

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA ELEKTROTECHNIKY

A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION

ÚSTAV AUTOMATIZACE A MĚŘICÍ TECHNIKY

DEPARTMENT OF CONTROL AND INSTRUMENTATION

OPTIMALIZACE V ŘÍZENÍ DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ

OPTIMIZATION IN CONTROL SYSTEMS

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Martin Daniel

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Lukáš Pohl, Ph.D.

BRNO 2017



Diplomová práce

magisterský navazující studijní obor **Kybernetika, automatizace a měření**

Ústav automatizace a měřicí techniky

Student: Bc. Martin Daniel

ID: 154661

Ročník: 2

Akademický rok: 2016/17

NÁZEV TÉMATU:

Optimalizace v řízení dynamických systémů

POKYNY PRO VYPRACOVÁNÍ:

1. Zpracujte rešerši o konvexní optimalizaci se zaměřením na problémy v řízení dynamických systémů.
2. Vyberte nástroje pro řešení úloh konvexní optimalizace zadané ve formě lineární maticové nerovnosti v prostředí Matlab.
3. Demonstrujte funkčnost nástrojů na úlohách zaměřených na dynamické systémy (stabilita, estimace stavu, výpočet regulátoru).
4. Aplikujte metody konvexní optimalizace na některé z moderních metod řízení (LQR, robustní a prediktivní řízení).

DOPORUČENÁ LITERATURA:

BOYD, Stephen P., et al. Linear matrix inequalities in system and control theory. Philadelphia: Society for industrial and applied mathematics, 1994.

DUAN, Guang-Ren; YU, Hai-Hua. LMIs in Control Systems: Analysis, Design and Applications. CRC Press, 2013.

Termín zadání: 6.2.2017

Termín odevzdání: 15.5.2017

Vedoucí práce: Ing. Lukáš Pohl, Ph.D.

Konzultant:

doc. Ing. Václav Jirsík, CSc.
předseda oborové rady

UPOZORNĚNÍ:

Autor diplomové práce nesmí při vytváření diplomové práce porušit autorská práva třetích osob, zejména nesmí zasahovat nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a musí si být plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č.40/2009 Sb.

ABSTRAKT

Diplomová práce se zabývá využitím lineárních maticových nerovností (LMI) v řízení dynamických soustav. Pomocí LMI můžeme definovat stabilitu systému. Definováním LMI můžeme zkoumat zda jsou póly systému v zadaných oblastech, umístěných v levé polorovině komplexní roviny. LMI můžeme také použít pro stavovou zpětnou vazbu s nulovou ustálenou odchylkou na výstupu soustavy od žádané hodnoty. V práci je popsán návrh regulátoru minimalizujícího \mathcal{H}_∞ normu ze vstupu na výstup systému. Dále je zde popsán návrh LQ regulátoru s použitím LMI. Na závěr práce jsou uvedeny dva příklady návrhu LQ regulátoru, který minimalizuje \mathcal{H}_∞ normu ze vstupu na výstup systému a který přesune póly systému do daných oblastí v komplexní rovině. V prvním případě se LMI použijí pro návrh spojitého LQ regulátoru. Ve druhém případě navrhujeme diskrétní LQ pomocí LMI.

KLÍČOVÁ SLOVA

optimalizace, Ljapunovova stabilita, stabilita systému, LMI, lineární maticová nerovnost, Matlab, cvx, YALMIP, Robust Control toolbox, stavová zpětná vazba, \mathcal{H}_∞ norma, LQ regulátor, LQR

ABSTRACT

Master's thesis deals with using a linear matrix inequality (LMI) in control of a dynamic systems. We can define a stability of a dynamic system with a LMI. We can use a LMI for research if the poles of a system are in a given regions in the left half-plane of the complex plane with a LMI or we can use a LMI for a state feedback control.

In the work we describe a desing of a controller minimizing a \mathcal{H}_∞ norm from an input to an output of the system. There is also a desing of a LQ controller with a LMI. In the end of the work, there are two examples of a design a LQ controller, which minimize the \mathcal{H}_∞ norm from the input to the output of the system and moves a poles of a dynamic system in a given regions in the complex plane, with the LMI. We use a LMI for a design a continous LQ controller in the first example. In the second example we use a LMI for a design a discrete LQ controller.

KEYWORDS

optimization, Lyapunov stability, system stability, LMI, linear matrix inequality, Matlab, cvx, YALMIP, Robust Control toolbox, state feedback, \mathcal{H}_∞ norm, LQ regulator, LQR

DANIEL, Martin *Optimalizace v řízení dynamických systémů*: diplomová práce. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Ústav automatizace a měřicí techniky, 2017. 85 s. Vedoucí práce byl Ing. Lukáš Pohl, Ph.D.

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že svou diplomovou práci na téma „Optimalizace v řízení dynamických systémů“ jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené diplomové práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této diplomové práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a/nebo majetkových a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č. 40/2009 Sb.

Brno

.....

podpis autora

PODĚKOVÁNÍ

Rád bych poděkoval vedoucímu diplomové práce panu Ing. Lukášovi Pohlovi, Ph.D. za odborné vedení, konzultace, trpělivost a podnětné návrhy k práci.

Brno

.....

podpis autora

OBSAH

Úvod	10
1 Optimalizace	12
1.1 Lineární programování	12
1.2 Kvadratické programování	13
1.3 Semidefinitní programování	14
1.4 Lineární maticové nerovnosti	15
2 Nástroje pro řešení LMI v programu Matlab	16
2.1 Toolbox cvx	16
2.2 Toolbox YALMIP	17
2.3 Robust Control a Optimization toolbox	18
3 Ověření polohy pólů pomocí LMI	20
3.1 Hurwitzova stabilita	20
3.2 Schurova stabilita	21
3.3 Umístění pólů v ohraničených oblastech	23
3.4 Stavový regulátor pomocí LMI	31
4 Definice \mathcal{H}_∞ normy pomocí LMI	34
4.1 Normy signálu a systému	34
4.2 LMI pro výpočet \mathcal{H}_∞ normy spojitého systému	36
4.3 LMI pro výpočet \mathcal{H}_∞ normy diskrétního systému	38
5 LMI pro návrh LQ regulátoru	42
5.1 Odvození LMI pro spojitý LQ regulátor	42
5.2 Odvození LMI pro diskrétní LQ regulátor	44
6 Výsledky simulace	47
6.1 Spojitý systém	47
6.1.1 Návrh regulátoru a výsledek simulace	48
6.2 Diskrétní systém	55
6.2.1 Návrh regulátoru a výsledek simulace	57
7 Závěr	63
Literatura	65
Seznam symbolů, veličin a zkratk	69

Seznam příloh	72
A Matematické prerekvizity	73
B Výpisy z programu Matlab	83
C Obsah přiloženého CD	85

SEZNAM OBRÁZKŮ

3.1	Oblast ohraničená v komplexní rovině dvěma přímkami v bodech $-\alpha$ a $-\beta$ (přepřacováno z [7])	24
3.2	Oblast ohraničená v komplexní rovině kružnicí se středem v bodě $-q$ a poloměrem r (přepřacováno z [7])	26
3.3	LMI oblast $\mathbb{S}(\alpha, r, \varphi)$ v komplexní rovině (přepřacováno z [7])	27
3.4	Tlumící křivky v komplexní rovině pro spojitý systém (přepřacováno z [23])	28
3.5	Tlumící křivky v komplexní rovině pro diskrétní systém	29
3.6	Tlumící křivky $\xi = 0,3$ v komplexní rovině pro diskrétní systém nahrazená elipsou	30
3.7	Tlumící křivky v komplexní rovině pro diskrétní systém nahrazené elipsami	31
6.1	Popis fyzikálních veličin u letadla. Převzato z [20](Popisy obrázku byly přepřacovány.)	47
6.2	Odezva spojitého systému na jednotkový skok	48
6.3	Odezva spojitého systému s LQ regulátorem na jednotkový skok	51
6.4	Odezva spojitého systému s LQ regulátorem minimalizujícím \mathcal{H}_∞ normu ze vstupu na výstup soustavy a s posunutými póly do do LMI oblasti $\mathbb{S}(\alpha, r, \varphi)$ na jednotkový skok	53
6.5	Rozmístění pólů přenosu řízení F_{W3} v komplexní rovině s vyznačenou oblastí $\mathbb{S}(\alpha, r, \varphi)$	54
6.6	Blokové schéma zásobovacího řetězce. Přepřacováno z [1]	55
6.7	Odezva diskretního systému na jednotkový skok	57
6.8	Přechodová charakteristika systému s LQ diskrétním regulátorem	59
6.9	Přechodová charakteristika systému s LQ diskrétním regulátorem	61
6.10	Rozmístění pólů přenosu řízení $F_{W2}(z)$ v komplexní rovině s vyznačenou elipsou	62
A.1	Stavová zpětná vazba systému	79
A.2	Blokové schéma stavového popisu systému po přidání stavové zpětné vazby a integrátoru	80
A.3	Blokové schéma a) spojitého integrátoru b) diskrétního integrátoru	81

SEZNAM TABULEK

6.1	Vlastní čísla matice \mathbf{A}	48
6.2	Vlastní čísla matice \mathbf{A}^* při $\mathbf{R}=10^{-3}$	50
6.3	Vlastní čísla matice \mathbf{A}^* při $\mathbf{R}=10^{-6}$	50
6.4	Vlastní čísla matice \mathbf{A}^* spojitého systému s LQ regulátorem minimalizujícím \mathcal{H}_∞ normu ze vstupu na výstup soustavy a s posunutými póly do do LMI oblasti $\mathbb{S}(\alpha, r, \varphi)$ s $\mathbf{R}=10^{-6}$	54
6.5	Použité parametry diskrétního systému	56
6.6	Vlastní čísla matice \mathbf{E} diskrétního systému	56
6.7	Vlastní čísla matice \mathbf{E}^* diskrétního systému s LQ regulátorem	58
6.8	Vlastní čísla matice \mathbf{E}^* diskrétního systému s LQ regulátorem, který minimalizuje \mathcal{H}_∞ normu ze vstupu na výstup soustavy a přesun pólů systému je omezen do oblasti ohraničené elipsou	61

ÚVOD

Lidé se už odnepaměti snaží ve všech odvětvích své činnosti minimalizovat úsilí, které potřebují k dosažení požadovaných výsledků. Ať už se jednalo o vynález kola ve starověku, kdy si člověk usnadnil převážení zboží či různé kladkové stroje používané ve středověku ke stavbě monumentálních staveb nebo mnoho dalších technických vynálezů, se kterými se setkáváme v každodenním životě. Každá z těchto technologií byla vyvinuta pro to, aby byl maximalizován zisk z nějaké činnosti nebo naopak aby došlo k minimalizování energie, která je do činnosti vložena. Můžeme tedy říci, že hledáme optimální řešení problému, nebo-li najdeme takové řešení, které nachází minimální, případně maximální hodnotu za zadaných omezujících podmínek.

Tato práce rozebírá, jak se optimalizace může projevat v řízení dynamických systémů.

V první kapitole práce je provedeno rozdělení optimalizačních problémů do několika kategorií. Ty se rozlišují podle typu omezujících podmínek. U semidefinitního programování, které je v práci zmíněno jako poslední optimalizační problém, se omezující podmínky vyskytují ve tvaru lineárních maticových nerovností. Tvar a význam lineárních maticových nerovností je popsán v poslední podkapitole.

Každý optimalizační problém má vlastní metody řešení. Pro realizaci řešící metody můžeme využít několik nástrojů. V druhé kapitole jsou vybrány toolboxy k programu Matlab, které lze použít k řešení optimalizačních problémů a lineárních maticových nerovností.

Třetí kapitola práce se zabývá využitím maticových lineárních nerovností v řízení. Můžeme definovat optimalizační problém, který bude mít podmínky vyjádřené pomocí lineárních maticových nerovností a který bude vyšetřovat stabilitu systému. Na základě řešení optimalizačního problému rozhodneme, zda je systém stabilní, nebo zda je systém nestabilní. Vyšetřování stability systému úzce souvisí s možností vyšetřovat umístění pólů systému. Můžeme si definovat optimalizační problém, kterým budeme vyšetřovat, zda póly leží uvnitř ohraničených oblastí v komplexní rovině. Ohraničené oblasti jsou definovány skrze lineární maticové nerovnosti. Druhá polovina třetí kapitoly se věnuje návrhu stavového regulátoru s ustálenou nulovou odchylkou na výstupu soustavy pomocí lineárních maticových nerovností.

Abychom mohli ovlivňovat tvar a rychlost přechodové charakteristiky, tak si definujeme \mathcal{H}_∞ normu systému a kritérium pro LQ regulátor. Ve čtvrté kapitole se zabýváme \mathcal{H}_∞ normou systému. Pomocí lineárních maticových nerovností můžeme navrhnout regulátor, který bude \mathcal{H}_∞ normu minimalizovat, a nebo můžeme navrhnout regulátor, který zaručí, že \mathcal{H}_∞ norma nepřekročí námi definovanou hodnotu.

V páté kapitole se zabýváme kritériem pro LQ regulátor a jeho vyjádření pomocí lineárních maticových nerovností. Kritérium pro LQ regulátor obsahuje složku,

která je ovlivňována velikostí vstupního signálu a složku, která je ovlivňována velikostí stavů systému. Každé složce je přiřazena váha, jak velkou měrou přispívají do kritéria. Pomocí lineárních maticových nerovností navrhujeme takový LQ regulátor, který kritérium minimalizuje.

V poslední kapitole je proveden návrh několika LQ regulátorů pro spojitou a diskrétní soustavu. Jako první je navržen samotný LQ regulátor. Jako druhý regulátor je pro srovnání navržen LQ regulátor, který minimalizuje \mathcal{H}_∞ normu ze vstupu na výstup systému a zároveň posunuje póly do ohraničené oblasti. Typ ohraničené oblasti záleží na tom, zda se jedná o spojitý systém nebo zda se jedná o diskrétní systém.

1 OPTIMALIZACE

Optimalizací rozumíme hledání minima reálné funkce f . Hledáme neznámou výslednou množinu $\mathbf{X} \in \mathbb{R}$, která splní zadané podmínky. Ovšem to jak množina \mathbf{X} vypadá není v obecné optimalizaci definováno. Mohou nastat tři případy:

- Množina \mathbf{X} je konečná - jedná se o *kombinatorickou optimalizaci*.
- Množina \mathbf{X} obsahuje reálná čísla a reálné vektory - *spojitá optimalizace*.
- Množina \mathbf{X} obsahuje reálné funkce - řešíme tzv. *variální počet*.

Při *spojité optimalizaci* hledáme množinu $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, která se skládá z prvků (x_1, \dots, x_n) . Tyto prvky jsou řešením soustavy m nerovnic a l rovnic:

$$\begin{aligned} g_i(x_1, \dots, x_n) &\leq 0 & i = 1, \dots, m \\ h_i(x_1, \dots, x_n) &= 0 & i = 1, \dots, l \end{aligned} \quad (1.1)$$

Pro funkce g_1, \dots, g_m a g_2, \dots, g_l platí $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Potom tedy platí, že můžeme celý problém optimalizace zapsat jako:

$$\begin{aligned} \min & f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{za podmíněk} & g_i(x_1, \dots, x_n) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & h_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, l \end{aligned} \quad (1.2)$$

Ne vždy dojde k tomu, že se podaří množinu \mathbf{X} nalézt. Pokud množina \mathbf{X} vyjde prázdná (podmínky, které omezují funkci f , jsou nastaveny proti sobě, např. $xy > 0$, $x > 0$ a $y < 0$), tak se optimalizační úloha nazývá *nepřípustná*.

Při optimalizaci se funkce f nazývá jako *účelová* nebo *kriteriální* funkce. Příkladem spojité optimalizace je úloha lineárního programování [31].

1.1 Lineární programování

Při tomto druhu optimalizace minimalizujeme lineární funkci za podmínek, které jsou definovány ve tvaru lineárních rovnic (lineární rovnice viz. příloha A na straně 73).

Standardní tvar lineárního programování (LP) se zapisuje v následujícím tvaru:

$$\begin{aligned} \min & c_1x_1 + \dots + c_nx_n \\ \text{za podmíněk} & a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (1.3)$$

Ve vektorovém zápisu se standardní tvar zapíše jako:

$$\min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \quad (1.4)$$

Kde platí $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

Optimalizační problémy nejsou většinou ve standardním tvaru, ale mají obecnou formu. Proto, abychom je převedli na standardní tvar a poté mohli použít některý z nástrojů pro jejich výpočet, můžeme použít následující úpravy:

1. Při hledání maxima funkce $\max\{\mathbf{c}^T \mathbf{x}\}$, můžeme tento problém převést na hledání minima záporné funkce $\min\{-\mathbf{c}^T \mathbf{x}\}$.
2. Znaménko nerovnosti můžeme otočit, když místo $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq 0$ použijeme náhradu $-\mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq 0$.
3. Místo rovnosti $\mathbf{a}^T \mathbf{x} = b$ můžeme napsat dvě nerovnosti $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq b$ a $-\mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq -b$.
4. Pokud naopak chceme nerovnost $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b$ převést na rovnost, tak musíme použít tzv. **pomocnou proměnnou** (v angličtině označovanou jako **slack variable**) u_i . Musí splňovat podmínku $u_i \geq 0$. Potom můžeme nerovnost nahradit jako $\mathbf{a}^T \mathbf{x} + u_i = b_i$. Stejný postup použijeme, pokud chceme nahradit nerovnost $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq b$ na rovnost.
5. Máme-li neomezenou proměnnou $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$, tak jí můžeme rozdělit na dvě proměnné $x_i^+ \geq 0$, $x_i^- \leq 0$. Tyto proměnné ale musejí splňovat podmínku, že $x_i = x_i^+ - x_i^-$.

Tím, že původní problém upravíme podle výše uvedených pravidel se nijak nezmění hodnota optima původně zadaného problému. Proto pokud určíme hodnotu optima nového problému, tak můžeme prohlásit, že to je zároveň hodnota optima původně zadaného problému.

Příkladem lineárního programování mohou být různé jednoduché optimalizační problémy. Může se jednat o zjišťování správného poměru vstupních surovin v závislosti na největším zisku, na správném smíchání vstupních potravin pro splnění minimální výživové dávky v pokrmu apod.[31].

1.2 Kvadratické programování

Při kvadratickém programování (QP - z anglického originálu Quadratic program) je kriteriální funkce zadaná jako kvadratická funkce a omezující podmínky zůstávají lineárními funkcemi jako u lineárního programování.

Problém kvadratického programování lze tedy zapsat jako:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{q}^T \mathbf{x} + \mathbf{r} \\ \text{za podmínek} \quad & \mathbf{G} \mathbf{x} \leq h \\ & \mathbf{A} \mathbf{x} = b \end{aligned} \tag{1.5}$$

Kde \mathbf{P} je čtvercová, symetrická a pozitivně definitní (pozitivně definitní viz. příloha A na straně 73) matice o rozměrech n , $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p \times n}$.

Příkladem kvadratického programování je *metoda nejmenších čtverců*. Jedná se o problém kvadratického programování, který je zadán bez podmínek. Minimalizujeme zadané kritérium ztrátové funkce. V tomto případě má problém analytické řešení, které je odvozeno v příloze A na straně 75. Přidáním podmínek, pro které má minimalizace platit, již nelze získat jednoduché analytické řešení. Problém můžeme zapsat do tvaru kvadratického programování a vyřešit jej pomocí metod určených pro řešení QP [5].

1.3 Semidefinitní programování

Pokud jsou omezující podmínky vyjádřeny jako maticové nerovnosti, tak je problém optimalizace nazván *semidefinitní programování* (SDP). Potom problém můžeme zapsat jako:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podmíněk} \quad & x_1 \mathbf{F}_1 + \dots + x_n \mathbf{F}_n + \mathbf{G} \leq 0 \\ & \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Kde \mathbf{G} , $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$ jsou symetrické matice o rozměru k . Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p \times n}$.

Standardní tvar semidefinitního programování můžeme zapsat:

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{tr}(\mathbf{C}\mathbf{X}) \\ \text{za podmíněk} \quad & \text{tr}(\mathbf{A}_i \mathbf{X}) = b_i \quad i = 1, \dots, p \\ & \mathbf{X} \geq 0 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Kde platí, že \mathbf{C} , $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_p$ jsou symetrické matice, které mají rozměr n . Pokud rovnici 1.7 začneme upravovat, tak získáme:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_{11}x_1 + \dots + c_{nn}x_n \\ \text{za podmíněk} \quad & a_{11}^1 x_1, \dots, a_{nn}^1 x_n = b_1 \\ & \vdots \\ & a_{11}^p x_1, \dots, a_{nn}^p x_n = b_p \\ & \mathbf{X} \geq 0 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Kde, prvek a_{11}^1 je prvním prvkem matice \mathbf{A}_1 . Pokud porovnáme rovnici 1.3 a 1.8, tak můžeme vidět, že si jsou podobné. Pokud tedy máme problém semidefinitního programování ve standardním tvaru, tak minimalizujeme lineární funkci, která je omezena p počtem lineárních podmínek. Tím je problém semidefinitního programování ve standardním tvaru převeden na řešení problému lineárního programování.[5]

1.4 Lineární maticové nerovnosti

U semidefinitního programování jsme se setkali s pojmem lineární maticová nerovnost (zkráceně LMI - z anglického originálu *linear matrix inequality*). Obecně zapsaná LMI má následující tvar:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) > 0$$
$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i \mathbf{F}_i \quad (1.9)$$

Kde platí, že $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. Další podmínkou je, že \mathbf{F}_i je symetrická matice. Nerovnost $>$ v rovnici 1.9 značí, že matice $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ je pozitivně definitní. Operátor $>$ můžeme nahradit \geq , tím vyjadřujeme, že matice $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ může být pozitivně semidefinitní.

$$\{\mathbf{x} \mid \mathbf{F}(\mathbf{x}) > 0\} \quad (1.10)$$

Můžeme prohlásit, že LMI v rovnici 1.9 je konvexní, pokud platí, že výraz 1.10 je konvexním problémem.

Nejnámější LMI v řídicí technice je LMI řešící Ljapunovovu stabilitu systému. Obecnou definici stability pro lineární systém můžeme napsat jako: *Lineární systém je stabilní tehdy, jestliže se po ukončení budícího (vstupního) signálu a po doznění přechodného děje výstup vrátí na původní hodnotu [29].*

LMI definující Ljapunovovu stabilitu pro spojitě systémy můžeme zapsat v následujícím tvaru (odvození uvedeno v příloze A na straně 76):

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < 0 \quad (1.11)$$

Kde \mathbf{P} je symetrická pozitivně definitní matice a matice \mathbf{A} je matice zpětných vazeb autonomního systému. Obě matice splňují podmínku $\mathbf{A}, \mathbf{P} \in \mathbb{R}^n$. Pokud matice \mathbf{P} existuje, tak můžeme prohlásit, že je systém stabilní. Samotné hledání matice \mathbf{P} je časově i výpočetně náročné. Proto se při hledání využívá následující vlastnost. Nadefinujeme si symetrickou matici \mathbf{Q} . Místo rovnice 1.11 můžeme substitucí psát:

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) = -\mathbf{Q} \quad (1.12)$$

Pokud nalezneme matici \mathbf{P} , která je pozitivně definitní, tak můžeme prohlásit, že je autonomní systém stabilní. Tím jsme problém hledání existence matice převedli na problém vyřešení n počtu lineárních rovnic. Pokud si zvolíme matici \mathbf{Q} jako diagonální matici, s nulovými prvky mimo diagonálu, tak se řešení celé soustavy rovnic zjednoduší [7].

2 NÁSTROJE PRO ŘEŠENÍ LMI V PROGRAMU MATLAB

2.1 Toolbox `cvx`

Toolbox `cvx` byl vyvinut Stephanem P. Boydem a Michaellem C. Grantem [9]. Toolbox je volně ke stažení z internetových stránek [8].

Jedná se o modelovací systém pro konvexní optimalizaci. Toolboxem lze řešit mnoho problémů optimalizace. Od lineárního a kvadratického programování, semi-definitního programování, až po složitější problémy konvexního programování. Tím, že je toolbox implementovaný v Matlabu, tak ho můžeme použít s ostatními příkazy. Můžeme si předem nadefinovat proměnné, které nám jsou známé a následně je použít pro výpočet v toolboxu `cvx`. Po úspěšném dokončení výpočtu můžeme s proměnnými, ve kterých máme uložené vypočtené hodnoty, ihned pracovat. Není potřebná konverze datových typů, jako u ostatních toolboxů. Vypočtené matice můžeme použít k dalším potřebným výpočtům, jako je násobení a sčítání matic, výpočet determinantu matice apod. Toolbox `cvx` může pracovat ve dvou módech. Prvním je SDP (semidefinite programming) mód a druhým GP (geometric programming) mód. V SDP je toolbox `cvx` více zaměřen na práci s maticemi a lze zde LMI jednodušeji zapsat a definovat. V GP je práce zaměřena více na obecnější problémy optimalizace, jako je převod problémů na konvexní formu optimalizace.

