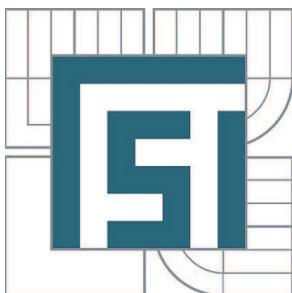


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ENERGETICKÝ ÚSTAV  
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
ENERGY INSTITUTE

# STANOVENÍ TUHOSTI, TLUMENÍ A PŘÍDAVNÉ HMOTNOSTI TENKÉ KAPALINOVÉ VRSTVY V TĚSNÍCÍ SPÁŘE

ASSESSMENT OF STIFFNESS, DAMPING AND ADDED MASS IN THIN LIQUID LAYER IN  
SEALING GAP

DIPLOMOVÁ PRÁCE  
MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

Ing. VOJTĚCH KOHUT

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

doc. Ing. VLADIMÍR HABÁN, Ph.D.

BRNO 2012



Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Energetický ústav

Akademický rok: 2012/2013

## **ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE**

student(ka): Ing. Vojtěch Kohut

který/která studuje v **magisterském navazujícím studijním programu**

obor: **Fluidní inženýrství (2301T036)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

**Stanovení tuhosti, tlumení a přídavné hmotnosti tenké kapalinové vrstvy v těsnící spáře**

v anglickém jazyce:

**Assessment of stiffness, damping and added mass in thin liquid layer in sealing gap**

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Znalost dynamických vlastností těsnících spár je důležitá pro správný dynamický návrh vysokootáčkových čerpadel. Diplomant se bude zabývat experimentálním stanovením dynamických vlastností těsnící spáry.

Cíle diplomové práce:

Úkolem diplomanta bude navrhnout experimentální zařízení, provést experiment a vyhodnotit tuhosti, tlumení a přídavné hmotnosti tenké kapalinové vrstvy v závislosti na statickém průtoku, otáčkách a excentricitě.

Seznam odborné literatury:

Bude úkolem diplomanta provést literární rešerši problematiky.

Vedoucí diplomové práce: doc. Ing. Vladimír Habán, Ph.D.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2012/2013.

V Brně, dne

L.S.

---

doc. Ing. Zdeněk Skála, CSc.  
Ředitel ústavu

---

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.  
Děkan fakulty

## Abstrakt

Cílem této diplomové práce je navrhnout metodiku experimentálního vyhodnocení přídavné hmotnosti, tuhosti a tlumení, kterými působí kapalinová vrstva na rotor v těsníci spáře. Těsníci spáry jsou významným konstrukčním prvkem hydrodynamických strojů. Jejich správný návrh, včetně stanovení přídavných účinků je nezbytný pro celkový dynamický návrh stroje. Součástí práce je řešerše problematiky dynamiky rotorů a přídavných účinků kapaliny. Byl navržen experiment pro stanovení přídavných účinků, který je založen na vyhodnocení dynamiky rotoru z měřených radiálních sil. Z výsledků experimentu byly stanoveny dynamické vlastnosti suchého a mokrého rotoru zkušebního zařízení.

## Klíčová slova

Těsníci spára, Hydrodynamické stroje, Přídavné účinky kapaliny, Dynamika rotorových soustav, Fourierova transformace

## Abstract

The main purpose of this master's thesis is to propose the methodology suitable for experimental evaluation of additional mass, stiffness and damping by which a liquid layer in the sealing gap affects the rotor. Sealing gaps are important structural elements of hydrodynamic machines. An appropriate design of a sealing gap including the additional effects determination is an inevitable part of the machine overall dynamic design. The thesis also provides a literature search in the field of rotor dynamics and additional effects of a liquid. The designed experiment aiming to determine additional effects of the liquid is based on rotor dynamics evaluation by means of the radial forces measurement. The experiment results were used to determine dynamic properties of dry and wet rotor of the testing device.

## Keywords

Sealing gap, Hydrodynamic machines, Additional effects of liquid, Dynamics of Rotating Systems, Fourier transform

## Citace

KOHUT, V. *Stanovení tuhosti, tlumení a přídavné hmotnosti tenké kapalinové vrstvy v těsníci spáře*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2012. 65 s. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Vladimír Habán, Ph.D..



# **Stanovení tuhosti, tlumení a přídatné hmotnosti tenké kapalinové vrstvy v těsnící spáře**

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením doc. Ing. Vladimíra Habána, Ph.D.

.....  
Ing. Vojtěch Kohut  
12. října 2012

## **Poděkování**

Rád bych poděkoval doc. Ing. Vladimíru Habánovi, Ph.D. za odbornou pomoc při tvorbě této práce.

© Vojtěch Kohut, 2012.

*Tato práce vznikla jako školní dílo na Vysokém Učení Technickém v Brně, Fakultě Strojního Inženýrství. Práce je chráněna autorským zákonem a její užití bez uděleného oprávnění autorem je nezákonné, s výjimkou zákonem definovaných případů.*



## Obsah

|                                                                                  |    |
|----------------------------------------------------------------------------------|----|
| Úvod.....                                                                        | 3  |
| 1 Základy dynamiky rotorů .....                                                  | 4  |
| 1.1 Úvod do problematiky kmitání rotorových soustav .....                        | 4  |
| 1.1.1 Modely rotorů.....                                                         | 4  |
| 1.1.2 Lavalův (Jeffcottův) rotor .....                                           | 6  |
| 1.1.3 Stodolův rotor.....                                                        | 7  |
| 1.2 Chod Lavalova rotoru v tuhých ložiskových podpěrách .....                    | 8  |
| 1.2.1 Odvození pro pevný souřadný systém .....                                   | 8  |
| 1.2.2 Odvození pro spolurotující souřadný systém .....                           | 12 |
| 1.3 Netlumený Lavalův rotor uložený v pružných ložiskových podpěrách .....       | 13 |
| 1.4 Problematika tlumení.....                                                    | 17 |
| 1.4.1 Vnější tlumení a jeho vliv na kmitání rotorů.....                          | 17 |
| 1.4.2 Vnitřní (materiálové) tlumení.....                                         | 21 |
| 1.4.3 Kmitání rotorů s uvažováním vnitřního i vnějšího tlumení .....             | 22 |
| 1.5 Zobecnění pohybové rovnice pro translační kmity pevného tělesa.....          | 24 |
| 2 Vzájemná interakce kapaliny a tělesa .....                                     | 25 |
| 2.1 Nestacionární translační pohyb tuhého tělesa v kapalině.....                 | 25 |
| 2.1.1 Těleso konající translační kmity v kapalině.....                           | 25 |
| 2.1.2 Těleso konající translační kmity v proudící kapalině.....                  | 29 |
| 2.2 Interakce rotoru a kapaliny v těsnící spáře .....                            | 31 |
| 2.2.1 Proudění kapaliny těsnící spárou.....                                      | 31 |
| 2.2.2 Přídavné účinky kapaliny v těsnící spáře na rotor.....                     | 32 |
| 3 Experiment pro ověření přídavných účinků kapalinové vrstvy těsnících spár..... | 34 |
| 3.1.1 Zařízení k experimentálnímu ověření přídavných účinků.....                 | 34 |
| 3.2 Realizace měření.....                                                        | 37 |
| 3.3 Měřicí technika .....                                                        | 40 |
| 3.3.1 Měřené veličiny.....                                                       | 40 |
| 3.3.2 Měřicí technika použitá pro měření hydraulických veličin.....              | 40 |
| 3.3.3 Měření silových veličin.....                                               | 41 |

|       |                                                   |    |
|-------|---------------------------------------------------|----|
| 4     | Vyhodnocení výsledků získaných experimentem ..... | 43 |
| 4.1   | Frekvenční analýza naměřených signálů .....       | 43 |
| 4.1.1 | Fourierova transformace .....                     | 44 |
| 4.1.2 | Zpracování měřených dat .....                     | 45 |
| 4.2   | Stanovení silového působení .....                 | 47 |
| 4.2.1 | Grafy vynuceného kmitání rotoru .....             | 49 |
| 4.3   | Teoretické určení vlastního kmitání .....         | 52 |
| 4.3.1 | Určení tuhosti uložení .....                      | 53 |
| 4.3.2 | Vypočet vlastních tvarů kmitání rotoru.....       | 55 |
| 4.4   | Shrnutí výsledků měření .....                     | 56 |
|       | Závěr.....                                        | 57 |
|       | Literatura .....                                  | 58 |
|       | Seznam symbolů a zkratek .....                    | 59 |

## Úvod

Těsnící spáry jsou důležitým konstrukčním prvkem hydrodynamických strojů. Ty se jako všechny rotační stroje skládají z rotoru a statoru, které vůči sobě musí být těsněny s ohledem na objemové ztráty ve stroji. Objemové ztráty vznikají zpětným prouděním kapaliny ve stroji (např. z výtlaku do sání čerpadla). Správný návrh spár je proto nezbytnou součástí návrhu hydrodynamických strojů, neboť pomáhá tyto ztráty omezit. Velice důležitá je z tohoto pohledu geometrie těsnící spáry, která se volí s ohledem na co nejmenší objemové ztráty, jichž se dosahuje především změnou vůle ve spáře. Úkolem těsnících kruhů je omezit ztrátový průtok mezi jednotlivými stupni, nebo mezi výtlakem a sáním – podle toho, kde se daný těsnící kruh nachází. Vůle přitom musí mít takový rozměr, aby v žádném provozním stavu nemohlo dojít k zadření rotoru.

Zjistilo se však, že těsnící spára má vliv také na dynamické vlastnosti stroje. Ve spáře je při provozu trvale se pohybující kapalinová vrstva. Dochází v ní tak k vzájemné interakci kapaliny a rotujícího hřídele. V důsledku této interakce působí na hřídel rotující v kapalině přídavné účinky – přídavná hmotnost, tuhost a tlumení, které výrazně ovlivňují výsledné dynamické vlastnosti rotoru. Znalost přídavných účinků je proto nesmírně důležitá pro správný dynamický návrh stroje, neboť je potřeba zabránit nežádoucím jevům, jako vzniku samobuzeného kmitání rotorů, které je provozně nepřípustné a má za následek často i těžké havárie strojů.

Správné stanovení vlastních frekvencí, při kterých dochází k samobuzenému kmitání a vyšetření dalších dynamických vlastností je nezbytné především při návrhu vysokootáčkových čerpadel a obecně strojů velkých výkonů, neboť poruchy těchto strojů mohou mít velké ekonomické i bezpečnostní dopady. Takové stroje jsou navíc dimenzovány, z důvodů co nejvyšší účinnosti, s podstatně menší rezervou vůči těmto nebezpečným stavům než stroje malé. Jsou rovněž konstruovány z vysokopevnostních materiálů, které mají nízký útlum, takže je pravděpodobnější vznik samobuzeného kmitání při provozu.

Vysokootáčková čerpadla bývají často článková, jejich rotory velmi štíhlé a projevuje se u nich množství lehce zatlumených kritických frekvencí v provozní oblasti. Skutečné vlastní frekvence se však budou vlivem přídavných účinků kapaliny lišit od těch získaných bez uvažování proudící kapaliny.

Dodnes přitom není metodika stanovení přídavných účinků plně prozkoumaná, především s ohledem na složitost proudění v těsnící spáře. Je známo, že velikost přídavných účinků kapaliny velmi závisí na konstrukci spáry, tlakovém spádu, otáčkách rotoru, vlastnostech kapaliny aj.

Intenzivně se touto problematikou zabývá řada firem, které podnikají v oblasti vysokotlakých čerpadel. Výroba čerpadel pro klasickou i jadernou energetiku a teplárenství tvoří významnou část produkce mnoha společností, takže firmy vynakládají úsilí na výzkum a vývoj těchto strojů. Problematiku se nyní snaží řešit také Odbor fluidního inženýrství Victora Kaplana. V rámci výzkumu vznikla i tato diplomová práce.

# 1 Základy dynamiky rotorů

Práce se zabývá problematikou stanovení dynamických vlastností rotorů, proto je účelné věnovat pozornost základům teorie dynamiky rotorových soustav. Rotory a hřídele jsou základní součástí nejen čerpadel, ale mnoha různých strojů jako vodní turbíny, parní a plynové turbíny, kompresory, ventilátory, elektromotory a generátory, převodovky a mnoho dalších strojů. Problematika dynamiky rotorů je proto velice rozsáhlá, zde jsou uvedeny pouze základy této teorie. [1]

Úspěšné zvládnutí dynamiky je však nutnou podmínkou správného návrhu a konstrukce soustrojí, jehož hlavní částí je rotor. S postupujícím technickým rozvojem jsou v posledních letech na stavbu a provoz rotačních strojů kladeny značné požadavky. Stále se zvyšují nároky na výkon, účinnost, bezpečnost, spolehlivost, snižování energetické náročnosti, či účinky na životní prostředí apod. [2]

## 1.1 Úvod do problematiky kmitání rotorových soustav

Ačkoliv se zdá rotačně symetrický rotor bez problémů, zvláště pak ve srovnání s pístovými stroji, u nichž jsou dynamické poměry podstatně složitější, lze u nich pozorovat problémy, jako např. vznik samobuzeného kmitání, otázka stability aj.

Chod rotačně symetrického rotoru je klidný, neobjevuje se buď žádné, nebo pouze minimální kolísání krouticího momentu. Přesto dochází u rotorů ke kmitání, buzenému především nevyvážeností, ale i dalšími vlivy, jak bude dále vysvětleno.

Kmitání rotorů je jednou z hlavních příčin mnoha nežádoucích účinků, jako je hluk rotujícího stroje, nadměrné chvění, neklidný chod, nebo průhyby a deformace, vedoucí mnohdy až k haváriím strojů. [1]

### 1.1.1 Modely rotorů

Pro objasnění základních charakteristik chování rotorových soustav existuje několik teoretických modelů rotorů. Jednotlivé modely na určité úrovni rozlišení odpovídají svými definovanými vlastnostmi skutečnému chování reálných rotorů. Mohou tak být použity pro sestavení výpočtových modelů jednoduchých strojů.

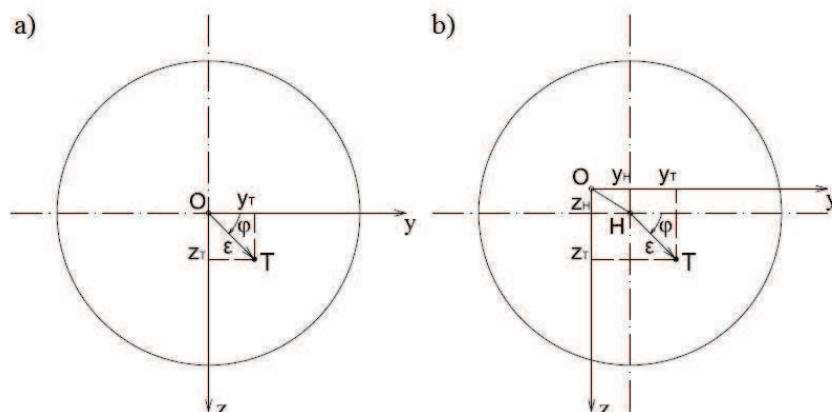
#### *Ohybově tuhý rotor*

Nejjednodušším modelem rotoru je absolutně tuhý rotor. Vychází z předpokladu, že tuhost rotoru je tak velká, že deformace hřídele jsou zanedbatelné. Bez uvažování pružných deformací, splývá střed rotačně symetrického hřídele s osou ložisek. Chod ohybově tuhého rotačně symetrického rotoru je klidný, neobjevuje se kolísání krouticího momentu. Rotací vyvolané odstředivé síly jsou ve vzájemné rovnováze.

Ve skutečnosti ale, v důsledku výrobních nepřesností, není rozložení hmoty zcela rotačně symetrické. Těžiště rotoru není totožné s počátkem souřadného systému definovaného, tak že osa  $x$  leží ve směru osy hřídele a osy  $y$  a  $z$  ve střední rovině kotouče, viz *Obr. 1* (str. 5). V těžišti na rotor působí odstředivá síla o velikosti  $F_0 = m\varepsilon\omega^2$ . [1]

Tato síla pak vyvolá reakce v ložiskách, ve kterých je rotor uložen. Ze vztahu je zřejmé, že tato síla roste se čtvercem otáček. Reakční síly v ložiskách jsou z hlediska pozorovatele periodické a vyvolávají příčné kmitání rotoru.

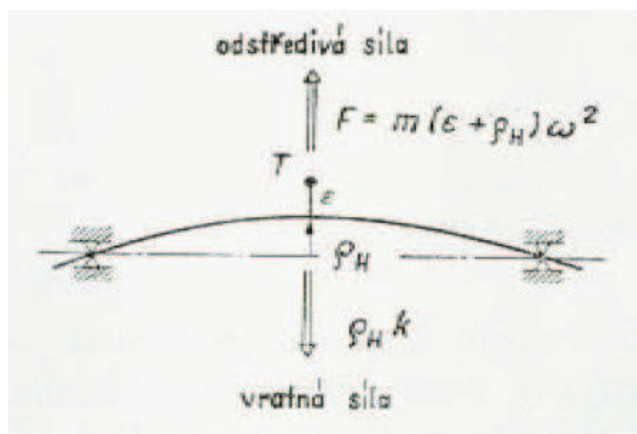
Tyto síly lze eliminovat připojením vývažků ve dvou libovolných vyvažovacích rovinách (tzv. vyvažování rotoru). [1]



Obr. 1: Souřadný systém v nepohyblivé rovině y-z pro tuhý rotor bez rotace (a) a ohybově pružný rotor (nebo rotující tuhý rotor, kdy deformace je v ložiskách) (b)

#### Ohybově pružný (měkký) rotor

Naproti tomu model ohybově pružného rotoru bere již v úvahu pružné deformace rotoru. Jejich následkem vznikají přídavné odstředivé síly. Celková odstředivá síla je pak  $F_O = m(\varepsilon + \varrho_H)\omega^2$ . Zde člen  $\varrho_H$  vyjadřuje pružnou deformaci rotoru. Střed rotoru již není v ose ložisek, ale je oproti němu posunut o hodnotu  $\varrho_H$ . Přitom se předpokládá prohnutí hřídele ve směru vyosení těžiště. [1]



Obr. 2: Silové působení na ohybově pružný rotor [1]

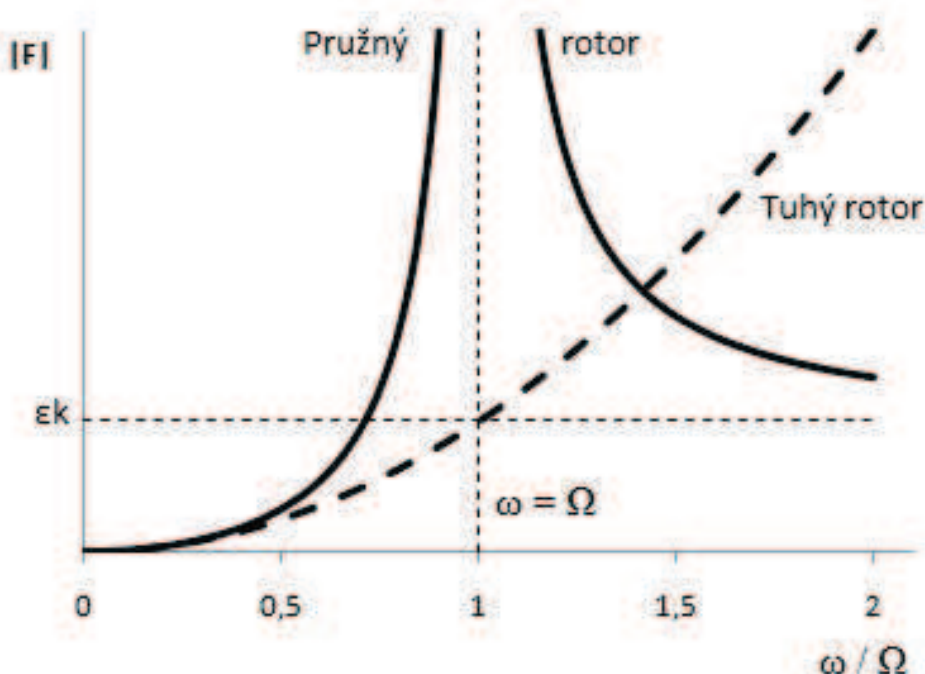
Lze pak sestavit rovnici silové rovnováhy ve tvaru:  $k\varrho_H = m(\varepsilon + \varrho_H)\omega^2$ , neboť vratná síla hřídele je v rovnováze se silou odstředivou,  $k$  je ohybová tuhost hřídele.

Z rovnice pak plyne vztah pro deformaci hřídele:

$$\varrho_H = \frac{(\omega/\Omega)^2}{1 - (\omega/\Omega)^2} \cdot \varepsilon \quad (1)$$

Velikost  $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  značí vlastní úhlovou rychlost netlumeného kmitání soustavy, danou hmotností kotouče  $m$  a tuhostí hřídele  $k$ . Vlastní frekvence kmitání je  $f = \Omega/2\pi$ .

Z rovnice (1) vyplývá, že výchylka hřídele, a tedy i odstředivá síla nejprve s otáčkami hřídele rostou se čtvercem otáček, tedy úměrně se složkou odstředivé síly  $m\varepsilon\omega^2$ , protože účinek deformačního členu  $m\varrho_H\omega^2$  je velice malý. S rostoucími otáčkami však vliv deformace roste a velikost odstředivé síly i průhybu roste mnohem rychleji než s druhou mocninou otáček, až při  $\omega = \Omega$  nastanou tzv. kritické otáčky, při nichž jsou výchylka rotoru i síla nekonečně velké. Podaří-li se kritické otáčky rychle překonat, což je při velkém zrychlení možné, výchylky i síla opět velice rychle klesají. Při velmi vysokých otáčkách se pak těžiště stále více blíží k ose ložisek a velikost síly se blíží asymptoticky k hodnotě  $\varepsilon k$ , resp. velikost výchylky hřídele k hodnotě vyosení  $\varepsilon$ . Tento jev se nazývá samostředění rotoru.



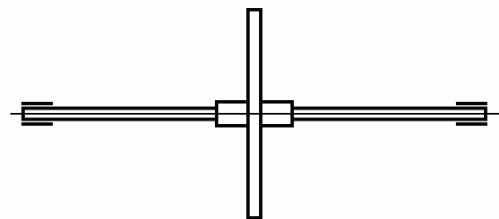
Obr. 3: Výchylka rotující odstředivé síly u tuhého a pružného rotoru

Z tohoto rozboru také plyne, že do jistých otáček jsou pružné deformace natolik malé, že můžeme daný rotor považovat za tuhý.

### 1.1.2 Lavalův (Jeffcottův) rotor

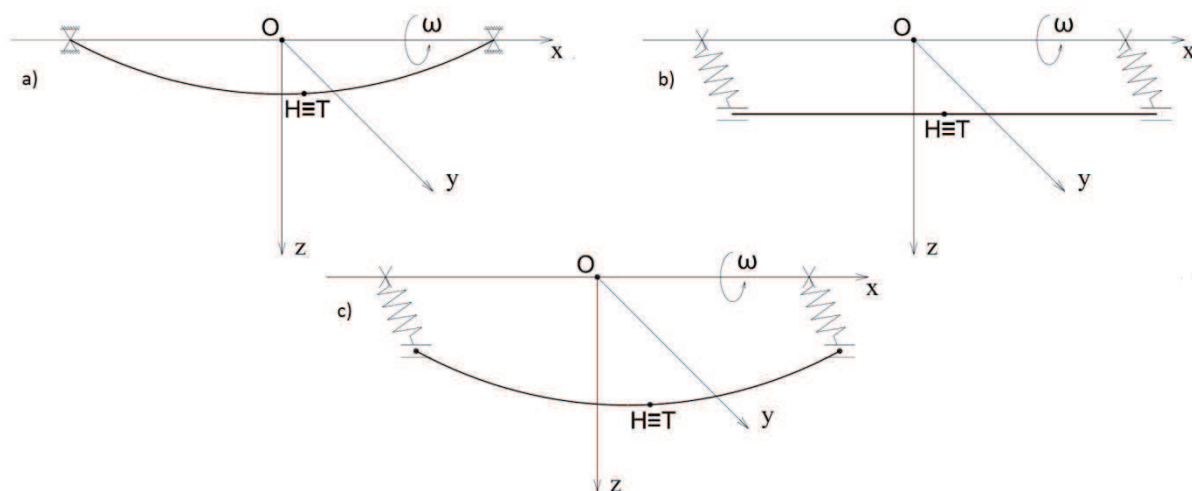
Je nejjednodušším modelem ohybově pružného rotujícího hřídele. Soustava se skládá z pružného nehmotného hřídele uloženého ve dvou ložiskách a hmotného, absolutně tuhého kotouče. Soustava je symetrická vzhledem k rovině kolmé na osu hřídele, střednicová rovina kotouče je kolmá k ose hřídele. Silové a momentové zatížení působí v místě kotouče, v důsledku symetrie soustavy mohou síly působit pouze ve směru kolmém na střednici kotouče a momenty pouze ve směru jeho střednice.

Uložení Lavalova rotoru může být absolutně tuhé nebo také poddajné, zahrnující vliv poddajnosti a tlumení vazbových prvků (ložiska, ucpávky apod.) i ložiskových těles. Celá soustava může být netlumená nebo tlumená vnějším i vnitřním tlumením.



Obr. 4: Lavalův (Jeffcottův) rotor [2]

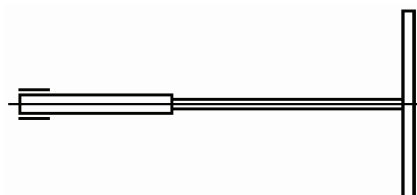
Přestože se na první pohled jedná o velké zjednodušení oproti skutečnosti, lze na Lavalově rotoru demonstrovat mnoho důležitých jevů, objevujících se v praxi. Můžeme na něm sledovat vliv nevyváženosti rotoru, uložení v pružných podpěrách, kluzných ložiskách, vnější a vnitřní tlumení, gyroskopický moment a mnoho dalších. Tyto vlivy by se daly těžko stanovit pro skutečné rotory. Další rozbor dynamických vlastností rotorů zde bude vyšetřen právě na modelu Lavalova rotoru.



Obr. 5: Dokonale vyvážený Lavalův rotor uložený v absolutně tuhých ložiskách (a), tuhý rotor v poddajných ložiskách (b) a s uvažováním poddajnosti hřídele i ložisek. Pro ideálně vyvážený hřídel splývá střed hřídele a těžiště v jeden bod. [3]

### 1.1.3 Stodolův rotor

Stodolův rotor je rovněž modelem rotoru tvořeného nehmotným pružným hřídelem a absolutně tuhým kotoučem. Hřídel je uložen v jednom ložisku. Kotouč je nasazen na opačném konci hřídele. Jeho střednicová rovina nemusí být kolmá k ose hřídele.



