



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

MODELY PRO REKONSTRUKCI TOKU V SÍTI

MODELS FOR NETWORK FLOW IDENTIFICATION

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Veronika Smejkalová

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Martin Pavlas, Ph.D.

BRNO 2016

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky
Studentka: **Veronika Smejkalová**
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Matematické inženýrství
Vedoucí práce: **Ing. Martin Pavlas, Ph.D.**
Akademický rok: 2015/16

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.1111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Modely pro rekonstrukci toku v síti

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Práce se obecně zaměřuje na oblast modelování toku v sítích v oblasti odpadového hospodářství. Konkrétně bude řešen problém sledování toku vybraného odpadu od producenta do místa jeho finálního nakládání. Úloha je motivována činnostmi strategického projektu TAČR "Centrum kompetence pro energetické využití odpadů" řešeného na Ústavu procesního inženýrství. Úkolem studenta je návrh vhodného matematického modelu pro řešení daného problému.

Pro sestavení modelu a jeho testování budou využita data z Informačního systému odpadového hospodářství (ISOH), který dává informaci o zdrojích a stocích v předmětné síti. Data jsou velmi často zatížena chybou, což ovlivňuje platnost hmotnostní bilance v uzlu.

Student proto využije a prohloubí si osvojené teoretické znalosti teorie grafů, statistiky a optimalizace.

Cíle bakalářské práce:

- Studium teoretických poznatků v oblasti matematického modelování toku v síti.
- Základní porozumění problematice evidence dat a informací v odpadovém hospodářství
- Formulace problému a návrh matematického modelu
- Ověření funkčnosti modelu na jednoduché úloze
- Testování využitelnosti modelu v inženýrských úlohách.

Seznam literatury:

GHIANI, G., LAPORTE, G., MUSMANNO, R.: Introduction to Logistic Systems Planning and Control, John Wiley & Sons, Chichester, 2004.

KALL, P., WALLACE, S. W.: Stochastic Programming, první vydání, John Wiley & Sons, Chichester, 315 s

FOLTÝNEK, T.: Teorie grafů, První vydání, Mendelova univerzita, Provozní ekonomická fakulta, 2011, 90 s, ISBN 978-80-7375-500-3

MÁLEK, M. Vybrané optimalizační modely v logistice. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2015

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2015/16

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

ABSTRAKT

Bakalářská práce se zabývá sestavením matematického modelu toku v síti pro oblast odpadového hospodářství. Teoretická část je věnována pojmům z teorie grafů, toků v síti a optimalizace. Následuje představení modelu a jeho testování. Pro sestavení modelu byla využita data Informačního systému odpadového hospodářství. Data jsou velmi často zatížena chybou, což ovlivňuje platnost hmotnostní bilance v uzlu. Úkolem modelu je tyto chyby odhalit tak, aby bylo možné data dále využívat. Součástí práce jsou podněty k dalšímu vývoji nástroje.

KLÍČOVÁ SLOVA

toky v sítích, optimalizace, Informační systém odpadového hospodářství, směsný komunální odpad

ABSTRACT

The bachelor thesis is focused on development of a mathematical model of network flow in waste management. The theoretical part of thesis deals with graph theory, network flow and optimization. The next chapter introduces the mathematical model. The model was compiled with the use of Information systems of waste management. The data are very often burdened by error. The task of the model is revelation of those errors to make the data useful. This thesis also includes suggestions for further development.

KEYWORDS

network flows, optimization, Information systems of waste management, mixed municipal solid waste

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci na téma *Modely pro rekonstrukci toku v síti*, jsem zpracovala samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a že jsem uvedla všechny použité prameny a literaturu, ze kterých jsem čerpala.

BRNO

.....

podpis autora

PODĚKOVÁNÍ

Tímto bych ráda poděkovala Ing. Martinu Pavlasovi, Ph.D. za vedení mé bakalářské práce. Můj velký dík patří Ing. Radovanu Šomplákovi, Ph.D. za uvedení do problematiky, poskytnutý čas a četné rady při tvorbě této práce. Bc. Jakubu Čuhelovi děkuji za vizualizaci dosažených výsledků. Dále bych chtěla poděkovat za konzultaci přímo v provozu ZEVO Malešice Ing. Tomáši Balochovi a v TERMIZO Liberec Ing. Josefu Jadrnému. V neposlední řadě děkuji své rodině za podporu během celého studia a všem spolužákům za příjemně strávený čas.

BRNO

.....

podpis autora

OBSAH

1 Úvod	12
2 ISOH - informační systém odpadového hospodářství	14
2.1 Klasifikace původců odpadu a způsobu nakládání	15
2.2 Typy databází	16
2.3 Evidovaná a reálná doprava odpadu	18
3 Teorie grafů	21
3.1 Toky v sítích	22
4 Optimalizace	24
5 Matematický model	27
5.1 Omezující podmínky	27
5.2 Tvar účelové funkce	29
5.3 Nelinearita	34
6 Aplikace	35
6.1 Přiřazení významnosti hran	35
6.2 Výpočetní čas	37
6.3 Výsledky aplikace	38
7 Možnosti dalšího vývoje výpočetního nástroje	39
8 Závěr	41
Literatura	42
Seznam symbolů, veličin a zkratk	45
Seznam příloh	47
A Výsledná síť dopravy SKO pro kraje v roce 2013	48
B Mapy ORP pro součet reziduí	52

1 ÚVOD

Práce, *Modely pro rekonstrukci toku v síti*, se zaměřuje na modelování toku v síti v oblasti odpadového hospodářství (OH). Důvodem vzniku této práce je návrh vhodného matematického modelu pro sledování toku vybraného odpadu od producenta do místa zpracování.

V současné době je v ČR okolo 50 % komunálních odpadů (KO) skládkováno [17]. Dle novely zákona [19] má od 1. 1. 2024 platit zákaz skládkování neupraveného odpadu. Odpad, který se ukládá na skládky, bude tedy nutné přeměřovat do jiných zařízení, zejména pro energetické využití. V případě uložení na skládku se jedná o nejméně žádoucí způsob zpracování odpadu. Preferenci způsobu nakládání popisuje *Hierarchie způsobu nakládání s odpady* [25]. Skládkování současně představuje nejlevnější dostupné řešení. Environmentálně šetrnější forma, energetické nebo materiálové využití, je spojena s vyššími náklady pro uživatele. Pro posouzení očekávaného zvýšení nákladů je nutné popsat současný stav. Jedním z důležitých bodů je znalost místa zpracování odpadu od konkrétního producenta (resp. skupiny producentů).



Obr. 1.1: Hierarchie způsobů nakládání s odpady [14]

Pro sestavení modelu a jeho následné testování budou využita data z *Informačního systému odpadového hospodářství* (ISOH), který eviduje informace o produkci a nakládání s odpady. Data jsou často zatížena chybou, což ovlivňuje platnost hmotnostní bilance v uzlu. Uzel představuje územní jednotku, která vykazuje data o odpadech. Nejmenší územní jednotkou, která bude v této práci uvažována, je obec s rozšířenou působností (ORP). Úkolem modelu bude chyby odhalit tak, aby data

byla využitelná pro další výpočty, kde se v některých případech stává právě ISOH stěžejním zdrojem informací.

V první části bude čtenář seznámen se základními pojmy z oblasti evidence dat, teorie grafů, především pak toků v síti a následně s optimalizací. Zmíněný matematický aparát umožňuje formulovat matematický model, který předpokládá platnost hmotnostní bilance v uzlech. To je možné zajistit úpravou vstupních dat. Cílem je, aby tato změna byla minimální. Model bude představen v kapitole 5.

Všechny bilance a výpočty jsou realizovány v prostředí modelovacího systému GAMS (General Algebraic Modeling System). Závěrečná kapitola práce je tvořena aplikací modelu na reálných datech databáze ISOH. Konkrétně se jedná o produkci a nakládání směsného komunálního odpadu (SKO - katalogové číslo 20 03 01) na úrovni ORP pro rok 2013.

2 ISOH - INFORMAČNÍ SYSTÉM ODPADOVÉHO HOSPODÁŘSTVÍ

ISOH je databáze shromažďující data o produkci a nakládání s odpady v rámci celé České republiky. Její využití spočívá zejména v evidenci odpadů, sledování produkce a způsobu nakládání s odpady a následné řízení a plánování změn OH ČR. Součástí databáze ISOH je také Veřejný informační systém odpadového hospodářství (VISOH) určený pro veřejnost, dostupný na <http://isoh.cenia.cz/groupisoh/>. VISOH zveřejňuje agregované informace pro nejmenší územní jednotku ORP. Dále oproti kompletní verzi ISOH nejsou k dispozici údaje za jednotlivé původce.

Evidenci produkce a zpracování odpadu upravuje zákon č. 185/2001 Sb., část šestá, § 39 a 40 [24]. Zákon o odpadech ukládá povinnost vedení průběžné evidence původcům odpadu a oprávněným osobám, které s odpady nakládají, prostřednictvím Integrovaného systému ohlašovacích povinností ISPOP. V současné době je správou informačního systému pověřena společnost CENIA (Česká informační agentura).

Evidence je vedena za každou provozovnu a za každý druh odpadu. Informace se tedy shromažďují od ohlašovatelů, z obecních úřadů ORP, krajských úřadů, Ministerstva životního prostředí a z Centrální ohlašovny MŽP. Data probíhají kontrolou ORP a poté jsou exportována na MŽP a CENIA, kde probíhá další (celorepubliková) kontrola [13].

Pro správnou interpretaci dat zveřejněných v ISOH je nutná orientace v systému zpracování získaných dat. V následujících kapitolách budou přiblíženy vybrané pojmy, které se využijí v dalším textu.

2.1 Klasifikace původců odpadu a způsobu nakládání

Ohlašovací povinnost produkce odpadu se vztahuje na takové původce, kteří vyprodukují více než 100 kg nebezpečných odpadů nebo více než 100 tun ostatních odpadů za kalendářní rok [24]. Obecně evidenci produkce odpadů vedou obce a podnikatelské subjekty, které mohou být navíc také zapojeny do systému obce. Takový producent využívá infrastruktury provozované obcí a ohlašovací povinnost přebírá obec.

Na základě této informace rozdělíme producenty do následujících skupin.

Obce, kde je odpad produkován občany, veřejnými institucemi apod.

Podlimitní podnikatelské subjekty, na které se nevztahuje ohlašovací povinnost z důvodu produkce nižší, než je minimální množství, které je již nutné evidovat.

- Subjekty zapojené do systému obce: ohlašovací povinnost přebírá obec.
- Subjekty předávající odpad svozové společnosti: není známa informace o produkci tohoto odpadu, v evidenci se projeví až v místě svozové firmy jako odpad přijatý.

Nadlimitní podnikatelské subjekty překročili produkcí odpadu hranici ukládací povinnosti evidence odpadu.

- Subjekty zapojené do systému obce: současně s konkrétním subjektem vykazuje také obec, provádí se křížová kontrola. Podstata křížové kontroly spočívá v porovnání množství příslušného odpadu vykazovaného oběma ohlašovatelí [1]. Existuje také informace o předání tohoto množství svozové společnosti.
- Subjekty předávající svozové společnosti: vykazuje subjekt a současně svozová společnost jako odpad přijatý. Opět probíhá křížová kontrola.

Evidence probíhá za každý druh odpadu a každý způsob nakládání zvlášť pod vlastním katalogovým číslem. V této práci bude řešena pouze problematika SKO.

Seznam nejvýznamnějších kódů nakládání SKO [10]:

A00	Produkce odpadu
AN3	Předání vlastního vyprodukovaného odpadu jiné oprávněné osobě
B00	Odpad převzatý od původce
BD1	Skládkování
BR1	Využití odpadu jako paliva nebo k výrobě energie
BN3	Předání již převzatého odpadu
BN30	Převzetí zpětně odebraných některých výrobků nebo elektrozařízení

2.2 Typy databází

V průběhu evidence a zpracování získaných dat vznikají dva typy databáze.

1. *Archivní databáze* obsahuje neupravené informace za uplynulý rok od všech původců i subjektů zapojených do nakládání s odpady tak, jak byly nahlášeny na ORP. V souvislosti se způsobem evidence a ohlašovací povinností má tato databáze jisté nedostatky, které jsou následně upraveny.
 - Neobsahuje přímo uvedené informace o produkci podlimitních firem (viz obr.2.1).
 - Zahrnuje množství odpadu evidované nadlimitními firmami zapojenými do systému obce. Tzn. produkce takovýchto firem je započítána jak z hlášení obce, tak z evidence firmy (viz obr.2.1).
2. *Pracovní databáze* je upravená podle platné metodiky *Matematické vyjádření výpočtu soustavy indikátorů OH* [23]. Tato data jsou využita k sestavení databáze VISOH.