Pro nekomerční využití a standardní výpočty je toolbox `cvx` zdarma. Obsahuje volně dostupné solvery určené pro řešení optimalizačních problémů SeDuMi [25] a SDPT3 [28]. Pro komerční využití a nadstandardní využití lze zakoupit licence, která obsahuje více solverů pro řešení optimalizačních problémů (viz. <http://web.cvxr.com/cvx/doc/solver.html>).

Toolbox má vlastní syntaxi. Pro zahájení tvorby modelu je použit příkaz `cvx_begin` a pro ukončení je použit příkaz `cvx_end`. Příkaz `cvx_begin` může mít ještě jeden ze tří parametrů:

- `cvx_begin quiet` - během výpočtů se v hlavním okně Matlabu nebude nic zobrazovat
- `cvx_begin sdp` - nastavení SDP modu
- `cvx_begin gp` - nastavení GP modu

Může se zadat i kombinace parametrů `cvx_begin gp quiet` nebo `cvx_begin sdp quiet`.

Modelu lze definovat proměnné pomocí příkazu `variable`. Např. `variable x` pro skalární proměnnou, nebo `variable A(4,4)` pro neznámou matici **A** o rozměrech 4×4 . Příkazem `variable A(4,4) symmetric` definujeme, že neznámá matice **A**

bude symetrická matice o rozměrech 4×4 .

Po nadefinování proměnných můžeme napsat problém, který potřebujeme vyřešit. Při výpočtech s `cvx` toolboxem není doporučeno používat ostré nerovnosti. Problém by se měl vždy převést na problém s neostrými nerovnostmi.

Po výpočtu se v definovaných proměnných objeví hodnoty, které splňují zadané podmínky a řeší zadaný problém. V proměnné `cvx_status` je výsledek toho v jakém stavu se nachází model. Může se zde vyskytnout jeden z následujících stavů:

- **Solved** - bylo nalezeno řešení problému. Výsledky jsou uloženy v proměnných.
- **Unbounded** - zadaný problém je neomezený. Musíme ho upravit, tak aby byly definovány omezující podmínky.
- **Infeasible** - zadaný problém je neřešitelný.
- **Inaccurate/Solved, Inaccurate/Unbounded, Inaccurate/Infeasible** - problém nebylo možné vyřešit v zadané toleranci.
- **Suboptimal, Failed, Ovedetermined** - vyskytl se problém při řešení a nedošlo k výpočtu správného řešení [10].

Na výpisu 2.1 můžeme vidět, jak lze napsat řešení Ljapunovovy stability pomocí toolboxu `cvx`.

Výpis 2.1: Řešení Ljapunovovy stability pomocí toolboxu `cvx`

```
1 A1 = [-1 2 ; 1 -3];           % Definice systému
2 cvx_begin sdp
3 variable P1(2,2) symmetric    % Symetrická matice P
4 P1 >= eye(2,2)*eps           % Podmínka c.1
5 A1' * P1 + P1 * A1 <= -eye(2,2)*eps % Podmínka c.2
6 cvx_end
```

V této práci se k výpočtům využívá toolbox `cvx`.

2.2 Toolbox YALMIP

Toolbox YALMIP je vyvíjen Johanem Löfbergem na Linköping University ve Švédsku [13, 14, 15]. Stejně jako toolbox `cvx` jej lze zdarma stáhnout z internetových stránek [13].

YALMIP lze stejně jako `cvx` použít pro výpočet optimalizačních problémů. Na stránkách autora lze ale nalézt další příklady, kde je YALMIP použit, např. při modelu prediktivního řízení apod. YALMIP má své příkazy, které se použijí k definování proměnných a výpočtu modelu. Proměnné, většinou matice, jsou definované

příkazem `sdpvar(n,m,'symmetric')`, kde n a m jsou rozměry matice. Třetí parametr značí vlastnost matice. Pokud je matice čtvercová (platí $n=m$), tak se automaticky předpokládá, že je matice symetrická a místo předchozího příkazu stačí napsat `sdpvar(n)`.

Na výpisu 2.2 můžeme vidět, jak lze napsat řešení Ljapunovy stability pomocí toolboxu YALMIP.

Výpis 2.2: Řešení Ljapunovy stability pomocí toolboxu YALMIP

```

1 A2 = [-1 2 ; 1 -3];           % Definice systému
2 P = sdpvar(2,2);             % Symetrická matice P
3 F = [P >= eye(2)*eps, A'*P+P*A <= -eye(2)]; % Podmínky
4 optimize(F)                  % Spuštění výpočtu
5 P1=value(P)                  % Převedení matice

```

Po definování proměnných se musí všechny podmínky uložit do vektoru. Ve výpisu 2.2 uložení provádíme na třetím řádku. Následuje výpočet optimalizace. Na posledním řádku musíme hodnoty v proměnné převést pomocí příkazu `value` z typu `sdpvar` na typ `double`. Proměnnou `P1` můžeme použít k dalším výpočtům v Matlabu.

2.3 Robust Control a Optimization toolbox

K programu Matlab jsou nabízeny dva toolboxy, které se zabývají optimalizací a řešením LMI, přímo od vývojářské firmy MathWorks.

Prvním je Optimization Toolbox [17], který obsahuje funkce, které lze použít pro výpočet minima nebo maxima funkce splňující zadané podmínky. V toolboxu jsou funkce jako `fminsearch`, která slouží k hledání minima na neohraničené funkci. Pro hledání minima funkce jedné proměnné slouží funkce `fminbnd`. Dále obsahuje funkce pro výpočet problému lineárního programování, kvadratického programování, metody nejmenších čtverců a soustavy nerovnic.

Druhým toolboxem je Robust Control toolbox [18]. Ten je primárně určen pro návrh robustních regulátorů pro systémy s neurčitostí. Součástí toolboxu je také balík funkcí, které slouží k výpočtu LMI. Pro výpočet řešení zadaných LMI slouží funkce `[tmin,xfas] = feasp(lmisys,options,target)`. Podrobný popis jednotlivých proměnných a jejich význam lze nalézt v dokumentaci [19] a nebo v nápovědě k programu Matlab.

Na výpisu 2.3 je uvedeno jak můžeme napsat řešení Ljapunovy stability pomocí funkce `feasp` z Robust control toolboxu.

Výpis 2.3: Řešení Ljapunovovy stability pomocí funkce `feasp` z Robust Control toolboxu (převzato z [19])

```
1 A3=[-1 2; 1 -3] % Definice systému
2 setlmis([]) % Začátek definice LMI
3 p = lmivar(1,[2 1]) % Neznámá matice
4 lmiterm([1 1 1 p],1,A3,'s') % LMI #1
5 lmiterm([-4 1 1 p],1,1) % LMI #2: P
6 lmiterm([4 1 1 0],1) % LMI #3: I
7 lmis = getlmis % Spojení LMI
8 [tmin,xfeas] = feasp(lmis) % Výpočet
9 P3 = dec2mat(lmis,xfeas,p) % Převedení výsledku do P
```

Je zde provedeno nadefinování systému, deklarování začátku definice LMI, samotné zapsání podmínek, které se všechny uložily do proměnné `lmis`, ze které je proveden výpočet a následné převedení výsledku do proměnné `P`.

3 OVĚŘENÍ POLOHY PÓLŮ POMOCÍ LMI

LMI lze použít pro ověření umístění pólů systému. Na to navazuje možnost vyšetření stability systému. Aby byl spojitý systém stabilní, tak póly systému musí ležet v levé polorovině komplexní roviny. Pro diskrétní systém platí, že póly systému musí ležet uvnitř jednotkové kružnice v komplexní rovině. Pokud správně nadefinujeme LMI, tak můžeme u jednotlivých systémů zkoumat, zda jsou tyto skutečnosti splněny.

3.1 Hurwitzova stabilita

Uvažujme autonomní systém:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (3.1)$$

Pokud mají vlastní čísla matice \mathbf{A} zápornou reálnou část, potom můžeme prohlásit, že je autonomní systém stabilní. Můžeme obecně prohlásit, že je systém stabilní podle Hurwitzovy podmínky.

Vycházejme z Ljapunovovy stability uvedené v rovnici 1.11 na straně 15. Víme, že výraz $(\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A})$ musí být negativně definitní. Pokud je matice negativně definitní, tak její vlastní čísla mají záporné reálné části (viz. příloha A na straně 73). Tuto vlastnost můžeme aplikovat na výraz $(\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A})$. Toho můžeme využít při řešení Hurwitzovy stability. Nadefinujme si podmínky:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &> 0 \\ \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} &< 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Problém vyšetřování vlastních čísel jsme převedli na problém hledání matice \mathbf{P} , která je symetrická a pozitivně definitní.

Pro následující výpočty uvažujme systém zadaný v Jordanově kanonickém tvaru:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (3.3)$$

Ve výpisu 3.1 je uvedeno, jak se problém dá řešit s využitím programu Matlab a toolboxu `cvx`.

Výpis 3.1: Řešení Hurwitzovy stability v programu Matlab, pomocí toolboxu cvx

```

1 A= [-6 0 0 0 0; 0 -12 0 0 0; 0 0 -3 0 0; 0 0 0 -7 0; ...
2     0 0 0 0 -1];           % Nadefinování systému
3 n=size(A,1);               % Řád systému
4 cvx_begin sdp               % Začátek cvx
5 variable P(n,n) symmetric  % Symetrická matice P
6 P>=eye(n,n)*eps            % První podmínka
7 -eye(n,n)*eps>=A'*P+P*A    % Druhá podmínka
8 cvx_end                     % Konec cvx

```

Ve výpisu 3.1 se vyskytují rozdíly oproti podmínkám, které jsme si definovali v rovnici 3.2. První rozdílná věc je, že se v rovnici 3.2 vyskytují ostré nerovnosti, zatímco ve výpisu používáme nerovnosti neostré. To je způsobeno tím, že autoři toolboxu `cvx` nedoporučují používat ostré nerovnosti a nezaručují správné výsledky, pokud se ostré nerovnosti použijí. Proto jsou v programu použity neostré nerovnosti. Další rozdíl je ten, že v první podmínce stability místo $\mathbf{P} > 0$ píšeme $\mathbf{P} > \text{eye}(n,n) \cdot \text{eps}$. Tento zápis je nutný. Zavedením neostrých nerovností jsme povolili, že může nastat $\mathbf{P} = 0$. Tím by byla splněna i druhá podmínka. Ale to není řešení, které hledáme. Proto musíme napsat, že \mathbf{P} musí být větší než velmi malé číslo. Využijeme tedy proměnnou `eps`, která reprezentuje přesnost výpočtů s plovoucí desetinnou čárkou, se kterou počítá v programu Matlab. Tím zaručíme, že hledáme pozitivně definitní a symetrickou matici \mathbf{P} . Parametr `sdp` u příkazu `cvx_begin` značí, že chceme pracovat v semidefinitním módu. Model je nastaven na výpočet LMI.

Už z toho jak jsme si zvolili matici \mathbf{A} v rovnici 3.3, tak víme, že systém bude stabilní. Jordanův kanonický tvar je specifický v tom, že na hlavní diagonále matice \mathbf{A} jsou umístěny vlastní čísla - póly systému. Vlastní čísla jsou záporná a systém je tedy stabilní. Po ukončení výpočtu toolboxu `cvx` můžeme v proměnné `cvx_status` vidět řetězec `'Solved'`, což značí, že se nám podařilo nalézt matici \mathbf{P} , která splňuje definované podmínky. Hodnoty jsou uloženy v proměnné `P` [7].

3.2 Schurova stabilita

Pokud se rozhodneme řešit stabilitu diskrétního systému, tak postupujeme obdobně jako u spojitého systému. Chceme-li určit stabilitu diskrétního systému, tak vlastní čísla matice \mathbf{E} musejí ležet uvnitř jednotkové kružnice, kterou si vykreslíme v komplexní rovině.

Stejně jako při vyšetřování Hurwitzovy stability využijeme podmínky, které vze-

šly z Lajpunovovy stability pro diskrétní systém (odvozeno v příloze A na straně 78).

Platí tedy, že autonomní diskrétní systém je stabilní, pokud se nám podaří najít symetrická, pozitivně definitní matice \mathbf{P} , pro kterou platí:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &> 0 \\ \mathbf{E}^T \mathbf{P} \mathbf{E} - \mathbf{P} &< 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Kromě těchto podmínek můžeme napsat ještě následující dvě [7]:

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} -\mathbf{P} & \mathbf{P} \mathbf{E}^T \\ \mathbf{E} \mathbf{P} & -\mathbf{P} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.5)$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} -\mathbf{P} & \mathbf{E} \mathbf{P} \\ \mathbf{P} \mathbf{E}^T & -\mathbf{P} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.6)$$

Souvislost mezi podmínkami si můžeme vyjádřit pomocí Schurova doplňku (viz. příloha A na straně 73). Pokud si vyjádříme Schurův doplněk pro prvek na pozici [1,1] v rovnici 3.5 nebo pro prvek na pozici [2,2] v rovnici 3.6, tak získáme:

$$\mathbf{M}_1 / \mathbf{A} = -\mathbf{P} - (\mathbf{E} \mathbf{P} (-\mathbf{P}^{-1}) \mathbf{P} \mathbf{E}^T) = \mathbf{E} \mathbf{P} \mathbf{E}^T - \mathbf{P} \quad (3.7)$$

Aby byly nerovnosti splněny, tak musí platit:

$$\mathbf{E} \mathbf{P} \mathbf{E}^T - \mathbf{P} < 0 \quad (3.8)$$

Tím je dokázáno, že podmínky v rovnicích 3.4, 3.5 a 3.6 jsou ekvivalentní a jedna z nich se může použít pro ověření Schurovy stability.

Nadefinujme si autonomní diskrétní systém, který má následující tvar:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{E} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.7 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (3.9)$$

Ve výpisu 3.2 je uvedeno, jak se problém dá řešit s využitím programu Matlab a toolboxu `cvx`.

Výpis 3.2: Řešení Schurovy stability v programu Matlab, pomocí toolboxu cvx

```

1 E= [-0.2 0 0 0 0; 0 -0.2 0 0 0; 0 0 -0.5 0 0; ...
2 0 0 0 -0.3 0; 0 0 0 0 -0.7]; % Nadefinování systému
3 n=size(E,1); % Řád systému
4 cvx_begin sdP % Začátek cvx
5 variable P(n,n) symmetric % Symetrická matice P
6 P>=eye(n,n)*eps % První podmínka
7 -eye(n,n)*eps>=E'*P*E-P % Druhá podmínka
8 cvx_end % Konec cvx

```

Program je podobný, jako je uvedeno na výpisu 3.1. Jediný rozdíl je ten, že jsme použili podmínky 3.4 určené pro Schurovu stabilitu. Systém, který jsme zvolili, splňoval podmínku Schurovy stability, proto byl výpočet úspěšný a podařilo se nám nalézt matici \mathbf{P} [7].

3.3 Umístění pólů v ohraničených oblastech

V předchozích podkapitolách jsme se zabývali vyšetřováním polohy pólů v souvislosti se stabilitou systému. V této podkapitole budeme vyšetřovat, zda jsou póly systému umístěny v ohraničené oblasti.

Oblast ohraničená dvěma přímkami

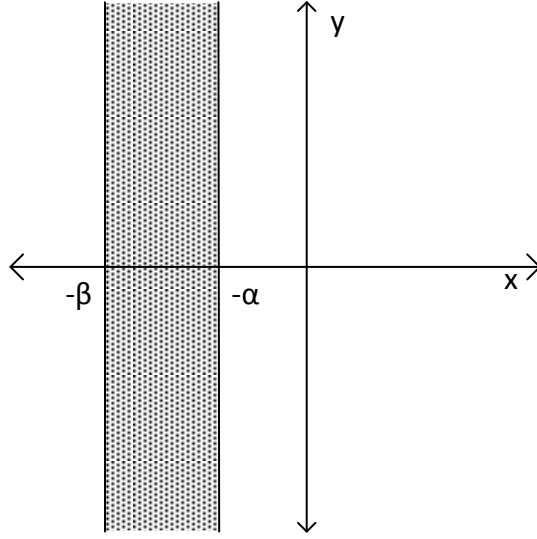
První ohraničená oblast, která nás zajímá, je plocha ohraničená dvěma přímkami, které procházejí body $-\alpha$ a $-\beta$, viz. obrázek 3.1. Vyšetřujeme situaci, kdy se reálná část pólu x může pohybovat pouze v rozmezí $-\beta < x < -\alpha$.

Ověřujeme, zda matice $(\mathbf{A} + \alpha\mathbf{I})$ a $-(\mathbf{A} + \beta\mathbf{I})$ jsou stabilní podle Hurwitzovy podmínky (viz. přičtení konstanty k vlastním číslům matice v příloze A na straně 74). Pokud do Ljapunovovy funkce dosadíme $(\mathbf{A} + \alpha\mathbf{I})$, tak získáme:

$$(\mathbf{A} + \alpha\mathbf{I})^T \mathbf{P}_\alpha + \mathbf{P}_\alpha (\mathbf{A} + \alpha\mathbf{I}) = -\mathbf{Q} \quad (3.10)$$

V případě dosazení $-(\mathbf{A} + \beta\mathbf{I})$ získáme podobnou rovnici:

$$(\mathbf{A} + \beta\mathbf{I})^T \mathbf{P}_\beta + \mathbf{P}_\beta (\mathbf{A} + \beta\mathbf{I}) = \mathbf{Q} \quad (3.11)$$



Obr. 3.1: Oblast ohraničená v komplexní rovině dvěma přímkami v bodech $-\alpha$ a $-\beta$ (přepřacováno z [7])

Musí platit:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\alpha &> 0 \\ \mathbf{P}_\beta &> 0 \\ \mathbf{P}_\alpha + \mathbf{P}_\beta &= \mathbf{P} > 0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Po úpravě dostaneme:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_\alpha + \mathbf{P}_\alpha \mathbf{A} &= -2\alpha \mathbf{P}_\alpha - \mathbf{Q} \\ \mathbf{A}^T \mathbf{P}_\beta + \mathbf{P}_\beta \mathbf{A} &= -2\beta \mathbf{P}_\beta + \mathbf{Q} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Rovnice uvedené v 3.13 sečteme a získáme:

$$\mathbf{A}^T (\mathbf{P}_\alpha + \mathbf{P}_\beta) + (\mathbf{P}_\alpha + \mathbf{P}_\beta) \mathbf{A} = -2\alpha \mathbf{P}_\alpha - 2\beta \mathbf{P}_\beta \tag{3.14}$$

Můžeme využít poslední výraz v rovnici 3.12 a rovnici upravit na:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -2\alpha \mathbf{P}_\alpha - 2\beta \mathbf{P}_\beta \tag{3.15}$$

Pokud si z rovnice 3.12 vyjádříme \mathbf{P}_α a dosadíme do rovnice 3.15, tak získáme:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + 2\alpha \mathbf{P} = 2(\alpha - \beta) \mathbf{P}_\beta \tag{3.16}$$

Jelikož vždy platí $\alpha - \beta < 0$, tak můžeme napsat:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + 2\alpha \mathbf{P} < 0 \tag{3.17}$$

Pro \mathbf{P}_β je postup obdobný, vyjádřením \mathbf{P}_β z rovnice 3.12 a dosazením do rovnice 3.15 získáme:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + 2\beta \mathbf{P} = 2(\beta - \alpha) \mathbf{P}_\alpha \quad (3.18)$$

Tím, že platí $\beta - \alpha > 0$, tak můžeme psát:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + 2\beta \mathbf{P} > 0 \quad (3.19)$$

Aby póly systému ležely v oblasti ohraničené dvěma přímkami, které procházejí body $-\alpha$ a $-\beta$, musí platit podmínky:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &> 0 \\ \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + 2\alpha \mathbf{P} &< 0 \\ \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + 2\beta \mathbf{P} &> 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Oblast ohraničená kružnicí

V dalším případě se budeme zabývat oblastí, která je ohraničená kružnicí (viz. obrázek 3.2). Nejdříve si upravíme matici \mathbf{A} a získáme $\tilde{\mathbf{A}}$:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \frac{1}{r}(\mathbf{A} + qI) \quad (3.21)$$

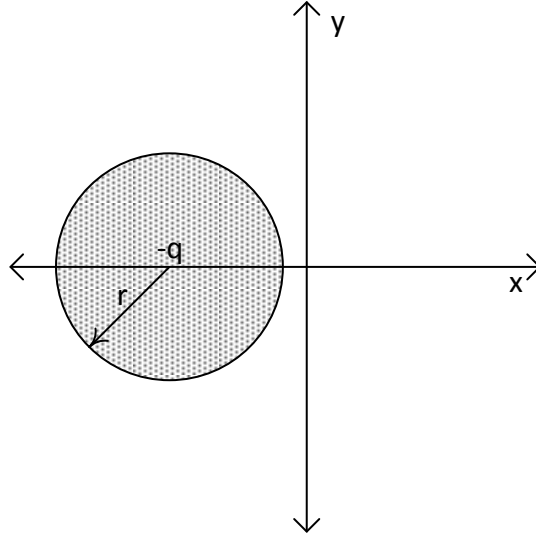
Kde r je poloměr a $-q$ je střed námi definované kružnice. Vezmeme vlastní čísla matice \mathbf{A} a položíme je do poměru s poloměrem r . Tím získáme měřítko, ve kterém posuzujeme, zda jsou vlastní čísla uvnitř jednotkové kružnice. Zároveň vlastní čísla posuneme o velikost středu q , čímž porovnáváme, zda leží v jednotkové kružnici se středem v počátku. Proto můžeme prohlásit, že pokud mají vlastní čísla matice \mathbf{A} (póly systému) ležet v oblasti ohraničené kružnicí se středem q a poloměrem r , potom musí být matice $\tilde{\mathbf{A}}$ Schurovsky stabilní.

Aby póly ležely uvnitř oblasti ohraničené kružnicí, tak musí existovat pozitivně definitní matice \mathbf{P} , která splňuje:

$$\begin{bmatrix} -r\mathbf{P} & q\mathbf{P} + \mathbf{A}\mathbf{P} \\ q\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T & -r\mathbf{P} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.22)$$

Vypočteme si Schürův doplněk pro první prvek a získáme:

$$-r\mathbf{P} - (q\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T)(-r\mathbf{P})^{-1}(q\mathbf{P} + \mathbf{A}\mathbf{P}) < 0 \quad (3.23)$$



Obr. 3.2: Oblast ohraničená v komplexní rovině kružnicí se středem v bodě $-q$ a poloměrem r (přepřacováno z [7])

Vynásobením rovnice zleva i zprava maticí \mathbf{P}^{-1} dostaneme:

$$(\mathbf{q}\mathbf{I} + \mathbf{A}^T)\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{q}\mathbf{I} + \mathbf{A}) - r^2\mathbf{P}^{-1} < 0 \quad (3.24)$$

Když do podmínky v rovnici 3.4, dosadíme za \mathbf{E} matici $\tilde{\mathbf{A}}$, získáme:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{q}\mathbf{I})^T\mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{q}\mathbf{I}) - r^2\mathbf{P} < 0. \quad (3.25)$$

Můžeme vidět, že rovnice 3.24 a 3.25 si jsou podobné. V obou případech hledáme symetrickou matici, která je pozitivně definitní. Jedná se ale o dvě rozdílné matice, které mohou mít různé hodnoty. Pro vyšetření toho, zda póly leží uvnitř oblasti ohraničené kružnicí se tedy může použít rovnice 3.22 nebo 3.25.

Oblast ohraničená obecným tvarem

Můžeme mít obecně popsané oblasti, ve kterých vyšetřujeme umístění pólů systému, nazývané LMI oblastmi. Pro LMI oblast \mathbb{D} platí:

$$\mathbb{D} = \{\mathbf{s} \mid \mathbf{s} \in \mathbb{C}, \mathbf{L} + \mathbf{s}\mathbf{M} + \bar{\mathbf{s}}\mathbf{M}^T < 0\} \quad (3.26)$$

Komplexní číslo \mathbf{s} leží uvnitř LMI oblasti \mathbb{D} , pokud existují matice $\mathbf{L} \in \mathbb{S}^m$ a $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, které splňují podmínku:

$$F_{\mathbb{D}}(\mathbf{s}) = \mathbf{L} + \mathbf{s}\mathbf{M} + \bar{\mathbf{s}}\mathbf{M}^T < 0 \quad (3.27)$$

Funkci $F_{\mathbb{D}}(\mathbf{s})$ nazýváme charakteristickou funkcí pro LMI oblast $\mathbb{D}_{(L,M)}$.

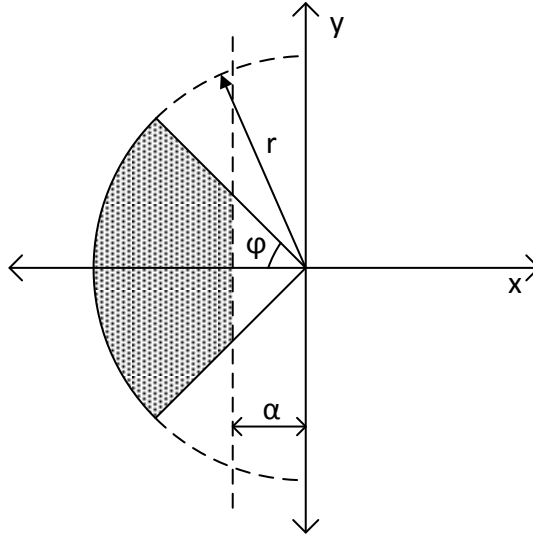
Aby vlastní čísla matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ležely v LMI oblasti $\mathbb{D}_{(L,M)}$, tak musí existovat pozitivně definitní matice \mathbf{P} , která splňuje:

$$R_{\mathbb{D}}(\mathbf{A}, \mathbf{P}) = \mathbf{L} \otimes \mathbf{P} + \mathbf{M} \otimes (\mathbf{A}\mathbf{P}) + \mathbf{M}^T \otimes (\mathbf{A}\mathbf{P})^T < 0 \quad (3.28)$$

Kde \otimes je Kroneckerův součin (viz. příloha A na straně 74).