Obr. 6: Stodolův rotor [2]

Síly a momenty zatěžující kotouč mohou působit v libovolném směru. Stejně jako u Lavalova rotoru i u Stodolova rotoru může být uložení absolutně tuhé nebo poddajné a soustava může být netlumená nebo tlumená.

Je třeba také poznamenat, že skutečný rotor je kontinuem a má nekonečný počet vlastních frekvencí a tvarů kmitů, což uvedené modely rotoru nezohledňují. V praxi jsou ale podstatné pouze nejnižší vlastní frekvence.

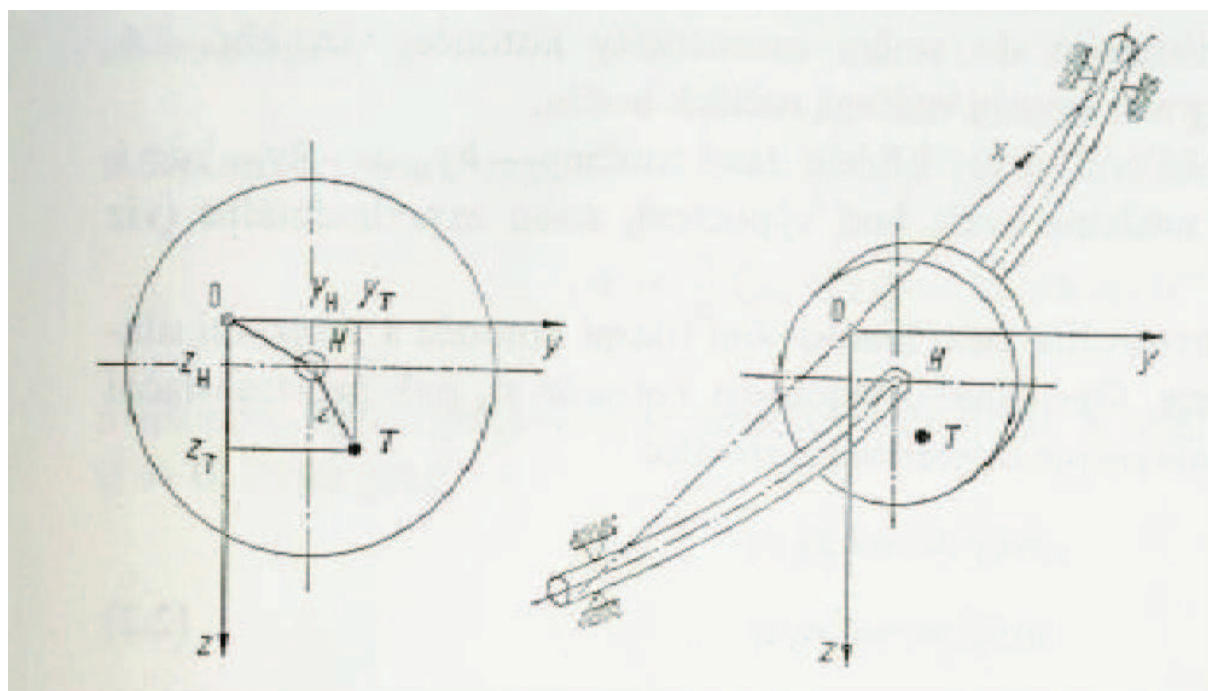
## 1.2 Chod Lavalova rotoru v tuhých ložiskových podpěrách

V předchozí části byl definován teoretický model Lavalova rotoru. V definici rotoru je zahrnut poměrně široký rozsah podmínek, jako vliv tuhosti uložení, tlumení apod., z nichž některé můžeme zanedbat. Zde budou jednotlivé vlivy stručně analyzovány. Netlumený Lavalův rotor v tuhých ložiskových podpěrách

Za předpokladu, že Lavalův rotor je uložen v ložiskových podporách, které jsou ve srovnání s hřídelem tuhé, tlumící síly nebudou uvažovány. Dané předpoklady dobře splňují rotory uložené ve valivých ložiskách a rotující v plynném prostředí. Dále předpokládáme, že se kotouč nenašikmí při zatížení příčnými silami (vliv našikmení kotouče bývá totiž běžně velmi malý). [1]

### 1.2.1 Odvození pro pevný souřadný systém

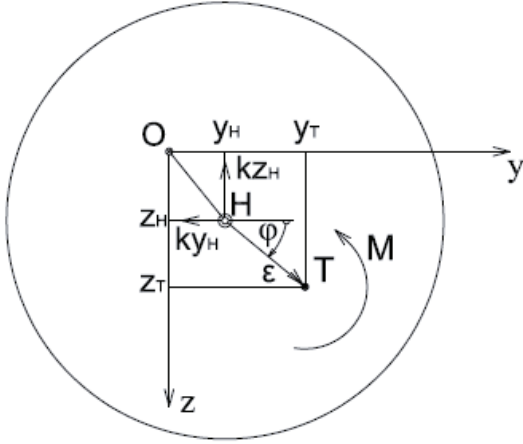
Pro rotor nejprve zavedeme nepohyblivý kartézský souřadný systém. Osa  $x$  leží ve směru osy hřídele, osy  $y$  a  $z$  leží ve střední rovině kotouče (viz Obr. 7).



Obr. 7: Lavalův rotor v pevném souřadnicovém systému [1]

Pro rotor lze sestavit podmínku silové rovnováhy mezi setrvačnými silami kotouče a vratnými pružnými silami hřídele. Označíme-li hmotnost hřídele  $m$ , lze napsat:

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_T &= -ky_H \\ m\ddot{z}_T &= -kz_H \end{aligned} \quad (2)$$



Obr. 8: Kotouč v nepohyblivé rovině y-z

Pro souřadnice těžiště platí v zavedeném souřadném systému:

$$\begin{aligned} y_T &= y_H + \varepsilon \cos \varphi \\ z_T &= z_H + \varepsilon \sin \varphi \end{aligned} \quad (3)$$

Po provedených derivacích můžeme dosadit do rovnice (2) a vyjádřit tak pohybové rovnice pouze v závislosti na průhybu hřídele  $H$ , což je praktičtější, neboť průhyb hřídele lze měřit.

$$\begin{aligned} \ddot{y}_H + \Omega^2 y_H &= \varepsilon \dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \varepsilon \ddot{\varphi} \sin \varphi \\ \ddot{z}_H + \Omega^2 z_H &= \varepsilon \dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \varepsilon \ddot{\varphi} \cos \varphi \end{aligned} \quad (4)$$

V rovnicích je zaveden ještě vztah pro vlastní úhlovou rychlost kmitání:

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5)$$

K úplnému popisu pohybu kotouče schází ještě rovnice rovnováhy momentů vzhledem k ose procházející těžištěm kolmo na rovinu kotouče. Protože uvažujeme ustálený stav, při němž se kotouč otáčí konstantní úhlovou rychlostí, hnací i odporové momenty jsou v rovnováze, momentová rovnice odpadá, resp. je řešena rovnicí  $\varphi = \omega t + \varphi_0$ , viz níže. [1]

Pro ustálený stav můžeme tedy psát:  $\ddot{\varphi} = 0$ ,  $\dot{\varphi} = \text{konst} = \omega$ ,  $\varphi = \omega t + \varphi_0$ . Pak platí:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_H + \Omega^2 y_H &= \varepsilon \omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) \\ \ddot{z}_H + \Omega^2 z_H &= \varepsilon \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) \end{aligned}$$

Uvažujeme tedy dále pouze translační kmity rotoru.

Protože  $\varphi_0$  je libovolná integrační konstanta, volbou vhodného časového počátku ji můžeme anulovat ( $\varphi_0 = 0$ ). Pak:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_H + \Omega^2 y_H &= \varepsilon \omega^2 \cos \omega t \\ \ddot{z}_H + \Omega^2 z_H &= \varepsilon \omega^2 \sin \omega t \end{aligned} \quad (6)$$

Pro další úpravu je účelné převést souřadný systém do komplexní roviny, kdy reálnou část představuje souřadnice ve směru osy  $y$  a imaginární část souřadnice ve směru osy  $z$ . Tato úprava podstatně zjednoduší zápis i matematické operace s rovnicemi.

Zavedeme tedy substituci:

$$\begin{aligned} r_H &= y_H + iz_H \\ r_T &= y_T + iz_T \end{aligned} \quad (7)$$

Dostaneme následující tvar pohybové rovnice:

$$\ddot{r}_H + \Omega^2 r_H = \varepsilon \omega^2 [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] \quad (8)$$

a s využitím Eulerových vztahů  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ :

$$\ddot{r}_H + \Omega^2 r_H = \varepsilon \omega^2 e^{i\omega t} \quad (9)$$

Jedná se o nehomogenní lineární diferenciální rovnici. Obecné řešení této rovnice sestává z řešení homogenního  $r_{Ho}$  a řešení partikulárního  $r_{He}$ .

Homogenním řešením této rovnice je:

$$r_{Ho} = \hat{r}_{Ho1} e^{i\Omega t} + \hat{r}_{Ho2} e^{-i\Omega t} \quad (10)$$

kde  $\hat{r}_{Ho1}$  a  $\hat{r}_{Ho2}$  jsou komplexní integrační konstanty, které lze určit z počátečních podmínek – výchylek a rychlostí v čase  $t = 0$ .

Řešení homogenního tvaru se skládá ze dvou navzájem protiběžných kruhových pohybů s úhlovou rychlostí  $\Omega$ . Jejich superpozicí vznikne elipsa s hlavní poloosou  $|\hat{r}_{Ho1}| + |\hat{r}_{Ho2}|$  a vedlejší poloosou  $|\hat{r}_{Ho1}| - |\hat{r}_{Ho2}|$ . Při  $|\hat{r}_{Ho1}| = |\hat{r}_{Ho2}|$  přejde rovnice v přímku. Smysl pohybu závisí na tom, který poloměr je větší – tedy na počátečních podmínkách.

Obecně je tedy rovnice (10) parametrickým vyjádřením elipsy a bod H opisuje eliptickou dráhu. Homogenní řešení rovnice (9) představuje vlastní kmitání, které následkem malého tlumení, ve výpočtu zanedbaného, pomalu doznívá. Je tedy pouze přechodovým dějem, trvale zůstane pouze vynucené kmitání.

Partikulární řešení diferenciální rovnice pak lze vzhledem k tvaru pravé strany nalézt ve tvaru  $r_{He} = \hat{r}_{He} e^{i\omega t}$  a po dosazení:

$$r_{He} = \varepsilon \frac{\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} e^{i\omega t} \quad (11)$$

Když zavedeme tzv. poměrné naladění:

$$\eta = \frac{\omega}{\Omega}, \quad (12)$$

přejde rovnice (11) do tvaru:

$$r_{He} = \varepsilon \frac{\eta^2}{1 - \eta^2} e^{i\omega t} \quad (13)$$

Jedná se o vynucené kmitání vyvolané nevyvážeností rotoru, které se superponuje na vlastní kmity. Protože vlastní kmity postupně odezní, dále bude uvažováno pouze vynucené kmitání.

Protože výraz  $e^{i\omega t}$  představuje jednotkový vektor rotující úhlovou rychlostí  $\omega$ , platí pro amplitudu výchylky vynucených kmitů:

$$|r_{He}| = |\hat{r}_{He}| = \varepsilon \left| \frac{\eta^2}{1 - \eta^2} \right| \quad (14)$$

Rovnice (13) představuje parametrické vyjádření kružnice o poloměru  $|r_{He}|$ , kterou obíhá střed hřídele H s úhlovou frekvencí  $\omega$ .

Frekvence vynuceného krouživého kmitání souhlasí s úhlovou frekvencí hřídele  $\omega$ . Amplitudy jsou úměrné excentricitě  $\varepsilon$  a závisí na úhlové frekvenci rotoru  $\omega$ . Pro  $\eta \rightarrow 1$ , kdy souhlasí frekvence  $\omega$  a  $\Omega$ , narůstají amplitudy výchylek nad všechny meze. Stav, kdy  $\omega = \Omega$ , se označuje jako *kritické otáčky rotoru* a je pro rotor mimořádně nebezpečný. Provozně nebezpečné je celé pásmo v jejich blízkosti, neboť výkmity výchylek jsou neúnosně velké a mohlo by dojít k trvalým deformacím nebo i k vymezení vůle.

Nebot' pro souřadnice těžiště platí, že:

$$r_T = r_H + \varepsilon e^{i\omega t}, \quad (15)$$

dostaneme po dosazení také závislost výchylky těžiště na  $\omega$ .

$$r_{T\varepsilon} = \varepsilon \frac{1}{1 - \eta^2} e^{i\omega t} \quad (16)$$

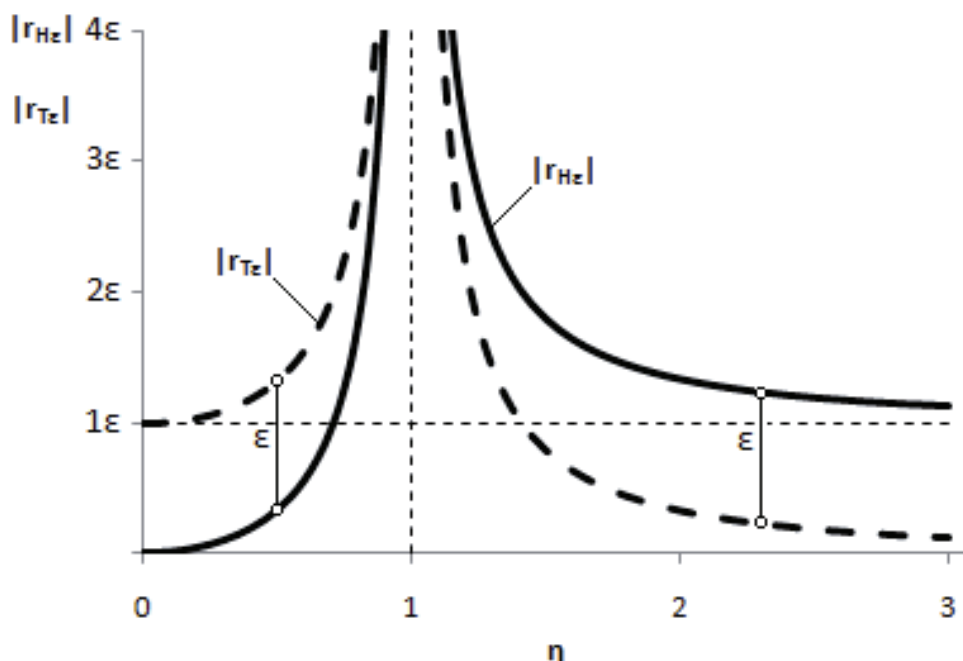
Pro amplitudu výchylky těžiště platí:

$$|r_{T\varepsilon}| = \varepsilon \left| \frac{1}{1 - \eta^2} \right| \quad (17)$$

Těžiště kotouče opisuje obdobně jako střed hřídele kružnici o poloměru  $|r_{T\varepsilon}|$  s úhlovou rychlostí  $\omega$ . Střed kotouče H i těžiště obíhají po soustředných kružnicích. Body H a T i počátek O leží stále na jedné přímce.

Hřídel rotuje v tomto statickém prohnutí, je namáhán pouze staticky, bez střídavých ohybových namáhání. [1]

Z rovnic (13) – (17) a Obr. 9 je dobře patrný fakt, že v oblasti pod kritickými otáčkami je výchylka těžiště větší o excentricitu  $\varepsilon$  než výchylka středu hřídele H. Po překročení kritických otáček se však situace skokově změní a výchylka těžiště je o  $\varepsilon$  menší než výchylka středu hřídele. Při velmi vysokých otáčkách ( $\omega \gg \Omega$ ) se těžiště limitně blíží spojnici ložisek O. Průhyb rotoru je pak roven excentricitě  $\varepsilon$ . Jde o již zmíněné samostředění rotoru. Stabilita tohoto jevu je způsobena Coriolisovým zrychlením. [1]



Obr. 9: Závislost amplitud vynucené výchylky těžiště a středu hřídele na naladění  $\eta$

### Vliv vlastní tíže kotouče

Uvedené rovnice platí jen pro svisle uložené hřídele nebo při zanedbání tíhového zrychlení. U vodorovně uložených hřídelů se projeví vliv vlastní tíže.

Pokud je rotor uložen horizontálně směřuje tíhová síla  $mg$  ve směru osy  $z$  v pevném souřadném systému zavedeném v předchozí části. Proto je rovnice (9) rozšířena o vliv tíže.

$$\ddot{r}_H + \Omega^2 r_H = \varepsilon \omega^2 e^{i\omega t} + ig \quad (18)$$

Řešení diferenciální rovnice sestává z již uvedených řešení homogenního ( $r_{Ho}$ ) a partikulárního ( $r_{He}$ ), navíc se však objeví další partikulární člen  $r_{Hg}$ , vyjadřující vliv tíže.

$$r_H = r_{Ho} + r_{He} + r_{Hg} \quad (19)$$

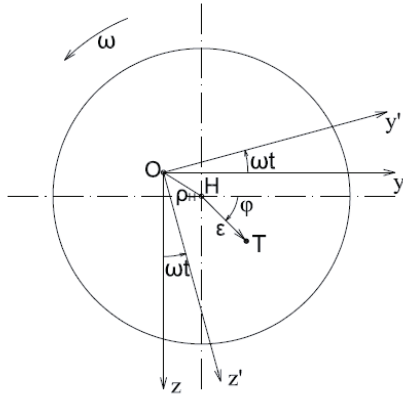
Po dosazení řešení do rovnice (18) dostáváme:

$$r_{Hg} = i \frac{g}{\Omega^2} = i \frac{mg}{k} \quad (20)$$

Člen  $r_{Hg} = konst$  je na čase i na úhlové rychlosti nezávislý a znamená konstantní posunutí o hodnotu statického průhybu hřídele vlivem tíže.

### 1.2.2 Odvození pro spolurotující souřadný systém

Často, např. při vyšetřování vnitřních třecích sil, je účelné použít souřadnicový systém, který rotuje spolu s hřídelem úhlovou rychlostí  $\omega$ . Oproti pevnému je tento souřadný systém pootočen za určitý čas o úhel  $\omega t$ . V podstatě se na systém díváme, jako bychom rotovali spolu s kotoučem.



Obr. 10: Spolurotující souřadný systém – osy  $y'$  a  $z'$  rotují spolu s kotoučem

Mezi pevným a rotujícím souřadným systémem platí transformační vztahy:

$$\varrho = r e^{-i\omega t} \quad (21)$$

a naopak

$$r = \varrho e^{i\omega t} \quad (22)$$

Abychom do spolurotujícího souřadného systému převedli rovnici (9), resp. (18), musíme nejprve derivovat dvakrát podle času rovnici (22) pro  $r_H$ :

$$\dot{r}_H = (\dot{\varrho}_H + i\omega \varrho_H) e^{i\omega t} \quad (23)$$

$$\ddot{r}_H = (\ddot{\varrho}_H + 2i\omega \dot{\varrho}_H - \omega^2 \varrho_H) e^{i\omega t} \quad (24)$$

Výrazy v závorce v rovnici (24) odpovídají v uvedeném pořadí zrychlení relativnímu, Coriolisovu a odstředivému.

Po dosazení rovnic (22), (23) a (24) do rovnice (18) a následném dělení výrazem  $e^{i\omega t}$ :

$$\ddot{q}_H + 2i\omega\dot{q}_H + (\Omega^2 - \omega^2)q_H = \varepsilon\omega^2 + i g e^{-i\omega t} \quad (25)$$

Řešení diferenciální rovnice se skládá opět z řešení homogenního a partikulárního, při uvažování tíže u horizontálně uložených hřídelů počítáme ještě s ještě dalším partikulárním členem, obdobně jako u pevného souřadného systému.

$$q_H = q_{Ho} + q_{H\varepsilon} + q_{Hg} \quad (26)$$

Obecné řešení homogenního tvaru rovnice je:

$$q_{Ho} = \hat{q}_{Ho1} e^{i(\Omega-\omega)t} + \hat{q}_{Ho2} e^{-i(\Omega+\omega)t} \quad (27)$$

Pro partikulární řešení zjistíme, že  $q_{H\varepsilon} = konst$  a při zavedení poměrného útlumu  $\eta = \omega/\Omega$ :

$$q_{H\varepsilon} = \varepsilon \frac{\eta^2}{1 - \eta^2} e^{i\omega t} \quad (28)$$

Vzhledem k tomu, že řešení homogenní rovnice vyjadřuje přechodový děj, který časem odezní, uvažujeme dále pouze partikulární řešení. Z něj vyplývá, že poloha nevyvážky je v rotujícím souřadném systému konstantní, nezávisí na úhlové rychlosti. Z pohledu hřídele se tak jedná o statické zatížení.

$$|q_{H\varepsilon}| = |r_{H\varepsilon}| = \varepsilon \left| \frac{\eta^2}{1 - \eta^2} \right| \quad (29)$$

Vzdálenost k počátku je stejná jako v pevném souřadném systému. V něm však nevyvážek rotuje po kruhové dráze.

Pro úplnost ještě zbývá určit vliv tíže, který je dán:

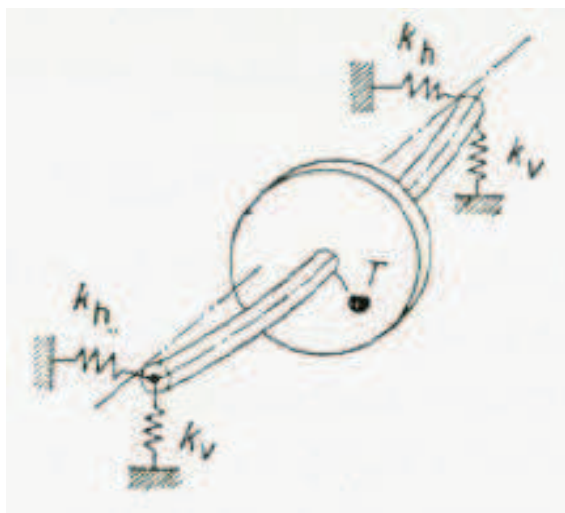
$$q_{Hg} = i \frac{g}{\Omega^2} = i \frac{mg}{k} e^{-i\omega t} \quad (30)$$

V rotujícím souřadném systému, na rozdíl od pevného systému, představuje tíže dynamické zatížení o úhlové rychlosti rotoru, rotující v opačném směru než hřídel.

### 1.3 Netlumený Lavalův rotor uložený v pružných ložiskových podpěrách

Výše uvedené vztahy vycházejí z předpokladu hřídele uloženého v absolutně tuhých ložiskových podpěrách. Tento předpoklad platí prakticky v případech, kdy tuhost hřídele  $k$  je alespoň o řád nižší, než je tuhost uložení. V případě, že je uložení méně tuhé, projeví se významně poddajnost ložisek, což má vliv na kritické otáčky.

Obvykle nejsou tuhosti ve vertikálním a v horizontálním směru stejné, uložení je tzv. anizotropní. Rotační symetrie je při běžných konstrukcích ložiskových stojanů porušena patkami. Nejčastěji bývá tuhost v horizontálním směru  $k_h$  menší než tuhost  $k_v$  ve směru vertikálním ( $k_h$  bývá cca  $(1/3 \div 1/2)k_v$ ). Naproti tomu u vertikálně uložených rotorů jsou tuhosti velice podobné, takže lze považovat uložení za izotropní.



V důsledku anizotropie uložení se u hřídele objeví dvojí kritické otáčky, nejčastěji těsně sousedící, které jsou nižší než u tuze uložených rotorů. Zatímco u tuhého uložení (a také u izotropně pružného) obíhá střed hřídele vlivem nevyváženosti kruhovou dráhu, u anizotropního uložení se pohybuje po dráze eliptické. V závislosti na otáčení může tuto elipsu obíhat ve směru, ale také proti směru otáčení hřídele.

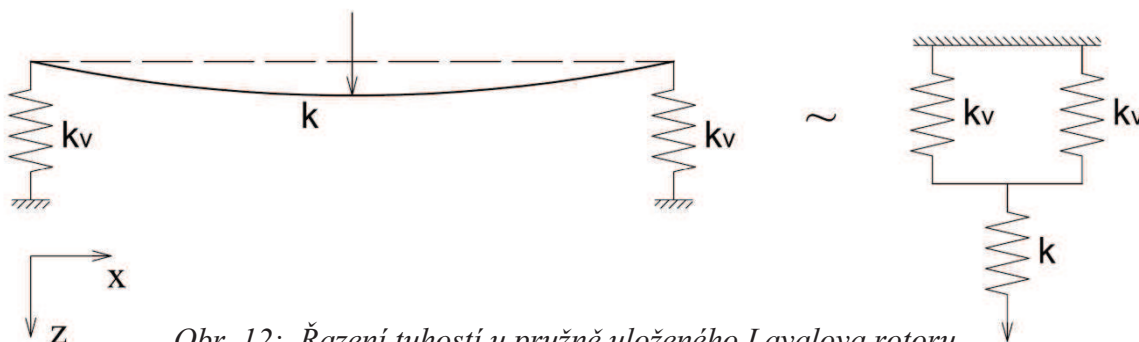
Obr. 11: Pružně uložený Lavalův rotor [1]

Rovnice silové rovnováhy jsou analogické s rovnicí (2) na str. 8:

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_T + k_y y_H &= 0 \\ m\ddot{z}_T + k_z z_H &= mg \end{aligned} \quad (31)$$

Zde členy  $k_y$  a  $k_z$  představují tuhosti do směrů os  $y$  a  $z$ . Ve směru osy  $z$  působí tíhové zrychlení.

Tuhosti uložení jsou řazeny s tuhostí hřídele  $k$  sériově (viz Obr. 12), takže z nich dostaneme výrazy pro tuhosti  $k_y$  a  $k_z$  v místě upevnění kotouče.



Obr. 12: Řazení tuhostí u pružně uloženého Lavalova rotoru

Pro sériově řazené tuhosti ve směru osy  $z$  platí:

$$k_z: \frac{1}{k_z} = \frac{1}{k} + \frac{1}{2k_v} \quad (32)$$

Z toho pak určíme tuhost  $k_z$  a analogicky tuhost  $k_y$ :

$$k_z = \frac{2k_v \cdot k}{2k_v + k}, \quad k_y = \frac{2k_h \cdot k}{2k_h + k} \quad (33)$$

Pro další odvození uvažujeme stejně jako u tuhého uložení ustálený stav, tj. předpokládáme:

$$\ddot{\varphi} = 0, \quad \dot{\varphi} = \text{konst} = \omega, \quad \varphi = \omega t + \varphi_0, \quad (34)$$

přičemž integrační konstantu  $\varphi_0$  můžeme vhodnou volbou časového počátku anulovat.

