



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A  
BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND  
BIOMECHANICS

# NAPJATOSTNĚ DEFORMAČNÍ ANALÝZA JAMKY A DŘÍKU TOTÁLNÍ NÁHRADY TRAPÉZIOMETAKARPÁLNÍHO KLOUBU

STRESS AND DEFORMATION ANALYSIS OF THE STEM AND CUP OF THE TOTAL  
REPLACEMENT OF THE TRAPEZIOMETACARPAL JOINT

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

TOMÁŠ SVOJANOVSKÝ

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

doc. Ing. VLADIMÍR FUIS, Ph.D.

BRNO 2013



Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky  
Akademický rok: 2012/2013

## **ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE**

student(ka): Tomáš Svojanovský

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Strojní inženýrství (2301R016)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

### **Napjatostně deformační analýza jamky a dřívku totální náhrady trapéziometakarpálního kloubu**

v anglickém jazyce:

#### **Stress and deformation analysis of the stem and cup of the total replacement of the trapeziometacarpal joint**

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

V současné době se provádí v nemocnici v Havlíčkově Brodě klinické testy nového typu totální náhrady trapéziometakarpálního kloubu. Lékaře kromě klinických testů zajímá i napjatost a deformace prvků této nové náhrady.

Cíle bakalářské práce:

- provedení rešerše týkající se trapéziometakarpálního kloubu a jeho náhrad.
- vytvoření zjednodušeného modelu dřívku a jamky v systému MKP ANSYS.
- provedení napjatostně deformační analýzy uvedené soustavy.

Seznam odborné literatury:

1. Trtík, L.: Rhizartróza, současně možnosti léčení. Ortopedie 2011, 5 str. 28-33.
2. Katalog firmy Beznoska - náhrada trapéziometakarpálního kloubu.
3. Manuál systému MKP ANSYS.

Vedoucí bakalářské práce: doc. Ing. Vladimír Fuis, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2012/2013.

V Brně, dne 15.10.2012

L.S.

---

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
Ředitel ústavu

---

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.  
Děkan fakulty

## Abstrakt

Centrem pozornosti bakalářské práce je napjatostně deformační analýza totální náhrady trapeziometakarpálního skloubení. První část práce tvoří medicínská podstata věci, a to z anatomického i patologického hlediska. Pojítka mezi rešeršní studií a analýzou představuje krátký úvod k metodě konečných prvků.

K samotné napjatostně deformační analýze bylo využito programu ANSYS Workbench 14.5 založeného právě na metodě konečných prvků. Jedním ze záměrů je seznámit se s tímto programem a naučit se získávat správné výsledky. Hlavním cílem práce je zachytit a popsat napjatost a deformaci u zjednodušeného modelu jistého implantátu. I přes určitá zjednodušení by se měly výsledné hodnoty blížit těm reálným.

Kromě zmiňované analýzy jsou v práci uvedeny různé přístupy, které lze k řešení použít. Nachází se zde také srovnání, které poukazuje na výhody a nevýhody jednotlivých přístupů.

## Klíčová slova

Trapeziometakarpální kloub, napjatostně deformační analýza, rhizartróza, metoda konečných prvků, ANSYS Workbench, Lagrangeův variační princip, základní rovnice MKP

## Abstract

The center of attention of this bachelor's thesis is stress and deformation analysis of the total replacement of the trapeziometacarpal joint. The first part is formed by medical essence of the matter, namely from the anatomical and pathological point of view. The connecting link between literature research and analysis creates a short introduce to the finite element method.

To the stress and deformation analysis itself was used the program ANSYS Workbench 14.5 based just on the finite element method. One of the purposes is to get to know this program and to learn to gain correct results. The main target is to catch and describe stress and deformation of the simplified model of a certain implant. Despite some of the simplifications, resulting values should approach to the real values.

Except for the mentioned analysis, there are introduced different approaches, which could be used for the solution. There is also some comparison of advantages and disadvantages of particular approaches.

## Keywords

Trapeziometacarpal joint, stress and deformation analysis, rhizarthrosis, finite element method, ANSYS Workbench, Lagrange's variational principle, fundamental equation of FEM

## **Bibliografická citace**

SVOJANOVSKÝ, T. *Napjatostně deformační analýza jamky a dřívku totální náhrady trapéziometakarpálního kloubu*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2013. 71 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Vladimír Fuis, Ph.D.

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité prameny a literaturu.

V Brně dne 24. 5. 2013

.....

## **Poděkování**

Rád bych vyjádřil velké poděkování mému vedoucímu bakalářské práce doc. Ing. Vladimíru Fuisovi, Ph.D., zejména za jeho ochotu, trpělivost, důležité rady a cenné připomínky. Dále bych chtěl poděkovat pánům Ing. Tomáši Návratovi, Ph.D. a Ing. Petru Vosynkovi, kteří mi pomáhali řešit časté problémy, jež byly nedílnou součástí práce. Největší poděkování patří celé mé rodině, která mi byla po celou dobu oporou a vytvářela vlídné pracovní prostředí.

# Obsah

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Úvod.....</b>                               | <b>11</b> |
| <b>Formulace problému a cíle řešení.....</b>   | <b>12</b> |
| Formulace problému.....                        | 12        |
| Cíle řešení.....                               | 12        |
| <b>1 Rešeršní studie.....</b>                  | <b>13</b> |
| 1.1 Anatomie ruky.....                         | 13        |
| 1.1.1 Kostí ruky.....                          | 13        |
| 1.1.2 Svaly ruky.....                          | 14        |
| 1.1.3 Kloubní spojení.....                     | 15        |
| 1.1.4 Základní pohyby prstů.....               | 16        |
| 1.2 Rhizartróza.....                           | 16        |
| 1.2.1 Rhizartróza a anatomie.....              | 16        |
| 1.2.2 Příčiny nemoci.....                      | 17        |
| 1.2.3 Vývoj v těle v důsledku onemocnění.....  | 17        |
| 1.2.4 Příznaky rhizartrózy.....                | 17        |
| 1.2.5 Léčení.....                              | 18        |
| 1.2.6 Shrnutí.....                             | 21        |
| <b>2 Úvod k metodě konečných prvků.....</b>    | <b>23</b> |
| 2.1 Diferenciální versus variační princip..... | 23        |
| 2.2 Lagrangeův variační princip a MKP.....     | 23        |
| 2.3 Základní algoritmus MKP.....               | 25        |
| 2.4 Řešení a konvergence.....                  | 25        |
| 2.5 Lineární a nelineární úlohy.....           | 26        |
| 2.6 Kontaktní úlohy.....                       | 26        |
| <b>3 Tvorba výpočtového modelu.....</b>        | <b>27</b> |
| 3.1 Model geometrie.....                       | 27        |
| 3.2 Model materiálu.....                       | 27        |
| 3.3 Model vazeb a zatížení.....                | 28        |
| 3.4 Definice kontaktu.....                     | 29        |
| 3.5 Tvorba sítě.....                           | 29        |
| 3.6 Diskuze 3D a 2D axisymetrické úlohy.....   | 31        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>4</b> | <b>Prezentace a analýza výsledků.....</b>  | <b>33</b> |
| 4.1      | Konfigurace č. 1 – symetrické zatížení .....                                     | 33        |
| 4.1.1    | Úvod ke konfiguraci č. 1 .....   | 33        |
| 4.1.2    | Vybrané charakteristiky v závislosti na koeficientu tření .....                  | 34        |
| 4.1.3    | Vybrané charakteristiky v závislosti na modulu pružnosti materiálu .....         | 38        |
| 4.1.4    | Vybrané charakteristiky v závislosti na zatížení při koeficientu tření 0,3 ..... | 41        |
| 4.2      | Konfigurace č. 2 – zatížení silou s odklonem $5^\circ$ .....                     | 44        |
| 4.2.1    | Úvod ke konfiguraci č. 2 .....   | 44        |
| 4.2.2    | Vybrané charakteristiky v závislosti na zatížení při koeficientu tření 0,3 ..... | 45        |
| 4.3      | Konfigurace č. 3 – zatížení silou s odklonem $15^\circ$ .....                    | 47        |
| 4.3.1    | Úvod ke konfiguraci č. 3 .....   | 47        |
| 4.3.2    | Vybrané charakteristiky v závislosti na zatížení při koeficientu tření 0,3 ..... | 48        |
| 4.3.3    | Ověření výsledků Hertzovou teorií .....  | 51        |
| 4.4      | Srovnání konfigurací na 3D modelu po kvantitativní stránce .....                 | 53        |
| 4.5      | Srovnání konfigurací po výpočetní stránce .....                                  | 55        |
| <b>5</b> | <b>Závěr .....</b>   | <b>57</b> |
|          | <b>Seznam použité literatury.....</b>  | <b>58</b> |
|          | <b>Seznam použitých zkratk a symbolů .....</b>                                   | <b>60</b> |
|          | <b>Seznam obrázků .....</b>  | <b>61</b> |
|          | <b>Seznam tabulek.....</b>   | <b>62</b> |
|          | <b>Přílohy .....</b>   | <b>63</b> |
|          | Odvození Lagrangeova variačního principu.....                                    | 63        |
|          | Odvození základní rovnice MKP .....  | 67        |

## Úvod

Řešení inženýrských, vědeckých, medicínských a jiných problémů s sebou přináší otázku, jak dojít k požadovanému cíli co nejkvalitněji a nejefektivněji. V posledních letech přichází na svět jedna z velice uspokojivých odpovědí, které ještě před sto lety představovaly něco zcela nemyslitelného, ba dokonce nadpřirozeného. Touto odpovědí je metoda konečných prvků, popřípadě metoda konečných objemů a podobně.

Geniální matematikové, fyzikové a další vědci již v dávné minulosti dokázali odvodit exaktní vztahy, jimiž lze popsat spousty jevů odehrávajících se v přírodě okolo nás. Ovšem na druhou stranu existují problémy, které donedávna nebylo možné vyřešit vůbec, nebo jen experimentálně, což často obnášelo nemalé komplikace. S příchodem numerických metod se jedna z trhlin ve schopnostech vědy a techniky začíná zacelovat.

Metoda konečných prvků (MKP) nachází uplatnění v nesčetných technických odvětvích, jako jsou pevnostní výpočty, modální analýza, vedení tepla, proudění tekutin atd. Při odborných znalostech a správné manipulaci MKP poskytuje výsledky, které mohou ušetřit mnoho času, peněz a někdy i lidských životů. Navíc přispívá k rychlému vývoji, který v dnešní společnosti zaujímá důležité postavení.

Spolu s vysokou úrovní dnešní medicíny a výpočetních systémů nabývá na důležitosti věda nazývaná biomechanika. Jedná se o vědní obor shromažďující poznatky z medicíny a mechaniky, většinou s podporou právě MKP. Aplikací poznatků dochází ke zvyšování kvality kloubních náhrad, implantátů a dalších doplňků přispívajících k příjemnějšímu prožití života pacientů. Kvalitnějším provedením náhrady se například minimalizuje počet operací, jež musí pacienti podstoupit, nebo se snižuje bolestivost a zlepšuje funkčnost.

Tato bakalářská práce se zaměřením na napjatostně deformační analýzu totální náhrady trapéziometakarpálního skloubení spadá do oblasti biomechaniky. Předmětem zájmu je analyzovat rozložení kontaktních tlaků, velikost napětí různých typů, velikost kontaktní plošky v závislosti na zatížení, koeficientu smykového tření, případně na volbě materiálu. Snahou je, aby zaujala nejen na první pohled, ale aby neupadla v zapomnění hned po prostudování.

Mimo hlavní téma, které tvoří vrchol, se práce člení na několik částí. První kapitola se věnuje anatomickému pojetí ruky s postupným zacílením na řešené skloubení. Následuje vysvětlení, z jakého důvodu se totální náhrada provádí, a přehled metod léčení včetně totálních náhrad. Příčinu představuje onemocnění zvané rhizartróza. Aby dílo neunavovalo jednolitým zaměřením, pro menší uspokojení duše s matematickým cítěním se další kapitola věnuje základům MKP, v příloze je uvedeno odvození Lagrangeova variačního principu, s nímž MKP úzce souvisí, a odvození základnímu algoritmu MKP.

Vedlejším cílem, který s hlavním tématem souvisí jen vzdáleně, je právě zformovat v podobě přílohy, pokud možno srozumitelné, ucelené odvození týkající se MKP, konkrétně Lagrangeova variačního principu a základní rovnice MKP. Hlubší pochopení teoretické stránky MKP přináší neocenitelné zkušenosti, které mohou výrazně podpořit a usnadnit budoucí práci s touto široce využitelnou metodou.

# Formulace problému a cíle řešení

## Formulace problému

Výše uvedený text nastiňuje problematiku bakalářské práce jen stručně. Následující řádky se pokusí čtenáři přiblížit hlavní důvody vzniku práce a její cíle. Celá práce se zakládá na podnětu ze strany MUDr. Lubomíra Trtíka z nemocnice v Havlíčkově Brodě. V této nemocnici se provádí klinické testy na implantátu nové generace, který se může stát totální náhradou v těle pacientů s onemocněním trapéziometakarpálního skloubení a alespoň tak zmírnit nebo zcela eliminovat problémy s nemocí spojené. Avšak tento nový typ implantátu zjevně neprošel napjatostně deformační analýzou, která by mohla ovlivnit další vývoj nebo úpravu tohoto implantátu z mechanického pohledu. Proto bylo rozhodnuto, že je zapotřebí tuto analýzu co nejdříve provést a za tímto účelem byl osloven Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky na VUT FSI v Brně, který se mimo jiné podobnou problematikou zabývá.

Ukázalo se, že nejméně nákladným a poměrně věrohodným řešením bude provést tuto analýzu v rámci bakalářské práce. Jelikož se mi zdálo toto téma mezi několika dalšími nadmíru poutavé, rozhodl jsem se právě pro něj. Hlavní důvod představoval zejména fakt, že bakalářská práce může v budoucnosti nalézt užitečné uplatnění např. u MUDr. Trtíka ve vývoji podobného implantátu. Dalším magnetem bylo seznámení s metodou konečných prvků a její aplikace, přičemž zkušenosti nabyté při práci s MKP jistě nezůstanou zapomenuty a poslouží jako odrazový můstek v dalším studiu, případně v budoucím zaměstnání.

## Cíle řešení

Aby došlo k ozvláštnění práce, první kapitola zaujímá rešeršní studie. Cílem této rešeršní studie je popsat problematiku skloubení z hlediska anatomického, tedy jednoduše řečeno, charakterizovat všechny podstatné náležitosti skloubení u zdravého člověka. Naopak druhá část rešeršní studie má za cíl věnovat se onemocnění zvanému rhizartróza, kvůli níž je implantace kloubní náhrady prováděna.

Před analýzou se musí vytvořit výpočetní model, který se bude věrně blížit tomu reálnému. V tomto případě bylo odsouhlaseno, že k analýze postačí zjednodušený model implantátu. Tedy přesné rozměry budou aplikovány především na oblast styku jamky a dřívku implantátu. Protože tvar protáhlé části dřívku ovlivňuje napjatost a deformaci ve stykové oblasti zanedbatelně, pro jednoduchost bude uvažována jen hlavice.

Samotná napjatostně deformační analýza představuje těžiště problému. Cílem je provést simulace na modelech ve třech různých konfiguracích, tzn. při zatížení pod rozdílnými úhly. Data získaná z těchto výpočtů budou zanesena do grafů a pokusí se vyjádřit průběhy nejpodstatnějších veličin na odlišných parametrech. Hlavním účelem je tedy poskytnout charakteristické trendy, které budou nějakým způsobem interpretovány a které zodpoví mnoho důležitých otázek. Nedílnou součástí musí být verifikace výsledků, jejímž cílem bude posoudit kvalitu výsledků a odhadnout, jak mohou být získané výsledky vzdálené od reality.

# 1 Rešeršní studie

## 1.1 Anatomie ruky

### 1.1.1 Kostí ruky

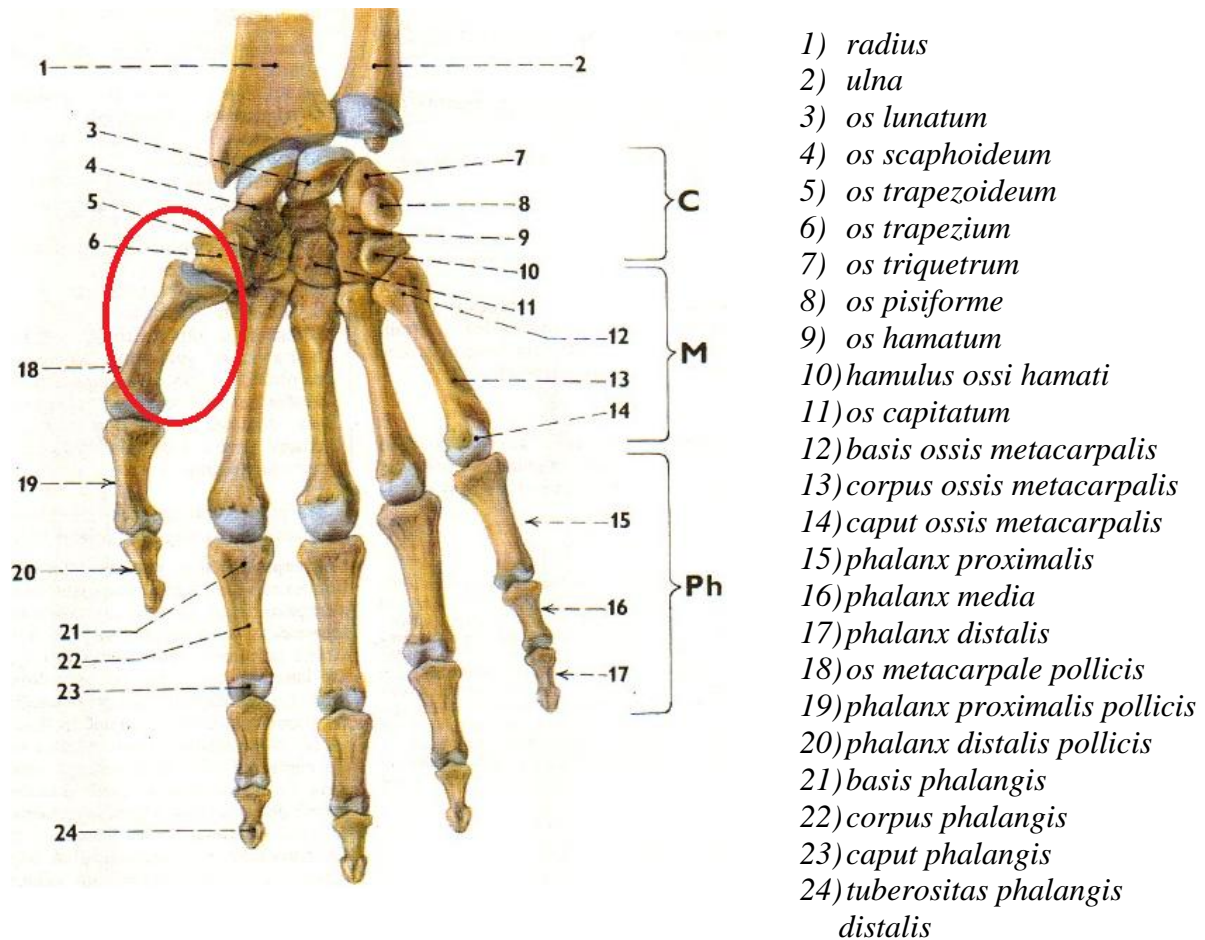
Protože se bakalářská práce zabývá napjatostně deformační analýzou totální náhrady kloubního spojení ruky, jako nejvhodnější úvod do problematiky se jeví popis ruky z anatomického hlediska. Kostra ruky sestává ze tří základních podoblastí a navíc malých kůstek nacházejících se ve šlachách. První podoblast tvoří kosti zápěstní, latinsky ossa carpi, jež zahrnují osm kostí ne příliš pravidelného tvaru. Druhou podoblastí jsou kosti záprstní, ossa metacarpi, které se skládají z pěti protáhlých kostí. Třetí podoblast zahrnuje články prstů, neboli phalanges. U palce se nachází dva články, zatímco u zbývajících prstů tři články. Jak již bylo zmíněno, kromě těchto tří podoblastí je kostra ruky doplněna většinou dvěma drobnými kůstkami ossa sesamoidea ve šlachách. [1]

Nyní bude pozornost zaměřena na zápěstí, carpus. Jedná se o celek uspořádaný ze zápěstních kostí, které tvoří řady proximální (blíže ke středu těla) a distální (dále od středu těla) po čtyřech kostech. Pro kosti zápěstní je charakteristické, že na hřbetní straně většiny z nich jsou otvory pro cévy a na dlaňové straně jsou lehce vypouklé. Nutno podotknout, že po narození bývají všechny zápěstní kůstky chrupavčité a teprve postupem času dochází ke zkosnatění, osifikaci. Osifikace probíhá postupně, v případě ossa carpi probíhá tento proces po spirále od os capitatum po os trapezoideum až do věku třinácti let. U karpálních kostí nejčastěji dochází ke zlomeninám kosti os scaphoideum. V léčbě navíc může bránit oddělení od výživných cév. [1]

Metacarpus distálně navazuje na carpus a vytváří jej ossa metacarpi. Metakarpální kosti se skládají ze tří základních částí, a to basis, corpus a caput. Basis je širší proximální část, na níž se nachází ploška pro skloubení s kostmi zápěstí. Corpus představuje štíhlé tělo spojující basis a caput. Caput je hlavice na distálním konci, jejíž tvar přechází směrem ke dlani od kulovité plochy po válcovou. [1]

Vzhledem k zaměření této bakalářské práce je vhodné detailněji popsat právě metakarpální kosti. Jednotlivé kosti jsou pojmenovány os metacarpale a následně římskou číslicí od jedné do pěti počínaje palcem. Os metacarpale I je nejkratší, ale zároveň nejtlustší metakarpální kostí proximálně přizpůsobenou sedlovitou plochou pro kloubní spojení s os trapezium. Toto kloubní spojení, respektive jeho totální náhrada je centrem pozornosti bakalářské práce. Os metacarpale II je na rozdíl od předchozí kosti nejdelší, charakteristická zářezem pro spojení s os trapezoideum. Os metacarpale III je opatřena ploškou pro styk s os capitatum, podobně jako os metacarpale IV a os metacarpale V navazují na os hamatum. Pro metakarpální kosti jsou typické hmatatelné dorsální plochy. Čím se metakarpální kosti odlišují od jiných, je průběh osifikace. První metakarp kostnatí z epifýzy (výrůstek na okraji kosti) při bázi, čímž se podobá článkům prstů. Ostatní metakarpy osifikují z diafýzy (střední část dlouhé kosti) od prenatalního období po třetí rok věku dítěte. [1]

Články prstů, phalanges, čítají dvě kosti u palce a po třech kostech u ostatních prstů. Podobně jako záprstní kosti, tak i články prstů se člení na tři části. Basis phalangis je širší úsek nejbližší k záprstním kostem, corpus phalangis tvoří střední štíhlé tělo a distální hlavice nese název caput phalangis. Podle polohy se rozlišují následující články prstů. Phalanx proximalis disponuje svou oválnou jamkou pro hlavici metakarpálních kostí. Phalanx media chybí u palce a spojuje výše zmíněný článek s nejkratším phalanx distalis, jenž je na okraji opatřen rozšířením. Osifikace článků prstů se v mnohém podobá metakarpálním kostem. [1]

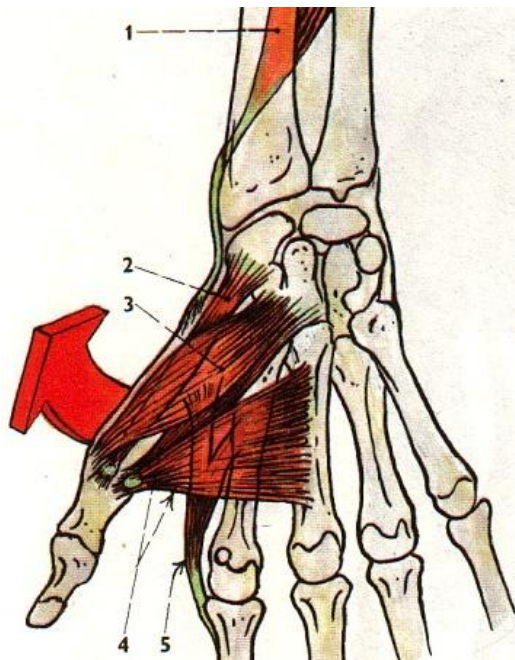


Obr. 1.1 Kostí ruky, pohled na dlaňovou stranu [1]

Mechanické vlastnosti kostí jsou ve smyslu pevnosti a s jistou nadsázkou srovnatelné např. s mosazí, litinou nebo kujným železem, neboť snáší mechanické napětí 100 – 200 MPa, což znamená sílu 100 – 200 N na 1 mm<sup>2</sup>. Kostí nejlépe odolávají statickému tahovému a tlakovému zatížení, hůře statickému zkrutnému a nejhůře dynamickému zatížení. Nutno zmínit, že experimenty probíhají na kostech vyjmutých z organismu. Navíc v těle jsou kosti zatíženy působením svalů. Z toho vyplývá, že experimentální hodnoty jsou spíše orientační vzhledem ke kostem sloužícím živým a zdravým lidem. [1]