Pracovní databáze vzniká tedy z databáze archivní. Úprava spočívá v odstranění duplicitních hodnot produkce pod kódem A00 od původců, kteří v *Hlášení o produkci a nakládání s odpady* označili, že provozovna je zapojena do systému sběru komunálních odpadů obce. Množství tohoto odpadu totiž ve své produkci uvádí obec, do jejíhož systému je subjekt zapojen. Množství u kódu AN3 není vymazáno. Důvodem je fakt, že při výpočtech produkce a nakládání se s tímto kódem nakládání nikdy nepočítá.

Další úpravou je dopočet produkce odpadu malých podlimitních firem, které nemají ohlašovací povinnost a odpad předaly svozové společnosti. Ta odpad evidovala pod kódem B00 v místě svého sídla. Změna oproti archivní databázi se stejně jako v předchozím případě týká pouze kódu A00.

Stručný přehled vztahu mezi archivní a pracovní databází nabízí obr. 2.1. Na následující straně (obr. 2.2) je uveden modelový příklad přepočtu archivní a pracovní databáze. Příklad ukazuje přepočet databází v rámci jednoho ORP.

Producent	Systém	Archivní databáze	Pracovní databáze
Obec		vykazuje obec pod kódem A00, BN30	beze změny
Podnikatelský subjekt podlimitní	zapojený do systému obce	vykazuje pouze obec pod kódem A00	beze změny
	předává odpadové společnosti	vykazuje pouze odpadová společnost pod kódem B00 v místě sídla svozové firmy	připočteno k A00, není zahrnuto pod AN3 je zahrnuto pod B00 v místě sídla
Podnikatelský subjekt nadlimitní	zapojený do systému obce	vykazuje subjekt pod kódem A00 a AN3 a současně vykazuje obec pod kódem A00 provádí se křížová kontrola	započítáno pouze jednou a to v produkci obce A00, zůstává pod kódem AN3
	předává odpadové společnosti	vykazuje subjekt pod kódem A00 a současně vykazuje odpadová společnost pod kódem B00 provádí se křížová kontrola	evidováno pod kódem A00 a současně pod kódem AN3 je zahrnuto pod B00 v místě sídla svozové společnosti

Obr. 2.1: Rozdíl mezi archivní a pracovní databází¹

Archivní databáze

Katalogové číslo odpadu	Kód nakládání	Množství (+) (t)	Množství (-) (t)	Poznámka
20 03 01	A00	5		
20 03 01	AN3		5	
20 03 01	A00	1		Firma zapojená do systému obce.
20 03 01	AN3		1	
20 03 01	B00	10		V převzatém množství 10 t jsou 4 t odpadů, které vyprodukovaly a odpadové společnosti předaly podlimitní firmy, které nemají povinnost ohlašovat.
20 03 01	BR1		10	
Součet množství celkem		16	16	

Pracovní databáze

Katalogové číslo odpadu	Kód nakládání	Množství (+) (t)	Množství (-) (t)	Poznámka
20 03 01	A00	5		
20 03 01	AN3		5	
20 03 01	A00	0		Firma v hlášení označila, že je zapojena do systému obce pro nakládání s KO, a proto se dle metodiky vymaže množství uvedené u kódu A00. Množství tohoto odpadu totiž ve své produkci uvádí také obec, do jejíhož systému je subjekt zapojen.
20 03 01	AN3		1	
20 03 01	B00	10		V převzatém množství 10 t jsou 4 t odpadů, které vyprodukovaly a odpadové společnosti předaly podlimitní firmy, které nemají povinnost ohlašovat.
20 03 01	BR1		10	
20 03 01	A00	4		Dopočet z množství převzatých odpadů od malých firem, které vyprodukovaly odpady a nepodaly hlášení. Uvádí se pouze kód nakládání A00.
Součet množství celkem		19	16	

Obr. 2.2: Modelový příklad přepočtu archivní a pracovní databáze²

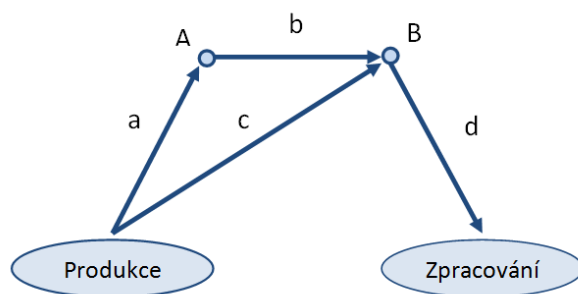
¹zdroj: Ústav procesního inženýrství VUT Brno a Cenia

²zdroj: Ústav procesního inženýrství VUT Brno a Cenia

2.3 Evidovaná a reálná doprava odpadu

Uvedme si modelovou situaci podle obr. 2.3. V uzlu produkce je vyprodukováno určité množství odpadu, které je následně zpracováno v uzlu označeném jako zpracování. Předání mezi těmito dvěma uzly je evidováno dopravou postupně po hranách a, b, d, přičemž cestou dochází k předávce mezi dvěma svozovými společnostmi, označenými A, B.

Může také dojít k případu, kdy je některý článek řetězce chybně vynechán a producent například vykazuje předání přímo uzlu B. V našem případě doprava probíhá přes hrany c, d. Nastává situace, ve které odpad formálně putuje po hranách a, b, d a takto je přeprava evidována svozovými společnostmi. Ve skutečnosti je přeprava realizována po hranách c, d a v této formě je evidována ORP. To vede k nepřesnostem v evidovaných datech, které lze odhalit křížovou kontrolou.



Obr. 2.3: Schéma přepravy odpadu od producenta do místa zpracování

Tuto situaci si lze přiblížit konkrétní ukázkou na obr. 2.4, který uvádí vyhledaná data databáze VISOH pro předání SKO za rok 2013 mezi ORP Frýdlant a Liberec. V případě 2.4a jde o vykazované území Frýdlant a k předání dochází v ORP Liberec. V tabulce 2.4b je tomu naopak.

V tabulce 2.4a lze pozorovat, že ORP Frýdlant eviduje předání ORP Liberec pod kódy AN3, BN3, celkem 2596,9 t. Nicméně Liberec od ORP Frýdlant přijal pouze 111,7 t (obr. 2.4b).

Zde pravděpodobně dochází právě k situaci, kdy ORP Frýdlant předal ORP Liberec určité množství odpadu. Přijetí odpadu od ORP Frýdlant není evidováno v celém rozsahu, protože administrativně doprava probíhala s překládkou v jiném ORP.

Ministerstvo životního prostředí

Data jsou získávána na základě zákona č. 185/2001 Sb. o odpadech a souvisejících prováděcích předpisů v platném znění. (Stav dat k 1.9.2015)

Přehled odpadů				
Rok: 2013				
Odpady: '200301'				
Nakládání: nedefinováno				
Kategorie: O				
Vykazované území: ORP: 5102 Okres: nedefinováno Kraj: nedefinováno				
Území předání, převzetí: ORP: 5105 Okres: nedefinováno Kraj: nedefinováno				
Nové zadání				
Zobrazeny záznamy: 0-4				
Katalogové číslo odpadu	Kategorie odpadu	Kód nakládání	Množství (+) (t)	Množství (-) (t)
200301	O	AN3		49.715500
200301	O	B00	373.811400	
200301	O	BN3		2547.194500
200301	O	BN30	2.406000	
Součet množství na stránce:			376.217400	2596.910000
Součet množství celkem:			376.217400	2596.910000
Zobrazeny záznamy: 0-4				

(a) Vykazované území: Frýdlant
Území předání: Liberec

Ministerstvo životního prostředí

Data jsou získávána na základě zákona č. 185/2001 Sb. o odpadech a souvisejících prováděcích předpisů v platném znění. (Stav dat k 1.9.2015)

Přehled odpadů				
Rok: 2013				
Odpady: '200301'				
Nakládání: nedefinováno				
Kategorie: O				
Vykazované území: ORP: 5105 Okres: nedefinováno Kraj: nedefinováno				
Území předání, převzetí: ORP: 5102 Okres: nedefinováno Kraj: nedefinováno				
Nové zadání				
Zobrazeny záznamy: 0-4				
Katalogové číslo odpadu	Kategorie odpadu	Kód nakládání	Množství (+) (t)	Množství (-) (t)
200301	O	AN3		96.870000
200301	O	B00	111.741116	
200301	O	BN3		229.480000
200301	O	BN30	0.423500	
Součet množství na stránce:			112.164616	326.350000
Součet množství celkem:			112.164616	326.350000
Zobrazeny záznamy: 0-4				

(b) Vykazované území: Liberec
Území předání: Frýdlant

Obr. 2.4: Data předání SKO mezi dvěma ORP

V průběhu evidence jsou shromažďována data od jednotlivých původců a odpadových společností. V důsledku řetězeného vykazování a předání (skutečného i pouze administrativního) a sloučení toků z více míst a jejich následného rozdělení [22] se ztrácí informace o místu zpracování.

Veřejná část VISOH, tím že nezveřejňuje všechna data, přímo neumožňuje identifikovat toky. Přesto taková informace může být důležitá pro budoucí plánování OH jako celku i jednotlivých záměrů. Cílem práce je na základě veřejných dat z databáze VISOH s využitím teorie grafů a optimalizace rekonstruovat toky mezi producenty a zpracovateli pro konkrétní typ odpadu.

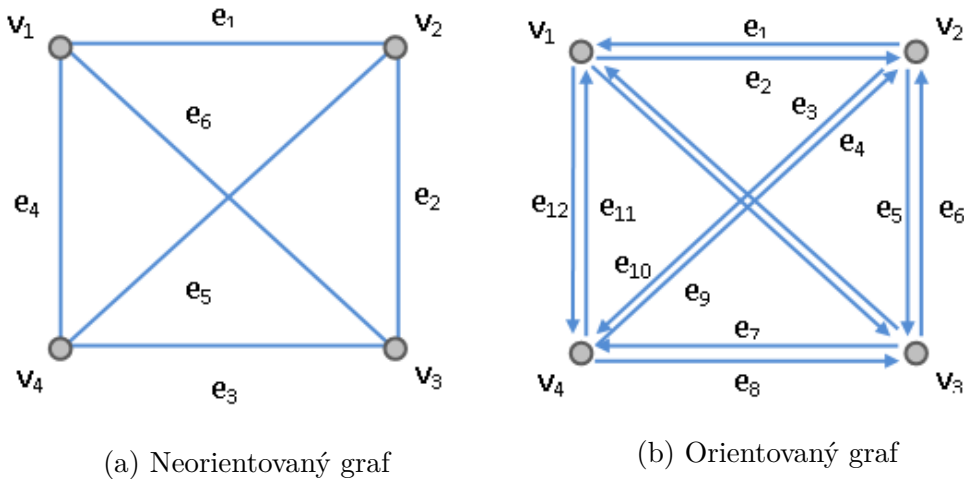
3 TEORIE GRAFŮ

Teorie grafů je důležitou součástí diskrétní matematiky. Historie teorie grafů sahá do 18. století. Za první práci je považován článek Leonharda Eulera z roku 1736 [5], ve kterém byl řešen tzv. problém mostů města Königsberg.

V následující kapitole budou uvedeny některé základní pojmy teorie grafů. Při jejich formulaci bylo čerpáno z [2],[6],[11], [18]

Definice 1 *Neorientovaný graf* je trojice $G = (V, E, \varepsilon)$ tvořená konečnou množinou V , jejíž prvky nazýváme vrcholy, konečnou množinou E , jejíž prvky nazýváme neorientovanými hranami a zobrazením ε označovaným jako vztah incidence. Toto zobrazení přiřazuje každé hraně $e \in E$ jednoprvkovou nebo dvouprvkovou množinu vrcholů hrany. Je-li $\varepsilon(e)$ jednoprvková množina, je hrana nazývána *neorientovanou smyčkou*.

Definice 2 *Orientovaný graf* je trojice $G = (V, E, \varepsilon)$ tvořená konečnou množinou V , jejíž prvky nazýváme vrcholy, konečnou množinou E , jejíž prvky nazýváme orientovanými hranami a zobrazením $\varepsilon : E \rightarrow V^2$, nazývaným vztah incidence. Toto zobrazení přiřazuje každé hraně $e \in E$ uspořádanou dvojici vrcholů $\varepsilon(e) = (x, y) \in V^2$. Vrchol x je počátečním vrcholem hrany e , vrchol y je koncovým vrcholem hrany e .



