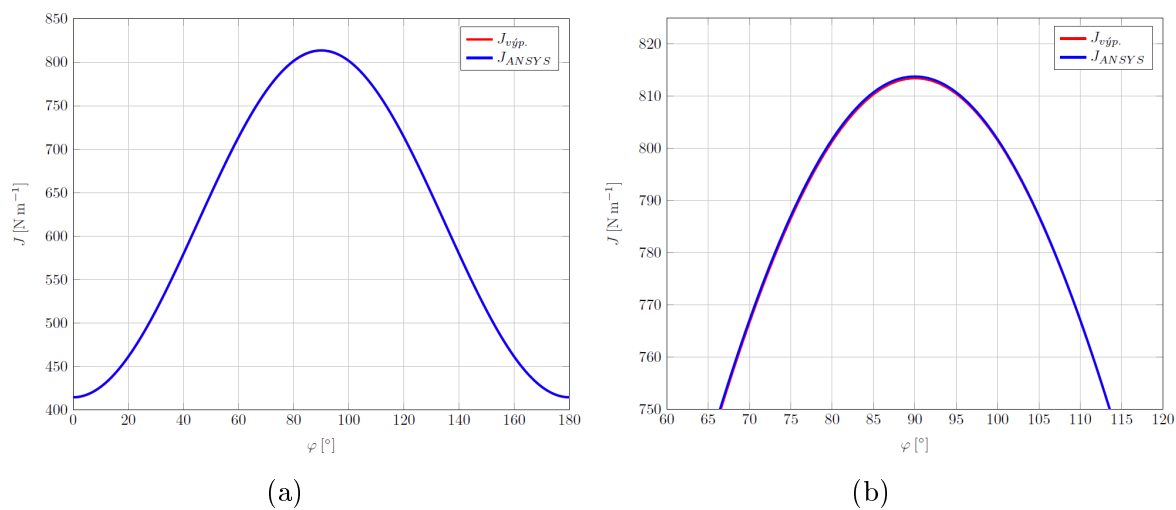
Obdobně jako v případě nevyhnuté trhliny, byla přesnost proložení definována koeficientem determinace R^2 , který pro všechny křivky nabýval hodnot $R^2 = 1$. Dále je s přihlédnutím k obr. 6.1 a rov. 6.1a zřejmé, že v místě $\varphi = 0^\circ$ dosahuje K_I svého maxima. V praxi to znamená, že v tomto místě dochází k největšímu rozevírání trhliny. Od $\varphi = 90^\circ$ přechází hodnoty součinitelů intenzity napětí do záporných hodnot, čímž je naznačeno, že

6.1. ZÁVISLOST DÉLKY TRHLINY A ÚHLU JEJÍHO VYHNUTÍ NA HODNOTY K_I

trhliny přechází z tahové napjatosti do napjatosti tlakové. Z fyzikálního hlediska však interpretace záporných K_I není správná. Pro líce takových trhlín, které leží v poli částečné či úplné tlakové napjatosti, se předpokládá jejich částečné nebo úplné uzavření a nemožnost vzájemné penetrace. Vzniká zde tedy plošný kontakt, který v praxi pozmění hodnoty nebo rozložení K_I podél čela takové trhliny. Vzhledem k tomu, že pro tento model nebyl kontakt lící trhliny brán v zřetel, je třeba brát hodnoty $K_I(\varphi > 90^\circ)$ s rezervou [15].

Pro hodnoty J -integrálů vzorku s trhlinou délky $a = 0.5$ mm a úhlu vyhnutí $\alpha = 45^\circ$ platí rov. 5.2 a 5.3 beze změny. To proto, že mód I i mód II lze popsat stejnou funkcí kosinus. Změna se tedy projeví pouze na amplitudě $J(0^\circ)$, nikoliv však v celé rov. 5.3.

Obr. 6.2 jasně demonstruje, že hodnoty J určené objemovou integrací v programu ANSYS a vypočítané pomocí rov. 5.3 a hodnot K_i jsou prakticky totožné.