### 1.1.2 Svaly ruky

Nedílnou součástí anatomické stavby ruky jsou svaly. Mezi svaly tenaru, skupiny palcové, náleží čtyři svaly. *Musculus abductor pollicis brevis* zastává funkci krátkého odtahovače palce. *Musculus flexor pollicis brevis* je krátký ohýbač palce. *Musculus opponens pollicis* zajišťuje opozici palce, čímž se uplatňuje při stisku s ostatními prsty a uchopování předmětů. *Musculus adductor pollicis* slouží jako přitahovač palce. Při pohybu palcem se uplatňuje také sval *musculus interosseus dorsalis I*, přestože nepatří do skupiny tenaru. [1]

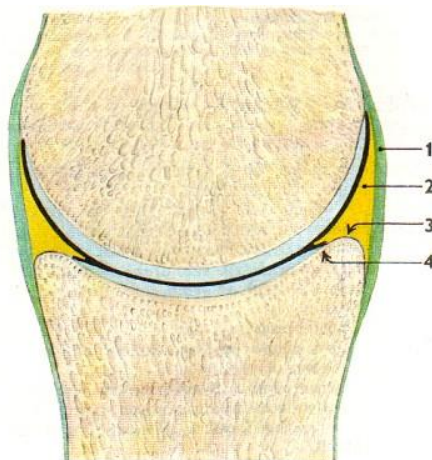


- 1) *m. abductor pollicis longus*
- 2) *m. abductor pollicis brevis*
- 3) *m. opponens pollicis*
- 4) *m. adductor pollicis*
- 5) *m. interosseus dorsalis I*

Obr. 1.2 Opozice palce a zúčastněné svaly [1]

### 1.1.3 Kloubní spojení

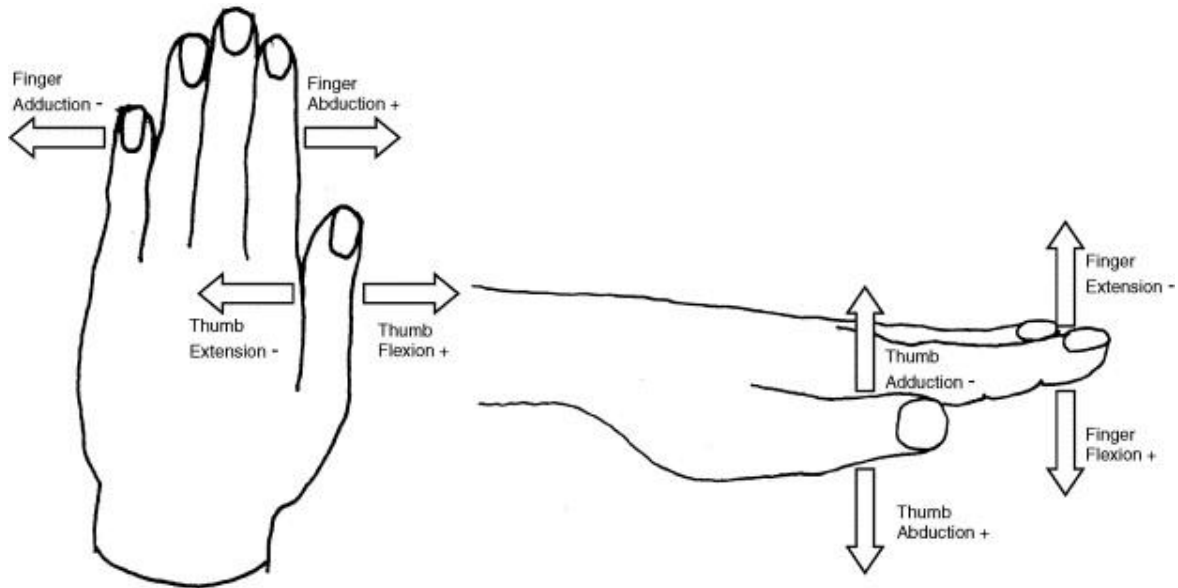
Obecné kloubní spojení je realizováno dotykem styčných ploch povlečených vrstvou chrupavky o tloušťce desetin až jednotek milimetrů podle velikosti namáhání v závislosti na umístění. Chrupavka patří mezi tuhé, avšak poměrně pružné tkáně schopné vyrovnávat otřesy. Po obvodu styčných ploch se nachází vazivové kloubní pouzdro zajišťující soudržnost při tahovém namáhání. Část vaziva produkuje tzv. synoviální tekutinu, která mj. snižuje tření a zvyšuje otěruvzdornost v místě kontaktu. Pro představu součinitel smykového tření ve zdravém lidském kloubu dosahuje hodnot mezi 0,005 a 0,025. U totální náhrady se součinitel tření může pohybovat až v desetinách jednotek podle použitých materiálů a způsobu mazání. [1]



- 1) *kloubní pouzdro*
- 2) *synoviální vrstva*
- 3) *přechodná zóna synoviální membrány*
- 4) *okraj chrupavky kloubní jamky, chrupavka modře, kloubní štěrbině černě*

Obr. 1.3 Podélný řez kloubem (obecné schéma) [1]

### 1.1.4 Základní pohyby prstů



Obr. 1.4 Základní pohyby palce a ostatních prstů [19]

Podobně jako u jiných pohyblivých částí lidského těla, tak i u palce rozlišujeme čtyři základní pohyby. Pohyb palce směrem od ostatních prstů se nazývá flexe. Naopak přiblížení palce k prstům nese název extenze. Jak naznačuje obrázek vpravo, v rovině kolmé na oba předchozí pohyby existují dále směrem dolů abdukce a směrem nahoru addukce. Z obrázku je dále patrné, že směry palce a ostatních prstů nejsou analogické, jak by se dalo očekávat. [19]

## 1.2 Rhizartróza

Rhizartróza spadá do oblasti artrózy, tedy bolestivého onemocnění kloubů. Konkrétně se jedná o artrózu trapéziometakarpálního kloubu. Po artróze distálních interfalangeálních kloubů jde o druhou nejčastější formu artrózy na ruce. Toto onemocnění velmi často postihuje ženy po menopauze. Konzervativní léčba dosahuje úspěchu u zhruba 75 % pacientů. Při negativních výsledcích nastupuje léčba chirurgická, kterou lze rozdělit do tří základních skupin: trapézectomie prostá nebo s ligamentoplastikou, artrodézy, trapéziální implantáty. [2]

### 1.2.1 Rhizartróza a anatomie

Z hlediska anatomického je skloubení trapéziometakarpální sedlovitým kloubem se dvěma základními mechanickými osami, jež umožňují pohyby flexe – extenze (ohýbání – napřímění), abdukce – addukce (odtažení – přitažení). Poněkud volné a široké pouzdro trapéziometakarpálního kloubu je zesíleno ligamenty a šlachami vedoucími k palci. Mezi prvním a druhým metakarpem se rozepíná intermetakarpální vaz, který je hlavním stabilizačním ligamentem. Vedle něj zesiluje kloubní pouzdro také postero-mediální vaz šikmý, antero-mediální vaz šikmý a antero-laterální vaz přímý. Z experimentů vyplývá, že maximálním stiskem palce a prstu lze vyvinout sílu až 1200 N, kterou je namáhán trapéziometakarpální kloub. [2]

### 1.2.2 Příčiny nemoci

Diagnózou rhizartrózy trpí v 80 až 90 % ženy, a to přibližně od 50 let věku. Poměrně vzácným původcem této nemoci může být zlomenina ve zmiňované oblasti. Mnohem častější příčinou onemocnění rhizartrózou bývá subluxece (částečné vykloubení) báze prvního metakarpu a s ní spojené projevy. [2]

### 1.2.3 Vývoj v těle v důsledku onemocnění

Mnohé studie odhalují, že artróza trapéziometakarpálního skloubení se vyskytuje v souvislosti s postižením okolních kloubů, zejména skloubení trapézia s druhým metakarpem a scafoideem. Jeden z prvních příznaků onemocnění, poškození chrupavky, se s postupem času rozvíjí v komplexní artrotické postižení s typickými znaky. Na vnější a později i na vnitřní straně intermetakarpálního prostoru dochází k růstu kostních výrůstků – osteofytů. Právě narůstání osteofytů na vnitřní straně způsobuje zmenšení kloubního prostoru, následné porušení intermetakarpálního ligamentu (vazu), což má za následek vývoj subluxece. Zvětšování osteofytů může zapříčinit vznik hrbolku v karpálním tunelu a tím pádem porušování dalších oblastí. Některé z těchto patologických záležitostí potom mohou mít nepříznivý vliv na chirurgické řešení rhizartrózy. [2]



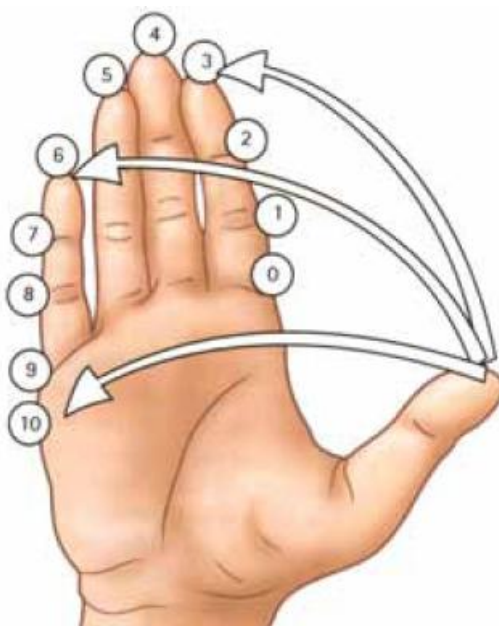
*Obr. 1.5 Pokročilé stádium rhizartrózy [2]*

### 1.2.4 Příznaky rhizartrózy

Rhizartróza se často zpočátku neprojevuje téměř žádnými příznaky, hovoří se o asymptomatickém onemocnění. Později se projevuje bolestí lokalizovanou do oblasti báze prvního metakarpu, především při namáhání a pohybu. V případě nočních bolestí je vhodné ujistit se, zda se nejedná o syndrom karpálního tunelu. Mezi typické příznaky rhizartrózy náleží omezení pohyblivosti a síly palce a otoky. Z klinického hlediska musí být provedeno vyšetření přímým prohmátáním bolestivého místa, aby došlo k rozlišení, zda zdroj bolesti pochází z trapéziometakarpálního či skafotrapéziálního skloubení. Při dalším klinickém

vyšetření je nejčastěji posuzován pohyb palce ve smyslu flexe – extenze, abdukce – addukce. [2]

Nepostradatelné je rovněž jednoduché hodnocení opozice palce podle Kapandjiho. V současné době nejpoužívanější přístup, anatomicko-radiologický, přinesl v posledních letech řadu klasifikačních metod při stanovení stupně postižení trapéziometakarpálního kloubu, např. klasifikace podle Della, Burtona, Eatona-Littera, Crosbyho atd. Hodnocení opozice palce podle Kapandjiho je jednoduchý způsob zjištění správné funkce palce. Jak naznačuje obr. 1.6, spočívá ve vyhodnocení přitisknutí palce na jedenáct různých míst ruky. [2]



Obr. 1.6 Hodnocení opozice palce podle Kapandjiho [2]

V odstavci výše byly zmíněny čtyři klasifikace onemocnění rhizartrózou. Každá klasifikace rozlišuje čtyři různá stádia. Kupříkladu klasifikace podle Della se vyznačuje následujícím vývojem. V prvním stádiu dochází k zúžení kloubní štěrbině, avšak zatím nejsou přítomny osteofyty ani subluxace. Bolest se projevuje pouze při námaze. Ve druhém stádiu se již osteofyty na ulnárním okraji trapézia začínají objevovat a do jedné třetiny stykové plochy je subluxace redressibilní (vratná). Třetí stádium s sebou přináší velké osteofyty a subluxace postihuje více než třetinu kloubní plochy. V tomto stádiu redressibilita není možná a dochází k vychýlení palce, k takzvané addukční deformitě. Ve čtvrtém stádiu mizí kloubní linie. Snad jedinou výhodou je, že bolest se projevuje poněkud mírně, zato značně nepříjemná je téměř nemožná pohyblivost kloubního spojení. [2]

## 1.2.5 Léčení

### 1) Konzervativní léčba

Tímto způsobem léčby lékaři usilují o zmírnění bolestivých projevů rhizartrózy. Stádium bolesti obvykle setrvává od 2 do 6 let. Podle některých studií přibližně každý desátý pacient pocítuje tyto nepříjemné příznaky i po 8 letech. Po několika letech přichází stádium bez bolesti, jež ve většině případů doprovází deformity a destrukce kloubu. Konzervativní postoj pak vyžaduje užívání analgetik, nesteroidních antiflogistik, ortézy, analgetickou rentgenovou terapii nebo infiltraci kortikoidů. Tím pádem je tento stav obtížně řešitelný. [2]

## 2) Chirurgická léčba

Chirurgická léčba sestává ze tří základních přístupů k trapéziometakarpálnímu kloubu:

### 1. Dorso-laterální přístup

Tento přístup je v endoprotetice nejčastěji používán. K cílovému kloubu se vniká mezi šlachami krátkého a dlouhého extenzoru palce.

### 2. Přední přístup

Kožní incize je vedena po zevním okraji thenarového svalstva.

### 3. Přístup skrze karpální tunel

Podle informací z úvodu chirurgická léčba k problému rhizartrózy přistupuje jednou ze tří metod: trapézectomie s ligamentoplastikou nebo interpozitem, trapéziometakarpální artrodéza, trapéziální implantáty a protézy.

- **Trapézectomie**

Tato chirurgická metoda byla poprvé popsána Gervisem v roce 1949 a v posledních letech je četně využívána. Metoda má smysl zejména v případě selhání protézy a často ve spojení s ligamentoplastikou nebo interpozitem. Existuje několik technik nesoucích jméno po jejich výzkumnících, např. Jones, Weilby, Burton a Pellgrini, Eaton-Litter.

- **Artrodéza**

Artrodéza byla poprvé objasněna v témže roce jako trapézectomie, avšak Müllerem. Zákrok je na první pohled poněkud nelogický, jelikož zabraňuje opozici palce. Artrodéza je zpravidla realizována dorso-laterálním přístupem s použitím kortikospongiosního štěpu.

Metoda sice zaručuje bezbolestnost, na druhou stranu je omezena pohyblivost palce. Problémem však zůstává konsolidace (zkostnatění zlomeniny kosti) a nutnost sádrové fixace po dobu až tří měsíců. Podmínkou správné funkce jsou zdravé okolní klouby schopné částečně kompenzovat pohyb trapéziometakarpálního skloubení. V opačném případě dochází k bolestivosti a přetížení. Je třeba zdůraznit, že artrodéza má četné nedostatky, kupříkladu ruka postrádá jemnou techniku, nelze ji položit na stůl a v neposlední řadě jsou problémy s navlékáním rukavic.

- **Trapéziální implantáty a protézy**

#### a) Částečné implantáty

Částečné implantáty jsou aplikovány při artróze trapéziometakarpální, bez artrózy peritrapéziální. Za nejznámějšími typy částečných implantátů jsou považovány Asworth-Blatt a Kessler. V současnosti se náhrady báze prvního metakarpu vyrábí z pyrolytického karbonu.



Obr. 1.7 Rentgenový snímek částečného implantátu v oblasti báze prvního metakarpu [2]

#### b) Totální trapéziální implantáty

Pro znalce je určitě nejznámější Swansonův silastikový implantát, posléze nahrazený titanovým. Jednou z výhod tohoto totálního trapéziálního implantátu bylo zachování výšky prvního sloupce. Naopak musela být aplikována četná ligamentoplastika z důvodu opakovaných luxací. Dokonce se zde objevovaly zlomeniny dřívku, nepravidelný otěr na stykových plochách hlavy a jamky atd. Především ve Francii si držela věhlas Kapandjiho kardanová protéza.

#### c) Totální trapéziometakarpální protézy

Tyto protézy se rozlišují do dvou skupin – trapéziální a metakarpální. V 70. letech 20. století se na jejich vývoji podíleli Jacques Duparc a Jean-Yves de La Caffinière. Záměrem totálních trapéziometakarpálních protéz je adaptace z hlediska anatomického, uspokojivá pohyblivost, dostatečná stabilita a vysoká životnost. Přestože první generace protéz aplikovaná u pacientů přinesla zklamání, druhá generace si vede poněkud obstojněji. Existují modely s tímto označením: Elektra, Roseland, Arpe, Carat, Maïa, Rubis2, Ivory, Guepar, Isis, Oxalys a podobně. Ke zdokonalení funkčnosti implantátů dopomohl rozvoj po stránce technické i chirurgické. V technické sféře došlo např. k vývoji způsobu kotvení a povrchových úprav materiálů. Vedle toho se v chirurgické sféře zkvalitňuje postup celého zákroku.

V 90. letech jsou zveřejněny první studie seriózně porovávající trapezectomii a právě totální trapéziometakarpální protézy. Mezi výhody protéz náleží zachování anatomie, ligamentosní struktury pouzdra a biomechaniky palce tím, že se nemění délka prvního sloupce a fyziologické centrum rotace. Mezi typické projevy selhání současných protéz patří luxace, která postihuje 6 až 8 % pacientů, zatímco uvolněním vazby mezi kostí a protézou trpí přibližně 10 % pacientů. Oproti první generaci protéz se však jedná o významný posun vpřed. Pro představu ve Francii se cena implantátu pohybuje okolo 1250 Euro.

V České republice se první implantace tohoto druhu uskutečnila o několik let později než ve Francii, konkrétně v roce 2008 v Havlíčkově Brodě. V současnosti se česká chirurgie může pyšnit již téměř stovkou podobných zákroků. Na hodnocení je ale prozatím brzy kvůli malému množství statistických dat. Zpravidla bývají implantovány dva z několika prezentovaných implantátů druhé generace, a to Maïa a Rubis2. Vyskytují se zde mj. odlišnosti v materiálech a centru rotace. U typu Maïa dosedá kovový dřík do polyetylenové jamky a centrum rotace se nachází v trapézii. Naproti tomu u typu Rubis2 jsou dřík i jamka vyrobeny z kovu a centrum rotace leží v bázi prvního metakarpu. [2]



*Obr. 1.8 Totální náhrada protézou Maïa [2]*



*Obr. 1.9 Totální náhrada protézou Rubis2 [2]*

### 1.2.6 Shrnutí

V současnosti existuje hned několik možností, jak řešit onemocnění rhizartrózou v závislosti na stádiu a závažnosti nemoci. MUDr. Lubomír Trtík pracující v nemocnici v Havlíčkově Brodě se zabývá implantací jmenovaných moderních protéz. K vývoji jeho studie, která je vzhledem k počtu zákroků stále ještě v počátcích, by měla dopomoci napjatostně deformační analýza zjednodušeného modelu zvoleného typu implantátu. Analýza a její hodnocení jsou hlavními cíli této bakalářské práce.



## 2 Úvod k metodě konečných prvků

Metoda konečných prvků náleží mezi numerické metody s širokým uplatněním v téměř všech inženýrských odvětvích, kde analytické metody selhávají nebo kde je požadováno ověření jinou metodou. MKP nachází využití v oblasti mechaniky kontinua (teorie pružnosti, plasticity...), vedení tepla, difúze, elektřiny a magnetismu a podobně. Řešení na rozdíl od analytických metod není zcela přesné, avšak k exaktnímu řešení se lze přiblížit s požadovanou přesností. Aplikace MKP je záležitostí posledních desetiletí, kdy dochází k masivnímu rozvoji výpočetní techniky. Postup řešení problémů se stává příjemnější, výsledky přesnější a výpočetní čas přijatelnější. [5], [9]

### 2.1 Diferenciální versus variační princip

Z matematického hlediska existují dva přístupy, a to diferenciální a variační. Diferenciální princip vychází z vymezení elementárního prvku infinitezimálních rozměrů, zapsání diferenciálních rovnic rovnováhy elementárního prvku tělesa, geometrických rovnic, konstitutivních vztahů, příslušných okrajových podmínek a následného řešení soustavy diferenciálních rovnic. [8]

Na druhou stranu smyslem variačního principu je převod systému základních vztahů obecné pružnosti na jiný, který se postupně upravuje. Základní myšlenka se týká minimalizace funkcionálu, a to z důvodu, že děje v přírodě probíhají při minimální potenciální energii. Oba přístupy vedou ke stejným výsledkům. Na variačním principu, konkrétně Lagrangeově variačním principu, stojí základy MKP. [8]

### 2.2 Lagrangeův variační princip a MKP

Celková potenciální energie tělesa:

$$\Pi = W - P. \quad (1)$$

Energie napjatosti tělesa:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV. \quad (2)$$

Potenciál vnějšího zatížení:

$$P = \int_{\Omega} \mathbf{o}^T \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^T \mathbf{u} dS. \quad (3)$$

Platí:

$$\delta \Pi = \delta W - \delta P = \delta(W - P) = 0. \quad (4)$$

Vztah (4) se nazývá Lagrangeův variační princip. Na něm se zakládá deformační varianta MKP. Znamená to, že primární neznámou jsou posuvy, resp. deformace. Jedná se o přímý důsledek principu virtuálních prací, jenž vychází z divergenčního teorému. Odvození od první myšlenky po Lagrangeův variační princip se nachází v Přílohách. Mimo jiné existuje také Cauchyho v. p., jenž je základem zřídka využívané silové varianty. Slovně zní Lagrangeův variační princip takto:

„Ze všech kinematicky přípustných stavů pružného tělesa nastává právě ten, jehož potenciální energie je minimální.“ [8]

Kinematicky přípustný stav znamená splnění geometrických rovnic uvnitř tělesa a geometrických okrajových podmínek na povrchu tělesa.

Ve vztazích výše se vyskytují sloupcové matice:

- posuvů  $\mathbf{u}^T = [u, v, w]$ ,
- přetvoření  $\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}]$ ,
- napětí  $\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}]$ ,
- objemového zatížení  $\mathbf{o}^T = [o_x, o_y, o_z]$ ,
- plošného zatížení  $\mathbf{p}^T = [p_x, p_y, p_z]$ .

Vyvstává otázka, jak nalezneme z přípustných stavů ten, pro nějž bude platit vztah (4). Vybereme přípustné funkce posuvů, díky nimž vyjádříme  $\Pi$ . Za zmínku stojí, že algoritmus MKP souvisí s Ritzovou metodou. Ve vyšetřované oblasti určíme tzv. báze funkce, které tvoří jakousi základnu, předpoklad hledané neznámé funkce. Hledané funkce posuvů jsou vyjádřeny jako součet zvolených báze funkcí, které jsou vynásobeny neznámými koeficienty:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \sum_{i=1}^l u_i N_i(x, y, z), \\ v(x, y, z) &= \sum_{j=1}^m v_j N_j(x, y, z), \\ w(x, y, z) &= \sum_{k=1}^n w_k N_k(x, y, z), \end{aligned} \quad (5)$$

kde  $u, v, w$  představují posuvy ve směrech os  $x, y, z$ ;  $u_i, v_j, w_k$  neznámé koeficienty lineární kombinace a  $N_i, N_j, N_k$  zvolené báze funkce.

Zatímco u Ritzovy metody jsou báze funkce definované na celé řešené oblasti a jejich výběr je v případě složitějšího tělesa téměř nemožný, u MKP jsou polynomicke báze funkce definované pouze na malých geometricky jednoduchých podoblastech, prvcích konečných rozměrů.