Obr. 3.1

Definice 3 Řekneme, že graf $G = (V, E)$ se nazývá *úplný*, jestliže pro každé dva uzly $x, y \in V$, kde $x \neq y$, existuje alespoň jedna hrana e , která je spojuje.

Reprezentace grafů. Grafy se znázorňují v rovině, kdy vrcholům grafu se přiřadí body roviny a hrany se znázorňují spojnicí příslušných bodů. V případě orientovaných grafů je orientace hrany vyznačena šipkou ve směru od počátečního ke koncovému vrcholu. Kromě geometrických prostředků lze využít k popisu grafů i matic.

Definice 4 Necht $G = (V, E, \varepsilon)$ je orientovaný graf bez smyček. V případě pevně zvoleného pořadí vrcholů a hran, lze grafu G přiřadit *matici incidence* předpisem

$$a_{i,j} = \begin{cases} -1, & \text{jestliže } v_i \text{ je počátečním vrcholem hrany } e_j \\ 1, & \text{jestliže } v_i \text{ je koncovým vrcholem hrany } e_j \\ 0, & \text{v ostatních případech} \end{cases}$$

Jako příklad je uvedena incidenční matice pro orientovaný graf z obr.3.1b

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.1 Toky v sítích

Teorie grafů našla bohaté uplatnění v tzv. síťových úlohách. Základní strukturou pro reprezentaci sítí je orientovaný graf. Vrcholy grafu znázorňují jednotlivé uzly sítě a hrany jejich spojnice. Síť bývá označován graf, jehož hrany nebo vrcholy jsou doplněny číselnými hodnotami. Tyto hodnoty mohou reprezentovat např. propustnost hrany, náklady, dobu trvání apod.

Definice 5 *Síť* je čtveřice $S = (G, z, s, w)$, kde G je orientovaný graf, vrcholy $z, s \in V(G)$ jsou zdroj a spotřebič a $w : E(G) \rightarrow R^+$ je kladné ohodnocení hran, zvané *kapacita hran*.

Definice 6 *Tokem v síti* G , kde G je orientovaný graf, rozumíme takové ohodnocení $w : E(G) \rightarrow R^+$, které pro každý vrchol $v \in V(G)$ splňuje:

$$\forall v \in V(G) - \{z, s\} : \sum_{e \in E_G^-(v)} w(e) = \sum_{e \in E_G^+(v)} w(e). \quad (3.1)$$

Tzn. přítok do každého uzlu odpovídá odtoku z tohoto uzlu s výjimkou zdroje, kde tok vzniká, a spotřebiče, ve kterém stejné množství toku zaniká.

Speciálním typem toku v síti je *cirkulace*. V takovém případě je předpis splněn pro všechny vrcholy.

Ve většině úloh bývá velikost toku $w(e)$ omezena na interval $w(e) \in \langle l(e), c(e) \rangle$. Hodnota $c(e)$ je označována *kapacitou hrany e* nebo též *horním omezením toku* na hraně e , číslo $l(e)$ udává *dolní omezení toku* na hraně e . Tok, který splňuje $w(e) \in \langle l(e), c(e) \rangle$ pro všechny hrany grafu, nazýváme *přípustným tokem*.

4 OPTIMALIZACE

Práce je zaměřena na dosažení hmotnostních bilancí rozsáhlé databáze za současné minimální změny od vstupních dat. Požadavkem je splnění vlastností toku v síti a minimalizace celkové chyby, která bude v rámci sítě nalezena. Matematickou disciplínou, která se zabývá hledáním optimálního, tedy nejvhodnějšího, řešení, je právě optimalizace (matematické programování). Z matematického hlediska to znamená nalezení bodu, nebo množiny bodů funkce, které nejlépe vyhovují předepsaným podmínkám.

Optimalizace se stala studovanou a atraktivní vědní disciplínou v průběhu 20. století, největšího vývoje dosáhla v době po 2. světové válce. Do dnešní doby našla své uplatnění v různých oblastech lidské činnosti. Blíže o historii optimalizace pojednává literatura [9].

V následujícím textu budou shrnuty základní pojmy týkající se optimalizace s využitím literatury [3], [4], [7], [15], [16]

Definice 7 Obecně je optimalizační úloha formulována ve tvaru: minimalizuj

$$f(\mathbf{x}), \quad (4.1)$$

za podmínky

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq 0, \quad (4.2)$$

kde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ je vektor dimenze n , x_j , $j = 1, \dots, n$ jsou tzv. rozhodovací proměnné, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je *účelová funkce*, jejíž extrém hledáme. Funkce $g_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \dots, g_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nazveme *omezujícími podmínkami*.

Potom množina $\mathbf{X} = \{g_1(\mathbf{x}) \leq 0, \dots, g_m(\mathbf{x}) \leq 0\}$ je označována jako *množina přípustných řešení*.

Klasifikace extrémů funkce

Extrémem funkce rozumíme bod, ve kterém funkce nabývá své maximální nebo minimální hodnoty v rámci okolí tohoto bodu. O existenci extrému funkce pojednává Weierstrassova věta:

Věta 1 Každá spojitá funkce $f(\mathbf{x})$ definovaná na kompaktní (ohraničené a uzavřené) množině $X \subset \mathbb{R}^n$, má na ní maximální i minimální hodnotu.

Definice 8 Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ *lokální maximum* (resp. *lokální minimum*), právě když existuje ryzí okolí $\mathbb{O}_{(\mathbf{x}_0)} - \{\mathbf{x}_0\}$ takové, že $\mathbb{O}_{(\mathbf{x}_0)} - \{\mathbf{x}_0\} \in \text{Dom} f$ a zároveň pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{O}_{(\mathbf{x}_0)} - \{\mathbf{x}_0\}$ platí:

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0), \text{ resp. } f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0). \quad (4.3)$$

Analogicky je definováno *ostré lokální maximum* (resp. *ostré lokální minimum*), pro které platí:

$$f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0), \text{ resp. } f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_0). \quad (4.4)$$

Definice 9 Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ *globální maximum* (resp. *globální minimum*), právě když $\forall \mathbf{x} \in \text{Dom} f - \{\mathbf{x}_0\}$ platí:

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0), \text{ resp. } f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0). \quad (4.5)$$

Pro *ostré globální maximum* (resp. *ostré globální minimum*), platí:

$$f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0), \text{ resp. } f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_0). \quad (4.6)$$

Definice 10 Množina $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá *konvexní*, jestliže $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}, \forall \lambda \in [0, 1] : \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in \mathbf{X}$. Množina $\{\alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha) \mathbf{y} | 0 \leq \alpha \leq 1\}$ tvoří úsečku spojující body \mathbf{x} a \mathbf{y} .

Definice tedy říká, že množina je konvexní, jestliže s každými dvěma body obsahuje i úsečku, která je spojuje.

Pozn. Průnik konvexních množin je konvexní množinou, proto je konvexní i množina přípustných řešení v případě konvexních omezení.

Definice 11 Mějme reálnou funkci $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$, kde $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná konvexní množina. Řekneme, že f je *konvexní funkcí* na \mathbf{X} právě tehdy, když pro každé dva body $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ z množiny \mathbf{X} a pro libovolné $\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$ platí:

$$f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2) \leq \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda) f(\mathbf{x}_2). \quad (4.7)$$

Funkce je tedy konvexní, pokud její graf leží pod libovolnou sečnou.

Platí-li nerovnost jako ostrá, pak je funkce $f(x)$ na množině \mathbf{X} *ryze konvexní*.

Definice 12 Řekneme, že úloha 4.1 je úlohou *konvexního programování*, právě tehdy když \mathbf{X} je konvexní množina a $f(\mathbf{x})$ je konvexní funkce na \mathbf{X} .

Vlastnosti úlohy konvexního programování:

- každé lokálně optimální řešení je jejím optimálním řešením
- je-li množina optimálních řešení neprázdná, je konvexní
- je-li $f(x)$ ryze konvexní, má úloha nejvýše jedno optimální řešení

Klasifikace matematických modelů podle vybraných kritérií

1. Podle charakteru závislostí mezi modelovanými vztahy
 - *lineární modely* předpokládají pouze lineární vztahy mezi modelovanými prvky
 - *nelineární modely* uvažují i jiný charakter vztahů
2. Podle vlivu faktoru času
 - *statické modely* neuvažují vliv času
 - *dynamické modely* zahrnují vliv času
3. Podle zohlednění působení náhodných vlivů
 - *deterministické modely* neuvažují působení náhodných veličin
 - *stochastické modely* předpokládají působení náhodných vlivů

5 MATEMATICKÝ MODEL

V následující kapitole bude prezentován matematický model, jehož úloha spočívá ve vyrovnání vstupních dat z důvodu zaručení hmotnostní bilance v uzlu. Příčiny, proč tato bilance v případě reálných dat databáze ISOH ve většině uzlech neplatí, jsou shrnuty v kapitole 2. Nerovnováha vzniká především v důsledku dvou stěžejních vlivů a to přepočtu archivní databáze na pracovní, v němž dochází k úpravě pouze dat v uzlech a zůstává tak chyba na hraně. Dalším důvodem jsou nekonzistentnosti evidence jednotlivých subjektů v OH.

5.1 Omezující podmínky

S využitím shrnutých poznatků byl sestaven matematický model úlohy. Ten je symbolizován jako orientovaný graf, jehož uzly představují producenty, zpracovatele odpadu a subjekty, které nějakým způsobem s odpadem nakládají. Každý uzel se tak může stát současně zdrojem i spotřebičem. Z tohoto důvodu je uzel ohodnocen dvěma parametry, a to množstvím produkce a zpracování. Uzly jsou propojeny orientovanými hranami, které značí dopravní cesty. Ohodnocení hran je dáno tokem resp. množstvím odpadu přepravovaným po této hraně.

Důležitou vlastností, která byla zmíněna v kapitole toků v síti (definice 6), je platnost hmotnostní bilance v uzlu. Na základě tohoto předpokladu byl navržen první idealizovaný model toku v síti, který bude následně využíván pro testování. Předpokládáme tedy, že přítok do každého uzlu odpovídá odtoku z tohoto uzlu a doplnění o podmínky nezápornosti. Hmotnostní bilance je dosaženo přidáním proměnných, které znázorňují nalezenou chybu.

Z podstaty dat se může vyskytnout chyba v produkci, na hraně a ve zpracování. Předpokládejme, že hodnoty zpracování jsou korektní, jelikož evidence v tomto případě pochází od všech zpracovatelů. Je tedy nejjednodušší a nedochází zde k žádným úpravám v rámci zpracování dat. V případě uzlů bude tedy chybou τ_i zatížena pouze produkce. Tato proměnná vyrovná celkovou produkci a množství zpracovaného odpadu v rámci celé sítě. Jak již bylo poznamenáno dříve, hlavní bilance se bude realizovat na hranách a to prostřednictvím proměnné ε_j .

Matematický model má následující tvar:

$$\begin{aligned} \sum_j A_{ij}(x_j + \varepsilon_j) + (o_i + \tau_i) - z_i &= 0, \forall i \in I, \\ x_j + \varepsilon_j &\geq 0, \forall j \in J, \\ o_i + \tau_i &\geq 0, \forall i \in I. \end{aligned} \quad (5.1)$$

V případě reálných dat z databáze VISOH je situace složitější a předchozí model bude třeba upravit a přizpůsobit.

- Pro každou hranu existují dvě informace o toku odpadu. První z nich pochází z uzlu vysílajícího odpad, druhou hodnotu eviduje uzel odpad přijímající. Vzhledem k tomu, že tyto hodnoty mohou být v některých případech značně rozdílné a neexistuje žádná informace o jejich správnosti, budou uvažovány jako dva rovnocenné scénáře. Scénář charakterizující odtok z uzlu bude značen indexem $-$ a scénář přítoku do uzlu indexem $+$.
- V praxi dochází k předání odpadu také v rámci jednoho uzlu, čímž v případě orientovaného grafu vzniká smyčka. Smyčku nelze vystihnout incidenční maticí. Z tohoto důvodu byla incidenční matice A_{ij} nahrazena dvěma maticemi A_{ij}^- , A_{ij}^+ , z nichž první podává informaci o odpadu vyslaném a druhá o přijatém.