Stejně tak pro vzájemnou polohu souřadnic těžiště a středu hřídele platí:

$$\begin{aligned} y_T &= y_H + \varepsilon \cos \varphi \\ z_T &= z_H + \varepsilon \sin \varphi \end{aligned} \quad (35)$$

Takže po dosazení do (31):

$$\begin{aligned} m(\ddot{y}_H - \varepsilon \omega^2 \cos \omega t) + k_y y_H &= 0 \\ m(\ddot{z}_H - \varepsilon \omega^2 \sin \omega t) + k_z z_H &= mg \end{aligned} \quad (36)$$

a další úpravě:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_H + \Omega_y^2 y_H &= \varepsilon \omega^2 \cos \omega t \\ \ddot{z}_H + \Omega_z^2 z_H &= g + \varepsilon \omega^2 \sin \omega t \end{aligned} \quad (37)$$

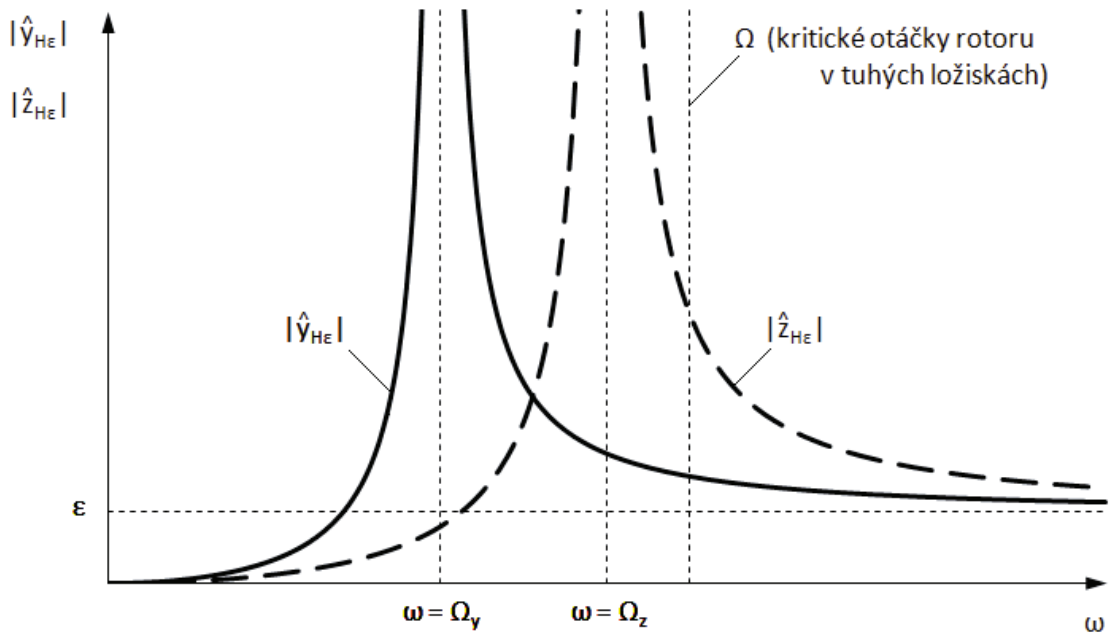
Úplným řešením těchto diferenciálních rovnic je superpozice řešení homogenního i partikulárního tvaru rovnice. Když rovnou zanedbáme homogenní řešení, představující volné kmitání, které následkem velmi malého tlumení po čase dozní, zůstanou nám pouze rovnice popisující ustálený vynucený pohyb:

$$\begin{aligned} y_H &= y_{H\varepsilon} = \varepsilon \frac{\omega^2}{\Omega_y^2 - \omega^2} \cos \omega t = \hat{y}_{H\varepsilon} \cos \omega t \\ z_H &= z_{H\varepsilon} + z_{Hlg} = \varepsilon \frac{\omega^2}{\Omega_z^2 - \omega^2} \sin \omega t + \frac{g}{\Omega_z^2} = \hat{z}_{H\varepsilon} \sin \omega t + \frac{mg}{k_z} \end{aligned} \quad (38)$$

Člen  $z_{Hlg}$  představuje statické buzení, dále s ním již počítat nebudeme.

Vlastní úhlové rychlosti jsou dvě,  $\Omega_y = \sqrt{k_y/m}$  a  $\Omega_z = \sqrt{k_z/m}$ , které nejsou pro anizotropní uložení z důvodu rozdílné tuhosti v horizontálním a ve vertikálním směru totožné.

Vzniknou tak dvojí kritické otáčky, nižší než kritické otáčky rotoru v tuhém uložení.



Obr. 13: Výchylky  $y_{H\varepsilon}$  a  $z_{H\varepsilon}$  v závislosti na  $\omega$

Střed hřídele  $H$  se pohybuje po eliptické dráze. Rovnici elipsy, kterou opisuje lze dostat úpravou rovnic (38):

$$\left(\frac{y_{H\varepsilon}}{\hat{y}_{H\varepsilon}}\right)^2 + \left(\frac{z_{H\varepsilon}}{\hat{z}_{H\varepsilon}}\right)^2 = 1 \quad (39)$$

Poloosy této elipsy jsou ve směrech souřadnicových os a platí pro ně:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{H\varepsilon} &= \varepsilon \frac{\omega^2}{\Omega_y^2 - \omega^2} = \varepsilon \frac{\eta_y^2}{1 - \eta_y^2} \\ \hat{z}_{H\varepsilon} &= \varepsilon \frac{\omega^2}{\Omega_z^2 - \omega^2} = \varepsilon \frac{\eta_z^2}{1 - \eta_z^2} \end{aligned} \quad (40)$$

Pro vyšetření smyslu pohybu středu hřídele  $H$  je účelné převést nyní problém do komplexní roviny  $y - iz$ . Proto vyjádříme výchylky  $y_{H\varepsilon}$  a  $z_{H\varepsilon}$  jako komplexní veličinu  $r_{H\varepsilon}$ .

$$r_{H\varepsilon} = y_{H\varepsilon} + iz_{H\varepsilon} = \hat{y}_{H\varepsilon} \cos \omega t + i \hat{z}_{H\varepsilon} \sin \omega t \quad (41)$$

Výraz můžeme převést pomocí Eulerových vztahů:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \\ \sin \varphi &= -\frac{1}{2}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) \end{aligned} \quad (42)$$

Pak:

$$\begin{aligned} r_{H\varepsilon} &= \frac{\hat{y}_{H\varepsilon} + i\hat{z}_{H\varepsilon}}{2} e^{i\omega t} + \frac{\hat{y}_{H\varepsilon} - i\hat{z}_{H\varepsilon}}{2} e^{-i\omega t} \\ r_{H\varepsilon} &= r_+ \cdot e^{i\omega t} + r_- \cdot e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (43)$$

První výraz vyjadřuje v komplexní rovině kružnici o poloměru  $|r_+|$  a se souhlasným smyslem otáčení vůči rotaci hřídele. Druhý výraz je pak vyjádřením kružnice o poloměru  $|r_-|$  s opačným smyslem rotace vůči otáčení hřídele. Superpozicí obou kruhových pohybů vznikne elipsa, jejíž smysl otáčení je závislý na velikosti poloměrů  $|r_+|$  a  $|r_-|$ . Mohou nastat tyto tři případy:

$$\begin{aligned} |r_+| &> |r_-| && \text{elipsa rotující ve smyslu otáčení hřídele – tzv. souběžná precese} \\ |r_+| &< |r_-| && \text{elipsa rotující proti smyslu otáčení hřídele – tzv. protiběžná precese} \\ |r_+| &= |r_-| && \text{oscilace po přímce (degenerovaná elipsa)} \end{aligned}$$

Abychom získali amplitudu souběžného i protiběžného precesního pohybu, dosadíme výrazy pro  $\hat{y}_{H\varepsilon}$  a  $\hat{z}_{H\varepsilon}$  do rovnice (41).

$$\begin{aligned} r_+ &= \frac{\varepsilon \omega^2}{2} \cdot \frac{\Omega_z^2 + \Omega_y^2 - 2\omega^2}{(\Omega_y^2 - \omega^2)(\Omega_z^2 - \omega^2)} \\ r_- &= \frac{\varepsilon \omega^2}{2} \cdot \frac{\Omega_z^2 - \Omega_y^2}{(\Omega_y^2 - \omega^2)(\Omega_z^2 - \omega^2)} \end{aligned} \quad (44)$$

Za předpokladu, že tuhost ve směru osy  $z$  je menší než ve směru osy  $y$ , je  $\Omega_y < \Omega_z$ . Z rovnice (44) lze pak vyšetřit následující:

V pásmu  $0 < \omega < \Omega_y$  se kotouč pohybuje po eliptické dráze souběžně s otáčkami hřídele, převládá souběžná precese (složka protiběžného pohybu  $e^{-i\omega t}$  se však vyskytuje také).

V otáčkovém pásmu mezi oběma kritickými otáčkami  $\Omega_y < \omega < \Omega_z$  převládá protiběžná precese, kotouč obíhá elipsu v opačném smyslu vůči smyslu rotace hřídele.

V bodě, kdy otáčky dosáhnou hodnoty  $\omega = \sqrt{(\Omega_y^2 + \Omega_z^2)}/2$ , se vyskytuje pouze protiběžná precese, neboť  $r_+ = 0$ . Tehdy se kotouč pohybuje po kruhové dráze o poloměru  $|r_-|$  proti smyslu otáčení hřídele.

Zatímco pro menší otáčky je  $|\hat{y}_{H\varepsilon}| > |\hat{z}_{H\varepsilon}|$  a elipsa má hlavní poloosu ve směru osy  $y$ , kde je větší výchylka, pro tyto otáčky  $|\hat{y}_{H\varepsilon}| = |\hat{z}_{H\varepsilon}|$ , jsou obě poloosy stejně veliké, což potvrzuje, že se jedná o kružnici. Pro větší otáčky je pak  $|\hat{y}_{H\varepsilon}| < |\hat{z}_{H\varepsilon}|$  a hlavní poloosa elipsy leží ve směru osy  $z$ . Viz také Obr. 12, str. 15.

V pásmu  $\omega > \Omega_z$ , při větších otáčkách, než jsou druhé kritické otáčky, převládá opět souběžná precese a kotouč se pohybuje souběžně s hřídelem.

Při velmi vysokých otáčkách  $\omega \gg \Omega_z$  se opět  $|\hat{y}_{H\varepsilon}| \doteq |\hat{z}_{H\varepsilon}|$ , pak dle rovnice (44)  $r_+ \rightarrow \varepsilon$  a  $r_- \rightarrow 0$ . Eliptická dráha se mění opět v kruhovou s poloměrem rovným hodnotě vyosení těžiště kotouče  $\varepsilon$ .

Při rezonančních stavech  $\omega = \Omega_y$  a  $\omega = \Omega_z$  se mění souběžný pohyb v protiběžný a naopak. Elipsy zdegenerují ( $|\hat{y}_{H\varepsilon}| \rightarrow \infty$  resp.  $|\hat{z}_{H\varepsilon}| \rightarrow \infty$ ) a výchylky vynuceného netlumeného kmitání dosahují nekonečně vysokých hodnot.

## 1.4 Problematika tlumení

Výše uvedené vztahy pro kmitání Lavalova rotoru platí pouze za předpokladu, že zanedbáme vliv tlumení. V praktických úlohách to má své opodstatnění, neboť u hřídelů uložených ve valivých ložiskách má tlumení minimální vliv. Sice snižuje amplitudy výchylek v rezonanci na konečné hodnoty, které ale přesto zůstávají natolik veliké, že ustálený provoz v rezonanci nebo v její těsné blízkosti není možný, mohlo by dojít k vymezení vůlí mezi rotorem a statorem. Tudiž i u tlumených systémů musíme přejíždět rezonanční oblast rychle. Při malém tlumení je poloha kritických otáček takřka totožná s netlumeným systémem, proto ji lze s dostatečnou přesností určit výpočtem netlumeného systému.

Na první pohled by se zdálo, že tlumení snižuje výchylky kmitání a stabilizuje tak rotor, což je většinou pravda. Přesto však dochází k situacím, kdy se vlivem tlumení kmitání systémů zvětšuje. To je důsledek jiného druhu tlumení – tzv. vnitřního tlumení, způsobeného deformací hřídele za rotace. Podrobněji bude tento jev probrán dále.

### 1.4.1 Vnější tlumení a jeho vliv na kmitání rotorů

Vnější tlumení vzniká pohybem rotujícího hřídele ve viskózním prostředí, které ho obklopuje. Síly vyvolané tlumením prostředí jsou úměrné rychlosti pohybu hřídele a působí proti směru pohybu rotoru.

Pro vyšetření vlivu tlumení zavedeme do pohybové rovnice rotoru v pevném souřadném systému člen vnějšího tlumení označený jako  $b_1$ .

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_H + b_1\dot{y}_H + ky_H &= m\varepsilon\omega^2 \cos \omega t \\ m\ddot{z}_H + b_1\dot{z}_H + kz_H &= m\varepsilon\omega^2 \sin \omega t + mg \end{aligned} \quad (45)$$

V rovnicích se předpokládají tuhosti i tlumení stejné jak v horizontálním, tak i vertikálním směru.

Rovnici (45) převedeme pro další vyšetření do komplexní roviny a dostaneme výraz:

$$\ddot{r}_H + \frac{b_1}{m}\dot{r}_H + \Omega^2 r_H = \varepsilon\omega^2 e^{i\omega t} + ig, \quad (46)$$

kde opět  $\Omega^2 = k/m$ . Při porovnání s rovnicí (18) (str. 12) je patrné, že zde přibyl další člen úměrný rychlosti pohybu.

Řešení této diferenciální rovnice lze najít za použití Laplaceovy transformace bez uvažování počátečních podmínek. Nejprve bude uvažován homogenní tvar rovnice (46).

$$s^2 \tilde{r}_H + s \frac{b_1}{m} \tilde{r}_H + \Omega^2 \tilde{r}_H = 0 \quad (47)$$

Pro netriviální řešení  $\tilde{r}_H \neq 0$ . Potom lze psát charakteristickou rovnici:

$$s^2 + \frac{b_1}{m}s + \Omega^2 = 0, \quad (48)$$

jejímž řešením je komplexní proměnná  $s$ .

$$s_{1,2} = -\frac{b_1}{2m} \pm i\Omega \sqrt{1 - \left(\frac{b_1}{2\Omega m}\right)^2} \quad (49)$$

Pro výraz  $b_1/2\Omega m$  nyní zavedeme veličinu  $b_p$  vyjadřující míru tlumení, tzv. poměrný útlum. Poměrný útlum je materiálovou konstantou, vyjadřuje poměr tlumení vůči kritickému tlumení  $b_{kr} = 2\Omega m = 2\sqrt{km}$ , což je nejnižší tlumení při kterém mají vlastní čísla imaginární část rovnou nule, jak vyplývá z rovnice (49).

$$b_p = \frac{b_1}{2\Omega m} = \frac{b_1}{2\sqrt{km}} = \frac{b_1}{b_{kr}} \quad (50)$$

Rovnice (49) vyjádřená pomocí poměrného útlumu má potom tvar:

$$s_{1,2} = -\Omega b_p \pm i\Omega \sqrt{1 - b_p^2} \quad (51)$$

Imaginární část  $s_{1,2}$ , která vyjadřuje vlastní úhlovou rychlost (resp. frekvenci) tlumeného kmitání, se označuje také jako  $\Omega_t$ . Mezi vlastními úhlovými rychlostmi netlumeného systému a systému s uvažovaným tlumením platí vztah:

$$\Omega_t = \Omega \sqrt{1 - b_p^2} \quad (52)$$

Oproti netlumenému systému jsou kritické otáčky vlivem tlumení sníženy. Protože vnější tlumení bývá nepatrné ( $b_p \ll 1$ ), je hodnota  $\Omega_t$  prakticky shodná s  $\Omega$ .

Vlastní homogenní řešení rovnice (46) má tvar:

$$r_{Ho} = \hat{r}_{Ho1} e^{s_1 t} + \hat{r}_{Ho2} e^{s_2 t} \quad (53)$$

Zde  $\hat{r}_{Ho1}$  a  $\hat{r}_{Ho2}$  jsou opět integrační konstanty, které lze určit z počátečních podmínek.

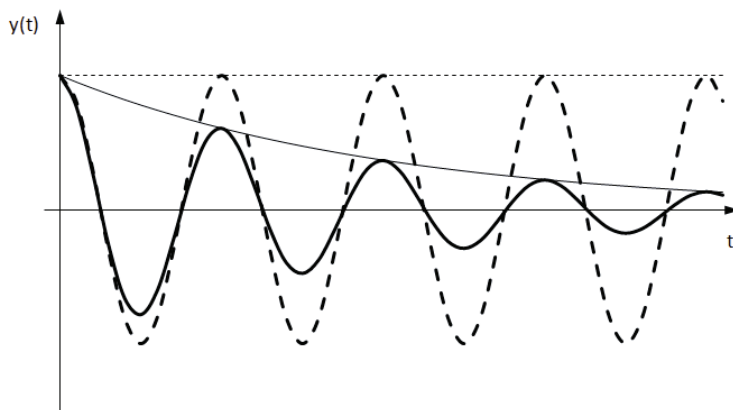
Komplexní proměnná  $s = \alpha \pm i\omega$  je tzv. vlastní číslo. Jeho imaginární část  $i\omega$  tedy obecně vyjadřuje úhlovou rychlost kmitání.

Oproti netlumenému systému však obsahuje navíc také reálnou část, která se projevuje při kmitání tak, že s časem se mění amplituda výchylek, která je při zanedbání tlumení s časem konstantní.

Jak vyplývá z rovnice (51) při dosažení a překročení kritického útlumu ( $b_p \geq 1$ ), nebude vlastní číslo obsahovat imaginární část, pohyb bude aperiodický.

U systému tlumeného vnějším tlumením mohou tedy nastat případy:

a)  $b_p < 1$  – systém kmitá s vlastní úhlovou rychlostí  $\Omega_t$ . Průběh pohybu kotouče je popsán obdobně jako u netlumeného systému elipsou, avšak se s časem se zmenšujícími poloosami. Vlivem reálného členu vlastního čísla  $\alpha$  se pohyb utlumuje, až v průběhu času vymizí. Při nulovém tlumení  $b_p = 0$  je reálná část vlastního čísla nulová, amplituda kmitání se s časem nemění, systém kmitá s vlastní úhlovou rychlostí  $\Omega$ . Rovnice (53) popisuje vlastní kmity netlumeného rotoru.



Obr. 14: Srovnání kmitání netlumeného systému (čárkovaně) a systému s malým tlumením (plná čára)

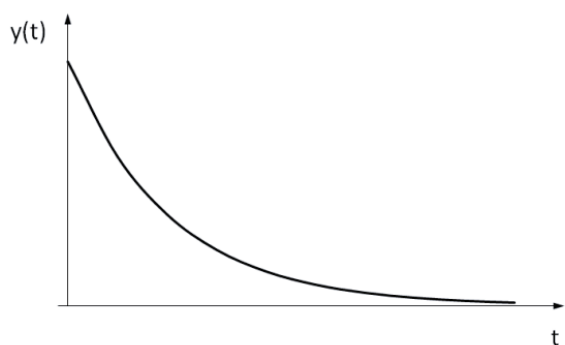
b)  $b_p = 1$  – vlastní číslo má pouze reálnou část  $s = -\Omega$ , která je při působení vnějšího tlumení vždy záporná. Nikdy nedojde ke kmitavému ději. Systém se z vychýleného stavu vrátí do původní polohy.

$$r_{Ho} = \hat{r}_{Ho} e^{st} = \hat{r}_{Ho} e^{-\Omega t} \quad (54)$$

c)  $b_p > 1$  – obdobně jako u b) je vlastní číslo  $s$  reálné, protože řešením rovnice (48) je:

$$s_{1,2} = -\Omega b_p \pm \Omega \sqrt{b_p^2 - 1} \quad (55)$$

Obě vlastní čísla  $s_1$  i  $s_2$  jsou záporná reálná čísla, takže pohyb bude opět aperiodický s klesající výchylkou.



Obr. 15: Výchylka rotoru v závislosti na čase při aperiodickém pohybu (b) a (c)

Při velkém vnějším tlumení tedy nebude soustava vůbec kmitat, ale vrátí se do původní polohy.

Vlastní kmitání u systému tlumeného pouze vnějším tlumením tak po čase vždy odezní. Ustálený kmitavý pohyb buzený nevyvázkem je popsán partikulárním řešením rovnice (46). Řešení nalezneme opět podle tvaru pravé strany:

$$r_{H\varepsilon} = \hat{r}_{H\varepsilon} e^{i\omega t} \quad (56)$$

Po dosazení do (46):

$$\hat{r}_{H\varepsilon} \left( \Omega^2 - \omega^2 + i\omega \frac{b_1}{m} \right) = \varepsilon \omega^2 \quad (57)$$

A pomocí zavedených veličin  $\eta$  a  $b_p$  lze vyjádřit  $\hat{r}_{H\varepsilon}$  jako:

$$\hat{r}_{H\varepsilon} = \varepsilon \frac{\eta^2}{(1 - \eta^2) + 2ib_p\eta} = \varepsilon \frac{\eta^2[(1 - \eta^2) - 2ib_p\eta]}{(1 - \eta^2)^2 + (2b_p\eta)^2} \quad (58)$$

Pokud nebudeme uvažovat tlumení ( $b_p = 0$ ), přejde rovnice ve vztah pro výchylku vynuceného kmitání netlumeného systému (viz rovnice (14), str. 10):

$$r_{H\varepsilon} = \varepsilon \frac{\eta^2[(1 - \eta^2) - 2ib_p\eta]}{(1 - \eta^2)^2 + (2b_p\eta)^2} e^{i\omega t} \quad (59)$$

Amplituda  $\hat{r}_{H\varepsilon}$  je stále úměrná excentricitě  $\varepsilon$ , ale protože je komplexním číslem s nenulovou imaginární složkou, nebude výchylka středu kotouče  $r_{H\varepsilon}$  přesně ve směru  $\varepsilon$ . Body  $O$ ,  $H$  a  $T$  tak již neleží na přímce jako u netlumeného systému. Vektory excentricity  $\varepsilon$  a výchylky  $r_{H\varepsilon}$  svírají fázový úhel  $\varphi$ , pro který platí:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2b_p\eta}{1 - \eta^2} \quad (60)$$

Fázový úhel je funkcí poměrného útlumu a naladění. Oproti netlumenému systému, kde se mění při překročení kritických otáček skokově o  $180^\circ$ , se při  $b_p \neq 0$  mění úhel  $\varphi$  spojitě.

Poloměr kruhové dráhy, po které se střed kotouče  $H$  pohybuje, je:

$$|\hat{r}_{H\varepsilon}| = \frac{\varepsilon \eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2b_p\eta)^2}} \quad (61)$$

Velikost výchylky vynuceného kmitání tak i v rezonanci nabývá konečných hodnot, a to maximálně asi  $\varepsilon/(2b_p)$ . Při malém tlumení nejsou, až na oblast rezonance, velké odchylky mezi tlumeným a netlumeným systémem. U větších tlumení jsou velikosti výchylek ve větším rozsahu  $\eta$  nižší než u netlumeného systému a maxima výchylek jsou posunuta do větších  $\eta$ .

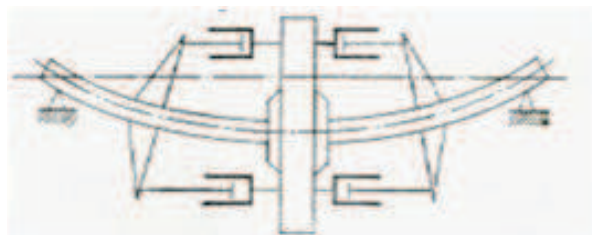
Pro úplnost je uvedena závislost výchylky těžiště, pro kterou platí dle již uvedených vztahů:

$$\hat{r}_{T\varepsilon} = (\hat{r}_{H\varepsilon} + \varepsilon)e^{i\omega t} = \left( \varepsilon \frac{\eta^2}{(1 - \eta^2) + 2ib_p\eta} + \varepsilon \right) e^{i\omega t} \quad (62)$$

Také vzájemná poloha těžiště a středu hřídele se na rozdíl od netlumeného systému, kde se při  $\eta = 1$  těžiště náhle překlopí směrem k ose ložisek, mění spojitě s rostoucími otáčkami (pomalu se přesouvá směrem dovnitř).

### 1.4.2 Vnitřní (materiálové) tlumení

Vnitřní tlumení je, na rozdíl od vnějšího, vyvoláno deformací hřídele při kmitání. Lze si je dobře představit, tak že předpokládáme, že vlákna materiálu mají kromě pružných také tlumící vlastnosti. Materiálové tlumení je tedy stejně jako tuhost vlastností materiálu a geometrických rozměrů rotoru.



Obr. 16: Model pro znázornění působení viskózního materiálového tlumení u Lavalova rotoru [1]

U nerotujícího hřídele má vnitřní tlumení stejný účinek jako vnější, působí proti směru pohybu. Jestliže ale hřídel rotuje, pak působí zcela rozdílně. Zatímco síly vybuzečné vnějším tlumením jsou úměrné absolutním rychlostem v pevném souřadném systému, tlumící síly materiálového tlumení jsou úměrné relativním rychlostem v souřadném systému rotujícím spolu s hřídelí úhlovou rychlostí  $\omega$ .

Pro odvození účinků vnitřního tlumení je tak potřeba vyjít z pohybové rovnice platné pro rotující souřadný systém (25) dle kapitoly 1.2.2, do které zavedeme člen vnitřního tlumení, označený  $b_2$ .

$$\ddot{q}_H + \left( 2i\omega + \frac{b_2}{m} \right) \dot{q}_H + (\Omega^2 - \omega^2)q_H = \varepsilon\omega^2 + i g e^{-i\omega t} \quad (63)$$

Pro zjištění vlivu tlumení materiálu nás bude zajímat homogenní řešení této rovnice. Položíme tedy buzení rovno nule. Po Laplaceově transformaci bez uvažování počátečních podmínek a podělení  $\hat{q}_H$  získáme charakteristickou rovnici:

$$s^2 + (2i\omega + 2\Omega b_{p2})s + \Omega^2 - \omega^2 = 0 \quad (64)$$

Kde  $b_{p2} = b_2/(2\Omega m)$ .

