

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
Fakulta strojního inženýrství  
Energetický ústav

**Ing. Pavel Dokoupil**

**NEJISTOTA MĚŘENÍ PŘETVOŘENÍ A MECHANICKÉHO  
NAPĚTÍ POMOCÍ ODPOROVÝCH TENZOMETRŮ**

**THE UNCERTAINTIES DEFORMATION AND STRESS USING  
THE STRAIN GAUGES**

**Zkrácená verze Ph.D. Thesis**

**Obor:** Konstrukční a procesní inženýrství  
**Školitel:** doc. Ing. Vladimír Habán, Ph.D.  
**Oponenti:**

**Datum obhajoby:**

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

měření, tenzometr, přetvoření, mechanické napětí, nejistota měření, GUF, MMC

## **KEY WORDS**

measurements, strain gauges measurements, strain, stress, uncertainty of measurements, GUF, MMC

## **MÍSTO ULOŽENÍ PRÁCE**

Vysoké učení technické v Brně

Fakulta strojního inženýrství

Technická 2896/2

616 69 Brno

© Pavel Dokoupil 2017

ISBN 80-214-

ISSN 1213-4198

# OBSAH

1 ÚVOD.....	5
1.1 Význam dizertační práce.....	5
1.2 Cíle dizertační práce.....	6
2 NEJISTOTA MĚŘENÍ.....	7
2.1 Nejistota stanovená dle metody GUF .....	8
2.2 Nejistota stanovení dle metody MMC .....	8
3 STANOVENÍ NEJISTOTY MĚŘENÍ PŘETVOŘENÍ.....	9
3.1 Přesnost měření přetvoření.....	9
3.2 Nejistota přetvoření.....	10
4 STANOVENÍ NEJISTOTY MĚŘENÍ MECHANICKÉHO NAPĚTÍ.....	12
4.1 Přesnost měření mechanického napětí .....	13
4.2 Chyba modulu pružnosti a Poissonova čísla.....	13
4.3 Nejistota mechanického napětí .....	14
5 STANOVENÍ NEJISTOTY MĚŘENÍ PRO ODPOROVÉ TENZOMETRY .....	16
5.1 Jednoosé tenzometry .....	16
5.2 Tenzometrické kříže a pravoúhlé růžice .....	18
6 EXPERIMENT .....	22
6.1 Experimentální vzorky.....	22
6.2 Analytický výpočet deformace extenzometru.....	23
6.3 Popis extenzometru (nosníku) a experimentálního zařízení .....	24
6.4 Korekce naměřených hodnot .....	26
6.5 MKP výpočet .....	27
6.6 Výsledky experimentu a stanovení nejistoty.....	28
7 ZHODNOCENÍ, POROVNÁNÍ EXPERIMENTU A VÝPOČTU .....	30
8 ZÁVĚR.....	33
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY .....	34
SEZNAM NEJDŮLEŽITĚJŠÍCH SYMBOLŮ A ZKRATEK .....	35
AUTOROVO CURRICULUM VITAE.....	36
ABSTRACT .....	38



# 1 ÚVOD

Odporová tenzometrie patří ke stěžejní měřicí metodě v experimentální mechanice, která patří do vědecko-aplikačního oboru mechanika těles. Odporové tenzometry jsou nejpoužívanějším snímačem pro měření přetvoření (mechanického napětí), a to zejména kvůli své jednoduché dostupnosti, přesnosti, nízké ceně a použitelnosti. V současné době se tenzometrické měření používá prakticky ve všech odvětvích průmyslu a technických věd. Zejména pak ve strojírenství a stavebnictví je role tenzometrie nenahraditelná.

Každé provedené měření je zatíženou chybou a nejistotou měření. Chyby v měření není možné zcela vyloučit, ale je žádoucí je eliminovat na přípustnou hodnotu. Při stanovení nejistoty měření je nutné stanovit hlavní zdroje chyb, které se následně kvantifikují. Z praktického hlediska je nutné k chybě a následně nejistotě měření přistupovat tak, že je součástí měření a v mnoha případech je znalost chyby naměřených hodnot důležitější než výsledek samotný.

V současné době je analýza deformace a mechanického napětí realizována převážně výpočtovým modelováním. Úroveň výpočtového modelování je na velmi vysoké úrovni poznání a s rozvojem výpočetní techniky a s ním souvisejícím výskytem programového vybavení se stalo výpočtové modelování téměř rutinní záležitostí. Tento technický postoj k řešení problému má nesporně řadu výhod. K nejvýznamnější patří zvýšení technické úrovně a efektivity prováděných činností se sníženými náklady na vývojové, konstrukční, výrobní a kontrolní činnosti. Je však nutné mít na paměti, že i sebelepší výpočet (numerické modelování) je zatížen určitou mírou nepřesností a tudíž nedokáže plně nahradit experiment. Pokud neověříme výpočty získané numerickým modelováním experimentem, nelze prohlásit, že takto získané výsledky jsou věrohodné.

Aktuální stav poznání v oblasti odporové tenzometrie je na velmi vysoké úrovni, a to včetně chyb tenzometrů (např. článek [12] a [13]) a měření s nimi prováděnými [1], [2], [3]. Totéž se dá konstatovat i o aktuálním stavu poznání v oblasti nejistot měření [4], [5], [6], [8]. Je však nutné podotknout, že odporová tenzometrie je poměrně stará technická disciplína, kde její základy sahají do začátků 20. století a postupně se vyvíjela celé 20. století a svým způsobem se vyvíjí stále. Kdežto teorie nejistot měření je poměrně mladá technická disciplína, která se stále vyvíjí. Problematika nejistoty měření přetvoření je z části rozebrána a uvedena v člancích [10] a [11].

## 1.1 VÝZNAM DIZERTAČNÍ PRÁCE

V současné době má experimentální analýza deformací a mechanického napětí (strojních, stavebních a dalších konstrukcí) v technické praxi stále nezastupitelnou roli. Ačkoliv je v současné době stále více využíváno výpočtového modelování deformací a mechanického napětí, tak experimentálně získaná data mají i v této oblasti svůj význam, a to při verifikaci zejména složitých výpočtů. V některých určitých technických oblastech je pak výhodnější provést experiment, nežli provádět

výpočty. Mezi takovéto činnosti patří zejména predikce pevnosti, životnosti, provozní spolehlivosti konstrukcí a zařízení, dále pak sledování a monitoring provozních zatížení a provozních stavů konstrukcí a zařízení.

Je nutné si však uvědomit, že každý experiment je zatížen určitou mírou nepřesnosti. Míra (ne)přesnosti měření se dá matematicky vyjádřit jako nejistota měření, která prakticky udává interval výskytu skutečné hodnoty s určitou pravděpodobností. Pokud chceme využívat experimentálně získaná data pro verifikaci numerických výpočetních metod, je nejprve nutné stanovit nejistotu měřené veličiny (v našem případě přetvoření a mechanického napětí). Teprve potom bude možné prakticky provádět jistou interakci výpočtového modelování s experimentem. Potřebnost znalosti nejistoty měření přetvoření a mechanického napětí je zcela patrná i u dalších zmíněných činností. Pokud neznáme nejistotu měření přetvoření, jen těžko můžeme prohlásit, že například stanovená predikce nebo životnost je věrohodná.

Význam dizertační práce spočívá ve vytvoření technicky spolehlivé a věrohodné metodiky, algoritmů a návodů pro stanovení nejistoty měření přetvoření a mechanického napětí získané z odporových tenzometrů. Informace uvedené v této dizertaci budou sloužit v inženýrské praxi pro praktické a efektivní stanovení nejistoty (míry nepřesnosti) měření přetvoření a mechanického napětí.

## 1.2 CÍLE DIZERTAČNÍ PRÁCE

Cílem dizertační práce je vytvoření matematicko-technického modelu stanovení nejistoty měření přetvoření a mechanického napětí. Stanovení nejistoty bude provedeno pouze po měření přetvoření odporovými tenzometry. Vzhledem k podstatě tenzometrického měření, kde převážná část zkoušek je neopakovatelná a prakticky je známá pouze jedna hodnota, bude výpočet zaměřen pouze na nejistotu stanovenou analytickou metodou Gum Uncertainty Framework (GUF) a metodou Monte Carlo (MMC) založené na numerické simulaci.

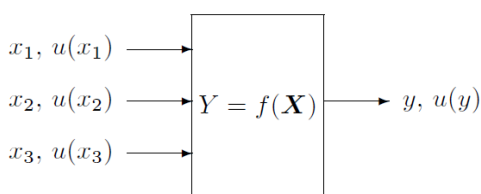
V této práci je kladen důraz zejména na následující dílčí cíle:

- 1) Vytvoření matematicko-technického modelu pro přetvoření měřeného jednoosými a dvojosými tenzometry.
- 2) Analýza chyb a dílčích nejistot ovlivňující měřené přetvoření a mechanické napětí (napjatost).
- 3) Stanovení nejistoty měření přetvoření.
- 4) Stanovení nejistoty měření napjatosti pro jednoosé tenzometry, tenzometrické kříže a růžice.
- 5) Vytvoření universálních výpočetních modelů (algoritmů) pro stanovení nejistoty přetvoření a napjatosti metodou GUF, které bude možno aplikovat na příslušné prováděné měření.
- 6) Vytvoření universálních algoritmů pro výpočet napjatosti, stanovení příslušné nejistoty měření a vykreslení průběhů pravděpodobnostních funkcí (PDF a CDF) dle metody MMC.

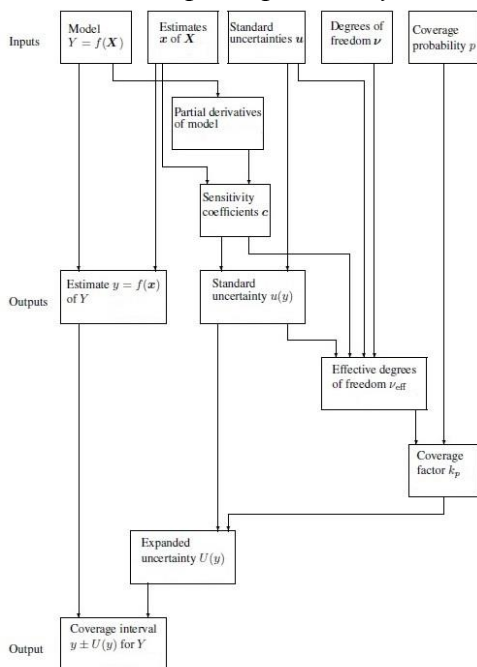
Pro ověření vytvořených modelů a algoritmů byl navrhnout experiment, který bude mít za cíl porovnat měření a stanovenou nejistotu měření na několika tenzometrech. Experimenty budou prováděny na snímači posuvu, který pracuje na elementárním principu zatížení ohybem. Teoretické ohybové přetvoření, které se vyskytuje na snímači, bude stanoveno i na základě analytického a MKP výpočtu. Experimenty a MKP výpočet bude proveden pro tři teploty 20°C, 90°C a 290°C. Na závěr budou relevantní naměřená data včetně stanovených nejistot měření (intervalů výskytu skutečné hodnoty) a teoretické hodnoty navzájem porovnány.

## 2 NEJISTOTA MĚŘENÍ

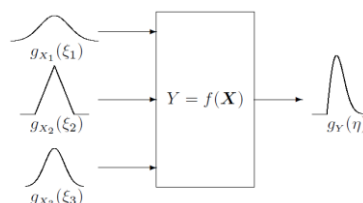
„Nejistota měření je parametr související s výsledkem zkoušky (měření), který charakterizuje rozptyl hodnot, ve kterém se s určitou pravděpodobností vyskytuje skutečná hodnota“ [8]. Nejistota měření je nedílnou součástí vyjádření výsledků měření. Technický termín „nejistota měření“ je celosvětově uznávaný pojem pro vyjádření míry kvality výsledku měření či kalibrací ve všech oborech lidské činnosti (např. strojírenství, medicína, chemie apod.). V současně době se dají nejistoty měření stanovit analyticky dle metody GUF (viz Obr. 2.1) nebo numericky dle MMC (viz Obr. 2.2). Z praktického hlediska jsou obě metody totožné.