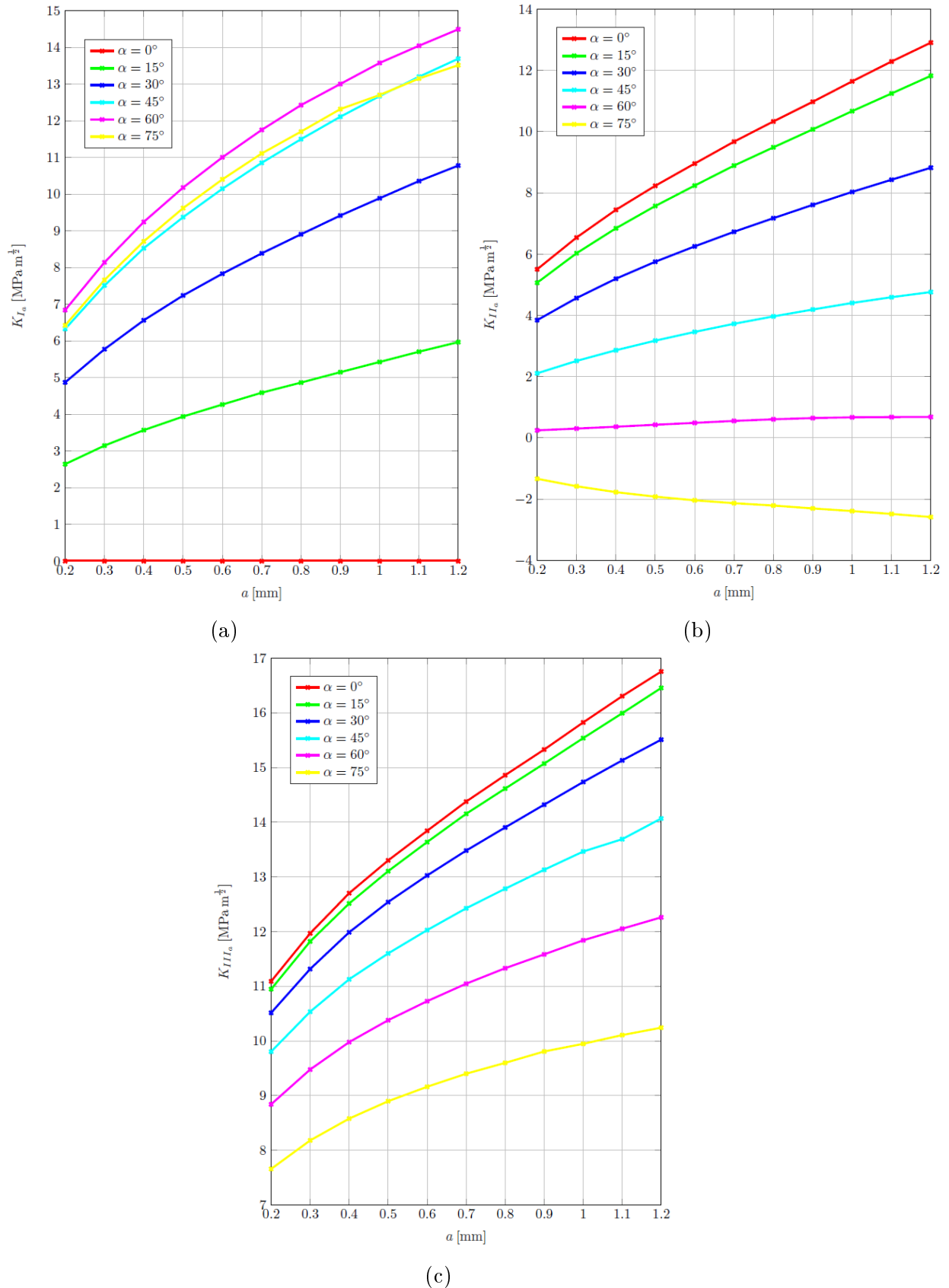
Obrázek 6.2: Obr. 6.2a znázorňuje průběh J podél čela obvodové trhliny vyhnuté o úhel $\alpha = 45^\circ$ v závislosti na úhlu φ při smykovém zatížení vzorku. Červeně jsou znázorněny hodnoty určené z K faktorů, modře pak hodnoty určené pomocí objemové integrace v programu ANSYS. Obr. 6.2b je pouze detail téhož, na němž lze názorněji zobrazit zanedbatelnost rozdílů jednotlivých metod.

Z důvodu jasné závislosti J na K_i se následující část práce budou věnovat pouze změnám hodnot K_i v závislosti na parametrech a a α .