Řešením rovnice je:

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -i\omega - \Omega b_{p2} \pm \sqrt{(\Omega b_{p2} + i\omega)^2 - \Omega^2 + \omega^2} = \\ &= -i\omega - \Omega b_{p2} \pm i\Omega \sqrt{1 - b_{p2}^2 - i2b_{p2} \frac{\omega}{\Omega}} \end{aligned} \quad (65)$$

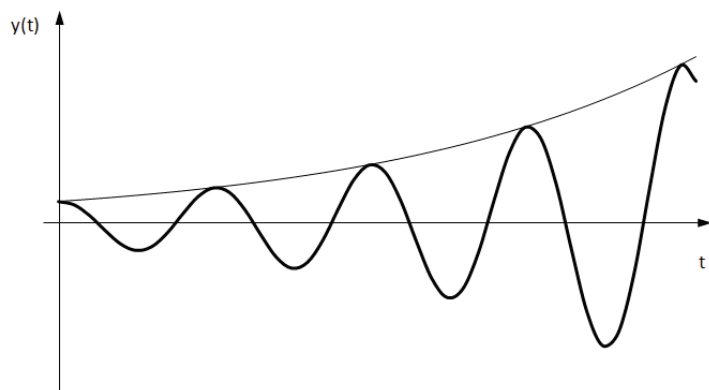
Při uvažování malého  $b_{p2}$  ( $b_{p2} \ll 1$ ) můžeme upravit výraz pod odmocninou tak, že čtverec  $b_{p2}$  rozšíříme výrazem  $\omega/\Omega$  a dostaneme přibližné řešení pro oba kořeny.

$$\begin{aligned} s_1 &= -i\omega - \Omega b_p + i\Omega + \omega b_p = -b_p(\Omega - \omega) - i(\omega - \Omega) \\ s_2 &= -i\omega - \Omega b_p - i\Omega - \omega b_p = -b_p(\Omega + \omega) - i(\omega + \Omega) \end{aligned} \quad (66)$$

Zatímco u kořene  $s_2$  je reálná část vždy záporná, takže je člen vždy stabilní, u kořene  $s_1$  tomu tak být nemusí. Kořen bude mít kladnou reálnou část, když  $\Omega < \omega$ . Potom bude homogenní řešení (66) s časem růst právě kvůli členu  $s_1$ .

$$\varrho_{Ho} = \hat{\varrho}_{Ho1} e^{s_1 t} + \hat{\varrho}_{Ho2} e^{s_2 t} \quad (67)$$

V oblasti nad kritickými otáčkami tedy není možný stabilní běh rotoru s ohledem na vnitřní tlumení materiálu. Nelze překročit vlastní frekvenci, neboť bezprostředně za ní dochází k samobuzenému kmitání, pokud není tlumeno dostatečně velkým vnějším tlumením, jak bude odvozeno dále.



Obr. 17: Samobuzené kmitání rotoru při nestabilním běhu (výchyly amplitud vlastního kmitání s časem rostou)

### 1.4.3 Kmitání rotorů s uvažováním vnitřního i vnějšího tlumení

Pro zahrnutí vlivu vnějšího tlumení do rovnice (63) je potřeba převést pohybovou rovnici rotoru s vnějším tlumením (46) do rotujícího souřadného systému podle transformačních vztahů:

$$\begin{aligned} r_H &= \varrho_H e^{i\omega t} \\ \dot{r}_H &= (\dot{\varrho}_H + i\omega \varrho_H) e^{i\omega t} \\ \ddot{r}_H &= (\ddot{\varrho}_H + 2i\omega \dot{\varrho}_H - \omega^2 \varrho_H) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (68)$$

a přidat člen vyjadřující vliv vnitřního tlumení.

$$\ddot{\varrho}_H + \left(2i\omega + \frac{b_1}{m} + \frac{b_2}{m}\right) \dot{\varrho}_H + \left(\Omega^2 - \omega^2 + i\omega \frac{b_1}{m}\right) \varrho_H = \varepsilon \omega^2 + i g e^{-i\omega t} \quad (69)$$

Pro vyšetření z hlediska stability kmitání nás bude zajímat homogenní tvar diferenciální rovnice, z něž získáme charakteristickou rovnici:

$$s^2 + (2i\omega + 2\Omega b_{p1} + 2\Omega b_{p2})s + \Omega^2 - \omega^2 + 2i\omega\Omega b_{p1} = 0 \quad (70)$$

Pro její dva kořeny lze získat přibližné řešení:

$$\begin{aligned} s_1 &= -b_{p1}\Omega - b_{p2}(\Omega - \omega) - i(\omega - \Omega) \\ s_2 &= -b_{p1}\Omega - b_{p2}(\Omega + \omega) - i(\omega + \Omega) \end{aligned} \quad (71)$$

Homogenní řešení  $\varrho_{Ho} = \hat{\varrho}_{Ho1}e^{s_1t} + \hat{\varrho}_{Ho2}e^{s_2t}$  se uplatní tehdy, pokud:

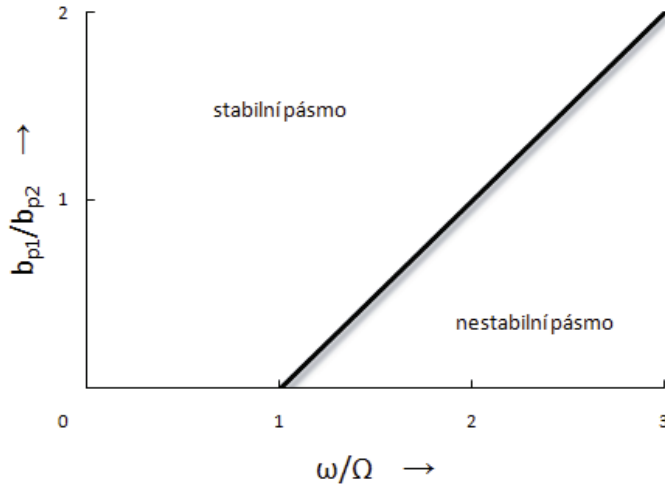
$$-b_{p1}\Omega - b_{p2}(\Omega - \omega) > 0 \Rightarrow 1 + \frac{b_{p1}}{b_{p2}} - \frac{\omega}{\Omega} < 0 \quad (72)$$

Tehdy bude totiž reálná část vlastního čísla  $s_1$  kladná a systém se stane nestabilním.

Stabilní běh rotoru je možný až do mezních otáček  $\omega_m$ , které jsou ale díky působení vnějšího tlumení větší než kritické otáčky  $\omega = \Omega$ , jak je tomu u systému pouze s vnitřním tlumením. Mezní otáčky, do kterých je možný stabilní běh, získáme z rovnice (72), kterou vydělíme výrazem  $(-b_{p2}\Omega)$  a upravíme:

$$\omega_m = \left(1 + \frac{b_{p1}}{b_{p2}}\right)\Omega = \left(1 + \frac{b_1}{b_2}\right)\Omega \quad (73)$$

Závisí tedy pouze na poměru vnějšího a vnitřního tlumení, ne na jejich absolutních velikostech (viz Obr. 17).



Obr. 17: Hranice stability při působení vnitřního i vnějšího tlumení

Pro zjištění vlivu nevyváženosti a vlastní tíhy rotoru rovnici (63) nejprve transformujeme do pevného souřadného systému:

$$\ddot{r}_H + \left(\frac{b_1}{m} + \frac{b_2}{m}\right)\dot{r}_H + \left(\Omega^2 - i\omega\frac{b_2}{m}\right)r_H = \varepsilon\omega^2 e^{i\omega t} + ig \quad (74)$$

Pak lze najít partikulární řešení vyjadřující vliv buzení nevyvážeností, které je totožné s řešením systému pouze s uvažováním vnějšího tlumení (rovnice (58)).

$$r_{H\varepsilon} = \frac{\varepsilon\omega^2}{(\Omega^2 - \omega^2) + i\omega b_1/m} e^{i\omega t} = \varepsilon \frac{\eta^2}{(1 - \eta^2) + 2ib_{p1}\eta} e^{i\omega t} \quad (75)$$

Vnitřní tlumení tak na amplitudu kmitavého pohybu vybuzeného nevyvážeností vliv nemá. Partikulární řešení rovnice (74) vyjadřující vliv vlastní tíže rotoru je:

$$r_{Hg} = \frac{ig}{\Omega^2 + i\omega b_2/m} = i \frac{mg}{k(1 + 2ib_p\eta)} \quad (76)$$

Zde je rozdíl oproti dosud odvozenému. Zatímco u netlumeného systému a při uvažování pouze vnějšího tlumení se rotor pouze staticky prohne (rovnice (20)), zahrneme-li také působení vnitřního tlumení, závisí klidová poloha rotoru také na úhlové rychlosti  $\omega$ . [1]

## 1.5 Zobecnění pohybové rovnice pro translační kmity pevného tělesa

V mnoha případech (například při vyšetřování přídavných účinků) je účelné vyjádřit pohybové rovnice (69), případně (74), popisující pohyb rotoru ve spolurotující i pevné souřadné soustavě, v maticovém tvaru.

Zde takto upravíme pohybovou rovnici (74) pro pevný souřadný systém. Nejprve rovnici upravíme, tak aby měla rozměr síly – vynásobíme ji  $m$ . Uvažujeme obecnou souřadnici polohy  $r$ :

$$m\ddot{r} + (b_1 + b_2)\dot{r} + (k - i\omega b_2)r = m\varepsilon\omega^2 e^{i\omega t} + img \quad (77)$$

Rovnice (77) je vyjádřena v komplexní rovině, takže ji rozložíme na jednotlivé složky:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + (b_1 + b_2)\dot{y} + ky + \omega b_2 z &= m\varepsilon\omega^2 \cos \omega t \\ m\ddot{z} + (b_1 + b_2)\dot{z} + kz - \omega b_2 y &= m\varepsilon\omega^2 \sin \omega t + mg \end{aligned} \quad (78)$$

Výraz na pravé straně rovnice (74) představuje budící sílu, kterou označíme  $f(t)$ . Pro její složky pak platí:

$$\begin{aligned} f_y &= m\varepsilon\omega^2 \cos \omega t \\ f_z &= m\varepsilon\omega^2 \sin \omega t + mg \end{aligned} \quad (79)$$

Pak lze rovnice (78) zapsat maticově:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 + b_2 & 0 \\ 0 & b_1 + b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \left( \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ -b_2 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_y \\ f_z \end{bmatrix} \quad (80)$$

nebo také:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{K} + \omega\mathbf{K}_C)\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (81)$$

$\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{K}$  jsou matice hmotnosti, tlumení a tuhosti rotoru,  $\mathbf{K}_C$  je tzv. cirkulační matice,  $\mathbf{f}$  je vektor budící síly a  $\mathbf{x}$  je vektor deformačních posuvů. Cirkulační matice je antisymetrická. To je důvodem nestability řešení soustavy v některých případech. [2]

Oproti tvaru rovnice (80), kde vystupují posunutí pouze ve dvou směrech  $y$  a  $z$ , je tvar rovnice (81) obecnější. Vektor deformačních posuvů i vektor buzení může mít v prostoru tři složky. Matice jsou obecně třetího stupně. Rovnice (81) je zobecněním pohybové rovnice na kmitání jakéhokoliv pevného tělesa za předpokladu lineární teorie – tedy malých translačních kmitů.

Analogicky bychom postupovali i při odvození maticového tvaru pohybové rovnice ve spolurotující souřadné soustavě. [2]

## 2 Vzájemná interakce kapaliny a tělesa

V předchozí kapitole byl vyšetřeno chování rotorových soustav při různých provozních stavech a podmínkách. Většinou byla přijata řada zjednodušujících předpokladů, které více či méně odpovídají realitě. Zatím nebyl příliš uvažován vliv prostředí, v němž se rotující soustava pohybuje.

Při pohybu pevného tělesa (tedy i rotoru) v tekutém prostředí (kapalině, či plynu), je toto těleso vždy ovlivněno daným prostředím a jeho vlastnostmi. V dosavadních úvahách byl zahrnut pouze vliv tlumení viskózního prostředí, ve kterém se hřídele pohybují.

Pohyb pevného tělesa v tekutině je však ovlivněn více faktory, než jen tlumením. Vliv tekutého prostředí zahrnuje přídavné účinky, které vystupují v pohybové rovnici pevného tělesa jako přídavná hmotnost, přídavné tlumení a přídavná tuhost. Při pohybu v plynném prostředí jsou vlivy prostředí, včetně tlumení často zanedbatelné. Naproti tomu při pohybu pevného tělesa v kapalině tyto přídavné účinky již mnohdy zanedbat nelze, protože mají značný vliv na pohyb tělesa. Vyšetřování interakce tělesa s tekutinou je tak důležitou úlohou v inženýrské praxi.

### 2.1 Nestacionární translační pohyb tuhého tělesa v kapalině.

Zahrnutí přídavných účinků do pohybové rovnice pevného tělesa lze nejnázorněji objasnit na jednoduchém případě, kterým je nestacionární translační pohyb tuhého tělesa v kapalině.

V předchozí části byla v maticovém tvaru odvozena rovnice pro pohyb tělesa v tekutině v pevném souřadném systému. Pokud neuvažujeme materiálové tlumení, které je u strojů pracujících v kapalném prostředí oproti vnějšímu tlumení zanedbatelné, lze psát:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (82)$$

a ve složkovém tvaru:

$$m_{ij}\ddot{x}_j + b_{ij}\dot{x}_j + k_{ij}x_j = f_i \quad (83)$$

#### 2.1.1 Těleso konající translační kmity v kapalině

Pro řešení pohybu tuhého tělesa v kapalině je třeba zavést následující předpoklady:

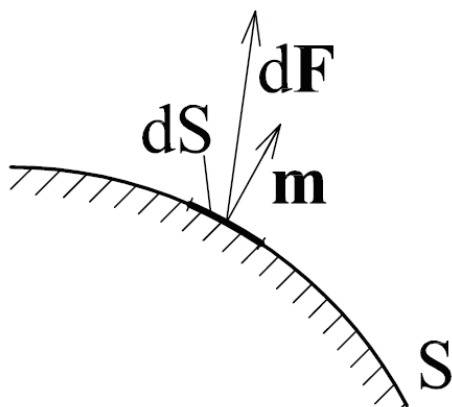
Těleso o hmotnosti  $m$ , uložené vazbami s tuhostí  $k$  a tlumením  $b$ , je buzeno silou  $f_i$  a vykonává malé translační kmity kolem rovnovážné polohy. Je ohraničeno kapalinou, která je uzavřena v nepropustné, nepohyblivé hranici  $\Gamma$ . O kapalině předpokládáme, že je nestlačitelná, neviskózní a nepohybuje se. Díky předpokladu malých translačních kmitů lze použít lineární teorii jako v první kapitole.

Pro elementární sílu od kapaliny působící na element plochy  $dS$  pevného tělesa obecně platí:

$$dF_i = \sigma_{ij} m_j dS = (T_{ij} - p\delta_{ij}) m_j dS \quad (84)$$

Zde je  $\sigma_{ij}$  tenzor napětí popisující působení plošných sil v každém bodě tekutiny. Je zde zaveden jednotkový vektor  $m_j$  orientovaný směrem do kapaliny (viz Obr. 18 na další straně).  $T_{ij}$  je tenzor napětí v tečném směru,  $p$  je tlak v kapalině.

Operátor  $\delta_{ij}$  se nazývá Kroneckerovo delta, může nabývat hodnot 0 pro  $i \neq j$  nebo 1 pro  $i = j$ .  $dS$  je elementární plocha tělesa, na kterou působí elementární síla  $dF_i$ .



Obr. 18: Elementární síla působící na těleso od kapaliny

Protože předpokládáme neviskózní kapalinu, odpadá z rovnice (84) člen  $T_{ij}$ , představující tečné složky vektoru napětí (viskózní síly). Pak je elementární síla působící na plochu rovna:

$$dF_i = -p\delta_{ij}m_j dS = -pm_i dS = pn_i dS, \quad (85)$$

kde  $n_i = -m_i$  je vektor vnější normály směřující ven z kapaliny.

Síla od kapaliny se projeví v pohybové rovnici pevného tělesa (83) jako silová zátěž na pravé straně rovnice.

$$m_{ij}\ddot{x}_j + b_{ij}\dot{x}_j + k_{ij}x_j = f_i + \int_S pn_i dS \quad (86)$$

Při uvažování účinků prostředí tedy v rovnicích přibude další neznámá – tlak kapaliny. Aby bylo možné rovnici řešit, je nutné přidat další rovnice popisující proudění kapaliny, kterými jsou rovnice kontinuity pro nestlačitelnou kapalinu:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (87)$$

a pohybové rovnice kapaliny – Navier-Stokesovy rovnice:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j - \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho g_i \quad (88)$$

V rovnicích vystupuje kromě již uvedených členů hustota kapaliny  $\rho$ , vektor tíhového zrychlení  $g_i$  a vektory rychlosti proudění kapaliny  $v_i, v_j$ . Souřadnice  $x_i, x_j$  jsou obecnými souřadnicemi objemu kapaliny. Aby nedošlo k záměně s obecnou souřadnicí kapaliny, je vhodné označit deformační posuvy v pohybové rovnici (86)  $u_j$ .

V rovnici (88) lze dle předpokladů zanedbat člen s  $T_{ij}$ , protože nyní uvažujeme neviskózní kapalinu. Jelikož těleso vykonává malé pohyby, rychlosti okolní kapaliny jsou rovněž malé, pak lze zanedbat rovněž nelineární člen. Také zanedbáme tíhové zrychlení, které na hydrodynamiku nebude mít vliv a rovnice (88) se zjednoduší na tvar:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \quad (89)$$

Nyní má soustava stejný počet rovnic jako neznámých, abychom ji mohli řešit, je třeba zadat ještě počáteční a okrajové podmínky.

$$t = 0 : u_i = 0, \dot{u}_i = 0 \quad (90)$$

$$\begin{aligned} \Gamma : v_i n_i &= 0 \\ S : v_i n_i &= \dot{u}_i n_i \end{aligned} \quad (91)$$

Deformační posuvy pevného tělesa a jejich derivace jsou označeny  $u_i$  a  $\dot{u}_i$ .

Když rovnici kontinuity zderivujeme podle času a dosadíme do ní z pohybové rovnice kapaliny (89):

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (92)$$

Protože výraz  $(-1/\rho)$  je nenulový, lze psát:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} = 0 \quad (93)$$

Rovnice (93) se nazývá Laplaceova rovnice pro stanovení tlakové funkce.

Analogicky jsou upraveny i okrajové podmínky:

$$\begin{aligned} \Gamma : \frac{\partial p}{\partial x_i} n_i &= 0 \\ S : \frac{\partial p}{\partial x_i} n_i &= -\rho \dot{r}_i n_i \end{aligned} \quad (94)$$

Díky tomu je počet neznámých zredukován, neboť k řešení soustavy nyní stačí znát pouze tlakové pole, řešené Laplaceovou rovnicí. Jedná se tedy o určitou úlohu. Pro její řešení je ale potřeba rovnice dále upravit. Tlak je funkcí jak polohy, tak času. Navrhne substituci tlakové funkce, tak abychom mohli tlak řešit pouze na základě tvaru oblasti. Vyjádříme tlak jako součin dvou nezávislých funkcí, funkce závislé pouze na poloze označené  $h_j$  a zrychlení  $\ddot{u}_j$ , závislého jen na čase.

$$p(x_i, t) = -\rho h_j(x_i) \ddot{u}_j(t) \quad (95)$$

Tuto substituci dosadíme do Laplaceovy rovnice (93):

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} = [-\rho h_j(x_i) \ddot{u}_j(t)] \quad (96)$$

Protože  $\rho$ , ani  $\ddot{u}_j$  nejsou závislé na poloze, lze je vytknout před derivaci podle  $x_i$  :

$$-\rho \ddot{u}_j \frac{\partial^2 h_j}{\partial x_i \partial x_i} = 0 \quad (97)$$

Po zkrácení nenulovými členy dále dostáváme rovnici, ve které vystupuje tlaková funkce pouze jako funkce tvaru oblasti:

$$\frac{\partial^2 h_j}{\partial x_i \partial x_i} = 0 \quad (98)$$

Stejně jako Laplaceova rovnice tlakové funkce jsou upraveny i okrajové podmínky:

$$\begin{aligned} \Gamma : \frac{\partial h_j}{\partial x_i} n_i &= 0 \\ S : \frac{\partial h_j}{\partial x_i} n_i &= n_j \end{aligned} \quad (99)$$

Při znalosti tvaru tělesa známe vektory  $n_i$  i  $n_j$  a rovnice můžeme vyřešit. Řešení pak dosadíme do pohybové rovnice tělesa:

$$m_{ij} \ddot{x}_j + b_{ij} \dot{x}_j + k_{ij} x_j = f_i + \int_S p n_i dS = f_i - \rho \int_S h_j n_i dS \cdot \ddot{x}_j \quad (100)$$

Výraz na pravé straně rovnice představující přídavný silový účinek kapaliny je závislý na zrychlení  $\ddot{x}_j$ , proto po převedení na levou stranu rovnice můžeme psát:

$$\left( m_{ij} + \rho \int_S h_j n_i dS \right) \ddot{x}_j + b_{ij} \dot{x}_j + k_{ij} x_j = f_i \quad (101)$$

V pohybové rovnici přibyl další člen závislý na zrychlení  $\ddot{x}_j$ . Tento člen je tenzor přídavné hmotnosti kapaliny, který nazveme  $M_{ij}$ :

$$(m_{ij} + M_{ij}) \ddot{x}_j + b_{ij} \dot{x}_j + k_{ij} x_j = f_i \quad (102)$$

Z rovnice lze usoudit, že přídavná hmotnost kapaliny ovlivňuje vlastní úhlovou rychlost systému, jak lze snadno vidět na případě jednoosého kmitání netlumené soustavy. Homogenní tvar rovnice (102) pro tento případ je:

$$(m + M_p) \ddot{x} + kx = 0, \quad (103)$$

z čehož plyne pro vlastní úhlovou rychlost a frekvenci vztah:

$$\omega = \frac{k}{(m + M_p)} = 2\pi f \quad (104)$$

Přídavná hmotnost kapaliny tedy snižuje vlastní frekvenci tělesa kmitajícího v kapalině.

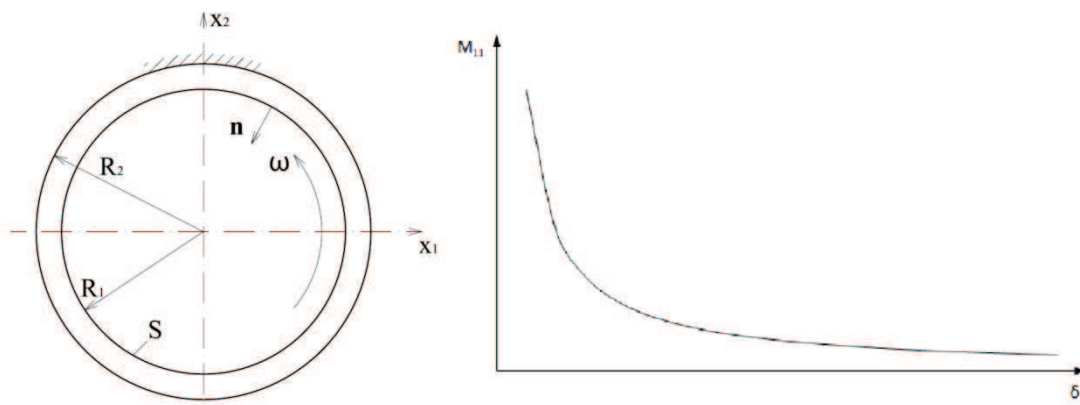
Z pohybové je zřejmé, že přídavná hmotnost závisí na vlastnostech kapaliny a tvaru oblasti, nikoliv na čase. Volbou tvaru pevného tělesa a hranice tak lze přídavnou hmotnost výrazně ovlivnit. Lze to dobře vidět na jednoduchém, ale v praxi poměrně užitečném příkladu čepu rotujícího v tenké kapalinové vrstvě.

Předpokládáme čep kruhového průřezu o poloměru  $R_1$  uložený soustředně v pevné oblasti rovněž kruhového průřezu o poloměru  $R_2$ . Mezi čepem a hranicí je kapalinový film o tloušťce  $\delta = R_2 - R_1$  (viz Obr. 19). Kapalinu považujeme za nestlačitelnou a neviskózní. Pak lze pro přídavnou hmotnost odvodit vztah:

$$M_{ij} = -\rho \frac{R_1}{\delta} \int_S x_i n_j dS \quad (105)$$

Protože čep se může pohybovat pouze v rovině  $x_1$ - $x_2$ , jsou v rovnici (105) pouze dva volné indexy  $i$  a  $j$  a matice přídavné hmotnosti má pak 4 členy. Při námi zadané geometrii soustavy zjistíme, že mimodiagonální členy jsou rovny nule a matice přídavných hmotností má dva nenulové diagonální členy, které jsou stejné. Za předpokladu  $\delta \ll R_1$  pro ně platí:

$$M_{11} = \rho \pi R_1^2 \frac{R_1}{\delta} \quad (106)$$



Obr. 19: Čep kmitající v kapalinovém filmu a závislost přídavné hmotnosti na tloušťce filmu  $\delta$

Z rovnice (105) i Obr. 18 je patrné, že přídavná hmotnost od kapalinového filmu je tím větší, čím je menší vůle.

### 2.1.2 Těleso konající translační kmity v proudící kapalině

Stejnou metodiku lze použít pro řešení problému pevného tělesa, buzeného vnější silou, kmitajícího v kapalině, která proudí rychlostí  $v_i$ . Předpokládáme nevířivé proudění kapaliny, tedy translační pohyb i pro kapalinu. Ostatní předpoklady zůstávají stejné.

V pohybové rovnici kapaliny pak přibude nelineární člen konvektivního zrychlení, protože rychlost kapaliny již nelze zanedbat:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \quad (107)$$

Z rovnice lze při uvažování stacionárního (v čase neměnného), nevířivého proudění odvodit vztah:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( p + \frac{\rho}{2} v_i v_i \right) = 0 \quad (108)$$

Výraz v závorce je konstanta, kterou označíme jako dynamický tlak:

$$p_D = p_0 + \frac{\rho}{2} v_{0i} v_{0i} \quad (109)$$

Indexy 0 v rovnici vyjadřují, že se jedná o stacionární stav proudění.