Funkcionál  $\Pi(u, v, w)$  tak přechází na  $\Pi(u_1, u_2, u_3, \dots, w_n)$ . Neznámé koeficienty nalezneme po vyřešení vztahů, které splňují podmínku Lagrangeova variačního principu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial u_1} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial \Pi}{\partial w_n} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Dosažením již známých koeficientů do funkcí pro posuvy máme k dispozici aproximace posuvů  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Právě posuvy jsou primárními neznámými u deformační varianty MKP. [5], [6], [12], [13]

### 2.3 Základní algoritmus MKP

Zatímco předchozí podkapitola se zabývala spíše otázkou, jak MKP souvisí s Lagrangeovým variačním principem, následující odstavce se pokusí přiblížit algoritmus MKP. Na počátku se analyzovaný objekt diskretizuje (rozdělí) na malé geometricky jednoduché podoblasti z výše uvedeného důvodu. Tyto podoblasti se nazývají prvky a na jejich hranicích leží určitý konečný počet tzv. uzlů, v nichž se hledají neznámé posuvy a z nich vycházející další neznámé. [5]

Poněvadž hlavním tématem bakalářské práce je napjatostně deformační analýza statického charakteru, uvažuje se pouze statická strukturální úloha. Protože by korektní popsání a odvození algoritmu zabralo několik stran a s tématem práce příliš nesouvisí, je zde uveden výsledný vztah. V Přílohách lze dohledat celé odvození spějící od prvotních úvah až k základní rovnici MKP uvedené níže. Každému prvku objektu se přiřadí vztah pro celkovou potenciální energii (viz vztah (1)). Po jistých, ne příliš jednoduchých úpravách se dospěje k rovnici:

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (7)$$

která se nazývá základní rovnice MKP a hlavní výpočet, který se odehrává v řešiči výpočetního systému MKP, spočívá ve vyřešení této soustavy rovnic. [5], [6], [7]

$\mathbf{K}$  symbolizuje čtvercovou matici a podle fyzikálního významu nese název globální matice tuhosti. Jestliže není předepsaný dostatečný počet okrajových podmínek, těleso není jednoznačně definováno v prostoru, což matematicky potvrzuje fakt, že determinant matice  $\mathbf{K}$  je nulový, tzn. matice je singulární, čemuž odpovídá nekonečně mnoho řešení. Proto musí být předepsán dostatečný počet okrajových podmínek, aby těleso bylo jednoznačně definováno v prostoru.  $\mathbf{U}$  představuje sloupcovou matici s názvem globální matice deformačních parametrů nebo také globální matici posuvů pro všechny uzly a  $\mathbf{F}$  sloupcovou matici s názvem globální matice zatížení. Primární záležitostí je tedy nalezení matice  $\mathbf{U}$ . Sekundárně se dopočítají přetvoření z geometrických rovnic (19), napětí z konstitutivních vztahů (22) apod. [5], [7]

### 2.4 Řešení a konvergence

Matice  $\mathbf{K}$  bývá maticí řídkou, přičemž vhodným uspořádáním jejích koeficientů do úzkého pásu kolem hlavní diagonály se dosahuje vysoké efektivity řešení. Zajímavým poznatkem je fakt, že doba výpočtu závisí přímo úměrně na součinu počtu neznámých a kvadrátu šířky pásu v matici. V současnosti se pro řešení soustavy rovnic používá nejčastěji Gaussova eliminační metoda a její modifikace, především tzv. frontální metoda. [5]

Zásadním požadavkem nejen u MKP je konvergence. To znamená, že při zjemňování sítě se přibližné řešení musí blížit řešení skutečnému. Aby byla konvergence zajištěna, musí být splněna následující kritéria:

- 1) Na hranici mezi prvky i uvnitř prvku musí aproximované posuvy splňovat minimální požadavky spojitosti podle typu úlohy, např. spojitost v posuvech na hranicích, spojitost prvních derivací posuvů atd.
- 2) Při posuvu prvku jako tuhého celku je nutné, aby napětí i přetvoření zůstala nulová.

- 3) Prvek musí dokázat přesně popsat stav konstantního přetvoření.

Při splnění těchto kritérií je konvergence exaktně dokázána a v případě posuvů se jedná o monotónní konvergenci zdola. Vypočítané posuvy jsou menší než skutečné a tedy diskretizovaný model má větší tuhost než skutečný. Reálné tuhosti, tedy i reálným výsledkům se dá přiblížit zjemněním sítě. [5]

Protože MKP patří mezi numerické metody, musí být správnost výsledků vždy patřičně ověřena. Nelze tedy věřit všemu, co program uživateli předloží, ale naopak přistupovat velmi kriticky. Nejčastěji se kvalita výsledků hodnotí změnou hustoty sítě. Většinou se za uspokojivý výsledek považuje takový, jehož přírůstek se se zjemněním sítě mění jen nepatrně, obecně do 5 %.

## 2.5 Lineární a nelineární úlohy

Jako lineární se označují takové úlohy, pro něž platí především lineární závislost mezi posuvy a deformacemi. Nelineárních úloh se týká opačné tvrzení. Oproti lineárním úlohám se nelineární vyznačují závislostí na posloupnosti stavů, jimiž systém prochází od začátku do konce děje. V případě lineárních úloh je vždy zajištěna existence a jednoznačnost řešení. Tudíž by se neměly vyskytnout žádné problémy spojené s konvergencí. Naopak u nelineárních úloh existence a jednoznačnost není zaručena. Patří sem geometrické, materiálové nelinearity a strukturální problémy jako např. kontakty se třením. Konvergence zde záleží na typu nelineární úlohy a metody řešení. K zajištění konvergence je nutno orientovat se v této problematice nebo jen experimentovat. [10], [11]

Obecně platí, že výpočtová náročnost nelineárních úloh násobně převyšuje lineární. Nelineární řešení se ve skutečnosti nahrazuje lineárním řešením prostřednictvím rozložení zatížení do několika přírůstků. Jednotlivé přírůstky jsou prováděny po podkrocích, tzv. substepech. Na konci každého podkroku se aktualizuje matice tuhosti, aby došlo k zahrnutí důsledků nelinearity. Mezi nejpoužívanější metody řešení náleží metoda přímé iterace a Newton-Raphsonova metoda. [5], [10], [11]

## 2.6 Kontaktní úlohy

Kontaktní úlohy se třením, jak již bylo uvedeno, přísluší mezi nelineární úlohy. Z hlediska náročnosti řešení se mezi statickými strukturálními úlohami, tedy klasickými pevnostními výpočty, řadí na vrchol. Pro realizaci výpočtu obecné kontaktní úlohy se stykové plochy označí a nahradí speciálními kontaktními prvky. Tyto prvky sledují kinematické závislosti mezi posuvy a podle změny posuvů se skokově mění jejich tuhost. [10], [11]

Na konvergenci kontaktních úloh má zásadní vliv tzv. kontaktní tuhost. Její optimální určení není jednoduché. Při poměrně vysoké kontaktní tuhosti bývá konvergence zajištěna, ale výpočetní čas narůstá. Naopak při nízké kontaktní tuhosti může docházet k prostupu (penetraci) objektů, čímž se výsledky vzdalují realitě. Při nadměrně vysoké kontaktní tuhosti již řešení diverguje. Proto je snahou nastavit kontaktní tuhost co největší, kdy řešení ještě konverguje. Konvergenci ovlivňuje mj. počet již zmiňovaných substepů a vyvažujících iterací. Nejmodernější verze programů, jako je ANSYS, většinou tyto záležitosti dokážou řešit za nás, nicméně stále se v oblasti kontaktních úloh setkáváme s mnoha problémy. [3], [10], [11]

### 3 Tvorba výpočtového modelu

Při této konkrétní analýze bylo využito programu ANSYS Workbench 14.5 dostupného v počítačových učebnách Ústavu mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky na FSI. Vlastní analýze předchází několik zásadních a v určitých případech ne zcela jednoduchých úkonů. Obdobně, jako se postupuje při statické strukturální analýze v tomto programu, budou uvedeny jednotlivé činnosti, jako např. tvorba modelu geometrie, modelu materiálu, modelu zatížení a vazeb, definice kontaktu a na závěr snad nejpodstatnější, tvorba sítě.

#### 3.1 Model geometrie

Geometrie jamky a dříku totální náhrady trapéziometakarpálního kloubu byla zhotovena na základě rozměrů implantátů, které jsou v praxi nejčastěji vyráběny. Nutno zmínit, že kvůli zjednodušení geometrie má být vymodelována pouze část dříku, kterou lze nazvat hlavicí. Jelikož cílem je vytvoření zjednodušené geometrie, významnou roli hrají především rozměry kulové hlavice a kontaktní plošky jamky. Bylo stanoveno, že kontaktní ploška jamky bude definována půlkulovitým tvarem o průměru 7 mm.

Většinou se u kloubních náhrad vyskytují relativně malé vůle. Nepatrný přesah by omezoval funkčnost implantátu kvůli prudkému nárůstu třecího momentu. Také příliš velké vůle nejsou vhodné z důvodu lokalizace kontaktních tlaků na menší plochy [16]. Navíc u některých materiálů, jako je kombinace kovu a vysokomolekulárního polyetyleny (UHMWPE), obecně platí zásada, že vůle může dosahovat maximálně 0,2 mm, aby nedocházelo k uvolňování látek, jež by mohly způsobit alergickou reakci organismu [15]. V tomto případě byla zvolena vůle o hodnotě 0,025 mm, tedy rozdíl průměrů 0,05 mm.

Vnější průměr kulové části jamky činí 9 mm, tedy tloušťka odpovídá 2 mm. Průměr otvoru v jamce, který slouží pro uchycení jamky v kosti při chirurgickém zákroku, se rovná přibližně 1,2 mm. Zaoblení hran v místech kontaktů, jejichž hodnota výrazně ovlivňuje rozložení a velikost napětí a tlaků v jejich blízkém okolí, mají poloměry 0,1 mm. Ostatní rozměry by již neměly mít zásadní vliv na napjatostně deformační analýzu, proto nemá smysl jejich hodnoty uvádět. Vystupující materiál okolo otvoru a po vnějším obvodu jamky slouží k usazení implantátu do kosti. Pro analýzu nejsou uvažovány malé výstupky, které zabraňují rotaci jamky kolem své osy symetrie v kosti.

Při vytváření zjednodušeného modelu byl postup následující. Prvním krokem bylo narýsování profilu. Protože se jedná o rotačně symetrický předmět, bylo možné využít funkce „revolve“, díky níž rotací profilu kolem osy symetrie vznikl model jamky a hlavice. [3]

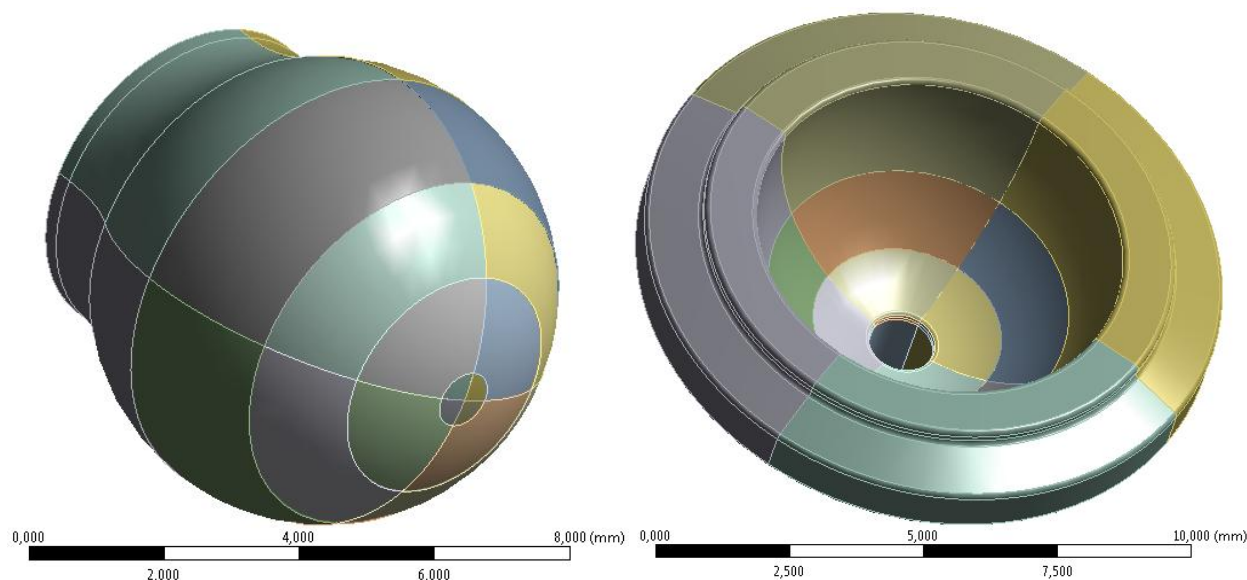
#### 3.2 Model materiálu

Obecně se u kloubních implantátů používá celá řada vhodných materiálů. V tomto případě jsou hlavice i jamka vyrobeny ze slitiny Cr-Co-Mo [4], jejíž základní vlastnosti jsou uvedeny v tab. 3.1. Obě komponenty navíc bývají ošetřeny povrchovou úpravou, která zde pro svou složitost není uvažována. Vnější povrch jamky je za účelem biokompatibility upraven, ale na výsledky analýzy by neměl mít nejmenší vliv, proto také není brán v úvahu.

V důsledku překročení meze kluzu při velkém zatížení implantátu by měl být uvažován bilineární model materiálu, který by se více blížil skutečnému chování. Z důvodu malé orientace v problematice tato nelinearita není zavedena, ale musí se na ni brát ohled.

| Použitý materiál | Modul pružnosti v tahu E [GPa] | Poissonův poměr $\mu$ [-] | Mez kluzu Re [MPa] |
|------------------|--------------------------------|---------------------------|--------------------|
| Cr-Co-Mo         | 208                            | 0,3                       | 700                |

Tab. 3.1 Vlastnosti materiálu použitého při analýze

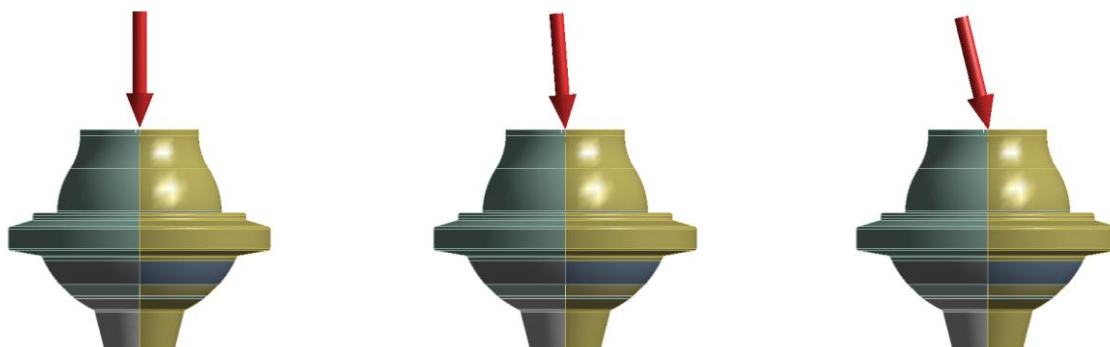


Obr. 3.1 Model geometrie hlavice a jamky implantátu

### 3.3 Model vazeb a zatížení

Důležitý krok, který významně předurčuje výsledky analýzy, spočívá v určení vazeb a zatížení modelu. Jako vazba pro jamku bylo zvoleno vetknutí po celé její vnější ploše. Zatížení bylo provedeno na celé kruhové ploše příčného průřezu hlavice. Pro zajištění správné funkce kontaktu bylo zavedeno deformační předzatížení. Za účelem zachycení různorodých výsledků a možnosti použití odlišných způsobů pro jejich ověření byly vybrány následující konfigurace s maximální hodnotou síly 1200 N:

- Konfigurace č. 1 – symetrické zatížení
- Konfigurace č. 2 – zatížení silou s odklonem 5°
- Konfigurace č. 3 – zatížení silou s odklonem 15°



Obr. 3.2 Přehled zvolených zatížení, zleva konfigurace č. 1, č. 2 a č. 3

### 3.4 Definice kontaktu

Mezi nejpřednější problémy spojené s kontaktními úlohami se třením u MKP patří konvergence řešení. Od téměř bezproblémových klasických statických strukturálních úloh se liší především ve správné definici kontaktu mezi stýkajícími se tělesy. Nevhodné nastavení kontaktů může způsobit bez předchozích znalostí a zkušeností i několikátýdenní zdržení v získání uspokojivých výsledků. Důsledkem bývá většinou zmiňovaná špatná konvergence nebo i jiná záležitost. Dnešní výpočetní programy jsou oproti předchozím verzím velmi dobře vybaveny, avšak stále se nedaří občasných zauzlení zbavit.

Nastavení kontaktu spočívá veskrze v označení stykových ploch na obou tělesech. Program při zjištění dotyku těles automaticky nastaví kontaktní plochy. Na to je potřeba dávat velký pozor, protože program většinou stykové plochy neoznačí korektně a občas přidá i nadbytečné kontakty. Kromě stykových ploch se vždy nastavuje i typ kontaktu. Například ANSYS Workbench verze 14.5 nabízí pět typů kontaktů, v překladu: zajištěný, neoddělitelný, hrubý, bez tření a se třením [3]. Aby bylo dosaženo realistických výsledků, typem kontaktu byl zvolen kontakt se třením. Další možností je volba koeficientu smykového tření, která bude zejména v prezentaci výsledků detailněji diskutována.

Vedle toho poskytuje program řadu pokročilých nastavení, jako jsou nastavení kontaktní tuhosti, detekčních metod, penetrační tolerance a podobně [3]. Do těchto pokročilých nastavení nebylo u 3D modelu zasahováno, jelikož získané výsledky odpovídaly skutečnosti. Měnit tyto parametry by bylo příhodné až po zkontrolování ostatních snadno ovlivnitelných záležitostí.

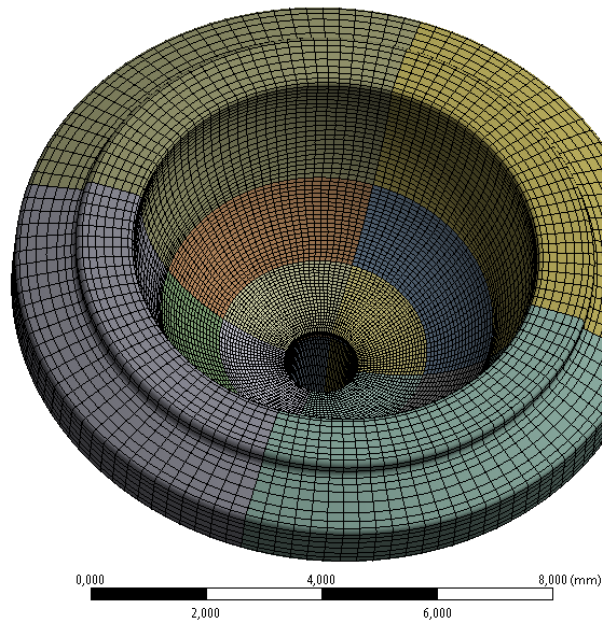
### 3.5 Tvorba sítě

Pro deformačně napěťovou analýzu zásadní roli hraje síť. Nejdůležitější je tedy správným a pokud možno efektivním způsobem diskretizovat model na jednotlivé prvky konečných rozměrů. Při diskretizaci existuje několik postupů a záleží na uživateli, jakou cestu si zvolí. V tomto případě byl model nejprve rozdělen na čtvrtiny pomocí dvou navzájem kolmých rovin procházejících osou symetrie příkazem „slice“. [3]

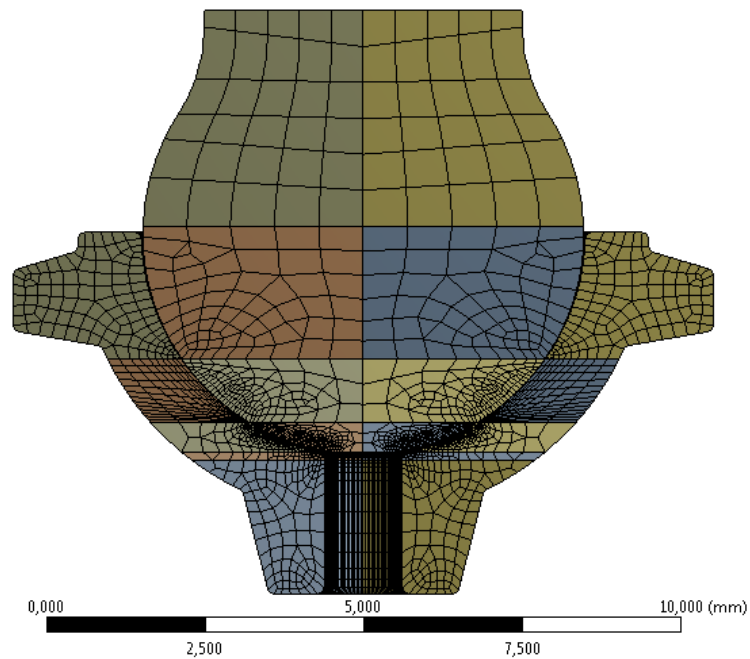
Pro plynulé navázání sítě mezi jednotlivými částmi se zvolí funkce „form part“. Dále se aplikuje funkce „sweep“ pro nanesení osově symetrické sítě. Označí se výchozí a konečný profil a zadá se počet dělení. Konkrétně zde byl model rozdělen po obvodu na 140 dílků a po výšce program zavedl automatické dělení. Takto provedenou diskretizaci ale rozhodně není možné považovat za konečnou. V místech kontaktu se musí vytvořit mnohem jemnější prvky za účelem dostatečně kvalitních výsledků analýzy. Naopak ve větší vzdálenosti od kontaktu je žádoucí hrubější diskretizace pro zmenšení výpočetní náročnosti. [3]

Funkce „edge sizing“ nabízí možnost diskretizace prvků na okraji na předepsaný rozměr, zatímco dále od okraje velikost prvků zůstává původní. Jemnost sítě v kontaktu lze tedy jednoduše regulovat změnou velikosti prvků. Tímto způsobem se zajistí kvalita a efektivita diskretizace. Při zmiňovaném postupu však program zřejmě nebyl schopen optimálně diskretizovat síť. To mělo za následek jemné nerovnosti mezi prvky a nedokonalou osovou symetrii viditelnou při dostatečném zvětšení. Nicméně na první pohled nevýznamná záležitost měla zásadní vliv na výsledky analýzy. Po zobrazení napětí v kontaktu bylo ihned zřejmé, že výsledky se od očekávání výrazně odlišují a nesplňují očekávané požadavky jak z hlediska velikosti napětí, tak z hlediska plošného rozložení napětí v kontaktu. [3]

Dlouhé týdny trvalo, než došlo ke zdárnému vyřešení tohoto problému. Po čase se jako správné východisko ukázalo další rozdělení modelu prostřednictvím funkce „extrude“ a čtyř rovin kolmých k ose symetrie a účelně rozmístěných po výšce modelu. Až poté se programu podařilo diskretizovat model mnohem úhledněji a symetričtěji. Tím pádem na sebe kontaktní prvky lépe dosedly. Konečně tak program poskytl uspokojující výsledky. [3]



*Obr. 3.3 Diskretizace modelu jamky při symetrickém zatížení*



*Obr. 3.4 Diskretizace celého modelu při symetrickém zatížení, podélný řez*

Pro představu, jakým počtem prvků jsou modely na obr. 3.3 a 3.4 tvořeny, samotná jamka disponuje přibližně 83 000 prvky, zatímco hlavice asi 68 000. Velikost prvků v místě kontaktu, kde je síť nejjemnější, dosahuje 0,02 mm.

### 3.6 Diskuze 3D a 2D axisymetrické úlohy

Na obrázcích výše je patrné, že původně byl při analýze aplikován 3D model bez využití symetrie. Nabízí se otázka, jestli se dá využít zjednodušení či možnosti ověření výsledků v podobě symetrické nebo 2D axisymetrické úlohy pro zkvalitnění výsledků a snížení výpočetní náročnosti jednak z hlediska objemu dat a jednak z hlediska výpočetního času. (Axisymetrická úloha znamená, že se uživatel zabývá pouze rotačně symetrickým profilem, pro nějž má program zabudován algoritmus, který zaručuje skutečné chování modelu.) Odpověď je při symetrických vazbách i zatížení pozitivní. Výhody použité 2D axisymetrické úlohy budou prezentovány ve výsledcích analýzy.

Při obecných zatěžovacích podmínkách nezbyvá, než konstatovat, že použitý 3D model vede jako jediný ke korektnímu řešení. Co to však znamená? 3D úlohy jsou z hlediska MKP nejnáročnější, a to především kvůli velkému množství prvků a uzlů, a tedy obrovské soustavě rovnic, která se musí vyřešit. V porovnání 3D úloh bývá u symetrického řešení, tedy využití rovin symetrie, množství prvků většinou čtvrtinové nebo poloviční s odpovídající dobou řešení. Při možnosti využití 2D axisymetrické úlohy se množství prvků sníží mnohem razantněji a výpočetní čas se mnohonásobně sníží. Z toho jednoznačně vyplývá, je-li 3D symetrické nebo lépe 2D axisymetrické řešení korektní, výsledky jsou k dispozici nesrovnatelně dříve a beze ztráty kvality. V dalším textu bude pod pojmem 2D úloha myšlena 2D axisymetrická úloha.



## 4 Presentace a analýza výsledků

Název této bakalářské práce jasně dokládá, že napjatostně deformační analýza několikrát zmiňovaného kloubního implantátu v oblasti trapéziometakarpálního skloubení reprezentuje centrum pozornosti práce. Protože analýza kompletního skloubení se všemi náležitostmi by odpovídala úrovni diplomové práce a náročností zjevně převyšovala znalosti očekávané od studenta třetího ročníku bakalářského studia, bylo rozhodnuto, že se bakalářská práce zaměří pouze na analýzu zjednodušeného modelu totální náhrady jamky a dřívku tohoto skloubení. Před samotnou analýzou se postupovalo podle kroků popsanych v kapitole 3.

Vlastní analýza poskytuje poměrně velký prostor pro tvůrčí aktivitu. Nabízí totiž značné množství parametrů, jejichž trendy lze zanést do grafů a tabulek, ověřovat, zdůvodňovat a interpretovat. Protože MKP přísluší mezi numerické metody, pokud je to alespoň trochu možné a za jistých předpokladů právoplatné, není od věci určité výsledky verifikovat analytickými metodami.