6.1. Závislost délky trhliny a úhlu jejího vyhnutí na hodnoty K_i

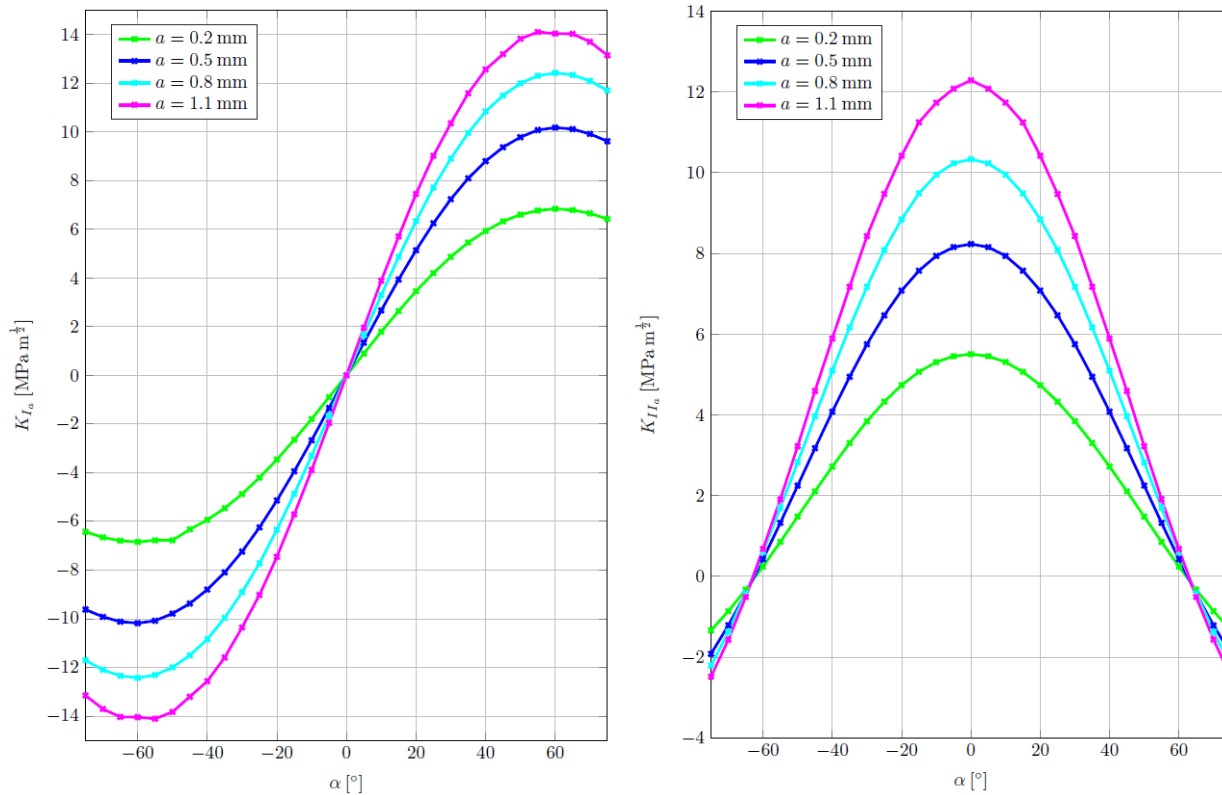
V předchozí části bylo zjištěno, že změnou úhlu vyhnutí dochází k indukci módu I. Dále bylo prokázáno, že všechny součinitele intenzity napětí lze popsat goniometrickými funkcemi (viz. rov. 6.1). Změnou úhlu α a změnou délky trhliny a se v těchto rovnicích budou měnit pouze jejich amplitudy $K_I(0^\circ)$, $K_{II}(0^\circ)$ a $K_{III}(90^\circ)$. Následující nomogramy tedy popisují závislosti jednotlivých amplitud K_{i_a} na parametrech a a α .

Body na obr. 6.3 a 6.4 znázorňují výsledky výpočtů programu ANSYS pro konkrétní hodnoty parametrů a a α . Tyto body byly pro lepší názornost lineárně interpolovány v programu Matlab.



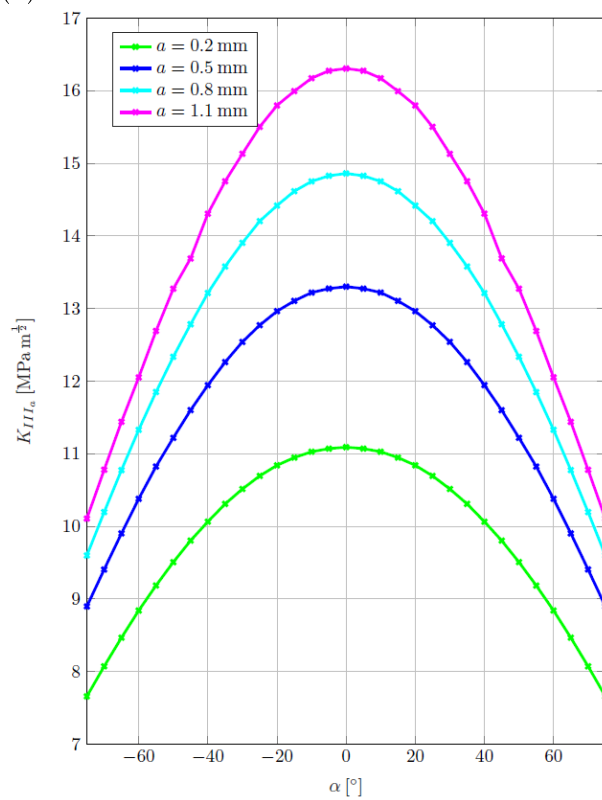
Obrázek 6.3: Nomogramy 6.3a, 6.3b, 6.3c znázorňují závislost amplitud K_{i_a} na délce trhliny, kde jednotlivé křivky odpovídají trhlině vyhnuté o daný úhel α .

6.1. ZÁVISLOST DÉLKY TRHLINY A ÚHLU JEJÍHO VYHNUTÍ NA HODNOTY K_I



(a)

(b)



(c)

Obrázek 6.4: Nomogramy 6.4a, 6.4b, 6.4c znázorňují závislost amplitud K_{i_a} na úhlu vyhnutí trhliny α , kde jednotlivé křivky odpovídají trhlíně o určité délce a .