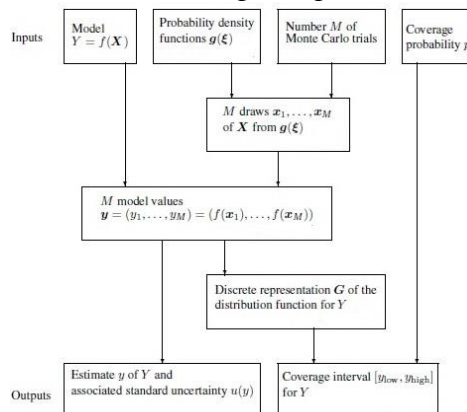
Obr. 2.1 Schéma principu metody GUF [4]



Obr. 2.3 Algoritmus metody GUF [7]



Obr. 2.2 Schéma principu MMC[5]



Obr. 2.4 Algoritmus MMC [7]

## 2.1 NEJISTOTA STANOVENÁ DLE METODY GUF

Standardní nejistoty stanovené dle metody GUF se dělí podle způsobu získání na nejistoty stanovené metodou A ( $u_A$ ) a nejistoty stanovené metodou B ( $u_B$ ). Nejistoty stanovené oběma metodami jsou rovnocenné. Vyhodnocení nejistoty stanovené metodou A se provádí statistickým zpracováním výsledků opakovaných přímých měření. Vyhodnocení nejistoty stanovené metodou B vychází z kvalifikovaného úsudku, založeném na všech dostupných informacích o měřené veličině. Sloučením standardní nejistoty vyhodnocenou metodou A a metodou B získáme kombinovanou standardní nejistotu ( $u_c$ ). Z důvodu rozšíření intervalu pokrývajícího skutečnou hodnotu měřené veličiny vytváříme rozšířenou nejistotu měření U, která udává interval s větší pravděpodobností pokrytí skutečné hodnoty. Postup určení nejistoty měření se dělí pro přímo a nepřímo měřené veličiny [8].

Kombinovaná nejistota  $u_c$  stanovená dle metody GUF se určí dle zákona šíření nejistot pro nekorelované veličiny dle vztahu 2.1 a pro korelované veličiny dle vztahu 2.2. Stanovení kombinované nejistoty  $u_c$  je pro přímé a nepřímé měření odlišné. Algoritmus metody GUF je uveden na *Obr. 2.3*.

$$u_c^2(y) = \sum_{j=1}^N \left[ \frac{\partial f}{\partial x_j} \right]^2 \cdot u^2(x_j) = \sum_{i=1}^N [c_i \cdot u(x_i)]^2 \equiv \sum_{i=1}^N u_i^2(y) \quad 2.1$$

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N c_i^2 \cdot u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i c_j u(x_i) \cdot u(x_j) \cdot r(x_i, x_j) \quad 2.2$$

## 2.2 NEJISTOTA STANOVENÍ DLE METODY MMC

Stanovení nejistoty měření dle MMC vychází z obecného postupu numerického řešení fyzikálních a jiných modelů, které jsou realizovány pomocí opakovaných náhodných pokusů. Jedná se o stochastickou simulační metodu, jejíž výsledek je zpracováván statisticky. Princip metody MMC spočívá v generování náhodných nebo pseudonáhodných čísel podle hustoty pravděpodobnosti vstupních veličin, kde výstupem je diskrétní podoba pravděpodobnostní funkce výstupní veličiny. Etapy stanovení nejistoty dle MMC jsou formulace matematického modelu, provedení simulací, zpracování vyhodnocení a shrnutí získaných hodnot. Algoritmus (viz *Obr. 2.4*) stanovení kombinované nejistoty  $u_c$  dle MMC je následující [5]:

- 1) vytvoření matematického modelu  $Y = f(X)$ , kde Y reprezentuje skalární výstupní veličinu a X reprezentuje n vstupních veličin. Každá veličina  $X_i$  je náhodná veličina s hustotou pravděpodobnosti  $g(\xi_i)$ , kde  $\xi_i$  reprezentuje hodnotu dané veličiny. Y je náhodná veličina s možnou hodnotou  $\eta$  a hustotou pravděpodobnosti  $g(\eta)$ ,
- 2) stanovení počtu opakování M a pravděpodobnost pokrytí p pro MMC,
- 3) vygenerování M náhodných vektorů  $x_r$ ,  $r = 1, \dots, M$  dle hustoty pravděpodobnosti,
- 4) dosazení vygenerovaných hodnot do modelu  $y_r = f(x_r)$ ,

- 5) seřazení hodnoty  $y_r$  do neklesajícího pořadí. Z řady těchto hodnot se poté určí diskretní distribuční funkce  $G$ ,
- 6) výpočet aritmetického průměru (průměrné hodnoty)  $\bar{y}$  a výběrové směrodatné odchylky dle vztahů 2.3 a 2.4,

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \sum_{r=1}^M y_r \quad 2.3$$

$$u(\bar{y}) = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{r=1}^M (y_r - \bar{y})^2} \quad 2.4$$

- 7) určení intervalu pokrytí pro  $Y$  stanoveného z diskretní podoby  $G$ . Interval stanovíme tak, že nejprve vypočteme  $q = pM$ , poté  $[y_{\text{low}}, y_{\text{high}}]$  je 100p% intervalu pokrytí pro  $Y$ , kde  $y_{\text{low}} = y_{(r)}$  a  $y_{\text{high}} = y_{(r+q)}$ . Pravděpodobnostně symetrický interval vypočteme jako  $r = (M-q)/2$ .

Nejistota  $u(y)$  z pravděpodobnostní funkce výstupní veličiny  $Y$ , která má normální rozdělení, se pro pravděpodobnost pokrytí 68,27 stanoví jako výběrová směrodatná odchylka dle vztahu 2.2. V ostatních případech, kdy je rozdělení pravděpodobnosti výstupní veličiny jiné než normální, se musí vypočítat nejkratší interval pokrytí s požadovanou pravděpodobností pokrytí (např.  $p = 68,27\%$ ,  $p = 95,45\%$  atd.) [5], [9].

### 3 STANOVENÍ NEJISTOTY MĚŘENÍ PŘETVOŘENÍ

Přetvořením  $\varepsilon$  se označuje velmi malá deformace, která vzniká na povrchu materiálu tělesa při jeho zatížení. K měření deformace v bodě, nebo jeho okolí se používají tenzometry. Měření deformací pomocí tenzometrů vychází z předpokladu, že deformace zkoumaného objektu se bez ztrát přenesou na tenzometr. Takto přenesená deformace způsobí při odporové tenzometrii měřitelnou změnu elektrického odporu. Princip odporových tenzometrů se pak dá dle [2] shrnout následovně: „Jestliže se vlivem zatížení materiál deformuje, tak se deformace projeví i na povrchu materiálu. Tato změna se dále přenesou na umístěný tenzometr, který mění svůj odpor, jenž je lineárně úměrný k poměrnému prodloužení (přetvoření) na povrchu materiálu.“

#### 3.1 PŘESNOST MĚŘENÍ PŘETVOŘENÍ

Přesnost měření přetvoření pomocí odporových tenzometrů je dána faktem, že tenzometr se stává snímačem (hotovým produktem) v pravém slova smyslu, až po jeho aplikaci na měřený objekt. Tento fakt je dále rozšířen o skutečnosti, že vlastnosti takto „vyrobeného snímače“ (tenzometru) jsou dále ovlivněny měřeným objektem, prostředím, ve kterém je měřený objekt umístěn, vedením a zpracováním signálu snímače a vlivy způsobené časem při působení vnější vlivů na měřený objekt. Aby bylo možné úspěšně provést měření s požadovanou přesností, je nutné,

aby uživatel dobře pochopil funkci měřeného objektu a znal jeho vlastnosti, vybral vhodný tenzometr, navrhl dobře měřicí řetězec a zmapoval všechny vlivy působící během měření. Před každým měřením je zapotřebí provést analýzu požadované přesnosti měření, na jejím základě provést starostlivé zkoumání možných chyb (rušivých vlivů) a následně chyby odstranit nebo kompenzovat. V případě, že nejde chyby odstranit nebo kompenzovat, je nutné je zařadit do nejistoty měření. V oblasti měření přetvoření je dosti často vyskytovaným jevem, že prováděné měření má poměrně malou požadovanou přesnost měření. Nicméně, ať je měření provedeno s malou nebo velkou přesností měření, je vždy nutné do výsledného stanovení nejistoty měření zahrnout všechny možné chyby, a to v kompenzované i nekompenzované (cíleně zanedbané vlivy) formě.

### 3.2 NEJISTOTA PŘETVOŘENÍ

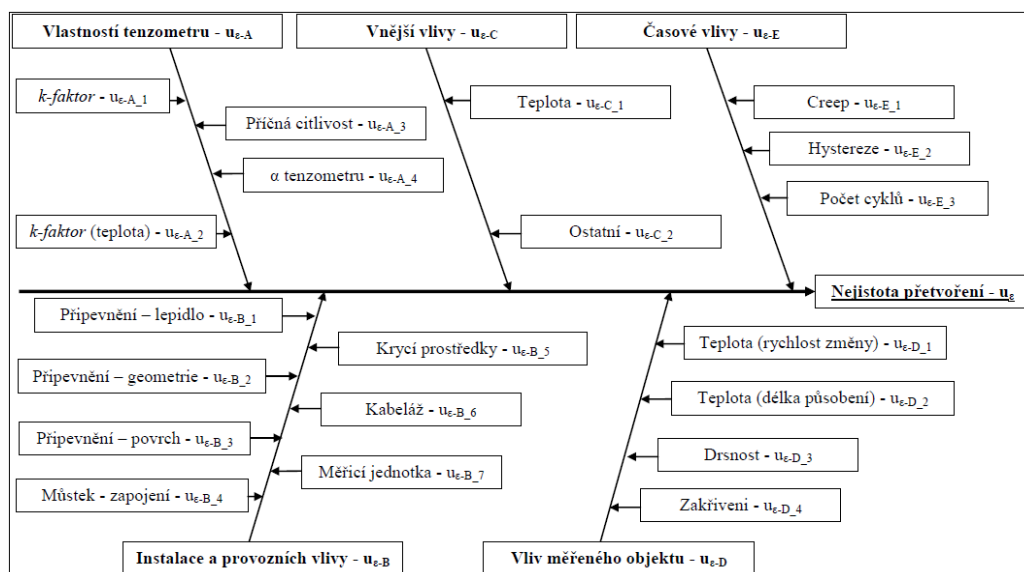
Nejistotu přetvoření  $u_{\varepsilon}$  lze rozdělit na pět dílčích zdrojů nejistot ( $u_{\varepsilon-A}$  až  $u_{\varepsilon-E}$ ), které vycházejí ze vzniku signálu. Hlavní zdroje nejistot se dále dělí na další jednotlivé dílčí zdroje, které vycházejí z chyb a mají základní rozdělení pravděpodobnosti. Schématické zobrazení je uvedeno na *Obr. 3.1*. Velikost chyby a rozdělení pravděpodobnosti, které mohou chyby nabývat je uvedeno v *Tab. 3.1*.

V článcích [10], [11] a [12] se setkáváme se splynutím pojmu nejistota a chyba. Další specifický faktor týkající se nejistoty tenzometrie (měření přetvoření a mechanické napětí) je filozoficko – technický přístup, který je výrazně odlišný u různých autorů. Někteří autoři zahrnují do nejistot tenzometrických měření i chyby experimentátora (viz [12] a [13]), což dle mého názoru spadá do kategorie hrubých chyb. Další chyby zahrnuté do nejistoty měření jsou chyby týkající se skutečného výskytu a tvaru deformace (napjatosti) na měřeném objektu (viz [10]). Chyba v důsledku experimentátora a skutečného stavu deformace se jen těžko kvantifikuje. Ačkoliv lze provést v určitých případech validační experimenty, případně porovnání s MKP výpočtem, tak během reálných měření na složitých součástech lze jen těžko korigovat zmíněné chyby.