Na základě předchozích bodů byl model toku v síti upraven následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} \sum_j A_{ij}^-(x_j^- + \varepsilon_j^-) + \sum_j A_{ij}^+(x_j^+ + \varepsilon_j^+) + (o_i + \tau_i) - z_i &= 0, \forall i \in I \\ x_j^- + \varepsilon_j^- &= x_j^+ + \varepsilon_j^+, \forall j \in J, \\ x_j^- + \varepsilon_j^- &\geq 0, \forall j \in J, \\ x_j^+ + \varepsilon_j^+ &\geq 0, \forall j \in J, \\ o_i + \tau_i &\geq 0, \forall i \in I. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Použité symboly:

- i indexová množina uzlů
- j indexová množina hran
- ε_j hledaná proměnná symbolizující minimální chybu toku na hraně j tak, aby byly splněny omezující podmínky
- ε_j^- hledaná proměnná v rámci scénáře -
- ε_j^+ hledaná proměnná v rámci scénáře +
- τ_i proměnná chyby v produkci v uzlu i
- A_{ij} matice incidence reprezentující dopravu mezi uzly
- A_{ij}^- matice incidence scénáře -
- A_{ij}^+ matice incidence scénáře +
- x_j velikost toku po hraně j v tunách
- x_j^- velikost toku po hraně j v tunách pro scénář -
- x_j^+ velikost toku po hraně j v tunách pro scénář +
- o_i produkce odpadu v uzlu i v tunách
- z_i zpracování odpadu v uzlu j v tunách

5.2 Tvar účelové funkce

V předchozí kapitole byly formulovány omezující podmínky a tím i přípustná řešení úlohy. Otázkou zůstává tvar účelové funkce minimalizující rozdíl vstupních a výstupních hodnot. Byly uvažovány následující varianty:

- metoda nejmenší odchylky $\min z = \sum_j |\varepsilon_j|$
- metoda nejmenších čtverců $\min z = \sum_j \varepsilon_j^2$,

kde ε_j je nalezená chyba na hraně j .

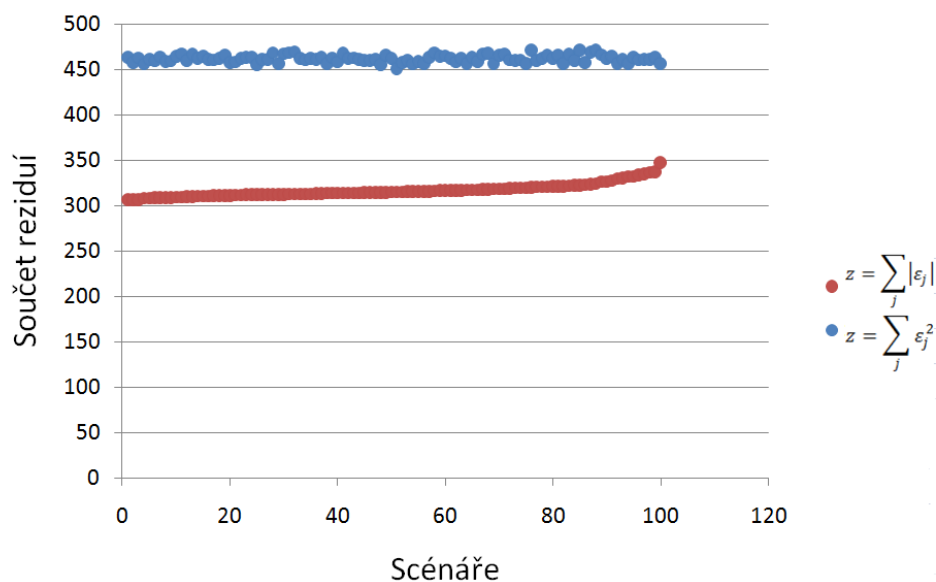
Porovnány byly dva ohledy:

1. Vyhodnocení z hlediska přiblížení se skutečným hodnotám

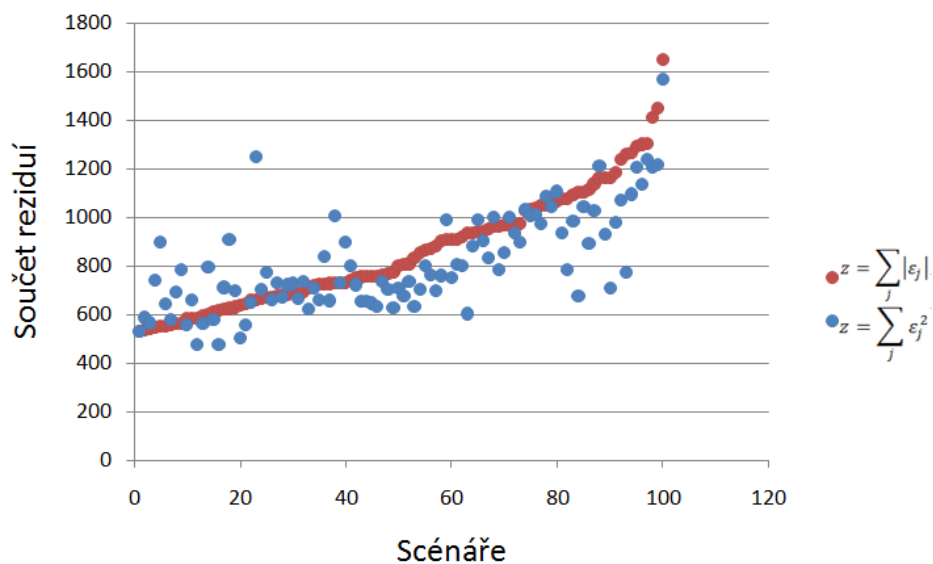
Vypovídající hodnotou kvality modelu je součet reziduí výstupních a skutečných dat. V ideálním případě, kdy by byla nalezena přesně chyba, kterou byla data zatížena, by tato hodnota odpovídala nule. Z tohoto důvodu je vhodnější použití tvaru účelové funkce, který vede k nižším hodnotám reziduí. Tato volba ale nemusí být ve všech případech jednoznačná. Byla nalezena přímá závislost na velikosti chyby, kterou byla data zatížena.

Testování proběhlo na jednoduchém modelu o 4 uzlech (obr. 3.1b) pro generovanou chybu na hraně δ_j krát vstupní data. Kde δ_j je generováno z normálního rozdělení s parametry $\delta_j \sim N(0, \sigma^2)$, $\sigma \in (0; 0, 3)$ po 100 scénářích pro každé σ . Tato chyba tedy představuje náhodnou chybu v datech. Maximální hodnota σ pro testování byla zvolena tak, aby generované δ_j nepřekročilo 100%.

Pro ilustraci jsou uvedeny grafy součtu těchto reziduí v rámci jedné hodnoty rozptylu σ^2 v závislosti na konkrétních scénářích. V případě obr. 5.1a, pro $\delta_j \sim N(0; 0, 0001)$ dosahuje výrazně přesnějšího výsledku účelová funkce ve tvaru $z = \sum_j |\varepsilon_j|$ a to ve všech ze 100 scénářů. V následujícím případě obr. 5.1b pro $\delta_j \sim N(0; 0, 09)$ je v 68 % scénářů výhodnější použití účelové funkce $z = \sum_j \varepsilon_j^2$.



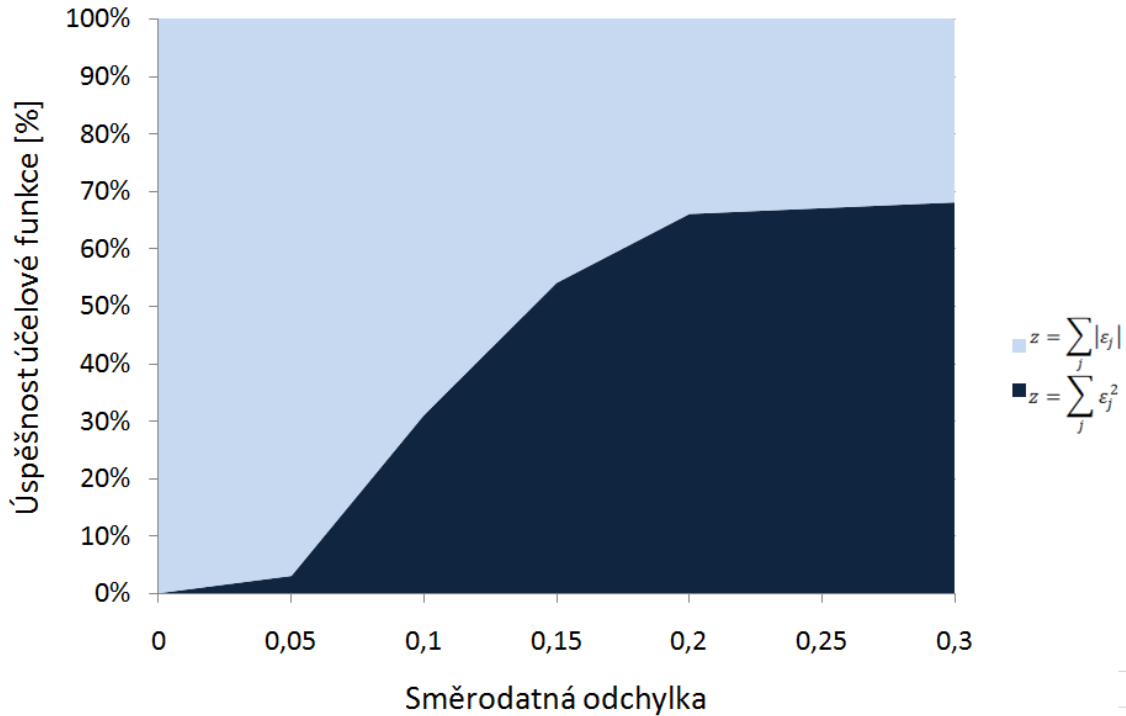
(a) $\delta_j \sim N(0; 0, 0001)$



(b) $\delta_j \sim N(0; 0, 09)$

Obr. 5.1: Porovnání tvaru účelové funkce pro vybrané hodnoty σ^2

Obr. 5.2 znázorňuje celkové porovnání účelových funkcí pro data zatížena generovanou chybou se směrodatnou odchylkou $\sigma \in (0; 0,3)$. Je patrné, že s rostoucí generovanou chybou v datech rostla úspěšnost účelové funkce ve tvaru $z = \sum_j \varepsilon_j^2$, naopak klesala úspěšnost tvaru $z = \sum_j |\varepsilon_j|$.



Obr. 5.2: Porovnání účelové funkce v závislosti na generované chybě

2. Vyhodnocení z hlediska procentuální chyby na hraně

Bilance probíhala, stejně jako v předchozím případě, ve 100 opakováních pro generovanou chybu δ_j krát vstupní data na hraně, kde $\delta_j \sim N(0; 0,01)$. Náhled nabízejí obr. 5.3. Grafy znázorňují procentuální chybu na hraně pro každou hranu ze 100 opakování výpočtů. Lze pozorovat, že v případě metody nejmenších čtverců má chyba na hraně výrazně menší variabilitu. Naopak metoda nejmenších odchylek ponechává většinu hodnot toku na hranách rovných vstupním datům a chyba je přiřazena menšímu množství hran. Tato chyba je ale výrazně větší. Pro $\sum_j \varepsilon_j^2$ se chyba rozloží na všechny hrany s cílem minimalizovat celkovou chybu („kompromisní řešení“). Pro $\sum_j |\varepsilon_j|$ model sedá na data. Vždy zvolí vhodnější hodnotu s ohledem na účelovou funkci („výběrové řešení“).

Konkrétní přiblížení situace uvádí tab. 5.1. Jedná se o bilanci dat sítě o 4 uzlech. Chybou byla zatížena jediná hrana C-B. Při minimalizaci součtu kvadrátů chyb došlo k doplnění celé sítě chybami. V případě nejmenších odchylek byla

chybná hrana úspěšně nalezena a dopočtem určen korektní tok. Nedochozí tak k šíření chyby sítí.