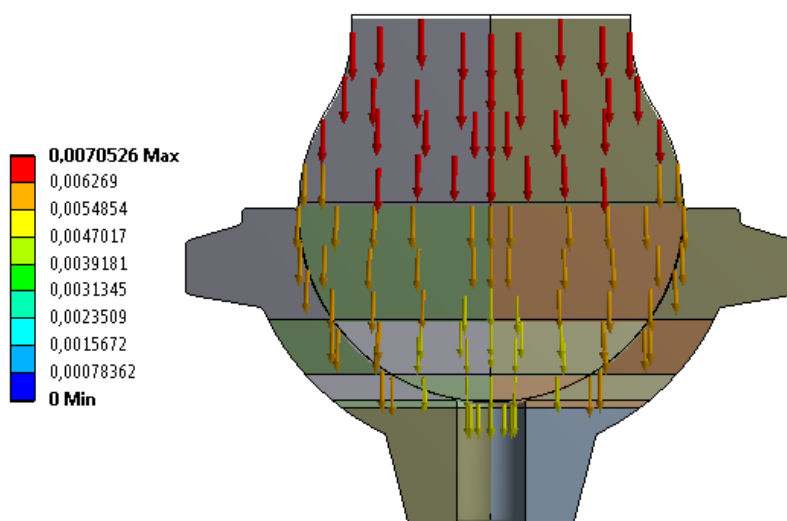
Přehled obsahující mj. velikost prvků v kontaktu při jednotlivých konfiguracích, která má zásadní vliv na výsledky, se nalézá v podkapitole 4.5.

### 4.1 Konfigurace č. 1 – symetrické zatížení

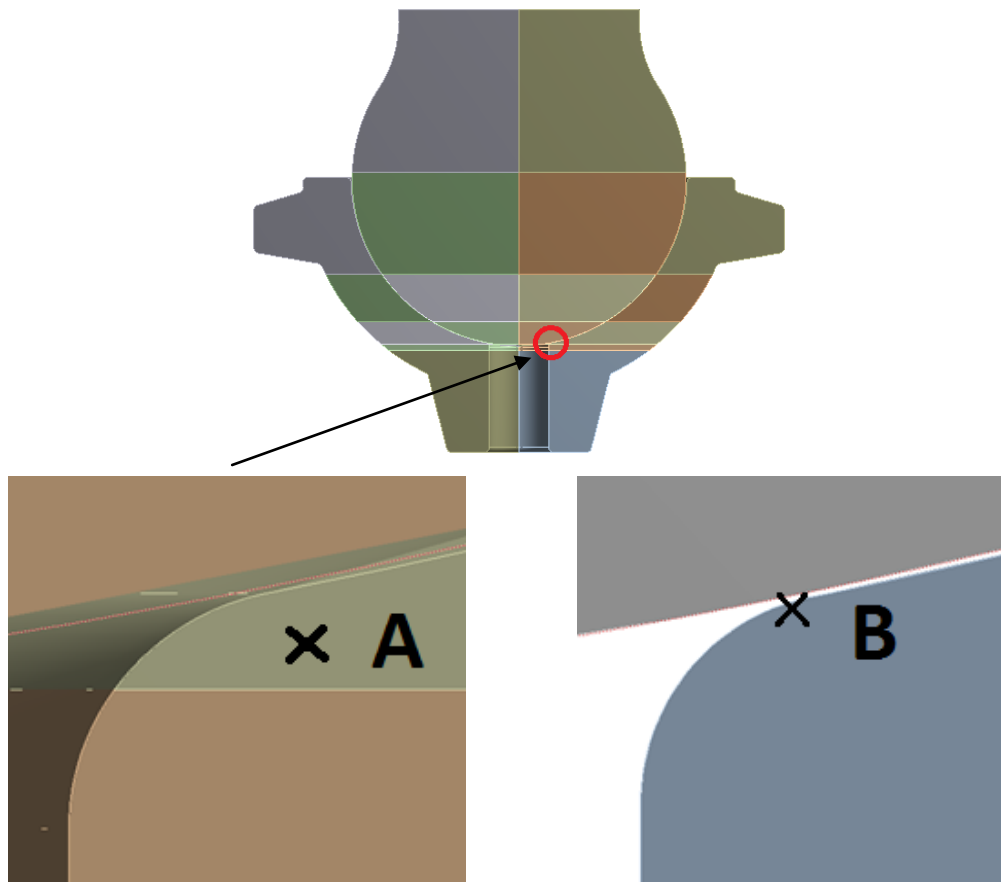
Tato podkapitola se pokusí prezentovat výsledky plynoucí z analýzy řešeného modelu z různých úhlů pohledu, a to při symetrickém zatížení. Kromě uvedeného trojrozměrného modelu bude pro srovnání výsledků využito také dvojrozměrného modelu, odkud názorně vyplynou jeho přednosti.

#### 4.1.1 Úvod ke konfiguraci č. 1

Pro snadnou orientaci se sluší na začátku analýzy uvést čtenáře do problematiky, a to např. ukázkou deformace modelu. Právě podle deformace může zkušené oko rozpoznat, zda se model chová podle očekávání. Na obr. 4.1 se nachází celková deformace modelu (desetinásobně zvětšená stejně jako u dalších konfigurací) při konfiguraci č. 1. Posuvy jsou znázorněny barevnými šipkami, přičemž původní tvar je vyznačen obrysem.



Obr. 4.1 Celková deformace modelu [mm] při konfiguraci č. 1



Obr. 4.2 Označení míst A a B na 3D a 2D modelu

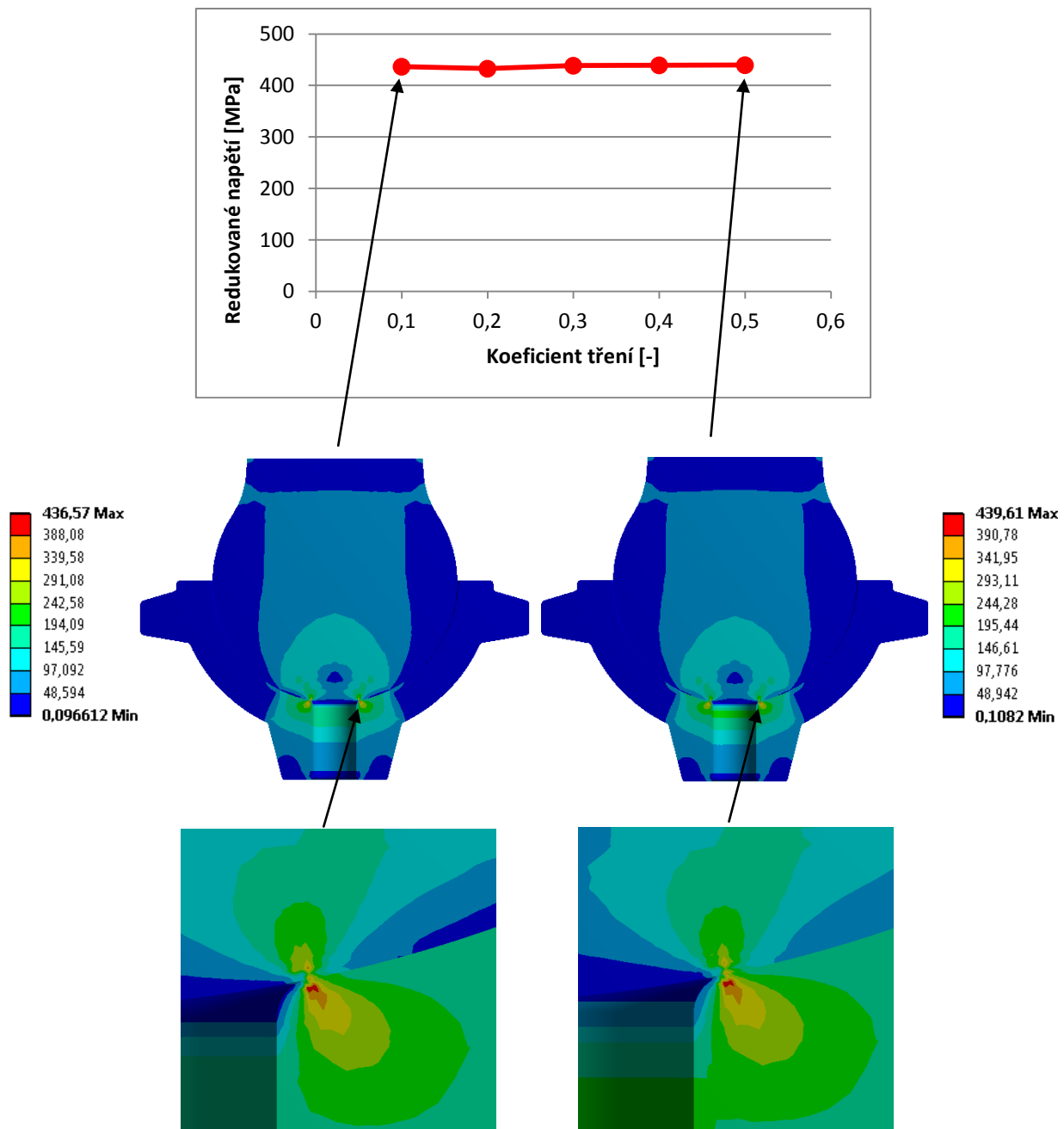
Za účelem přehlednosti a jednoznačnosti jsou definována a označena místa, k nimž se vztahují některé z vyšetřovaných charakteristik. Rozdíl v poloze bodů A a B, která označují místa s maximálními hodnotami redukovaného napětí na obou modelech při první konfiguraci, je velmi malý. Na druhou stranu, hodnoty napětí v jejich blízkém okolí se razantně mění. Oba body se nachází těsně pod povrchem na okraji zaoblení. Bod A leží přibližně 0,025 mm pod povrchem, zatímco bod B pouze 0,002 mm pod povrchem jamky.

#### 4.1.2 Vybrané charakteristiky v závislosti na koeficientu tření

V této části se pozornost zaměří na zkoumání trendových situací v závislosti na koeficientu smykového tření při maximálním zatížení. Na začátek je nutno uvést, že zde primárně nejde o jednotlivé, co nejpřesnější hodnoty, ale o zachycení vlivu koeficientu tření na jednotlivé veličiny.

Na úvod je příhodné začít definicí redukovaného napětí: „*Redukované napětí je napětí fiktivní tahové napjatosti přiřazené napjatosti obecné tak, že prostá bezpečnost je vzhledem k danému meznímu stavu stejná pro obecnou i fiktivní tahovou napjatost* [9, str. 267].“

Jednoduše řečeno, jedná se o fiktivní napětí, které porovnáváme s mezí kluzu, což je materiálová charakteristika udávající hodnotu napětí, při němž dojde ke vzniku prvních makroplastických deformací. Místa s maximální hodnotou redukovaného napětí se nazývají nebezpečná nebo kritická. Vývoj maximálních hodnot redukovaného napětí podle podmínky  $\max \tau$  je zanesen do grafu na obr. 4.3.



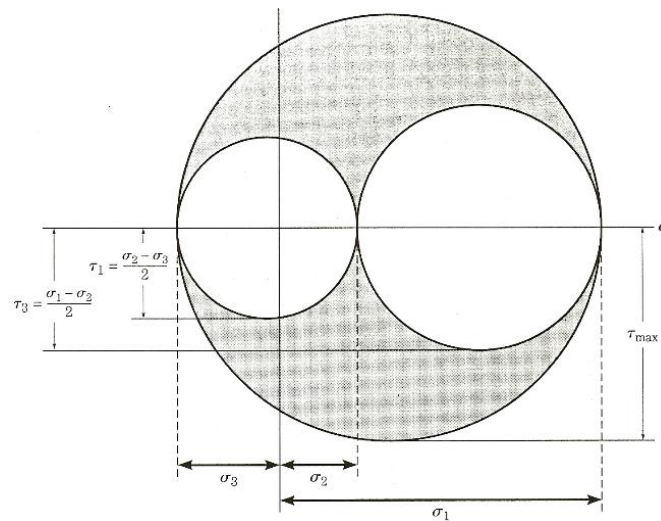
Obr. 4.3 Redukované napětí v místě A v závislosti na koeficientu tření

Podélný řez modelem dovoluje zobrazit rozložení redukovaného napětí, jehož maximum se nachází těsně pod povrchem v oblasti zaoblení otvoru jamky o poloměru 0,1 mm. Ukazuje se, že koeficient tření má poměrně malý vliv na jeho velikost.

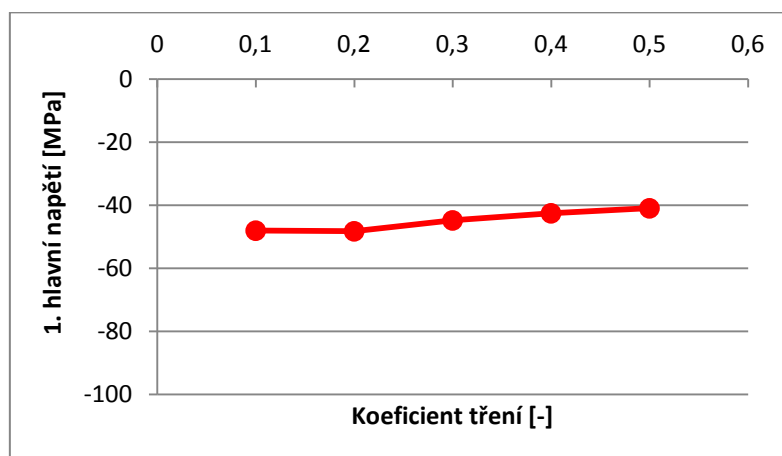
Existuje mnoho přístupů, tzv. podmínek plasticity, díky nimž lze vypočítat redukované napětí. Často používaná a velmi jednoduchá pro výpočet je podmínka  $\max \tau$ , odkud vyplývá důležitost hlavních napětí, především prvního a třetího:

$$\sigma_{red}^{\max \tau} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (8)$$

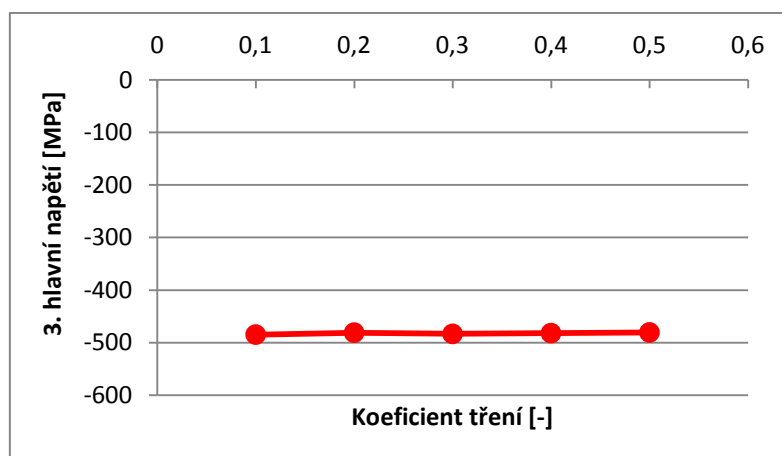
Hlavní napětí jsou napětí určená v rovinách, ve kterých nepůsobí smyková napětí. Napjatost v bodě je možné zachytit do Mohrovy roviny podle obr. 4.4. Tmavě vybarvená oblast představuje možné kombinace složek napětí při různém natočení souřadného systému.



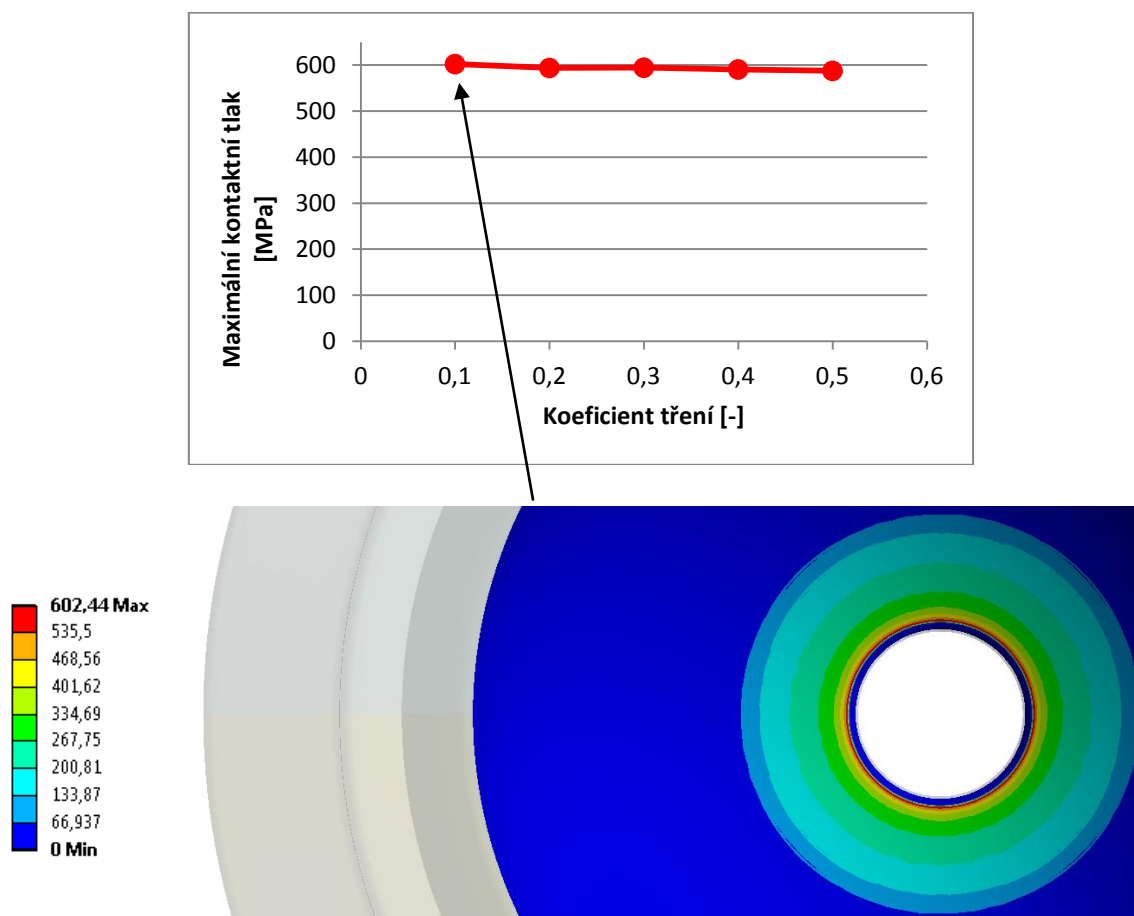
Obr. 4.4 Mohrova kružnice zobrazující napjatost v bodě [20]



Obr. 4.5 První hlavní napětí v místě A v závislosti na koeficientu tření



Obr. 4.6 Třetí hlavní napětí v místě A v závislosti na koeficientu tření



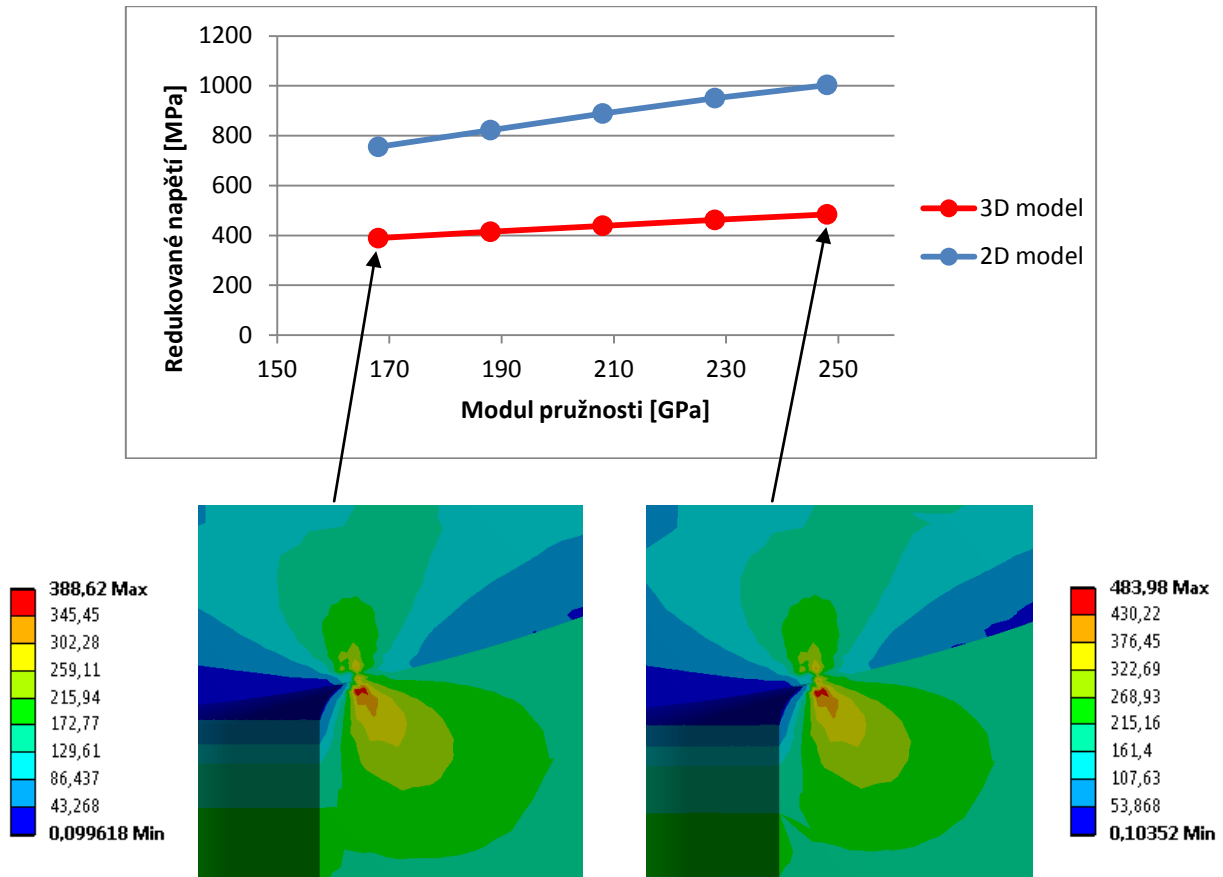
Obr. 4.7 Maximální kontaktní tlak na jamce v závislosti na koeficientu tření

Graf na obr. 4.7 potvrzuje logické očekávání, protože s rostoucím koeficientem tření se třecí síla podílí čím dál tím více na eliminaci kontaktního tlaku, který tak klesá. Při pohledu na jamku shora je zde zároveň ukázáno, na jak malou plošku se tlak koncentruje. Protože se obrázky pro krajní koeficienty tření příliš nerůzní, je zde uveden pouze jeden případ.

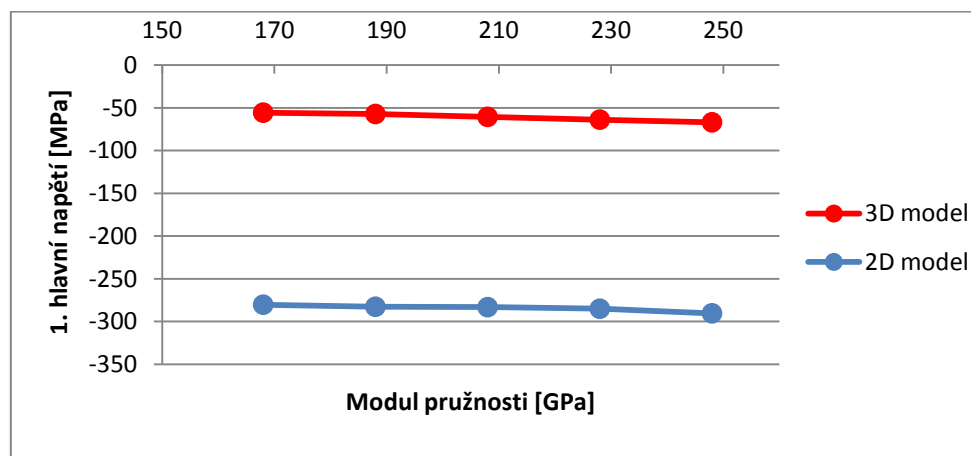
Při změně koeficientu tření se kromě kontaktního tlaku ostatní charakteristiky pohybují jen v nepatrných odchylkách a jejich trend není jednoznačný. Proto nebylo použito 2D modelu pro upřesnění jejich hodnot.

### 4.1.3 Vybrané charakteristiky v závislosti na modulu pružnosti materiálu

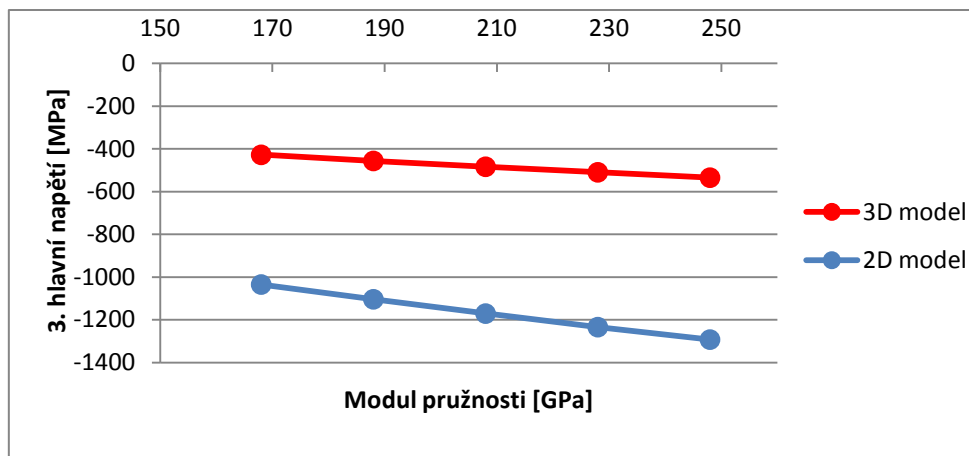
Výsledky této části analýzy platí pro koeficient smykového tření 0,3 a liší se v závislosti na modulu pružnosti v tahu (Youngův modul). Odlišnost výsledků 3D a 2D modelu je způsobena přibližně desetkrát jemnější sítí u 2D modelu.