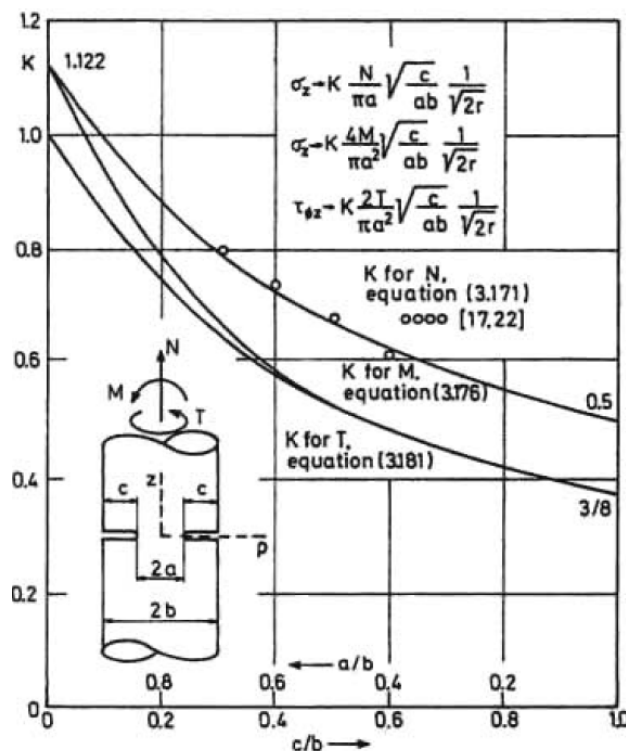
Číselně jsou výsledky z obr. 6.3 znázorněny taktéž v tab. 6.1, kde jednotlivé hodnoty v ní zapsané udávají poměr mezi hodnotami amplitud K_{i_a} pro nejdelší a nejkratší počítanou délku trhliny. Průběhy těchto poměrů byly v závislosti na úhlové souřadnici φ , která udává polohu na čele obvodové trhliny vzorku, konstantní, a to pro všechny amplitudy K_{i_a} . Proto stačí v tab. 6.1 zapsat pouze jednu hodnotu tohoto poměru.

	$\frac{K_{I_a}(a=1.2\text{mm})}{K_{I_a}(a=0.2\text{mm})}$	$\frac{K_{II_a}(a=1.2\text{mm})}{K_{II_a}(a=0.2\text{mm})}$	$\frac{K_{III_a}(a=1.2\text{mm})}{K_{III_a}(a=0.2\text{mm})}$
0°	-	2.34	1.51
15°	2.26	2.33	1.50
30°	2.21	2.29	1.48
45°	2.16	2.26	1.44
60°	2.12	2.77	1.39
75°	2.1	1.94	1.33

Tabulka 6.1: Poměr mezi hodnotami amplitud K_{i_a} pro nejdelší a nejkratší počítanou délku trhliny.

6.2. Ověření výsledků experimentálně naměřenými hodnotami

Pro válcový vzorek o průměru $2b$ s obvodovou trhlinou délky c byly pro různé typy namáhání experimentálně naměřeny závislosti, které jsou zobrazeny na obr. 6.5 [16],



6.2. OVĚŘENÍ VÝSLEDKŮ EXPERIMENTÁLNĚ NAMĚŘENÝMI HODNOTAMI

kde M označuje ohybový moment, N tahovou sílu a T kroutící moment. Hodnoty K udávají hodnotu tzv. bezrozměrného součinitele intenzity napětí, který se pro jednotlivé typy namáhání dá přepočítat na K_i podle následujících vztahů [16]

$$K_I = K \frac{N}{\pi a^2} \left(\frac{ac}{b} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.2a)$$

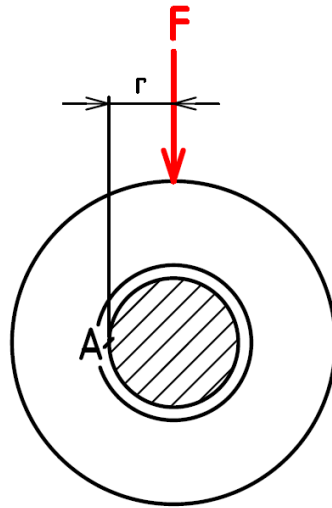
$$K_{II} = K \frac{4M}{\pi a^3} \left(\frac{ac}{b} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.2b)$$

$$K_{III} = K \frac{2T}{\pi a^3} \left(\frac{ac}{b} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.2c)$$

Hodnoty bezrozměrných K lze vyčíst z grafu (6.5), nebo je lze určit pomocí přibližných vzorců, získaných aproximací experimentálně naměřených hodnot s přesností obvykle do jednoho procenta [16].