Mějme následující LMI oblast (viz. obrázek 3.3):

$$\mathbb{S}(\alpha, r, \varphi) = \{(x, y) \mid x < -\alpha < 0, |x + jy| < r, |y| < -x \tan \varphi\} \quad (3.29)$$



Obr. 3.3: LMI oblast $\mathbb{S}(\alpha, r, \varphi)$ v komplexní rovině (přepřacováno z [7])

Aby póly systému ležely uvnitř oblasti $\mathbb{S}(\alpha, r, \varphi)$, tak musí splňovat podmínky:

$$\begin{aligned} 2\alpha\mathbf{P} + \mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T &< 0 \\ \begin{bmatrix} -r\mathbf{P} & \mathbf{A}\mathbf{P} \\ \mathbf{P}\mathbf{A}^T & -r\mathbf{P} \end{bmatrix} &< 0 \\ \begin{bmatrix} (\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T)\sin\varphi & (\mathbf{A}\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{A}^T)\cos\varphi \\ (\mathbf{P}\mathbf{A}^T - \mathbf{A}\mathbf{P})\cos\varphi & (\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T)\sin\varphi \end{bmatrix} &< 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

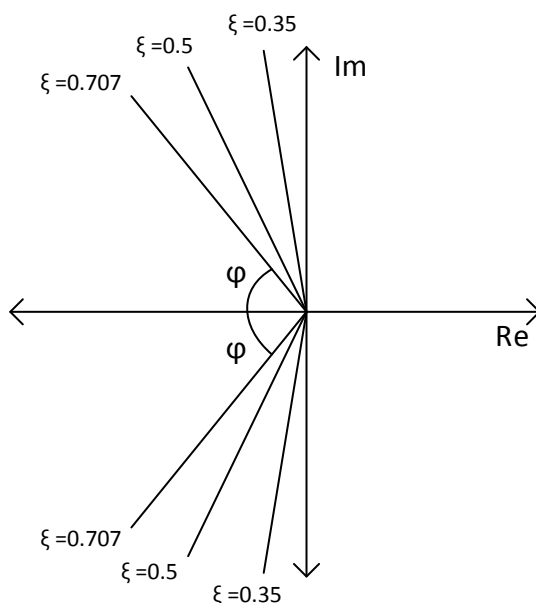
Oblast $\mathbb{S}(\alpha, r, \varphi)$ si definujeme v souvislosti se spojitém systémem a koeficientem tlumení systému. Mějme systém 2 řádu, který má operátorový přenos definovaný

$$F(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1}, \quad (3.31)$$

kde K je zesílení systému, T je časová konstanta systému a ξ je koeficient tlumení systému ($0 < \xi < 1$).

Na Obr. 3.4 jsou zobrazeny tlumící křivky spojitého systému, které můžeme popsat rovnicemi

$$\begin{aligned} y &= -x \operatorname{tg} \varphi && \text{pro horní část grafu} \\ y &= x \operatorname{tg} \varphi && \text{pro spodní část grafu} \end{aligned} \quad (3.32)$$



Obr. 3.4: Tlumící křivky v komplexní rovině pro spojitý systém (přepřacováno z [23])

Koeficient tlumení lze také určit jako

$$\xi = \cos(\varphi) \quad (3.33)$$

V další části práce si nadefinujeme stavový regulátor, kterým budeme přesouvat póly systému do oblasti $\mathbb{S}(\alpha, r, \varphi)$. Tím zároveň nastavíme koeficient tlumení systému a případně omezíme kmitání přechodové charakteristiky. Umístíme-li póly do oblasti definované úhlem φ , můžeme prohlásit, že je koeficient tlumení nastaven minimálně na hodnotu $\cos(\varphi)$ a vyšší.

Oblast ohraničená elipsou

U diskrétního systému mají tlumící křivky jiný tvar. Koeficientem tlumení diskrétního systému a nahrazením vhodnými LMI oblastmi se zabývá zdroj [23]. My si

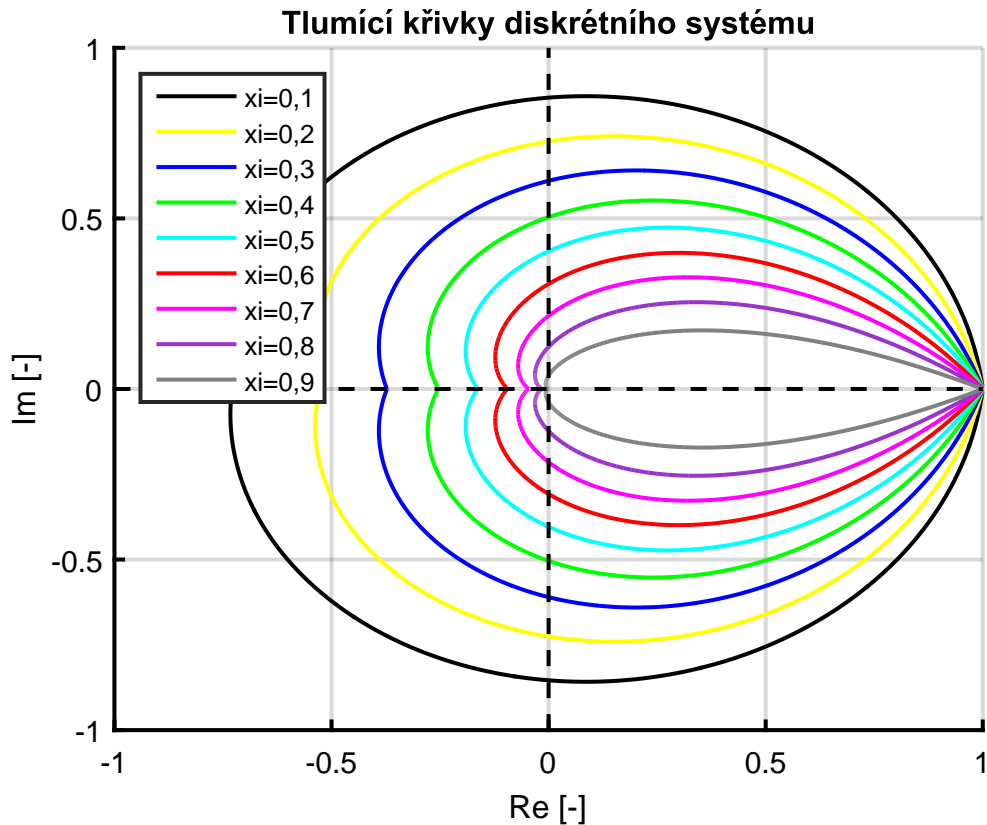
objasníme pouze základy, které budeme potřebovat pro odvození stavového regulátoru.

Vlivem diskretizace, kdy spojité póly ($s = a \pm jb$) systému nahradíme

$$z = e^{sT} = e^{(a \pm jb)T} = e^{aT} e^{(\pm jbT)}, \quad (3.34)$$

kde T je vzorkovací frekvence, se tlumící křivky přemapují na nekonvexní křivky.

Na Obr. 3.5 je zobrazeno uspořádání tlumících křivek pro diskretní systém v komplexní rovině.



Obr. 3.5: Tlumící křivky v komplexní rovině pro diskretní systém

Ekvivalentní křivku tlumení pro spojité systém lze určit z koeficientu tlumení

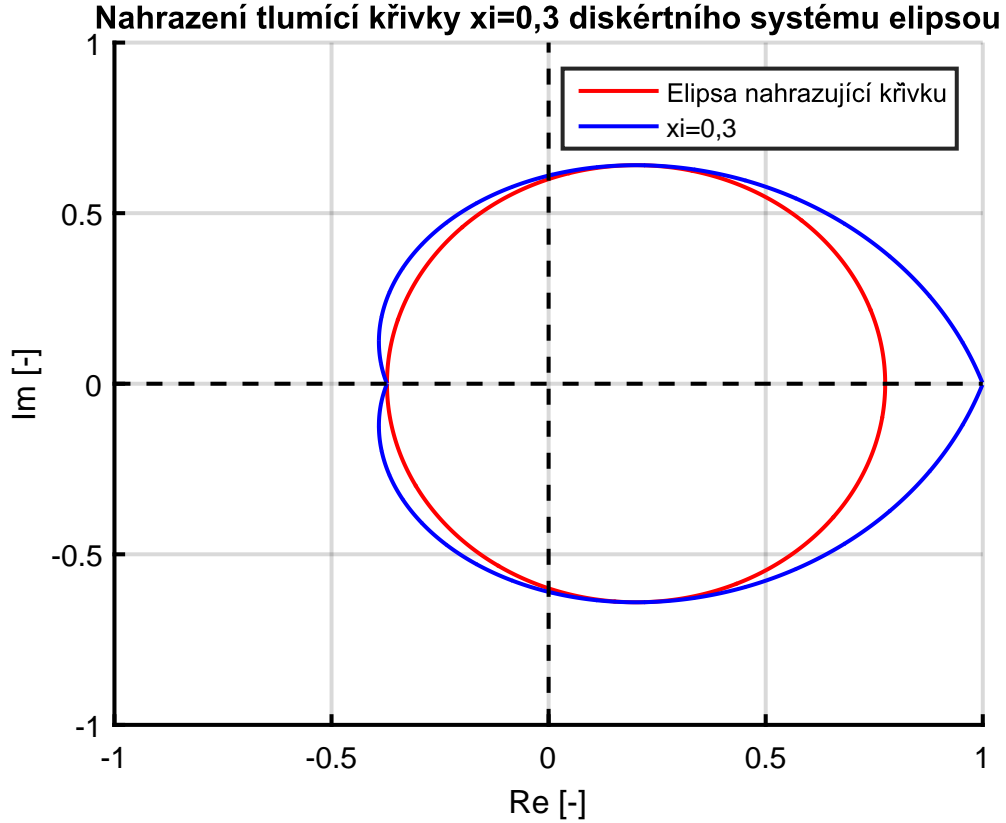
$$\varphi = \arccos(\xi). \quad (3.35)$$

Pro tlumící křivky diskretního systému platí (převzato z [23]):

$$\begin{aligned} x &= e^t \cos(\operatorname{tg}(\varphi)t) \\ y &= e^t \sin(\operatorname{tg}(\varphi)t) \quad \text{pro horní část grafu} \\ y &= -e^t \sin(\operatorname{tg}(\varphi)t) \quad \text{pro spodní část grafu} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Kde $t = xT$ a platí, že $t \in (-\frac{\pi}{\operatorname{tg}(\varphi)}, 0)$.

Jelikož se jedná o nekonvexní křivky, tak při vyšetřování umístění pólů i při dalších operacích budeme tyto křivky nahrazovat elipsami. Na Obr. 3.6 je zobrazena náhrada tlumící křivky $\xi=0,3$ (což odpovídá úhlu φ kolem 72°) elipsou, která je vepsána uvnitř křivky a levou stranou se dotýká tlumící křivky.



Obr. 3.6: Tlumící křivky $\xi = 0,3$ v komplexní rovině pro diskrétní systém nahrazená elipsou

Aby póly ležely uvnitř oblasti ohraničenou elipsou, musí být splněna následující LMI ([23])

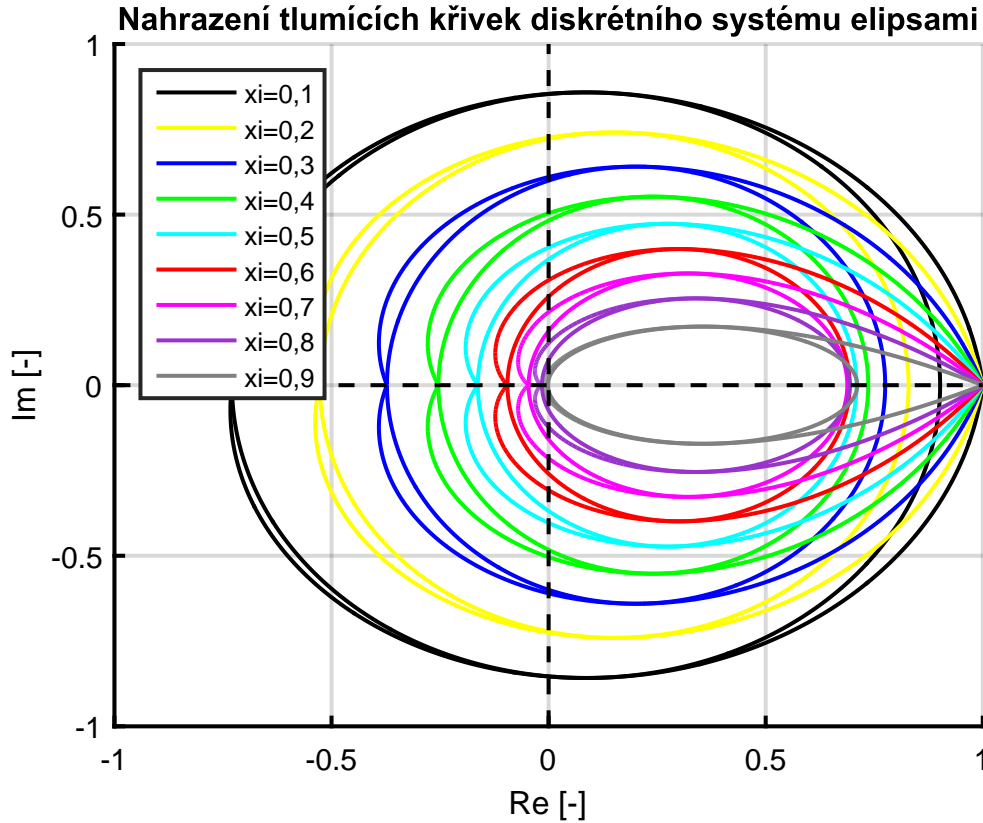
$$\begin{bmatrix} -\mathbf{P} & -cx_{max}\mathbf{P} + \frac{c-d}{2}\mathbf{P}\mathbf{A} + \frac{c+d}{2}\mathbf{A}^T\mathbf{P} \\ -cx_{max}\mathbf{P} + \frac{c+d}{2}\mathbf{P}\mathbf{A} + \frac{c-d}{2}\mathbf{A}^T\mathbf{P} & -\mathbf{P} \end{bmatrix} \leq 0. \quad (3.37)$$

Kde platí, že x_{max} je střed elipsy a konstanty se určí jako

$$\begin{aligned} x_{max} &= \exp\left(-\frac{\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}\right)\cos(-\varphi) \\ c &= \frac{1}{\exp\left(-\frac{\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}\right)\cos(-\varphi) + \exp\left(-\frac{\pi}{\operatorname{tg}\varphi}\right)} \\ d &= \frac{1}{\exp\left(-\frac{\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}\right)\sin(-\varphi)} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Všechny výpočty s úhly jsou provedeny v jednotkách radián.

Na Obr. 3.7 je zobrazeno nahrazení tlumících křivek uvedených na Obr. 3.5 elipsami.



Obr. 3.7: Tlumící křivky v komplexní rovině pro diskrétní systém nahrazené elipsami

Nyní můžeme v následující podkapitole navrhnout stavový regulátor, který zaručí posunutí pólů diskrétního systému do elipsy. Posunutím pólů systému nastavíme koeficient tlumení minimálně na hodnotu křivky, kterou jsme nahradili elipsou.

3.4 Stavový regulátor pomocí LMI

S pomocí LMI se nemusí pouze ověřovat stabilita systému nebo zda póly leží v zadané oblasti. Můžeme si odvodit LMI pro stavový regulátor, který provede přesunutí pólů do levé poloroviny komplexní roviny, případně do ohraničených oblastí. Na stranách 78 a 79 přílohy A je uvedena teorie ohledně stavového regulátoru a přidání integrátoru na vstup soustavy k dosažení nulové ustálené odchylky na výstupu

soustavy. Pro následující rovnice uvažujme spojitý systém definovaný

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_u\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}.\end{aligned}\tag{3.39}$$

Vezmeme-li si Hurwitzovu podmínku, tak jak jsme ji nadefinovali v rovnici 3.2, tak po vynásobení zleva i zprava \mathbf{P}^{-1} získáme na levé straně nerovnice:

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\tag{3.40}$$

Zavedením vektoru \mathbf{K} , kterým můžeme ovlivňovat charakteristický polynom, získáme novou matici zpětných vazeb:

$$\mathbf{A}^* = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\tag{3.41}$$

Tím jak se mění koeficienty charakteristického polynomu, tak se mění i vlastní čísla matice \mathbf{A} .

Dosazením matice \mathbf{A}^* za matici \mathbf{A} do rovnice 3.40 získáme:

$$\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^T + (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{P}^{-1}\tag{3.42}$$

Pro zjednodušení zápisu zavedeme substituci $\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P}^{-1}$ a po upravení dostaneme výraz:

$$\hat{\mathbf{P}}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\hat{\mathbf{P}} - \hat{\mathbf{P}}\mathbf{K}^T\mathbf{B}^T - \mathbf{B}\mathbf{K}\hat{\mathbf{P}}\tag{3.43}$$

Figuruje zde ale součin $\mathbf{K}\hat{\mathbf{P}}$, což jsou pro nás dvě neznámé matice. Tím jsme dostali nelineární maticovou nerovnost. Proto (s využitím $\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{P}}^T$) můžeme zavést substituci, kterou získáme opět lineární maticovou nerovnost:

$$\mathbf{W} = \mathbf{K}\hat{\mathbf{P}}\tag{3.44}$$

Po zavedení substituce dostaneme podmínky:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{P}} &> 0 \\ \hat{\mathbf{P}}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\hat{\mathbf{P}} - \mathbf{W}^T\mathbf{B}^T - \mathbf{B}\mathbf{W} &< 0\end{aligned}\tag{3.45}$$

Pokud se nám podaří nalézt pozitivně definitní matici $\hat{\mathbf{P}}$ a vektor \mathbf{W} , který splňuje výše uvedenou podmínku, tak můžeme z rovnice 3.44 vyjádřit vektor \mathbf{K} , kterým posuneme póly systému do levé poloroviny komplexní roviny.

Pro posunutí pólů do ohraničených oblastí, které jsou v levé polorovině komplexní roviny, platí následující podmínky, které lze obdobně odvodit.

Pro posunutí pólů do ohraničené oblasti dvěma rovnoběžnými přímkami, které procházejí body $-\alpha$ a $-\beta$, dosadíme \mathbf{A}^* do rovnic uvedených v rovnici 3.20 a upravíme

je. Abychom problém úspěšně vyřešili, tak musí existovat pozitivně definitní matice $\hat{\mathbf{P}}$ ($\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P}^{-1}$) a vektor \mathbf{W} , splňující podmínky:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\hat{\mathbf{P}} + \hat{\mathbf{P}}\mathbf{A}^T - \mathbf{B}\mathbf{W} - \mathbf{W}^T\mathbf{B}^T + 2\alpha\hat{\mathbf{P}} &< 0 \\ -\mathbf{A}\hat{\mathbf{P}} - \hat{\mathbf{P}}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{W} + \mathbf{W}^T\mathbf{B}^T - 2\beta\hat{\mathbf{P}} &< 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

Pro posunutí pólů do ohraničené oblasti kružnicí se středem $-q$ a poloměrem r dosadíme \mathbf{A}^* do rovnice 3.22 a upravíme. Abychom problém úspěšně vyřešili, tak musí existovat pozitivně definitní matice $\hat{\mathbf{P}}$ ($\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P}$) a vektor \mathbf{W} , splňující podmínky:

$$\begin{bmatrix} -r\hat{\mathbf{P}} & q\hat{\mathbf{P}} + \mathbf{A}\hat{\mathbf{P}} - \mathbf{B}\mathbf{W} \\ q\hat{\mathbf{P}} + \mathbf{A}\hat{\mathbf{P}}^T - \mathbf{W}^T\mathbf{B}^T & -r\hat{\mathbf{P}} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.47)$$

Pro posunutí pólů do LMI oblasti $\mathbb{S}(\alpha, r, \varphi)$ nadefinované v rovnici 3.29 dosadíme \mathbf{A}^* do rovnice 3.30 a upravíme. Abychom problém úspěšně vyřešili, tak musí existovat pozitivně definitní matice $\hat{\mathbf{P}}$ ($\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P}$) a vektor \mathbf{W} , splňující podmínky:

$$\begin{aligned} 2\alpha\hat{\mathbf{P}} + \mathbf{A}\hat{\mathbf{P}} + \hat{\mathbf{P}}\mathbf{A}^T - \mathbf{B}\mathbf{W} - \mathbf{W}^T\mathbf{B}^T &< 0 \\ \begin{bmatrix} -r\hat{\mathbf{P}} & \mathbf{A}\hat{\mathbf{P}} - \mathbf{B}\mathbf{W} \\ \hat{\mathbf{P}}\mathbf{A}^T - \mathbf{W}^T\mathbf{B}^T & -r\hat{\mathbf{P}} \end{bmatrix} &< 0 \\ \begin{bmatrix} (\mathbf{A}\hat{\mathbf{P}} + \hat{\mathbf{P}}\mathbf{A}^T - \mathbf{W}^T\mathbf{B}^T - \mathbf{B}\mathbf{W})\sin\varphi & (\mathbf{A}\hat{\mathbf{P}} - \hat{\mathbf{P}}\mathbf{A}^T - \mathbf{B}\mathbf{W} + \mathbf{W}^T\mathbf{B}^T)\cos\varphi \\ (\hat{\mathbf{P}}\mathbf{A}^T - \mathbf{A}\hat{\mathbf{P}} - \mathbf{W}^T\mathbf{B}^T + \mathbf{B}\mathbf{W})\cos\varphi & (\mathbf{A}\hat{\mathbf{P}} + \hat{\mathbf{P}}\mathbf{A}^T - \mathbf{W}^T\mathbf{B}^T - \mathbf{B}\mathbf{W})\sin\varphi \end{bmatrix} &< 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

Pro posunutí pólů do oblasti ohraničené elipsou dosadíme \mathbf{A}^* do rovnice 3.37 a upravíme. Abychom problém úspěšně vyřešili, tak musí existovat pozitivně definitní matice $\hat{\mathbf{P}}$ ($\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P}^{-1}$) a vektor \mathbf{W} , splňující LMI:

$$\begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{P}} & -cx_{max}\hat{\mathbf{P}} + \frac{c-d}{2}(\mathbf{A}\hat{\mathbf{P}} - \mathbf{B}\mathbf{W}) \\ -cx_{max}\hat{\mathbf{P}} + \frac{c+d}{2}(\mathbf{A}\hat{\mathbf{P}} - \mathbf{B}\mathbf{W}) & +\frac{c+d}{2}(\hat{\mathbf{P}}\mathbf{A}^T - \mathbf{W}^T\mathbf{B}^T) \\ +\frac{c-d}{2}(\hat{\mathbf{P}}\mathbf{A}^T - \mathbf{W}^T\mathbf{B}^T) & -\hat{\mathbf{P}} \end{bmatrix} \leq 0. \quad (3.49)$$

V případě posunutí pólů do ohraničené oblasti kružnicí nebo do LMI oblasti si můžeme všimnout, že jako substituci jsme použili $\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P}$ místo $\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P}^{-1}$. To si můžeme dovolit, protože podmínky v rovnici 3.22 pro kružnici a podmínky v rovnici 3.30 pro LMI oblast $\mathbb{S}(\alpha, r, \varphi)$ byly nadefinovány příznivěji pro substituci vektorem \mathbf{W} , než tomu bylo při posunutí pólů do levé poloroviny, do ohraničené oblasti dvěma rovnoběžnými přímkami nebo do elipsy.

Ve všech případech platí, že po vypočítání vektoru \mathbf{W} si můžeme vyjádřit vektor zpětných vazeb od stavů \mathbf{K} jako:

$$\mathbf{K} = \mathbf{W}\hat{\mathbf{P}}^{-1} \quad (3.50)$$

Poté můžeme dopočítat novou matici zpětných vazeb podle výrazu 3.41 [6, 7, 27].

4 DEFINICE \mathcal{H}_∞ NORMY POMOCÍ LMI

V předchozích kapitolách jsme se zabývali návrhem stavového regulátoru založeného pouze na posunutí pólů. Vyžadovali jsme umístění pólů v zadané oblasti, nebo jsme chtěli stabilizovat zadanou soustavu. Návrhem regulátoru jsme ale nemohli kontrolovat to, jak bude přechodová charakteristika systému vypadat a jaké bude mít vlastnosti. Abychom mohli ovlivňovat tvar přechodové charakteristiky (rychlost přechodové charakteristiky, velikost překmitu apod.), nebo maximální zesílení soustavy, tak musíme definovat další podmínky, které toto budou řešit.