V článku [12] autor uvádí, že bylo zjištěno více než 70 zdrojů nejistot pro měření tenzometry. Nejistoty jsou zde rozděleny do čtyř hlavních skupin: přístroj, metoda, prostředí a operátor. Autor spojuje většinu nejistot s experimentátorem. Chyby způsobené lidským faktorem jsou uvedeny v článku [13]. V článku [10] autoři uvádí nejistoty (chyby) pouze z pěti zdrojů, a to: záznamové zařízení, příčná citlivost, teplotní efekt, vychýlení tenzometru (nesouosost) a nelinearitu Wheatstoneova mostu. Stanovení nejistoty přetvoření je provedeno dle metody GUF. V článku [11] je uvedena metodika pomocí metody Monte Carlo pro odhad nejistoty měření. V matematickém modelu jsou uvažovány následující dílčí nejistoty: nejistoty umístění (odklon od hlavní osy), integrační efekt a příčná citlivost. Dále jsou v článku uvedeny chyby a vlastnosti přivařovacích tenzometrů. Metodika MEBU (numerical Method for the Estimation of Biases and Uncertainties), která je uvedena v článku, umožňuje stanovit chybu (nejistotu) v důsledku integračního efektu, příčné citlivosti a chybu v důsledku metody přivaření tenzometru.

Tab. 3.1 Vlastnosti zdrojů nejistot měřeného přetvoření -  $u_e$

Zdroj nejistoty		Chyba		Rozdělení - $\gamma$
<b>A</b>				
<b>Vlastnosti tenzometru</b>				
1	$k$ -faktor	$\delta_K$	Dle použitého tenzometru (viz datasheet)	Rovnoměrné
2	$k$ -faktor (teplota)	$\delta_{K100}$		Rovnoměrné
3	Příčná citlivost	$\delta_Q$		Normální
4	$\alpha$ tenzometru	$\delta_a$		Trojúhelníkové
<b>B</b>				
<b>Instalace a provozní vlivy</b>				
1	Přípevnění - lepidlo	$\delta_L$	0,5 až 2,5 $\mu\text{m/m}$	Rovnoměrné
	Přípevnění - přivaření		10 až 100 $\mu\text{m/m}$	
2	Přípevnění - geometrie	$\delta_G$	1 až 5 $\mu\text{m/m}$ pro odklon 5° je rovna 1,5 % z měřené hodnoty	Normální
3	Přípevnění - povrch	$\delta_D$	1 až 4 $\mu\text{m/m}$	Rovnoměrné
4	Mústek - zapojení	$\delta_B$		
5	Krycí - prostředky	$\delta_O$	0 až 3 $\mu\text{m/m}$	Rovnoměrné
6	Kabeláž	$\delta_C$	0 až 10 $\mu\text{m/m}$ (0 až 5 $\mu\text{V/V}$ )	Normální
7	Měřicí jednotka	$\delta_{MJ}$ ( $\delta_{MJ-1}$ až 4)	1 až 2 $\mu\text{V/V}$ , 1 až 6 $\mu\text{V/V}$ 4 až 10 $\mu\text{V/V}$ , 10 až 20 $\mu\text{V/V}$	Normální Rovnoměrné
<b>C</b>				
<b>Vnějších vlivů</b>				
1	Teplota	$\delta_T$ ( $\delta_{\text{app}}$ )	5 až 20 $\mu\text{m/m}$ (20 až 100 $\mu\text{m/m}$ )	Trojúhelníkové
2	Ostatní	$\delta_P$	Dle vnějšího prostředí, ve kterém je umístěn tenzometr. 1 až 20 $\mu\text{m/m}$	Rovnoměrné
<b>D</b>				
<b>Vliv měřeného objektu</b>				
1	Teplota - rychlost změny	$\delta_M$	Odhadem 0 až 100 $\mu\text{m/m}$	Trojúhelníkové
2	Teplota - délka působení	$\delta_N$		Rovnoměrné
3	Drsnost	$\delta_R$		Normální
4	Zakřivení	$\delta_Z$		Normální
<b>E</b>				
<b>Časové vlivy</b>				
1	Creep	$\delta_V$	5 až 20 $\mu\text{m/m}$ 0,5 až 2% z měřeného přetvoření	Rovnoměrné
2	Hystereze	$\delta_H$	0,25 až 0,5% z měřeného přetvoření	Normální
3	Počet cyklů	$\delta_U$	10 $\mu\text{m/m}$	Rovnoměrné



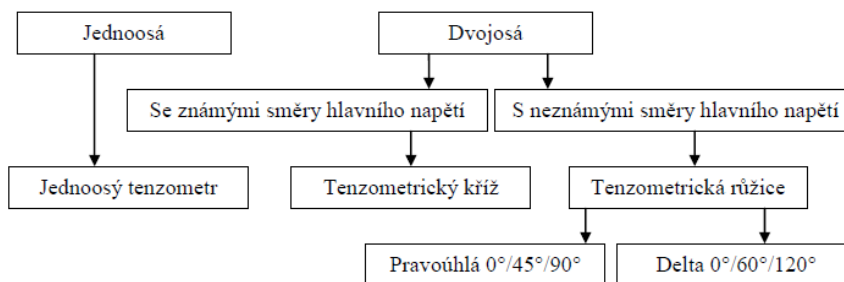
Obr. 3.1 Schéma zdrojů nejistot měřeného přetvoření

## 4 STANOVENÍ NEJISTOTY MĚŘENÍ MECHANICKÉHO NAPĚTÍ

Mechanické napětí  $\sigma$  a smykové napětí  $\tau$  ve formě tenzoru napětí  $T_\sigma$  popisují napjatost v okolí obecného bodu tělesa. Napjatost tělesa závisí na tvaru, zatížení a vlastnostech materiálu tělesa. Podle počtu nenulových napětí v tenzoru napětí rozdělujeme napjatost na jednoosou, dvojosou a tříosou. Mechanické napětí se z naměřeného přetvoření vypočte dle konstitučních rovnic (fyzikálních vztahů). Metoda výpočtu mechanického napětí využívá Hookův zákon ( $\sigma_N = \varepsilon \cdot E$  [1]). Platnost zákona je pouze v oblasti pružných deformací elastického materiálu, které jsou ohraničeny mezí kluzu konkrétního materiálu  $R_e$  ( $R_{p0,2}$ ). Zákon platí pouze pro jednoosou napjatost. Mechanické chování izotropního materiálu v oblasti pružných deformací je popsáno dvěma nezávislými konstantami, jmenovitě modulem pružnosti v tahu  $E$  (Youngův modul) a Poissonovým číslem  $\mu$  (součinitelem příčné deformace) [16], [17].

V oblasti experimentální analýzy napětí se vyskytuje zejména jednoosá a dvojosá napjatost. Jednoosá napjatost se vyskytuje pouze v omezené míře a téměř výhradně se setkáváme s dvojosou napjatostí ve dvou formách, kdy:

- 1) jsou známy hlavní směry
- 2) nejsou známy hlavní směry



Obr. 4.1 Schéma rozdělení napjatosti v oblasti experimentální analýzy napětí a tenzometrů

Hlavní normálové napětí  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$  se z měřených hlavních deformací  $\varepsilon_1$  a  $\varepsilon_2$  získaných z tenzometrických křížů stanoví dle vztahu 4.1 a 4.2. Hlavní normálové napětí  $\sigma_{I,II}$  (přetvoření  $\varepsilon_{I,II}$ ) se z naměřených deformací ve třech směrech  $\varepsilon_a$ ,  $\varepsilon_b$  a  $\varepsilon_c$  pro tenzometrické pravoúhlé růžice stanoví dle vztahu 4.3 a 4.4 [1].

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_1 + \mu \cdot \varepsilon_2) \quad 4.1$$

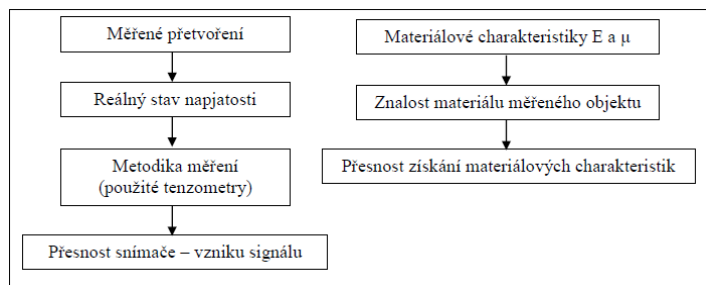
$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_2 + \mu \cdot \varepsilon_1) \quad 4.2$$

$$\varepsilon_{I,II} = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a - \varepsilon_c}{2}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot \varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{2}\right)^2} \quad 4.3$$

$$\sigma_{I,II} = \frac{E}{1-\mu} \cdot \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} \pm \frac{E}{\sqrt{2} \cdot (1+\mu)} \cdot \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2} \quad 4.4$$

## 4.1 PŘESNOST MĚŘENÍ MECHANICKÉHO NAPĚTÍ

Přesnost měření mechanického napětí  $\sigma$  je dána kombinací znalosti skutečné hodnoty měřeného přetvoření  $\varepsilon$  a nezávislými materiálovými charakteristikami ( $E$  a  $\mu$ ) měřeného objektu.



Obr. 4.2 Schéma přesnosti měření  $\sigma$

Při stanovení mechanického napětí z měřeného přetvoření často vycházíme ze stavu, že víme nebo alespoň předpokládáme stav napjatosti na měřeném objektu. Na základě zmíněného předpokladu se zvolí typ tenzometru, který je následně umístěn na měřený objekt. Dále se při stanovení mechanického napětí předpokládá znalost materiálových vlastností měřeného objektu. Modul pružnosti je výrazně ovlivněn skutečným chemickým složením materiálu nebo chemicko-tepelným zpracováním oceli. V praxi se víceméně potýkáme se stavem, že modul pružnosti je určen pro třídy oceli a standardně není dodáván k jednotlivým tavnám apod. U nižších tříd ocelí (např. 10 a 11) má pak složení materiálu poměrně široké toleranční pásmo. U chemicko-tepelného zpracování je situace také složitá. Nebývá zvykem, aby se po provedení např. kalení nebo žihání prováděly experimenty za účelem zjištění skutečných hodnot materiálových vlastností. Výše uvedené poznatky jsou všeobecně známy a při konstrukci zařízení se s nimi počítá. Ze zmíněných poznatků plyne, že téměř vždy je modul pružnosti měřeného objektu zatížen jistou mírou nepřesnosti (chybou). Přesnost stanovení modulu pružnosti je do značné míry dána chybou metody stanovení. Modul pružnosti, který je získán z tahové-tlakové zkoušky (nebo z jiné metodiky), je v oblasti pružných deformací obecně interpretován jako jedno číslo (směrnice přímky).