Uvažujeme-li vzorek s nevyhnutou trhlinou zatížený smykově tak, jak bylo popsáno v kap. 5, pak jediná místa podél čela trhliny, která nás budou zajímat jsou místa, kde je trhlina vystavena čistému zátěžnému módu III. Toto místo A je znázorněno na obr. 6.6 a kroutící moment v něm je snadné spočítat dle vztahu:

$$M_{k_A} = T = Fr. \quad (6.3)$$

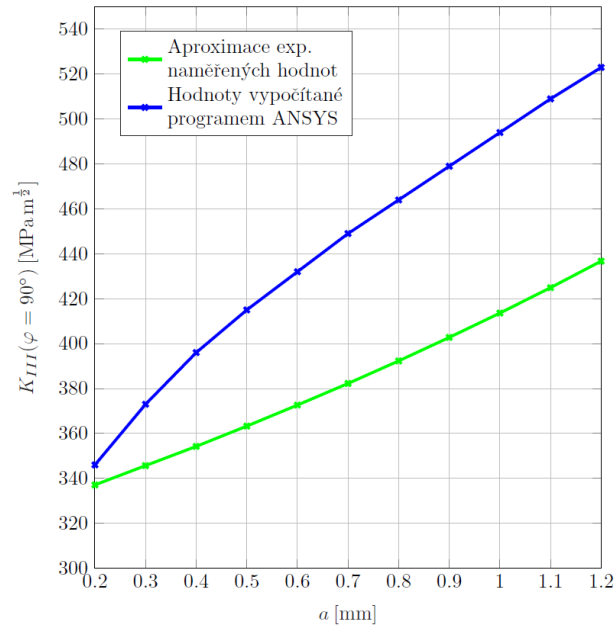


Obrázek 6.6: A označuje místo, kde se vyskytuje pouze čistý mód III. Kroutící moment v tomto místě lze spočítat dle rov. 6.3

Dále je třeba brát v potaz, že s rostoucí délkou trhliny se rovněž mění i rameno r . Pro zatížení vzorku krutem je pak bezrozměrná hodnota K určena pomocí následující aproximace [16]:

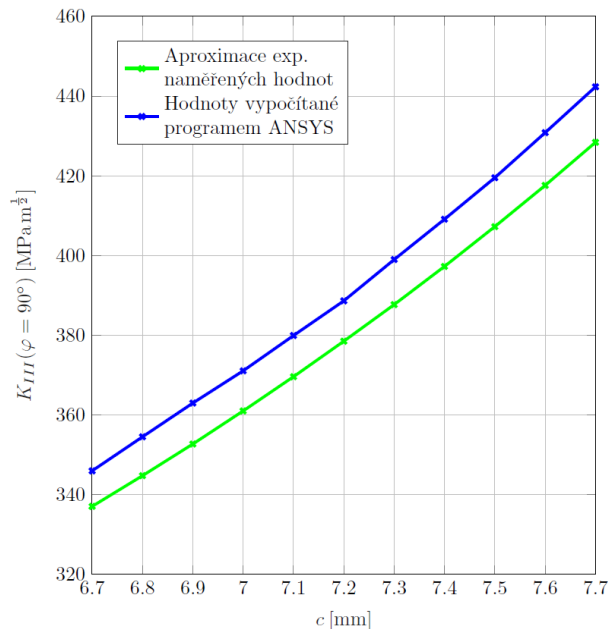
$$K = \frac{3}{8} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{a}{b} + \frac{3}{8} \frac{a^2}{b^2} + \frac{5}{16} \frac{a^3}{b^3} + \frac{35}{128} \frac{a^4}{b^4} + 0.208 \frac{a^5}{b^5} \right], \quad (6.4)$$

kde jako a a b jsou označeny specifické rozměry z obr. 6.5.

Obrázek 6.7: Hodnoty $K_{III}(\varphi = 90^\circ)$ v závislosti na délce trhliny.

Se znalostí jednotlivých K a T (M_{k_A}) pro různé délky trhlín stačí dosadit do rov. 6.2c, určit hodnoty součinitelů intenzity napětí v místě A a tyto hodnoty porovnat s hodnotami určenými v programu ANSYS.

Protože je vidět, že nejméně se hodnoty liší v místě, kde je trhlina nejkratší, rozhodl jsem se provést ještě jednu analýzu, kdy jsem ponechal trhlínu konstantní délky $a = 0.2\text{mm}$ a měnil délku vrubu, tak aby přírůstek celkové délky c odpovídal přírůstku trhliny z obr. 6.7. V praxi to znamená, že při změně délky trhliny z $a = 0.2\text{ mm}$ na $a = 1.2\text{ mm}$ pro první analýzu musíme prodloužit vrub z $v = 6.5\text{ mm}$ na $v = 7.5\text{ mm}$ pro druhou analýzu tak, aby celková délka $c = a + v$ z obr. 6.5 zůstala v obou případech zachována.

Obrázek 6.8: Hodnoty $K_{III}(\varphi = 90^\circ)$ v závislosti na celkové hloubce vrubu s trhlínou c .

7. Závěr

Tato diplomová práce navazuje a rozšiřuje práce zpracovávané v rámci rozsáhlého česko-rakouského projektu, jehož cílem bylo experimentální ověření přístupů vedoucích k popisu šíření trhlin zatížených ve smykových módech. K tomuto účelu byl na ústavu materiálového inženýrství Erich Schmid v Rakouském Lubnu vyvinut speciální test popsaný v kap. 5. Obvodová trhlina u vzorku zatěžovaném na tomto testovacím zařízení je podél svého čela vystavena kombinaci čistých nebo smíšených módů II a III.