Stavový popis spojitého systému můžeme zapsat jako:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Stavový popis diskrétního systému si vyjádříme obdobně:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{E}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k).\end{aligned}\tag{4.2}$$

4.1 Normy signálu a systému

U signálů rozeznáváme 3 druhy norem. Jedná se o 1-normu, 2-normu a ∞ -normu[16].

1-normu signálu můžeme definovat jako integrál absolutní hodnoty signálu $\mathbf{u}(t)$

$$\|\mathbf{u}\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{u}(t)| dt.\tag{4.3}$$

2-normu signálu (\mathcal{L}_2) můžeme definovat jako druhou odmocninu integrálu druhé mocniny signálu $\mathbf{u}(t)$

$$\|\mathbf{u}\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}(t)^2 dt}.\tag{4.4}$$

∞ -normu signálu (\mathcal{L}_∞) můžeme definovat jako nejmenší horní hranici velikosti - supremum signálu $\mathbf{u}(t)$

$$\|\mathbf{u}\|_\infty = \sup_t |\mathbf{u}(t)|.\tag{4.5}$$

Pro přenosovou funkci systému G můžeme definovat 2-normu a ∞ -normu[16].

2-normu systému (\mathcal{H}_2) definujeme obdobně jako 2-normu signálu

$$\|G\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega}.\tag{4.6}$$

∞ -norma systému (\mathcal{H}_∞) vyjadřuje supremum zesílení na frekvenční charakteristice

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega} |G(j\omega)|. \quad (4.7)$$

Tím můžeme ovlivňovat maximální zesílení systému, které je mezi vstupním signálem $\mathbf{u}(t)$ a výstupním signálem $\mathbf{y}(t)$. Definujeme si maximum na frekvenční charakteristice, které chceme, aby systém maximálně měl a které označíme γ . Potom musí platit

$$\|G\|_\infty < \gamma \quad (4.8)$$

Tím jsme \mathcal{H}_∞ normu omezili, že může být vždy menší než je námi definované γ . \mathcal{H}_∞ normu systému systému můžeme nahradit podílem \mathcal{L}_2 signálů a získáme

$$\sup_{\|\mathbf{u}\|_2 \neq 0} \frac{\|\mathbf{y}\|_2}{\|\mathbf{u}\|_2} < \gamma. \quad (4.9)$$

\mathcal{L}_2 normu signálu si můžeme upravit do následujícího tvaru, který využijeme při dalších výpočtech

$$\|u\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}(t)^2 dt} = \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{u}}. \quad (4.10)$$

Novým tvarem provedeme nahrazení obou \mathcal{L}_2 norm v rovnici 4.9. Následně můžeme obě strany rozšířit druhou mocninou a výraz upravit, abychom se zbavili zlomku

$$\|\mathbf{y}\|_2^2 < \gamma^2 \|\mathbf{u}\|_2^2. \quad (4.11)$$

Tím dojde ke zrušení druhé odmocniny v definici \mathcal{L}_2 normy signálu a můžeme psát

$$0 < \gamma^2 \mathbf{u}^T \mathbf{u} - \mathbf{y}^T \mathbf{y}. \quad (4.12)$$

\mathcal{H}_∞ normu můžeme využít při vyšetřování stability přenosu z pohledu BIBO (z anglického originálu - *Bounded Input Bounded Output*). BIBO stabilita přenosu je definována: *Přenos je BIBO stabilní právě, když odezva na každý omezený vstupní signál je také omezená*[26]. Proto pokud nalezneme \mathcal{H}_∞ normu, tak existuje omezené maximální zesílení systému na všech frekvencích, a proto bude i odezva systému omezená.

4.2 LMI pro výpočet \mathcal{H}_∞ normy spojitého systému

LMI pro výpočet \mathcal{H}_∞ normy spojitého systému získáme, pokud spojíme Ljapunovo kritérium a supply funkci systému $s(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t))$. Ljapunova funkce $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ popisuje vnitřní energii systému. Supply funkce popisuje, jak vstupní signál $\mathbf{u}(t)$ a výstupní signál $\mathbf{y}(t)$ ovlivňují změnu energie systému. Stabilní systém musí být disipativní - jeho vnitřní energie musí postupně klesat a nebo být konstantní. Pro disipativní systém musí platit následující rovnice [2]:

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}(t_1)) \leq \mathbf{V}(\mathbf{x}(0)) + \int_0^{t_1} s(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t)) dt. \quad (4.13)$$

Pokud rovnici 4.13 zderivujeme, tak dostaneme

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}(t_1)) - s(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t)) \leq 0, \quad (4.14)$$

kde platí

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}(t_1)) &= \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} \\ s(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t)) &= \gamma^2 \mathbf{u}^T \mathbf{u} - \mathbf{y}^T \mathbf{y}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Supply funkce může mít několik tvarů, ale musí platit, že $s(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t)) \geq 0$. My jsme zvolili tvar, který jsme si odvodili v souvislosti s \mathcal{H}_∞ normou systému. Výrazy v rovnici 4.15 dosadíme do rovnice 4.14 a získáme

$$\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} - (\gamma^2 \mathbf{u}^T \mathbf{u} - \mathbf{y}^T \mathbf{y}) \leq 0. \quad (4.16)$$

Dosažením stavových rovnic systému, které jsou uvedeny v rovnici 4.1 můžeme rovnici 4.16 postupně upravovat, abychom získali LMI pro \mathcal{H}_∞ normu systému.

$$(\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u})^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}) + (\mathbf{C} \mathbf{x})^T (\mathbf{C} \mathbf{x}) - \gamma^2 \mathbf{u}^T \mathbf{u} \leq 0 \quad (4.17)$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{x}^T \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{x} - \gamma^2 \mathbf{u}^T \mathbf{u} \leq 0 \quad (4.18)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^T & \mathbf{u}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{x} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x} - \gamma^2 \mathbf{u} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.19)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^T & \mathbf{u}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} & \mathbf{P} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{P} & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.20)$$

O tom, zda je výraz v rovnici 4.20 negativně definitní, rozhoduje prostřední člen. Ten si vhodně upravíme do tvaru, ve kterém dojde k rozdělení prvků, které jsou násobené neznámou maticí \mathbf{P} a ostatních členů.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{P} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{P} & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.21)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{P} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{P} & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{I} [\mathbf{C} \quad \mathbf{0}] \leq 0 \quad (4.22)$$

Použitím zpětného Schurova doplňku dostaneme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{P} \mathbf{B} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{B}^T \mathbf{P} & -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.23)$$

Pro zavedení stavové zpětné vazby musíme LMI v rovnici 4.23 rozšířit vhodně zvolenou maticí

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}_2 \mathbf{A} & \mathbf{P} \mathbf{B} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{B}^T \mathbf{P} & -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0. \quad (4.24)$$

Abychom v LMI nepočítali s inverzí matice \mathbf{P} , tak si zavedeme substituci $\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P}^{-1}$ a získáme

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}} \mathbf{A}^T + \mathbf{A} \hat{\mathbf{P}} & \mathbf{B} & \hat{\mathbf{P}} \mathbf{C}^T \\ \mathbf{B}^T & -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} \hat{\mathbf{P}} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0. \quad (4.25)$$

Tím jsme si odvodili LMI pro zjištění \mathcal{H}_∞ normy systému mezi vstupním signálem \mathbf{u} a výstupním signálem \mathbf{y} . Odvození LMI pro návrh spojitého stavového regulátoru, který bude minimalizovat \mathcal{H}_∞ normu mezi žádanou hodnotou \mathbf{w} a výstupní veličinou \mathbf{y} a bude mít nulovou ustálenou odchylku na výstupu, provedeme na následující stavový popis systému, který jsme získali po přidání zpětné stavové vazby a integrátoru na vstup systému

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}_u \mathbf{K} & -\mathbf{B}_u \mathbf{K}_i \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_i \end{bmatrix} + \mathbf{B}_w w$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_i \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Nyní si můžeme do rovnice 4.25 dosadit stavovou zpětnou vazbu, kdy si matici \mathbf{A} nahradíme členem ve tvaru $(\mathbf{A} - \mathbf{B}_u \mathbf{K})$ a matici \mathbf{C} rozšíříme o stav integrátoru a získáme $\hat{\mathbf{C}} = [\mathbf{C} \ 0]$. Po dosazení dostaneme

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{A} - \mathbf{B}_u \mathbf{K})^T + (\mathbf{A} - \mathbf{B}_u \mathbf{K}) \hat{\mathbf{P}} & \mathbf{B}_w & \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{C}}^T \\ \mathbf{B}_w^T & -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{P}} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0. \quad (4.27)$$

Zavedením substituce $\mathbf{W} = \mathbf{K} \hat{\mathbf{P}}$ získáme LMI pro spojitý stavový regulátor minimalizující \mathcal{H}_∞ normu mezi žádanou hodnotou \mathbf{w} a výstupem soustavy \mathbf{y} a s ustálenou

nulovou odchylkou na výstupu soustavy.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\hat{\mathbf{P}} + \hat{\mathbf{P}}\mathbf{A}^T - \mathbf{B}_u\mathbf{W} - \mathbf{W}^T\mathbf{B}_u^T & \mathbf{B}_w & \hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{C}}^T \\ & \mathbf{B}_w^T & -\gamma^2\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ & \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{P}} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0. \quad (4.28)$$

4.3 LMI pro výpočet \mathcal{H}_∞ normy diskrétního systému

Při odvození LMI pro výpočet \mathcal{H}_∞ normy diskrétního systému spojujeme, stejně jako u spojitého systému, rovnici pro Ljapunovskou stabilitu a supply funkci systému $\mathbf{s}(\mathbf{u}(k), \mathbf{y}(k))$. Dostáváme rovnici

$$[\mathbf{V}(\mathbf{x}(k+1)) - \mathbf{V}(\mathbf{x}(k))] \leq \mathbf{s}(\mathbf{u}(k), \mathbf{y}(k)). \quad (4.29)$$

Do rovnice si za jednotlivé členy můžeme dosadit

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\mathbf{x}(k+1)) &= \mathbf{x}^T(k+1)\mathbf{P}\mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{V}(\mathbf{x}(k)) &= \mathbf{x}^T(k)\mathbf{P}\mathbf{x}(k) \\ \mathbf{s}(\mathbf{u}, \mathbf{y}) &= \gamma^2\mathbf{u}^T(k)\mathbf{u}(k) - \mathbf{y}^T(k)\mathbf{y}(k) \end{aligned} \quad (4.30)$$

a upravit ji do tvaru

$$[\mathbf{x}^T(k+1)\mathbf{P}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^T(k)\mathbf{P}\mathbf{x}(k)] - [\gamma^2\mathbf{u}^T(k)\mathbf{u}(k) - \mathbf{y}^T(k)\mathbf{y}(k)] \leq 0. \quad (4.31)$$

Nyní můžeme dosadit rovnice diskrétního systému a postupně odvodit LMI rovnici pro \mathcal{H}_∞ normu diskrétního systému.

$$\begin{aligned} &(\mathbf{x}^T(k)\mathbf{E}^T + \mathbf{u}^T(k)\mathbf{B}^T)\mathbf{P}(\mathbf{E}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) - \mathbf{x}^T(k)\mathbf{P}\mathbf{x}(k) + \\ &(\mathbf{x}^T(k)\mathbf{C}^T)(\mathbf{C}\mathbf{x}(k)) - \gamma^2\mathbf{u}^T(k)\mathbf{u}(k) \leq 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

Stavový vektor $\mathbf{x}(k)$ i vstupní vektor $\mathbf{u}(k)$ budeme uvažovat v aktuálním kroku k , proto již označení kroku nemusíme v rovnicích psát.

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}^T\mathbf{E}^T\mathbf{P}\mathbf{E}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{E}^T\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{u}^T\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{E}\mathbf{x} + \\ &\mathbf{u}^T\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{x} - \gamma^2\mathbf{u}^T\mathbf{u} \leq 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^T & \mathbf{u}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}^T\mathbf{P}\mathbf{E}\mathbf{x} + \mathbf{E}^T\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{x} \\ \mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{E}\mathbf{x} + \mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{u} - \gamma^2\mathbf{u} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.34)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^T & \mathbf{u}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}^T\mathbf{P}\mathbf{E} - \mathbf{P} + \mathbf{C}^T\mathbf{C} & \mathbf{E}^T\mathbf{P}\mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{E} & \mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{B} - \gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.35)$$

O definitnosti LMI rozhoduje prostřední člen, proto krajní vektory můžeme z rovnice vypustit. Pro každý prvek matice provedeme zpětný Schurův doplněk.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^T \mathbf{P} \mathbf{E} - \mathbf{P} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} &= -\mathbf{P} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} - \mathbf{E}^T (-\mathbf{P}) \mathbf{E} = \begin{bmatrix} -\mathbf{P} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} & \mathbf{E}^T \\ \mathbf{E} & -\mathbf{P}^{-1} \end{bmatrix} \\
\mathbf{E}^T \mathbf{P} \mathbf{B} &= -\mathbf{E}^T (-\mathbf{P}) \mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}^T \\ \mathbf{B} & -\mathbf{P}^{-1} \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{E} &= -\mathbf{B}^T (-\mathbf{P}) \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{E} & -\mathbf{P}^{-1} \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} - \gamma^2 \mathbf{I} &= -\gamma^2 \mathbf{I} - \mathbf{B}^T (-\mathbf{P}) \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & -\mathbf{P}^{-1} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Jednotlivé prvky prostřední matice v rovnici 4.35 nahradíme dílčími maticemi, které jsme získali ve skupině rovnic 4.36, a dostaneme

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{P} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} & \mathbf{E}^T & \mathbf{0} & \mathbf{E}^T \\ \mathbf{E} & -\mathbf{P}^{-1} & \mathbf{B} & -\mathbf{P}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^T & -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{E} & -\mathbf{P}^{-1} & \mathbf{B} & -\mathbf{P}^{-1} \end{bmatrix} \leq 0. \tag{4.37}$$

Jelikož se nám v LMI vyskytuje \mathbf{P} společně s \mathbf{P}^{-1} , tak musíme provést úpravu, abychom pracovali pouze s \mathbf{P}^{-1} .

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{P} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} & \mathbf{E}^T & \mathbf{0} & \mathbf{E}^T \\ \mathbf{E} & -\mathbf{P}^{-1} & \mathbf{B} & -\mathbf{P}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^T & -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{E} & -\mathbf{P}^{-1} & \mathbf{B} & -\mathbf{P}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0. \\
\begin{bmatrix} -\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{P}^{-1} & \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}^T & \mathbf{0} & \mathbf{P}^{-1} \mathbf{E}^T \\ \mathbf{E} \mathbf{P}^{-1} & -\mathbf{P}^{-1} & \mathbf{B} & -\mathbf{P}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^T & -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{E} \mathbf{P}^{-1} & -\mathbf{P}^{-1} & \mathbf{B} & -\mathbf{P}^{-1} \end{bmatrix} \leq 0.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Zavedeme substituci

$$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P}^{-1}. \tag{4.39}$$

V prvním členu prvního řádku matice v rovnici 4.38 máme výraz $\hat{\mathbf{P}} \mathbf{C}^T \mathbf{C} \hat{\mathbf{P}}$, který chceme odstranit, abychom neměli nelineární maticovou nerovnost. Provedeme proto

rozdělení matice a následnou úpravu

$$\begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{P}} & \hat{\mathbf{P}}\mathbf{E}^T & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{P}}\mathbf{E}^T \\ \mathbf{E}\hat{\mathbf{P}} & -\hat{\mathbf{P}} & \mathbf{B} & -\hat{\mathbf{P}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^T & -\gamma^2\mathbf{I} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{E}\hat{\mathbf{P}} & -\hat{\mathbf{P}} & \mathbf{B} & -\hat{\mathbf{P}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}\mathbf{C}^T\mathbf{C}\hat{\mathbf{P}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.40)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}\mathbf{C}^T\mathbf{C}\hat{\mathbf{P}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}\mathbf{C}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}\hat{\mathbf{P}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.41)$$

Součin přičteme k první matici v rovnici 4.40. Ze vzniklého výrazu můžeme znovu udělat zpětný Schurův doplněk a dostaneme

$$\begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{P}} & \hat{\mathbf{P}}\mathbf{E}^T & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{P}}\mathbf{E}^T & \hat{\mathbf{P}}\mathbf{C}^T & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{E}\hat{\mathbf{P}} & -\hat{\mathbf{P}} & \mathbf{B} & -\hat{\mathbf{P}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^T & -\gamma^2\mathbf{I} & \mathbf{B}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{E}\hat{\mathbf{P}} & -\hat{\mathbf{P}} & \mathbf{B} & -\hat{\mathbf{P}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{C}\hat{\mathbf{P}} & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0. \quad (4.42)$$

S posledními třemi řádky a sloupci nemusíme v LMI počítat. Je to z toho důvodu, že jejich jediným prvkem je $-\mathbf{I}$. Vždy platí, že $-\mathbf{I} \leq 0$. Proto definitnost celkové matice není závislá na těchto řádcích a sloupcích. Tím se LMI zredukuje a dostáváme

$$\begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{P}} & \hat{\mathbf{P}}\mathbf{E}^T & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{P}}\mathbf{E}^T & \hat{\mathbf{P}}\mathbf{C}^T \\ \mathbf{E}\hat{\mathbf{P}} & -\hat{\mathbf{P}} & \mathbf{B} & -\hat{\mathbf{P}} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^T & -\gamma^2\mathbf{I} & \mathbf{B}^T & 0 \\ \mathbf{E}\hat{\mathbf{P}} & -\hat{\mathbf{P}} & \mathbf{B} & -\hat{\mathbf{P}} & 0 \\ \mathbf{C}\hat{\mathbf{P}} & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0. \quad (4.43)$$

Pokud porovnáme druhý a čtvrtý sloupec, tak zjistíme, že jsou totožné. To platí i o druhém a čtvrtém řádku. Proto můžeme s jedním z řádků a sloupců přestat počítat a dostaneme konečnou podobu LMI pro zjištění \mathcal{H}_∞ normy diskretního systému

$$\begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{P}} & \hat{\mathbf{P}}\mathbf{E}^T & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{P}}\mathbf{C}^T \\ \mathbf{E}\hat{\mathbf{P}} & -\hat{\mathbf{P}} & \mathbf{B} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^T & -\gamma^2\mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{C}\hat{\mathbf{P}} & 0 & 0 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0. \quad (4.44)$$

Nyní můžeme provést odvození LMI pro návrh diskrétního stavového regulátoru, který bude minimalizovat \mathcal{H}_∞ normu mezi žádanou hodnotou \mathbf{w} a výstupní veličinou \mathbf{y} a bude mít nulovou ustálenou odchylku na výstupu. Po přidání zpětné stavové vazby a integrátoru na vstup získáváme stavový popis systému

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ x_i(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{E} - \mathbf{B}_u \mathbf{K} & -\mathbf{B}_u K_i \\ -\mathbf{C} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ x_i(k) \end{bmatrix} + \mathbf{B}_w w(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ x_i(k) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Proto provedeme nahrazení matice \mathbf{E} stavovou zpětnou vazbou ve tvaru $\mathbf{E} = \mathbf{E} - \mathbf{B}_u \mathbf{K}$ a matici \mathbf{C} rozšíříme o stav integrátoru a získáme $\hat{\mathbf{C}} = [\mathbf{C} \ 0]$. Po dosazení získáme

$$\begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{P}} & \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{E} - \mathbf{B}_u \mathbf{K})^T & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{C}}^T \\ (\mathbf{E} - \mathbf{B}_u \mathbf{K})\hat{\mathbf{P}} & -\hat{\mathbf{P}} & \mathbf{B}_w & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_w^T & -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{P}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0. \quad (4.46)$$

Zavedením substituce $\mathbf{W} = \mathbf{K}\hat{\mathbf{P}}$ získáme LMI pro diskrétní stavový regulátor minimalizující \mathcal{H}_∞ normu mezi žádanou hodnotou \mathbf{w} a výstupem soustavy \mathbf{y} a s ustálenou nulovou odchylkou na výstupu soustavy

$$\begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{P}} & \hat{\mathbf{P}}\mathbf{E}^T - \mathbf{W}^T \mathbf{B}_u^T & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{C}}^T \\ \mathbf{E}\hat{\mathbf{P}} - \mathbf{B}_u \mathbf{W} & -\hat{\mathbf{P}} & \mathbf{B}_w & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_w^T & -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{P}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0. \quad (4.47)$$

5 LMI PRO NÁVRH LQ REGULÁTORU

U stavového regulátoru nemusíme pouze minimalizovat maximální zesílení systému. Definováním vhodného kritéria můžeme ovlivňovat velikost akčního zásahu. Tento problém je řešen LQ regulátory (L - lineární, Q - quadratic cost - kvadratické kritérium). Návrh LQ regulátoru lze provést několika metodami, my se podíváme na to, zda nelze při návrhu využít LMI.

Pro spojitý systém si definujeme kritérium, které budeme minimalizovat

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t))dt, \quad (5.1)$$

kde \mathbf{Q} je $\mathbb{R}^{n \times n}$ a \mathbf{R} je $\mathbb{R}^{p \times p}$ (p je rozměr vstupního signálu \mathbf{u}).

Potom platí

$$\mathbf{x}^T(0)\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(0) \leq \zeta. \quad (5.2)$$

Kritérium má minimální hodnotu ζ , která je závislá na počátečních podmínkách stavů systému. Během výpočtu se snažíme minimalizovat ζ .

U diskrétního systému si kritérium definujeme jako

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k)). \quad (5.3)$$

U diskrétního systému platí rovnice 5.2 stejně jako u spojitého systému.

Matice \mathbf{Q} a \mathbf{R} se ve většině případů volí podle následujícího pravidla

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{R} = \rho\mathbf{I}, \quad (5.4)$$

kde \mathbf{I} je jednotková matice příslušných rozměrů a ρ je konstanta, kterou vhodně volíme. Matice \mathbf{Q} do kritéria přináší penalizaci velikosti stavu. Matice \mathbf{R} do kritéria přináší penalizaci velikosti vstupního signálu do soustavy - akčního zásahu z regulátoru. Volbou vhodného ρ můžeme měnit tvar přechodové charakteristiky [22].

5.1 Odvození LMI pro spojitý LQ regulátor

Pro odvození LMI pro spojitý LQ regulátor spojíme Ljapunovu stabilitu společně s kritériem nedefinovaným v rovnici 5.1 a získáme

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) + \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t))dt \leq 0. \quad (5.5)$$

Po zderivování rovnice 5.5 dostaneme

$$\dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u} \leq 0. \quad (5.6)$$

Nyní dosadíme první stavovou rovnici systému, který jsme definovali v rovnici 4.1. Tím dostaneme rovnici

$$(\mathbf{Ax} + \mathbf{Bu})^T \mathbf{Px} + \mathbf{x}^T \mathbf{P}(\mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}) + \mathbf{x}^T \mathbf{Qx} + \mathbf{u}^T \mathbf{Ru} \leq 0. \quad (5.7)$$

Nyní můžeme dosadit zpětnou stavovou vazbou, kterou definujeme

$$\mathbf{u} = -\mathbf{Kx}. \quad (5.8)$$

Dostaneme rovnici, kterou postupně upravujeme.

$$(\mathbf{Ax} - \mathbf{BKx})^T \mathbf{Px} + \mathbf{x}^T \mathbf{P}(\mathbf{Ax} - \mathbf{BKx}) + \mathbf{x}^T \mathbf{Qx} + (-\mathbf{Kx})^T \mathbf{R}(-\mathbf{Kx}) \leq 0 \quad (5.9)$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Px} - \mathbf{x}^T \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{Px} + \mathbf{x}^T \mathbf{PAx} - \mathbf{x}^T \mathbf{PBKx} + \mathbf{x}^T \mathbf{Qx} + \mathbf{x}^T \mathbf{K}^T \mathbf{RKx} \leq 0 \quad (5.10)$$

$$\mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{PA} - \mathbf{PBK} + \mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{RK}) \mathbf{x} \leq 0 \quad (5.11)$$

Definitnost výrazu v rovnici 5.11 je ovlivněna pouze prostředním členem, proto vektory, které jsou vytknuty po stranách, můžeme zanedbat. Pro lepší výpočet si prostřední člen rozšíříme z obou stran prvkem \mathbf{P}^{-1}

$$\mathbf{P}^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{PA} - \mathbf{PBK} + \mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{RK}) \mathbf{P}^{-1} \leq 0. \quad (5.12)$$

Po úpravě rovnice si pro snadnější zápis zavedeme substituci $\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P}^{-1}$ a dostaneme

$$\hat{\mathbf{P}} \mathbf{A}^T - \hat{\mathbf{P}} \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T + \mathbf{A} \hat{\mathbf{P}} - \mathbf{BK} \hat{\mathbf{P}} + \hat{\mathbf{P}} \mathbf{Q} \hat{\mathbf{P}} + \hat{\mathbf{P}} \mathbf{K}^T \mathbf{RK} \hat{\mathbf{P}} \leq 0 \quad (5.13)$$

Abychom neměli nelineární maticovou nerovnost, tak zavedeme substituci $\mathbf{W} = \mathbf{K} \hat{\mathbf{P}}$, díky které získáme znovu lineární maticovou nerovnost, ve které není součin neznámých

$$\hat{\mathbf{P}} \mathbf{A}^T - \mathbf{W}^T \mathbf{B}^T + \mathbf{A} \hat{\mathbf{P}} - \mathbf{BW} + \hat{\mathbf{P}} \mathbf{Q} \hat{\mathbf{P}} + \mathbf{W}^T \mathbf{RW} \leq 0 \quad (5.14)$$

Abychom měli maticový zápis LMI, tak si poslední dva členy na levé straně rovnice převedeme do maticového zápisu a získáme výraz, který je vhodný pro zpětný Schurův doplněk

$$\hat{\mathbf{P}} \mathbf{A}^T - \mathbf{W}^T \mathbf{B}^T + \mathbf{A} \hat{\mathbf{P}} - \mathbf{BW} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}^T & \mathbf{W}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}} \\ \mathbf{W} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (5.15)$$

Tím získáme konečnou podobu LMI, kterou můžeme použít pro výpočet spojitého LQ regulátoru. Pro sjednocení označení s regulátorem pro minimalizaci \mathcal{H}_∞ normy systému si matici \mathbf{B} označíme jako \mathbf{B}_u .