## 4.2 CHYBA MODULU PRUŽNOSTI A POISSONOVA ČÍSLA

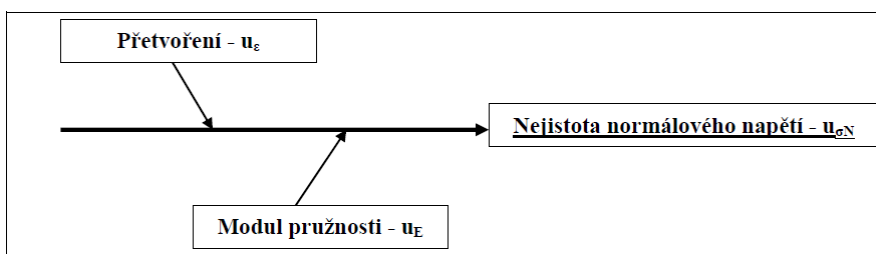
Chyba modulu pružnosti  $\delta_E$  se pohybuje v rozmezí 3 až 15%. Chyba  $\delta_E$  nemůže z podstaty stanovení modulu pružnosti klesnout pod zmíněné 3%. Vzhledem k množství informací dostupných k jednotlivým materiálům ve strojírenství, zejména k ocelím a litinám, je velice nepravděpodobné, že by znalost modulu pružnosti (a s tím související chyba) měřeného objektu přesáhla 9%. Průměrná hodnota modulu pružnosti je  $E = 205\,000$  MPa a odchylka od nízkouhlíkových až po vysokolegované oceli je stálá a dosahuje přibližné hodnoty  $\pm 15\,000$  MPa, což činí  $\pm 7,32\%$ . Pokles modulu pružnosti na  $50^\circ\text{C}$  činí 1,4 až 2,1%. Tyto hodnoty prakticky vyjadřují fakt, že pokud bychom měli jen základní znalosti o materiálu měřeného objektu, který je vyroben z oceli a jeho teplota se pohybuje v intervalu  $\pm 25^\circ\text{C}$ , potom tedy můžeme pracovat s průměrnou chybou  $\pm 8$  až  $\pm 9\%$ . Čím více informací budeme znát o modulu pružnosti měřeného objektu, tím můžeme uvažovat menší chybu než zmíněných  $\pm 8$  až  $\pm 9\%$ . Naopak pokud je materiál

měřeného objektu tepelně zpracován, tak se mění jeho modul pružnosti podstatně výrazněji než zmíněných  $\pm 8$  až  $\pm 9\%$ , potom je tedy nutné uvažovat modul pružnosti pro konkrétní tepelné zpracování materiálu a pokud není tato informace známa, rozšířit chybu modulu pružnosti na hodnotu  $\pm 13$  až  $\pm 14\%$ .

Uvažujme situaci, že je známý materiál měřeného objektu, jeho teplotné zpracování a teplota měřeného objektu. Potom tedy modul pružnosti stanovíme z příslušných tabulek nebo z certifikátu od výrobce (v případě lepších ocelí), potom tedy chyba modulu pružnosti bude záviset na jeho stanovení (pokud je provedeno) nebo na „věrohodnosti“ materiálu. Pak tedy uvažujme, že chyba modulu pružnosti je přibližně  $\pm 5$  až  $\pm 6\%$ . Průměrná hodnota Poissonova čísla pro oceli je  $\mu = 0,285$  a jeho hodnota se vyskytuje v intervalu 0,27 až 0,30. Potom tedy chyba Poissonova čísla  $\delta_\mu$  je přibližně  $\pm 5,3\%$ . Dá se předpokládat, že hodnota chyby Poissonova čísla proto bude spíše menší.

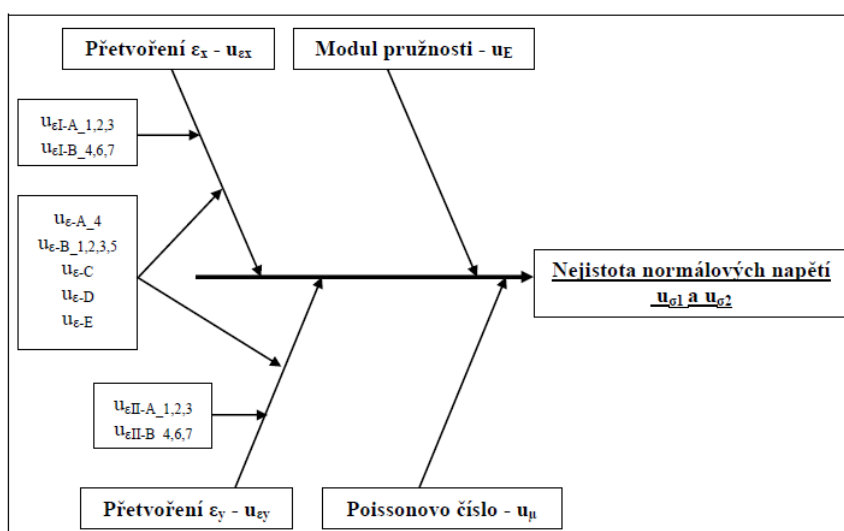
### 4.3 NEJISTOTA MECHANICKÉHO NAPĚTÍ

Nejistotu normálového napětí (jednoosý tenzometr)  $u_{\sigma N}$  tvoří dva zdroje dílčí nejistoty. Nejistota přetvoření  $u_\varepsilon$ , a nejistota modulu pružnosti  $u_E$ .



Obr. 4.3 Schéma zdrojů nejistot pro jednoosý tenzometr ( $\sigma_N$ )

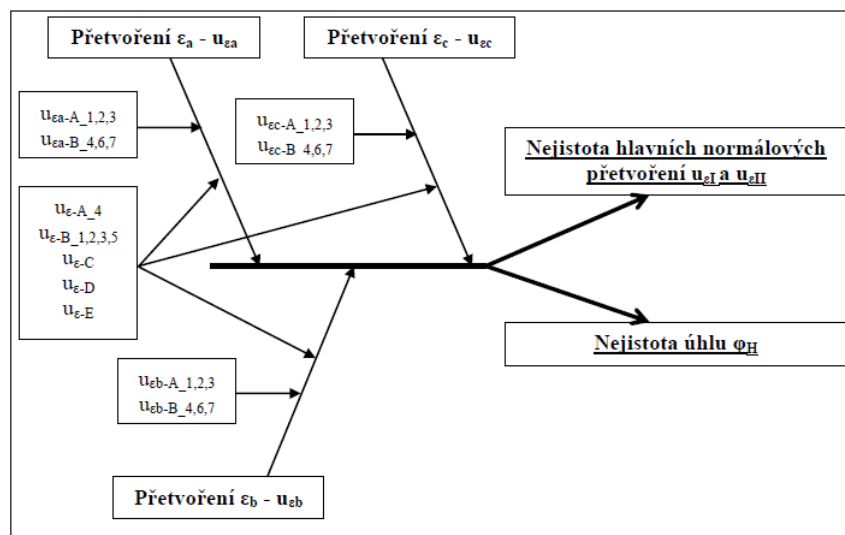
Nejistotu normálových napětí  $u_{\sigma 1}$ ,  $u_{\sigma 2}$  (tenzometrický kříž) a  $u_{\sigma I}$  a  $u_{\sigma II}$  (tenzometrická růžice) tvoří tři zdroje dílčí nejistoty. Nejistota přetvoření  $u_\varepsilon$ , nejistota modulu pružnosti  $u_E$  a nejistota Poissonova čísla  $u_\mu$ . Schématické zobrazení je uvedeno na Obr. 4.4 a Obr. 4.6. Nejistotu hlavních normálových přetvoření  $u_{\varepsilon I}$  a  $u_{\varepsilon II}$  a nejistotu úhlu  $u_{\phi H}$  (tenzometrické růžice) tvoří jeden zdroj dílčí nejistoty, a to nejistota přetvoření  $u_\varepsilon$ , viz Obr. 4.5.



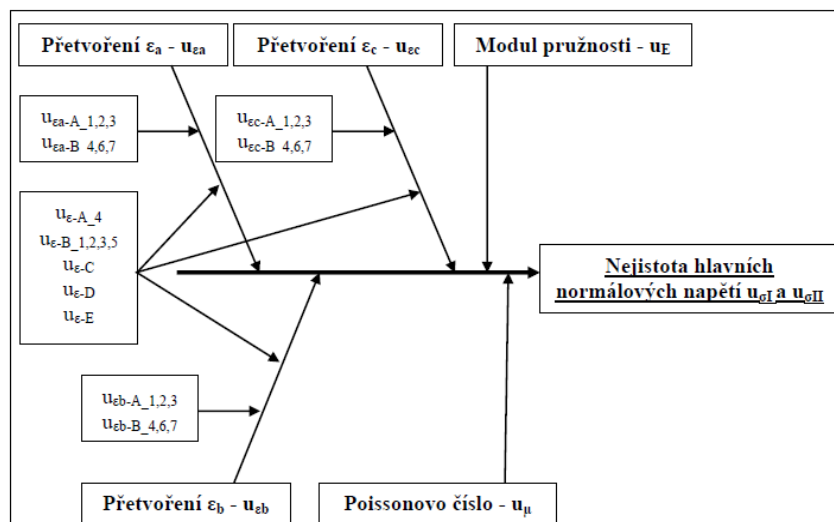
Obr. 4.4 Schéma zdrojů nejistot tenzometrických křížů ( $\sigma_1$  a  $\sigma_2$ )

Tenzometrické kříže a růžice spadají do skupiny tzv. vícenásobných tenzometrů. To znamená, že na jedné podložce jsou umístěny dvě nebo tři měřicí mřížky. Potom je nutné nejistotu přetvoření stanovit pro každý směr zvlášť. Zároveň je však nutné si uvědomit, že některé zdroje nejistot přetvoření uvedené na *Obr. 3.1* se vztahují k měřicí mřížce ( $u_{\varepsilon-A_{1,2,3}}$  a  $u_{\varepsilon-B_{4,6,7}}$ ) a část se vztahuje k tenzometru jako snímači. Potom tedy lze nejistotu přetvoření rozdělit na více nejistot přetvoření, kde každá nejistota přetvoření příslušného směru se bude skládat ze dvou částí. Z části obsahující dílčí nejistoty vztahující se pouze k měřenému směru a z části obsahující dílčí nejistoty, které budou společné pro všechny směry (pro snímač jako celek). Výsledné rozdělení pravděpodobnosti bude pro každou nejistotu přetvoření příslušného směru mírně odlišné.

Nejistota modulu pružnosti  $u_E$  je dána chybou  $\delta_E$ , pro kterou uvažujeme rovnoměrné rozdělení. Nejistota Poissonova čísla  $u_\mu$  je dána chybou  $\delta_\mu$ , pro kterou uvažujeme rovnoměrné rozdělení.



Obr. 4.5 Schéma zdrojů nejistot tenzometrických růžic ( $\varepsilon_I$ ,  $\varepsilon_{II}$  a úhlu  $\varphi_H$ )



Obr. 4.6 Schéma zdrojů nejistot tenzometrických růžic ( $\sigma_I$  a  $\sigma_{II}$ )

## 5 STANOVENÍ NEJISTOTY MĚŘENÍ PRO ODPOROVÉ TENZOMETRY

Pro jednotlivé tenzometry (jednoosé, kříže a pravoúhlé růžice) uvažujme fiktivní reálná měření. Potom tedy můžeme nejistoty přetvoření  $u_\varepsilon$  a mechanického napětí  $u_\sigma$  stanovit dle metody GUF nebo MMC. U metody GUF je nutné vždy stanovit citlivostní koeficienty, které vycházejí z Hookova zákona pro jednoosý tenzometr a z rozšířeného Hookova zákona pro tenzometrické kříže (vztah 4.1 a 4.2) a pravoúhlé růžice (vztah a 4.3 a 4.4). U metody MMC je nutné stanovit matematický model, který je pro vyšetřovanou napjatost roven Hookovu a rozšířenému Hookovu zákonu. Simulace probíhaly v programu GNU Octave a počet opakování byl vždy zvolen  $M = 10^6$ .

### 5.1 JEDNOOSÉ TENZOMETRY

$A_\varepsilon(\sigma_N) = \frac{\partial \sigma_N}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial(\varepsilon \cdot E)}{\partial \varepsilon} = E \text{ [MPa]}$	5.19
$A_E(\sigma_N) = \frac{\partial \sigma_N}{\partial E} = \frac{\partial(\varepsilon \cdot E)}{\partial E} = \varepsilon \text{ [\mu m/m]}$	5.20

Obr. 5.1 Citlivostní koeficienty pro jednoosý tenzometr ( $\sigma_N$ )

Měření, které probíhá v laboratoři (při pokojové teplotě  $T_0$ ) na hřídeli z oceli 12 040 ( $E = 210\,000$  MPa), která není tepelně zpracována. Hřídel byla zatěžována v osovém směru až do hodnoty meze kluzu ( $R_{p0,2} = 370$  MPa). Pro stanovení nejistoty uvažujme naměřenou hodnotu přetvoření  $\varepsilon = 1\,668,29$   $\mu\text{m/m}$ , což odpovídá  $\sigma_N = 350,34$  MPa a následujícím vstupním parametrům.