Při zobecnění na nestacionární případ lze pak vyjádřit tlakové a rychlostní pole:

$$\begin{aligned} v_i &= v_{0i} + w_i \\ p_D &= p_{D0} + \sigma, \end{aligned} \quad (110)$$

kde  $v_{0i}$ ,  $p_{D0}$  jsou ustálené složky a  $w_i$ ,  $\sigma$  nestacionární složky rychlosti, resp. dynamického tlaku. Při nestacionárním proudění pak platí pro tlak rovnice:

$$p = p_0 + \sigma - \frac{\rho}{2} w_i w_i - \rho v_{0i} w_i \quad (111)$$

Takto vyjádřený tlak je třeba zavést do pohybové rovnice tělesa:

$$m_{ij} \ddot{x}_j + b_{ij} \dot{x}_j + k_{ij} x_j = f_i + \int_S \left( p_0 + \sigma - \frac{\rho}{2} w_i w_i - \rho v_{0i} w_i \right) n_i dS \quad (112)$$

Řešení rovnice je ekvivalentní úlohou jako v předchozím případě. Zavedeme tedy pro tlakovou funkci stejnou substituci:

$$p = -\rho h_j \ddot{u}_j \quad (113)$$

Pokud vyjádříme pomocí této substituce všechny členy rovnice (111), dostaneme pro tlak:

$$p = p_0 - \rho h_j \ddot{u}_j - \frac{\rho}{2} \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \dot{u}_j \frac{\partial h_k}{\partial x_i} \dot{u}_k - \rho v_{0i} \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \dot{u}_j \quad (114)$$

Při nestacionárním proudění kapaliny kolem tělesa, tak závisí tlak nejen na zrychlení, ale i na rychlosti a statické složce rychlosti proudění. Když tlak dosadíme do pohybové rovnice, dostaneme:

$$(m_{ij} + M_{ij}) \ddot{x}_j + (b_{ij} + B_{ij}) \dot{x}_j + B_{ijk} \dot{x}_k \dot{x}_j + k_{ij} x_j = f_i + \int_S p_0 n_i dS \quad (115)$$

Jednotlivé přídatné účinky jsou vyjádřeny členy:

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \rho \int_S h_j n_i dS \\ B_{ij} &= \rho \int_S v_{0l} \frac{\partial h_j}{\partial x_l} n_i dS \\ B_{ijk} &= \frac{\rho}{2} \int_S \frac{\partial h_j}{\partial x_l} \frac{\partial h_k}{\partial x_l} n_i dS, \end{aligned} \quad (116)$$

Matice jsou uvedeny v tomto pořadí: matice přídatných hmotností, matice přídatného lineárního tlumení a matice nelineárního tlumení (projeví se při větších amplitudách). Pokud je člen tlumení  $(b + B) < 0$ , dojde u tělesa k samobuzenému kmitání (viz kapitola 1.4)

Na těleso kmitající v kapalině působí vždy přídatná hmotnost i přídatné tlumení. U některých případů jako jsou kluzná ložiska, hydrodynamické tlumiče, těsnící spáry atd. se přidává i přídatná tuhost, která závisí na úhlové rychlosti rotace hřídele.

## 2.2 Interakce rotoru a kapaliny v těsnící spáře

Jak bylo zmíněno v úvodu, hydrodynamická těsnící spára je konstrukční prvek hydrodynamických strojů, který má zamezit objemovým ztrátám při proudění kapaliny ve stroji (např. proudění kapaliny z výtlaku do sání čerpadla). Nachází se mezi těsnícími kruhy rotoru a statoru stroje.

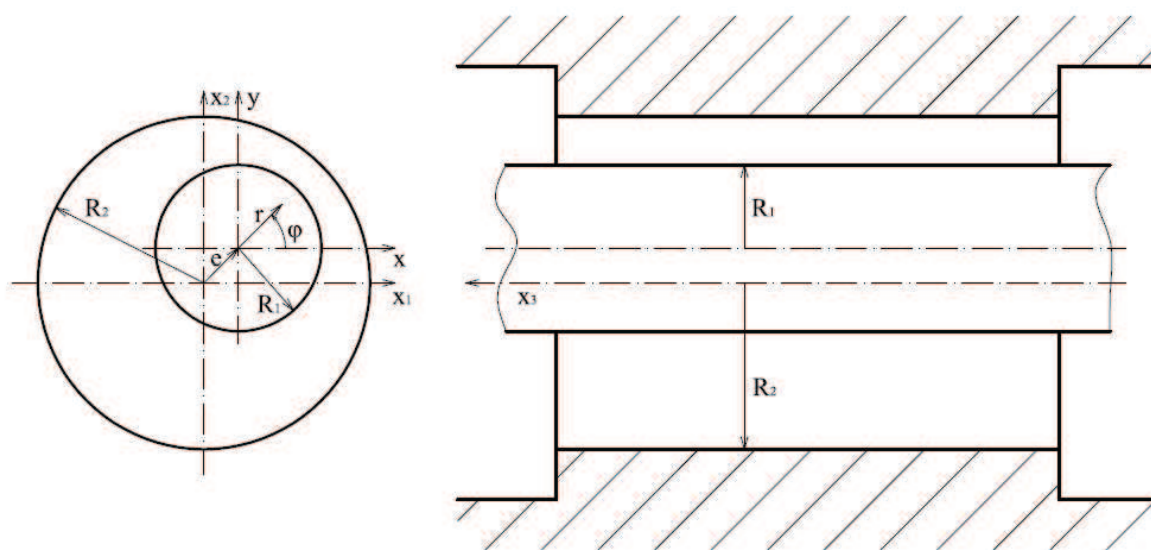
Těsnící spárou tak za chodu stroje proudí kapalina a jako u všech těles pohybujících se v kapalném prostředí ve spáře dochází ke vzájemné interakci kapaliny a rotujícího hřídele.

Přídavné účinky (hmotnost, tuhost i tlumení) kapaliny významně ovlivňují dynamické vlastnosti rotoru. Velikost přídavných účinků závisí u těsnících spár především na otáčkách rotoru, precesním pohybu rotoru, vlastnostech kapaliny, tvaru a rozměrech těsnící spáry. [4]

Z toho pohledu má velký význam geometrie těsnící spáry, která se volí především s ohledem na minimalizaci objemových ztrát.

### 2.2.1 Proudění kapaliny těsnící spárou

Působením tíhové a radiální síly oběžného kola dochází u hřídele ke vzniku excentricity a natočení hřídele. Pro jednoduchost se těsnící spára nahrazuje excentricky vyoseným válcovým mezikružím. Na obrázku je znázorněna zjednodušená geometrie hladké těsnící spáry – válcové mezikruží.



Obr. 20: Hladká těsnící spára

I ve zjednodušeném případě válcového mezikruží je proudění kapaliny poměrně složité. Kapalina proudí ve směru axiálním vlivem rozdílu tlaků před a za spárou, obvodové proudění je způsobeno rotací hřídele. Slabé proudění je i v radiálním směru – je způsobeno precesním pohybem hřídele, při kterém se střed hřídele pohybuje po eliptické dráze, v důsledku čehož dochází ke zvětšování a zmenšování velikosti spáry po obvodu.

Pokud proudění v radiálním směru zanedbáme je proudění kapaliny spárou superpozicí jednotlivých stavů – axiálního, tangenciálního i radiálního proudění. Dochází při něm ke vzniku tzv. Taylor – Couetteho vírů. [5]

Hydrodynamická těsnicí spára může být i složitějšího tvaru (např. labyrintová, závitová apod.), než na Obr. 20. Umístěním různých drážek v těsnicích kruzích lze totiž zvýšit odporový součinitel těsnicí spáry a tím snížit ztrátový průtok spárou, Zhoršují se však dynamické účinky spáry. Správně navržená spára by měla oba tyto požadavky sladit. [4] [5]

### 2.2.2 Přídavné účinky kapaliny v těsnicí spáře na rotor

Pro teoretické stanovení přídavných účinků kapalinového filmu v těsnicí spáře jsou výchozími vztahy Navier-Stokesovy rovnice s uvažováním turbulentního proudění, rovnice kontinuity a okrajové podmínky.

Pokud předpokládáme turbulentní proudění viskózní kapaliny s laminární podvrstvou, pak pro sílu na povrchu tělesa platí:

$$F_i = \int_S (\Pi_{ij} - p\delta_{ij}) m_j dS \quad (117)$$

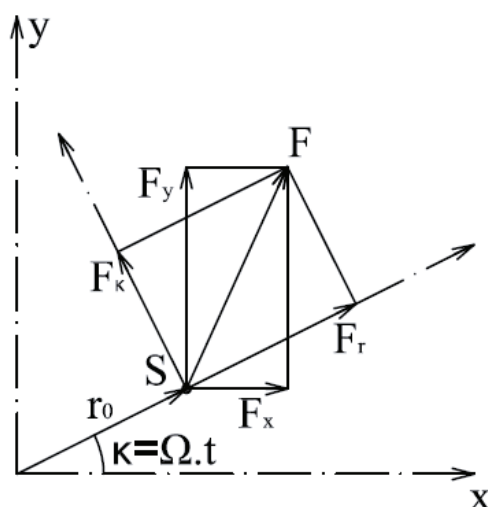
Matice  $\Pi_{ij}$  vyjadřuje viskózní síly.

Matematický model pro stanovení přídavných účinků působících na rotor při uvažování v těsnicí spáře je již značně složitější. Zahrnuje řadu koeficientů, závislých na proudění ve spáře i na geometrii spáry. Obecně však platí, že účinkem kapalinových vrstev působí na rotor přídavná síla:

$$\mathbf{f} = -(\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}) \quad (118)$$

Předpokládáme-li rotor, který vykonává rotační pohyb v kapalině úhlovou rychlostí  $\omega$  a zároveň precesní pohyb po kruhové dráze úhlovou rychlostí  $\Omega$  vzhledem k souřadnému systému  $x, y$  (viz Obr. 21) lze vyjádřit silové působení v maticovém tvaru [4]:

$$\begin{bmatrix} F_r & -F_k \\ F_k & F_r \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{11} + \Omega B_{12} - \Omega^2 M_{11} & -K_{12} + \Omega B_{11} - \Omega^2 M_{12} \\ K_{21} + \Omega B_{22} - \Omega^2 M_{21} & K_{22} + \Omega B_{21} - \Omega^2 M_{22} \end{bmatrix} \mathbf{r}_0 \quad (119)$$



Obr. 21: Silové působení na rotor v hydrodynamické těsnicí spáře

Porovnáním jednotlivých členů matice lze získat jejich vzájemné vztahy:

$$\begin{aligned} K_{11} &= K_{22}; & -B_{12} &= B_{21}; & M_{11} &= M_{12} \\ K_{21} &= -K_{12} & B_{11} &= B_{22} & M_{21} &= -M_{22} \end{aligned} \quad (120)$$

Pak pro složky sil  $F_r$  a  $F_k$  platí:

$$\begin{aligned} F_r &= -(K_{11} + \Omega B_{12} - \Omega^2 M_{11})r_0 \\ F_k &= -(K_{21} + \Omega B_{22} - \Omega^2 M_{21})r_0 \end{aligned} \quad (121)$$

Jednotlivé koeficienty matic **K**, **B** a **M** lze získat experimentálně, nebo na pomoci výpočtového modelování proudění.

Přídavné účinky jsou ovlivněny řadou faktorů, jako jsou tlakový spád na spáře, délka těsnící spáry, radiální vůle ve spáře (tloušťka kapalinové vrstvy), otáčky rotoru, precesní pohyb rotoru, viskozita kapaliny, vznik kavitace aj.

Existují i jiné numerické modely pro řešení problematiky dynamických vlastností těsnících spár, které zavádějí různé zjednodušující předpoklady a jejichž výsledky se tak mohou značně lišit. Přesnost jednotlivých metod se ověřuje experimentálně.

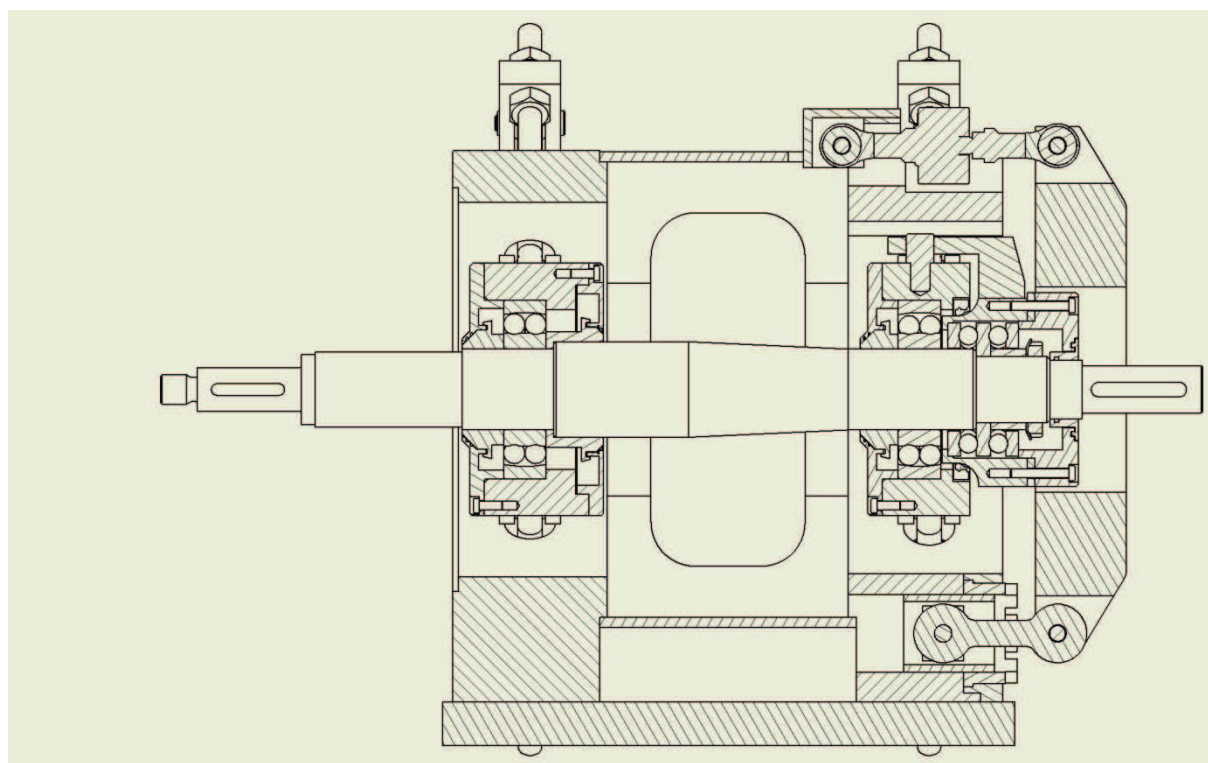
### 3 Experiment pro ověření přídavných účinků kapalinové vrstvy těsnících spár

Pro stanovení přídavných účinků kapalinové vrstvy v těsnící spáře byl na zkušebně Odboru fluidního inženýrství Victora Kaplana FSI VUT v Brně proveden experiment na navrženém zkušebním zařízení. Účelem experimentu je stanovení přídavných účinků ze sil působících na hřídel zkušebního zařízení.

#### 3.1.1 Zařízení k experimentálnímu ověření přídavných účinků

Experiment pro zjištění přídavných účinků kapalinové vrstvy byl realizován na experimentálním zařízení, skládajícím se z přípravku s vlastní těsnící spárou a z měřící části.

Jako měřící část experimentálního zařízení byl použit zkušební kozlík vybavený tenzometrickými snímači výrobce HBM, které umožňují měření statických i dynamických složek radiálních a axiálních sil.



Obr. 22: Řez měřícím kozlíkem

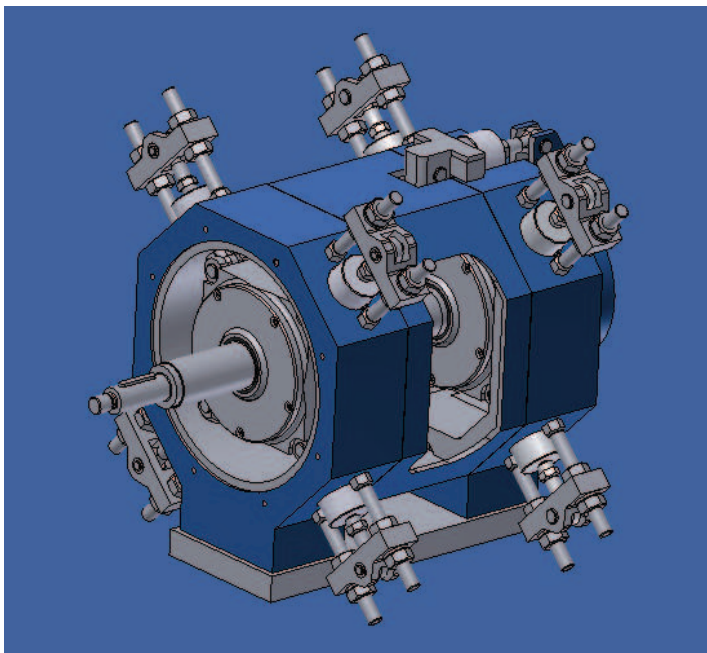
Uvnitř kozlíku je hřídel, sloužící k přenosu krouticího momentu přes spojku. Je uložena ve dvou radiálních ložiskových tělesech, která jsou uchycena na tenzometrických snímačích. Na každém z těles je čtveřice snímačů, tedy dohromady osm tenzometrů pro snímání radiálních sil. Axiální síla je pak snímána jedním tenzometrem umístěným za axiálním ložiskovým tělesem.

Při proudění kapaliny skrz těsnící spáru působí na rotor hřídele experimentálního zařízení radiální síla a axiální síla, způsobená rozdílem tlaků před a za spárou. Tenzometrické snímače zachytí působící síly ve formě deformací. Snímané hodnoty deformací jsou tenzometry převedeny na elektrické veličiny, které jsou pak v počítači převedeny na síly.

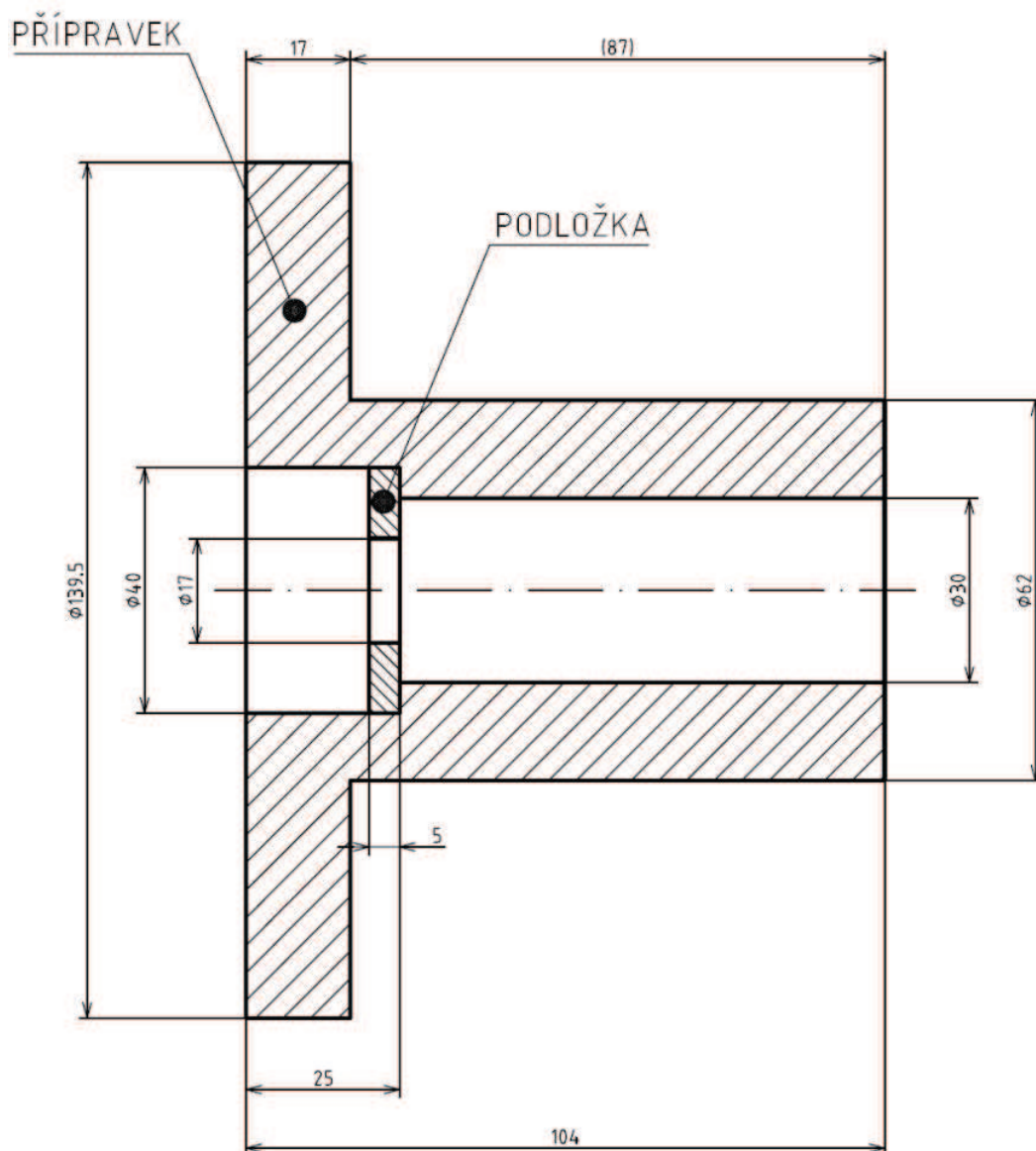
Pro vyhodnocení experimentu je podstatné pouze měření radiálních sil, takže axiální síla snímána nebyla.

K měřicímu kozlíku byl připojen pro tento experiment navržený přípravek, na kterém měly být simulovány podmínky při proudění kapaliny těsnící spárou.

Obr. 23 (vpravo): Model zkušebního kozlíku v programu Inventor



Obr. 24 (dole): Návrh přípravku pro experimentální určení vlivu těsnící spáry



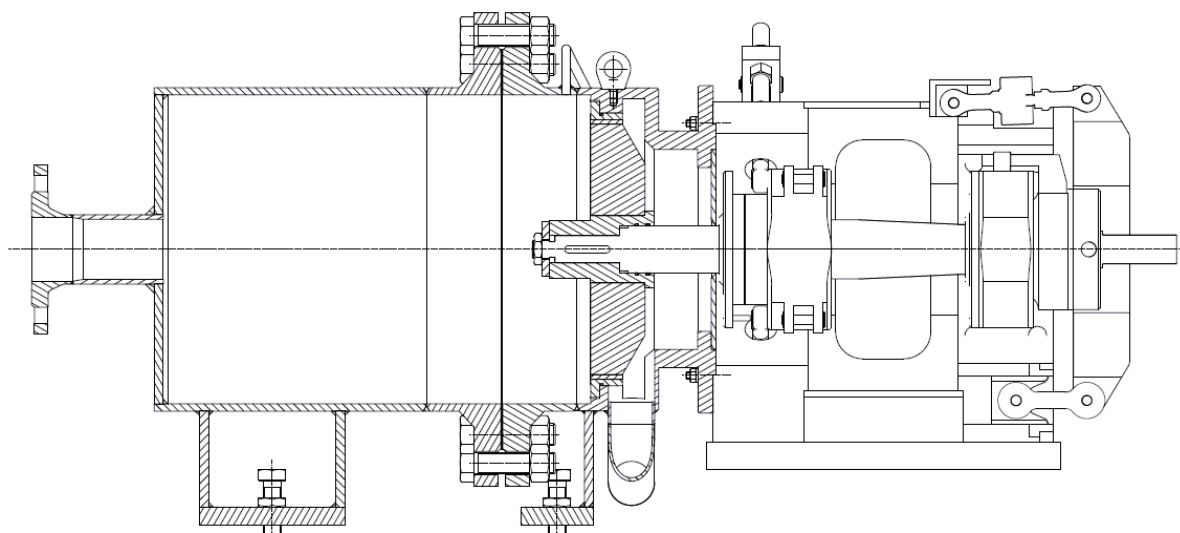
Těsnící spára se skládá z rotorové a statorové části. Navržený přípravek (viz *Obr. 24* na předchozí stránce) představuje pouze rotorovou část těsnící spáry. Statorová část spáry byla zajištěna těsnícím kruhem spirály čerpadla *BETA 26* dostupného na zkušebně. Spirála se přírubou připojila k měřicímu kozlíku. Přípravek tak rotoval uvnitř spirály nasazený na hřídeli kozlíku na místě oběžného kola.

Přípravek byl vyroben dle mého návrhu v dílnách Odboru fluidního inženýrství Victora Kaplana v dubnu 2012. Poté byl nasunut na hřídel měřicího kozlíku a zajištěn šroubem. Na kozlík byla připevněna spirála čerpadla, čímž vznikla mezi těsnícím kruhem spirály a diskem přípravku spára.

Rozměry přípravku jsou navrženy tak, aby radiální vůle mezi kotoučem přípravku a těsnícím kruhem spirály byla cca 0,1 mm a vůle v axiálním směru byla cca 0,5 mm. Po připojení přípravku k měřicímu kozlíku nebylo ovšem možné radiální vůli přesně změřit.

Tento přípravek představoval pouze provizorní zkušební řešení, protože z důvodu zpoždění nebylo možné provádět v dubnu experiment na zkušebním zařízení, které bylo navrženo ve společnosti *Sigma Lutín, a.s.*

Tento přípravek byl vyroben a dodán teprve během léta. První experiment s ním tak bylo možné provést až v září 2012. Zařízení bylo dodáno včetně kompletní výkresové dokumentace. Skládá se z rotorové a statorové části těsnící spáry, které jsou přírubou připojeny k měřicímu kozlíku. Ve statorové části jsou výměnná excentrická pouzdra. Před spárou i za spárou jsou poměrně rozlehlé oblasti, sloužící k uklidnění proudění. Rotorová část je tvořena paprskovým kolem, vyrobeným z lehké slitiny. Na kole je nalisován tenký ocelový proužek kvůli zvýšení odolnosti a tuhosti. Kolo by mělo mít co největší tuhost, zároveň by ale mělo svou vahou co nejméně ovlivňovat radiální snímače. Kolo je po připojení k měřicímu kozlíku letmo uloženo na hřídeli kozlíku a je zakrytováno, aby se zamezilo porušení tlakového spádu na spáře. [5]



*Obr. 25: Řez měřicím zařízením včetně připojeného přípravku k experimentálnímu ověření přídavných účinků kapalinové vrstvy od Sigmy Lutín (v levé části obrázku) [5]*

### 3.2 Realizace měření

Samotné měření proběhlo v několika dnech. Byla naměřena a zaznamenána množství měřených bodů. Hlavní část měření probíhala v laboratoři Odboru fluidního inženýrství Victora Kaplana ve dnech 23. 4. – 30. 4. a 1. 6. 2012. Data byla měřena při různých provozních stavech.