Cílem této práce je pro výše zmíněný typ zatížení posoudit napjatost a deformaci na čele vyhnutých trhlin, jinými slovy posoudit vliv délky trhliny a a úhlu jejího vyhnutí α na napjatostní a deformační podmínky v blízkém okolí jejího čela.

V kap. 3 bylo ukázáno, že tyto podmínky lze v rámci LELM jasně popsat jediným parametrem K_i , popřípadě J , který má sice své kořeny v oblasti EPLM, nicméně byl prokázán jeho jasný vztah ke K_i . (rov. 5.2) v oblasti LELM.

Aby bylo možné tyto parametry určit, byl sestaven model v programovém prostředí ANSYS, na němž byla simulována daná zkouška pro určitou délku trhliny vyhnutou pod určitým úhlem. Výstupem z takové jedné analýzy byla sada hodnot K_i a J podél celého čela trhliny. Celkem bylo takto provedeno okolo stovky výpočtů pro délky trhliny od $a = 0.2\text{ mm}$ do $a = 1.2\text{ mm}$ a pro úhly vyhnutí od $\alpha = -75^\circ$ do $\alpha = 75^\circ$, za účelem získání dostatečně velkého souboru dat ke kvalitnímu posouzení výstupů.

Bylo prokázáno, že při daném typu zatížení dochází při vyhnutí trhliny k indukci módu I a tento jev je nejvíce patrný mezi $\alpha = -20^\circ$ a $\alpha = 20^\circ$, viz. obr. 6.3a a 6.4a, kde je tento růst znázorněn rostoucí amplitudou K_{I_a} . Je zřejmé, že roste-li resp. klesá-li amplituda K_{i_a} , pak po celém obvodu čela trhliny roste resp. klesá i konkrétní hodnota $K_i(\varphi)$ v daném místě. Zatímco s rostoucím úhlem vyhnutí K_{I_a} nadále narůstá, ostatní součinitelé K_{II_a} a K_{III_a} klesají. Velmi zajímavým se jeví úhel $\alpha \approx 62^\circ$, ve kterém zároveň K_{I_a} nabývá své maximální hodnoty a K_{II_a} klesne na nulu. V praxi to znamená, že pro globálně smykově zatížený vzorek s trhlinou, je tato trhlina v místě $\varphi = 0^\circ$ a $\varphi = 180^\circ$ namáhána čistě v módu I! Pro všechna ostatní místa podél čela trhliny vzorku je trhlina namáhána kombinací I+III, vyjma míst $\varphi = 90^\circ$ a $\varphi = 270^\circ$, kde je nadále namáhána čistým módem III tak, jako tomu bylo i v případě nevyhnuté trhliny. Pro jakékoliv jiné úhly α je pak trhlina, opět vyjma míst $\varphi = 90^\circ$ a $\varphi = 270^\circ$, namáhána kombinací módů I+II+III. Zajímavým výsledkem je rovněž fakt, že hodnoty K_{I_a} přesahují hodnoty K_{II_a} již při úhlu $\alpha \approx 25^\circ$ a že maximální hodnoty K_{I_a} přesahují maximální hodnoty K_{II_a} pro jakoukoliv délku trhliny téměř o $2\text{ MPa m}^{\frac{1}{2}}$.

V kap. 3 bylo zmíněno, že většina materiálů je citlivější k lomu při normálových tahových napětích spíše než při napětích smykových, které k šíření trhliny obvykle nevedou, tedy $K_{Ic} > K_{IIc}, K_{IIIc}$. Vzhledem k faktu, že v reálných součástech či konstrukcích není trhlina nikdy vystavena jednoosé napjatosti a že trhlina nebývá nikdy dokonale rovinná a nevyhnutá, je možné, že právě tento velký nárůst módu I, při malém vyhnutí trhliny jinak zatížené smykem, může být také důvodem jejího odklonu do tohoto módu, ve kterém se pak primárně šíří.

Protože při změně délky trhliny není závislost $K_{i_a}(a)$ lineární jako spíše mocninná, pak přehledný popis poskytuje navíc tab. 6.1, v níž jsou jednotlivé hodnoty určeny jako poměr mezi K_{i_a} nejdelší a nejkratší počítanou délkou trhliny. Z tab. 6.1 a obr. 6.3a je patrné, že přestože s rostoucí délkou trhliny jednotlivé amplitudy K_{i_a} rostou, jejich poměr nepatrně klesá. Výjimka nastává pro hodnotu K_{II_a} u trhliny vyhlé o úhel $\alpha = 60^\circ$, avšak pro

tento úhel již bylo výše prokázáno, že jeho hodnoty se blíží nule, tedy lze tuto odchylku považovat za přípustnou.