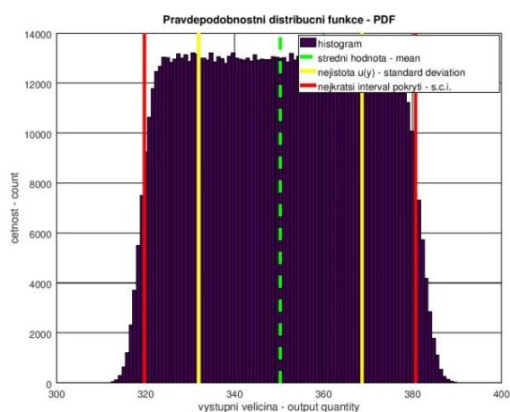
Tab. 5.1 Vstupní parametry pro stanovení nejistoty měření  $u_\sigma$

Veličina	Odhad (chyba)	Standardní nejistota	Rozdělení pravděpodobnosti
$X_i$	$x_i$ ( $\delta$ )	$u(x_i)$	$\chi$
$\varepsilon$	-	11,47	Normální
E	9%	-	Rovnoměrné

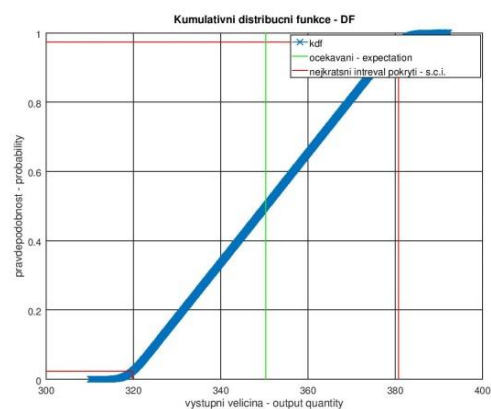
Standardní nejistota přetvoření  $u_\varepsilon$  byla stanovena přímou metodou výběrem dílčích nejistot (viz Obr. 3.1 a Tab. 3.1). Výpočet  $U_{\sigma_N}$  dle metody GUF pro nepřímé měření byl proveden podle postupu zobrazenému na Obr. 2.3 za použití vztahu 2.1. Výpočet  $U_{\sigma_N}$  (statistické parametry a průběhy PDF a CDF) dle metody MMC byly získány numerickou simulací.

Tab. 5.2 Vypočtené hodnoty (statistické parametry) získané simulací MMC

Průměrná hodnota ( $y$ ) - $\sigma_N$	$y$	350,35 MPa
Směrodatná odchylka - standardní nejistota	$u(y)$	18,36 MPa
Nejkratší interval pokrytí pro 95,45% - dolní mez	$y_{low}$	319,81 MPa
Nejkratší interval pokrytí pro 95,45% - horní mez	$y_{high}$	380,78 MPa
Nejkratší interval pokrytí pro 95,45%	s. c. i.	60,96 MPa
Nejkratší interval pokrytí pro 95,45%	-	[-30,54 ; 30,43]



Obr. 5.2 Fce. hustoty pravděpodobnosti



Obr. 5.3 Kumulativní distribuční fce.

Při porovnání výsledků získaných z obou metod je patrné, že interval pokrytí  $y \pm U$  pro  $\sigma_N$  vychází pro MMC o cca 17% nižší než pro metodu GUF. Tento stav je dán zvoleným rozdělením pravděpodobnosti. Standardní nejistota  $u(y)$  je pro obě metody totožná.

$$\sigma_N (\text{GUF}) = 350,34 \text{ MPa} \quad [-36,72 ; 36,72]_{95,45\%}$$

$$\sigma_N (\text{MMC}) = 350,35 \text{ MPa} \quad [-30,54 ; 30,43]_{95,45\%}$$

Nicméně je nutné podotknout, že interval pokrytí a průběhy PDF a CDF se budou lišit dle zvoleného modelu a dle naměřené hodnoty přetvoření. Dá se ovšem předpokládat, že z fyzikálního hlediska se výsledná hodnota PDF a CDF mechanického napětí bude blížit rovnoměrnému rozdělení pravděpodobnosti.

## 5.2 TENZOMETRICKÉ KŘÍŽE A PRAVOÚHLÉ RŮŽICE

$A_{\varepsilon_x}(\sigma_1) = \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_x} = \frac{\partial \left[ \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_x + \mu \cdot \varepsilon_y) \right]}{\partial \varepsilon_x} = \frac{E}{1-\mu^2} \text{ [MPa]} \quad 5.25$	$A_{\varepsilon_y}(\sigma_2) = \frac{\partial \sigma_2}{\partial \varepsilon_y} = \frac{\partial \left[ \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_y + \mu \cdot \varepsilon_x) \right]}{\partial \varepsilon_y} = \frac{E}{1-\mu^2} \text{ [MPa]} \quad 5.29$
$A_{\varepsilon_y}(\sigma_1) = \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_y} = \frac{\partial \left[ \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_x + \mu \cdot \varepsilon_y) \right]}{\partial \varepsilon_y} = \frac{E \cdot \mu}{1-\mu^2} \text{ [MPa]} \quad 5.26$	$A_{\varepsilon_x}(\sigma_2) = \frac{\partial \sigma_2}{\partial \varepsilon_x} = \frac{\partial \left[ \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_y + \mu \cdot \varepsilon_x) \right]}{\partial \varepsilon_x} = \frac{E \cdot \mu}{1-\mu^2} \text{ [MPa]} \quad 5.30$
$A_E(\sigma_1) = \frac{\partial \sigma_1}{\partial E} = \frac{\partial \left[ \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_x + \mu \cdot \varepsilon_y) \right]}{\partial E} = \frac{\mu \cdot \varepsilon_y + \varepsilon_x}{1-\mu^2} \text{ [\mu m/m]} \quad 5.27$	$A_E(\sigma_2) = \frac{\partial \sigma_2}{\partial E} = \frac{\partial \left[ \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_y + \mu \cdot \varepsilon_x) \right]}{\partial E} = \frac{\varepsilon_y + \mu \cdot \varepsilon_x}{1-\mu^2} \text{ [\mu m/m]} \quad 5.31$
$A_\mu(\sigma_1) = \frac{\partial \sigma_1}{\partial \mu} = \frac{\partial \left[ \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_x + \mu \cdot \varepsilon_y) \right]}{\partial \mu} = \frac{2 \cdot E \cdot \mu \cdot (\mu \cdot \varepsilon_y + \varepsilon_x)}{(1-\mu^2)^2} + \frac{E \cdot \varepsilon_y}{1-\mu^2} \text{ [MPa} \cdot \mu\text{m/m]} \quad 5.28$	$A_\mu(\sigma_2) = \frac{\partial \sigma_2}{\partial \mu} = \frac{\partial \left[ \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_y + \mu \cdot \varepsilon_x) \right]}{\partial \mu} = \frac{2 \cdot E \cdot \mu \cdot (\varepsilon_y + \mu \cdot \varepsilon_x)}{(1-\mu^2)^2} + \frac{E \cdot \varepsilon_x}{1-\mu^2} \text{ [MPa} \cdot \mu\text{m/m]} \quad 5.32$

Obr. 5.4 Citlivostní koeficienty pro tenzometrické kříže ( $\sigma_1$  a  $\sigma_2$ )

Měření, které probíhá na nádrži s tlakovou vodou umístěnou ve výrobní hale. Nádrž je rotačně symetrická a je svařená z ocelových plechů. Materiál plechů je 11 375 (E = 206 000 MPa a  $\mu = 0,285$ ). Nádrž je rovnoměrně zatěžována vnitřním přetlakem až do blízkosti meze kluzu ( $R_{p0,2} = 235$  MPa). Pro stanovení nejistoty uvažujme naměřenou hodnotu přetvoření  $\varepsilon_1 = 798,75$   $\mu\text{m/m}$  a  $\varepsilon_2 = 398,17$   $\mu\text{m/m}$ , což odpovídá  $\sigma_1 = 204,93$  MPa,  $\sigma_2 = 140,80$  MPa a následujícím vstupním parametrům.

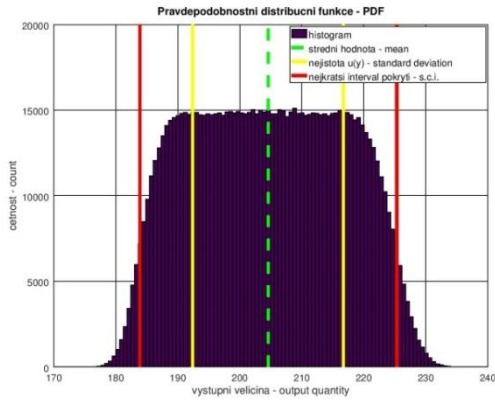
Tab. 5.3 Vstupní parametry pro stanovení nejistoty měření  $u_{\sigma_1}$  a  $u_{\sigma_2}$

Veličina	Odhad (chyba)	Standardní nejistota	Rozdělení
$X_i$	$x_i$ ( $\delta$ )	$u(x_i)$	$\chi$
$\varepsilon_1$	-	9,15	Normální
$\varepsilon_2$	-	8,23	Normální
E	10%	-	Rovnoměrné
$\mu$	5,3%	-	Rovnoměrné

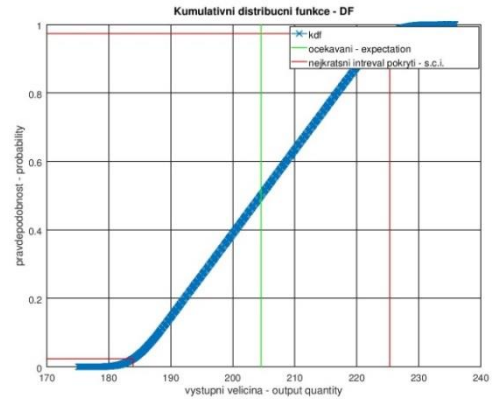
Standardní nejistota přetvoření  $u_\varepsilon$  a  $U_{\sigma N}$  byla stanovena dle stejného postupu jako pro jednoosé tenzometry.

Tab. 5.4: Vypočtené hodnoty (statistické parametry) získané simulací MMC

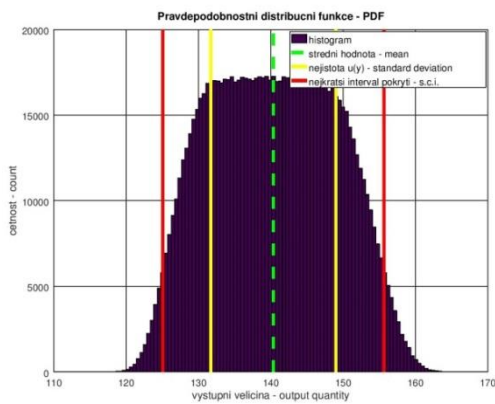
Průměrná hodnota (y) – $\sigma_1$	y	204,56 MPa
Směrodatná odchylka - standardní nejistota	u (y)	12,15 MPa
Nejkratší interval pokrytí pro 95,45% - dolní mez	$y_{\text{low}}$	183,89 MPa
Nejkratší interval pokrytí pro 95,45% - horní mez	$y_{\text{high}}$	225,33 MPa
Nejkratší interval pokrytí pro 95,45%	s. c. i.	41,43 MPa
Nejkratší interval pokrytí pro 95,45%	-	[-20,67 ; 20,77]
Průměrná hodnota (y) - $\sigma_2$	y	140,33 MPa
Směrodatná odchylka - standardní nejistota	u (y)	8,65 MPa
Nejkratší interval pokrytí pro 95,45% - dolní mez	$y_{\text{low}}$	125,09 MPa
Nejkratší interval pokrytí pro 95,45% - horní mez	$y_{\text{high}}$	155,64 MPa
Nejkratší interval pokrytí pro 95,45%	s. c. i.	30,55 MPa
Nejkratší interval pokrytí pro 95,45%	-	[-15,24 ; 15,31]