Hrana	Tok na hraně	Tok na hraně zatížený chybou	Tok po bilanci	
			$\sum_j \varepsilon_j^2$	$\sum_j \varepsilon_j $
A-B	100	100	137,50	100,37
A-C	200	200	162,50	199,64
A-D	300	300	300,00	300,00
B-A	400	400	362,50	400,00
B-C	100	100	25,00	100,00
B-D	500	500	462,50	500,00
C-A	50	50	87,50	50,01
C-B	600	300	375,00	599,63
C-D	50	50	87,50	50,00
D-A	150	150	150,00	150,00
D-B	300	300	337,50	300,00
D-C	400	400	362,50	400,00

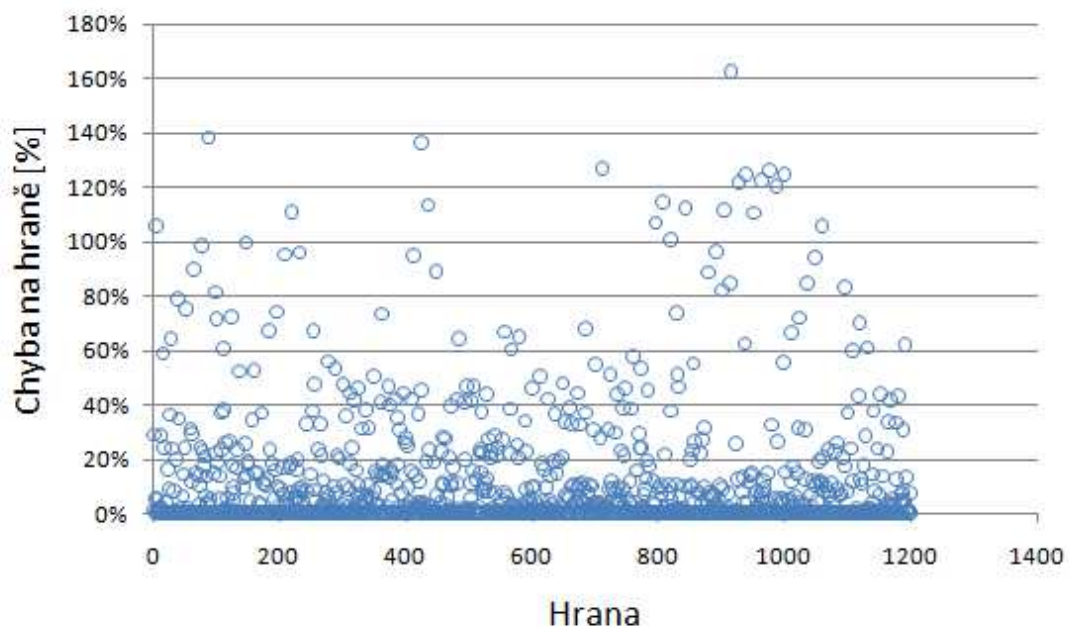
Tab. 5.1: Bilance modelového příkladu pro dva tvary účelové funkce

Obecně nelze žádnou z možností označit za správnější. Volba se bude odvíjet od typu zpracovávaných dat a především chyby, kterou byla data zatížena. Metoda nejmenších čtverců by měla svůj význam v případě hodnot, které se pohybují kolem střední hodnoty dané veličiny a byly tak zatíženy náhodnou chybou. Taková data mohou být výstupem různých měření. Naopak metoda nejmenší odchylky je vhodná pro korekci dat se systematickou chybou.

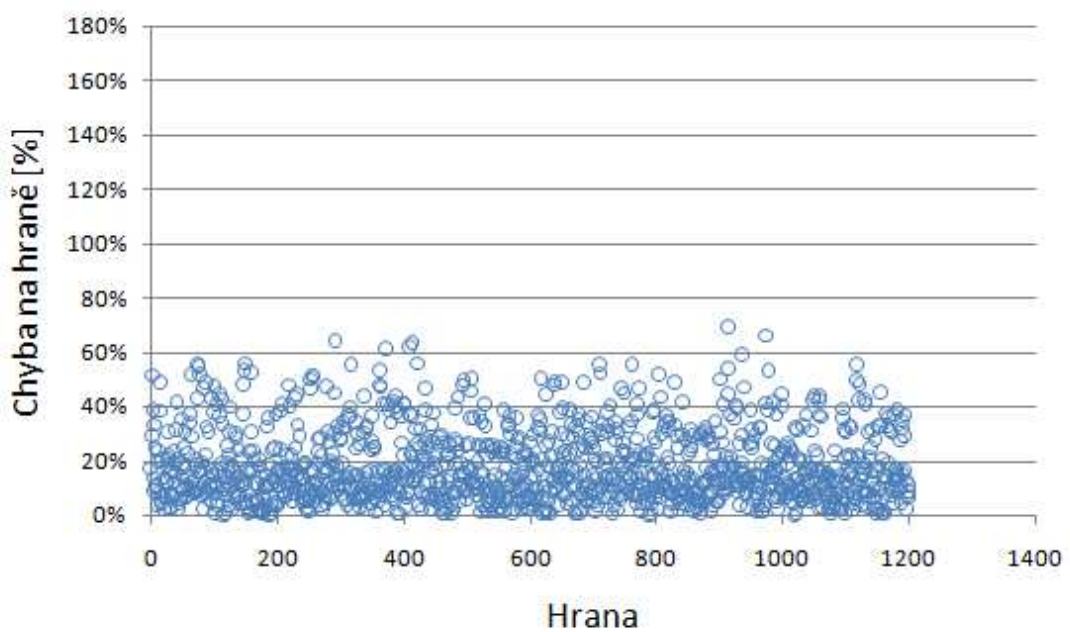
S přihlédnutím k charakteru dat je v tomto případě výhodnější užití metody nejmenších odchylek v případě proměnné na hranách ε_j . Zde dochází k výskytu právě systematických chyb, vznikajících vlivem faktorů uvedených v kap. 2. Metoda nejmenších čtverců nalezne uplatnění při detekci chyb τ_j v uzlech. Tato data již prošla úpravou a lze tak předpokládat zatížení náhodnou chybou.

V dalším textu bude optimalizační model uvažován s účelovou funkcí ve tvaru

$$\min z = \sum_j (|\varepsilon_j^-| + |\varepsilon_j^+|) + \sum_i \tau_i^2. \quad (5.3)$$



(a) $\min z = \sum_j |\varepsilon_j|$



(b) $\min z = \sum_j \varepsilon_j^2$

Obr. 5.3: Porovnání tvaru účelové funkce z hlediska procentuální chyby na hraně

5.3 Nelinearita

Optimalizační model je tvořen soustavou omezení lineárními rovnicemi a nerovnicemi vůči proměnným ε_j a τ_j . Účelová funkce ale vede na úlohu nelineárního programování. V takovém případě je nutné ověřit, zda nalezené řešení je optimální a účelová funkce tak dosáhla svého globálního extrému.

Účelová funkce je tvořena součty kvadratických funkcí a funkcí s absolutní hodnotou. Část účelové funkce pro minimalizaci chyby na hraně ve tvaru funkce s absolutní hodnotou $\sum_j |\varepsilon_j^- + \varepsilon_j^+|$ lze následující úpravou převést na lineární tvar, který je vzhledem ke svým vlastnostem výhodnější:

$$\varepsilon_j^- = \varepsilon_j^{-+} - \varepsilon_j^{--}, \forall j \in J, \quad (5.4)$$

$$\varepsilon_j^{-+} \geq 0, \varepsilon_j^{--} \geq 0,$$

$$\varepsilon_j^+ = \varepsilon_j^{++} - \varepsilon_j^{+-}, \forall j \in J, \quad (5.5)$$

$$\varepsilon_j^{++} \geq 0, \varepsilon_j^{+-} \geq 0.$$

Potom účelová funkce přechází na tvar

$$\min \quad z = \sum_j (\varepsilon_j^{-+} + \varepsilon_j^{--} + \varepsilon_j^{++} + \varepsilon_j^{+-}) + \sum_i \tau_i^2. \quad (5.6)$$

V případě části účelové funkce pro chybu v uzlech zůstává tvar kvadratické funkce $\sum_i \tau_i^2$, která je podle definice 11 konvexní. Podle definice 12 se jedná o úlohu konvexního programování.

- Přípustná řešení jsou dána lineárními omezeními. Jejich průnik tvoří konvexní množinu, na které probíhá minimalizace účelové funkce.
- Účelová funkce je tvořena součtem lineární a kvadratické funkce. Konvexita se tedy nemění.

Z vlastností konvexního programování plyne důležitý předpoklad: každé lokální minimum je minimem globálním a tedy optimálním řešením.

6 APLIKACE

Model byl aplikován na data databáze VISOH, konkrétně SKO za rok 2013 na úrovni krajů a ORP České republiky.

Před samotnou aplikací proběhla drobná úprava modelu. Jak již bylo uvedeno dříve, lze předpokládat významně menší chybu v uzlech ve srovnání s chybami na hranách, protože tato data dosud neprošla úpravou. To lze zohlednit vynásobením chyby v uzlu konstantou $k > 1$. Ta způsobí, že každá chyba uzlu τ_i navýší účelovou funkci o $k\tau_i^2$. Tím je zajištěna detekce chyb převážně u hran. Úpravu hodnot pro produkci ve vhodných uzlech bude model navrhovat až v případech, kdy pouze srovná hodnotu celkové produkce a celkového zpracování.

Pro následující aplikace bylo zvoleno $k = 10$ a výpočet probíhal s účelovou funkcí ve tvaru:

$$\min z = \sum_j (\varepsilon_j^{++} + \varepsilon_j^{+-} + \varepsilon_j^{-+} + \varepsilon_j^{--}) + \sum_i 10\tau_i^2. \quad (6.1)$$

6.1 Přiřazení významnosti hran

V rámci výpočtu vznikaly nové toky sítí, kde je třeba upozornit na jisté nedostatky. Toky nově vzniklé po bilanci se realizují napříč celou sítí bez ohledu na dopravní vzdálenosti.

Jako příklad uvedme některé hrany v tab. 6.1. Vstupní data těchto hran odpovídají toku o velikosti 0 tun a doprava se tedy po těchto hranách nerealizuje. Model vyhodnotil situaci tak, že ohodnocení hrany dosahuje poměrně vysokých hodnot, jak lze vidět ve sloupci *Tok po bilanci*.

Hrana	Tok před bilanci [t/rok]	Tok po bilanci [t/rok]	Délka hrany [km]
Most-Brno	0	4856,6	314,3
Havířov-České Budějovice	0	3572,2	380,2
Čáslav-Plzeň	0	2890,5	176,9
Nový Jičín-Domažlice	0	1803,6	447,1

Tab. 6.1: Ukázka toků po bilanci

Tento výstup se s ohledem na délku hrany a nulovost vstupních dat zřejmě odklání od reálné situace. Obecně se přeprava odpadu bude chovat ekonomicky tzn. budou preferovány co nejkratší dopravní vzdálenosti.

Model v podobě, jaké byl doposud prezentován, pokládá nalezené chyby na hranách za rovnocenné. S ohledem na to, že data jsou různé kvality, zaujímá také

hledaná chyba ε_j různou významnost v rámci účelové funkce. Za významná lze považovat ohodnocení hran, která si pro danou hranu j ve vstupních datech odpovídají ve scénářích + a -.

Proto bylo navrženo kritérium $w_j; w_j \in (0; 1)$, přiřazující váhu jednotlivým hranám podle předpisu:

$$w_j = \begin{cases} 1, & x_j^+, x_j^- = 0, \\ 1 - \frac{|x_j^+ - x_j^-|}{\max(x_j^+, x_j^-)}, & jinak, \end{cases} \quad (6.2)$$

kde w_j charakterizuje kvalitu vstupních dat. Data, která lze považovat za kvalitnější tak dosahují vyšších hodnot w_j .

Účelová funkce doplněná o hodnotu w_j :

$$\min z = \sum_j ((\varepsilon_j^{++} + \varepsilon_j^{+-} + \varepsilon_j^{-+} + \varepsilon_j^{--})w_j) + \sum_i 10\tau_i^2. \quad (6.3)$$

Hrany s podobnými scénáři, a tím i vyšší hodnotou w_j , se tak v rámci výpočtu stávají významnými body. Přiřazení chyby takovýmto hranám vede k výraznému zvýšení účelové funkce.

Přednostně jsou tedy chyby přiřazovány hranám, které jsou v případě některého ze dvou scénářů ohodnoceny tokem o velikosti 0 tun a druhému je přiřazen tok $x_j > 0$. Takové ohodnocení patrně poukazuje na některou ze situací zmíněných v kapitolách 2.2 a 2.3. Naopak pokud si vstupní hodnoty x_j^- a x_j^+ odpovídají, není důvod je považovat za chybné, a ve většině případů se bilance neodkloní od vstupních dat.

Úpravou modelu došlo k zásadnímu poklesu počtu toků, které vznikaly z původně nulových toků, jak bylo zmíněno na začátku této kapitoly. Navíc žádný takovýto tok není větší než 100 t/rok. Chyba v produkci se liší o 0,01%, což lze považovat za zanedbatelný rozdíl. Shrnutí srovnání modelu bez přiřazené váhy w_j a modelu s vahou nabízí následující tab. 6.2.