Ověření hodnot K_i a J určených výpočtem v programu ANSYS bylo popsáno v kap. 5, ve zkratce se sestávalo z posouzení hodnot určených pro různé typy zatěžení. Pro zatížení tahem se očekávaly vysoké hodnoty K_I oproti nulovým nebo zanedbatelně malým hodnotám K_{II} a K_{III} , zatímco pro zatížení vzorku krutem naopak vysoké hodnoty K_{III} oproti nulovým nebo zanedbatelně malým hodnotám K_I a K_{II} . Pro smykové zatížení zpracovávané v této práci bylo již dříve ověřeno, že závislosti $K_{II}(\varphi)$ a $K_{III}(\varphi)$ popisují funkce sinus a kosinus. Všechny tyto předpoklady model splňoval, navíc však bylo ještě provedeno porovnání s experimentálně zjištěnými hodnotami. Jak bylo toto porovnání provedeno je popsáno v části 6.2, výstupem je pak obr. 6.7. Jak již bylo psáno, tak pouze první hodnota se velmi blíží experimentálně aproximovaným hodnotám a s rostoucí délkou trhliny se tento rozdíl nadále prohlubuje. Proto jsem se rozhodl provést ještě jednu analýzu, která je rovněž popsána v části 6.2 a jejím výstupem je pak obr. 6.8. Zde je vidět, že nejenže největší rozdíl mezi výpočty a experimenty je zhruba 3.2%, ale i charakter křivky se výrazně změnil a nyní koresponduje s křivkou experimentální.

Proto je nasnadě se nyní ptát, jak byly tyto experimenty prováděny a vzhledem k tomu, že v literatuře, z které jsem čerpal [16], úplný popis experimentu uveden nebyl, se dá předpokládat, že spíše než pro rostoucí délku trhliny byly tyto experimenty konstruovány pro rostoucí délku vrubu. Rozdíl mezi vypočítanými hodnotami pro rostoucí délku trhliny a rostoucí délku vrubu s malou počáteční trhlinou na něm umístěnou, při stejném parametru c (viz. obr. 6.5), je velmi výrazný. Proto by tato práce mohla posloužit jako námět pro práci budoucí, kde by se spíše než vliv trhliny zkoumal vliv vrubu.

Literatura

- [1] ANDERSON, T.L. *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications* 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, c1995. ISBN 08-493-4260-0.
- [2] FU, Guoyang, Wei YANG a Chun-Qing LI. Stress intensity factors for mixed mode fracture induced by inclined cracks in pipes under axial tension and bending. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* [online]. 2017, , - [cit. 2017-03-05]. DOI: 10.1016/j.tafmec.2017.02.001. ISSN 01678442. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0167844216302269>
- [3] HORNÍKOVÁ, Jana, Stanislav ŽÁK a Pavel ŠANDERA. K-calibration of special specimens for mode II, III and II+III crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*. 2013, **110**, 430-437. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2013.08.013. ISSN 00137944. Dostupné také z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0013794413002865>
- [4] POKLUDA, J., R. PIPPAN, T. VOJTEK a A. HOHENWARTER. Near-threshold behaviour of shear-mode fatigue cracks in metallic materials. *Fatigue*. 2014, **37**(3), 232-254. DOI: 10.1111/ffe.12131. ISSN 8756758x. Dostupné také z: <http://doi.wiley.com/10.1111/ffe.12131>
- [5] SCHREURS, Piet J.G. *Fracture Mechanics: Lecture notes - course 4A780*. Concept version. Eindhoven University of Technology Department of Mechanical Engineering, 2012. Dostupné také z: <http://www.mate.tue.nl/~piet/edu/frm/pdf/frmsyl1213.pdf>
- [6] VLACH, Bohumil, Miloš VLK a Zdeněk KNĚSL. *Základy lomové mechaniky: připraveno pro školní rok 2001*. Vysoké učení technické v Brně, 2001. Dostupné také z: www.zam.fme.vutbr.cz/~vlach/6ms/prednasky/Hou3.doc
- [7] ŽÁK, S. *Popis napjatosti a deformace na čele trhlin zatížených ve smykových zátěžových módech*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2014. 67 s. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Jana Horníková, Ph.D.
- [8] VLACH, Bohumil, Miloš VLK a Miloš HOLZMANN. *Elasto-plastická lomová mechanika a měření lomové houževnatosti: připraveno pro školní rok 2001*. Vysoké učení technické v Brně, 2001. Dostupné také z: www.zam.fme.vutbr.cz/~vlach/6ms/prednasky/Hou4.doc
- [9] ANSYS® Mechanical APDL, Release 17.2, Help System, *Structural Analysis Guide: 1. Introduction to Fracture*, ANSYS, Inc.
- [10] ANSYS® Mechanical APDL, Release 17.2, Help System, *Fracture Analysis Guide: 2. Evaluation of Fracture Mechanics Parameters*, ANSYS, Inc.
- [11] YU, Hongjun, Linzhi WU, Licheng GUO, Huaping WU a Shanyi DU. An interaction integral method for 3D curved cracks in nonhomogeneous materials with complex interfaces. *International Journal of Solids and Structures* [online]. 2010, **2010**(Volume 47, 16), 2178–2189 [cit. 2017-03-19]. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j>.