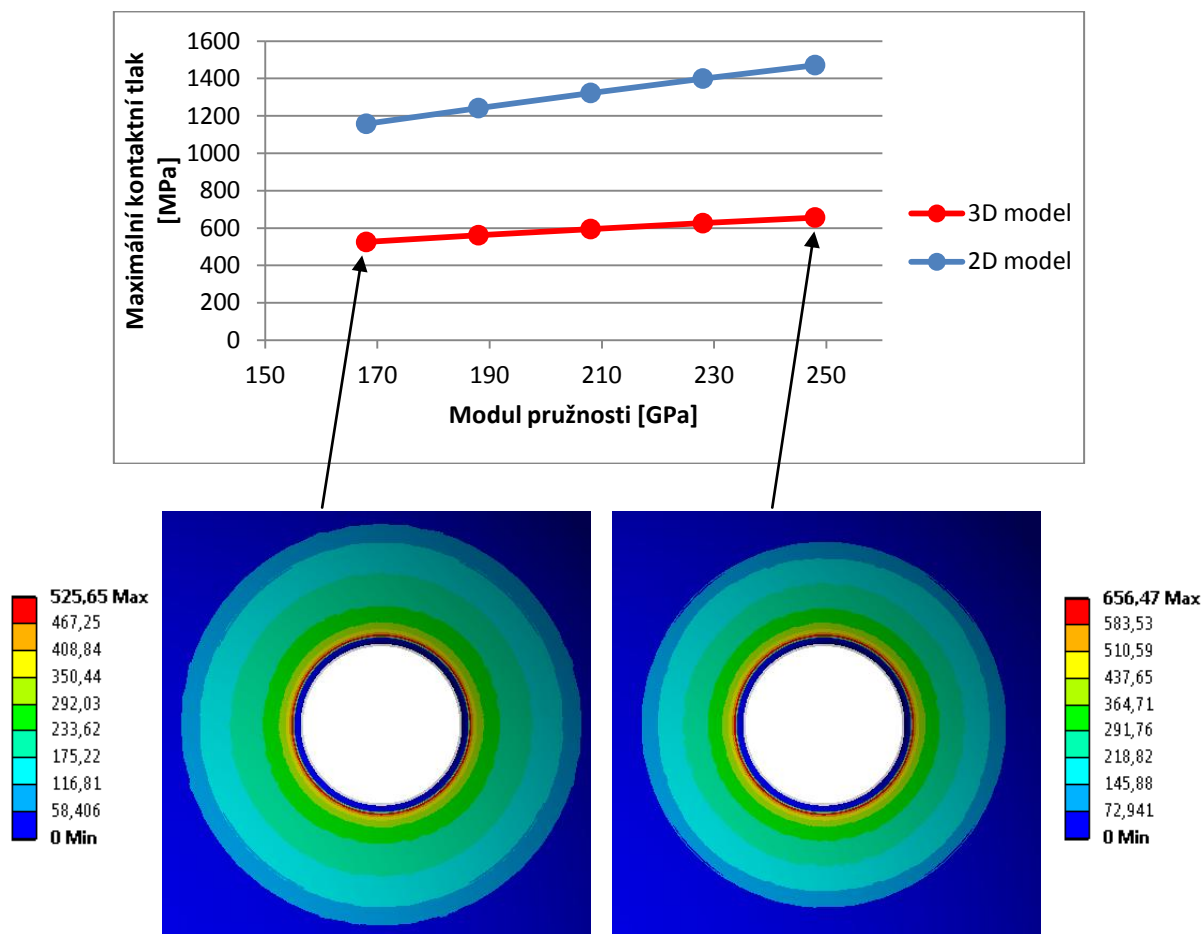
Obr. 4.8 Redukované napětí v místech A a B v závislosti na modulu pružnosti



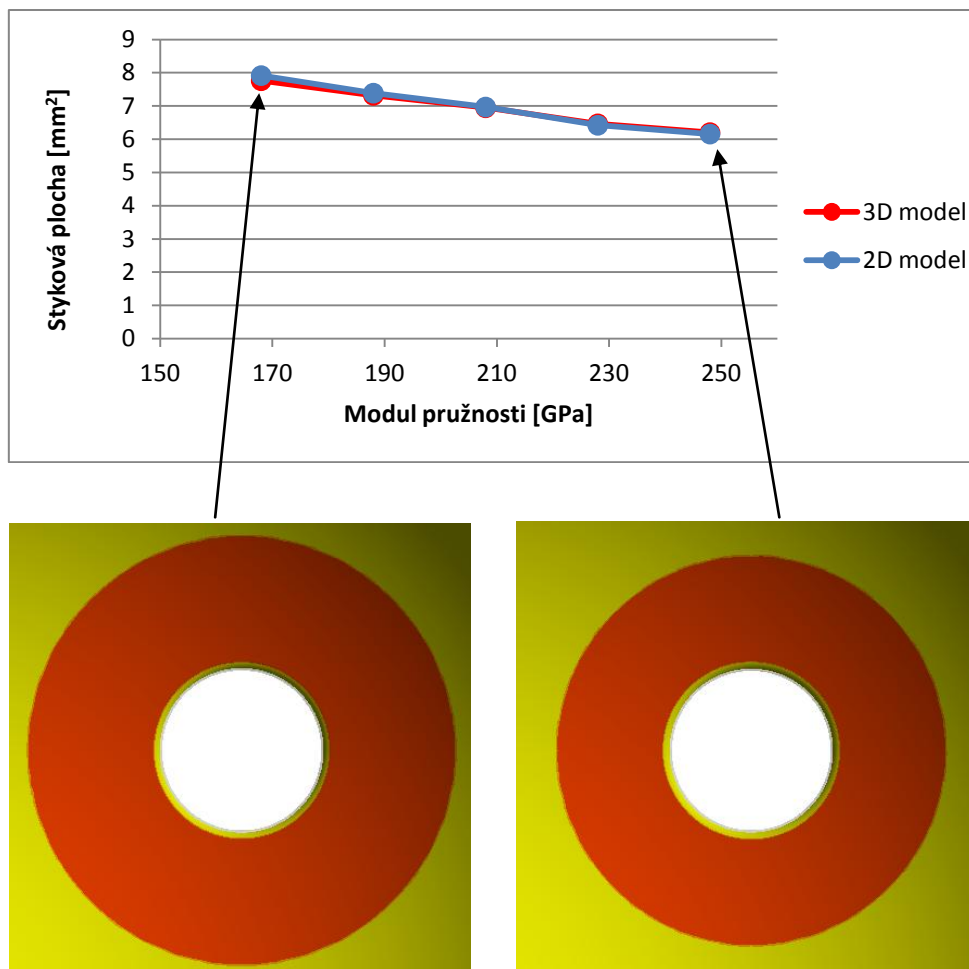
Obr. 4.9 První hlavní napětí v místech A a B v závislosti na modulu pružnosti



Obr. 4.10 Třetí hlavní napětí v místech A a B v závislosti na modulu pružnosti



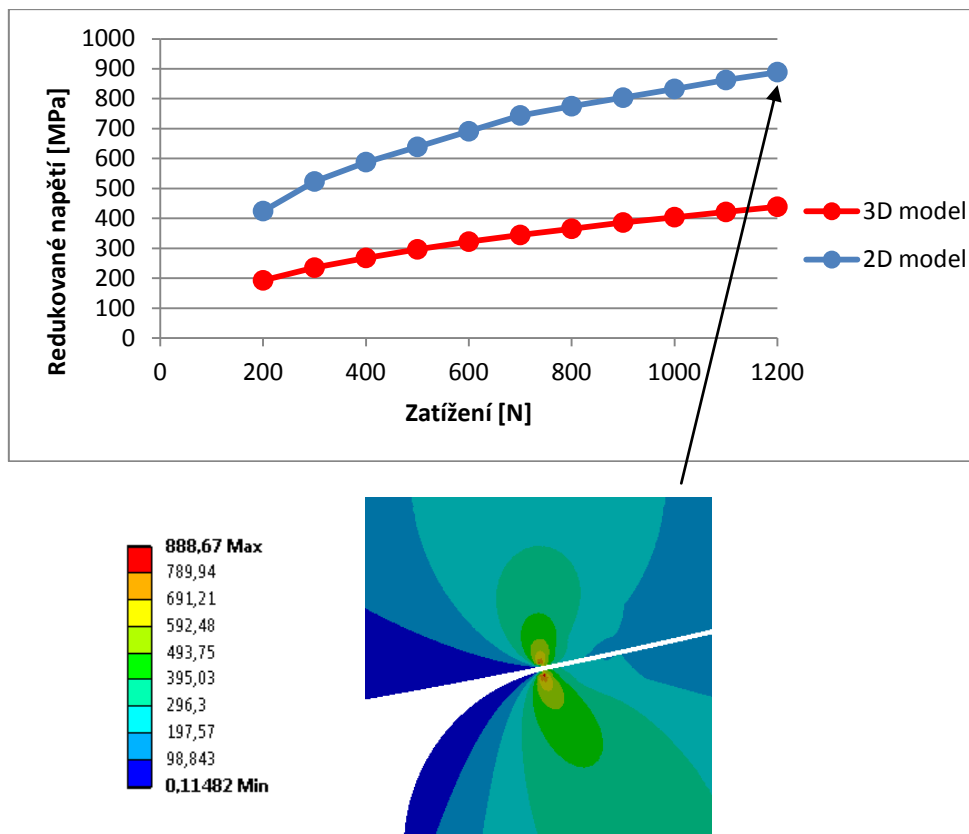
Obr. 4.11 Maximální kontaktní tlak v závislosti na modulu pružnosti



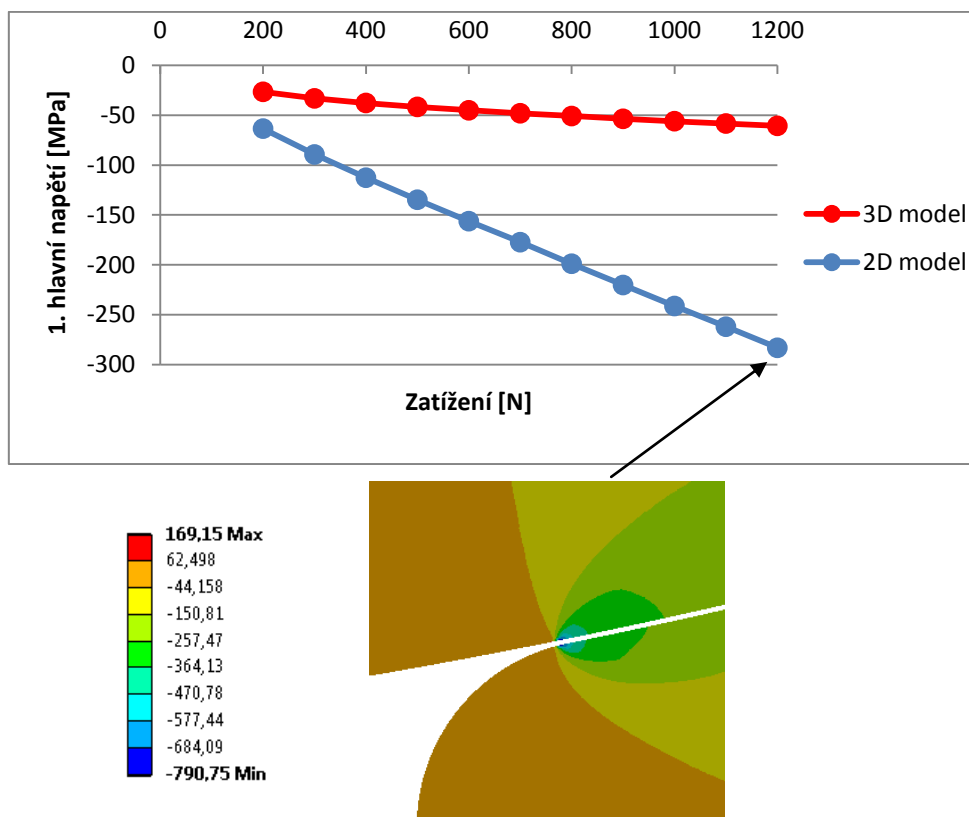
Obr. 4.12 Styková plocha v závislosti na modulu pružnosti

Zatímco při sledování charakteristik v závislosti na koeficientu tření se ukázalo, že kromě kontaktního tlaku nejsou trendy nijak jednoznačné a proměnlivé, modul pružnosti v tahu materiálu ovlivňuje chování zcela zásadně a jednoznačně. S rostoucím modulem pružnosti výrazně roste redukované napětí, klesají obě hlavní napětí, zvyšuje se maximální kontaktní tlak a v souladu s tím se zmenšuje styková plocha.

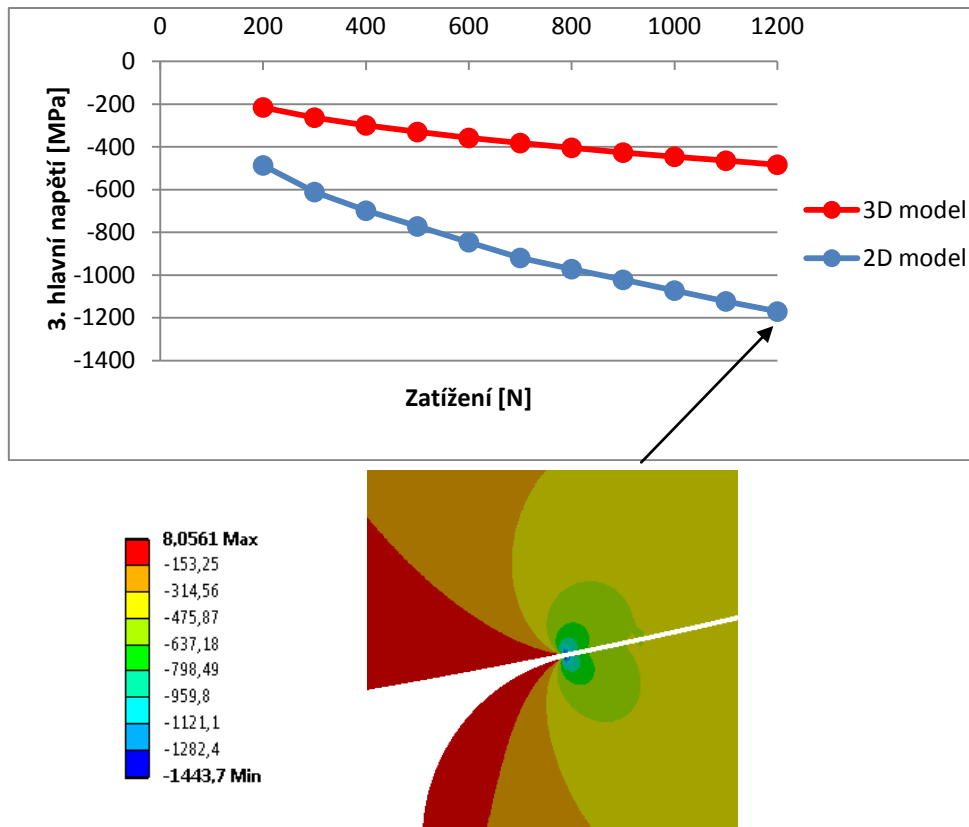
4.1.4 Vybrané charakteristiky v závislosti na zatížení při koeficientu tření 0,3



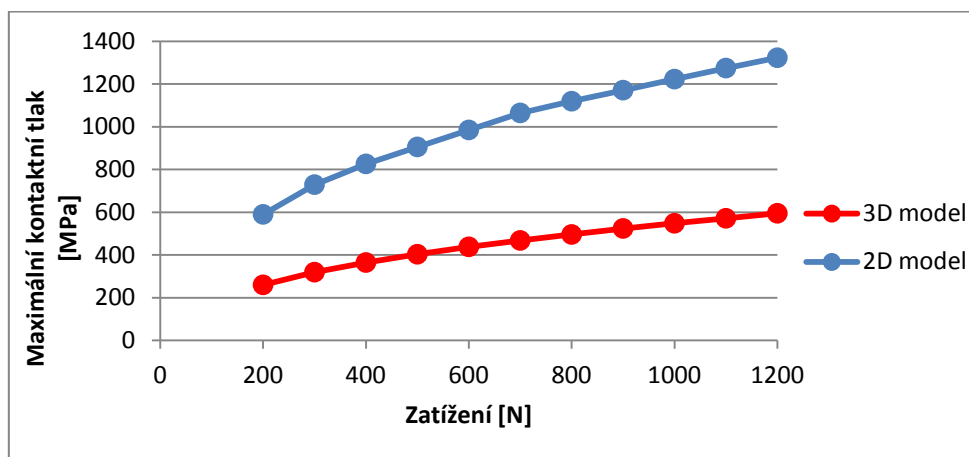
Obr. 4.13 Redukované napětí v místech A a B v závislosti na zatížení



Obr. 4.14 První hlavní napětí v místech A a B v závislosti na zatížení

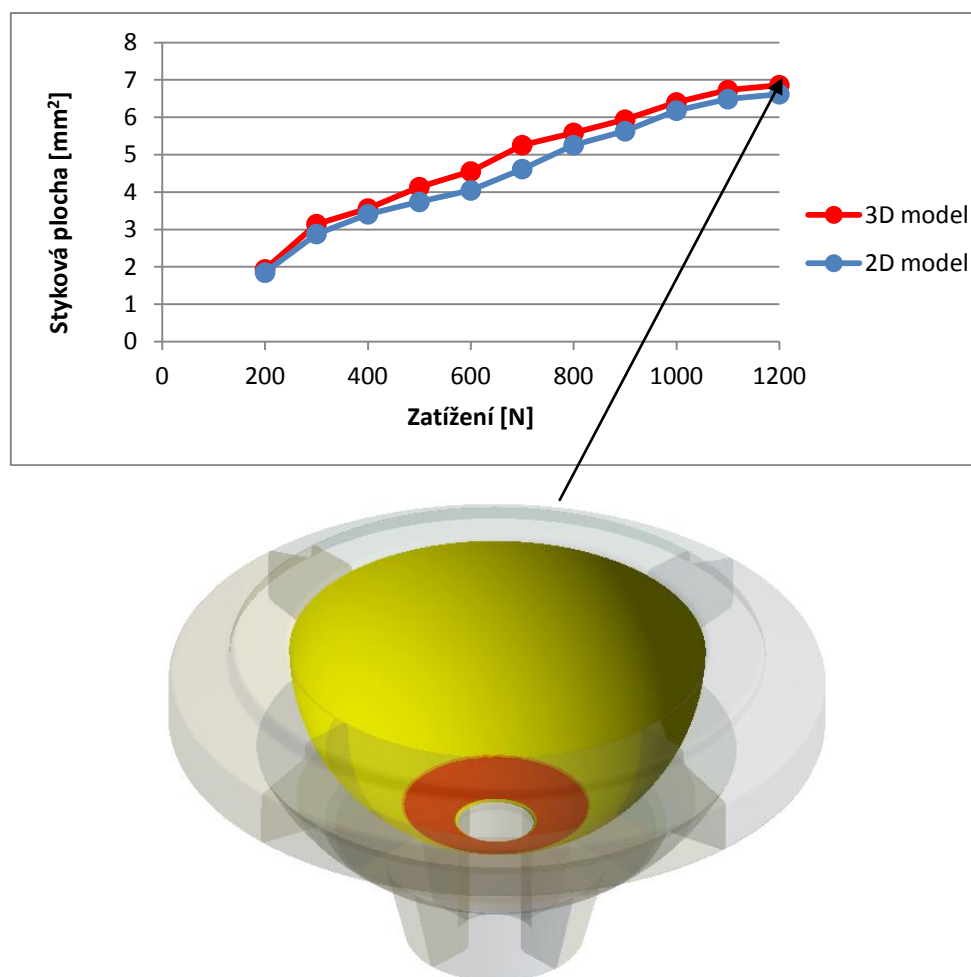


Obr. 4.15 Třetí hlavní napětí v místech A a B v závislosti na zatížení



Obr. 4.16 Maximální kontaktní tlak v závislosti na zatížení

Hodnoty kontaktního tlaku jsou snad nejcitlivější na jemnost sítě. Zhruba desetkrát jemnější síť u 2D modelu poskytuje výsledky, které lze považovat za téměř skutečné, zatímco výsledky 3D modelu se jim podstatně vzdalují.



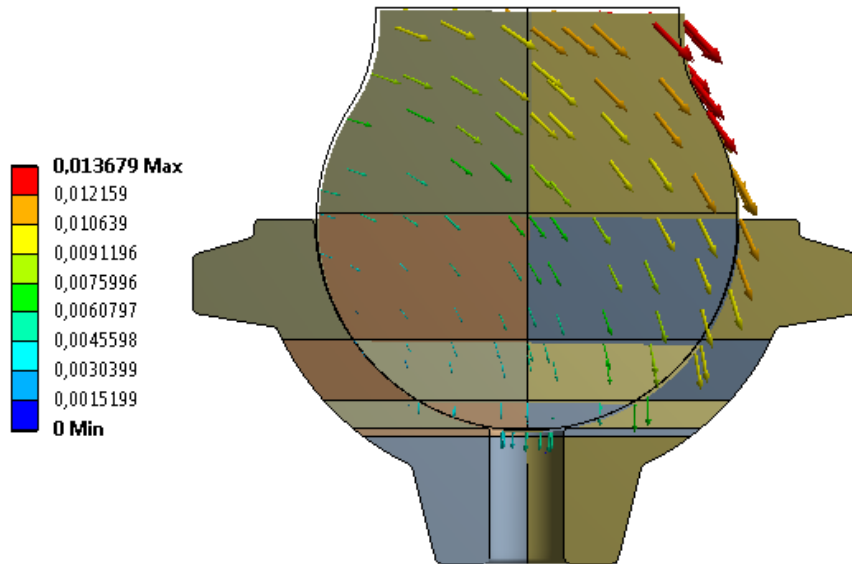
Obr. 4.17 Styková plocha v závislosti na zatížení

Součástí obr. 4.17 tvoří barevné znázornění stykové plošky při zatížení 1200 N a koeficientu tření 0,3. Odtud je zřejmé, na jak malé plošce se styk realizuje i při nepatrné vůli mezi hlavicí a jamkou.

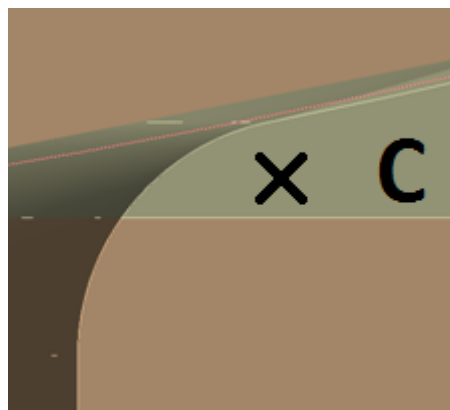
Jak bylo uvedeno výše, model materiálu není uvažován jako bilineární. Tedy při překročení meze kluzu (přibližně 700 MPa) se musí brát v potaz, že ve skutečnosti by zejména u redukovaného napětí došlo ke snížení růstu. S tím by souvisela i změna ostatních charakteristik.