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}} \mathbf{A}^T - \mathbf{W}^T \mathbf{B}_u^T + \mathbf{A} \hat{\mathbf{P}} - \mathbf{B}_u \mathbf{W} & \hat{\mathbf{P}}^T & \mathbf{W}^T \\ & \hat{\mathbf{P}} & -\mathbf{Q}^{-1} \\ & \mathbf{W} & 0 \\ & & & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (5.16)$$

Při výpočtu nesmíme zapomenout na podmínku definovanou v rovnici 5.2, kterou si upravíme do tvaru

$$0 \leq \zeta - (\mathbf{x}^T(0)\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(0)). \quad (5.17)$$

Tím můžeme použít zpětný Schuruv doplněk a zápis v rovnici 5.17 převést na do matice

$$\begin{bmatrix} \zeta & \mathbf{x}^T(0) \\ \mathbf{x}(0) & \mathbf{P} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (5.18)$$

Potom při návrhu LQ regulátoru řešíme optimalizační úlohu zadanou jako

$$\begin{array}{l} \min \\ \text{za podmínek} \end{array} \begin{array}{l} \zeta \\ \begin{bmatrix} \zeta & \mathbf{x}^T(0) \\ \mathbf{x}(0) & \mathbf{P} \end{bmatrix} \geq 0 \\ \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}\mathbf{A}^T - \mathbf{W}^T\mathbf{B}_u^T + \mathbf{A}\hat{\mathbf{P}} - \mathbf{B}_u\mathbf{W} & \hat{\mathbf{P}}^T & \mathbf{W}^T \\ & \hat{\mathbf{P}} & -\mathbf{Q}^{-1} & 0 \\ & \mathbf{W} & 0 & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \leq 0. \end{array} \quad (5.19)$$

5.2 Odvození LMI pro diskretní LQ regulátor

Při odvození LMI pro diskretní LQ regulátor vycházíme stejně jako u spojitého systému z definice kritéria pro diskretní systém v rovnici 5.4 a z definice rovnice pro Ljapunovu stabilitu diskretního systému.

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}(k)) + \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k)) \leq 0. \quad (5.20)$$

Provedeme diferenci rovnice 5.20 a získáme

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}(k+1)) - \mathbf{V}(\mathbf{x}(k)) + (\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k)) \leq 0 \quad (5.21)$$

$$\mathbf{x}^T(k+1)\mathbf{P}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^T(k)\mathbf{P}\mathbf{x}(k) + \mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k) \leq 0 \quad (5.22)$$

Do rovnice 5.22 dosadíme stavové rovnice diskretního systému, který je definován v rovnici 4.2, a stavovou zpětnou vazbu, která je definována

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k). \quad (5.23)$$

Nově získanou rovnici můžeme postupně upravovat

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T(k)(\mathbf{E} - \mathbf{B}\mathbf{K})^T\mathbf{P}(\mathbf{E} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^T(k)\mathbf{P}\mathbf{x}(k) + \mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \\ \mathbf{x}^T(k)\mathbf{K}^T\mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{x}(k) \leq 0. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Stavové veličiny jsou všechny v aktuálním kroku k , proto již nemusíme krok k v rovnicích psát

$$\mathbf{x}^T(\mathbf{E} - \mathbf{BK})^T \mathbf{P}(\mathbf{E} - \mathbf{BK})\mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{K}^T \mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{x} \leq 0. \quad (5.25)$$

$$\mathbf{x}^T \left((\mathbf{E} - \mathbf{BK})^T \mathbf{P}(\mathbf{E} - \mathbf{BK}) - \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R}\mathbf{K} \right) \mathbf{x} \leq 0. \quad (5.26)$$

Definitnost výrazu je závislá na definitnosti prostředního členu, proto se můžeme zabývat pouze prostředním členem. Ten si přepíšeme do vhodného tvaru, abychom mohli použít zpětný Schurův doplněk.

$$-\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R}\mathbf{K} - (\mathbf{E} - \mathbf{BK})^T \mathbf{P}(\mathbf{E} - \mathbf{BK}) \leq 0 \quad (5.27)$$

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R}\mathbf{K} & (\mathbf{E} - \mathbf{BK})^T \\ (\mathbf{E} - \mathbf{BK}) & -\mathbf{P}^{-1} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (5.28)$$

Jelikož se v rovnici 5.28 vyskytuje matice \mathbf{P} společně s inverzí \mathbf{P}^{-1} , tak provedeme rozšíření rovnice o vhodně zvolenou matici, abychom proměnné sjednotili

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R}\mathbf{K} & (\mathbf{E} - \mathbf{BK})^T \\ (\mathbf{E} - \mathbf{BK}) & -\mathbf{P}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0. \quad (5.29)$$

Pro snadnější zápis zavedeme substituci $\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P}^{-1}$

$$\begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{P}} + \hat{\mathbf{P}}\mathbf{Q}\hat{\mathbf{P}} + \hat{\mathbf{P}}\mathbf{K}^T \mathbf{R}\mathbf{K}\hat{\mathbf{P}} & \hat{\mathbf{P}}\mathbf{E}^T - \hat{\mathbf{P}}\mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \\ \mathbf{E}\hat{\mathbf{P}} - \mathbf{B}\mathbf{K}\hat{\mathbf{P}} & -\hat{\mathbf{P}} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (5.30)$$

Zavedením substituce $\mathbf{W} = \mathbf{K}\mathbf{P}$ získáme nelineární maticovou nerovnost. Proto musíme matici rozdělit na součet dvou a upravit tak, abychom opět dostali lineární maticovou nerovnost

$$\begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{P}} & \hat{\mathbf{P}}\mathbf{E}^T - \mathbf{W}^T \mathbf{B}^T \\ \mathbf{E}\hat{\mathbf{P}} - \mathbf{B}\mathbf{W} & -\hat{\mathbf{P}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}\mathbf{Q}\hat{\mathbf{P}} + \mathbf{W}^T \mathbf{R}\mathbf{W} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (5.31)$$

$$\begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{P}} & \hat{\mathbf{P}}\mathbf{E}^T - \mathbf{W}^T \mathbf{B}^T \\ \mathbf{E}\hat{\mathbf{P}} - \mathbf{B}\mathbf{W} & -\hat{\mathbf{P}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}} & \mathbf{W}^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}} & 0 \\ \mathbf{W} & 0 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (5.32)$$

Použitím zpětného Schurova doplnku dostaneme LMI, kterou můžeme použít pro výpočet diskretního LQ regulátoru. I u diskretního LQ regulátoru provedeme přeznačení $\mathbf{B} = \mathbf{B}_u$.

$$\begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{P}} & \hat{\mathbf{P}}\mathbf{E}^T - \mathbf{W}^T \mathbf{B}_u^T & \hat{\mathbf{P}} & \mathbf{W}^T \\ \mathbf{E}\hat{\mathbf{P}} - \mathbf{B}_u \mathbf{W} & -\hat{\mathbf{P}} & 0 & 0 \\ \hat{\mathbf{P}} & 0 & -\mathbf{Q}^{-1} & 0 \\ \mathbf{W} & 0 & 0 & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \leq 0. \quad (5.33)$$

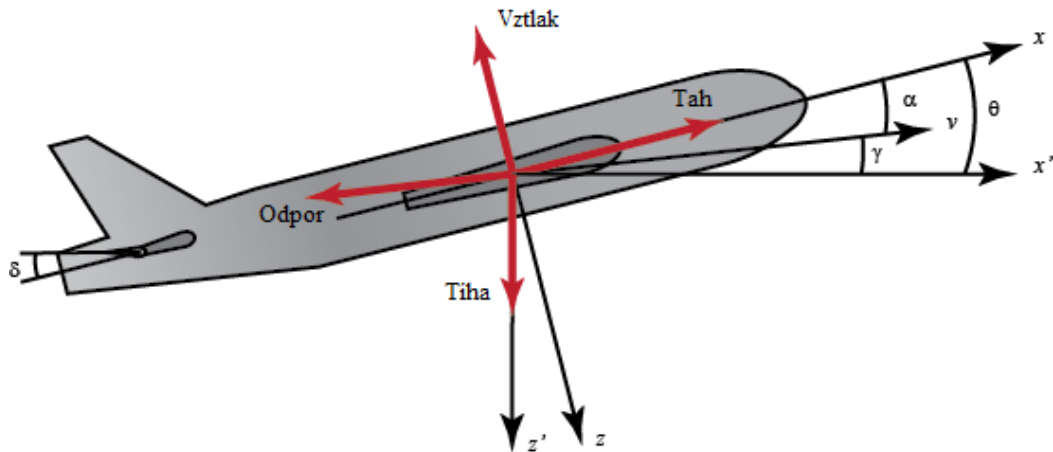
Stejně jako u spojitého LQ regulátoru nesmíme zapomenout na podmínku definovanou v rovnici 5.2, kterou jsme si upravili do konečné podoby v rovnici 5.18 a můžeme ji použít i u diskretního systému. Při návrhu diskretního LQ regulátoru řešíme optimalizační úlohu zadanou jako

$$\begin{array}{l}
 \min \\
 \text{za podmínek}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \zeta \\
 \left[\begin{array}{cc}
 \zeta & \mathbf{x}^T(0) \\
 \mathbf{x}(0) & \mathbf{P}
 \end{array} \right] \geq 0 \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 -\hat{\mathbf{P}} & \hat{\mathbf{P}}\mathbf{E}^T - \mathbf{W}^T\mathbf{B}_u^T & \hat{\mathbf{P}} & \mathbf{W}^T \\
 \mathbf{E}\hat{\mathbf{P}} - \mathbf{B}_u\mathbf{W} & -\hat{\mathbf{P}} & 0 & 0 \\
 \hat{\mathbf{P}} & 0 & -\mathbf{Q}^{-1} & 0 \\
 \mathbf{W} & 0 & 0 & -\mathbf{R}^{-1}
 \end{array} \right] \leq 0.
 \end{array}
 \quad (5.34)$$

6 VÝSLEDKY SIMULACE

6.1 Spojitý systém

Pro návrh spojitého regulátoru byla vybrána soustava, která byla převzata z příkladu, který je uveden ve zdroji [20]. Jedná se o model letadla, u kterého navrhujeme autopilota, který bude udržovat konstantní stoupání letadla. Na Obr. 6.1 je zobrazeno letadlo s popisem jednotlivých veličin.



Obr. 6.1: Popis fyzikálních veličin u letadla. Převzato z [20](Popisy obrázku byly přepracovány.)

Systém můžeme popsat stavovými rovnicemi

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \dot{\Theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.313 & 56.7 & 0 \\ -0.0139 & -0.426 & 0 \\ 0 & 56.7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \\ \Theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.232 \\ 0.0203 \\ 0 \end{bmatrix} [\delta]$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \\ \Theta \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

Rovnice s hodnotami převzaty z [20]. Vstupem do systému je úhel natočení výškového kormidla δ . Výstupem systému je úhel natočení letadla θ , který je zároveň jeden ze stavů systému.

Přenosová funkce systému je

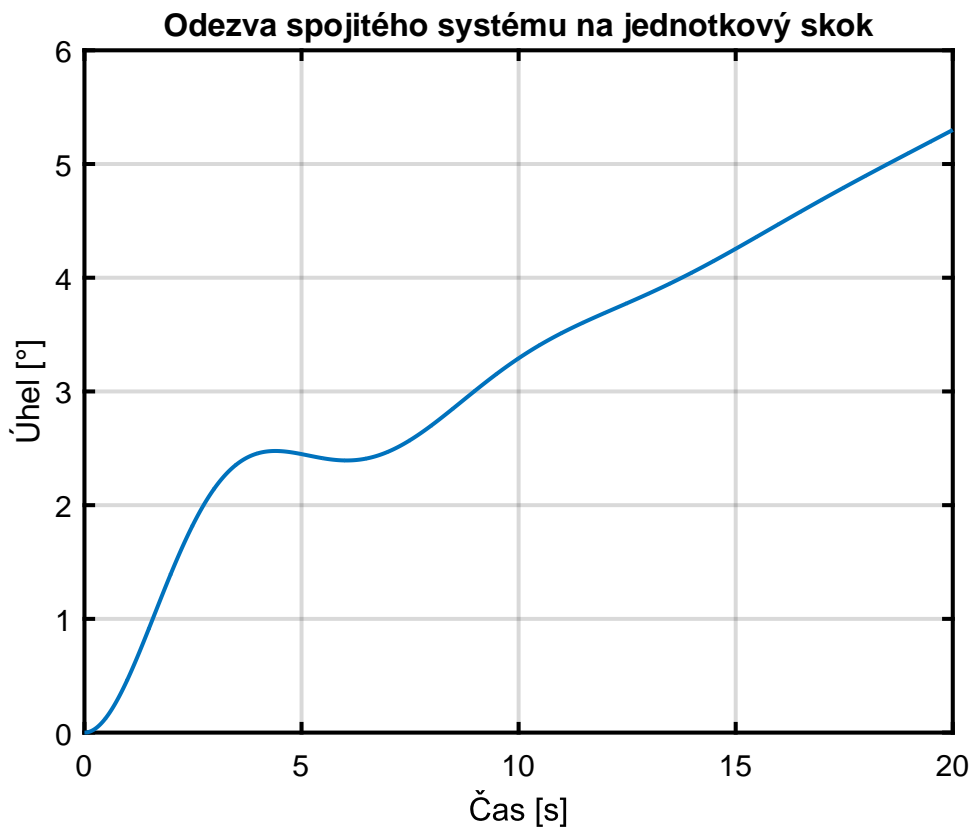
$$F_S(p) = \frac{1,151p + 0,1774}{p^3 + 0,559p^2 + 0,8651p} \quad (6.2)$$

Vlastní čísla matice \mathbf{A} systému jsou zobrazena v Tab. 6.1.

α_1	α_2	α_3
$0 + j0$	$-0,2795 + j0,8871$	$-0,2795 - j0,8871$

Tab. 6.1: Vlastní čísla matice \mathbf{A}

Odezva výstupu systému na jednotkový skok je zobrazena na Obr. 6.2.



Obr. 6.2: Odezva spojitého systému na jednotkový skok

Požadavky na regulátor, který se bude chovat jako autopilot, jsou následující[20]:

- Překmitnutí žádané veličiny při přechodovém ději nesmí být větší než 10%.
- Čas náběhu (mezi 0% a 80% žádané hodnoty) musí být menší než 2 sekundy.
- Čas ustálení musí být menší než 10 sekund.
- Chyba v ustáleném stavu musí být menší než 2%.

6.1.1 Návrh regulátoru a výsledek simulace

Před výpočtem regulátoru musíme ověřit, zda soustava splňuje podmínku říditelnosti a dosažitelnosti.

Pokud je systém říditelný, tak můžeme navrhnout řízení, které dokáže libovolný stav dovést do počátku stavového prostoru v konečném čase. Oproti tomu, pojem dosažitelnosti znamená, že existuje takové řízení, které dokáže přesunout stav z počátku stavového popisu na libovolné místo ve stavovém prostoru v konečném čase. U lineárního spojitého systému dochází ke splnutí pojmů říditelnost a dosažitelnost.

Systém je říditelný a dosažitelný pokud platí, že hodnost kriteriální matice

$$\mathbf{H} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (6.3)$$

se rovná řádu systému [30].

Dosadíme jednotlivé stavové matice a získáme

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0.232 & 1.0784 & -0.8035 \\ 0.0203 & -0.082 & -0.013 \\ 0 & 1.151 & -0.466 \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

Výpočtem zjistíme, že hodnost matice \mathbf{H} je 3. Hodnost matice \mathbf{H} je stejná jako řád systému n . Proto můžeme prohlásit, že je systém plně dosažitelný a říditelný.

Nyní můžeme navrhnout regulátor. Jako první zvolíme LQ regulátor, který navrhne pomocí rovnic uvedených v rovnici 5.19. Pro výpočet LQ regulátoru zvolíme dva případy nastavení hodnot matic \mathbf{R} a \mathbf{Q} budeme zkoumat vliv jejich hodnot na vzhledu přechodového děje.

$$\begin{aligned} a) \quad \mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{R} &= 10^{-3}. \\ b) \quad \mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{R} &= 10^{-6}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Pro výpočet jsme použili toolbox `cvx`. V obou případech jsme počítali s nulovými počátečními podmínkami.

V případě a), kdy jsme zadali $\mathbf{R} = 10^{-3}$, jsme výpočtem dostali hodnoty matic \mathbf{K} a $\hat{\mathbf{P}}$

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= [-125 \quad 2145,1 \quad 229,6 \quad -122,4] \\ \hat{\mathbf{P}} &= \begin{bmatrix} 2,51 & 0,17 & 0,27 & 0,26 \\ 0,17 & 0,06 & -0,52 & -0,06 \\ 0,27 & -0,52 & 5,87 & 0,95 \\ 0,26 & -0,06 & 0,95 & 0,55 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Zavedením zpětné stavové vazby do zadaného systému jsme dostali přenos řízení $F_{W1}(p)$ ve tvaru

$$F_{W1}(p) = \frac{140,9p + 21,72}{p^4 + 41,2p^3 + 256,7p^2 + 181,6p + 21,72} \quad (6.7)$$

Vlastní čísla nové matice \mathbf{A}^* , která vznikla po přidání zpětné stavové vazby a integrátoru na vstup systému jsou zobrazeny v Tab. 6.2

α_1	α_2	α_3	α_4
-33,75	-6,66	-0,64	-0,15

Tab. 6.2: Vlastní čísla matice \mathbf{A}^* při $\mathbf{R}=10^{-3}$

V případě b) jsme zvolili $\mathbf{R} = 10^{-6}$ a dostali hodnoty matic

$$\mathbf{K} = [-137 \quad 2689,3 \quad 540,2 \quad -380,3]$$

$$\hat{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} -153,42 & 13,96 & -5,96 & -0,15 \\ 13,96 & 1,33 & -1,22 & -0,11 \\ -5,96 & -1,22 & 7,55 & 1,02 \\ -0,15 & -0,11 & 1,02 & 0,54 \end{bmatrix}. \quad (6.8)$$

Po přidání LQ regulátoru jsme dostali přenos řízení $F_{W2}(p)$ ve tvaru

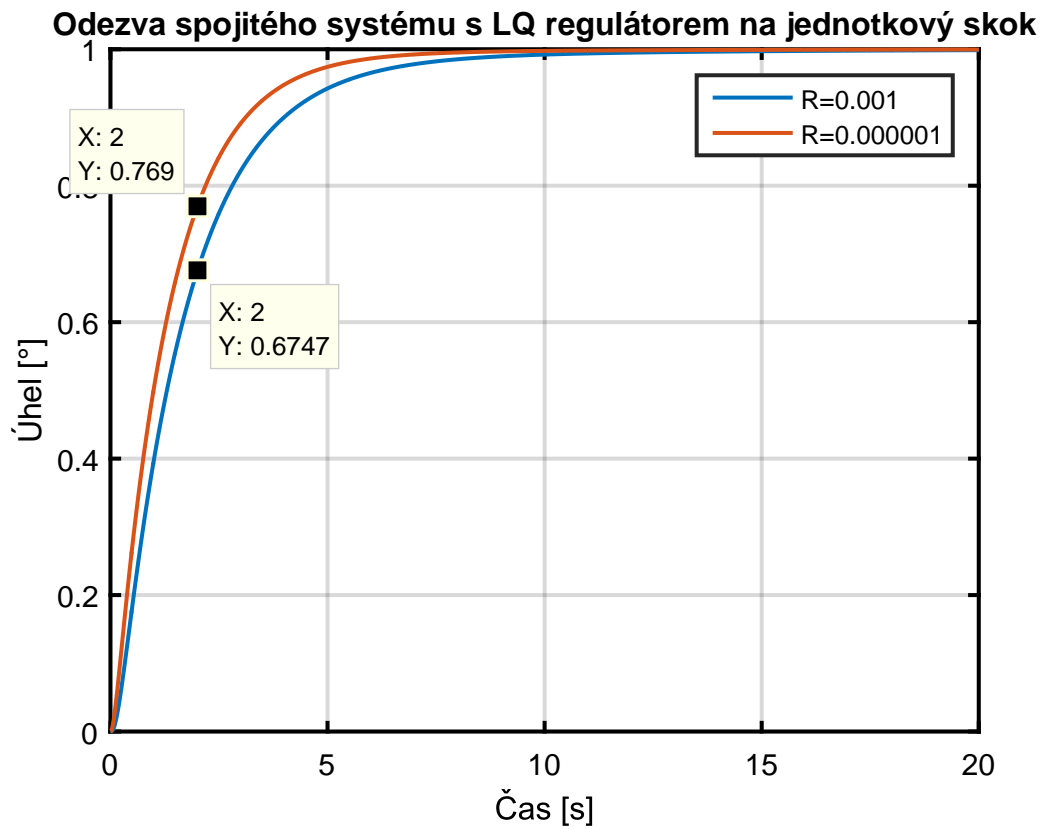
$$F_{W2}(p) = \frac{4377p + 674,8}{p^4 + 514,6p^3 + 6136p^2 + 5336p + 674,8} \quad (6.9)$$

V Tab. 6.3 jsou zobrazeny vlastní čísla matice \mathbf{A}^* , která vznikne při zavedení zpětné stavové vazby a přidání integrátoru na vstup soustavy.

α_1	α_2	α_3	α_4
-502,40	-11,26	-0,78	-0,15

Tab. 6.3: Vlastní čísla matice \mathbf{A}^* při $\mathbf{R}=10^{-6}$

Na Obr. 6.3 je zobrazeno porovnání odezvy obou přenosů řízení na jednotkový skok žádané veličiny. Při postupném nastavování jsme došli k výsledku, že nastavení $\mathbf{R}=10^{-6}$ a menších hodnot již nemá na tvaru přechodového děje vliv. Proto můžeme prohlásit, že samotný LQ regulátor není pro zadání vhodný, protože nesplňuje druhou podmínku, kterou jsme si zadali na začátku, že systém musí mít dobu náběhu (mezi 0% a 80%) menší než 2s.



Obr. 6.3: Odezva spojitého systému s LQ regulátorem na jednotkový skok

Proto k LQ regulátoru přidáme LMI, kterou jsme si definovali pro regulátor minimalizující \mathcal{H}_∞ normu ze vstupu na výstup soustavy, a LMI, kterou jsme si definovali pro posunutí pólů do LMI oblasti $\mathcal{S}(\alpha, r, \varphi)$ a která nám omezí překmitnutí přechodové charakteristiky přes požadovanou hodnotu.