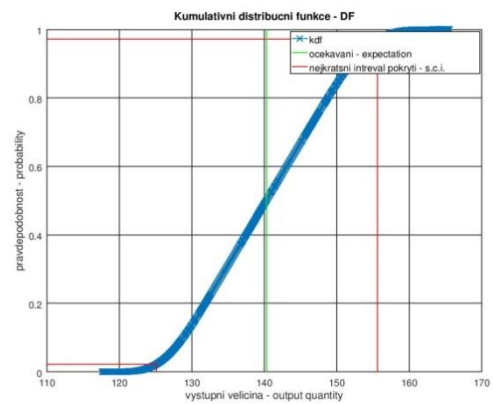
Graf 5.1 Fce. hustoty pravděpodobnosti  $\sigma_1$



Graf 5.2: Kumulativní distribuční fce.  $\sigma_1$



Graf 5.3 Fce. hustoty pravděpodobnosti  $\sigma_2$



Graf 5.4 Kumulativní distribuční fce.  $\sigma_2$

$$\sigma_1 \text{ (GUF)} = 204,93 \text{ MPa} \quad [-24,29 ; 24,29]_{95,45\%}$$

$$\sigma_1 \text{ (MMC)} = 204,56 \text{ MPa} \quad [-20,67 ; 20,77]_{95,45\%}$$

$$\sigma_2 \text{ (GUF)} = 140,80 \text{ MPa} \quad [-17,29 ; 17,29]_{95,45\%}$$

$$\sigma_2 \text{ (MMC)} = 140,33 \text{ MPa} \quad [-15,24 ; 15,31]_{95,45\%}$$

Je vhodné zmínit fakt, že během výpočtu nebyly uvažovány žádné korelace mezi jednotlivými veličinami. Dá se předpokládat, že mezi měřenými přetvořeními  $\varepsilon_1$  a  $\varepsilon_2$  se budou nějaké korelace určitě vyskytovat, a to z důvodu, že tenzometrický kříž je na jedné podložce. Při uvažování korelací by však bylo nutné vytvořit nový algoritmus pro simulaci MMC, který by musel být složitější. Musela by se použít adaptivní metoda (viz [6]), počet simulací by se zřejmě také zvýšil. Dále by bylo vhodné pro simulaci MMC použít postup pro více vstupních veličin (viz [6]). Víceosé tenzometry (kříže a růžice) spadají do kategorie výpočtu, kdy se z jedné vstupní veličiny stanovuje více výstupních veličin. Otázka však nastává, zda by takovýto postup byl efektivní, jaká by byla změna výsledků oproti provedené simulaci v této práci.

Pro tenzometrické pravoúhlé růžice jsou uvedeny pouze citlivostní koeficienty a porovnání nejistoty získaných metodou GUF a MMC. Vstupní parametry pro stanovení nejistoty jsou obdobné jako pro tenzometrické kříže (viz *Tab. 5.3*).

$A_{\varepsilon_a}(\varepsilon_I) = \frac{\partial \varepsilon_I}{\partial \varepsilon_a} = \frac{\partial \left[ \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a - \varepsilon_c}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{2}\right)^2} \right]}{\partial \varepsilon_a} = \frac{\frac{\varepsilon_a - \varepsilon_c}{2} - \frac{-\varepsilon_c + 2 \cdot \varepsilon_b - \varepsilon_a}{2}}{2 \cdot \sqrt{\frac{(-\varepsilon_c + 2 \cdot \varepsilon_b - \varepsilon_a)^2}{4} + \frac{(\varepsilon_a - \varepsilon_c)^2}{4}}} + \frac{1}{2} \quad [-]$	5.45
$A_{\varepsilon_b}(\varepsilon_I) = \frac{\partial \varepsilon_I}{\partial \varepsilon_b} = \frac{\partial \left[ \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a - \varepsilon_c}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{2}\right)^2} \right]}{\partial \varepsilon_b} = \frac{-\varepsilon_c + 2 \cdot \varepsilon_b - \varepsilon_a}{2 \cdot \sqrt{\frac{(-\varepsilon_c + 2 \cdot \varepsilon_b - \varepsilon_a)^2}{4} + \frac{(\varepsilon_a - \varepsilon_c)^2}{4}}} \quad [-]$	5.46
$A_{\varepsilon_c}(\varepsilon_I) = \frac{\partial \varepsilon_I}{\partial \varepsilon_c} = \frac{\partial \left[ \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a - \varepsilon_c}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{2}\right)^2} \right]}{\partial \varepsilon_c} = \frac{-\frac{\varepsilon_a - \varepsilon_c}{2} - \frac{-\varepsilon_c + 2 \cdot \varepsilon_b - \varepsilon_a}{2}}{2 \cdot \sqrt{\frac{(-\varepsilon_c + 2 \cdot \varepsilon_b - \varepsilon_a)^2}{4} + \frac{(\varepsilon_a - \varepsilon_c)^2}{4}}} + \frac{1}{2} \quad [-]$	5.47
$A_{\varepsilon_a}(\varepsilon_{II}) = \frac{\partial \varepsilon_{II}}{\partial \varepsilon_a} = \frac{\partial \left[ \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a - \varepsilon_c}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{2}\right)^2} \right]}{\partial \varepsilon_a} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{\varepsilon_a - \varepsilon_c}{2} - \frac{-\varepsilon_c + 2 \cdot \varepsilon_b - \varepsilon_a}{2}}{2 \cdot \sqrt{\frac{(-\varepsilon_c + 2 \cdot \varepsilon_b - \varepsilon_a)^2}{4} + \frac{(\varepsilon_a - \varepsilon_c)^2}{4}}} \quad [-]$	5.48
$A_{\varepsilon_b}(\varepsilon_{II}) = \frac{\partial \varepsilon_{II}}{\partial \varepsilon_b} = \frac{\partial \left[ \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a - \varepsilon_c}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{2}\right)^2} \right]}{\partial \varepsilon_b} = \frac{-\varepsilon_c + 2 \cdot \varepsilon_b - \varepsilon_a}{2 \cdot \sqrt{\frac{(-\varepsilon_c + 2 \cdot \varepsilon_b - \varepsilon_a)^2}{4} + \frac{(\varepsilon_a - \varepsilon_c)^2}{4}}} \quad [-]$	5.49
$A_{\varepsilon_c}(\varepsilon_{II}) = \frac{\partial \varepsilon_{II}}{\partial \varepsilon_c} = \frac{\partial \left[ \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a - \varepsilon_c}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{2}\right)^2} \right]}{\partial \varepsilon_c} = \frac{1}{2} - \frac{-\frac{\varepsilon_a - \varepsilon_c}{2} - \frac{-\varepsilon_c + 2 \cdot \varepsilon_b - \varepsilon_a}{2}}{2 \cdot \sqrt{\frac{(-\varepsilon_c + 2 \cdot \varepsilon_b - \varepsilon_a)^2}{4} + \frac{(\varepsilon_a - \varepsilon_c)^2}{4}}} \quad [-]$	5.50

Obr. 5.5 Citlivostní koeficienty pro tenzometrické pravoúhlé růžice ( $\varepsilon_1$  a  $\varepsilon_2$ )

$A_{\varepsilon_a}(\psi) = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_a} = \frac{\partial \left[ \arctan\left(\frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{\varepsilon_a - \varepsilon_c}\right) \right]}{\partial \varepsilon_a} = \frac{-\frac{-\varepsilon_c + 2 \cdot \varepsilon_b - \varepsilon_a}{(\varepsilon_a - \varepsilon_c)^2} - \frac{1}{\varepsilon_a - \varepsilon_c}}{\frac{(-\varepsilon_c + 2 \cdot \varepsilon_b - \varepsilon_a)^2}{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2} + 1} \quad \left[ \frac{\circ}{\mu\text{m/m}} \right]$	5.51
$A_{\varepsilon_b}(\psi) = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_b} = \frac{\partial \left[ \arctan\left(\frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{\varepsilon_a - \varepsilon_c}\right) \right]}{\partial \varepsilon_b} = \frac{2}{\left( \frac{(-\varepsilon_c + 2 \cdot \varepsilon_b - \varepsilon_a)^2}{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2} + 1 \right) \cdot (\varepsilon_a - \varepsilon_c)} \quad \left[ \frac{\circ}{\mu\text{m/m}} \right]$	5.52
$A_{\varepsilon_c}(\psi) = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_c} = \frac{\partial \left[ \arctan\left(\frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{\varepsilon_a - \varepsilon_c}\right) \right]}{\partial \varepsilon_c} = \frac{-\frac{-\varepsilon_c + 2 \cdot \varepsilon_b - \varepsilon_a}{(\varepsilon_a - \varepsilon_c)^2} - \frac{1}{\varepsilon_a - \varepsilon_c}}{\frac{(-\varepsilon_c + 2 \cdot \varepsilon_b - \varepsilon_a)^2}{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2} + 1} \quad \left[ \frac{\circ}{\mu\text{m/m}} \right]$	5.53
$A_{\varepsilon_a}(\sigma_I) = \frac{\partial \sigma_I}{\partial \varepsilon_a} = \frac{\partial \left[ \frac{E}{1-\mu} \cdot \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} + \frac{E}{\sqrt{2} \cdot (1+\mu)} \cdot \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a - \varepsilon_c}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{2}\right)^2} \right]}{\partial \varepsilon_a} = \frac{E}{2 \cdot (1-\mu)} + \frac{E \cdot (\varepsilon_a - \varepsilon_b)}{\sqrt{2} \cdot (\mu+1) \cdot \sqrt{(\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2}} \quad [\text{MPa}]$	5.54
$A_{\varepsilon_b}(\sigma_I) = \frac{\partial \sigma_I}{\partial \varepsilon_b} = \frac{\partial \left[ \frac{E}{1-\mu} \cdot \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} + \frac{E}{\sqrt{2} \cdot (1+\mu)} \cdot \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a - \varepsilon_c}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{2}\right)^2} \right]}{\partial \varepsilon_b} = \frac{E \cdot (-2 \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_b) - 2 \cdot (\varepsilon_a - \varepsilon_b))}{2^{\frac{3}{2}} \cdot (\mu+1) \cdot \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2}} \quad [\text{MPa}]$	5.55
$A_{\varepsilon_c}(\sigma_I) = \frac{\partial \sigma_I}{\partial \varepsilon_c} = \frac{\partial \left[ \frac{E}{1-\mu} \cdot \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} + \frac{E}{\sqrt{2} \cdot (1+\mu)} \cdot \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a - \varepsilon_c}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{2}\right)^2} \right]}{\partial \varepsilon_c} = \frac{E}{2 \cdot (1-\mu)} + \frac{E \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_b)}{\sqrt{2} \cdot (\mu+1) \cdot \sqrt{(\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2}} \quad [\text{MPa}]$	5.56

Obr. 5.6 Citlivostní koeficienty pro tenzometrické pravoúhlé růžice ( $\psi$  a  $\sigma_I$ )