## 4.2 Konfigurace č. 2 – zatížení silou s odklonem 5°

### 4.2.1 Úvod ke konfiguraci č. 2



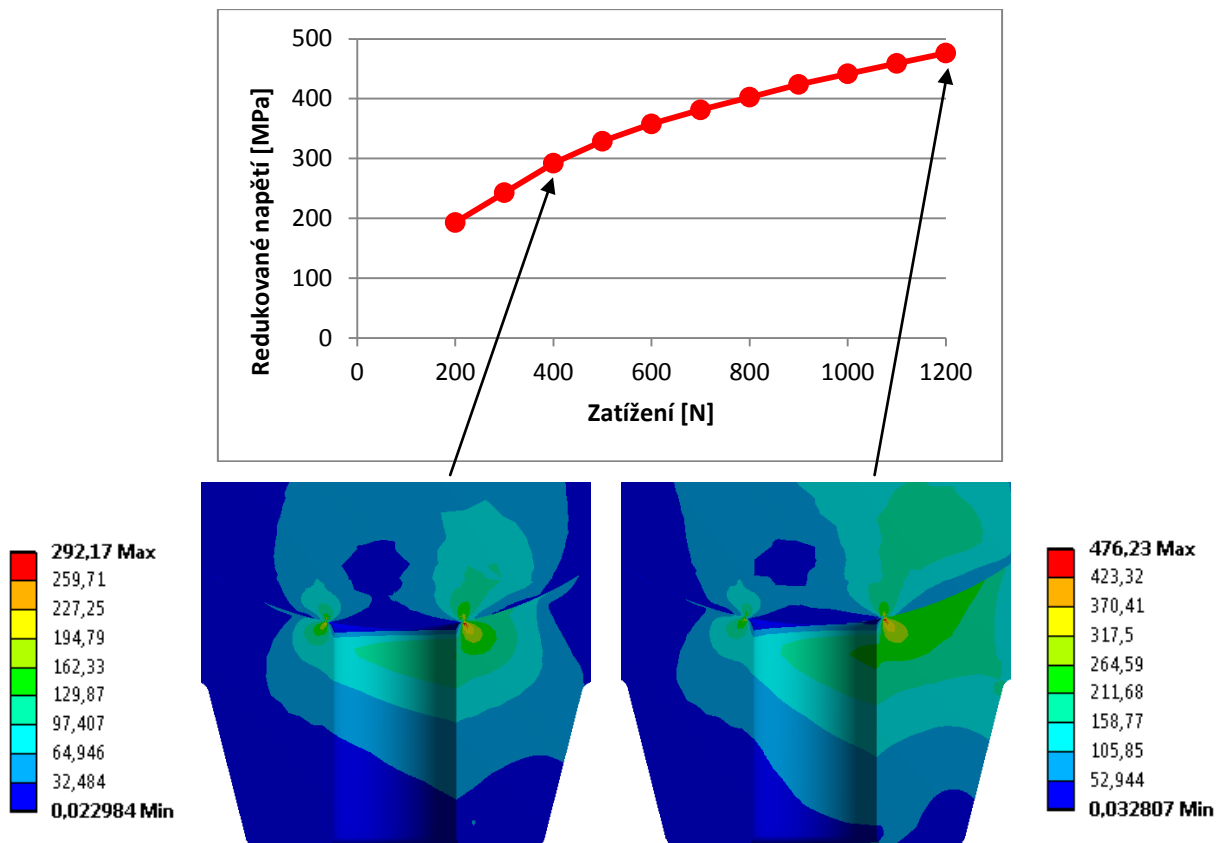
Obr. 4.18 Celková deformace modelu [mm] při konfiguraci č. 2



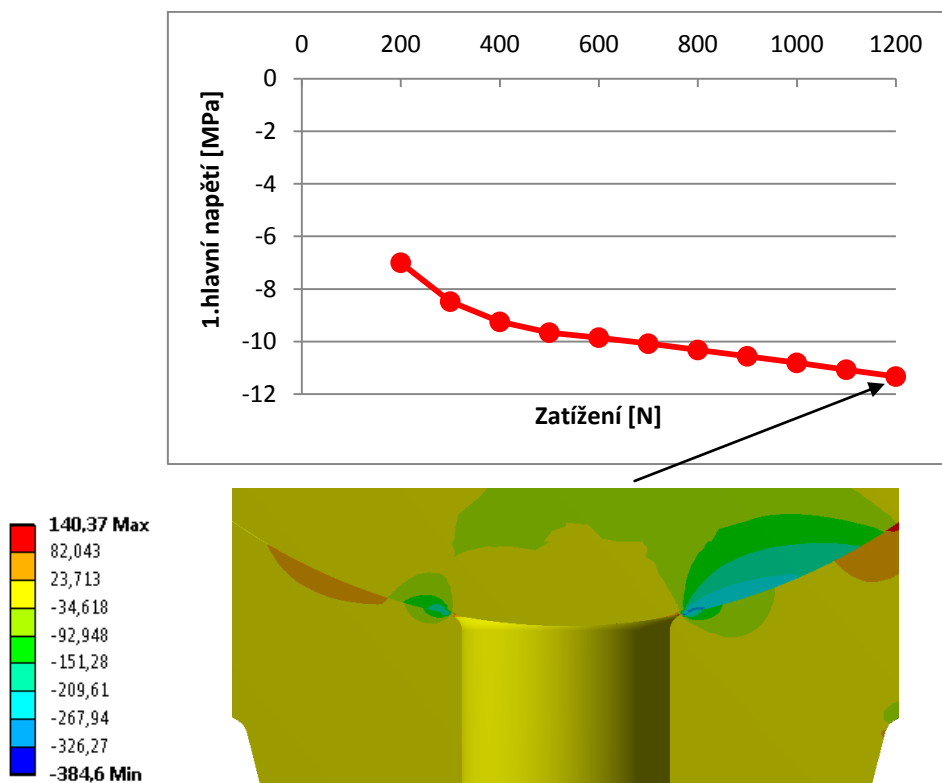
Obr. 4.19 Označení místa C

Podobně jako u konfigurace č. 1 se místo s maximální hodnotou redukovaného napětí nachází těsně pod povrchem jamky u přechodu zaoblení nedaleko otvoru. Tentokrát však leží zhruba o 0,015 mm blíže ose symetrie. Toto místo je označeno písmenem C.

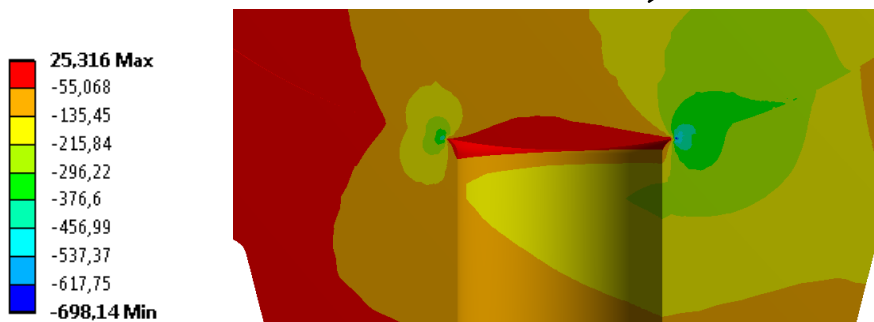
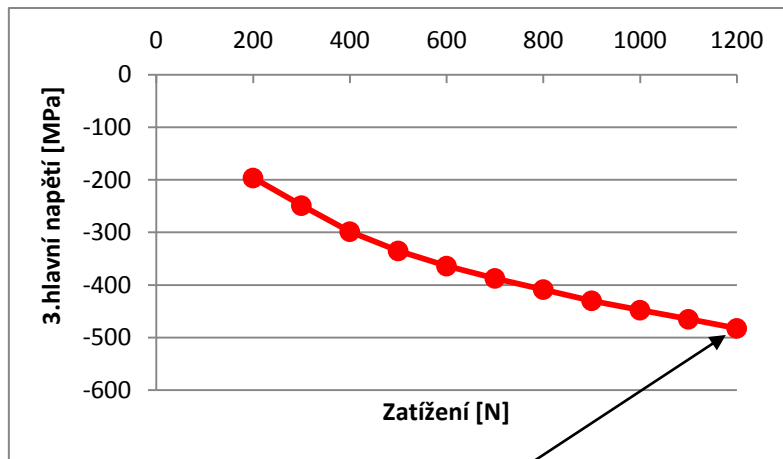
#### 4.2.2 Vybrané charakteristiky v závislosti na zatížení při koeficientu tření 0,3



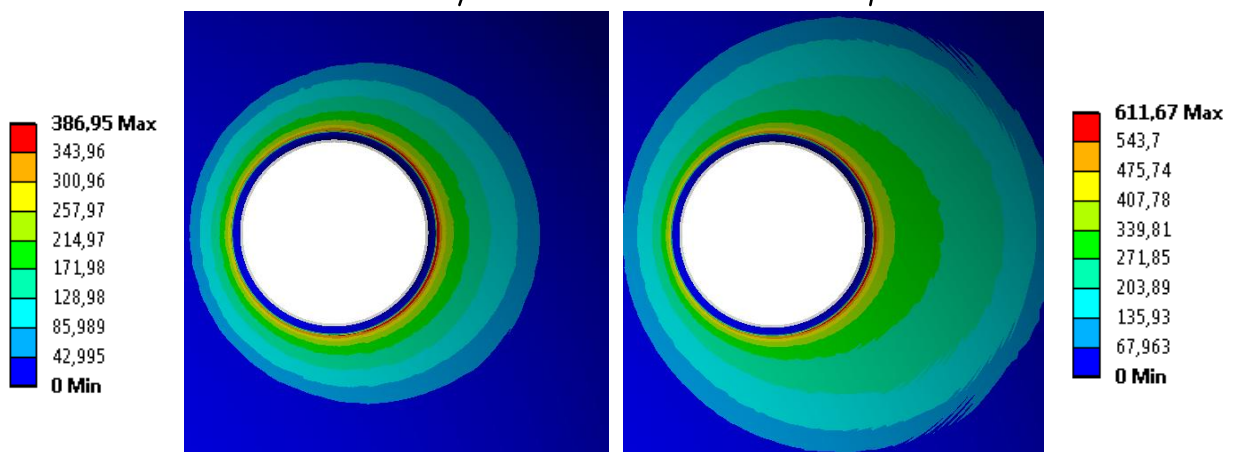
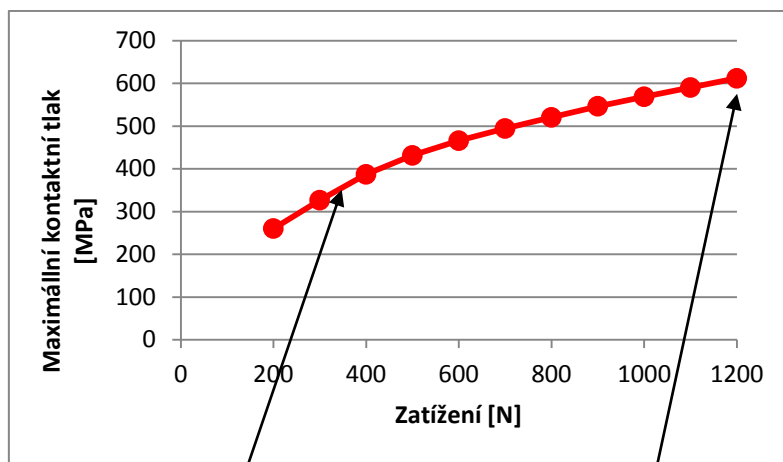
Obr. 4.20 Redukované napětí v místě C v závislosti na zatížení



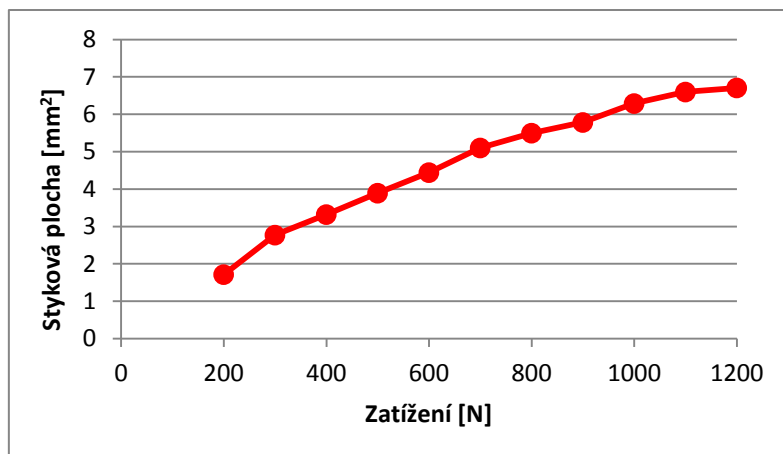
Obr. 4.21 První hlavní napětí v místě C v závislosti na zatížení



Obr. 4.22 Třetí hlavní napětí v místě C v závislosti na zatížení



Obr. 4.23 Maximální kontaktní tlak v závislosti na zatížení

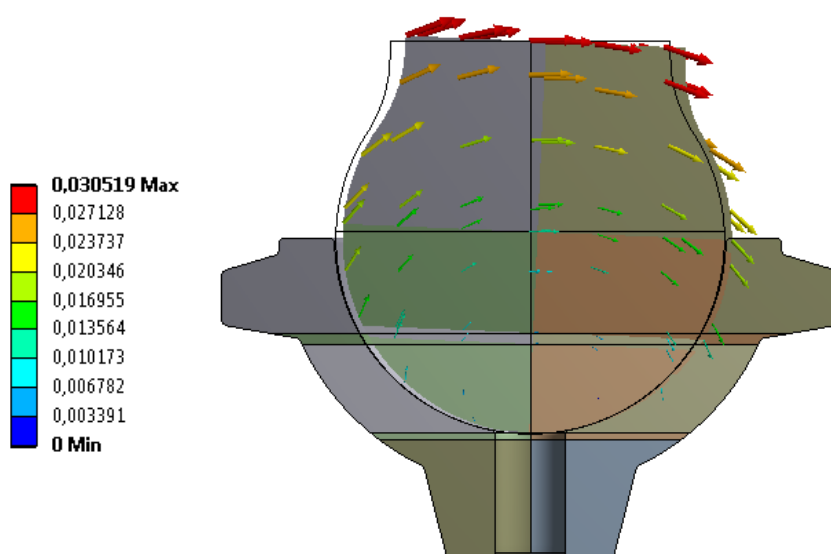


Obr. 4.24 Velikost stykové plochy v závislosti na zatížení

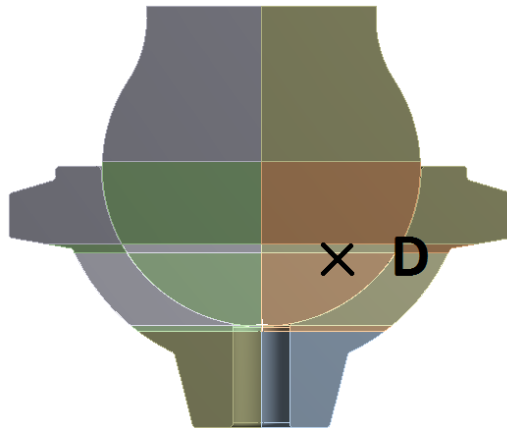
Při této konfiguraci bylo použito jediného možného modelu, a to trojrozměrného s nepozměněnou sítí. Přestože nelze pro kontrolu přesnosti výsledků aplikovat 2D axisymetrický model, v důsledku odklonu síly pouze o  $5^\circ$  by se výsledky od symetrického zatížení neměly razantně lišit. Hodnoty je tedy možné porovnat s předchozí konfigurací. Z toho plyne, že v případě maximálního zatížení 3D modelu kontaktní tlak vzrostl o cca 3 %, redukované napětí až o 13 %, zatímco styková plocha se zmenšila téměř o 2 %. Co se týká téměř přesných výsledků, bylo by možné usuzovat o těchto hodnotách na základě vztahu konfigurace č. 2 a 1 včetně 2D modelu.

### 4.3 Konfigurace č. 3 – zatížení silou s odklonem $15^\circ$

#### 4.3.1 Úvod ke konfiguraci č. 3



Obr. 4.25 Celková deformace modelu [mm] při konfiguraci č. 3

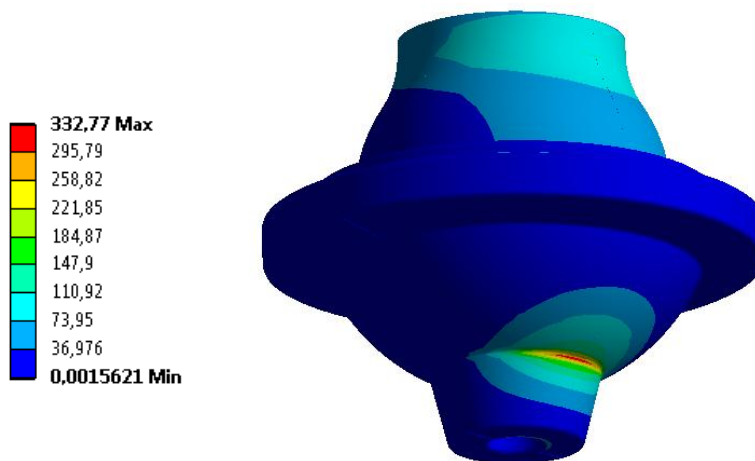


Obr. 4.26 Označení místa D

Na rozdíl od předchozích konfigurací se místo D označující bod o maximální hodnotě redukovaného napětí v hlavici nachází právě v hlavici, přestože maximální hodnota redukovaného napětí celého modelu leží na vnější straně jamky (viz obr. 4.27).

#### 4.3.2 Vybrané charakteristiky v závislosti na zatížení při koeficientu tření 0,3

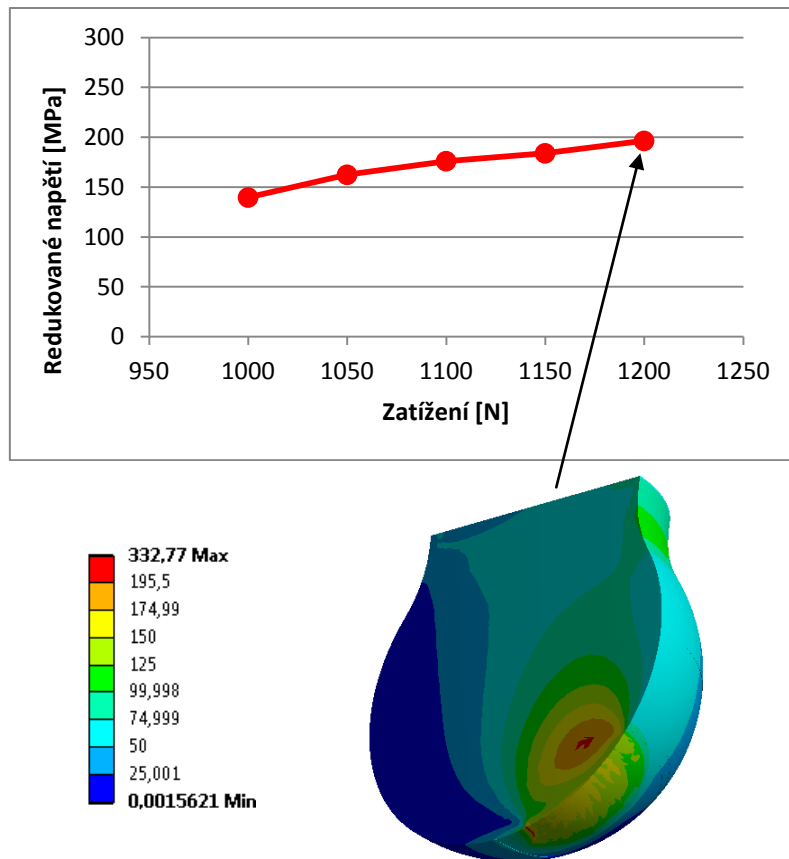
Z obr. 4.27 vyplývá, že při určitém odklonu zatěžující síly od osy symetrie, jako např. u konfigurace č. 3, se maximální redukované napětí lokalizuje do oblasti zaoblení na vnější straně jamky a jeho hodnota se odvíjí od poloměru zaoblení. Pro možnost verifikace jinými postupy budou jednotlivá napětí vyhodnocována v místě D na hlavici, které odpovídá maximálnímu redukovanému napětí v hlavici.



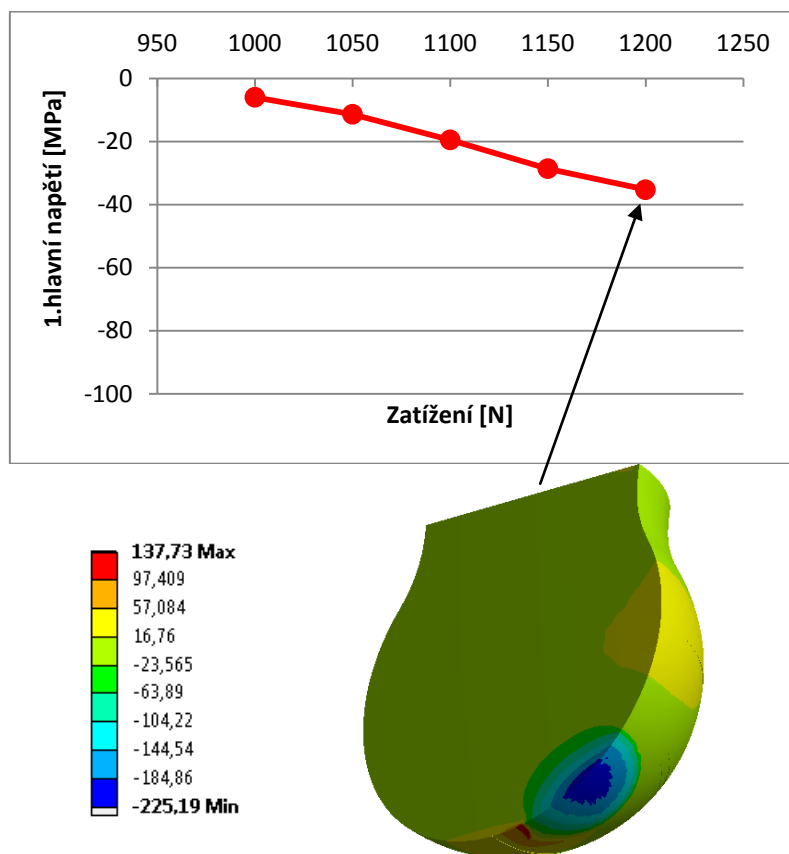
Obr. 4.27 Maximální redukované napětí při konfiguraci č. 3 při zatížení 1200 N

Následující charakteristiky budou uvedeny v závislosti na zatížení, ale pouze v blízkosti maximálního zatížení z důvodu ovlivnění výsledků při nižším zatížení prostřednictvím deformačního předzatížení. Kroky vedoucí k úpravě těchto nedostatků již nebyly provedeny z důvodu časových a licenčních omezení.

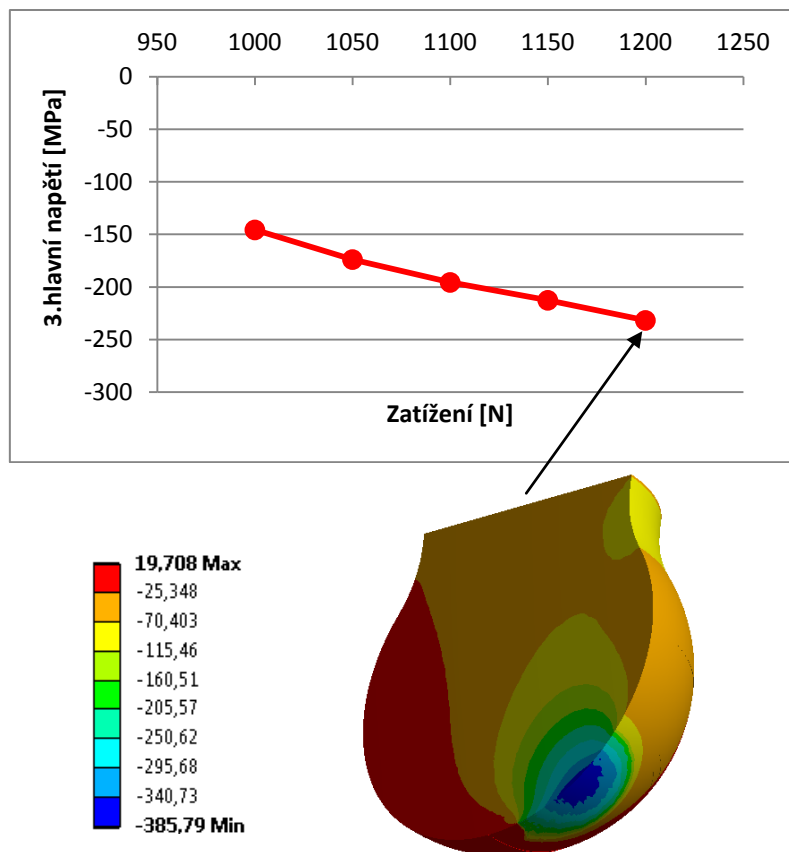
Obr. 4.28 zahrnuje barevné znázornění hodnot, které platí pro celý model. Proto maximální hodnota redukovaného napětí neodpovídá hodnotě v grafu na tomtéž obrázku.