Dodatečné měření s přípravkem dodaným *Sigmou Lutín* pak bylo provedeno 1. 9. 2012. I z něj vzešla řada měřených bodů. Předpokládá se, že se v měření bude pokračovat dále.

Měření probíhalo tak, že pomocí rázu na rotor bylo vyvoláno kmitání rotoru, které způsobilo silové reakce v ložiskách. Ty byly tenzometry zaznamenány a uloženy do počítače pro další zpracování. K rázu byla použita palička s gumovou, nebo hliníkovou násadou. Náraz byl proveden do vybraných míst rotoru.

Radiální tenzometry ložiska A i ložiska B byly pro měření předpjaty na přibližně stejnou hodnotu (ovšem jinou pro tenzometry ložiska A a tenzometry ložiska B, z důvodu jiného měřicího rozsahu tenzometrů). Axiální tenzometr byl odpojen. Z důvodu působení axiální síly na disk experimentálního přípravku byl také předpjat tak, aby byl disk schopen rotace.

Aby byly vyvozeny podmínky srovnatelné s prouděním tekutiny měřicí spárou, bylo měřicí zařízení umístěno do měřicího okruhu se sacím kotlem. Potřebné parametry (průtok a tlak) byly zajištěny čerpadlem *Lowara 00372*.

K pohonu hřídele měřicího kozlíku byl použit stejnosměrný dynamometr *1 DS 1036-kV* se zabudovanými snímači pro měření krouticího momentu a otáček, spojený s hřídelí přes pružnou spojku. Měřicí okruh byl osazen měřicími přístroji pro měření hydraulických veličin.

#### *Parametry okruhu:*

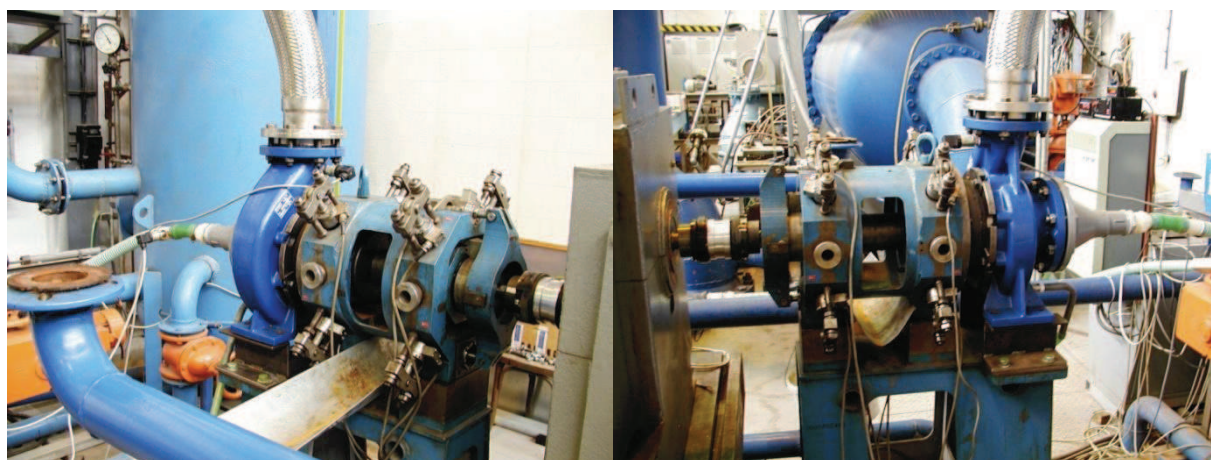
Průměr sacího potrubí: 125 mm.

Průměr výtlačného potrubí: 100 mm.

Výškový rozdíl výtlačného a sacího tlakového čidla: 166 mm.

Hustota čerpané kapaliny:  $998 \text{ kg/m}^3$ .

Teplota čerpané kapaliny  $19,7^\circ\text{C}$ .



Obr. 26: Připojení měřicího zařízení k měřicímu okruhu

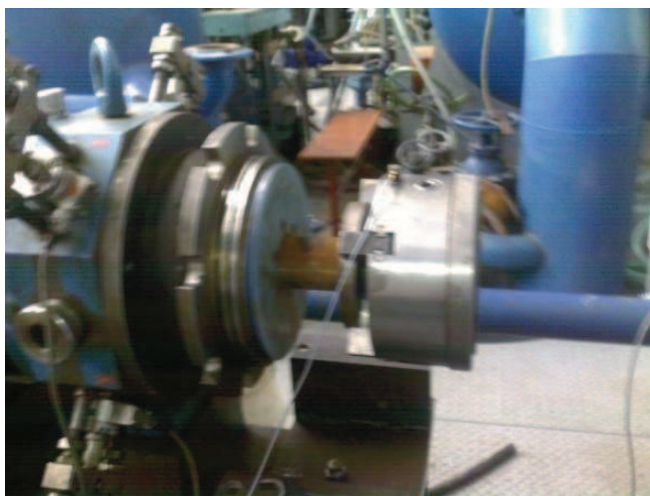
Měření sil bylo provedeno při různém nastavení parametrů okruhu. Nejprve byla měřena řada bodů na měřicím kozlíku nepřipojeném spojkou k dynamometru. Nejdřív v nezavodněném okruhu, kdy se sledovalo vybuzení přípravku na vzduchu. Pak byl systém zavodněn a byly sledovány síly ve stojící kapalině. Poté byl hřídel kozlíku sespojován s dynamometrem (viz *Obr. 26* na předchozí straně) a měřena další řada bodů jak na vzduchu, tak se zavodněným okruhem. Následovala řada bodů měřených při tlaku na výtlaku 240 kPa a průtoku cca 1 l/s, nejprve při otáčkách dynamometru 0 ot/min, 1500 ot/min a 3000 ot/min. Potom obdobně při parametrech 410 kPa na výtlaku a průtoku cca 1,7 l/s.

Vyšších tlaků v okruhu nebylo lze dosáhnout vzhledem k axiálním posuvům disku. Stejně tak nebylo měřeno při otáčkách vyšších než 3000 ot/min s ohledem na vlastní frekvenci rotoru a bezpečnost měření. Nakonec bylo zkontrolováno, zda nedošlo k posunutí sil při statickém stavu systému, jak se vzduchem, tak s vodou.

Přitom bylo k vybuzení kmitů použito dvou různých paliček, jedné s gumovou násadou a druhé s násadou hliníkovou. Boucháno bylo jednak na spojku v horizontálním i ve vertikálním směru, jednak na hřídel, přibližně do středu mezi ložisky, kde konstrukce měřicího kozlíku dovolovala pouze údery v horizontálním směru. Každé jednotlivé měření bylo provedeno třikrát, aby byla snížena pravděpodobnost chybné interpretace výsledků. Každý měřený bod je uložen v počítači jako samostatný soubor. Bylo tak získáno značné množství naměřených bodů.

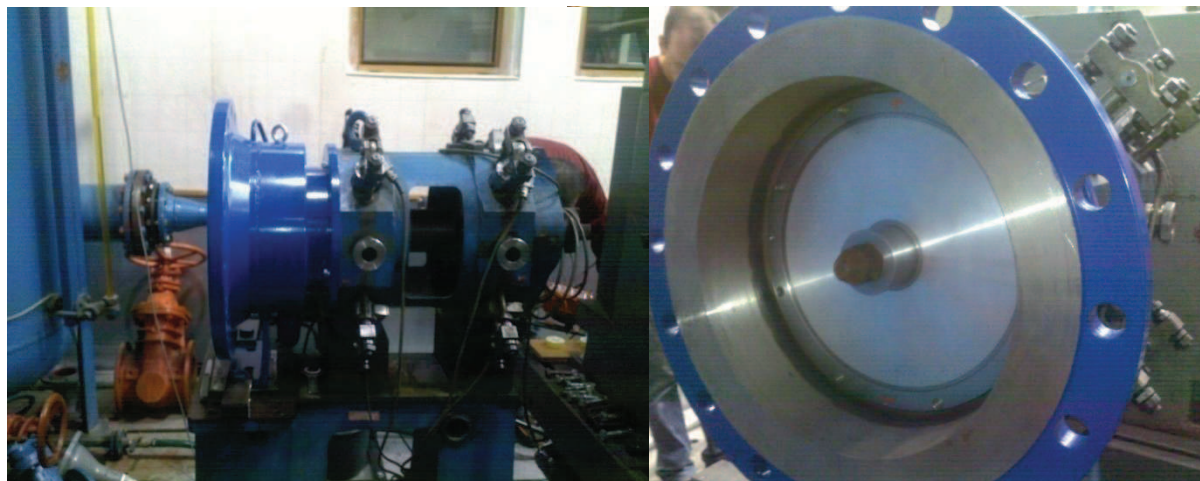
Bohužel ani přes počet měření, nebylo možné z dat naměřených při určitých „provozních stavech“ získat rozumné závěry. Šlo především o body měřené na vzduchu, kdy byly signály výrazně zašuměné. Proto bylo měření opakováno při změněných podmínkách. Jednak jsme se pokoušeli měřit bez nasazené spirály (tedy pouze na disku rotujícím ve vzduchu), a to bez připojení hřídele kozlíku k dynamometru, s nasazenou spojkou při otáčkách 0 ot/min, 1500 ot/min i 3000 ot/min. Také jsme zkoušeli odpojit ze zařízení axiální ložisko, což dovolovalo měřit pouze statický stav bez otáček, protože nebylo možné připojit kozlík k dynamometru.

Protože z většiny měřených bodů stále nebylo možné vyhodnotit výsledky, bylo provedeno další měření s nasazeným sklíčidlem na disk. Cílem této úpravy bylo zvýšit hmotnost disku a tím snížit frekvenci vlastního kmitání systému.

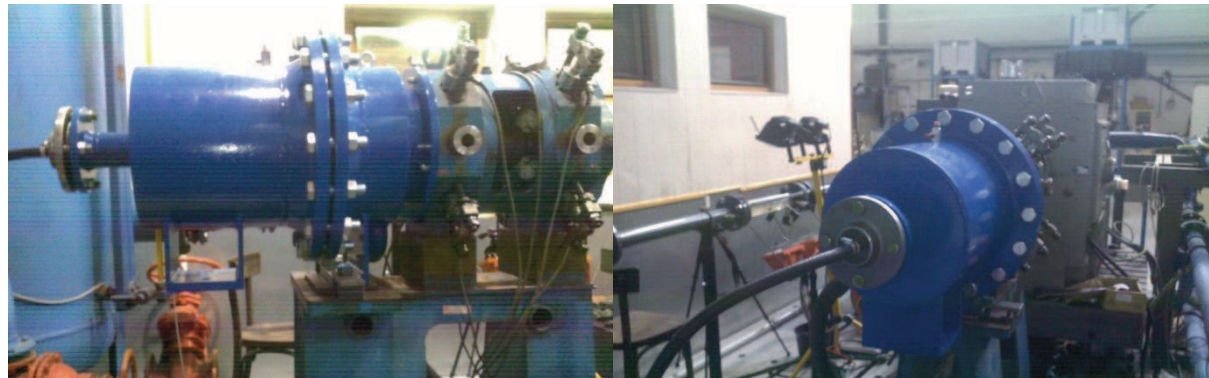


*Obr. 27: Měření se sklíčidlem nasazeným na disku přípravku*

Během léta 2012 bylo vyrobeno a dodáno také zařízení navržené společností *Sigma Lutín*, se kterým se původně počítalo při experimentu (viz *Obr. 28* a *Obr. 29*). V září 2012 pak bylo provedeno zkušební měření s tímto zařízením. Zařízení je podstatně větší. Jeho hmotnost odpovídá zhruba hmotnosti sklíčidla nasazeného na disku přípravku v předchozím měření. S tímto přípravkem pak bylo provedeno další měření. Měření budou dále pokračovat.



*Obr. 28 (nahore) a 29 (dole): Montáž nového přípravku pro experimentální ověření přídavných účinků kapalinové spáry*



| Datum       | Specifikace           | Počet<br>zaznamenaných<br>bodů |
|-------------|-----------------------|--------------------------------|
| 23. 4. 2012 | Se spirálou           | 108                            |
| 25. 4. 2012 | Bez spirály           | 65                             |
| 30. 4. 2012 | Bez axiálního ložiska | 30                             |
| 1. 6. 2012  | Se sklíčidlem         | 16                             |
| 1. 9. 2012  | Nový přípravek        | 36                             |

*Tab. 1: Stručný přehled měření a počtu měřených bodů*

### 3.3 Měřicí technika

#### 3.3.1 Měření veličin

V předchozí kapitole bylo zmíněno, že pro stanovení silového působení na přípravek byly měřeny radiální síly osmi tenzometry HBM.

Kromě sil pak byly měřeny také tyto veličiny:

|       |                                     |        |
|-------|-------------------------------------|--------|
| $p_1$ | tlak před sacím hrdlem čerpadla     | kPa    |
| $p_2$ | tlak za výtláčným hrdlem čerpadla   | kPa    |
| $Q$   | průtok                              | l/s    |
| $n$   | otáčky čerpadla                     | ot/min |
| $M_k$ | krouticí moment na hřídeli čerpadla | N.m    |
| $t$   | teplota vody v sacím kotli          | °C     |

#### 3.3.2 Měřicí technika použitá pro měření hydraulických veličin

- $p_1$  - snímač tlaku DMP 331, výrobce BD SENZORS, s.r.o., Uh. Hradiště, měřicí rozsah 250 kPa (A), přesnost  $\pm 0,25\%$ , proudový výstup 0–20 mA, v.č. 03 22 630
- $p_2$  - snímač tlaku DMP 331, výrobce BD SENZORS, s.r.o., Uh. Hradiště, měřicí rozsah 1000 kPa (A), přesnost  $\pm 0,25\%$ , proudový výstup 0–20 mA, v.č. 01 68 495
- $Q$  - indukční průtokoměrná souprava typ KROHNE SC 100 AS DN 80, výrobce KROHNE, měřicí rozsah 0–40 l/s, přesnost  $\pm 0,5\%$  z měřené hodnoty, proudový výstup 0–20 mA, v.č. A9551092
- $n$  - optoelektrický snímač otáček, který je součástí soupravy dynamometru, měřicí rozsah 3000 ot/min, přesnost  $\pm 0,1\%$ .
- $M_k$  - tenzometrický snímač, který je součástí soupravy dynamometru, měřicí rozsah 200 N.m, přesnost  $\pm 0,5\%$ .
- $t$  - teploměr Ni 1000 s vestavěným převodníkem, výrobce HIT Uherské Hradiště, přesnost  $\pm 0,2\%$ , proudový výstup 4–20 mA, v.č. LA 339

Snímače tlaku  $p_1$  a  $p_2$  byly napájeny stabilizovaným zdrojem stejnosměrného proudu TESLA BK 123,  $U_N=18$  V, v.č. 921 820.

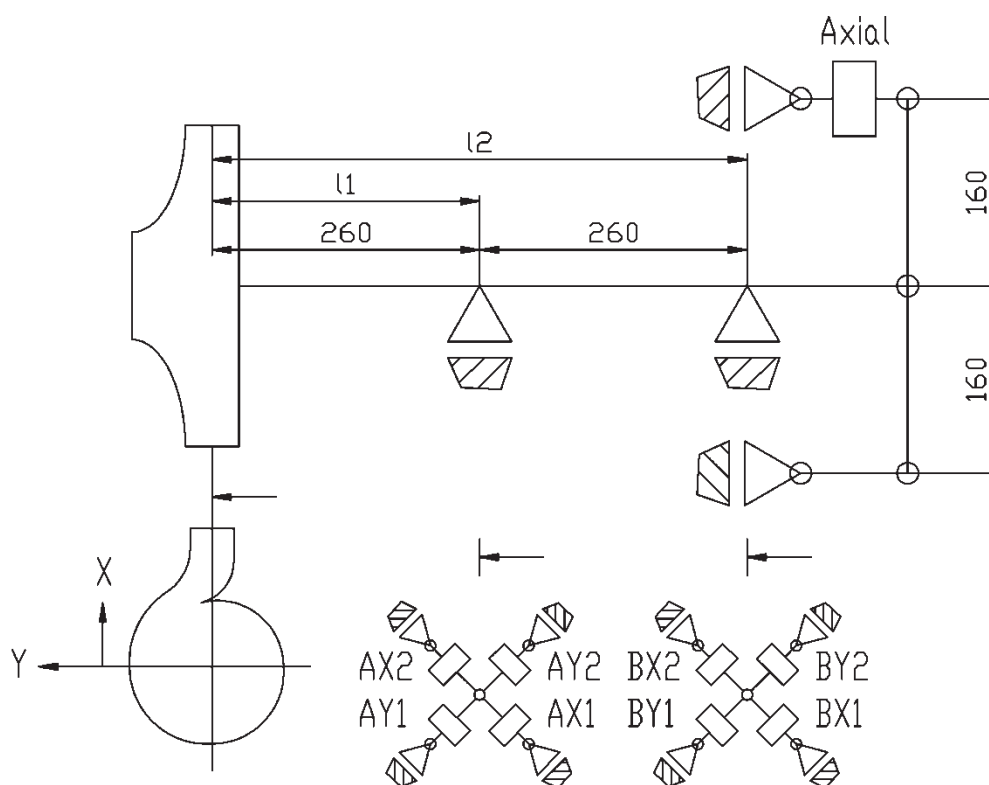
Elektrické signály snímačů  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $Q$ ,  $n$ ,  $M_k$  a  $t$  byly zpracovávány počítačem s měřicí kartou PCL 812-PG, vybaveným měřicím softwarem pro měření energetických a kavitačních charakteristik hydraulických zařízení.

### 3.3.3 Měření silových veličin

Pro měření všech silových veličin byly použity tenzometrické snímače síly výrobce HBM. Elektrické signály ze všech snímačů radiální síly byly zpracovány měřicím systémem SPIDER 8 výrobce HBM. Snímač axiální síly nebyl připojen. Typ snímačů, výrobní číslo, maximální zatížení a tomu odpovídající výstupy snímačů, včetně označení kanálu v systému SPIDER 8, jsou uvedeny v následující tabulce.

| Kanál | Název | TYP | Výr. číslo | Vstup max. | Výstup max. |
|-------|-------|-----|------------|------------|-------------|
|       |       |     |            | kg         | mV/V        |
| 1     | AX1   | U2  | B 4063     | 1000       | 2           |
| 2     | AY1   | U2  | 43101      | 1000       | 2           |
| 3     | AX2   | U2  | B 4064     | 1000       | 2           |
| 4     | AY2   | U2  | 43102      | 1000       | 2           |
| 5     | BX1   | U2  | 97146      | 500        | 2           |
| 6     | BY1   | U2  | 97145      | 500        | 2           |
| 7     | BX2   | U2  | 97159      | 500        | 2           |
| 8     | BY2   | U2A | C84627     | 500        | 2           |

Tab. 2: Tenzometrické snímače použité při experimentu



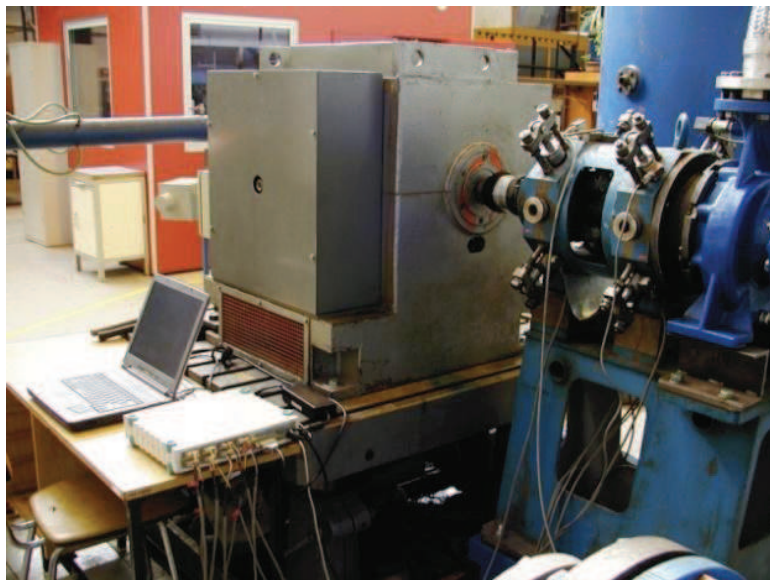
Obr. 30: Schéma zapojení tenzometrů [6]

Pro záznam dat byla nastavena maximální frekvence vzorkování tj. 9600 Hz. Doba ustáleného měření a tedy i počet vzorků jednotlivých měření byly různé. Krátce po úderu paličkou bylo měření manuálně ukončeno z důvodu úspory dat, protože pro vyhodnocení byla zajímavá pouze data bezprostředně po úderu.



*Obr. 31: Měřicí systém Spider 8 od HBM [7]*

Data jsou uložena v počítači v souborech formátu \*.sp8 (data ze systému Spider 8). Každý měřený bod představuje jeden soubor.



*Obr. 32: Připojení experimentálního zařízení k měřicímu systému*

## 4 Vyhodnocení výsledků získaných experimentem

Data získaná měřením byla uložena do počítače ve formátu \*.sp8. Tato data představují časový záznam sil působících v radiálních ložiskách a měřených jednotlivými tenzometry. Pro řešení úlohy je vhodné tento časový záznam převést do frekvenční oblasti. To bylo provedeno pomocí softwaru *Parametr.exe*, dostupného na Odboru Fluidního inženýrství.

Tenzometry v ložiskách A i B jsou umístěny diagonálně (o 45° odchýleny od vodorovného směru), takže měří síly v diagonálních směrech. Pokud chceme určit reakce v ložiskách v horizontálním a vertikálním směru, je třeba přepočítat zaznamenané síly do těchto směrů, označených x a y dle zavedeného souřadného systému (viz Obr. 33).



Obr. 33: Orientace a pojmenování tenzometrů

Rovnice pro výpočet reakcí v ložiskách A a B v souřadném systému podle Obr. 33.

$$\begin{aligned}
 F_{xa} &= (AX1 - AX2 + AY1 - AY2) \cdot \sin(45^\circ) \\
 F_{ya} &= (AX1 - AX2 - AY1 + AY2) \cdot \sin(45^\circ) \\
 F_{xb} &= (BX1 - BX2 + BY1 - BY2) \cdot \sin(45^\circ) \\
 F_{yb} &= (BX1 - BX2 - BY1 + BY2) \cdot \sin(45^\circ)
 \end{aligned} \tag{122}$$

Co se týče orientace sil měřených tenzometry, pokud na tenzometrickou krabici působí tlak, je odezva tohoto tenzometrického zesilovače kladná a naopak.

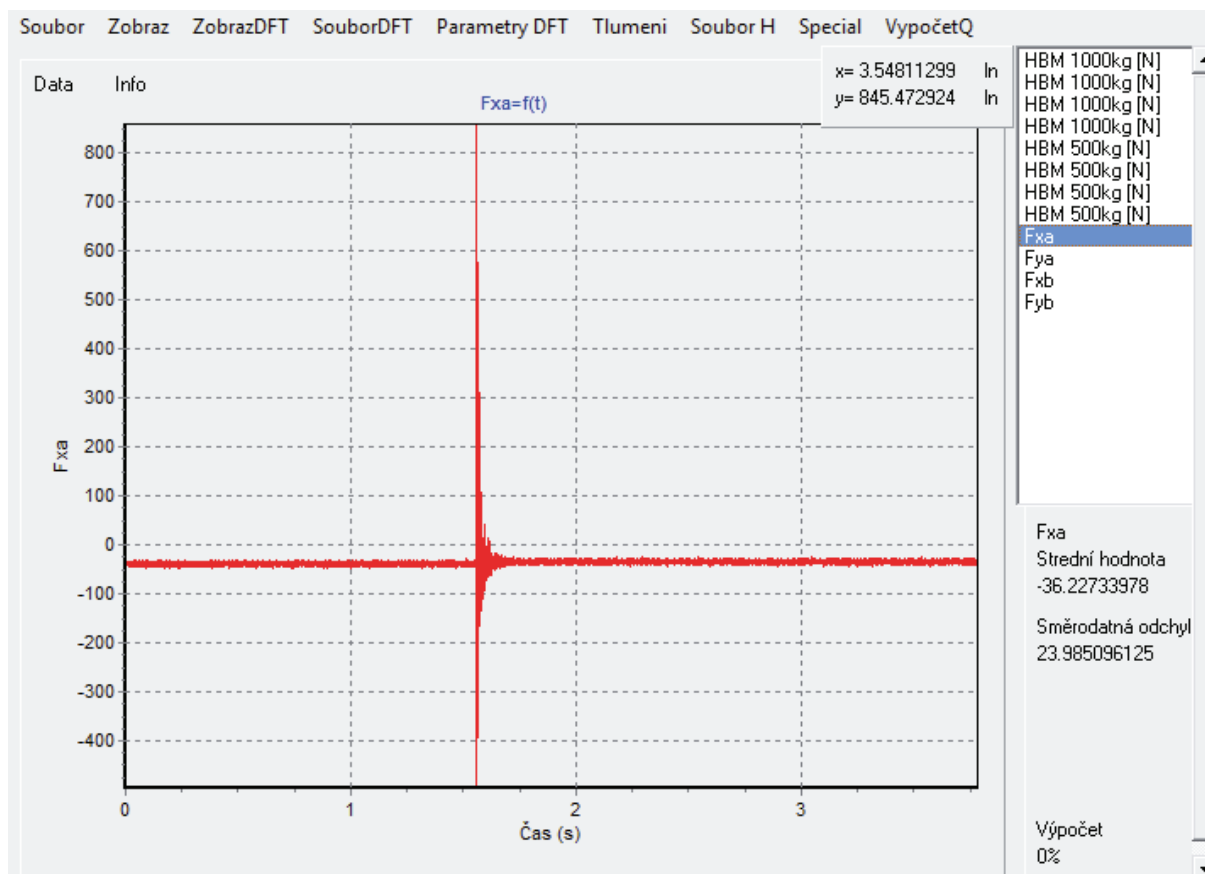
Výpočet reakcí podle těchto rovnic je již součástí programu *Parametr.exe*.

### 4.1 Frekvenční analýza naměřených signálů

Průběhu sil je přirozeně zaznamenám v závislosti na čase. Pro další vyhodnocení dat je účelné převést tento záznam z časové oblasti do oblasti frekvenční. Ta je pro zobrazení periodických, či kvaziperiodických signálů vhodnější, neboť je pro jejich analýzu mnohem přehlednější než časová oblast. [8]

Časový průběh jakéhokoliv měřeného signálu lze rozložit na soubor harmonických funkcí, lišících se amplitudou, úhlovou frekvencí a svou počáteční fází, tak že jejich součet dá originál. Pokud se u tohoto souboru harmonických funkcí znázorní závislost amplitudy a počáteční fáze na frekvenci, je signál zobrazen ve frekvenční oblasti.