	Původní model bez přiřazení váhy w	Model doplněný o váhu w
Počet toků ve vstupních datech > 100 t v alespoň 1 scénáři	1388	1388
Počet toků po bilanci > 100 t	1246	1448
Počet nově vzniklých toků > 100 t	54	0
Průměrná chyba produkce [%]	2,63	2,62

Tab. 6.2: Ukázka toků po bilanci

6.2 Výpočetní čas

Z hlediska využitelnosti nástroje v dalších aplikacích a následných úprav je důležité zhodnocení časové náročnosti výpočtu. Aplikace na úrovni ORP dosahuje rozsahu 206 uzlů, což odpovídá 42436 hranám. Z tohoto počtu vstupní data zahrnují 5852 nenulových hran alespoň v jednom ze dvou uvažovaných scénářů + a -. V tomto rozsahu bilance probíhá s velkým počtem proměnných, což se negativně projeví ve výpočtovém čase. V současném rozsahu modelu je čas potřebný k výpočtu poměrně velký, ale přijatelný. V případě dalšího rozšiřování nástroje lze očekávat i exponenciální nárůst výpočtového času, což by už mohlo značně komplikovat dostupnost získaných výsledků.

Z celkového počtu 206^2 hran je po bilanci využito pouze přibližně 9,1 %. Vyrušením vybraných hran, jejichž tok je nulový a délka taková, že patrně nebudou využity k přepravě odpadu, lze model výrazně zjednodušit. Toho lze dosáhnout úpravou incidentních matic.

Pro testování byly zrušeny hrany, jejichž tok v obou scénářích byl roven 0 t/rok a délka hrany větší než 200 km. Pro reálné výpočty lze tuto hranici volit pro jinou hodnotu nebo podle jiného kritéria. Následující seznam ilustruje stručný přehled pro výpočet na úrovni krajů, ORP a ORP po zmíněné úpravě.

	Kraje	ORP	ORP po úpravě
Počet uzlů	14	206	206
Počet hran	196	42436	24339
Počet nenulových hran ve vstupu	195	5852	5852
Počet proměnných v uzlech celkem	14	206	206
Počet proměnných na jednu hranu	4	4	4
Počet proměnných na hranách celkem	784	169744	94356
Časová náročnost výpočtu	5s	4h 7min	1h 37min

Výpočty probíhaly na počítači s těmito parametry:

Procesor: Intel(R)Core(TM)i7-5500U CPU @2.40GHz 2.40 GHz

Nainstalovaná paměť: 8,00GB

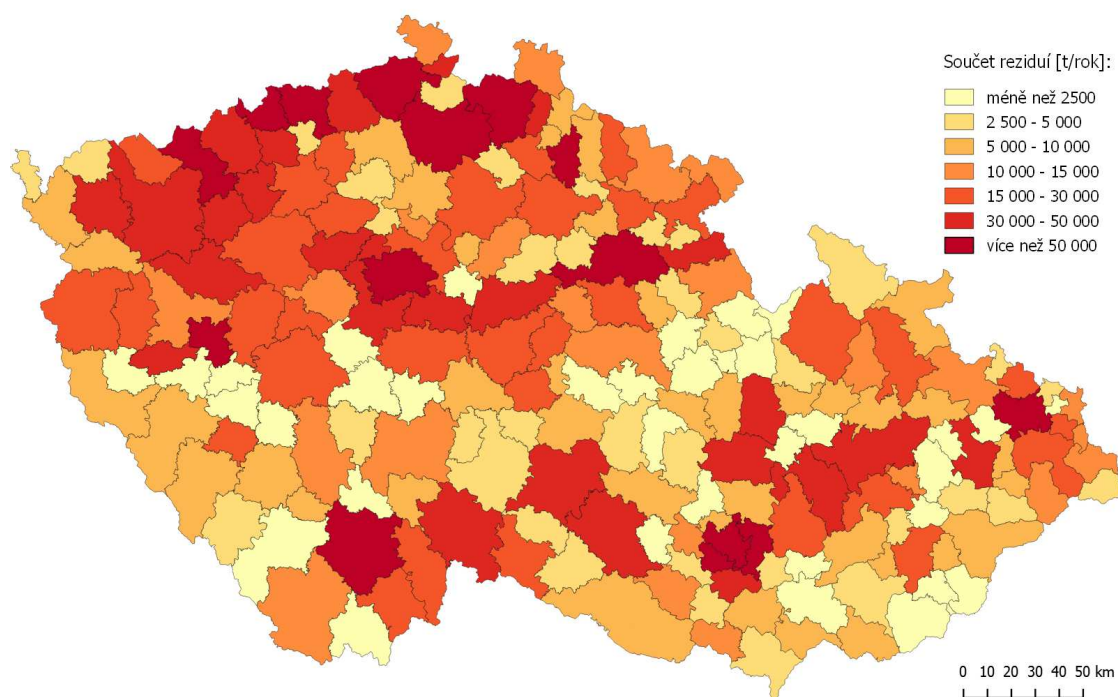
Typ systému: 64bitový operační systém pro platformu x64

Pozitivní dopad této úpravy na časovou náročnost je významný a poskytuje tak další možnosti vývoje modelu diskutované v závěrečné kapitole 7.

6.3 Výsledky aplikace

Výstupem bilance je ohodnocení hran z hlediska přepravy odpadu po hranách a hodnota produkce v uzlech. Vzhledem k počtu těchto dat jsou výsledky výpočtu krajů ČR uvedeny v příloze A tohoto textu. Pro aplikaci na úrovni ORP je výstup zobrazen prostřednictvím orientační mapy.

Mapa na obr. 6.1 znázorňuje rozdíl mezi vstupními daty a modelovými hodnotami. Vypovídající hodnotou je součet reziduí uvažovaný jako součet rozdílů vstupních a výstupních dat na hranách přes všechny přítoky i odtoky do konkrétního uzlu (ORP) pro oba scénáře + a -.



Obr. 6.1: Mapa ORP pro součet reziduí

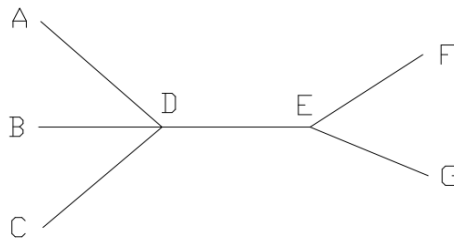
Z prvotních výsledků lze vidět rozdílnou míru úpravy přepravovaného množství odpadu v jednotlivých krajích. Nejvíce bylo nutné upravit vykazovaná data v Ústeckém kraji, kde pro většinu ORP přesahovala úprava 20 kt/rok. Tato chyba je řádově rovna celkové produkci v daných územních celcích. Naproti tomu kraje na Moravě (až na Olomoucký kraj) vykazují poměrně malou detekci chyb v tocích odpadu. V příloze B jsou doplněny mapy reziduí ORP pro přítoky a odtoky z uzlů samostatně.

7 MOŽNOSTI DALŠÍHO VÝVOJE VÝPOČETNÍHO NÁSTROJE

V souvislosti s aplikací na reálných datech se nabízí další možnosti vývoje modelu, které již přesahují rozsah této práce. Následující část textu ilustruje některá možná doplnění.

1. Zaměření se na dopravní vzdálenost. Lze ukázat, že doprava odpadu je ovlivněna různými vlivy. Model je možné doplnit o konkrétnější omezení vyplývající z dalších informací o svozu odpadu, které jsou k dispozici. Možností je doplnit uvažované modely z evidence dat o model nejkratších vzdáleností k místu zpracování, protože lze předpokládat, že doprava se bude realizovat přednostně na kratší vzdálenosti.
2. Užitečné se jeví informace o provozovateli svozové společnosti a zpracovatelích. Místo zpracování odpadu lze v některých případech odhadnout podle svozové společnosti v místě produkce. Je-li totožný provozovatel svozové společnosti a místa zpracování v přijatelné vzdálenosti, je možné předpokládat, že odpad svážený touto společností bude zpracován na zmíněném místě.
3. Stěžejní informací, kterou by měl nástroj ve své finální podobě poskytnout, je místo zpracování odpadu, pocházejícího od konkrétního producenta. Podoba modelu, ve které byl v této práci reprezentován, podává informaci o velikosti toku jednotlivými hranami, nikoliv o místě zpracování. Situaci přibližuje následující motivační příklad.

Tři producenti (uzly A, B, C) produkují odpad. Ten je svezen do společného uzlu D, po hranách A-D, B-D, C-D. Odtud se veškerý odpad převáží do uzlu E po hraně D-E, kde se následně dělí do dvou toků (hrany E-F, E-G) mířících ke zpracovatelům (F, G) obr. 7.1.



Obr. 7.1: Dopravní síť motivačního příkladu [21]

V aktuální fázi modelu není možné zjistit, ve kterém uzlu zpracoval odpad konkrétní producent. Možností, jak zachovat informaci o producentovi je rozšíření úlohy o další proměnné a parametry charakterizující právě místo produkce. Tato proměnná by se zachovávala po celou dobu výpočtu a ve výsledných datech by umožnila nalezení producenta.

Zavedme označení:

- i indexová množina uzlů
- j indexová množina hran
- p indexová množina původce odpadu
- A_{ij} incidenční matice
- x_j celková velikost toku na hraně
- o_i celková produkce v uzlu i
- z_i celkové zpracování v uzlu i
- o_{ip} produkce v uzlu i uzlem p
- z_{ip} zpracování odpadu v uzlu i vyprodukovaného uzlem p
- y_{jp} velikost toku na hraně j od producenta p

Aktuálně model poskytne informaci o velikosti toku hranou x_j . Každou hranu lze rozšířit o proměnnou y_{jp} a platí $\sum_p y_{jp} = x_j$.

Rozšíření omezujících podmínek pro obecný případ:

$$\sum_p y_{jp} = x_j, \forall j \in J, \quad (7.1)$$

$$\sum_j A_{ij} x_j + o_i - z_i = 0, \forall i \in I, \quad (7.2)$$

$$\sum_j A_{ij} y_{jp} + o_{ip} - z_{ip} = 0, \forall i \in I, \forall p \in P, \quad (7.3)$$

$$\sum_i o_{ip} = o_i, \forall p \in P, \quad (7.4)$$

$$\sum_i z_{ip} = z_i, \forall p \in P. \quad (7.5)$$

Podmínka 7.1 zavádí nové proměnné, jejichž součet přes všechny produkující uzly odpovídá celkovému toku hranou j . 7.2 požaduje platnosti hmotnostní bilance v uzlu i . Následující uvedená podmínka 7.3 zachovává tok od producenta do místa zpracování. Jde o hmotnostní bilanci v uzlu pro tok jednotlivých producentů. Poslední uvedené podmínky 7.4, 7.5 zajišťují odpovídající celkovou produkci a zpracování v uzlu i .

8 ZÁVĚR

Cílem práce bylo sestavení optimalizačního modelu toku v síti pro úpravu dat rozsáhlé databáze s důrazem kladeným na platnost hmotnostní bilance v uzlech. Informace z takto upravených dat napomůže k dalším analýzám problému nakládání se směsným komunálním odpadem.

Práce je sestavena tak, aby se čtenář nejprve seznámil s problematikou evidence nakládání s odpady. Následuje shrnutí základních pojmů matematického aparátu, který byl následně využíván. Až poté je představen návrh matematického modelu pro řešení daného problému, který vychází z platnosti hmotnostní bilance v uzlech za současné minimální změny od vstupních dat. Tato část (kapitola 5) je stěžejní kapitolou práce. Pozornost byla věnována zejména tvaru účelové funkce optimalizačního modelu.

Kapitola 6 se věnuje aplikaci modelu na datech databáze ISOH a úpravám pro přiblížení se reálné situaci. Hodnoty toků po bilanci na úrovni krajů jsou uvedeny v příloze A. Výstupem výpočtu pro ORP je velké množství dat, které jsou z hlediska přiblížení se vstupním hodnotám interpretovány pomocí orientační mapy.

V průběhu aplikace na reálných datech vznikaly další podněty, pro doplnění nástroje. Některé z nich jsou ve stručnosti shrnuty v závěrečné kapitole 7.