Budeme proto řešit optimalizační problém uvedený v rovnici 6.10.

$$\begin{aligned}
& \min \quad \zeta, \gamma^2 \\
& \text{za podmínek} \quad \begin{bmatrix} \zeta & \mathbf{x}^T(0) \\ \mathbf{x}(0) & \mathbf{P} \end{bmatrix} \geq 0 \\
& \quad \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}\mathbf{A}^T - \mathbf{W}^T\mathbf{B}_u^T + \mathbf{A}\hat{\mathbf{P}} - \mathbf{B}_u\mathbf{W} & \hat{\mathbf{P}}^T & \mathbf{W}^T \\ & \hat{\mathbf{P}} & -\mathbf{Q}^{-1} & 0 \\ & \mathbf{W} & 0 & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \leq 0. \\
& \quad \begin{bmatrix} \mathbf{A}\hat{\mathbf{P}} + \hat{\mathbf{P}}\mathbf{A}^T - \mathbf{B}_u\mathbf{W} - \mathbf{W}^T\mathbf{B}_u^T & \mathbf{B}_w & \hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{C}}^T \\ & \mathbf{B}_w^T & -\gamma^2\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ & \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{P}} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0 \\
& \quad 2\alpha\hat{\mathbf{P}} + \mathbf{A}\hat{\mathbf{P}} + \hat{\mathbf{P}}\mathbf{A}^T - \mathbf{B}_u\mathbf{W} - \mathbf{W}^T\mathbf{B}_u^T < 0 \\
& \quad \begin{bmatrix} -r\hat{\mathbf{P}} & \mathbf{A}\hat{\mathbf{P}} - \mathbf{B}_u\mathbf{W} \\ \hat{\mathbf{P}}\mathbf{A}^T - \mathbf{W}^T\mathbf{B}_u^T & -r\hat{\mathbf{P}} \end{bmatrix} < 0 \\
& \quad \begin{bmatrix} (\mathbf{A}\hat{\mathbf{P}} + \hat{\mathbf{P}}\mathbf{A}^T - \mathbf{W}^T\mathbf{B}_u^T - \mathbf{B}_u\mathbf{W})\sin\theta & (\mathbf{A}\hat{\mathbf{P}} - \hat{\mathbf{P}}\mathbf{A}^T - \mathbf{B}_u\mathbf{W} + \mathbf{W}^T\mathbf{B}_u^T)\cos\theta \\ (\hat{\mathbf{P}}\mathbf{A}^T - \mathbf{A}\hat{\mathbf{P}} - \mathbf{W}^T\mathbf{B}_u^T + \mathbf{B}_u\mathbf{W})\cos\theta & (\mathbf{A}\hat{\mathbf{P}} + \hat{\mathbf{P}}\mathbf{A}^T - \mathbf{W}^T\mathbf{B}_u^T - \mathbf{B}_u\mathbf{W})\sin\theta \end{bmatrix} < 0
\end{aligned} \tag{6.10}$$

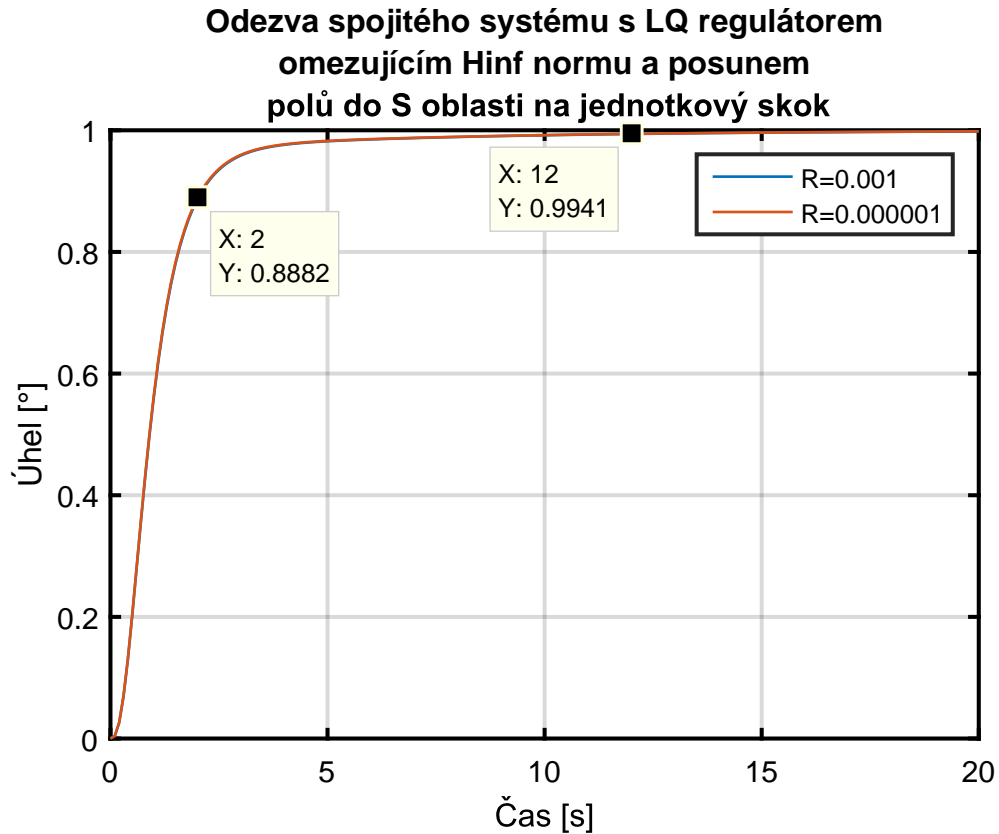
V toolboxu `cvx` lze při tvorbě optimalizačního modelu zadat pouze jedna proměnná, kterou chceme minimalizovat. Proto provedeme zjednodušení, že budeme minimalizovat součet proměnných ξ a γ^2 . Tím dojde k rovnoměrné minimalizaci obou proměnných.

Nyní musíme zadat více hodnot pro výpočet. Jedná se o

- $\alpha = 0,1$
- $r = 5$
- $\varphi = 45^\circ$

a matice \mathbf{Q} a \mathbf{R} , které necháme nastavené na stejné hodnoty jako v předchozím případě, tzn. podle výrazu 6.5.

Na Obr. 6.4 můžeme vidět odezvu spojitého systému s LQ regulátorem minimalizujícím \mathcal{H}_∞ normu ze vstupu na výstup soustavy a s posunutými póly do do LMI oblasti $\mathbb{S}(\alpha, r, \varphi)$, při výše zadaných parametrech, pro oba případy.



Obr. 6.4: Odezva spojitého systému s LQ regulátorem minimalizujícím \mathcal{H}_∞ normu ze vstupu na výstup soustavy a s posunutými póly do do LMI oblasti $\mathbb{S}(\alpha, r, \varphi)$ na jednotkový skok

Jak je vidět, tak se obě odezvy překrývají, proto nezáleží na tom, zda je matice \mathbf{R} zvolena jako $\mathbf{R}=10^{-3}$ nebo $\mathbf{R}=10^{-6}$. Po výpočtu LQ regulátorem minimalizujícím \mathcal{H}_∞ normu ze vstupu na výstup soustavy a s posunutými póly do do LMI oblasti $\mathbb{S}(\alpha, r, \varphi)$ s $\mathbf{R}=10^{-6}$ jsme získali následující výsledky

$$\mathbf{K} = [-5,31 \quad 526,60 \quad 34,16 \quad -27,61]$$

$$\hat{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 1,48 & 0,04 & 0,75 & 0,61 \\ 0,04 & 0,03 & -0,30 & -0,02 \\ 0,75 & -0,30 & 4,03 & 0,89 \\ 0,61 & -0,02 & 0,89 & 0,71 \end{bmatrix}. \quad (6.11)$$

Matice $\hat{\mathbf{P}}$ je symetrická a pozitivně definitní matice, její vlastní čísla jsou kladná. Po zavedení zpětné stavové vazby a přidání integrátoru na vstup jsme získali přenos řízení $F_{W3}(p)$ ve tvaru

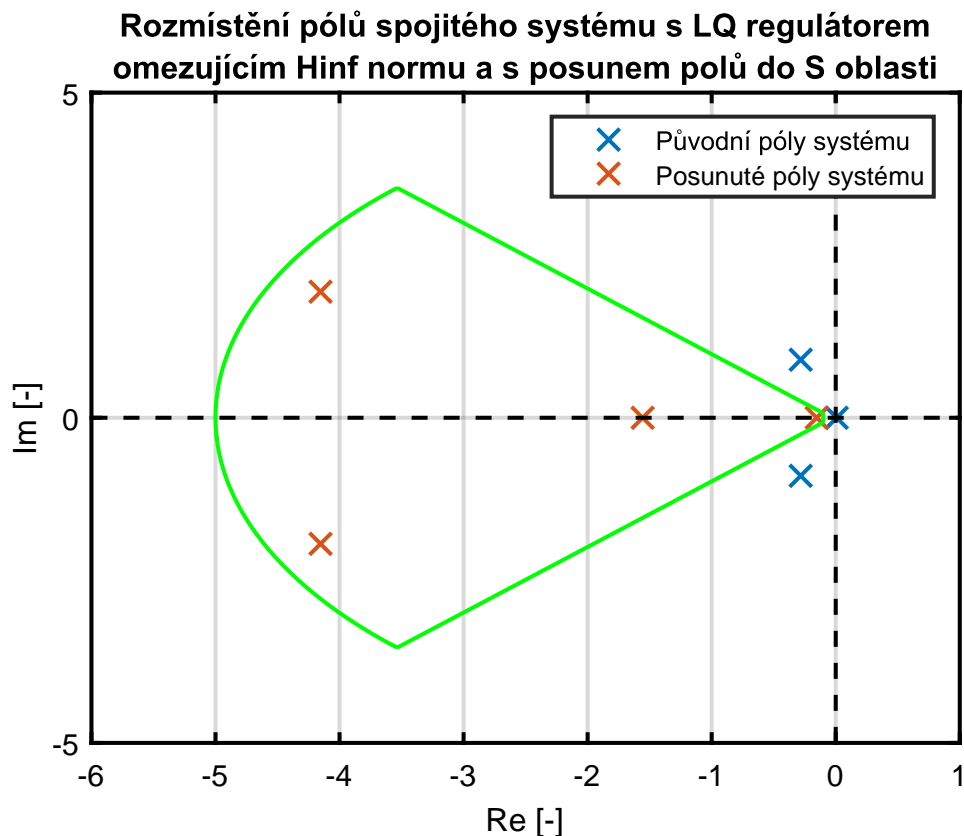
$$F_{W3}(p) = \frac{31,78p + 4,90}{p^4 + 10,02p^3 + 35,42p^2 + 37,84p + 4,90} \quad (6.12)$$

V Tab. 6.4 jsou vypsány vlastní čísla matice \mathbf{A}^* , která vznikla zavedením zpětné vazby.

α_1	α_2	α_3	α_4
$-4,15 + j1,93$	$-4,15 - j1,93$	$-1,56 + j0$	$-0,15 + j0$

Tab. 6.4: Vlastní čísla matice \mathbf{A}^* spojitého systému s LQ regulátorem minimalizujícím \mathcal{H}_∞ normu ze vstupu na výstup soustavy a s posunutými póly do do LMI oblasti $\mathbb{S}(\alpha, r, \varphi)$ s $\mathbf{R}=10^{-6}$

Na Obr. 6.5 vidíme, že vlastní čísla matice \mathbf{A}^* leží uvnitř LMI oblasti $\mathbb{S}(\alpha, r, \theta)$, kterou jsme si nadefinovali a tím došlo ke zrychlení přechodového děje a zároveň k omezení překmitnutí výstupu oproti žádané hodnotě.

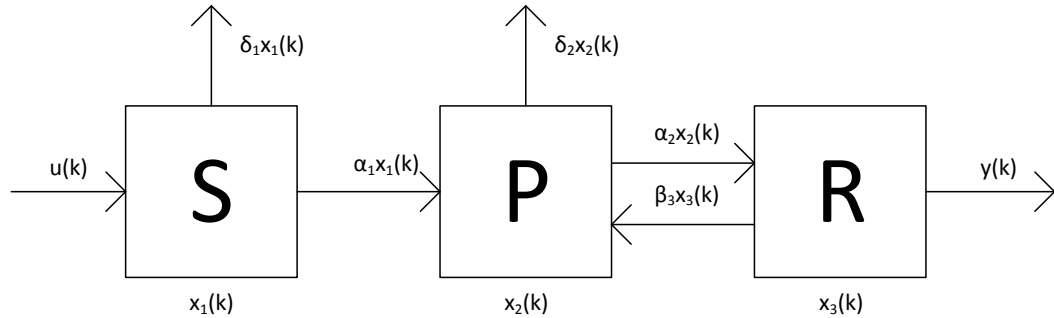


Obr. 6.5: Rozmístění pólů přenosu řízení F_{W3} v komplexní rovině s vyznačenou oblastí $\mathbb{S}(\alpha, r, \varphi)$

Můžeme prohlásit, že námi navržený LQ regulátor minimalizující \mathcal{H}_∞ normu ze vstupu na výstup soustavy a s posunutými póly do do LMI oblasti $\mathbb{S}(\alpha, r, \varphi)$ s $\mathbf{R}=10^{-6}$ splňuje požadavky, které jsme na začátku výpočtů kladli na regulátor.

6.2 Diskrétní systém

Pro návrh diskrétního regulátoru byl vybrán model zásobovacího řetězce, který byl převzat z [1]. Blokové schéma je zobrazeno na Obr. 6.6.



Obr. 6.6: Blokové schéma zásobovacího řetězce. Přepřacováno z [1]

Dovozce materiálu S objedná každý měsíc $u(k)$ surového materiálu. Celkové množství materiálu u dovozce materiálu S je označeno $x_1(k)$. Část surového materiálu δ_1 je vyřazeno a část surového materiálu α_1 je prodáno výrobcí P.

Výrobce P vyrobí ze surového materiálu výrobky v poměru 1:1. Celkové množství produktů, které má výrobce P daný měsíc uskladněno, označíme $x_2(k)$. Část produktů δ_2 je vyřazena z důvodu vady a část produktů α_2 je prodáno obchodníkovi R.

Obchodník R vrací část produktů β_3 nazpět výrobcí kvůli poškození při cestě a část produktů γ_3 prodá konečnému zákazníkovi. Obchodník R každý měsíc může prodat $x_3(k)$ produktů.

Naším cílem je navrhnout regulátor, který bude regulovat množství koupeného surového materiálu dovozcem, tak aby obchodník R měl dostatečné množství produktů při požadovaném prodeji.

Stavový popis diskrétního systému můžeme zapsat

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \alpha_1 - \delta_1) & 0 & 0 \\ \alpha_1 & (1 - \alpha_2 - \delta_2) & \beta_3 \\ 0 & \alpha_2 & (1 - \beta_3 - \gamma_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u(k)]$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}. \quad (6.13)$$

Pro simulaci byly zvoleny hodnoty uvedené v Tab. 6.5.

α_1	α_2	δ_1	δ_2	β_3	γ_3
0,8	0,6	0,1	0,15	0,05	0,8

Tab. 6.5: Použité parametry diskretního systému

Po dosazení parametrů do stavového popisu, který jsme si definovali v rovnici 6.13, dostaneme

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0,25 & 0,05 \\ 0 & 0,6 & 0,15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u(k)] \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Ze stavového popisu soustavy můžeme vytvořit operátorový přenos soustavy $F_s(z)$ ve tvaru

$$F_s(z) = \frac{0,384}{z^3 - 0,5z^2 + 0,0475z + 0,00075} \quad (6.15)$$

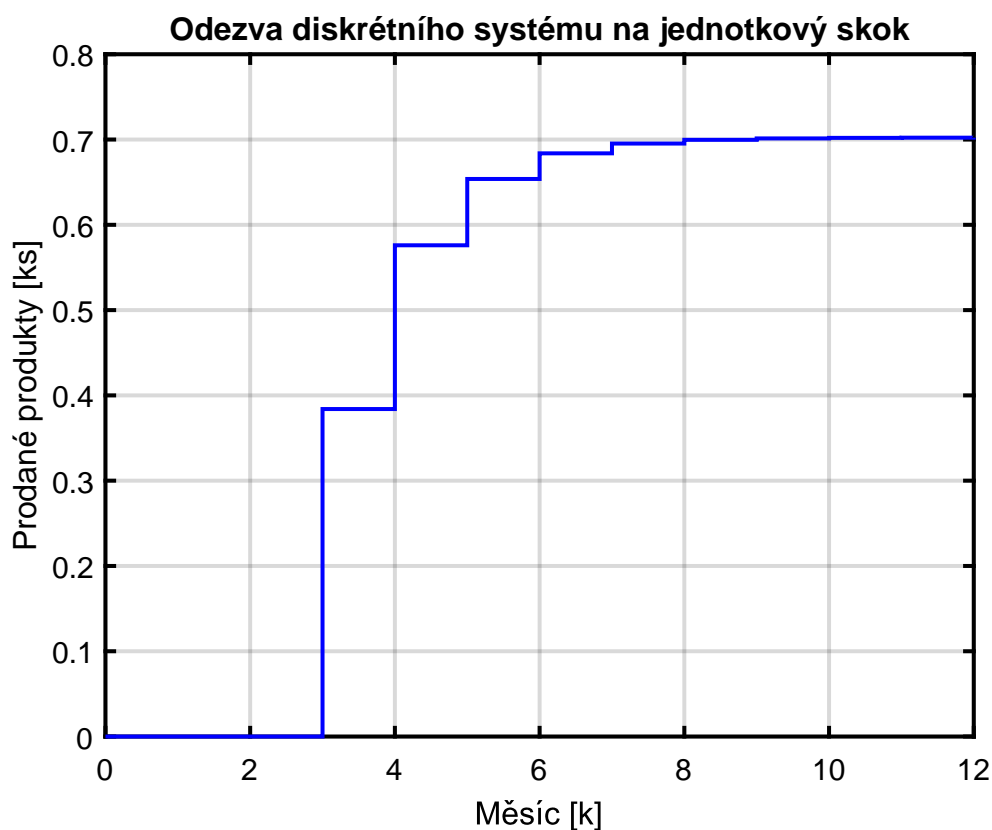
Vlastní čísla matice \mathbf{E} jsou zobrazeny v Tab. 6.6.

α_1	α_2	α_3
$0 + j0$	$-0,2795 + j0,8871$	$-0,2795 - j0,8871$

Tab. 6.6: Vlastní čísla matice \mathbf{E} diskretního systému

Odezva systému na jednotkový skok na vstupu systému je zobrazena na Obr. 6.7.

Zadáním je navrhnout takový regulátor, aby při jednotkovém skoku žádané hodnoty na vstupu soustavy měl výstupní signál po 6 měsících výroby 80% žádané hodnoty.



Obr. 6.7: Odezva diskretního systému na jednotkový skok

6.2.1 Návrh regulátoru a výsledek simulace

Stejně jako u lineárního systému si před výpočtem ověříme, zda je diskretní systém říditelný a dosažitelný. U diskretního systému již pojmy říditelnost a dosažitelnost rozlišujeme a proto si musíme definovat dvě podmínky.

Diskretní lineární systém je plně dosažitelný, pokud kriteriální matice

$$\mathbf{H} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{E}\mathbf{B} \quad \mathbf{E}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{E}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (6.16)$$

má hodnotu rovnou řádu systému n .

Diskretní lineární systém je plně říditelný, pokud kriteriální matice

$$\mathbf{H} = [\mathbf{E}^{-1}\mathbf{B} \quad \mathbf{E}^{-2}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{E}^{-n}\mathbf{B}] \quad (6.17)$$

má hodnotu rovnou řádu systému n .

Zároveň platí, že pokud je diskretní systém dosažitelný, tak je i říditelný. Naopak tato podmínka neplatí, pokud je diskretní systém říditelný, tak není nutné, aby byl také dosažitelný [30].

Proto si nejdříve vyšetříme, zda je námi zadaný diskretní systém v rovnici 6.14 dosažitelný. Dosadíme systémové matice do rovnice 6.16 a dostaneme

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,10 & 0,01 \\ 0,00 & 0,80 & 0,28 \\ 0,00 & 0,00 & 0,48 \end{bmatrix}. \quad (6.18)$$

Výpočtem určíme, že hodnost matice \mathbf{H} je 3. Hodnost matice \mathbf{H} je stejná jako řád systému n , proto můžeme prohlásit, že námi zadaný diskretní systém je dosažitelný a tím i říditelný. Proto můžeme pokračovat ve výpočtu regulátoru.

Jako první navrhne LQ regulátor. Parametry potřebné pro výpočet použijeme následující

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = 0,01. \quad (6.19)$$

Vzorkovací perioda je $T_{vz} = 1$, protože množství surového materiálu a produktů počítáme vždy na začátku měsíce.

Po výpočtu LQ regulátoru dostáváme matici pro zpětnou stavovou vazbu

$$\mathbf{K} = [0,94 \quad 1,05 \quad 1,28 \quad -1,05]$$

$$\hat{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0,41 & -0,16 & -0,05 & -0,003 \\ -0,16 & 0,49 & -0,16 & 0,07 \\ -0,05 & -0,16 & 0,53 & 0,34 \\ -0,003 & 0,07 & 0,34 & 0,40 \end{bmatrix}. \quad (6.20)$$

Vlastní čísla nově vzniklé matice \mathbf{E}^* jsou zobrazeny v Tab. 6.7.

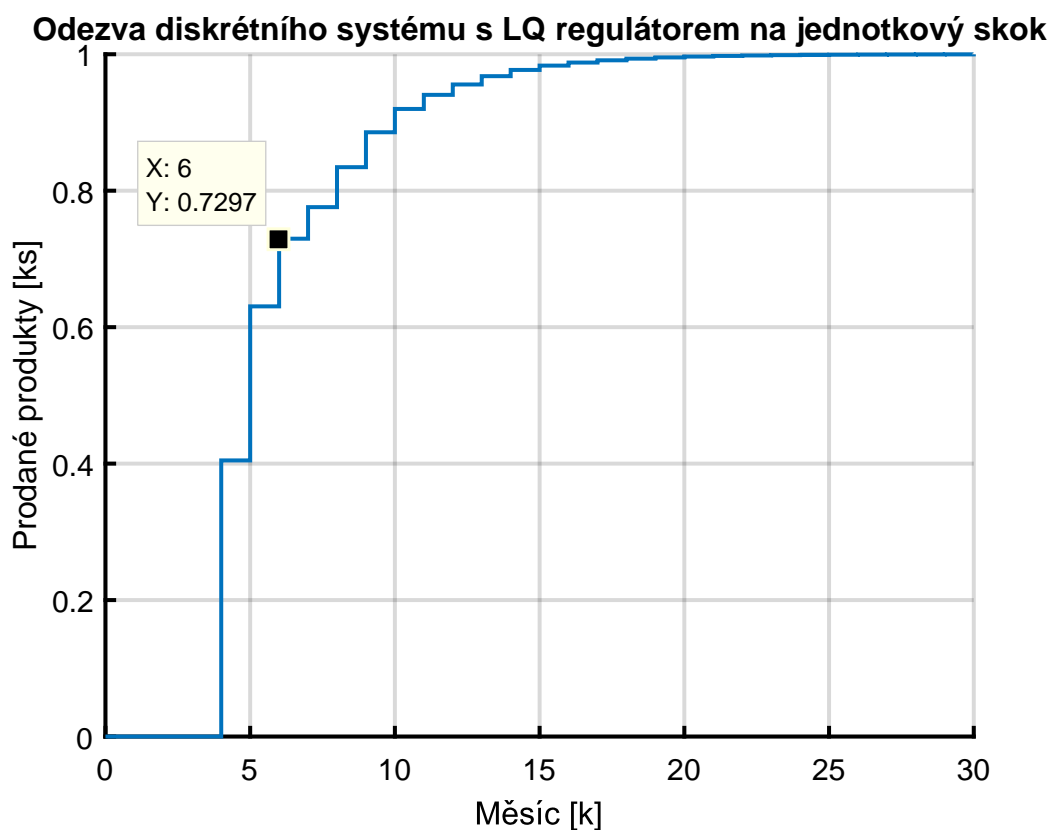
α_1	α_2	α_3	α_4
$-0,42 + j0,00$	$0,12 + j0,53$	$0,12 - j0,53$	$0,73 + j0$

Tab. 6.7: Vlastní čísla matice \mathbf{E}^* diskretního systému s LQ regulátorem

Zpětnou stavovou vazbou a přidáním integrátoru na vstup získáme operátorový přenos řízení $F_{W1}(z)$

$$F_{W1}(z) = \frac{0,4047}{z^4 - 0,5579z^3 + 0,06625z^2 - 0,01455z - 0,08906} \quad (6.21)$$

Na Obr. 6.8 je zobrazena přechodová charakteristika systému s LQ regulátorem. Vidíme, že v 6 měsíci je výstupní hodnota jenom 0,7297, což je přibližně 73% žádané hodnoty. Podmínka, která byla v zadání kladena na regulátor, nebyla splněna.



Obr. 6.8: Přejchodová charakteristika systému s LQ diskrétním regulátorem

Jako druhý regulátor navrhne LQ regulátor minimalizující \mathcal{H}_∞ normu a přesun pólů je omezen do oblasti ohraničené elipsou.