Signál představující periodickou funkci spojitou v čase lze přímo rozložit na kombinaci harmonických signálů (tj. funkcí sinus a cosinus). Tento rozklad se nazývá Fourierova řada. Pro obecné, neperiodické funkce se pak používá tzv. Fourierova transformace.



Obr. 34: Úplný časový záznam síly zobrazený v programu Parametr.exe

#### 4.1.1 Fourierova transformace

Pomocí Fourierovy transformace (FT) tedy lze vypočítat rozklad na harmonické složky u obecného (periodického i neperiodického) signálu a převést jej tak z časové do frekvenční oblasti. Signál může být obecně v čase spojitý, nebo diskrétní.

Při rozkladu periodického signálu na Fourierovu řadu je získané frekvenční spektrum složené z izolovaných složek, protože obsahuje pouze frekvence, které jsou násobky základní frekvence opakování signálu.

Naproti tomu při Fourierově transformaci je získané spektrum spojitou funkcí frekvence, protože rozklad obsahuje obecně složky o všech frekvencích s infinitezimální amplitudou. Tato přímá Fourierova transformace je definována vztahem:

$$X(\omega) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt \quad (123)$$

Harmonické funkce sinus a cosinus jsou zde vyjádřeny jako funkce komplexní exponenciály  $e^{-i\omega t}$ .

Ve vztahu je obrazem signálu vyjádřen jako spektrum úhlové rychlosti  $\omega$ . Protože  $\omega = 2\pi f$ , pokud chceme vyjádřit obraz signálu přímo jako frekvenční spektrum, vypadá rovnice (123) následovně:

$$X(f) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi f t} dt \quad (124)$$

Originály signálu lze pak získat z obrazů zpětnou Fourierovou transformací.

$$x(t) = F^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi f t} df \quad (125)$$

Pro FT musí ještě platit tzv. Parsevalova rovnost, která vyjadřuje, že celková energie v časové i frekvenční oblasti je stejná. [8]

$$\int_{-\infty}^{\infty} [x(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (126)$$

Při zpracování signálu počítačem jsou k dispozici jen vzorky funkce  $x(t)$  v diskretních časových okamžicích. Vychází se tedy z těchto navzorkovaných hodnot, které tvoří originální posloupnost  $\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ . Pro jejich zpracování se využívá tzv. diskretní Fourierovy transformace (DFT). Originál i obraz pak mají samozřejmě diskretní průběh. Po formální stránce je integrál v rovnici (124) nahrazen sumací s dělením odpovídajícím periodě vzorkování. V praxi se používá DFT u níž sumace probíhá pouze v mezích od 0 do  $N - 1$ , kde  $N$  je počet vzorků. [9]

Přímá DFT pro záznam o konečném počtu vzorků  $N$  je definována vztahem:

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N - 1) \quad (127)$$

Pro zpětnou DFT platí:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{i\frac{2\pi}{N}kn}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N - 1) \quad (128)$$

Analogicky jako u přímé FT pro diskretní Fourierovu transformaci platí rovnost:

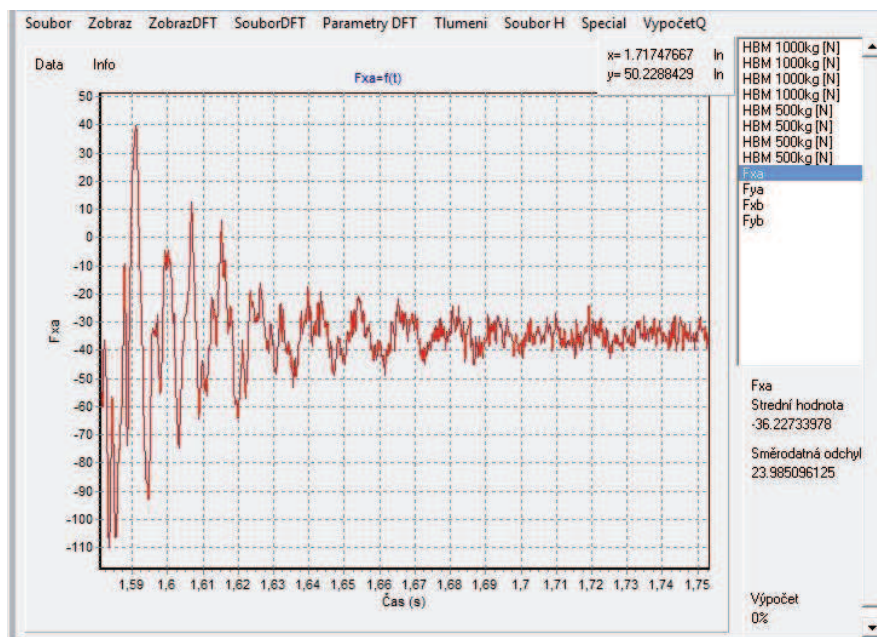
$$\sum_{n=0}^{N-1} [x(n)]^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \quad (129)$$

Výpočet DFT podle definičního vztahu (100) je časově náročný. Vyžaduje totiž provést  $N^2$  komplexních součinů a  $N^2$  komplexních součtů. Byla proto vyvinuta metoda výpočtu DFT, která výpočet značně zrychlí, volbou zvláštní délky záznamu  $N$ . K výpočtu pak stačí provést menší počet komplexních součinů i komplexních součtů. Tento algoritmus se nazývá rychlá Fourierova transformace (FFT). [10]

#### 4.1.2 Zpracování měřených dat

Pro zápis hodnot byla nastavena maximální frekvence vzorkování  $f_{vz} = 9600 \text{ Hz}$ . I pro relativně krátkou dobu měření  $t_m$  to představuje značný počet vzorků ( $n = t_m / f_{vz}$ ). Z hlediska vyhodnocení jsou zajímavé vzorky v časové oblasti bezprostředně po nárazu, kdy se kmitání způsobené úderem postupně utlumuje.

Oproti úplnému časovému záznamu je pro zpracování dat vybrán kratší časový úsek  $t$  (viz Obr. 35).

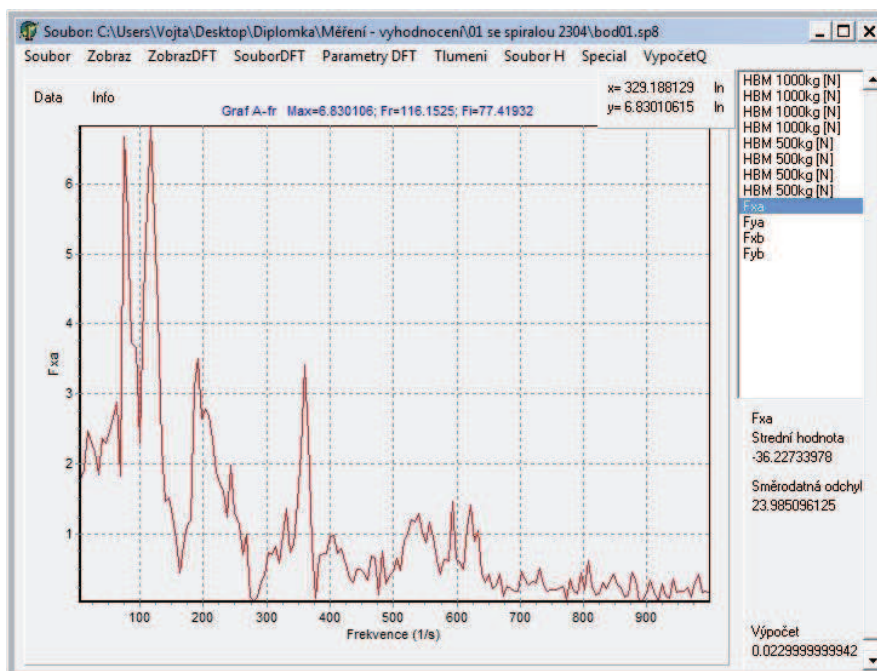


Obr. 35: Vybraný úsek časového záznamu síly

Tento úsek je převeden do frekvenční oblasti. Software *Parametr.exe* používá pro převod z časové do frekvenční oblasti diskrétní Fourierovu transformaci (DFT). Na počtu vzorků vybraného časového úseku závisí frekvenční krok obrazu ( $\Delta f = 1/t$ ).

Z celkového časového záznamu byl vždy vybrán časový úsek o délce 1 s, aby po převodu do frekvenční oblasti byl frekvenční krok 1 Hz.

Vzorky pro DFT jsou dány zvoleným oknem v programu. Zvolené frekvence byly nastaveny v rozmezí od 10 Hz do 250 Hz.

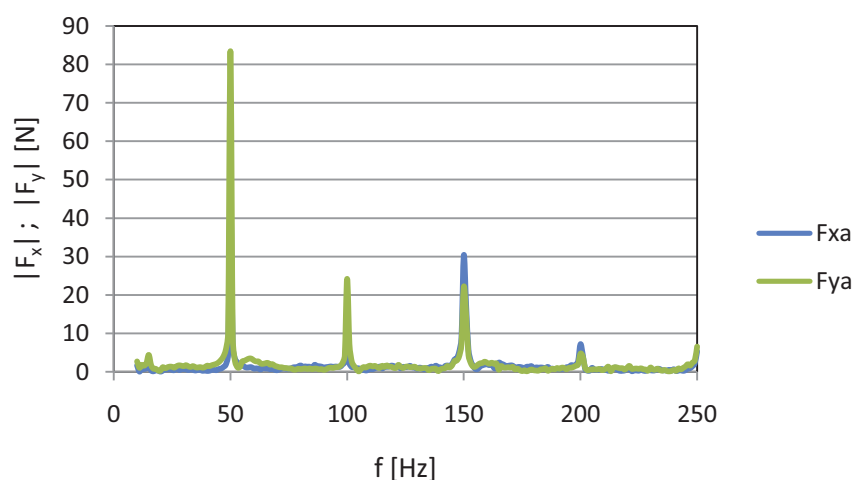


Obr. 36: Záznam síly v závislosti na frekvenci po provedené DFT

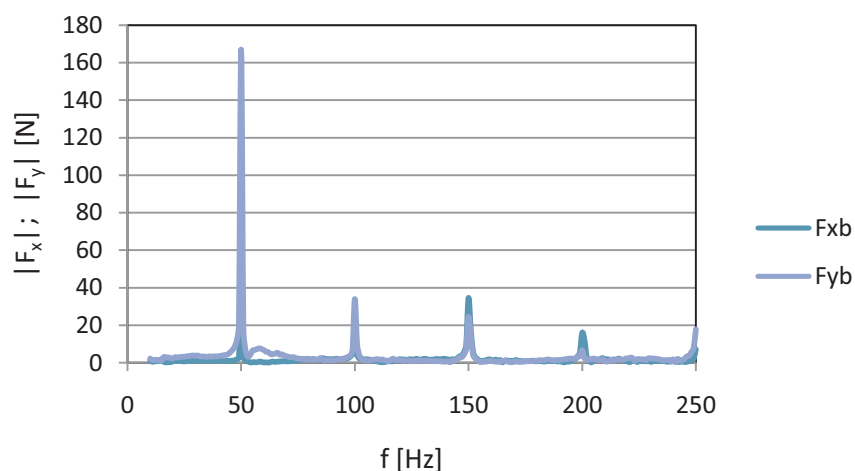
## 4.2 Stanovení silového působení

Z frekvenční analýzy signálu byly získány závislosti silového působení vybuzeného nárazem paličky na hřídel přípravku. Přesněji byly získány závislosti amplitudy i fáze složek sil  $F_{xa}$ ,  $F_{ya}$ ,  $F_{xb}$  a  $F_{yb}$  v ložiskách A i B do směrů x a y, v závislosti na frekvenci.

Program *Parametr.exe* umožňuje export dat (jak naměřených v časové dimenzi, tak transformovaných DFT do oblasti frekvenční) do programu MS Excel, ve kterém bylo provedeno další zpracování. Na následujících grafech je zobrazena ukázka vykreslení sil ve frekvenční oblasti po exportu, včetně určení průběhu radiální síly z amplitud a fází jednotlivých sil.



Graf 1: Amplitudy sil v ložisku A vykreslené po exportu dat



Graf 2: Amplitudy sil v ložisku B vykreslené po exportu dat

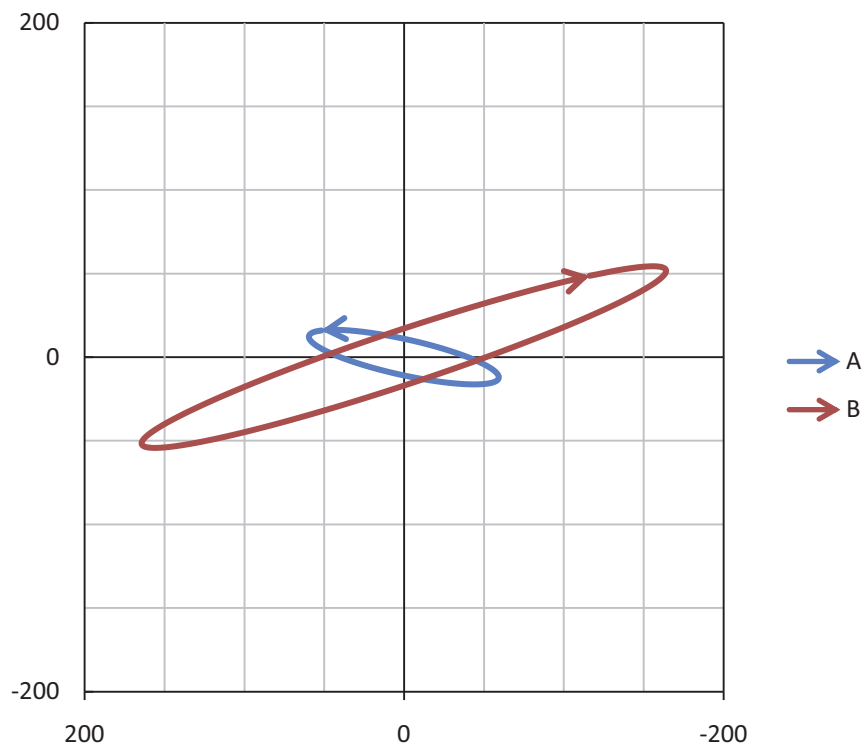
Z grafů je dobře patrná otáčková frekvence rotoru (50 Hz u měření s hřídelem rotujícím na 3000 ot/min), kdy jsou amplitudy sil nejvyšší. Výrazný je rovněž její dvojnásobek a trojnásobek.

Ze záznamu amplitud a fází pro každý snímač lze sestavit grafy závislosti průběhu radiální síly.

Pro složky sil do směrů x a y platí:

$$\begin{aligned} F_x &= |F_x| \cdot \sin(\varphi_{x0} + \varphi) \\ F_y &= |F_y| \cdot \sin(\varphi_{y0} + \varphi) \end{aligned} \quad (130)$$

Zde  $\varphi_{x0}$  je zaznamenaná počáteční fáze složky  $F_x$ ,  $\varphi_{y0}$  je počáteční fáze složky  $F_y$ ,  $\varphi$  je obecný úhel, který volíme v rozsahu od 0 do  $360^\circ$ , čímž získáme průběh složek sil během jedné otáčky (viz Graf 3).



Graf 3: Průběh radiálních sil v ložisku A i B během jedné otáčky

Na grafu je znázorněn průběh radiální síly v obou ložiskách při pohledu od dynamometru. Graf je vykreslen v souřadném systému tenzometrů, tedy kladný směr osy x je nahoru, kladný směr osy y doleva.

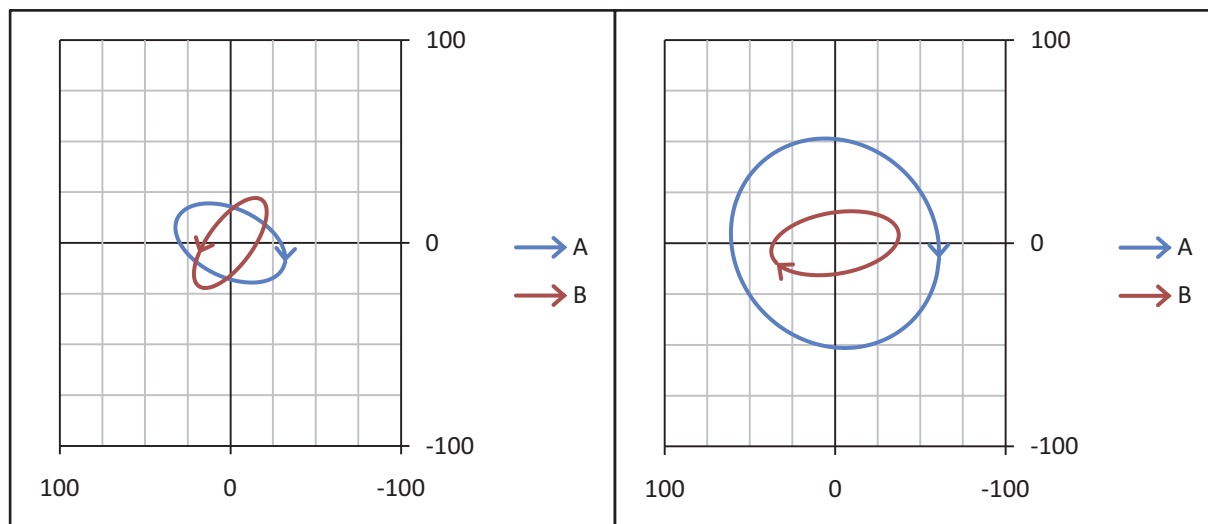
Totožný průběh bude mít i výchylka středu hřídele, protože se nachází ve směru síly a je s ní svázána přes tuhost tenzometrů. Grafem je tak popsán také precesní pohyb hřídele. Z počáteční výchylky a směru lze určit, zda se jedná o souběžný, nebo protiběžný precesní pohyb hřídele. Hřídel se otáčel ve směru hodinových ručiček

Tvar precesní rotace je obecně eliptický. Je superpozicí dvou kruhových pohybů s opačným smyslem otáčení, jak bylo odvozeno v kapitole 1.3.

Směr rotace v ložisku A nemusí souhlasit se směrem rotace v ložisku B. Může tak nastat případ, kdy se v jednom ložisku objeví souběžná precese a ve druhém protiběžný precesní pohyb, což lze vidět na následujících grafech

#### 4.2.1 Grafy vynuceného kmitání rotoru

Ze souborů, u nichž byly signály jasně čitelné a daly se dobře odečíst amplitudy sil, jsou sestaveny grafy. Jedná se o otáčkové frekvence rotoru. Na grafech je znázorněn průběh sil pro různé otáčky a průtoky. Lze vidět, že při nižším průtoku se u hřídele objeví v jednom ložisku protiběžná precese.



Graf 4:

Otáčky: 1500 ot/min

Průtok: 1 l/s

Tlak na výtlaku: 240 kPa

Frekvence: 25 Hz

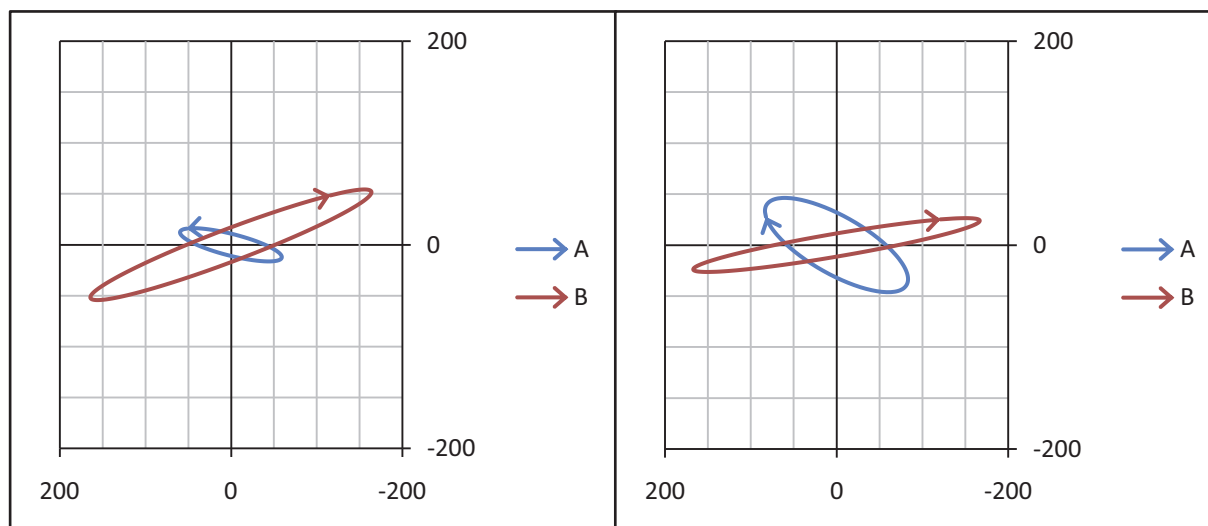
Graf 5:

Otáčky: 1500 ot/min

Průtok: 1,7 l/s

Tlak na výtlaku: 410 kPa

Frekvence: 25 Hz



Graf 6:

Otáčky: 3000 ot/min

Průtok: 0,94 l/s

Tlak na výtlaku: 240 kPa

Frekvence: 50 Hz

Graf 7:

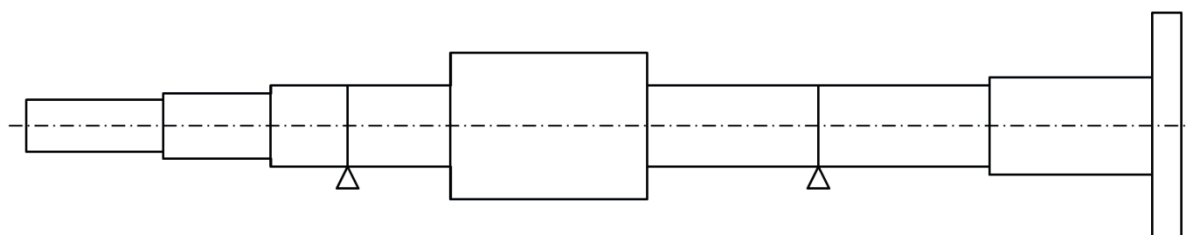
Otáčky: 3000 ot/min

Průtok: 1,68 l/s

Tlak na výtlaku: 410 kPa

Frekvence: 50 Hz

Z počátečních fází a amplitud sil v ložiskách A a B lze sestavit tvary vynucených kmitů rotoru na otáčkové frekvenci v závislosti na otáčkách a statickém průtoku. Při otáčkách 1500 ot/min i 3000 ot/min předpokládáme, že rotor kmitá jako tuhý, takže výsledné tvary kmitu lineárními křivkami.



Průtok: 1 l/s

*Směr x*



*Směr y*



Průtok: 1,7 l/s

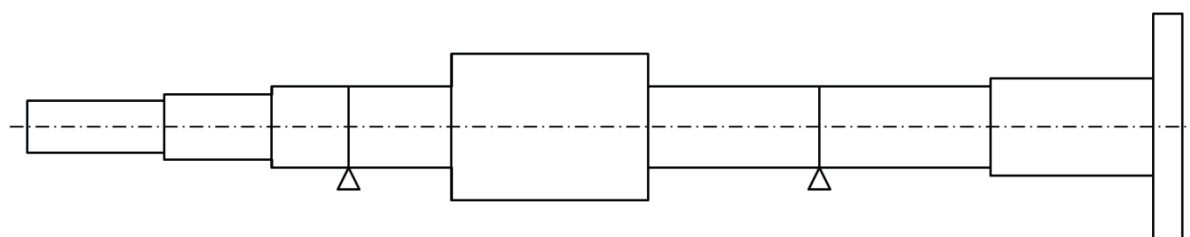
*Směr x*



*Směr y*

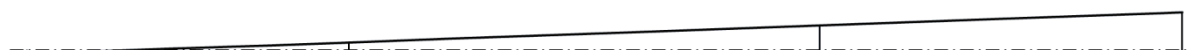


Obr. 37: Tvary kmitu vynuceného kmitání rotoru na otáčkách 1500 ot/min

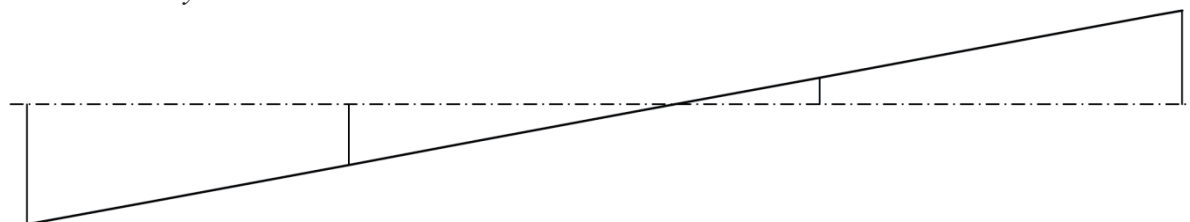


Průtok: 0,94 l/s

*Směr x*



*Směr y*

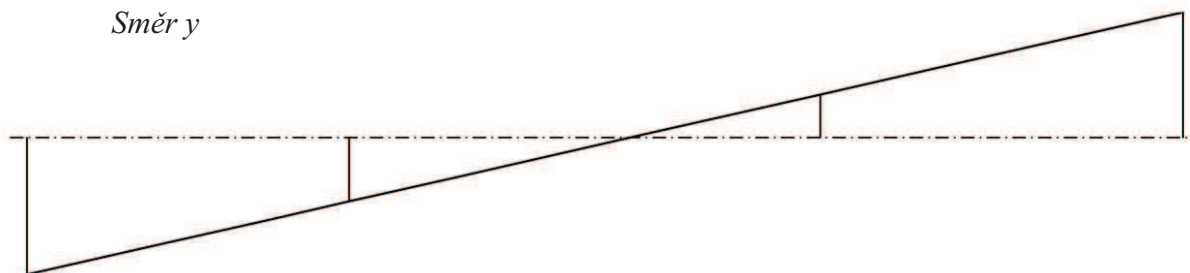


Průtok: 1,68 l/s

*Směr x*



*Směr y*



Obr. 38: Tvary kmitu vynuceného kmitání rotoru na otáčkách 3000 ot/min

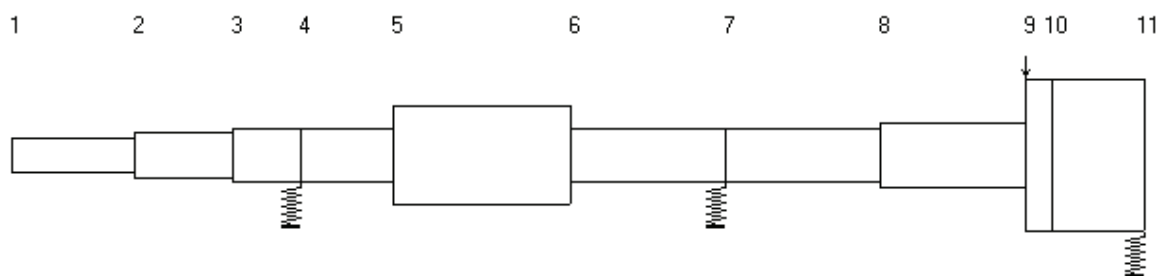
### 4.3 Teoretické určení vlastního kmitání

Přes počet provedených měření se nepodařilo určit u záznamů z měření suchého hřídele (ve vzduchu), ani z nerotujícího mokrého hřídele (v kapalině) vlastní frekvence. Záznamy byly výrazně zašuměné.