LITERATURA

- [1] Cenia. *ISPOP - ODPADY: ohlašování v roce 2015*. Praha, 2015. Dostupné z: [https://www.trinecko.cz/web_files/aktuality/ISPOP_-_ohlasovani_v_roce_2015\[1\].pdf](https://www.trinecko.cz/web_files/aktuality/ISPOP_-_ohlasovani_v_roce_2015[1].pdf)
- [2] DEMEL, Jiří. *Teorie grafů*. Vyd. 2. přeprac. Praha: České vysoké učení technické, 1991.
- [3] DOSTÁL, Zdeněk a Petr BEREMLIJSKI. *Metody optimalizace* [online]. 2012 [cit. 2016-03-26]. Dostupné z: http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/metody_optimalizace.pdf
- [4] DVOŘÁK, Jiří. *Formulace a vlastnosti úloh nelineárního programování*. Ústav automatizace a informatiky VUT v Brně.
- [5] EULER, Leonhard. *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, 1736. Dostupné z: <https://math.dartmouth.edu/euler/docs/originals/E053.pdf>
- [6] FOLTÝNEK, Tomáš a Jana DANNHOFEROVÁ. *Teorie grafů*. Brno: Mendelova univerzita v Brně, 2011. ISBN 978-80-7375-500-3.
- [7] GAJDA, Bohumil. *Speciální metody optimalizace*. 2009. Diplomová práce. Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně.
- [8] GAMS Documentation 24.7 [online]. [cit. 216-3-14]. Dostupné z: <http://www.gams.com/help/index.jsp>
- [9] GASS, Saul I. a A. ASSAD. *An annotated timeline of operations research: an informal history*. New York: Kluwer Academic Publishers, c2005. ISBN 1402081162
- [10] GRILL, Lukáš. *Výsledky kontroly dle standardu MŽP*. Inisoft [online]. 2014 [cit. 2016-03-14]. Dostupné z: http://www.inisoft.cz/public/upload/attachments/k-strankam/podp_dokument/kontrola_mzp.pdf
- [11] HLINĚNÝ, Petr. *Základy teorie grafů*. [online]. [cit. 2016-03-14]. Dostupné z: <http://is.muni.cz/do/1499/el/estud/fi/js10/grafy/Grafy-text10.pdf>
- [12] CHARAMZA, Pavel a kol. *Modelovací systém GAMS*. MFF UK, 1993.
- [13] *Informační systém odpadového hospodářství*. CENIA [online]. [cit. 2016-03-26]. Dostupné z: <http://www1.cenia.cz/www/odpady/isoh>

- [14] JANOŠŤÁK, František. *Aplikace optimalizace pro návrh subsystémů energetických celků*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2014. 23 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Martin Pavlas, Ph.D.
- [15] KALL, Peter a Stein W. WALLACE. *Stochastic Programming*, John Wiley & Sons, Chichester
- [16] KLAPKA, Jindřich, Jiří DVOŘÁK a Pavel POPELA. *Metody operačního výzkumu*. Brno: Vysoké učení technické, 1996. ISBN 80-214-0817-0.
- [17] Ministerstvo životního prostředí *Plán odpadového hospodářství České republiky pro období 2015 – 2024*. Praha, 2014. Dostupné z: http://www.mzp.cz/cz/plan_odpadoveho_hospodarstvi_cr
- [18] NEŠETŘIL, Jaroslav a Jiří MATOUŠEK. *Kapitoly z diskrétní matematiky*. Praha: MATFYZPRESS, 1996. ISBN 80-85863-17-0.
- [19] *Novela zákona o odpadech č. 229/2014 Sb. Zákon, kterým se mění zákon č. 185/2001 Sb., o odpadech a o změně některých dalších zákonů, ve znění pozdějších předpisů*
- [20] *Odpady*. Ministerstvo životního prostředí [online]. [cit.2016-03-26]. Dostupné z: http://www.mzp.cz/cz/odpady_podrubrika
- [21] RYCHTÁŘ, Adam. *Optimalizace toků v sítích*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2014. 32 s. Vedoucí bakalářské práce RNDr. Pavel Popela, Ph.D.
- [22] ŠOMPLÁK, Radovan, Michal TOUŠ, Martin PAVLAS, Jiří GREGOR, Pavel POPELA, a Adam RYCHTÁŘ. *Multi-Commodity Network Flow Model Applied to Waste Processing Cost Analysis for Producers*, Chemical Engineering Transactions. In Proceedings of the 18th International Conference on Process Integration, Modelling and Optimisation for Energy Saving and Pollution Reduction (PRES 2015). CHEMICAL ENGINEERING TRANSACTIONS. Milano, Itálie: AIDIC Serviwi Srl, 2015. s. 733-738. ISBN: 978-88-95608-36- 5. ISSN: 2283-9216.
- [23] VEJNAR, Pavel, Gabriela BUDA ŠEPELOVÁ, Eva HORÁKOVÁ, Tomáš ČEJCHAN a Petr GRUSMAN. *Matematické vyjádření „Soustavy indikátorů OH“ vsouladu s vyhláškou č. 383/2001 Sb., o podrobnostech nakládání s odpady, v platném znění* [online]. Praha, 2015 [cit. 2016-04-09]. Dostupné z: [http://www.mzp.cz/C1257458002F0DC7/cz/matematicke_odpady4/\\$FILE/OODP-Matematicke_vyjadreni_2014-20150915.pdf](http://www.mzp.cz/C1257458002F0DC7/cz/matematicke_odpady4/$FILE/OODP-Matematicke_vyjadreni_2014-20150915.pdf)

- [24] *Zákon č. 185/2001 Sb. Zákon o odpadech a o změně některých dalších zákonů.*
In: Sbíрка zákonů České republiky, , část šestá, § 39 a 40. Dostupný také z
[/www.platnalegislativa.nsf/](#)
- [25] *Zákon č. 185/2001 Sb. Zákon o odpadech a o změně některých dalších zákonů.*
In: Sbíрка zákonů České republiky, , část druhá, § 9a. Dostupný také
z [/www.platnalegislativa.nsf/](#)

SEZNAM SYMBOLŮ, VELIČIN A ZKRATEK

GAMS	The General Algebraic Modeling System
ISOH	Informační systém odpadového hospodářství
KO	Komunální odpad
OH	Odpadové hospodářství
ORP	Obec s rozšířenou působností
SKO	Směsný komunální odpad
VISOH	Veřejný informační systém odpadového hospodářství
i	Indexová množina uzlů
j	Indexová množina hran
ε_j	Hledaná proměnná symbolizující chybu toku na hraně j
ε_j^-	Hledaná proměnná v rámci scénáře -
ε_j^+	Hledaná proměnná v rámci scénáře +
τ_i	Proměnná chyby v produkci v uzlu i
A_{ij}	Matice incidence
A_{ij}^-	Matice incidence scénáře -
A_{ij}^+	Matice incidence scénáře +
x_j	Velikost toku na hraně j
x_j^-	Velikost toku na hraně j pro scénář -
x_j^+	Velikost toku na hraně j pro scénář +
o_i	Produkce odpadu v uzlu i
z_i	Zpracování odpadu v uzlu i
ε_j^{-+}	Kladná část chyby na hraně scénáře -
ε_j^{--}	Záporná část chyby na hraně scénáře -
ε_j^{++}	Kladná část chyby na hraně scénáře +

ε_j^{+-}	Záporná část chyby na hraně scénáře +
p	Indexová množina původce odpadu
o_{ip}	Produkce v uzlu i uzlem p
z_{ip}	Zpracování v uzlu i uzlem p
y_{jp}	Velikost toku na hraně j od producenta p

SEZNAM PŘÍLOH

A	Výsledná síť dopravy SKO pro kraje v roce 2013	48
B	Mapy ORP pro součet reziduí	52

A VÝSLEDNÁ SÍŤ DOPRAVY SKO PRO KRAJE V ROCE 2013

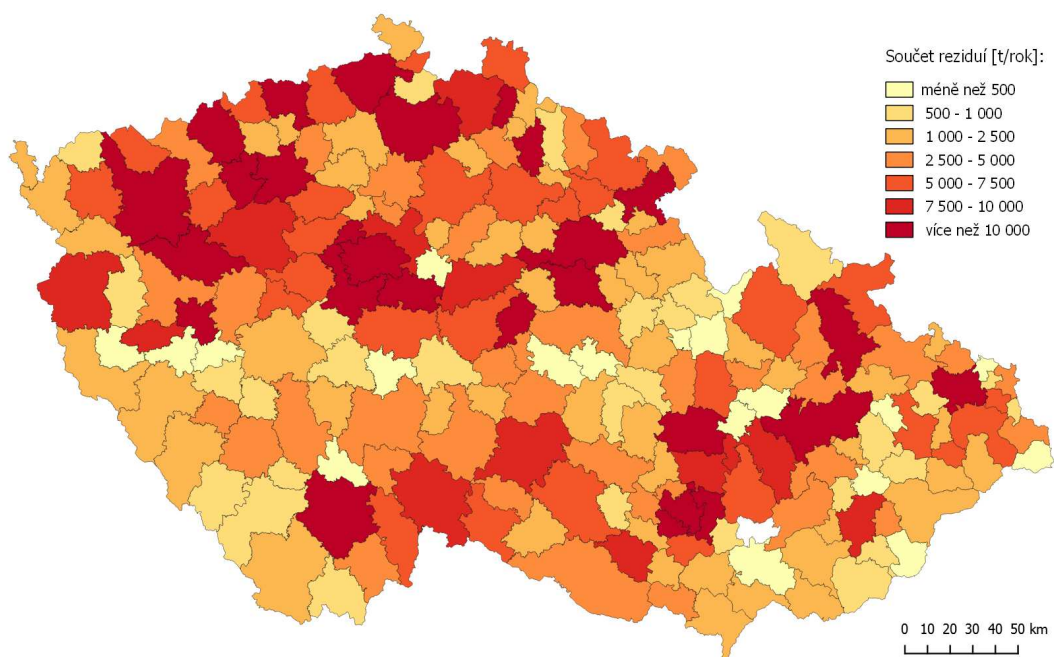
Uzel	Produkce [t/rok]	Zpracování [t/rok]
Hlavní_město_Praha	397588,5	310231,7
Jihočeský_kraj	159031,6	178199,2
Jihomoravský_kraj	296644,8	342540,4
Karlovarský_kraj	75100,6	69964,5
Kraj_Vysočina	119949,3	101257,7
Královéhradecký_kraj	135160,4	104662,1
Liberecký_kraj	116331,0	157545,4
Moravskoslezský_kraj	304884,6	319830,1
Olomoucký_kraj	168397,4	132285,1
Pardubický_kraj	123158,5	169465,9
Plzeňský_kraj	122856,3	113632,1
Středočeský_kraj	413128,9	450903,5
Ústecký_kraj	218558,1	229267,1
Zlínský_kraj	134487,9	105493,0

Hrana	Tok na hraně [t/rok]
Hlavní_město_Praha-Hlavní_město_Praha	852284,0
Hlavní_město_Praha-Jihočeský_kraj	4010,8
Hlavní_město_Praha-Jihomoravský_kraj	16142,5
Hlavní_město_Praha-Karlovarský_kraj	1435,1
Hlavní_město_Praha-Kraj_Vysočina	2667,8
Hlavní_město_Praha-Královéhradecký_kraj	5390,9
Hlavní_město_Praha-Liberecký_kraj	23297,6
Hlavní_město_Praha-Moravskoslezský_kraj	9184,1
Hlavní_město_Praha-Olomoucký_kraj	3149,0
Hlavní_město_Praha-Pardubický_kraj	20446,1
Hlavní_město_Praha-Plzeňský_kraj	4871,4
Hlavní_město_Praha-Středočeský_kraj	107471,1
Hlavní_město_Praha-Ústecký_kraj	12861,0
Hlavní_město_Praha-Zlínský_kraj	2821,4
Jihočeský_kraj-Hlavní_město_Praha	1748,2
Jihočeský_kraj-Jihočeský_kraj	253961,0
Jihočeský_kraj-Jihomoravský_kraj	90,0
Jihočeský_kraj-Karlovarský_kraj	0,0
Jihočeský_kraj-Kraj_Vysočina	490,0
Jihočeský_kraj-Královéhradecký_kraj	50,6
Jihočeský_kraj-Liberecký_kraj	0,0
Jihočeský_kraj-Moravskoslezský_kraj	0,0
Jihočeský_kraj-Olomoucký_kraj	0,0
Jihočeský_kraj-Pardubický_kraj	0,0
Jihočeský_kraj-Plzeňský_kraj	1306,7
Jihočeský_kraj-Středočeský_kraj	3535,0
Jihočeský_kraj-Ústecký_kraj	3,4
Jihočeský_kraj-Zlínský_kraj	2,1
Jihomoravský_kraj-Hlavní_město_Praha	16301,3
Jihomoravský_kraj-Jihočeský_kraj	372,8
Jihomoravský_kraj-Jihomoravský_kraj	467027,0
Jihomoravský_kraj-Karlovarský_kraj	20,6
Jihomoravský_kraj-Kraj_Vysočina	10667,3
Jihomoravský_kraj-Královéhradecký_kraj	107,7
Jihomoravský_kraj-Liberecký_kraj	129,5
Jihomoravský_kraj-Moravskoslezský_kraj	703,9
Jihomoravský_kraj-Olomoucký_kraj	6631,4
Jihomoravský_kraj-Pardubický_kraj	4850,0
Jihomoravský_kraj-Plzeňský_kraj	42,2
Jihomoravský_kraj-Středočeský_kraj	365,3
Jihomoravský_kraj-Ústecký_kraj	128,7
Jihomoravský_kraj-Zlínský_kraj	3200,4
Karlovarský_kraj-Hlavní_město_Praha	1199,2
Karlovarský_kraj-Jihočeský_kraj	4,8
Karlovarský_kraj-Jihomoravský_kraj	3,3
Karlovarský_kraj-Karlovarský_kraj	118471,7
Karlovarský_kraj-Kraj_Vysočina	0,2
Karlovarský_kraj-Královéhradecký_kraj	805,2
Karlovarský_kraj-Liberecký_kraj	41,9
Karlovarský_kraj-Moravskoslezský_kraj	0,0
Karlovarský_kraj-Olomoucký_kraj	0,0
Karlovarský_kraj-Pardubický_kraj	3,9
Karlovarský_kraj-Plzeňský_kraj	5563,0
Karlovarský_kraj-Středočeský_kraj	39,2
Karlovarský_kraj-Ústecký_kraj	7393,2
Karlovarský_kraj-Zlínský_kraj	236,8