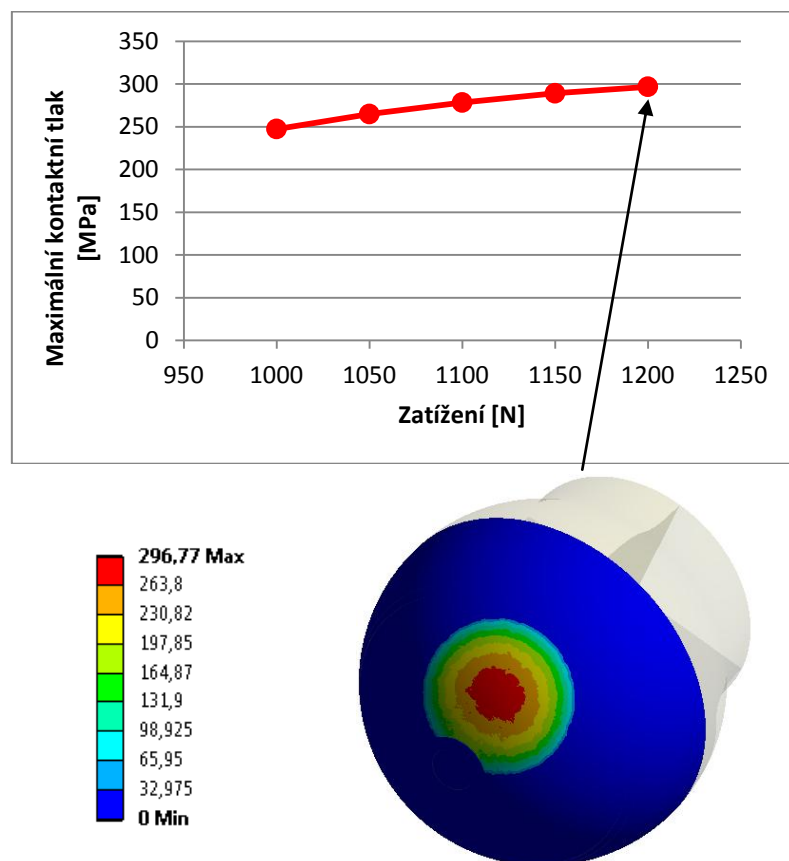
Obr. 4.28 Redukované napětí v místě D v závislosti na zatížení



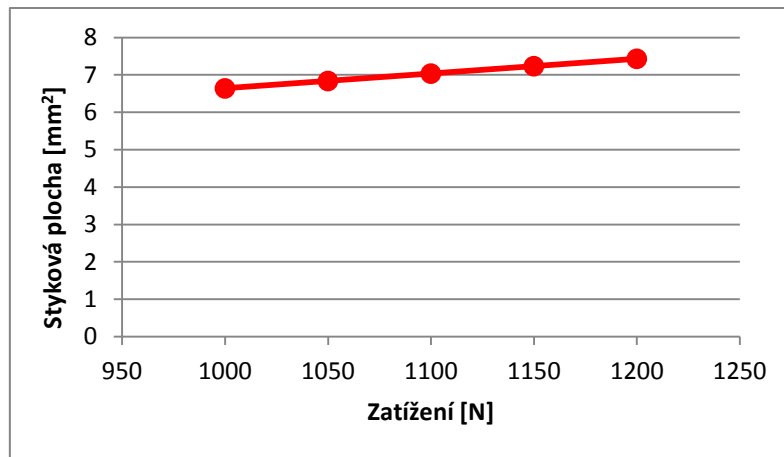
Obr. 4.29 První hlavní napětí v místě D v závislosti na zatížení



Obr. 4.30 Třetí hlavní napětí v místě D v závislosti na zatížení



Obr. 4.31 Maximální kontaktní tlak v závislosti na zatížení



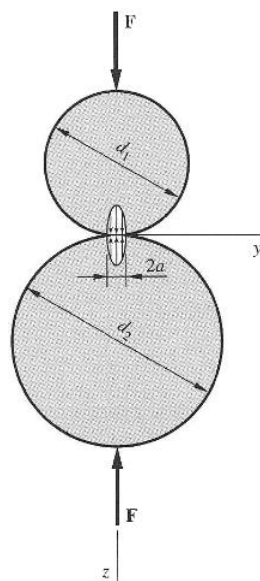
Obr. 4.32 Velikost stykové plochy v závislosti na zatížení

Podle prezentovaných hodnot se konfigurace č. 3 vyznačuje zásadně nižším redukovaným napětím a maximálním tlakem a větší stykovou plochou.

#### 4.3.3 Ověření výsledků Hertzovou teorií

Při konfiguraci č. 3 lze pro kontrolu výsledků získaných pomocí MKP využít Hertzovu teorii založenou na analytickém přístupu, a to z důvodu největší blízkosti k teoretickému modelu. Hertzova teorie nachází využití právě v oblasti kontaktů těles a nabízí k analýze několik typů těles, v tomto případě půjde o styk dvou koulí. Přestože se toto tvrzení na první pohled zdá nesmyslné, za jistých níže uvedených předpokladů může věrně napodobovat realitu:

- |                                    |           |
|------------------------------------|-----------|
| • nekonformní styk spojitých těles | splněno   |
| • malé deformace                   | splněno   |
| • elastické chování                | splněno   |
| • nulové tření                     | nesplněno |
| • definovaný tvar                  | nesplněno |



Obr. 4.33 Kontakt dvou koulí – Hertzova teorie [17]

Tím, že se za průměr  $d_2$  dosadí záporné číslo, při neuvažování horní části tohoto útvaru se z koule stane kulová jamka. Předpokládejme, že tvar modelu jamky pro výpočet pomocí MKP nebude způsobovat velké rozdíly ve výsledcích v porovnání s „kulovou jamkou“ vstupující do analytického výpočtu. Potom je postup následující:

V prvé řadě se stanoví velikost kruhové kontaktní plochy prostřednictvím poloměru  $a$ :

$$a = \sqrt[3]{\frac{3F \left( \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)}{8 \left( \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right)}}, \quad (9)$$

kde  $F$  je zatěžující síla,  $\mu$  Poissonovo číslo,  $E$  modul pružnosti v tahu,  $d$  průměr, přičemž index 1 se vztahuje v tomto případě ke dřívku a index 2 k jamce. Dosadíme-li  $F = 1200$  N,  $\mu_1 = \mu_2 = 0,3$ ,  $E_1 = E_2 = 208$  GPa,  $d_1 = 6,95$  mm,  $d_2 = -7$  mm, pak:

$$a = 1,56475 \text{ mm}. \quad (10)$$

Teoreticky by rozložení tlaku na kontaktní ploše mělo být půlkulové s maximální hodnotou:

$$p_{\max} = \frac{3F}{2\pi a^2}, \quad (11)$$

$$p_{\max} = 234,0 \text{ MPa}. \quad (12)$$

1. a 2. hlavní napětí působící v bodech na ose  $z$  jsou dána vztahem:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -p_{\max} \left[ \left( 1 - \left| \frac{z}{a} \right| \arctg \frac{1}{\left| \frac{z}{a} \right|} \right) (1 + \mu) - \frac{1}{2 \left( 1 + \frac{z^2}{a^2} \right)} \right]^{-1}. \quad (13)$$

Pro maximální redukované napětí platí přibližně  $z = 0,7a$ , tedy 1. a 2. hlavní napětí:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 4,8 \text{ MPa}. \quad (14)$$

3. hlavní napětí se vypočítá ze vztahu:

$$\sigma_3 = \frac{-p_{\max}}{1 + \frac{z^2}{a^2}}, \quad (15)$$

$$\sigma_3 = -157,0 \text{ MPa}. \quad (16)$$

Maximální redukované napětí podle podmínky  $\max \tau$ :

$$\sigma_{red}^{\max \tau} = \sigma_1 - \sigma_3, \quad (17)$$

$$\sigma_{red}^{\max \tau} = 161,8 \text{ MPa}. \quad (18)$$

Pro přehlednost jsou výsledky jednotlivých přístupů pro konfiguraci č. 3 zapsány do tabulky:

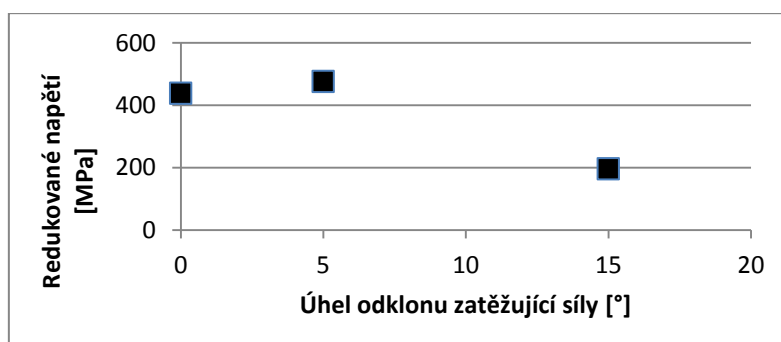
|                        | poloměr styku [mm] | kontaktní tlak [MPa] | redukované napětí [MPa] | 1. hlavní napětí [MPa] | 3. hlavní napětí [MPa] |
|------------------------|--------------------|----------------------|-------------------------|------------------------|------------------------|
| 3D model - původní     | 1,49               | 297                  | 196                     | -35                    | -232                   |
| 2D model - axisymetrie | 1,48               | 287                  | 157                     | -45                    | -202                   |
| Hertzova teorie        | 1,56               | 234                  | 162                     | 5                      | -157                   |

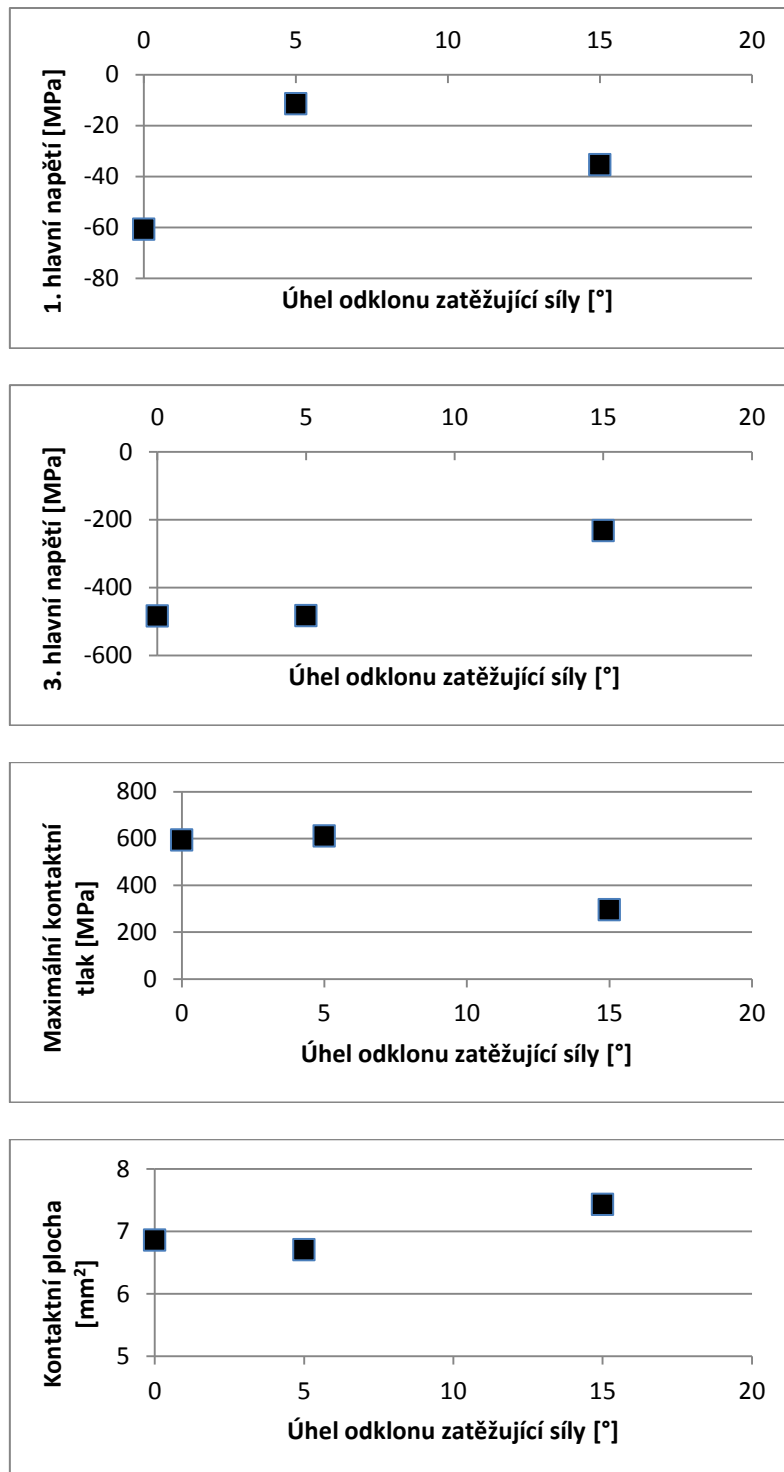
Tab. 4.1 Přehled výsledků jednotlivých metod při konfiguraci č. 3

První pohled na tab. 4.1 naznačuje mírnou rozdílnost výsledků pro různé metody řešení. Vzhledem k odlišným předpokladům a přístupům jsou jisté odlišnosti na místě. Pro 2D model byla použita třikrát jemnější síť oproti 3D modelu. Navíc tvar 2D modelu představující vtačovanou hlavici do kulové jamky jednoduchého tvaru o tloušťce 2 mm se částečně liší geometrií vzhledem k 3D modelu. U 3D modelu je styková plocha zmenšena vlivem přítomnosti otvoru v jamce. Hertzova teorie vychází z jamky o nekonečném vnějším průměru a neuvažuje tření. I přes určité rozdíly lze usuzovat, že výsledky nejsou zatíženy žádnými závažnými chybami.

#### 4.4 Srovnání konfigurací na 3D modelu po kvantitativní stránce

Hodnoty týkající se vyšetřovaných napětí náleží k bodům výše definovaným pro každou konfiguraci 3D modelu.





Obr. 4.34 Srovnání konfigurací na 3D modelu po kvantitativní stránce

Ze srovnání konfigurací na 3D modelu lze usuzovat, že při nepatrném odklonu zatěžující síly od osy symetrie dochází k mírnému nárůstu redukovaného napětí a maximálního kontaktního tlaku, přičemž kontaktní plocha se zmenší. Naopak další odklánění zatěžující síly má za následek poměrně prudký pokles redukovaného napětí a maximálního kontaktního tlaku a zvětšení kontaktní plochy. Vzhledem ke tvaru stýkajících se těles by se hodnoty s pokračujícím odklonem síly dále neměly výrazně měnit.

#### 4.5 Srovnání konfigurací po výpočetní stránce

|          | Celkový počet prvků | Celkový počet uzlů | Velikost prvků ve vyšetřované oblasti [mm] | Výpočetní čas | Celková použitá paměť [MB] | Počet iterací |
|----------|---------------------|--------------------|--|---------------|----------------------------|---------------|
| 3D model | 150 493             | 632 030            | 0,02                                       | 2,3 hod       | 2 994                      | 18            |
| 2D model | 30 895              | 94 107             | 0,002                                      | 4,4 min       | 2 001                      | 20            |

*Tab. 4.2 Přehled výpočetní náročnosti u konfigurace č. 1*

|          | Celkový počet prvků | Celkový počet uzlů | Velikost prvků ve vyšetřované oblasti [mm] | Výpočetní čas [hod] | Celková použitá paměť [MB] | Počet iterací |
|----------|---------------------|--------------------|--|---------------------|----------------------------|---------------|
| 3D model | 150 493             | 632 030            | 0,02                                       | 3,3                 | 3 000                      | 24            |

*Tab. 4.3 Přehled výpočetní náročnosti u konfigurace č. 2*

|          | Celkový počet prvků | Celkový počet uzlů | Velikost prvků ve vyšetřované oblasti [mm] | Výpočetní čas | Celková použitá paměť [MB] | Počet iterací |
|----------|---------------------|--------------------|--|---------------|----------------------------|---------------|
| 3D model | 272 452             | 1 119 344          | 0,03                                       | 16,5 hod      | 7813                       | 36            |
| 2D model | 16 085              | 48 689             | 0,01                                       | 4,3 min       | 1536                       | 21            |

*Tab. 4.4 Přehled výpočetní náročnosti u konfigurace č. 3*

Tabulky výše poskytují názorný přehled aplikovaných modelů včetně jejich výpočetní náročnosti. V případě právoplatnosti použití jasně převládají výhody 2D modelu. Avšak právě použitelnost 2D modelu je často nemožná nebo vhodná jen za jistých předpokladů. U jednotlivých modelů byla volena co možná nejjemnější síť s ohledem na možnosti programu a výpočetní čas.



## 5 Závěr

Cíle bakalářské práce, které byly stanoveny v kapitole Formulace problému a cíle řešení, se podařilo v očekávané míře splnit.

První kapitola v podobě rešeršní studie se snaží přiblížit lékařský pohled na věc. Anatomie ruky popisuje ruku jako celek se zaměřením na trapéziometakarpální skloubení při normální funkci. Naopak článek o rhizartróze charakterizuje onemocnění, které může toto skloubení postihnout, přičemž nechybí přehled možností léčby, včetně implantátů.

Hlavním cílem bylo provést napjatostně deformační analýzu jamky a dřívku totální náhrady trapéziometakarpálního kloubu. Prvním krokem bylo vytvoření zjednodušeného modelu implantátu, který se v praxi vyrábí. Nejprve byl definován tvar a materiál modelu. Poté bylo zvoleno zatížení a vazby. Předepsání vazeb znamenalo fixaci vnější části jamky, a tedy napodobení skutečného chování implantátu v kosti. Volba zatížení byla provedena s ohledem na možnost odlišné verifikace jednotlivých výsledků. Klíčovým krokem se stala tvorba sítě. Ukázalo, že právě uspořádání a tvar prvků výrazně ovlivňují kvalitu výsledků. Téměř po dvou měsících neúspěšného bádání bylo docíleno uspokojivých výsledků díky optimální diskretizaci modelu. Pro ověření či porovnání výsledků se nabízelo využití 2D axisymetrického modelu.

Vlastní napjatostně deformační analýza byla provedena pro tři různé konfigurace, které se lišily úhlem odklonu zatěžující síly o maximální hodnotě 1200 N. Pro konfiguraci č. 1 (symetrické zatížení) bylo provedeno hned několik rozborů. Ze závislosti na koeficientu tření vyplynulo, že vliv tření na změnu vyšetřovaných charakteristik lze zanedbat. Co se týká modulu pružnosti v tahu použitého materiálu, analýza jednoznačně prokázala, že s rostoucím modulem pružnosti vzrůstá redukované napětí, ještě výrazněji roste kontaktní tlak a zmenšuje se styková ploška, což lze odůvodnit snížením poddajnosti materiálu.

Dále byly na obou modelech provedeny analýzy v závislosti na zatížení včetně jejich porovnání. Z grafů je patrné, že aplikace 2D axisymetrického modelu vede vzhledem k jemnosti sítě v kontaktu k výsledkům, které by se mohly považovat za téměř skutečné, zatímco výsledky 3D modelu se značně liší. Např. při maximálním zatížení silou 1200 N 2D model vykazuje maximální redukované napětí cca 890 MPa, 3D model pouze 420 MPa. Kontaktní tlak u 2D modelu odpovídá přibližně 1320 MPa, zatímco 3D model 600 MPa. Rozdíl je tedy značný.

U konfigurace č. 2 (zatížení silou s odklonem 5°) nesplnění axisymetrických podmínek vedlo k možnosti použití pouze 3D modelu. V porovnání s 3D modelem u symetrického zatížení zde redukované napětí vzrostlo přibližně o 13 %, kontaktní tlak o 3 % a styková plocha se zmenšila o 2 %.

Konfigurace č. 3 (zatížení silou s odklonem 15°) byla primárně provedena pro 3D model. Vzhledem k 3D modelu u konfigurace č. 1 došlo k razantní změně výsledků, a to zejména v důsledku kontaktu mimo otvor v jamce. Redukované napětí v definovaných bodech pokleslo o výrazných 112 %, kontaktní tlak o 103 % a styková plocha se v souladu s tím zvětšila o 7 %. Pro verifikaci výsledků konfigurace č. 3 byly s jistými zjednodušujícími předpoklady zavedeny kontroly pomocí modifikovaného 2D modelu a analytického řešení Hertzovou teorií, které v rámci předpokladů potvrdily shodu.

Závěrem lze tvrdit, že zatímco koeficient tření významně neovlivňuje vyšetřované charakteristiky, modul pružnosti v tahu použitého materiálu či geometrie implantátu v okolí kontaktu mají na jejich chování zásadní vliv.

Kromě přínosu velkého množství faktů, zajímavostí a zkušeností tato práce poskytla významné a do budoucna užitečné seznámení s MKP a programem ANSYS Workbench. Podle informací na toto téma doposud nebyla zpracována podobná práce, proto by se mohlo jednat o jistý přínos do oblasti biomechaniky.

## Seznam použité literatury

- [1] Čihák, R. *Anatomie I*. Praha: Avicenum, 1987
- [2] Trtík, L. *Rhizartróza, současné možnosti léčení*. Ortopedie 2011, s. 28-33. Dostupné z: [http://fvconsult.krivanekludek.cz/prednasky/Trtik\\_Rizartroza.pdf](http://fvconsult.krivanekludek.cz/prednasky/Trtik_Rizartroza.pdf)
- [3] Manuál systému MKP ANSYS
- [4] Katalog firmy Beznoska – náhrada trapéziometakarpálního kloubu
- [5] Petruška, J. *MKP v inženýrských výpočtech* [online]. 2011 [cit. 2013-03-09]. Dostupné z: <http://www.umt.fme.vutbr.cz/img/fckeditor/file/opory/RIV/MKP2011.pdf>
- [6] Vrbka, J. *Obecná úloha pružnosti*. Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, FSI VUT v Brně, 2011 [cit. 2013-03-09]. Dostupné z: [https://www.vutbr.cz/www\\_base/priloha.php?dpid=52800](https://www.vutbr.cz/www_base/priloha.php?dpid=52800)
- [7] Vrbka, J. *Základy metody konečných prvků* [online] Brno: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, FSI VUT v Brně, 2011 [cit. 2013-03-09]. Dostupné z: [https://www.vutbr.cz/www\\_base/priloha.php?dpid=52476](https://www.vutbr.cz/www_base/priloha.php?dpid=52476)
- [8] Ondráček, E. a kol. *Mechanika těles: Pružnost a pevnost II*. 4. přepracované. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006. ISBN 80-214-3260-8
- [9] Janíček, P. a kol. *Mechanika těles: Pružnost a pevnost I*. 3. přepracované. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2004. ISBN 80-214-2592-X
- [10] Horyl, P. *Inženýrské základy MKP* [online]. 2002 [cit. 2013-03-09]. Dostupné z: [http://www.337.vsb.cz/materialy/Inz\\_zakl\\_MKP\\_2002.pdf](http://www.337.vsb.cz/materialy/Inz_zakl_MKP_2002.pdf)
- [11] Fusek, M., Halama, R. *MKP a MHP* [online]. 2011 [cit. 2013-03-09]. Dostupné z: [http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/metoda\\_konecných\\_prvku\\_a\\_hranicnich\\_prvku.pdf](http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/metoda_konecných_prvku_a_hranicnich_prvku.pdf)
- [12] Kopecký, M. *Pevnostní výpočet čelního soukolí s přímými evolventními symetrickými zuby pomocí MKP*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2005. 82 s.
- [13] Vaverka, M., Vrbka, M. *Úvod do variačních metod, Ritzova metoda, MKP jako variační metoda* [online]. [cit. 2013-03-09]. Dostupné z: [http://old.uk.fme.vutbr.cz/kestazeni/MKP/prednaska2\\_mkp.pdf](http://old.uk.fme.vutbr.cz/kestazeni/MKP/prednaska2_mkp.pdf)
- [14] Vaverka, M., Vrbka, M. *Algoritmus MKP* [online]. [cit. 2013-03-09]. Dostupné z: [http://old.uk.fme.vutbr.cz/kestazeni/MKP/prednaska3\\_mkp.pdf](http://old.uk.fme.vutbr.cz/kestazeni/MKP/prednaska3_mkp.pdf)
- [15] Tribologie náhrad lidských kloubů [online]. [cit. 2013-03-09]. Dostupné z: <http://ucebnice.euromise.cz/index.php?conn=0&section=biomech&node=node62>
- [16] Koukal, M. *Mechanická analýza vlivu výrobních odchylek na styk hlavičky a jamky totální endoprotézy kyčelního kloubu*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2010. 77 s.