Pro porovnání s daty naměřenými při rotaci hřídele v kapalině byl vytvořen výpočtový model soustavy, který umožňuje teoretický výpočet vlastních frekvencí a zobrazení tvarů vlastních kmitů.

Zjednodušený teoretický model hřídele měřicího zařízení byl vytvořen v softwaru *Project.exe*, který je rovněž dostupný na Odboru Fluidního inženýrství.

Model je složen z 11 uzlových bodů, mezi kterými je 10 polí. Je možné přidávat nová pole a uzly, či editovat stávající. Jednotlivým polím lze zadávat geometrické rozměry i jiné vlastnosti (viz Tab. 3). V uzlech lze pak zadat okrajové podmínky pro hřídel. Jsou tak určeny vlastnosti uložení hřídele (uzly 4 a 7) i budící síla (uzel 9). V uzlu 11 je modelována hmotnost odpovídající hmotnosti přípravku navrženého v *Sigmě Lutín* (příp. sklíčidlu).



Obr. 39: Model hřídele měřicího kozlíku

Jednotlivá pole modelu (vždy mezi dvěma uzly) jsou zadána následovně:

| Pole | Délka | Průměr | Průměr ot. | Hustota | E        | J         |
|------|-------|--------|------------|---------|----------|-----------|
| 1    | 0.08  | 0.032  | 0          | 7900    | 2.10E+11 | 5.147E-08 |
| 2    | 0.063 | 0.04   | 0          | 7900    | 2.10E+11 | 1.257E-07 |
| 3    | 0.045 | 0.05   | 0          | 7900    | 2.10E+11 | 3.068E-07 |
| 4    | 0.06  | 0.05   | 0          | 7900    | 2.10E+11 | 3.068E-07 |
| 5    | 0.115 | 0.09   | 0          | 7900    | 2.10E+11 | 3.221E-06 |
| 6    | 0.1   | 0.05   | 0          | 7900    | 2.10E+11 | 3.068E-07 |
| 7    | 0.1   | 0.05   | 0          | 7900    | 2.10E+11 | 3.068E-07 |
| 8    | 0.095 | 0.06   | 0          | 7900    | 2.10E+11 | 6.362E-07 |
| 9    | 0.017 | 0.139  | 0          | 7900    | 2.10E+11 | 1.832E-05 |
| 10   | 0.06  | 0.139  | 0          | 1       | 2.10E+11 | 1.832E-05 |

Tab. 3: Hodnoty zadané pro teoretický model hřídele

Veličina  $E$  je Youngův modul pružnosti v tahu. Pro ocel je  $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ .  $J$  je kvadratický moment průřezu v ohybu, pro který platí:

$$J = \frac{\pi D^4}{64} \quad (131)$$

U Pole 10 je zadána zanedbatelná hustota (program neumožňuje zadat nulovou hustotu), protože hmotnost přípravku je dána zadanou vazbou v uzlu 11.

U každého uzlového bodu modelu lze zadat tuhost, tuhost natočení, sílu a moment.

V našem případě jsme v uzlech 4 a 7, které odpovídají uložení v ložiskách A a B (model je orientován tak, že ložisko A je vpravo a ložisko B vlevo) zadali tuhost. Tuhost lze zadat jako obecný polynom, ve kterém je zahrnut i vliv hmotnosti ložiskových těles:

$$k = k_0 + k_1|s| + k_2|s|^2 \quad (132)$$

Tuhost uložení představuje člen  $k_0$ , člen  $k_1$  úměrný  $|s|$  nebyl uvažován. Člen  $k_2$ , který je úměrný druhé mocnině vlastního čísla představuje hmotnost ložiskových těles, kterou musíme zadat jako záporné číslo, protože  $|s|^2 = (i\omega)^2 = -\omega^2$ .

Hmotnosti ložiskových těles byly zjištěny pomocí geometrického modelu měřicího kozlíku jako  $m = 13$  kg.

Tuhosti uložení byly určeny experimentálně.

Uzlem 9 je zadána budící síla. Protože nás zajímají tvary vlastních kmitů a ne amplitudy je v modelu zadána jednotková budící síla.

V uzlu 11 je zadána hmotnost sklíčidla nasazeného na kotouči  $m = 18,2$  kg ve vzdálenosti 60 mm od hrany disku (pole 9), což je změřená vzdálenost těžiště sklíčidla. Tato hmotnost přibližně odpovídá také hmotnosti experimentálního přípravku vyrobeného v *Sigmě Lutín*.

Systém je kontinuem, má tedy nekonečně mnoho stupňů volnosti a vlastních frekvencí, z nichž jsou pro nás zajímavé pouze první dvě, při kterých můžeme model ještě považovat za tuhý rotor, jak bude také patrné z vypočtených tvarů vlastních kmitů. Při nižších frekvencích lze očekávat, že rotor bude kmitat jako tuhý, neboť jeho tuhost je řádově větší než tuhost uložení.

### 4.3.1 Určení tuhosti uložení

Aby bylo možné zadat do teoretického modelu parametry co nejlépe odpovídající skutečnosti, byly zjištěny tuhosti uložení hřídele měřicího kozlíku. Bylo provedeno měření, při němž byly tenzometry předpjetý na stejné hodnoty a ze změny síly zaznamenávané tenzometry při definovaném posuvu byla určena výsledná tuhost uložení.

Bylo vždy pootočeno o polovinu otáčky šroubu, což při známém stoupání závitu šroubů pro nastavení předpjetí na tenzometrech 1 mm činí definovaný posuv 0,5 mm. Byly měřeny posuvy jak v kladném, tak v záporném směru.

Ze známého posunutí  $x$  a tenzometry naměřeného rozdílu síly  $F$  lze pak určit tuhost.

Protože posuv byl nastavován vždy na jednom tenzometru, ale týkal se celé soustavy, je potřeba započítat při výpočtu celkovou tuhost ve směru posuvu. Z hlediska posunutí jsou tuhosti obou tenzometrů řazeny sériově a pro celkovou tuhost tedy platí:

$$k_{Cs} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_1}} = \frac{k_1}{2} \quad (133)$$

kde  $k_1$  je tuhost jednoho tenzometru (viz *Obr. 40* na další straně).



Obr. 40: Tuhosti tenzometrů jsou z hlediska nastaveného posunutí řazeny sériově.

Pro sílu pak plyne:

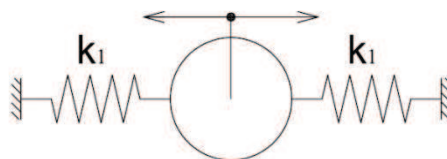
$$F = k_{Cs} x_1 = \frac{k_1}{2} x_1, \quad (134)$$

kde  $x_1$  je námi definované posunutí. Ze vztahu nyní vyplývá pro tuhost jednoho tenzometru  $k_1$  rovnice:

$$k_1 = \frac{2F}{x_1} \quad (135)$$

Z tuhosti jednoho tenzometru potom lze vypočítat celkovou tuhost uložení. Nesmíme zapomenout, že z hlediska hřídele představují tenzometry paralelně řazené tuhosti. Potom se celková tuhost rovná:

$$k_C = k_1 + k_1 = 2k_1 \quad (136)$$



Obr. 41: Tuhosti tenzometrů jsou z hlediska uloženého hřídele řazeny paralelně.

Pro tenzometry byly tak experimentálně určeny tyto hodnoty tuhostí:

| Tenzometr | Posun | Tuhost   |
|-----------|-------|----------|
| -         | mm    | N/mm     |
| AX        | 0.5   | 6392.085 |
| AX        | -0.5  | 5566.552 |
| AY        | 0.5   | 4795.192 |
| AY        | -0.5  | 5109.887 |
| BX        | 0.5   | 4454.293 |
| BX        | -0.5  | 4541.102 |
| BY        | 0.5   | 4728.34  |
| BY        | -0.5  | 4661.249 |

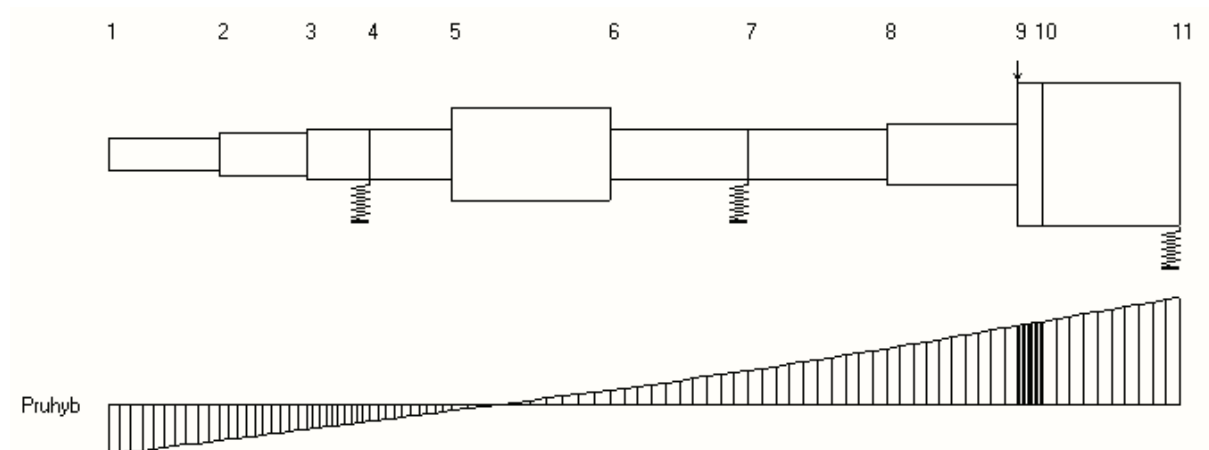
Tab. 4: Naměřené tuhosti tenzometrů měřicího kozlíku

U prvních dvou zjištěných tuhostí, které jsou posunuté oproti ostatním, zřejmě došlo k dosednutí disku, proto dále nebyly uvažovány a byly považovány za chybu.

Dle měření jsme pro model zadávali tuhost  $k = 5 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ .

### 4.3.2 Vypočet vlastních tvarů kmitání rotoru

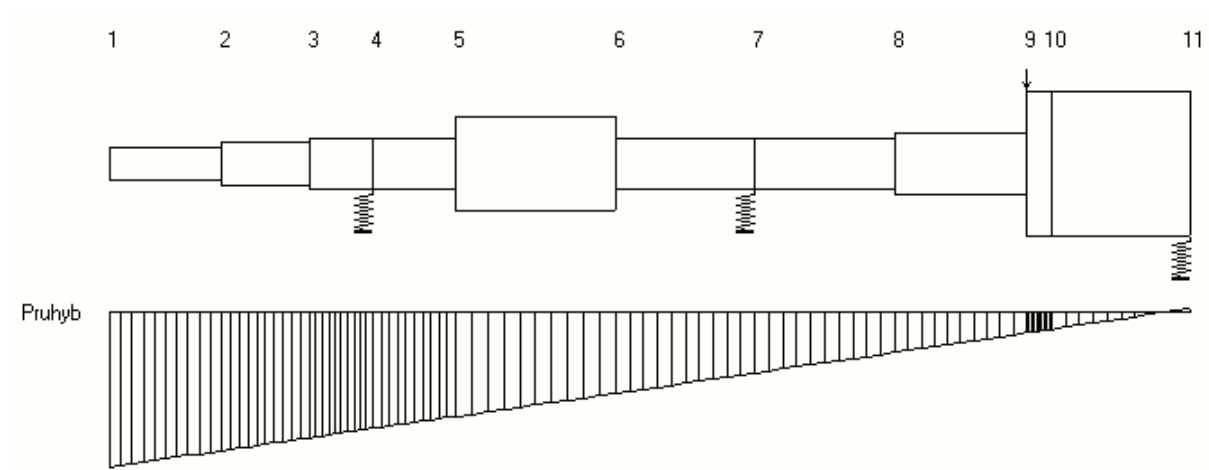
Po zadání potřebných hodnot do teoretického modelu v softwaru *Project.exe* byly nalezeny teoretické tvary vlastních kmitů hřídele měřicího kozlíku:



Obr. 42: První vlastní tvar kmitu  $f=28,5\text{Hz}$ .

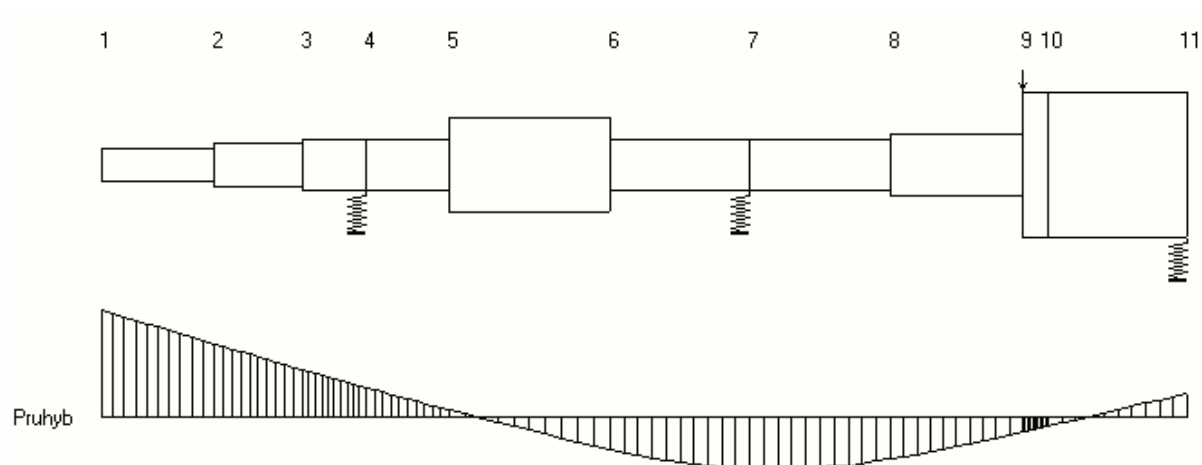
Z prvního tvaru kmitu je patrné, že hřídel kmitá kolem bodu umístěného přibližně ve středu mezi ložisky A a B. Zde je tedy uzlový bod. Rázem doprostřed hřídele pak nelze toto kmitání vybudit.

Dobře je splněn výchozí předpoklad tuhého rotoru, protože průběh výchylky je po délce téměř lineární. Rotor tedy kmitá jako tuhý. Veškeré deformace předpokládáme v ložiskách.



Obr. 43: Druhý vlastní tvar kmitu  $f=81\text{Hz}$ .

I pro druhý vlastní tvar kmitání platí předpoklad tuhého rotoru. Lze vidět, že hřídel kmitá kolem uzlu, který je přibližně v těžišti přípravku.



Obr. 44: Třetí vlastní tvar kmitu  $f=216\text{Hz}$ .

Třetí vlastní frekvence je již poměrně vysoká. Rotor již zde nelze považovat za tuhý. Této frekvence již nejsme schopni při experimentu dosáhnout, neboť otáčky jsou značně vysoké:

$$n = 60f = 12\,960 \text{ ot/min} \quad (137)$$

#### 4.4 Shrnutí výsledků měření

Cílem měření bylo stanovení působení radiálních sil na rotor a jejich rozklad na jednotlivé přídavné účinky. Přídavné účinky by se měly projevit u mokrého rotoru (měření ve vodě), zatímco u suchého rotoru (měření na vzduchu) tyto přídavné účinky nebudou.

Z hlediska problematického měření dynamických vlastností tohoto přípravku, nakonec nebylo možné jednoznačně stanovit přídavné účinky kapaliny. Měřené signály byly výrazně zkresleny šumem od neznámých zdrojů. Při stanovení vlastních frekvencí pomocí rázu byl signál výrazně utlumen tlumením v tenzometrech a převažoval vliv šumu. Provedeným měřením tak nebyly zajištěny podklady k uspokojivému určení přídavných účinků.

Celkem bylo změřeno 255 souborů, pro následné zpracování bylo vybráno pouze několik nejzajímavějších souborů, ze kterých jsou uvedeny výsledky. Z měřených dat bohužel nebylo možné stanovit vlastní frekvence, neboť z výše uvedených důvodů se přes celkový počet měření nepovedlo nalézt soubor, z kterého by se daly jednoznačně odečíst.

Pro vybraná měření byl určen precesní pohyb hřídele při vynuceném kmitání rotoru v závislosti na otáčkách a statickém průtoku. Pro tyto měřené body jsou sestaveny grafy průběhů sil a jím odpovídající tvary kmitů.

Pro frekvence, při kterých byla data měřena, jsme předpokládali, že rotor kmitá jako tuhý. To bylo potvrzeno z hlediska výpočetního modelování, tudíž je možné sestavit grafy tvaru kmitu pro frekvence do cca 70 % frekvence prvního ohybového tvaru kmitu. Byl vytvořen přibližný teoretický model vyšetření vlastních tvarů kmitání bez přídavných účinků. Model je pouze přibližný a je potřeba ho zpřesnit, stejně jako i metodiku vyhodnocení experimentu. Aplikovaná metodika výpočtu nezahrnuje tlumení.

## Závěr

Stanovení působení přídavných účinků kapaliny na rotor hydrodynamického stroje v těsnící spáře je pro praxi velmi důležitou, avšak náročnou úlohou. Přídavné účinky kapaliny je potřeba zahrnout pro správný dynamický návrh nového stroje a jeho úspěšný provoz. Velký význam má jejich znalost hlavně při návrhu strojů velkých výkonů, jako jsou napájecí čerpadla apod. Proto se stanovením přídavných účinků zabývá řada firem i výzkumných ústavů. Přesné analytické řešení je těžké najít vzhledem ke složitosti proudění kapaliny těsnící spárou a množství působících vlivů. Práce se zaměřuje na experimentální stanovení těchto přídavných účinků.

Nejprve jsou v rešeršní části položeny teoretické základy dynamiky rotorových soustav, jako základních komponent hydrodynamických strojů. Na jednoduchém modelu Lavalova rotoru jsou vysvětleny základní dynamické jevy u rotorů a odvozeny pohybové rovnice při zahrnutí různých vlivů, jako poddajnosti uložení, tlumení prostředí a materiálu rotoru apod. Rozbor vychází z lineární teorie a předpokladu malých translačních kmitů rotorů.

Na dynamiku rotorů navazuje druhá část, ve které je stručně vysvětlena podstata zahrnutí přídavných účinků pro stroje pracujících v kapalném prostředí a vlivu, který přídavné účinky mají. V závěru kapitoly je pozornost podrobněji obrácena na těsnící spáry s ohledem na interakci rotujícího hřídele a proudící kapaliny a podmínky proudění ve spárách. Stručně je zmíněno stanovení matematického modelu pro vyšetření přídavných účinků kapalinové vrstvy v těsnící spáře.

Třetí část práce se věnuje přípravě a realizaci experimentu pro stanovení přídavných účinků. V souladu se zadáním byl naplánován experiment na zkušebně Odboru fluidního inženýrství Victora Kaplana. V kapitole je popsáno použité zařízení k experimentálnímu stanovení přídavných účinků, měřicí okruh i podmínky měření a konečně samotná realizace měření. Cílem experimentu bylo z naměřených radiálních sil zaznamenaných tenzometry měřicího zařízení stanovit silové působení na rotor při definovaných provozních podmínkách.

Měřením byla získána řada dat, jejichž vyhodnocením se zabývá poslední část práce. Stručně jsou zmíněny teoretické základy zpracování signálu pomocí Fourierovy transformace. Hlavním výsledkem měření je sestavení grafů závislosti vynucených kmitů na průtoku a otáčkách. Samotný experiment byl velmi komplikovaný a rozsáhlý, proto nebylo zahrnuto měření excentricity.

Experimentální stanovení přídavných sil je složitou úlohou z hlediska přípravy i vyhodnocení. Oproti očekávání se nepodařilo získat výsledky umožňující přesné stanovení přídavných účinků kapalinové vrstvy. Řada signálů, zvláště při měření suchého rotoru, byla výrazně zašuměná, tak že nebylo možné experimentálně stanovit silové působení na hřídel rotující ve vzduchu.

Byl pro to vytvořen teoretický model soustavy pro přibližné určení tvaru vlastních kmitů rotoru. Výpočty jsou jen přibližné s řadou zjednodušujících předpokladů vzhledem k celkové náročnosti úlohy.

Dosažené výsledky měření poslouží jako podklad pro další analýzu, neboť Odbor Fluidního inženýrství Victora Kaplana se problematikou experimentálního stanovení přídavných účinků nadále zabývá. Je připravováno další měření s ohledem na přesnější vyhodnocení sil a přídavných účinků kapaliny v těsnící spáře.

## Literatura

- [1] GASCH, Robert; PFÜTZNER, Herbert. *Dynamika rotorů*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1980. 164 s.
- [2] ZAPOMĚL, Jaroslav. *Aplikovaný mechanik jako součást tým konstruktérů a vývojářů: část Dynamika rotorů* [online]. První vydání. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2012, 46 s. [cit. 2012-05-28].  
Dostupné z: <[http://www.337.vsb.cz/materialy/ZapomelJaroslav\\_DynRot.pdf](http://www.337.vsb.cz/materialy/ZapomelJaroslav_DynRot.pdf)>
- [3] GENTA, Giancarlo. *Dynamics of rotating systems* [online]. New York : Springer, 2005. 660 s. [[cit. 2012-05-15]. Dostupné z:< <http://www.springerlink.com/content/978-0-387-20936-4/#section=593693&page=2&locus=8>>. ISBN 978-0-387-20936-4
- [4] POCHYLÝ, František. *Silové účinky kapaliny v těsnící spáře*. Výzkumná zpráva VUT-EU13303-QR-19-11, Brno, prosinec 2011. 30 s.
- [5] KUBIS, Aleš. *Přídavné účinky kapaliny v těsnící spáře působící na rotor hydrodynamického stroje*. Výzkumná zpráva VUT-EU13303-QR-18-11, Brno, prosinec 2011. 39 s.
- [6] HABÁN, Vladimír; POCHYLÝ, František. *Měření radiálních a axiálních sil na čerpadle BETA 26 ve zkušební laboratoři Odboru fluidního inženýrství V. Kaplana*. Technická zpráva VUT-EU-QR-28-04, Brno 22. 12. 2004. 15 s.
- [7] *HBM Spider 8 - Easy and reliable PC-based data acquisition* [online]. 2012-08-08 [cit. 2012-10-01]. Dostupné z www: <<http://www.hbm.com/en/menu/products/measurement-electronics-software/specialized-data-acquisition-systems/spider8/>>
- [8] TŮMA, Jiří. *Zpracování signálů získaných z mechanických systémů užitím FFT*. Praha: Sdělovací technika, 1997, 174 s. ISBN 80-901936-1-7.
- [9] *(Diskrétní) Fourierova transformace* [online]. © 11. prosince 2003 [cit. 2012-05-22]. Dostupné z: <<http://apfyz.upol.cz/ucebnice/down/mini/fourtrans.pdf>>
- [10] VLK, Miloš, et al. *Experimentální mechanika* [online]. Brno: VUT (Fakulta strojního inženýrství), 2003 [cit. 2012-06-01]. Dostupné z:  
<[http://www.umt.fme.vutbr.cz/img/fckeditor/file/opory/Experimentalni\\_mechanika.pdf](http://www.umt.fme.vutbr.cz/img/fckeditor/file/opory/Experimentalni_mechanika.pdf)>

## Seznam symbolů a zkratk

### Seznam hlavních označení

| Označení      | Rozměr                              | Název                              |
|---------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| $b, B$        | $\text{N.s.m}^{-1}$                 | tlumení                            |
| $b_p$         | -                                   | poměrný útlum                      |
| $E$           | Pa                                  | Youngův modul pružnosti v tahu     |
| $f$           | Hz                                  | frekvence                          |
| $f, F$        | N                                   | síla                               |
| $g$           | $\text{m.s}^{-2}$                   | tíhové zrychlení                   |
| $k, K$        | $\text{N.m}^{-1}, \text{N.mm}^{-1}$ | tuhost                             |
| $J$           | $\text{m}^4$                        | kvadratický moment průřezu v ohybu |
| $m, M$        | kg                                  | hmotnost                           |
| $M_k$         | N.m                                 | krouticí moment                    |
| $n$           | $\text{min}^{-1}$                   | otáčky                             |
| $p$           | Pa, kPa                             | tlak                               |
| $Q$           | $\text{l.s}^{-1}$                   | průtok                             |
| $S$           | $\text{m}^2$                        | plocha                             |
| $t$           | s                                   | čas                                |
| $t$           | °C                                  | teplota                            |
| $u$           | m                                   | deformační posuv tělesa            |
| $v$           | $\text{m.s}^{-1}$                   | rychlost kapaliny                  |
| $w$           | $\text{m.s}^{-1}$                   | nestacionární složka rychlosti     |
| $\delta$      | mm                                  | tloušťka spáry                     |
| $\varepsilon$ | mm                                  | excentricita                       |
| $\eta$        | -                                   | poměrné naladění                   |
| $\rho$        | $\text{kg.m}^{-3}$                  | hustota                            |
| $\sigma$      | Pa                                  | nestacionární složka tlaku         |
| $\varphi$     | -                                   | fázový úhel                        |
| $\omega$      | $\text{s}^{-1}$                     | úhlová rychlost rotoru             |
| $\Omega$      | $\text{s}^{-1}$                     | vlastní úhlová rychlost            |

### Seznam zkratk

|            |                                   |
|------------|-----------------------------------|
| <i>DFT</i> | Diskrétní Fourierova transformace |
| <i>FFT</i> | Rychlá Fourierova transformace    |