Pro návrh si definujeme kriteriální matice \mathbf{Q} a \mathbf{R} a koeficient tlumení systému. Z koeficientu tlumení určíme parametry elipsy - střed elipsy x_{max} a koeficienty c a d . Koeficient tlumení volíme jako $\xi = 0,3$, to odpovídá přibližně úhlu 73° , případně asi $1,2661\text{rad}$.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = 10^{-6} \quad \xi = 0,3$$

$$x_{max} = \exp\left(-\frac{1,2661}{\text{tg}(1,2661)}\right) \cos(-1,2661) = 0,2015 \quad (6.22)$$

$$c = \frac{1}{\exp\left(-\frac{1,2661}{\text{tg}(1,2661)}\right) \cos(-1,2661) + \exp\left(-\frac{\pi}{\text{tg}(1,2661)}\right)} = 1,7428$$

$$d = \frac{1}{\exp\left(-\frac{1,2661}{\text{tg}(1,2661)}\right) \sin(-1,2661)} = -1,5610$$

Při návrhu řešíme optimalizační problém

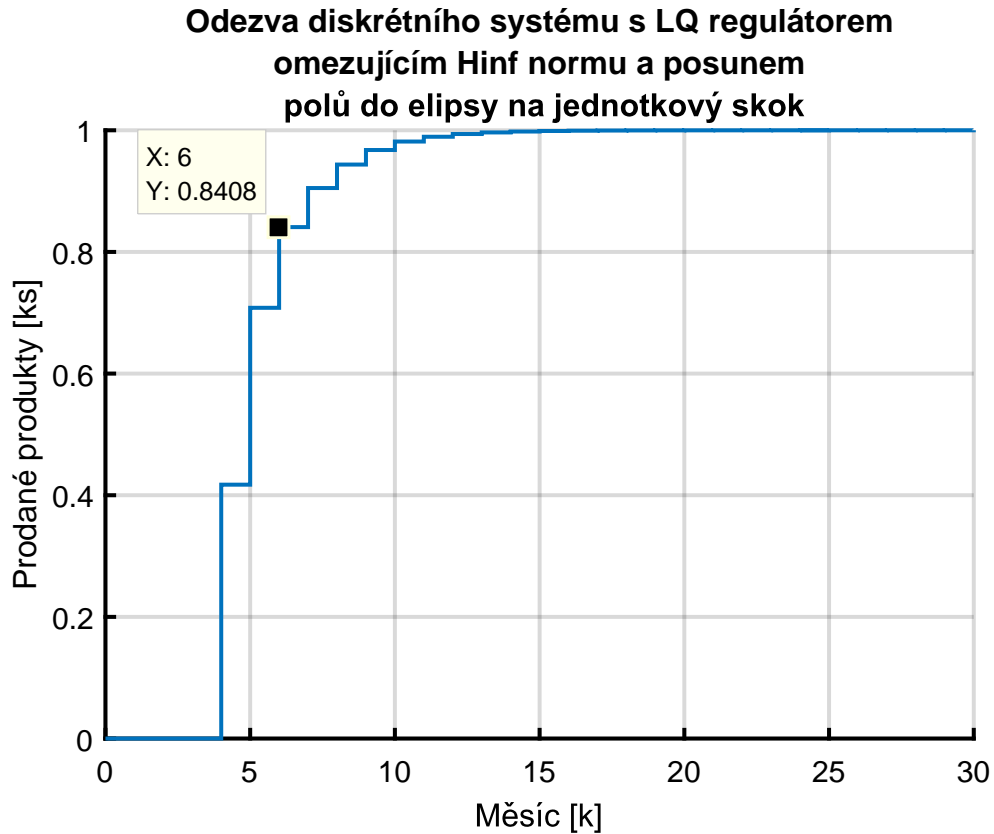
$$\begin{aligned}
& \min \quad \zeta, \gamma^2 \\
& \text{za podmínek} \quad \begin{bmatrix} \zeta & \mathbf{x}^T(0) \\ \mathbf{x}(0) & \mathbf{P} \end{bmatrix} \geq 0 \\
& \quad \begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{P}} & \hat{\mathbf{P}}\mathbf{E}^T - \mathbf{W}^T\mathbf{B}_u^T & \hat{\mathbf{P}} & \mathbf{W}^T \\ \mathbf{E}\hat{\mathbf{P}} - \mathbf{B}_u\mathbf{W} & -\hat{\mathbf{P}} & 0 & 0 \\ \hat{\mathbf{P}} & 0 & -\mathbf{Q}^{-1} & 0 \\ \mathbf{W} & 0 & 0 & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \leq 0 \\
& \quad \begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{P}} & \hat{\mathbf{P}}\mathbf{E}^T - \mathbf{W}^T\mathbf{B}_u^T & 0 & \hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{C}}^T \\ \mathbf{E}\hat{\mathbf{P}} - \mathbf{B}_u\mathbf{W} & -\hat{\mathbf{P}} & \mathbf{B}_w & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_w^T & -\gamma^2\mathbf{I} & 0 \\ \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{P}} & 0 & 0 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0 \\
& \quad \begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{P}} & -cx_{max}\hat{\mathbf{P}} + \frac{c-d}{2}(\mathbf{A}\hat{\mathbf{P}} - \mathbf{B}_u\mathbf{W}) \\ -cx_{max}\hat{\mathbf{P}} + \frac{c+d}{2}(\mathbf{A}\hat{\mathbf{P}} - \mathbf{B}_u\mathbf{W}) & -\hat{\mathbf{P}} \\ +\frac{c-d}{2}(\hat{\mathbf{P}}\mathbf{A}^T - \mathbf{W}^T\mathbf{B}_u^T) & -\hat{\mathbf{P}} \end{bmatrix} \leq 0
\end{aligned} \tag{6.23}$$

Vyřešením problému zadaného v 6.23 jsme našli matice \mathbf{K} a $\hat{\mathbf{P}}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K} &= [0,80 \quad 0,93 \quad 1,10 \quad -1,09] \\
\hat{\mathbf{P}} &= \begin{bmatrix} 0,28 & -0,14 & -0,01 & 0,04 \\ -0,14 & 0,46 & -0,17 & 0,09 \\ -0,01 & -0,17 & 0,49 & 0,36 \\ 0,04 & 0,09 & 0,36 & 0,50 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{6.24}$$

Vlastní čísla matice $\hat{\mathbf{P}}$ jsou kladné, proto je matice $\hat{\mathbf{P}}$ pozitivně definitní.

Na Obr. 6.9 je vykreslena přechodová charakteristika diskrétního LQ regulátoru, který minimalizuje \mathcal{H}_∞ normu ze vstupu na výstup soustavy a přesun pólů systému je omezen do oblasti ohraničené elipsou.



Obr. 6.9: Přejchodová charakteristika systému s LQ diskrétním regulátorem

Po zavedení zpětné stavové vazby a přidání integrátoru na vstup systému jsme dostali operátorový přenos řízení $F_{W_2}(z)$ ve tvaru

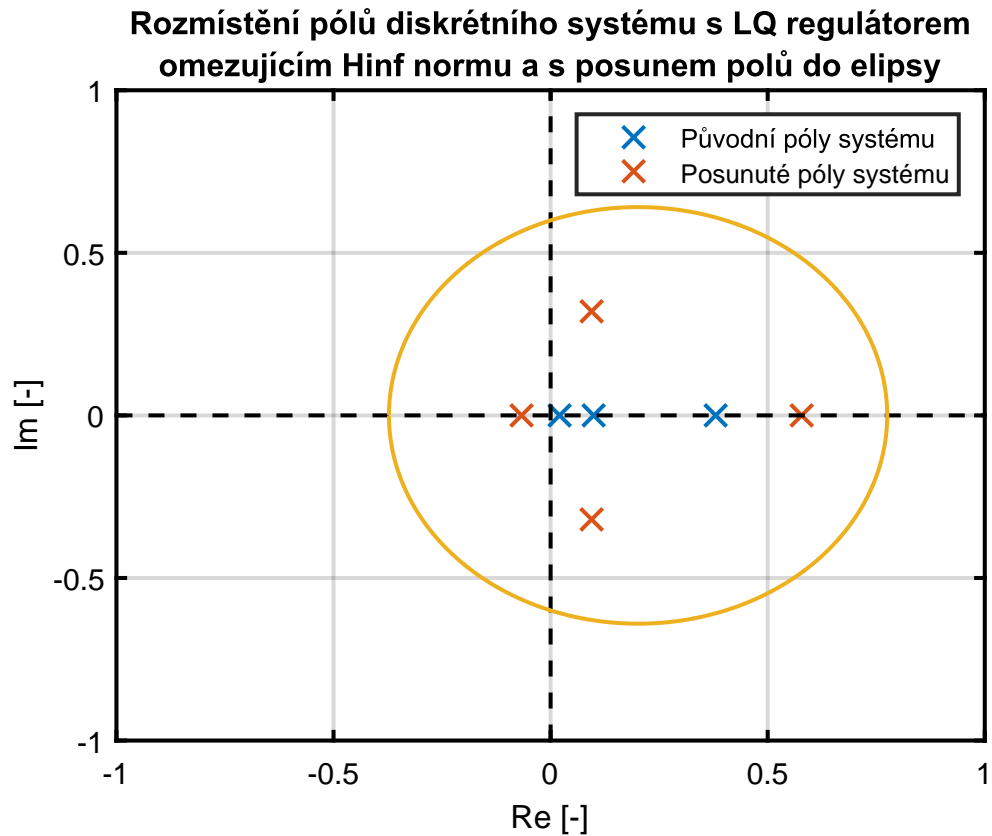
$$F_{W_2}(z) = \frac{0,4174}{z^4 - 0,6967z^3 + 0,1674z^2 - 0,04902z - 0,004367} \quad (6.25)$$

V Tab. 6.8 jsou zobrazeny vlastní čísla matice \mathbf{E}^* , které vznikla zavedením zpětné stavové vazby a přidáním integrátoru na vstup soustavy.

α_1	α_2	α_3	α_4
$-0,07 + j0,00$	$0,01 + j0,32$	$0,01 - j0,32$	$0,58 + j0$

Tab. 6.8: Vlastní čísla matice \mathbf{E}^* diskrétního systému s LQ regulátorem, který minimalizuje \mathcal{H}_{∞} normu ze vstupu na výstup soustavy a přesun polů systému je omezen do oblasti ohraničené elipsou

Na Obr. 6.10 je zobrazeno rozmístění polů diskrétního systému s LQ regulátorem, minimalizujícím \mathcal{H}_{∞} normu a posunujícím póly systému do oblasti ohraničené elipsou. Můžeme vidět, že se póly systému změnil, ale stále platí, že je systém stabilní a póly leží uvnitř definované elipsy.



Obr. 6.10: Rozmístění pólů přenosu řízení $F_{W_2}(z)$ v komplexní rovině s vyznačenou elipsou

Z přechodové charakteristiky na Obr. 6.9 je vidět, že v 6 měsíci výstupní hodnota dosahuje hodnoty 0,8408, což je kolem 84% žádané hodnoty. Proto můžeme prohlásit, že námi navržený LQ regulátor minimalizující \mathcal{H}_{∞} normu diskrétního systému a který posunuje póly systému do oblasti ohraničenou elipsou splňuje požadavky, které byly na regulátor kladeny.

7 ZÁVĚR

V diplomové práci jsem se seznámil se základy optimalizace a s propojením optimalizace a lineárních maticových nerovností. Vyzkoušel jsem nástroje v programu Matlab, které dokáží řešit LMI a problémy optimalizace - toolboxy *cvx*, YALMIP a balík funkcí pro řešení LMI z Robust Control toolboxu.

Pro následující výpočty, které se týkaly LMI, byl vybrán toolbox *cvx*. Oproti dalším toolboxům mě zaujal svojí jednoduchostí zadávání výpočtů. V práci jsou uvedeny výpočty Hurwitzovy a Schurovy stability pomocí programu MATLAB a umístění pólů systému v zadaných oblastech. Na tyto problémy navazují návrhy stavových regulátorů, které přesunují póly do stabilních částí komplexní roviny, nebo do ohraničených oblastí, pomocí LMI.

Tyto metody byly vhodné pro autonomní systém, nebo systém se vstupem, kdy nám nezáleželo na tom, jaký bude mít tvar přechodová charakteristika. Proto byly v práci odvozeny LMI pro návrh regulátoru, který minimalizuje \mathcal{H}_∞ normu ze vstupu na výstup systému a LMI určené pro návrh LQ regulátoru. Odvození bylo provedeno jak pro spojitý systém, tak i pro diskrétní systém.

V závěru práce jsou uvedeny dva příklady, na kterých je ověřena funkčnost odvozených LMI. Jedná se o spojitý a diskrétní systém, pro které je nejprve navržen samotný LQ regulátor. U spojitého LQ regulátoru je ukázán vliv nastavení kriteriálních matic \mathbf{R} a \mathbf{Q} na tvar přechodové charakteristiky. Námi navržený LQ regulátor nespĺňoval zadané požadavky na rychlost přechodové charakteristiky. Vhodnou kombinací kriteriálních matic \mathbf{R} a \mathbf{Q} bychom mohli dosáhnout požadované rychlosti přechodové charakteristiky. Tím by ale mohlo docházet k překmitnutí výstupní veličiny přes žádanou hodnotu, protože bychom povolili větší hodnotu akčního zásahu, a neměli bychom tolik možnost přechodovou charakteristiku ovládat.

Druhý regulátor byl navržen jako LQ regulátor, který minimalizoval \mathcal{H}_∞ normu spojitého systému a přesunutí pólů bylo omezeno do LMI oblasti $\mathcal{S}(\alpha, r, \theta)$ pro omezení kmitání systému. Na Obr. 6.4 je zobrazena přechodová charakteristika přenosu řízení F_{W3} , který vznikl spojením systému a námi navrženým regulátorem. Přenos řízení již splňoval naše požadavky, které jsme si kladli při začátku návrhu regulátoru.

Druhým příkladem je diskrétní systém, který modeluje problém zásobovacího řetězce, kde dovozce materiálu dodává surový materiál výrobcí, který každý měsíc vyrobí výrobky, které následně prodejce prodá konečnému zákazníkovi. Pro systém byly navrženy opět dva regulátory. První regulátor byl samotný LQ regulátor. Odezva systému s LQ regulátorem nespĺňovala zadanou podmínku, že po jednotkovém skoku žádaného množství produktů k prodeji, musí být po 6 měsících dosaženo minimálně 80% žádané hodnoty na výstupu. Proto byl jako druhý regulátor navržen LQ regulátor, který minimalizuje \mathcal{H}_∞ normu diskrétního systému a přesunutí pólů

je omezeno do oblasti ohraničené elipsou. Na Obr. 6.9 je přechodová charakteristika přenosu řízení $F_{W_2}(z)$, který jsme získali spojením zadaného diskrétního systému a navrženého LQ regulátoru, který minimalizuje \mathcal{H}_∞ normu a který přesune póly systému do oblasti ohraničené elipsou. Vidíme, že v 6 měsíci je výstupní hodnota přibližně na 84% žádané veličiny, proto námi navržený regulátor splňuje zadaný požadavek, který jsme na regulátor kladli.

LITERATURA

- [1] BEMPORAD Alberto: *Discrete-time linear systems*. Elektronický materiál k přednášce z předmětu Automatic Control 1. University of Trento. Akademický rok 2010-2011. Dostupné na URL: <http://cse.lab.imtlucca.it/~bemporad/teaching/ac/pdf/04a-TD_sys.pdf>
- [2] BENNER Peter: *On the Kalman-Yakubovich-Popov Lemma and its Application in Model Order Reduction*. Elgersburg Workshop 2013 Dostupné na URL: <https://www.tu-ilmenau.de/fileadmin/media/math/Tagungen/Elg._WS_2013/Benner_Elgersburg2013.pdf>
- [3] BLAHA Petr: *Metoda nejmenších čtverců* Učební materiál k předmětu Modelování a identifikace. Vysoké učení technické v Brně. Dostupné z URL: <<https://sites.google.com/site/modelovaniaidentifikace>> Rubrika *Přednášky*, soubor *mnc.pdf*.
- [4] BLAHA Petr: *Stavový regulátor - stavová zpětná vazba, rekonstruktor stavu* Učební materiál k předmětu Teorie dynamických systémů. Vysoké učení technické v Brně. Dostupné z URL: <<https://sites.google.com/site/teoriedynamickyxsystemu/prednasky>> Soubor *stavzv.pdf*.
- [5] BOYD Stephen, VANDENBERGHE Lieven: *Convex optimization*, Cambridge: Cambridge at the University Press, c2004, ISBN 0-521-83378-7.
- [6] BOYD Stephen: *Linear matrix inequalities in system and control theory*, Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, c1994. SIAM studies in applied mathematics, 15. ISBN 089871334X.
- [7] DUAN Guangren: *LMIs in control systems: analysis, design and applications* Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2013. ISBN 9781466582996.
- [8] GRANT Michael, BOYD Stephen.: *CVX: Matlab software for disciplined convex programming* [online]. verze 2.0 beta. září 2013, [staženo: 28.9.2016]. Dostupné z URL: <<http://cvxr.com/cvx>>.
- [9] GRANT Michael, BOYD Stephen: *Graph implementations for nonsmooth convex programs*, Recent Advances in Learning and Control (a tribute to M. Vidyasagar), V. Blondel, S. Boyd and H. Kimura, editoři, 95-110 stran, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Jaro 2008. <http://stanford.edu/~boyd/graph_dcp.html>.

- [10] GRANT Michael, BOYD Stephen: *CVX Users' Guide*, Dostupné na URL: <<http://web.cvxr.com/cvx/doc/index.html>>
- [11] HOKAYEM Peter Al, GALLESTEY Eduardo: *Lyapunov Stability Theory*, Dostupné na URL: <people.ee.ethz.ch/~apnoco/Lectures2015/03_Lyapunov.pdf>
- [12] LAMBERS James V.: *Positive and Negative Definite Matrices and Optimization* Poznámky k lekci 3 z předmětu MAT 419/519. The University of Southern Mississippi [citováno: 20.12.2016]. Dostupné z URL: <<http://www.math.usm.edu/lambers/mat419/lecture3.pdf>>
- [13] LÖFBERG Johan: *YALMIP : A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB*, Dostupné na URL: <<https://yalmip.github.io/>>
- [14] LÖFBERG Johan: *Automatic robust convex programming*, Článek v Optimization methods and software, vol 27, No 1, s. 115 - 129, 2012, vydavatel: Taylor & Francis. Dostupné na URL: <<http://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/10556788.2010.517532>>
- [15] LÖFBERG Johan: *Pre- and Post-Processing Sum-of-Squares Programs in Practice*, Článek v IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 54 No 5, stránky 1007 - 1011, 2009. Dostupné na URL: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/4908937>>
- [16] MacMartin G. Douglas: *Chapter 2 - Norms for Signals and Systems*. Učební materiál na California Institute of Technology. Dostupné na URL: <<http://www.cds.caltech.edu/~macmardg/courses/cds110b/dft/dft92-ch2.pdf>>
- [17] MathWorks: *Optimization Toolbox*, Toolbox pro program Matlab. Dostupné na URL: <<https://www.mathworks.com/products/optimization.html>>
- [18] MathWorks: *Robust Control Toolbox*, Toolbox pro program Matlab. Dostupné na URL: <<https://www.mathworks.com/products/robust.html>>
- [19] MathWorks: *Dokumentace k funkci feasp*, Dostupné na URL: <<https://www.mathworks.com/help/robust/ref/feasp.html>>
- [20] MESSNER Bill, Hill Rick a JD Taylor: *Aircraft Pitch: System Modeling*. Dostupné na URL: <<http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=AircraftPitch§ion=SystemModeling>>

- [21] MESSNER Bill, Hill Rick a JD Taylor: *Extras: Aircraft Pitch System Variables*. Dostupné na URL: <http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?aux=Extras_AircraftPitchVariables>
- [22] MURRAY M. Richard: *Lecture 2 - LQR control*. Učební materiál k předmětu Control and Dynamical Systems na California Institute of Technology. Dostupné na URL: <<https://www.cds.caltech.edu/~murray/courses/cds110/wi06/lqr.pdf>>
- [23] ROSÍNOVÁ Danica a Holič Ivan: *LMI approximation of pole-region for discrete-time linear dynamic systems*. Proceedings of the 2014 15th International Carpathian Control Conference (ICCC), Velké Karlovice, 2014, s. 497-502.
- [24] STEPHENS David: *Positive definite matrices*, Učební text k předmětu M3S3/S4 Statical Theory II. Imperial College London. Dostupné na URL: <<http://www.imperial.ac.uk/~das01/MyWeb/M3S3/Handouts/Positive.pdf>>
- [25] STURM Jos F.: *Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones*, 1998. Dostupné z URL: <<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.49.6954>>
- [26] ŠEBEK Michael: *Stabilita, převrácená odezva, říditelnost a pozorovatelnost*, Učební materiál k předmětu Automatické řízení 2017. České vysoké učení technické v Praze. Dostupné na URL: <http://www.polyx.com/_ari/slajdy/Bas-ARI-04-Properties.pdf>
- [27] ŠEBEK Michael: *Stavové metody*, Učební materiál k předmětu Automatické řízení 2017. České vysoké učení technické v Praze. Dostupné na URL: <http://www.polyx.com/_ari/slajdy/Bas-ARI-15-State.pdf>
- [28] TŮTŮNCŮ Reha, K.C. Toh a M.J. Todd: *Solving semidefinite-quadratic-linear programs using SDPT3*, Článek v Mathematical programming, 2003, s. 189 - 217. Dostupné z URL:<<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.127.4807>>
- [29] VAVŘÍN Petr: *Teorie automatického řízení I*. Vysoké učení technické v Brně, 1991.

- [30] VESELÝ Libor: *Řiditelnost, dosažitelnost, pozorovatelnost a rekonstruovatelnost systému* Učební materiál k počítačovým cvičením předmětu Teorie dynamických systémů. Vysoké učení technické v Brně. Dostupné z URL: <<https://sites.google.com/site/teoriedynamickyhsystemu/pocitace>> Soubor *Počítačové cvičení MTDS_cp3.pdf*.
- [31] WERNER Tomáš: *Optimalizace*, Elektronická skripta předmětu A4B33OPT. České vysoké učení technické v Praze. Verze ze dne 21. prosince 2016. Dostupné na URL: <https://cw.fel.cvut.cz/wiki/_media/courses/a4b33opt/opt.pdf>

SEZNAM SYMBOLŮ, VELIČIN A ZKRATEK

e	odchylka hodnoty výstupní veličiny od hodnoty požadované veličiny
f	obecná reálná funkce
g_i	i -tá nerovnice
h	afinní funkce
h_i	i -tá rovnice
$J(\theta)$	kritérium pro metodu nejmenších čtverců
K	zesílení spojitého systému 2.řádu
n	řád systému
n, m, p, q	rozměry matice
q	střed kružnice
r	poloměr kružnice
s	obecné komplexní číslo
$s(\mathbf{y}, \mathbf{u})$	suplly funkce systému
T	časová konstanta systému 2.řádu
u_i	pomocná proměnná (slack variable)
$V(\mathbf{x})$	Ljapunovova funkce
$\dot{V}(\mathbf{x})$	derivace Ljapunovovy funkce
w	požadovaná veličina
x_i	stav, který odpovídá integrátoru přidaného na vstup systému
x_{max}	střed elipsy
y	výstupní veličina ze systému
\mathbf{A}	matice vnitřních vazeb systému, obecná matice
\mathbf{B}	matice vazeb systému na vstup
\mathbf{c}	obecný vektor

C	matice vazeb výstupu na stavy
D	matice přímé vazby vstupu na výstup systému
E	matice zpětných vazeb diskrétního systému
E_ε	matice odchylek naměřeného výstupu od vypočteného výstupu na základě odhadnutých parametrů
F, G, L, M	obecné matice
I	jednotková matice
K	vektor zpětných vazeb od stavů
Q	kriteriální matice pro LQ regulátor pro stavy systému
P	čtvercová, symetrická a pozitivně definitní matice
\hat{P}	čtvercová, symetrická a pozitivně definitní matice $\hat{P} = P^{-1}$
R	kriteriální matice pro LQ regulátor pro vstup systému
W	vektor zavedený pro substituci v LMI
x	stavy systému, obecný vektor
X	množina reálných čísel
Y	matice výstupních hodnot
α	horní hrana ohraničené oblasti
β	dolní hrana ohraničené oblasti
γ	omezení \mathcal{H}_∞ normy systému
δ	úhel natočení výškového kormidla u příkladu pro spojitý systém
ϵ	odchylka naměřeného výstupu systému a odhadnutého výstupu
ξ	koeficient tlumení
θ	vektor neznámých parametrů v MNC , úhel natočení letadla v příkladu pro spojitý systém
φ	úhel kruhové výseče, úhel mezi křivkami tlumení u spojitého systému
ϕ	vektor naměřených hodnot

Φ	matice naměřených hodnot
ζ	minimum kritéria pro LQ regulátor
\mathcal{L}_2	2-norma signálu
\mathcal{H}_∞	∞ -norma systému
GP	mód výpočtu toolboxu <i>cvx</i> - geometric programming
LMI	lineární maticová nerovnost
LP	lineární programování
MNČ	metoda nejmenších čtverců
QP	kvadratické programování
SDP	semidefinitní programování, mód výpočtu toolboxu <i>cvx</i> - semidefinite programming

SEZNAM PŘÍLOH

A	Matematické prerekvizity	73
B	Výpisy z programu Matlab	83
C	Obsah přiloženého CD	85

A MATEMATICKÉ PREREKVIZITY

Lineární rovnice a nerovnice

Jako **lineární rovnici** rozumíme výrok $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$. Můžeme tedy zapsat, že platí $h(\mathbf{x}) = 0$, kde h je afinní funkce.

Na druhou stranu, jako **lineární nerovnici** rozumíme výraz $a_1x_1 + \dots + a_nx_n \leq b$ nebo $a_1x_1 + \dots + a_nx_n \geq b$. Jako lineární nerovnici tedy můžeme definovat $h(\mathbf{x}) \leq 0$ nebo $h(\mathbf{x}) \geq 0$, kde h je afinní funkce.

Pojem **afinní funkce** lze nejjednodušeji vysvětlit na problému funkce s jednou reálnou proměnnou. Grafem afinní funkce s jednou reálnou proměnnou je přímka, kterou lze zapsat jako $y = a_1x_1 + b$.