$A_E(\sigma_I) = \frac{\partial \sigma_I}{\partial E} = \frac{\partial \left[ \frac{E}{1-\mu} \cdot \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} + \frac{E}{\sqrt{2} \cdot (1+\mu)} \cdot \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a - \varepsilon_c}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{2}\right)^2} \right]}{\partial E} = \frac{\varepsilon_c + \varepsilon_a}{2 \cdot (\mu - 1)} + \frac{\sqrt{(\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2}}{\sqrt{2} \cdot (\mu + 1)} \text{ [MPa]}$	5.57
$A_\mu(\sigma_I) = \frac{\partial \sigma_I}{\partial \mu} = \frac{\partial \left[ \frac{E}{1-\mu} \cdot \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} + \frac{E}{\sqrt{2} \cdot (1+\mu)} \cdot \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a - \varepsilon_c}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{2}\right)^2} \right]}{\partial \mu} = \frac{E \cdot (\varepsilon_c + \varepsilon_a)}{2 \cdot (1-\mu)^2} - \frac{E \cdot \sqrt{(\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2}}{\sqrt{2} \cdot (\mu + 1)^2} \text{ [MPa]}$	5.58
$A_{\varepsilon_a}(\sigma_{II}) = \frac{\partial \sigma_{II}}{\partial \varepsilon_a} = \frac{\partial \left[ \frac{E}{1-\mu} \cdot \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} - \frac{E}{\sqrt{2} \cdot (1+\mu)} \cdot \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a - \varepsilon_c}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{2}\right)^2} \right]}{\partial \varepsilon_a} = \frac{E}{2 \cdot (\mu + 1)} - \frac{E \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_b)}{\sqrt{2} \cdot (\mu + 1) \cdot \sqrt{(\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2}} \text{ [MPa]}$	5.59
$A_{\varepsilon_b}(\sigma_{II}) = \frac{\partial \sigma_{II}}{\partial \varepsilon_b} = \frac{\partial \left[ \frac{E}{1-\mu} \cdot \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} - \frac{E}{\sqrt{2} \cdot (1+\mu)} \cdot \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a - \varepsilon_c}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{2}\right)^2} \right]}{\partial \varepsilon_b} = -\frac{E \cdot (-2 \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_b) - 2 \cdot (\varepsilon_a - \varepsilon_b))}{2^{\frac{3}{2}} \cdot (\mu + 1) \cdot \sqrt{(\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2}} \text{ [MPa]}$	5.60
$A_{\varepsilon_c}(\sigma_{II}) = \frac{\partial \sigma_{II}}{\partial \varepsilon_c} = \frac{\partial \left[ \frac{E}{1-\mu} \cdot \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} - \frac{E}{\sqrt{2} \cdot (1+\mu)} \cdot \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a - \varepsilon_c}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{2}\right)^2} \right]}{\partial \varepsilon_c} =$	5.61
$A_E(\sigma_{II}) = \frac{\partial \sigma_{II}}{\partial E} = \frac{\partial \left[ \frac{E}{1-\mu} \cdot \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} - \frac{E}{\sqrt{2} \cdot (1+\mu)} \cdot \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a - \varepsilon_c}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{2}\right)^2} \right]}{\partial E} = \frac{\varepsilon_c + \varepsilon_a}{2 \cdot (1-\mu)} - \frac{\sqrt{(\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2}}{\sqrt{2} \cdot (\mu + 1)} \text{ [MPa]}$	5.62
$A_\mu(\sigma_{II}) = \frac{\partial \sigma_{II}}{\partial \mu} = \frac{\partial \left[ \frac{E}{1-\mu} \cdot \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} - \frac{E}{\sqrt{2} \cdot (1+\mu)} \cdot \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a - \varepsilon_c}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{2}\right)^2} \right]}{\partial \mu} = \frac{E \cdot \sqrt{(\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2}}{\sqrt{2} \cdot (\mu + 1)^2} + \frac{E \cdot (\varepsilon_c + \varepsilon_a)}{2 \cdot (1-\mu)^2} \text{ [MPa]}$	5.63

Obr. 5.7 Citlivostní koeficienty pro tenzometrické pravouhlé růžice ( $\sigma_I$  a  $\sigma_{II}$ )

$\varepsilon_I$ (GUF) = 1315,92 $\mu\text{m/m}$	[-24,19 ; 24,19] <sub>95,45%</sub>
$\varepsilon_I$ (MMC) = 1316,00 $\mu\text{m/m}$	[-22,70 ; 22,80] <sub>95,45%</sub>
$\varepsilon_{II}$ (GUF) = 440,07 $\mu\text{m/m}$	[-33,87 ; 33,87] <sub>95,45%</sub>
$\varepsilon_{II}$ (MMC) = 439,99 $\mu\text{m/m}$	[-34,69 ; 34,74] <sub>95,45%</sub>
$\varphi_H$ (GUF) = 55°30′	[-1°6′ ; 1°6′] <sub>95,45%</sub>
$\varphi_H$ (MMC) = 55°30′	[-0°95′ ; 1°5′] <sub>95,45%</sub>
$\sigma_I$ (GUF) = 318,23 MPa	[-29,83 ; 29,83] <sub>95,45%</sub>
$\sigma_I$ (MMC) = 318,27 MPa	[-25,45 ; 25,18] <sub>95,45%</sub>
$\sigma_{II}$ (GUF) = 183,48 MPa	[-19,15 ; 19,15] <sub>95,45%</sub>
$\sigma_{II}$ (MMC) = 183,49 MPa	[-17,32 ; 17,65] <sub>95,45%</sub>

Při porovnání stanovených nejistot metodou GUF a MMC platí obdobné závěry jako pro jednoosé tenzometry.

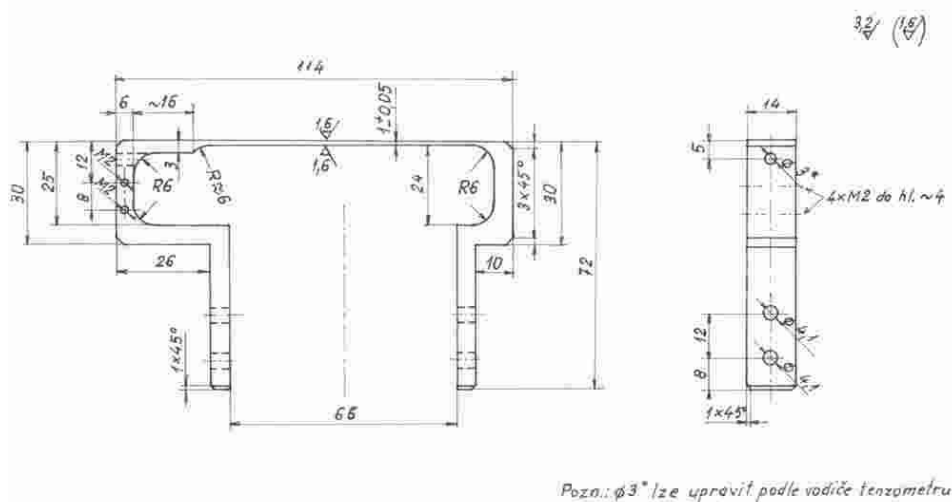
Metoda MMC se jeví jako velice efektivní metoda pro stanovení nejistoty měření mechanického napětí. V provedených rozborech je dokázáno, že výsledky získané metodou GUF a MMC jsou téměř shodné a tudíž je na experimentátorovi, jakou metodu zvolí. Navíc u metody MMC je znám průběh pravděpodobnostních funkcí (PDF a CDF) a tudíž se dá následně predikovat výsledné chování měřeného objektu. Další výhodou MMC je již zmíněná efektivnost oproti metodě GUF, a to zejména u tenzometrických křížů a růžic, kdy odpadá stanovení citlivostních koeficientů, které se stanovují parciálními derivacemi jednotlivých proměnných. Další výhodou metody MMC je současný výpočet hodnoty mechanického napětí a nejistoty měření.

## 6 EXPERIMENT

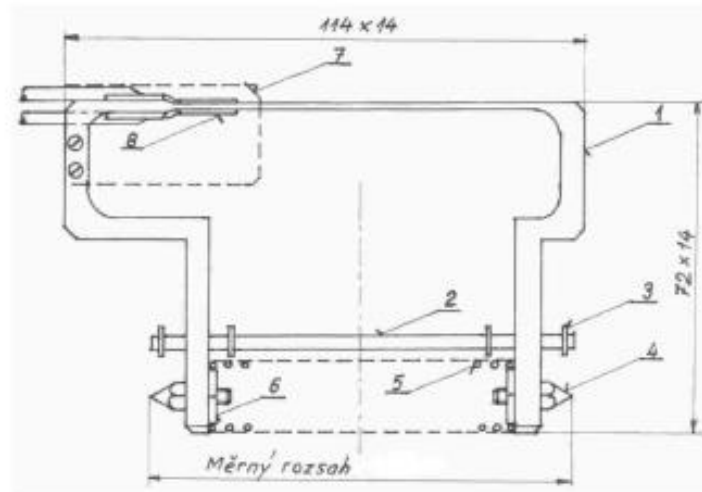
Pro ověření modelu stanovení nejistot měření přetvoření a mechanického napětí byl navrhnout experiment. Vzhledem k výraznému množství kombinací typů tenzometrů (výrobci, typy, odpory, různé velikosti, upevnění apod.), mechanického namáhání (tah/tlak, ohyb, krut), s tím souvisejícím zapojením do můstku, typu napjatosti (jednoosá, dvojosá), krycích prostředků, vnějších vlivů (teplota, tlak, radiace), různorodosti materiálů (modul pružnosti a Poissonovo číslo) a záznamových zařízení, byl zvolen experiment, který je založen na elementárním mechanickém namáhání. Jako reprezentativní příklad experimentu byl zvolen hrotový snímač posuvu nazvaný extenzometr, který je založen na ohybu ocelového plátu (nosníku), kde ohyb je měřen tenzometrem. Experiment byl prováděn na pěti vzorcích (P1 až P5), které jsou vyrobeny ze stejného materiálu a mají stejný geometrický tvar. Pohyb snímače v rozsahu  $\pm 6,5$  mm ( $\pm 6$ mm) byl prováděn ve speciálním přípravku a byl měřen digitálním úchylkoměrem. Experimenty byly prováděny za pokojové teploty  $20^{\circ}\text{C}$ , za zvýšené teploty  $90^{\circ}\text{C}$  a vysoké teploty  $290^{\circ}\text{C}$ .

### 6.1 EXPERIMENTÁLNÍ VZORKY

Extenzometr je snímač posunutí, který má tvar tělesa navržený tak, aby pracoval v rozsahu 13 mm ( $\pm 6,5$  mm). Rozevírání a stahování snímače je realizováno vysokoteplotní pružinou, která je pevně uchycena k tělesu a uvnitř pružiny je umístěn pevný vodící člen. Aby nedošlo k překročení navrženého rozsahu, je snímač opatřen nastavitelnými dorazy. Snímač je na konci opatřen nastavitelnými hroty, které spolu s pružinou zajišťují bezpečné a zároveň volné uchycení k pevným bodům (drážky v přípravku). Tenzometry jsou umístěny ve středu tělesa snímače na nosníku. Geometrický tvar extenzometru je uveden na *Obr. 6.1* a *Obr. 6.2*. Materiál tělesa snímače, na kterém jsou umístěny tenzometry, je konstrukční ocel označení ČSN 11 600, jejíž materiálové vlastnosti jsou  $E = 2,06 \cdot 10^5$  MPa,  $\mu = 0,285$  a  $R_e = \text{min } 265$  MPa.



Obr. 6.1 Detail tělesa hrotového snímače posuvu



Číslo	Název	Počet kusů	Materiál	Poznámka
1	Těleso snímače	1	ocel	ČSN 11 600
2	Dorazová tyčka	1	ocel	kulatina Ø 3
3	Pojistný třmen	4	kroužek 2,3	ČSN 022929
4	Hrot	2	ocel	ČSN 19 312
5	Tlačná pružina	1	ocelová struna	Ø1, D14, z=18
6	Speciální matice	2	ocel	šestihran 10
7	Kryt tenzometru	1	nerez ocel	plech l = 0,5
8	Tenzometr	2	tenzom.	

Obr. 6.2 Sestava hrotového snímače posuvu

## 6.2 ANALYTICKÝ VÝPOČET DEFORMACE EXTENZOMETRU

Princip extenzometru je založen na povrchové deformaci nosníku s posuvem břitů na koncových tuhých rámech. Z hlediska mechaniky je extenzometr nosník, který je na obou koncích opatřen kolmými rameny délky  $v$ . Vzájemným přímkovým posuvem lze vnést do nosníku prakticky rovnoměrný ohybový moment  $M_0$ . Pak tedy pro prizmatický (nevyztužený) nosník platí vztah 6.1, který vyjadřuje závislost povrchové deformace  $\varepsilon$  na posuvu konců ramen  $u$ . Arcsin můžeme přímo nahradit argumentem s chybou menší než 0,3%, a to pro úhly naklonění konců  $\frac{1}{2} \cdot \varphi \leq 8^\circ$ . Vztah 6.1 se potom zjednoduší na vztah 6.2 pro vyjádření deformace a vztah 6.3 pro vyjádření posuvu. Vztah 6.2, respektive 6.3 je základní vzorec pro návrh snímačů posuvu a břitových extenzometrů [19]. Schématické zobrazení principu extenzometru je zobrazeno na Obr. 6.3.