- ijsolstr.2010.04.027. Dostupné z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768310001630>
- [12] ANSYS® Mechanical APDL, Release 17.2, Help System, *Advanced Analysis Guide: 7. Submodeling*, ANSYS, Inc.
- [13] JANÍČEK, Přemysl a Jiří MAREK. *Expertní inženýrství v systémovém pojetí* [online]. Praha: Grada, 2013 [cit. 2017-04-09]. Expert (Grada). ISBN 978-80-247-8196.
- [14] ŽÁK, S. *Elastická analýza stability trhliny ve smykových zátěžných módech*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2012. 42 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Jana Horníková, Ph.D.
- [15] LIN, X.B. *Estimation of stress intensity factors with considering crack surface contact*. In The Thirteen European Conference on Fracture (ECF 13), San Sebastian, Spain, 6-9 September, Edited by M.R. Bache et al. 2000, pp. 1855–196. [cit. 2017-05-20]. Dostupné také z: <http://www.gruppofrattura.it/ocs/index.php/esis/ECF13/paper/viewFile/8463/4907>
- [16] BENTHEM, J. P. a W. T. KOITER. Asymptotic approximations to crack problems. *Methods of analysis and solutions of crack problems*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1973, , 131. DOI: 10.1007/978-94-017-2260-5_3. ISBN 978-90-481-8246-6. Dostupné také z: http://link.springer.com/10.1007/978-94-017-2260-5_3

Seznam použitých zkratek a symbolů

Zkratky

<i>CTOD</i>	z anglického <i>crack tip opening displacement</i> , neboli rozevření na čele trhliny
<i>EPLM</i>	Elasto-plastická lomová mechanika
<i>HMH</i>	Huber-von Mises-Hencky
<i>LELM</i>	Lineárně-elastická lomová mechanika
<i>MHP</i>	Metoda hraničních prvků
<i>MKP</i>	Metoda konečných prvků
<i>NELM</i>	Nelineárně-elastická lomová mechanika
<i>RD</i>	Rovinná deformace
<i>RN</i>	Rovinná napjatost

Symboly

\vec{n}	jednotkový normálový vektor	[–]
A	lomová plocha	[m ²]
a	délka trhliny	[m]
a_t	celková délka trhliny	[m]
B	šířka tělesa	[m]
C	poddajnost	[m N ⁻¹]
E	Youngův modul pružnosti	[Pa]
F	síla	[N]
f_{ij}	funkce udávající závislost napětí na typu nespojivosti	[–]
G	rychlosti růstu trhliny, hnací síla trhliny	[J m ⁻² , N m ⁻¹]
G_C	lomová houževnatost materiálu	[J m ⁻²]
G_s	modul pružnosti ve smyku	[Pa]
J	J -integrál	[N m ⁻¹]
J_C	lomová houževnatost materiálu	[J m ⁻²]
k	tvarová funkce	[–]
K_i	součinitel intenzity napětí módu i ($i = I, II, III$)	[Pa m ^½]

K_{i_a}	amplituda součinitelů intenzity napětí ($i = I, II, III$)	$[\text{Pa m}^{\frac{1}{2}}]$
K_{i_C}	lomová houževnatost materiálu	$[\text{Pa m}^{\frac{1}{2}}]$
M_K	kroučící moment	$[\text{N m}]$
N_i	tvarová funkce odpovídající uzlu i	$[-]$
r	vzdálenost od čela trhliny	$[\text{m}]$
R^2	koeficient determinace	$[-]$
r_p	poloměr plastické zóny	$[\text{m}]$
t_i	vektor povrchových sil	$[\text{m}]$
U	deformační energie uložená v tělese s trhlinou	$[\text{J}]$
U^*	doplňková deformační energie v tělese s trhlinou	$[\text{J}]$
$u_{i,j}$	složky vektoru posuvů v okolí čela trhliny	$[\text{m}]$
W	celková energie systému, celková potenciální energie	$[\text{J}]$
w	hustota deformační energie	$[\text{J m}^{-3}]$
W_F	energie spojená s prací vnějších sil	$[\text{J}]$
W_s	práce spojená s tvorbou nových povrchů	$[\text{J}]$
W_{el}	elastická energie, deformační energie uložená v tělese	$[\text{J}]$

Řecké symboly

α	úhel vyhnutí trhliny	$[\text{°}]$
Δ	posuv	$[\text{m}]$
δ	CTOD, rozevření trhliny	$[\text{m}]$
δ_{ij}	Kroneckerova delta	$[-]$
η	souřadnice v parametrickém souřadném systému prvku	$[-]$
Γ	integrační cesta	$[-]$
μ	Poissonova konstanta	$[-]$
σ	napětí	$[\text{Pa}]$
σ_{ij}	složky tenzoru napětí	$[\text{Pa}]$
θ	úhlová souřadnice pozice okolo čela trhliny	$[\text{°}]$
ε_{ij}	složky tenzoru přetvoření	$[-]$
φ	úhlová souřadnice pozice na obvodu válcového zk. tělesa	$[\text{°}]$
ξ	souřadnice v parametrickém souřadném systému prvku	$[-]$