Maticové operace

Definitnost matice

Matice \mathbf{A} je pozitivně definitní, pokud splňuje podmínku $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ pro každé nenulové $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Pokud je matice \mathbf{A} pozitivně definitní, tak má následující vlastnosti:

- Všechna vlastní čísla matice \mathbf{A} mají kladné reálné části.
- Minory (determinanty submatic) na hlavní diagonále jsou všechny kladné.

Matice \mathbf{A} je negativně definitní, pokud splňuje podmínku $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} < 0$ pro každé nenulové $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Pokud je matice \mathbf{A} negativně definitní, tak má následující vlastnosti:

- Všechna vlastní čísla matice \mathbf{A} mají záporné reálné části.
- Minorům na hlavní diagonále se střídají znaménka v pořadí $-+ -+ -+$. Počet minorů určuje velikost matice \mathbf{A} [12].

Matice \mathbf{A} je pozitivně semidefinitní, pokud splňuje podmínku $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$ pro každé nenulové $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Matice \mathbf{A} je negativně semidefinitní, pokud splňuje podmínku $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq 0$ pro každé nenulové $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Schurův doplněk

Nadefinujme si matici \mathbf{M} , která se skládá ze submatic:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Kde submatice \mathbf{A} má rozměry $p \times p$, submatice \mathbf{B} má rozměry $p \times q$, submatice \mathbf{C} má rozměry $q \times p$ a submatice \mathbf{D} má rozměry $q \times q$. Celkový rozměr matice \mathbf{M} je $(p+q) \times (p+q)$.

Můžeme definovat, že Schurův doplněk pro matici \mathbf{A} je matice o rozměrech $q \times q$

$$\mathbf{M}/\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad (\text{A.2})$$

Stejně tak pro matici \mathbf{D} je Schurovým doplněkem matice o rozměrech $p \times p$:

$$\mathbf{M}/\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} \quad (\text{A.3})$$

Definujme si případ, kdy $\mathbf{C} = \mathbf{B}^T$. Matice \mathbf{M} se tedy změní do tvaru:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Pokud máme matice \mathbf{A} a \mathbf{D} symetrické, tak platí následující podmínka: Pokud je matice \mathbf{A} a Schurův doplněk \mathbf{M}/\mathbf{A} pozitivně semidefinitní, tak je potom matice \mathbf{M} také pozitivně semidefinitní.

Kroneckerův součin

Mějme matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a matici $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times q}$. Potom je Kroneckerův součin definován jako:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \cdots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Pro Kroneckerův součin platí následující pravidla (matice musejí mít odpovídající rozměry):

- $\mathbf{1} \otimes \mathbf{A} = \mathbf{A}$
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{C}$
- $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{A}\mathbf{C}) \otimes (\mathbf{B}\mathbf{D})$
- $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T$
- $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}$
- $\lambda(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \{\lambda_i(\mathbf{A})\lambda_j(\mathbf{B})\}$

Přičtení konstanty k vlastním číslům matice

Mějme libovolnou matici \mathbf{M} , která má vlastní čísla $\lambda(\mathbf{M})$. Vyšetřujeme, zda vlastní čísla jsou menší, než zadaná hranice t :

$$\lambda_{\max}(\mathbf{M}) \leq t \quad (\text{A.6})$$

Při převedení t na levou stranu nerovnice dostaneme:

$$\lambda_{\max}(\mathbf{M}) - t \leq 0 \quad (\text{A.7})$$

To si můžeme přepsat do tvaru:

$$\lambda_{\max}(\mathbf{M} - t\mathbf{I}) \leq 0 \quad (\text{A.8})$$

Můžeme tedy napsat:

$$\lambda_{\max}(\mathbf{M}) \leq t \Leftrightarrow \lambda_{\max}(\mathbf{M} - t\mathbf{I}) \leq 0 \Leftrightarrow \mathbf{M} - t\mathbf{I} \leq 0 \quad (\text{A.9})$$

Místo abychom vyšetřovali, zda jsou vlastní čísla matice \mathbf{M} menší, než zadaná hranice t , tak můžeme vlastní čísla matice \mathbf{M} posunout o t a vyšetřovat, zda jsou nově vzniklá vlastní čísla menší než 0. Převzato z [7] (Lemma 1.1 na straně 10).

Metoda nejmenších čtverců

Mějme diskretní systém, u kterého jsme schopni měřit výstupní veličinu $y(k)$. Abychom mohli určit model systému, tak musíme určit jednotlivé parametry přenosu. Počet parametrů záleží na zvoleném modelu. Můžeme napsat, že výstup systému se rovná:

$$y(k) = \varphi^T(k)\theta \quad (\text{A.10})$$

Kde $\varphi^T(k)$ je sloupcový vektor, který obsahuje známé veličiny (naměřené výstupní a vstupní hodnoty). θ je sloupcový vektor obsahující neznámé parametry. Oba vektory mají stejnou velikost n - podle počtu neznámých koeficientů, které se snažíme zjistit.

Při určování parametrů můžeme průběžně počítat odchylku ε , která porovnává výstup systému a předpokládaný výstup podle našich odhadnutých parametrů a naměřených veličin:

$$\varepsilon(k) = y(k) - \varphi^T(k)\theta \quad (\text{A.11})$$

Abychom získali co nejlepší odhad parametrů, tak si nadefinujeme kritérium, které bude určovat kvadrát odchylek ε :

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \varepsilon^2(k) \quad (\text{A.12})$$

Pro další odvozování musíme předpokládat, že proběhlo N měření a proto můžeme vytvořit následující matice:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y(k) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} \quad \Phi = \begin{bmatrix} \varphi(k)^T \\ \vdots \\ \varphi(N)^T \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon(k) \\ \vdots \\ \varepsilon(N) \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

Potom můžeme kritérium zapsat do tvaru:

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \mathbf{E}_\varepsilon^T \mathbf{E}_\varepsilon \quad (\text{A.14})$$

Po dosazení A.11 do rovnice A.14 získáme:

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N [y(k) - \varphi^T(k)\theta]^2 = \frac{1}{2} (\mathbf{Y} - \Phi\theta)^T (\mathbf{Y} - \Phi\theta) \quad (\text{A.15})$$

Abychom našli správné parametry, tak odchylky musí být co nejmenší. To platí tedy i pro námi zvolené kritérium $\mathbf{J}(\theta)$. Hledáme minimum kritéria. Abychom ho našli, musíme udělat první derivaci $\mathbf{J}(\theta)$ a položit jí rovno 0. Při odvozování se využijí následující vzorce pro maticový počet:

$$\begin{aligned} (\mathbf{AB})^T &= \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \\ \frac{d}{dx} (\mathbf{Ax}) &= \mathbf{A}^T \\ \frac{d}{dx} (\mathbf{x}^T \mathbf{A}) &= \mathbf{A} \\ \frac{d}{dx} (\mathbf{x}^T \mathbf{Ax}) &= 2\mathbf{Ax} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Nyní si můžeme vyjádřit $\frac{d\mathbf{J}(\theta)}{d\theta}$:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{J}(\theta)}{d\theta} &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} (\mathbf{Y}^T - \theta^T \Phi^T) (\mathbf{Y} - \Phi\theta) = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \mathbf{Y}^T \Phi\theta - \theta^T \Phi^T \mathbf{Y} + \theta^T \Phi^T \Phi\theta) = \\ &= \frac{1}{2} (-\Phi^T \mathbf{Y} - \Phi^T \mathbf{Y} + 2\Phi^T \Phi\theta) = (-\Phi^T \mathbf{Y} + \Phi^T \Phi\theta) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Derivaci kritéria položíme rovno 0 a můžeme si vyjádřit neznámé parametry θ :

$$\begin{aligned} -\Phi^T \mathbf{Y} + \Phi^T \Phi\theta &= 0 \\ \Phi^T \Phi\theta &= \Phi^T \mathbf{Y} \\ \theta &= (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{Y} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Nejlepší odhad parametrů modelu získáme, pokud provedeme výpočet podle rovnice A.18. Tím jsme si odvodili analytické řešení metody nejmenších čtverců [3].

Ljapunovova stabilita

Spojité systémy

Předpokládejme Ljapunovovu funkci v kvadratickém tvaru:

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (\text{A.19})$$

Kde vektor \mathbf{x} obsahuje n počet stavových veličin systému a \mathbf{P} je obecná matice $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n$

Aby byl systém stabilní, tak musí splňovat následující dvě podmínky:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\mathbf{x}) &> 0 \\ \dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) &< 0 \text{ nebo } \dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Při druhé podmínce se můžeme rozhodnout zda budeme uvažovat ostrou nebo neostrou nerovnost. Pokud budeme uvažovat neostrou nerovnost, tak připouštíme, že matice $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ může být negativně semidefinitní. Tento případ by nastal pokud by byl systém na mezi stability - jeden z pólů nebo komplexně sdružená dvojice pólů leží na imaginární ose v komplexní rovině. Při následujících výpočtech uvažujeme podmínku s ostrou nerovností.

Abychom ji mohli splnit, tak musíme určit derivaci Ljapunovovy funkce. Pro odvození předpokládejme jednoduchou situaci, kdy máme dvě stavové veličiny x_1 a x_2 a symetrickou matici \mathbf{P} :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

Roznásobením a upravením výrazu A.19 získáme následující zápis:

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = x_1^2 p_{11} + 2x_1 x_2 p_{12} + x_2^2 p_{22} \quad (\text{A.22})$$

Pokud nyní provedeme $\frac{d\mathbf{V}}{dt}$, tak můžeme napsat:

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) = 2x_1 \dot{x}_1 p_{11} + 2\dot{x}_1 x_2 p_{12} + 2x_1 \dot{x}_2 p_{12} + 2x_2 \dot{x}_2 p_{22} \quad (\text{A.23})$$

V rovnici A.23 se objeví prvky \dot{x}_1 a \dot{x}_2 , protože jednotlivé stavy jsou závislé na čase. Tento výraz si můžeme upravit do podoby maticového násobení:

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

V maticovém zápisu tedy můžeme zapsat, že derivace Ljapunovovy funkce $\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x})$ se rovná:

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} \quad (\text{A.25})$$

Předpokládejme autonomní systém:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (\text{A.26})$$

Vezmeme-li rovnici A.26 a dosadíme ji do rovnice A.25, tak po drobné úpravě (zleva vytkneme \mathbf{x}^T a zprava vytkneme \mathbf{x}), získáme následující zápis:

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} \quad (\text{A.27})$$

Nyní můžeme získanou derivaci, zapsanou v rovnici A.27, dosadit do A.20. Získáme podmínky, které musí platit, aby byl autonomní systém stabilní:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} &> 0 \\ \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} &< 0 \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Druhým výrazem v rovnici A.28 říkáme, že musí platit, že výraz $\mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x}$ je negativně definitní. Pokud existuje matice \mathbf{P} , která je pozitivně definitní ($P > 0$), tak můžeme prohlásit, že výraz $\mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x}$ je negativně definitní a tím je splněna i druhá podmínka v rovnici A.28. Existuje-li tedy řešení, že \mathbf{P} je pozitivně definitní matice, tak můžeme prohlásit, že je autonomní systém A.26 stabilní.

Diskrétní systémy

Při odvození Ljapunovovy funkce pro diskrétní systém postupujeme obdobně jako u spojitých systémů. Ljapunovova funkce má stejný tvar jako A.19.

Diskrétní autonomní systém je definován jako:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{E} \mathbf{x}(k) \quad (\text{A.29})$$

Kde \mathbf{E} je matice zpětných vazeb u diskrétního systému. Podmínku A.20 upravíme do tvaru pro diskrétní systém:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\mathbf{x}(k)) &> 0 \\ \left[\mathbf{V}(\mathbf{x}(k+1)) - \mathbf{V}(\mathbf{x}(k)) \right] &< 0 \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Druhou podmínku z rovnice A.30 můžeme rozepsat, když do ní dosadíme A.19 a získáme:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\mathbf{x}(k+1)) - \mathbf{V}(\mathbf{x}(k)) &= \mathbf{x}(k+1)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(k) = \\ &= \mathbf{x}(k)^T \mathbf{E}^T \mathbf{P} \mathbf{E} \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Aby byl diskrétní systém stabilní, tak musí platit tyto podmínky [11]:

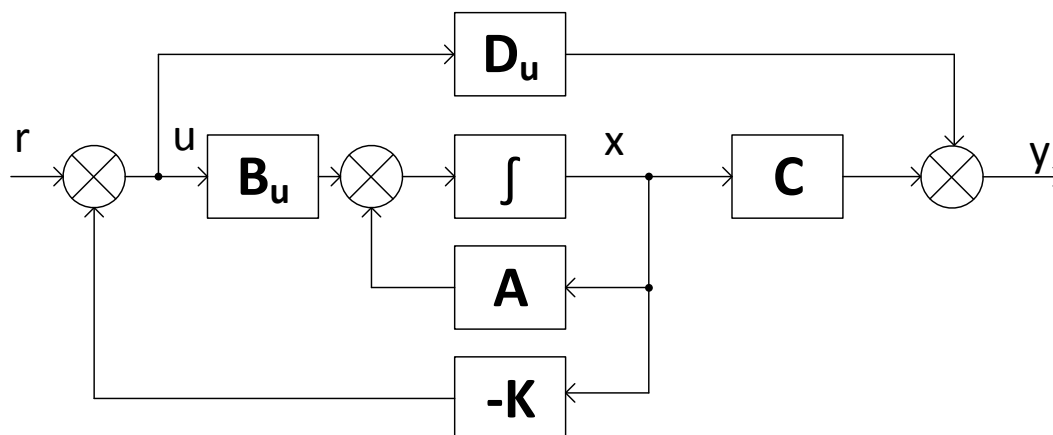
$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} &> 0 \\ \mathbf{x}(k)^T \mathbf{E}^T \mathbf{P} \mathbf{E} \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(k) &< 0 \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Stavová zpětná vazba

Uvažujme spojité systém definovaný v rovnici A.33.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}_u \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D}_u \mathbf{u} \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

V případě, že je systém plně říditelný, tak můžeme libovolně posouvat póly systému. Dosáhneme toho tak, že od jednotlivých stavů systému zavedeme zpětnou vazbu přes vektor \mathbf{K} viz. blokové schéma na Obr. A.1.



Obr. A.1: Stavová zpětná vazba systému

Potom platí

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{K}\mathbf{x}. \quad (\text{A.34})$$

Po dosazení do rovnice A.33 získáme

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}_u\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{B}_u\mathbf{r} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{D}_u\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{D}_u\mathbf{r} \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Tím získáme novou matici zpětných vazeb $\mathbf{A}^* = \mathbf{A} - \mathbf{B}_u\mathbf{K}$, novou matici výstupu $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} - \mathbf{D}_u\mathbf{K}$ a nový vstup do systému \mathbf{r} .

Nulová ustálené odchylka od žádané hodnoty

Spojité systém

Posunutím pólů systému můžeme zajistit stabilní systém. Pokud si ale vykreslíme přechodovou charakteristiku na jednotkový skok na vstupu systému, tak uvidíme, že na výstupu systému je odchylka od žádané hodnoty i po odeznění přechodového děje. Abychom na výstupu měli nulovou odchylku od žádané hodnoty, tak musíme na vstup systému připojit integrátor. Na vstup integrátoru budeme přivádět odchylku:

$$\mathbf{e} = \mathbf{w} - \mathbf{y}. \quad (\text{A.36})$$

V ustáleném stavu bude platit $\mathbf{w} = \mathbf{y}$. Mějme systém definovaný v A.35 a předpokládejme $\mathbf{D}_u = 0$. Potom po přidání integrátoru platí

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} - k_i b_w x_i. \quad (\text{A.37})$$

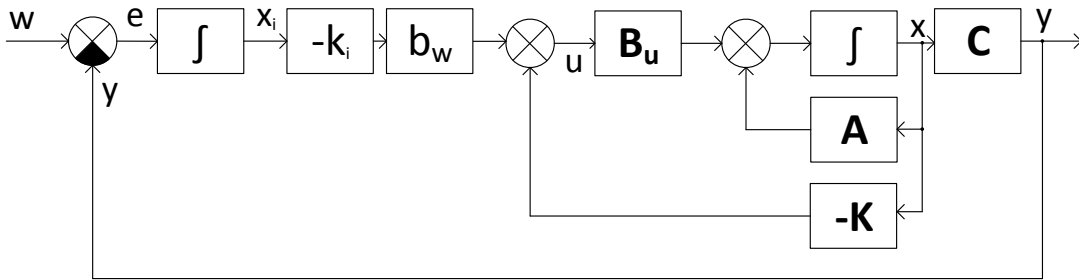
Stavový popis vzniklého systému můžeme napsat jako

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}_u \mathbf{K} & -\mathbf{B}_u b_w k_i \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ b_w \end{bmatrix} w \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Vstup do systému - žádaná hodnota \mathbf{w} vstupuje do systému přes integrátor a novou matici vstupu \mathbf{B}_w . \mathbf{B}_w má většinou tvar uvedený v rovnici A.38 jako

$$\mathbf{B}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ b_w \end{bmatrix}, \quad (\text{A.39})$$

kde nulový vektor má velikost matice vstupu \mathbf{B}_u . Blokové schéma stavového popisu z rovnice A.38 můžeme vidět na obrázku A.2.



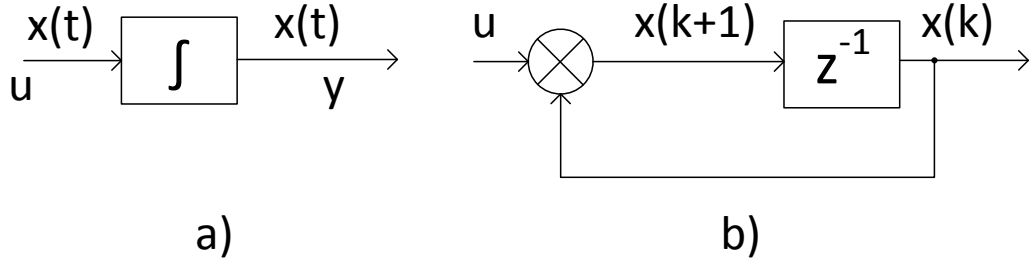
Obr. A.2: Blokové schéma stavového popisu systému po přidání stavové zpětné vazby a integrátoru

Při zavedení zpětné stavové vazby musíme prvně matici zpětných vazeb \mathbf{A} a matici vstupu \mathbf{B} rozšířit o stav integrátoru a následně vypočítat s novými maticemi vektor stavových zpětných vazeb $[\mathbf{K} \ k_i]$. Kde k_i je zesílení, které se přidá k integrátoru na vstup systému. Tím je zajištěna nulová ustálená odchylka na výstupu systému od žádané hodnoty na vstupu [27].

Diskrétní systém

Pokud chceme přidat zpětnou stavovou vazbu k diskrétním systému, tak postupujeme stejným způsobem jako u spojitého systému. Rozdíl nastává, pokud chceme

na vstup systému připojit integrátor. Na Obr. A.3 je zobrazeno blokové schéma spojitého a diskrétního integrátoru.



Obr. A.3: Blokové schéma a) spojitého integrátoru b) diskrétního integrátoru

Pokud si napíšeme stavový popis spojitého integrátoru uvedeného na Obr. A.3 a), tak získáme

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{u} \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{x}(t)\end{aligned}\tag{A.40}$$

V případě stavového popisu diskrétního integrátoru uvedeného na Obr. A.3 b) získáme

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{x}(k) + \mathbf{u} \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{x}(k)\end{aligned}\tag{A.41}$$

Vidíme, že u diskrétního integrátoru se nám vyskytuje zpětná vazba od stavu, která se následně projeví ve stavovém popisu celého systému.

Mějme definovaný diskrétní systém

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{E}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_u\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_u\mathbf{u}(k)\end{aligned}\tag{A.42}$$

Při předpokladu $D_u = 0$ zavedeme zpětnou stavovou vazbu a na vstup systému vložíme integrátor. Tím dostaneme nový stavový popis systému

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{x}_i(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{E} - \mathbf{B}_u\mathbf{K} & -\mathbf{B}_u\mathbf{K}_i \\ -\mathbf{C} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}_i(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} w(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}_i(k) \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{A.43}$$

Rozdíl mezi výsledným diskretním a spojitým systémem můžeme vidět na pozici [2,2] v matici zpětných vazeb, kde u diskretního systému je 1 a u spojitého systému je 0. To vychází z definice integrátorů, tak jak jsme si je popsali výše.

B VÝPISY Z PROGRAMU MATLAB

Zde si zobrazíme pár příkladů jak lze zapsat LMI, které jsme odvodili, do programu Matlab za využití toolboxu *cvx*. Zbylé pomocné výpočty nejsou ve výpisech zobrazeny. V *m*-souborech se řeší LMI dvakrát. Poprvé, když se řeší stavový regulátor a podruhé, když se ověřuje, zda došlo k přesunu pólů. Ve výpisech si zobrazíme pouze LMI, které řeší stavovou zpětnou vazbu a to pro následující případy:

- Posun pólů do levé poloroviny
- Posun pólů do oblasti ohraničené křivkami, které prochází body α a β
- Posun pólů do oblasti ohraničené kružnicí
- Posun pólů do oblasti $\mathbb{S}(\alpha, r, \varphi)$

Plné verze jednotlivých programů a další příklady jsou v elektronické verzi na přiloženém CD.

Výpis B.1: Posun pólů do levé poloroviny

```
1 % Soubor posun_leva_polorovina na přiloženém CD
2 %% Vypocet stavove zpetne vazby - do leve poloroviny
3 cvx_begin sdp
4 variable P1(n_stav,n_stav) symmetric
5 variable W(1,n_stav)
6 P1>=eye(n_stav,n_stav)*eps
7 A*P1+P1*A'-B*W-W'*B' <=-eye(n_stav,n_stav)*eps
8 cvx_end
```

Výpis B.2: Posun pólů do oblasti ohraničené křivkami, které prochází body α a β

```
1 % Soubor posun_polorovina_AB na přiloženém CD
2 %% Vypocet stavove zpetne vazby - do alfa, beta roviny
3 cvx_begin sdp
4 variable P1(n_stav,n_stav) symmetric
5 variable W(1,n_stav)
6 P1>=eye(n_stav,n_stav)*eps
7 A*P1+P1*A'-B*W-W'*B'+2*alfa*P1<=-eye(n_stav)*eps
8 -A*P1-P1*A'+B*W+W'*B'-2*beta*P1<=-eye(n_stav)*eps
9 cvx_end
```

Výpis B.3: Posun pólů do oblasti ohraničené kružnicí

```

1 % Soubor posun_kruznice na přiloženém CD
2 %% Vypocet stavove zpetne vazby - do kruznice
3 cvx_begin sdp
4 variable P1(n_stav,n_stav) symmetric
5 variable W(1,n_stav)
6 P1>=eye(n_stav,n_stav)*eps
7 [-r*P1 q*P1+A*P1-B*W;
8   q*P1+P1*A'-W'*B' -r*P1]<=-eye(n_stav+n_stav)*eps
9 cvx_end

```

Výpis B.4: Posun pólů do oblasti $S(\alpha, r, \varphi)$

```

1 % Soubor posun_S_oblast na přiloženém CD
2 %% Vypocet stavove zpetne vazby - S oblast
3 cvx_begin sdp
4 variable P1(n_stav,n_stav) symmetric
5 variable W(1,n_stav)
6 P1>=eye(n_stav)*eps
7 2*alfa*P1+A*P1+P1*A'-B*W-W'*B'<=-eye(n_stav)*eps
8 [-r*P1 A*P1-B*W;
9   P1*A'-W'*B' -r*P1]<= -eye(n_stav+n_stav)*eps
10 [(A*P1+P1*A'-W'*B'-B*W)*sin(theta)
11 (A*P1-P1*A'-B*W+W'*B')*cos(theta);
12 (P1*A'-A*P1-W'*B'+B*W)*cos(theta)
13 (A*P1+P1*A'-B*W-W'*B')*sin(theta)]<=-eye(2*n_stav)*eps
14 cvx_end

```

C OBSAH PŘILOŽENÉHO CD

Přiložené CD obsahuje elektronickou verzi práce.

Dále je na CD složka MATLAB, které obsahuje m-file, ve kterých jsou LMI řešeny.

Každý m-file v hlavičce obsahuje, který toolbox je potřeba ke správném spuštění m-filu. Součástí hlavičky je i webová adresa, ze které lze daný toolbox stáhnout. Návod na instalaci toolboxu je vždy na stránkách vývojáře toolboxu.

Všechny m-file byly vytvořeny v Matlab 2015b.

Adresářová struktura přiloženého CD:

```
/..... kořenový adresář přiloženého CD
├── DP_2017_Daniel_Martin.pdf.....elektronická verze diplomové práce
├── MATLAB ..... m-file soubory s příklady výpočtů
│   ├── cvx_yalmip_rctoolbox.m
│   ├── diskretni_LQ.m
│   ├── diskretni_LQ_Hinf_elipsa.m
│   ├── elipsa_vykresleni.m
│   ├── Hurwitz_Schur.m
│   ├── posun_elipsa.m
│   ├── posun_kruznice.m
│   ├── posun_leva_polorovina.m
│   ├── posun_polorovina_AB.m
│   ├── posun_S_oblast.m
│   ├── spojity_LQ.m
│   └── spojity_LQ_Hinf_S_oblast.m
```