- [17] Shigley, J. E., Mischke, Ch. R., Budynas, R. G. *Konstruování strojních součástí*. 1. vydání. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Nakladatelství VUTIUM, 2010. 1160 s. ISBN 978-80-214-2629-0
- [18] Contact Stresses and Deformations. [online]. [cit. 2013-04-15]. Dostupné z: <http://www.mech.utah.edu/~me7960/lectures/Topic7-ContactStressesAndDeformations.pdf>
- [19] Clinical Biomechanics. [online]. [cit. 2013-04-15]. Dostupné z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0268003306001665>
- [20] Properties of Composites. [online]. [cit. 2013-04-15]. Dostupné z: [http://miesandpeas.blogspot.cz/2010\\_05\\_01\\_archive.html](http://miesandpeas.blogspot.cz/2010_05_01_archive.html)
- [21] Úvod do MKP, přednáška. [online]. [cit. 2013-04-28]. Dostupné z: [http://www.339.vsb.cz/PDF/UvodDoMKP/UvodDoMKP\\_prednasky.pdf](http://www.339.vsb.cz/PDF/UvodDoMKP/UvodDoMKP_prednasky.pdf)

## Seznam použitých zkratek a symbolů

|  |  |
|--|--|
| $a$ [mm]                                     | poloměr styku                                |
| $d$ [mm]                                     | průměr pro analytický výpočet                |
| $E$ [MPa]                                    | modul pružnosti v tahu                       |
| $F$ [N]                                      | zatěžující síla                              |
| <b>F</b>                                     | globální matice zatížení                     |
| <b>K</b>                                     | globální matice tuhosti                      |
| MKP  | metoda konečných prvků                       |
| <b>o</b>                                     | sloupcová matice objemového zatížení         |
| <b>P</b>                                     | potenciál vnějšího zatížení                  |
| <b>p</b>                                     | sloupcová matice plošného zatížení           |
| $p_{\max}$ [MPa]                             | maximální kontaktní tlak                     |
| <b>T<sub>σ</sub></b>                         | tenzor napětí                                |
| <b>U</b>                                     | globální matice posuvů pro všechny uzly      |
| <b>u</b>                                     | sloupcová matice posuvů                      |
| <b>W</b>                                     | energie napjatosti tělesa                    |
| $z$ [mm]                                     | hloubka pod povrchem                         |
| <b>ε</b>                                     | sloupcová matice přetvoření                  |
| $\mu$ [-]                                    | Poissonův poměr                              |
| <b>Π</b>                                     | celková potenciální energie                  |
| $\sigma$ [MPa]                               | normálové napětí                             |
| <b>σ</b>                                     | sloupcová matice napětí                      |
| $\sigma_1$ [MPa]                             | první hlavní napětí                          |
| $\sigma_2$ [MPa]                             | druhé hlavní napětí                          |
| $\sigma_3$ [MPa]                             | třetí hlavní napětí                          |
| $\sigma_k$ [MPa]                             | mez kluzu                                    |
| $\sigma_{\text{red}}^{\text{max}\tau}$ [MPa] | redukované napětí podle podmínky $\max \tau$ |
| $\tau$ [MPa]                                 | smykové napětí                               |

## Seznam obrázků

|                  |  |    |
|------------------|--|----|
| <i>Obr. 1.1</i>  | <i>Kosti ruky, pohled na dlaňovou stranu [1]</i>                             | 14 |
| <i>Obr. 1.2</i>  | <i>Opozice palce a zúčastněné svaly [1]</i>                                  | 15 |
| <i>Obr. 1.3</i>  | <i>Podélný řez kloubem (obecné schéma) [1]</i>                               | 15 |
| <i>Obr. 1.4</i>  | <i>Základní pohyby palce a ostatních prstů [15]</i>                          | 16 |
| <i>Obr. 1.5</i>  | <i>Pokročilé stádium rhizartrózy [2]</i>                                     | 17 |
| <i>Obr. 1.6</i>  | <i>Hodnocení opozice palce podle Kapandjiho [2]</i>                          | 18 |
| <i>Obr. 1.7</i>  | <i>RTG snímek částečného implantátu v oblasti báze prvního metakarpu [2]</i> | 20 |
| <i>Obr. 1.8</i>  | <i>Totální náhrada protézou Maia [2]</i>                                     | 21 |
| <i>Obr. 1.9</i>  | <i>Totální náhrada protézou Rubis2 [2]</i>                                   | 21 |
| <i>Obr. 3.1</i>  | <i>Model geometrie hlavice a jamky implantátu</i>                            | 28 |
| <i>Obr. 3.2</i>  | <i>Přehled zvolených zatížení, zleva konfigurace č. 1, č. 2 a č. 3</i>       | 28 |
| <i>Obr. 3.3</i>  | <i>Diskretizace modelu jamky při symetrickém zatížení</i>                    | 30 |
| <i>Obr. 3.4</i>  | <i>Diskretizace modelu při symetrickém zatížení, podélný řez</i>             | 30 |
| <i>Obr. 4.1</i>  | <i>Celková deformace modelu [mm] při konfiguraci č. 1</i>                    | 33 |
| <i>Obr. 4.2</i>  | <i>Označení míst A a B na 3D a 2D modelu</i>                                 | 34 |
| <i>Obr. 4.3</i>  | <i>Redukované napětí v místě A v závislosti na koeficientu tření</i>         | 35 |
| <i>Obr. 4.4</i>  | <i>Mohrova kružnice zobrazující napjatost v bodě [20]</i>                    | 36 |
| <i>Obr. 4.5</i>  | <i>První hlavní napětí v místě A v závislosti na koeficientu tření</i>       | 36 |
| <i>Obr. 4.6</i>  | <i>Třetí hlavní napětí v místě A v závislosti na koeficientu tření</i>       | 36 |
| <i>Obr. 4.7</i>  | <i>Maximální kontaktní tlak na jamce v závislosti na koeficientu tření</i>   | 37 |
| <i>Obr. 4.8</i>  | <i>Redukované napětí v místech A a B v závislosti na modulu pružnosti</i>    | 38 |
| <i>Obr. 4.9</i>  | <i>První hlavní napětí v místech A a B v závislosti na modulu pružnosti</i>  | 38 |
| <i>Obr. 4.10</i> | <i>Třetí hlavní napětí v místech A a B v závislosti na modulu pružnosti</i>  | 39 |
| <i>Obr. 4.11</i> | <i>Maximální kontaktní tlak v závislosti na modulu pružnosti</i>             | 39 |
| <i>Obr. 4.12</i> | <i>Styková plocha v závislosti na modulu pružnosti</i>                       | 40 |
| <i>Obr. 4.13</i> | <i>Redukované napětí v místech A a B v závislosti na zatížení</i>            | 41 |
| <i>Obr. 4.14</i> | <i>První hlavní napětí v místech A a B v závislosti na zatížení</i>          | 41 |
| <i>Obr. 4.15</i> | <i>Třetí hlavní napětí v místech A a B v závislosti na zatížení</i>          | 42 |
| <i>Obr. 4.16</i> | <i>Maximální kontaktní tlak v závislosti na zatížení</i>                     | 42 |
| <i>Obr. 4.17</i> | <i>Styková plocha v závislosti na zatížení</i>                               | 43 |
| <i>Obr. 4.18</i> | <i>Celková deformace modelu [mm] při konfiguraci č. 2</i>                    | 44 |
| <i>Obr. 4.19</i> | <i>Označení místa C</i>  | 44 |
| <i>Obr. 4.20</i> | <i>Redukované napětí v místě C v závislosti na zatížení</i>                  | 45 |
| <i>Obr. 4.21</i> | <i>První hlavní napětí v místě C v závislosti na zatížení</i>                | 45 |
| <i>Obr. 4.23</i> | <i>Maximální kontaktní tlak v závislosti na zatížení</i>                     | 46 |
| <i>Obr. 4.22</i> | <i>Třetí hlavní napětí v místě C v závislosti na zatížení</i>                | 46 |
| <i>Obr. 4.24</i> | <i>Velikost stykové plochy v závislosti na zatížení</i>                      | 47 |
| <i>Obr. 4.25</i> | <i>Celková deformace modelu [mm] při konfiguraci č. 3</i>                    | 47 |
| <i>Obr. 4.26</i> | <i>Označení místa D</i>  | 48 |
| <i>Obr. 4.27</i> | <i>Maximální redukované napětí při konfiguraci č. 3 při zatížení 1200 N</i>  | 48 |
| <i>Obr. 4.28</i> | <i>Redukované napětí v místě D v závislosti na zatížení</i>                  | 49 |
| <i>Obr. 4.29</i> | <i>První hlavní napětí v místě D v závislosti na zatížení</i>                | 49 |
| <i>Obr. 4.30</i> | <i>Třetí hlavní napětí v místě D v závislosti na zatížení</i>                | 50 |
| <i>Obr. 4.31</i> | <i>Maximální kontaktní tlak v závislosti na zatížení</i>                     | 50 |
| <i>Obr. 4.32</i> | <i>Velikost stykové plochy v závislosti na zatížení</i>                      | 51 |
| <i>Obr. 4.33</i> | <i>Kontakt dvou koulí – Hertzova teorie [17]</i>                             | 51 |
| <i>Obr. 4.34</i> | <i>Srovnání konfigurací na 3D modelu po kvantitativní stránce</i>            | 54 |

## Seznam tabulek

|  |    |
|--|----|
| <i>Tab. 3.1 Vlastnosti materiálu použitého při analýze</i>               | 28 |
| <i>Tab. 4.1 Přehled výsledků jednotlivých metod při konfiguraci č. 3</i> | 53 |
| <i>Tab. 4.2 Přehled výpočetní náročnosti u konfigurace č. 1</i>          | 55 |
| <i>Tab. 4.3 Přehled výpočetní náročnosti u konfigurace č. 2</i>          | 55 |
| <i>Tab. 4.4 Přehled výpočetní náročnosti u konfigurace č. 3</i>          | 55 |

## Přílohy

### Odvození Lagrangeova variačního principu

Protože se v mnoha závěrečných pracích hovoří o variačním principu jen povrchně a odvození zůstává nepovšimnuto, pokusme se nyní přiblížit, jak vypadá cesta k Lagrangeově variačnímu principu. Uvažujme trojrozměrné těleso, ale pro jednoduchost zapisujme pouze členy odpovídající rovinnému případu.

Zavedme geometrické rovnice:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned}, \quad (19)$$

rovnice rovnováhy vnitřních prvků (Cauchyho rovnice rovnováhy):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + o_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + o_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + o_z &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

rovnice rovnováhy vnějších prvků:

$$\begin{aligned} p_x &= \sigma_x \alpha_x + \tau_{yx} \alpha_y + \tau_{zx} \alpha_z \\ p_y &= \tau_{xy} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y + \tau_{zy} \alpha_z \\ p_z &= \tau_{xz} \alpha_x + \tau_{yz} \alpha_y + \sigma_z \alpha_z, \end{aligned} \quad (21)$$

kde  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$  představují složky jednotkového vektoru vnější normály tečné roviny vedené daným bodem.

Dále zavedme konstitutivní vztahy:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z) \right] & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_y - \mu (\sigma_x + \sigma_z) \right] & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y) \right] & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx}. \end{aligned} \quad (22)$$

Věnujme se následujícímu vztahu:

$$I = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV, \quad (23)$$

kde sloupcová matice napětí

$$\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}] \quad (24)$$

a sloupcová matice přetvoření

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]. \quad (25)$$

Předpokládejme, že složky matice  $\boldsymbol{\sigma}$  splňují podmínky rovnováhy všech elementárních a hraničních prvků a pro složky matice  $\boldsymbol{\varepsilon}$  platí geometrické podmínky spojitosti uvnitř tělesa a geometrické okrajové podmínky na povrchu. Aplikací geometrických podmínek spojitosti tělesa, pravidla derivace součinu a patřičnými úpravami získáme:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_{\Omega} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dV = \\ &= \int_{\Omega} \left( \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dV = \\ &= \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x u) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_y v) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} u) + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xy} v) \right] dV - \\ &\quad - \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} u + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} v + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} u + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} v \right] dV = I_1 - I_2. \end{aligned}$$

Oba integrály řešíme z důvodu přehlednosti zvlášť. Druhý integrál upravíme za pomoci rovnic rovnováhy vnitřních prvků:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) u + \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) v \right] dV = \\ &= \int_{\Omega} (-o_x u - o_y v) dV = \\ &= - \int_{\Omega} \mathbf{o}^T \mathbf{u} dV. \end{aligned}$$

U prvního integrálu využijeme Gauss-Ostrogradského větu s přihlédnutím na 2D případ:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{A} dV &= \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_{\rho} dS \Leftrightarrow \int_{\Omega} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) dV = \int_{\Gamma} (A_x \alpha_x + A_y \alpha_y) dS, \\ I_1 &= \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x u) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_y v) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} u) + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xy} v) \right] dV = \end{aligned}$$

$$= \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x u + \tau_{xy} v) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} u + \sigma_y v) \right] dV .$$

Výrazy v kulatých závorkách považujeme za  $A_x$  a  $A_y$ :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Gamma} [(\sigma_x u + \tau_{xy} v) \alpha_x + (\tau_{xy} u + \sigma_y v) \alpha_y] dS = \\ &= \int_{\Gamma} [(\sigma_x \alpha_x + \tau_{xy} \alpha_y) u + (\tau_{xy} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y) v] dS = \\ &= \int_{\Gamma} (p_x u + p_y v) dS = \\ &= \int_{\Gamma} \mathbf{p}^T \mathbf{u} dS . \end{aligned}$$

Získáváme tak důležitý vztah v maticovém tvaru, který nese název divergenční teorém:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_{\Gamma} \mathbf{p}^T \mathbf{u} dS + \int_{\Omega} \mathbf{o}^T \mathbf{u} dV . \quad (26)$$

Po nahrazení posuvů  $\mathbf{u}$  virtuálními posuvy  $\delta \mathbf{u}$  a přetvoření  $\boldsymbol{\varepsilon}$  virtuálními přetvořeními  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  získáme po úpravě vztah:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_{\Omega} \mathbf{o}^T \delta \mathbf{u} dV - \int_{\Gamma} \mathbf{p}^T \delta \mathbf{u} dS = \mathbf{0} . \quad (27)$$

Tento vztah je speciálním případem divergenčního teorému a nazývá se princip virtuálních prací a jeho slovní formulace má znění:

*„Virtuální práce vnitřních a vnějších sil na virtuálních deformacích a posuvech splňujících geometrické vztahy uvnitř tělesa a geometrické okrajové podmínky na povrchu tělesa je rovna nule.“*

Divergenční teorém ani princip virtuálních prací nezávisí na materiálu, jelikož při odvození nebyly potřeba konstitutivní vztahy. To znamená, že platí pro libovolné deformačně napjatostní chování materiálu. Zavedením konstitutivních vztahů ve tvaru Hookeova zákona předpokládáme lineárně elastické chování materiálu:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} . \quad (28)$$

Matice elastických koeficientů  $\mathbf{D}$  má obecně rozměr 6x6, ale pouze 21 členů je nezávislých v důsledku symetrie matice vzhledem ke hlavní diagonále.

Jelikož virtuální posuv  $\delta \mathbf{u}$  je velmi malý, lze veličiny  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\mathbf{o}$ ,  $\mathbf{p}$  považovat za konstantní a tedy PVP upravit následovně:

$$\delta \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV - \delta \int_{\Omega} \mathbf{o}^T \mathbf{u} dV - \delta \int_{\Gamma} \mathbf{p}^T \mathbf{u} dS = \mathbf{0} . \quad (29)$$

Variace energie napjatosti:

$$\delta W = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \delta (\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}) dV = \delta \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV. \quad (30)$$

Variace potenciálu vnějšího objemového a silového zatížení:

$$\delta P = \delta \int_{\Omega} \mathbf{o}^T \mathbf{u} dV + \delta \int_{\Gamma} \mathbf{p}^T \mathbf{u} dS. \quad (31)$$

Energie napjatosti tělesa:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV. \quad (32)$$

Potenciál vnějšího zatížení:

$$P = \int_{\Omega} \mathbf{o}^T \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^T \mathbf{u} dS. \quad (33)$$

Zavedeme celkovou potenciální energii tělesa, pro niž platí:

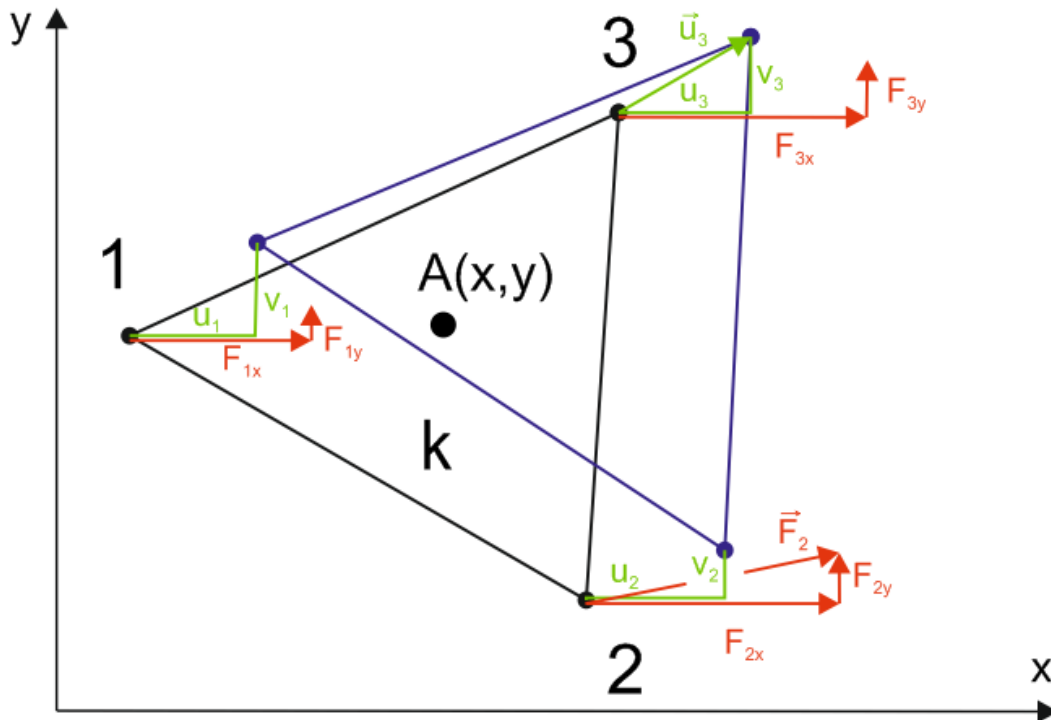
$$\Pi = W - P. \quad (34)$$

Lagrangeův variační princip pak má tvar:

$$\delta \Pi = \delta W - \delta P = \delta (W - P) = 0. \quad (35)$$

## Odvození základní rovnice MKP

Na začátek odvození je nutno zdůraznit, že se jedná o odvození základní rovnice MKP pro deformační variantu MKP. Aby odvození nebylo až příliš složité, zaměříme se na trojúhelníkový 2D prvek (označený  $k$ ) analyzovaného objektu a bázové funkce zavedeme jako lineární.



Obr. P1 Označení použitých veličin na trojúhelníkovitém prvku

Pro každý prvek je nutno nalézt vztah mezi posuvy v uzlu  $\mathbf{U}_k$  a posuvy v libovolném místě  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}\mathbf{U}_k, \quad (36)$$

kde  $\mathbf{M}$  je pro tuto chvíli neznámá transformační matice.

Obecně lze posuvy bodů zapsat následovně:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= a_1 + a_2 x + a_3 y \\ v(x, y) &= a_4 + a_5 x + a_6 y \end{aligned} \quad (37)$$

Tyto vztahy můžeme zapsat také maticově:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{N}(x, y)\mathbf{a} \\ \mathbf{u} &= [u, v]^T \end{aligned} \quad (38)$$

kde matice bázových funkcí má podle vztahu (37) tvar:

$$\mathbf{N}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \quad (39)$$

a matice neznámých koeficientů polynomů:

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6]^T. \quad (40)$$

Ve složkovém tvaru lze pro posuvy v uzlových bodech psát:

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 + a_2 x_1 + a_3 y_1 & v_1 &= a_4 + a_5 x_1 + a_6 y_1 \\ u_2 &= a_1 + a_2 x_2 + a_3 y_2 & v_2 &= a_4 + a_5 x_2 + a_6 y_2 \\ u_3 &= a_1 + a_2 x_3 + a_3 y_3 & v_3 &= a_4 + a_5 x_3 + a_6 y_3 \end{aligned} \quad (41)$$

Matice posuvů v jednotlivých uzlech:

$$\mathbf{U}_k = [u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3]^T. \quad (42)$$

Pro posuvy v uzlech musí v maticovém tvaru platit:

$$\mathbf{U}_k = \mathbf{S}_k \mathbf{a}, \quad (43)$$

kde matice  $\mathbf{S}_k$  obsahuje hodnoty souřadnic uzlů prvku, odtud:

$$\mathbf{a} = \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{U}_k, \quad (44)$$

kde  $\mathbf{S}_k^{-1}$  je inverzní matice k matici  $\mathbf{S}_k$ .

Dosazením rovnice (44) do (38) získáme žádaný vztah:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}(x, y) \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{U}_k, \quad (45)$$

z něhož a z rovnice (36) vyplývá, že dříve neznámá matice  $\mathbf{M}$ , nyní nazvaná matice tvarových funkcí, má tvar:

$$\mathbf{M} = \mathbf{N}(x, y) \mathbf{S}_k^{-1}. \quad (46)$$

Podobné požadavky jako pro posuvy platí i pro přetvoření. Tedy přetvoření v libovolných bodech prvku musí být vyjádřeno pomocí posuvů v uzlových bodech.

Zavedeme sloupcovou matici přetvoření:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y) = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]^T. \quad (47)$$

S využitím geometrických rovnic lze psát:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(x, y) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{U}_k = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{U}_k. \end{aligned}$$

Nyní můžeme vyjádřit matici přetvoření takto:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y) = \mathbf{B}(x, y) \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{U}_k, \quad (48)$$

kde  $\mathbf{B}(x, y)$  nese název matice tvarových funkcí pro přetvoření.

Dále pro hookeovský materiál platí Hookeův zákon:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (49)$$

kde:

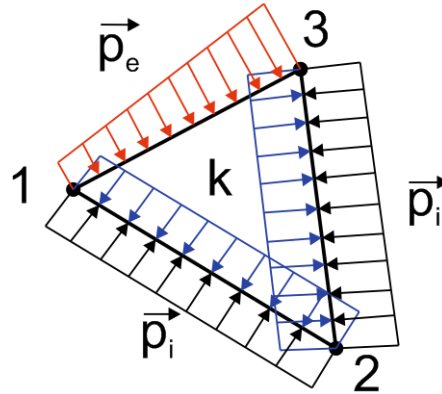
$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T, \quad (50)$$

$\mathbf{D}$  je matice elastických koeficientů ve tvaru:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\mu^2} & \frac{\mu E}{1-\mu^2} & 0 \\ \frac{\mu E}{1-\mu^2} & \frac{E}{1-\mu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\mu)} \end{bmatrix}. \quad (51)$$

Povšimněme si zajímavé skutečnosti, že v tomto případě, kdy jsou aproximační funkce lineární, ze vztahů (48) a (49) vyplývá, že jsou  $\boldsymbol{\varepsilon}$  a  $\boldsymbol{\sigma}$  v rámci jednoho prvku konstantní. Protože ve skutečnosti tomu tak samozřejmě není, výpočetní systémy jsou vybaveny algoritmem, který konstantní hodnoty převede na jiné, aby se přiblížil realitě.

Předchozí vztahy vyjadřují jakousi přípravu pro aplikaci Lagrangeova variačního principu na zmiňovaný trojúhelníkový prvek na okraji tělesa zatížený plošným zatížením. Jedna strana je tedy zatížena vnějším silovým působením, zbylé dvě vnitřním.



Obr. P2 Zatížení trojúhelníkovitého prvku na povrchu tělesa

Z potenciální energie pro prvek  $k$  vyplývá:

$$\Pi_k = W_k - P_k, \quad (52)$$

$$\Pi_k = \frac{1}{2} \int_{\Omega_k} (\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}) dV - \int_{\Omega_k} \mathbf{o}^T \mathbf{u} dV - \int_{\Gamma_{k,e}} \mathbf{p}_e^T \mathbf{u} dS - \int_{\Gamma_{k,i}} \mathbf{p}_i^T \mathbf{u} dS. \quad (53)$$

Jelikož obecně platí pravidlo:

$$(\mathbf{B} \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{U}_k)^T = \mathbf{U}_k^T (\mathbf{S}_k^{-1})^T \mathbf{B}^T, \quad (54)$$

Označíme-li:

$$p_k^i = \int_{\Gamma_{k,i}} \mathbf{p}_i^T \mathbf{u} dS, \quad (55)$$

potom:

$$\begin{aligned} \Pi_k &= \frac{1}{2} \mathbf{U}_k^T (\mathbf{S}_k^{-1})^T \left[ \int_{\Omega_k} (\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}) dV \right] \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{U}_k - \\ &\quad - \mathbf{U}_k^T (\mathbf{S}_k^{-1})^T \int_{\Omega_k} \mathbf{o}^T \mathbf{N} dV - \\ &\quad - \mathbf{U}_k^T (\mathbf{S}_k^{-1})^T \int_{\Gamma_{k,e}} \mathbf{p}_e^T \mathbf{N} dS - p_k^i = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \mathbf{U}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{U}_k - \mathbf{U}_k^T \mathbf{F}_k^o - \mathbf{U}_k^T \mathbf{F}_k^{pe} - p_k^i = \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{U}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{U}_k - \mathbf{U}_k^T \mathbf{F}_k^e - p_k^i .
\end{aligned}$$

$\mathbf{K}_k$  značí matici tuhosti prvku  $k$  a  $\mathbf{F}_k^e$  sloupcovou matici zobecněných vnějších sil:

$$\mathbf{K}_k = (\mathbf{S}_k^{-1})^T \left[ \int_{\Omega_k} (\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}) dV \right] \mathbf{S}_k^{-1}, \quad (56)$$

$$\mathbf{F}_k^e = (\mathbf{S}_k^{-1})^T \int_{\Omega_k} \mathbf{o}^T \mathbf{N} dV + (\mathbf{S}_k^{-1})^T \int_{\Gamma_{k,e}} \mathbf{p}_e^T \mathbf{N} dS. \quad (57)$$

Celkový potenciál vyšetřovaného tělesa:

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \Pi_i. \quad (58)$$

Platnost principu akce a reakce znamená, že se jednotlivé potenciální energie  $p_k^i$  vyruší, tedy po zjednodušení:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \mathbf{F}. \quad (59)$$

Minimalizace funkcionálu  $\Pi$  znamená:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{0}. \quad (60)$$

Tedy základní rovnice MKP má tvar:

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (61)$$

kde  $\mathbf{K}$  je globální matice tuhosti,  $\mathbf{U}$  globální matice posuvů pro všechny uzly a  $\mathbf{F}$  globální matice zatížení.

Bliže se o tomto vztahu píše v kapitole 2.3.

Po zavedení okrajových podmínek a vyřešení rovnice (61) se posuvy, přetvoření a napětí vyjádří ze vztahů (45), (48) a (49).

Zdroje: [5], [6], [7], [8], [10], [13], [14], [21]