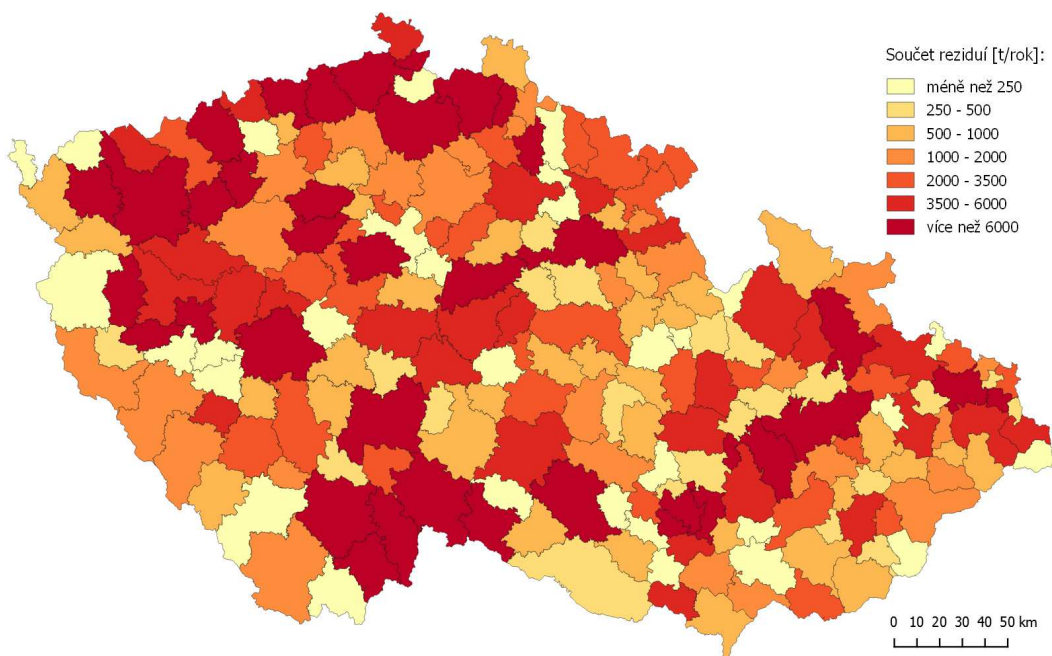
Kraj_Vysočina-Hlavní_město_Praha	1700,9
Kraj_Vysočina-Jihočeský_kraj	19728,8
Kraj_Vysočina-Jihomoravský_kraj	3017,2
Kraj_Vysočina-Karlovarský_kraj	0,0
Kraj_Vysočina-Kraj_Vysočina	136206,8
Kraj_Vysočina-Královéhradecký_kraj	47,2
Kraj_Vysočina-Liberecký_kraj	28,9
Kraj_Vysočina-Moravskoslezský_kraj	0,0
Kraj_Vysočina-Olomoucký_kraj	255,6
Kraj_Vysočina-Pardubický_kraj	4262,9
Kraj_Vysočina-Plzeňský_kraj	0,0
Kraj_Vysočina-Středočeský_kraj	4765,0
Kraj_Vysočina-Ústecký_kraj	56,8
Kraj_Vysočina-Zlínský_kraj	196,5
Královéhradecký_kraj-Hlavní_město_Praha	6046,1
Královéhradecký_kraj-Jihočeský_kraj	114,3
Královéhradecký_kraj-Jihomoravský_kraj	556,0
Královéhradecký_kraj-Karlovarský_kraj	14,9
Královéhradecký_kraj-Kraj_Vysočina	241,8
Královéhradecký_kraj-Královéhradecký_kraj	249855,1
Královéhradecký_kraj-Liberecký_kraj	13378,1
Královéhradecký_kraj-Moravskoslezský_kraj	1310,4
Královéhradecký_kraj-Olomoucký_kraj	0,0
Královéhradecký_kraj-Pardubický_kraj	31483,4
Královéhradecký_kraj-Plzeňský_kraj	0,5
Královéhradecký_kraj-Středočeský_kraj	1781,0
Královéhradecký_kraj-Ústecký_kraj	19937,6
Královéhradecký_kraj-Zlínský_kraj	749,0
Liberecký_kraj-Hlavní_město_Praha	8416,3
Liberecký_kraj-Jihočeský_kraj	3,3
Liberecký_kraj-Jihomoravský_kraj	32,3
Liberecký_kraj-Karlovarský_kraj	3,7
Liberecký_kraj-Kraj_Vysočina	8,4
Liberecký_kraj-Královéhradecký_kraj	4477,6
Liberecký_kraj-Liberecký_kraj	235680,4
Liberecký_kraj-Moravskoslezský_kraj	444,4
Liberecký_kraj-Olomoucký_kraj	68,7
Liberecký_kraj-Pardubický_kraj	8,5
Liberecký_kraj-Plzeňský_kraj	10432,7
Liberecký_kraj-Středočeský_kraj	5282,3
Liberecký_kraj-Ústecký_kraj	1259,3
Liberecký_kraj-Zlínský_kraj	15,1
Moravskoslezský_kraj-Hlavní_město_Praha	5191,2
Moravskoslezský_kraj-Jihočeský_kraj	26,5
Moravskoslezský_kraj-Jihomoravský_kraj	11204,1
Moravskoslezský_kraj-Karlovarský_kraj	6,5
Moravskoslezský_kraj-Kraj_Vysočina	76,3
Moravskoslezský_kraj-Královéhradecký_kraj	1970,6
Moravskoslezský_kraj-Liberecký_kraj	1029,1
Moravskoslezský_kraj-Moravskoslezský_kraj	501174,6
Moravskoslezský_kraj-Olomoucký_kraj	5107,9
Moravskoslezský_kraj-Pardubický_kraj	88,5
Moravskoslezský_kraj-Plzeňský_kraj	185,8
Moravskoslezský_kraj-Středočeský_kraj	145,5
Moravskoslezský_kraj-Ústecký_kraj	174,5
Moravskoslezský_kraj-Zlínský_kraj	690,9
Olomoucký_kraj-Hlavní_město_Praha	744,3
Olomoucký_kraj-Jihočeský_kraj	6,6
Olomoucký_kraj-Jihomoravský_kraj	48616,4
Olomoucký_kraj-Karlovarský_kraj	0,0
Olomoucký_kraj-Kraj_Vysočina	68,2
Olomoucký_kraj-Královéhradecký_kraj	59,9
Olomoucký_kraj-Liberecký_kraj	0,1
Olomoucký_kraj-Moravskoslezský_kraj	5915,1
Olomoucký_kraj-Olomoucký_kraj	217799,1
Olomoucký_kraj-Pardubický_kraj	4085,3
Olomoucký_kraj-Plzeňský_kraj	0,0
Olomoucký_kraj-Středočeský_kraj	2,9
Olomoucký_kraj-Ústecký_kraj	15,7
Olomoucký_kraj-Zlínský_kraj	6446,6

Pardubický_kraj-Hlavní_město_Praha	2210,9
Pardubický_kraj-Jihočeský_kraj	15,7
Pardubický_kraj-Jihomoravský_kraj	2725,1
Pardubický_kraj-Karlovarský_kraj	3,1
Pardubický_kraj-Kraj_Vysočina	862,4
Pardubický_kraj-Královéhradecký_kraj	8653,9
Pardubický_kraj-Liberecký_kraj	18,2
Pardubický_kraj-Moravskoslezský_kraj	164,3
Pardubický_kraj-Olomoucký_kraj	2335,3
Pardubický_kraj-Pardubický_kraj	199991,3
Pardubický_kraj-Plzeňský_kraj	87,5
Pardubický_kraj-Středočeský_kraj	12703,8
Pardubický_kraj-Ústecký_kraj	113,8
Pardubický_kraj-Zlínský_kraj	26,6
Plzeňský_kraj-Hlavní_město_Praha	5184,9
Plzeňský_kraj-Jihočeský_kraj	397,3
Plzeňský_kraj-Jihomoravský_kraj	101,1
Plzeňský_kraj-Karlovarský_kraj	6083,3
Plzeňský_kraj-Kraj_Vysočina	22,6
Plzeňský_kraj-Královéhradecký_kraj	1793,8
Plzeňský_kraj-Liberecký_kraj	1,9
Plzeňský_kraj-Moravskoslezský_kraj	28,8
Plzeňský_kraj-Olomoucký_kraj	2,4
Plzeňský_kraj-Pardubický_kraj	1,0
Plzeňský_kraj-Plzeňský_kraj	189436,1
Plzeňský_kraj-Středočeský_kraj	25410,0
Plzeňský_kraj-Ústecký_kraj	7345,9
Plzeňský_kraj-Zlínský_kraj	232,4
Středočeský_kraj-Hlavní_město_Praha	71744,7
Středočeský_kraj-Jihočeský_kraj	1552,5
Středočeský_kraj-Jihomoravský_kraj	394,2
Středočeský_kraj-Karlovarský_kraj	49,6
Středočeský_kraj-Kraj_Vysočina	242,6
Středočeský_kraj-Královéhradecký_kraj	8746,7
Středočeský_kraj-Liberecký_kraj	10556,2
Středočeský_kraj-Moravskoslezský_kraj	0,0
Středočeský_kraj-Olomoucký_kraj	126,9
Středočeský_kraj-Pardubický_kraj	10976,9
Středočeský_kraj-Plzeňský_kraj	7708,1
Středočeský_kraj-Středočeský_kraj	574122,6
Středočeský_kraj-Ústecký_kraj	13516,6
Středočeský_kraj-Zlínský_kraj	142,1
Ústecký_kraj-Hlavní_město_Praha	3439,3
Ústecký_kraj-Jihočeský_kraj	29,8
Ústecký_kraj-Jihomoravský_kraj	331,8
Ústecký_kraj-Karlovarský_kraj	2537,9
Ústecký_kraj-Kraj_Vysočina	19,8
Ústecký_kraj-Královéhradecký_kraj	12971,6
Ústecký_kraj-Liberecký_kraj	23181,3
Ústecký_kraj-Moravskoslezský_kraj	71,1
Ústecký_kraj-Olomoucký_kraj	66,0
Ústecký_kraj-Pardubický_kraj	16,6
Ústecký_kraj-Plzeňský_kraj	7183,1
Ústecký_kraj-Středočeský_kraj	2009,0
Ústecký_kraj-Ústecký_kraj	422991,5
Ústecký_kraj-Zlínský_kraj	241,3
Zlínský_kraj-Hlavní_město_Praha	2464,5
Zlínský_kraj-Jihočeský_kraj	130,4
Zlínský_kraj-Jihomoravský_kraj	6202,6
Zlínský_kraj-Karlovarský_kraj	0,0
Zlínský_kraj-Kraj_Vysočina	0,7
Zlínský_kraj-Královéhradecký_kraj	39,1
Zlínský_kraj-Liberecký_kraj	4,2
Zlínský_kraj-Moravskoslezský_kraj	23020,8
Zlínský_kraj-Olomoucký_kraj	12105,7
Zlínský_kraj-Pardubický_kraj	5,1
Zlínský_kraj-Plzeňský_kraj	0,0
Zlínský_kraj-Středočeský_kraj	21,8
Zlínský_kraj-Ústecký_kraj	1,2
Zlínský_kraj-Zlínský_kraj	169370,6

B MAPY ORP PRO SOUČET REZIDUÍ



Obr. B.1: Mapa ORP pro součet reziduí odtoků z uzlů



Obr. B.2: Mapa ORP pro součet reziduí přítoků do uzlů