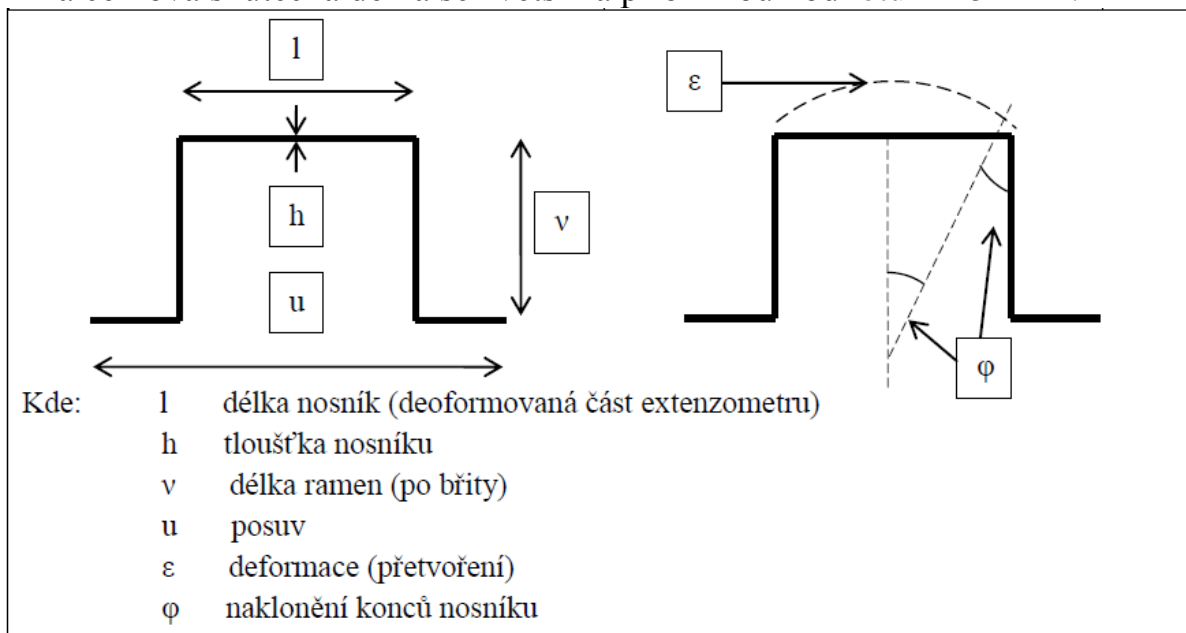
$$\varepsilon = \frac{h}{l} \cdot \arcsin \frac{u}{2 \cdot v} \quad 6.1$$

$$\varepsilon = \frac{h \cdot u}{2 \cdot v \cdot l} \quad 6.2$$

$$u = \frac{2 \cdot v \cdot l}{h} \varepsilon \quad 6.3$$

Pro navržený extenzometr je teoretická hodnota deformace (přetvoření) získaná analytickým výpočtem pro  $u = 5 \text{ mm}$  rovna  $\varepsilon = 502,31 \text{ } \mu\text{m/m}$ . Použité rozměry extenzometru pro výpočet deformace jsou  $h = 1 \text{ mm}$ ,  $l = 79 \text{ mm}$ ,  $v = 63 \text{ mm}$ .

Skutečná délka prizmatické části nosníku byla odměřena posuvným měřítkem a je rovna hodnotě přibližně  $l = 79$  mm. Pokud bychom uvažovali i vliv deformace přechodových rádiusů potom přibude na každé straně přibližně 1 mm a celková skutečná délka se zvětší na přibližnou hodnotu  $l = 81$  mm.



Obr. 6.3 Schématické zobrazení principu extenzometru

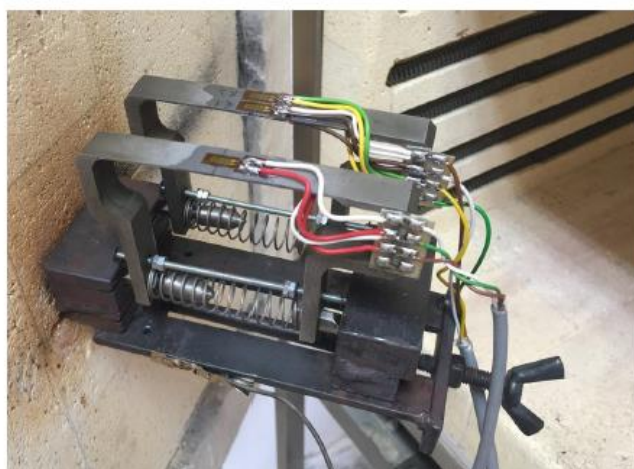
### 6.3 POPIS EXTENZOMETRU (NOSNÍKU) A EXPERIMENTÁLNÍHO ZAŘÍZENÍ

P1	P2
Výrobce: HBM	Výrobce: HBM
Typ: 1-LY11-6/120	Typ: 1-LY11-6/350
Materiál mřížky: Konstantan	Materiál mřížky: Konstantan
Odpor: $120 \Omega \pm 0,35\%$	Odpor: $350 \Omega \pm 0,35\%$
<i>k</i> -faktor: $2,04 \pm 1\%$	<i>k</i> -faktor: $2,05 \pm 1\%$
Příčná citlivost: -0,1%	Příčná citlivost: 0,2%
Teplotní kompenzace: $\alpha = 10,8 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$	Teplotní kompenzace: $\alpha = 10,8 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$
Teplotní rozsah: -10 až $120^{\circ}\text{C}$	Teplotní rozsah: -10 až $120^{\circ}\text{C}$
Upevnění: lepidlo Z70	Upevnění: lepidlo Z70
Zapojení do můstku: půlmost	Zapojení do můstku: celomost
Krycí prostředky: PU120	Krycí prostředky: PU120
Kabel: do běžného prostředí	Kabel: do běžného prostředí
FOIL LOT: A413/16	FOIL LOT: A417/39
PRODUCTION BATCH: 812072918	PRODUCTION BATCH: 812072919

U snímače P1 a P2 byl použit kabel do běžného prostředí. Teplotní rozsah  $-30^{\circ}\text{C}/90^{\circ}\text{C}$ . Materiál: Cu drát – stíněný.

U snímače P3 a P4 byl použit vysokoteplotní kabel TML (4FA-LT100). Teplotní rozsah  $-269^{\circ}\text{C}/300^{\circ}\text{C}$ . Materiál PTFE – olověná izolace z fluorované pryskyřice.

U snímače P5 byl použit vysokoteplotní kabel MM–Vishay (326-GJF). Teplotní rozsah  $-269^{\circ}\text{C}/480^{\circ}\text{C}$ . Materiál pevná měď pokovovaná niklem – izolace ze skelného vlákna.



Obr. 6.3: Extenzometr P1 a P2 (HBM) umístěná v experimentálním zařízení (v peci)

U snímače P1 a P2 (HBM) byla pro spojení mezi vodiči tenzometrů a kabelem použita svorkovnice HBM a spoje byly vytvořeny pájením za použití měkké pájky. U snímače P3, P4 a P5 (TML a MM–Vishay) byla pro spojení mezi vodiči tenzometrů a kabelem použita svorkovnice BLH typ: TB 900 s maximální teplotou použití 483°C. Pro vytvoření pevného pájeného spoje byla použita stříbrná pájecí pasta MM–Vishay typ: 1240-FPA.

Pro měření teploty byl použit plášťový termočlánek typu K (NiCr-Ni) s třídou přesnosti 1 ( $\pm 1,5^\circ\text{C}$ ) s teplotním rozsahem -40 až 1150°C.

Jako záznamové zařízení byla použita měřicí ústředna EMS DV803. Záznamová frekvence během experimentů byla 1 Hz.

P5	
Výrobce: MM – Vishay	
Typ: LZE – NC – W250G – 120/2F	
Materiál mřížky: Pt8W	
Odpor: 120	
k – faktor: 4	
Příčná citlivost: -	
Teplotní kompenzace: -	
Teplotní rozsah: až 649°C	
Upevnění: bodováním	
Tloušťka kovové podložky: 0,13 mm	
Zapojení do můstku: půlmost	
Krycí prostředky: Gagekote 11	
Kabel: Vysokoteplotní -269°C/480°C	
LOT NUMBER: 1625357	
INVENTORY CODE: MMF300681	



Obr. 6.6: Extenzometr P5 MM-Vishay umístěná v experimentálním zařízení (v peci)



Obr. 6.7: Extenzometr P5 (MM–Vishay) detail přivaření

P3	P4
Výrobce: TML	Výrobce: TML
Typ: AW – 6 – 350 – 11 – 01LT	Typ: AW – 6 – 350 – 11 – 01LT
Materiál mřížky: Speciální slitina	Materiál mřížky: Speciální slitina
Odpor: 350 $\pm$ 1 $\Omega$	Odpor: 350 $\pm$ 1 $\Omega$
k-faktor: 2.05 $\pm$ 2%	k-faktor: 2.05 $\pm$ 2%
Příčná citlivost: -	Příčná citlivost: -
Teplotní kompenzace: $\alpha = 11 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$	Teplotní kompenzace: $\alpha = 11 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$
Teplotní rozsah: -196 až 300°C	Teplotní rozsah: -196 až 300°C
Upevnění: přivařením	Upevnění: přivařením
Tloušťka kovové podložky: 0,08 mm	Tloušťka kovové podložky: 0,08 mm
Zapojení do můstku: půlmost	Zapojení do můstku: celomost
Krycí prostředky: bez	Krycí prostředky: bez
Kabel: Vysokoteplotní	Kabel: Vysokoteplotní
LOT NO: S505212	LOT NO: S505212
BATCH NO: KC23K	BATCH NO: KC23K



Obr. 6.4: Extenzometr P3 a P4 (TML) umístěná v experimentálním zařízení (v peci)



Obr. 6.5: Extenzometr P4 (TML) detail přivaření

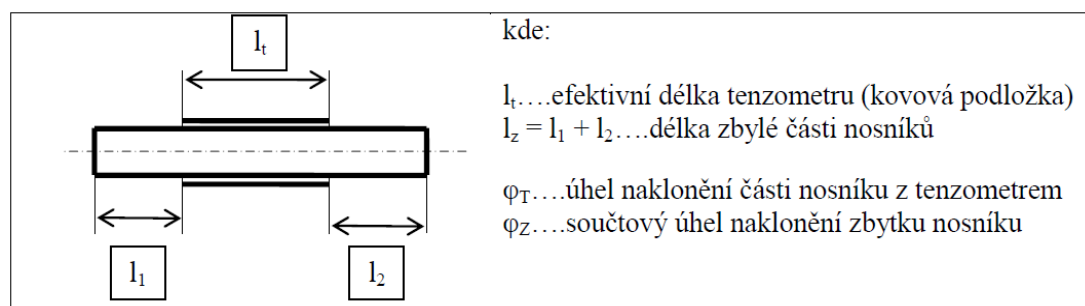
Pro vyvolání ohybu nosníku extenzometru byl vyroben kalibrační přípravek, který byl umístěný v peci. Přípravek umožňuje rozevírání (roztahování) a smršťování (stahování) snímače na definovanou polohu, která je měřena digitálním úchylkoměrem umístěným mimo pec. Přípravek se skládá z pevné a pohyblivé části, ve kterých jsou vytvořeny drážky pro uchycení snímače. Tento způsob uchycení umožňuje zafixování snímače tak, že během posuvu nevypadne a zároveň se celkově deformuje a do měřeného ohybu nevstupují parazitní složky (např. krut).

Pro měření polohy (stavu) snímače byl použit digitální úchylkoměr Mitutoyo – Digimatic – 543-490B (ID-C150XB, S.N. 15249713). Rozsah: 50,8 mm, Rozlišení: 0,001 mm, mezní chyba: 0,005 mm.

## 6.4 KOREKCE NAMĚŘENÝCH HODNOT

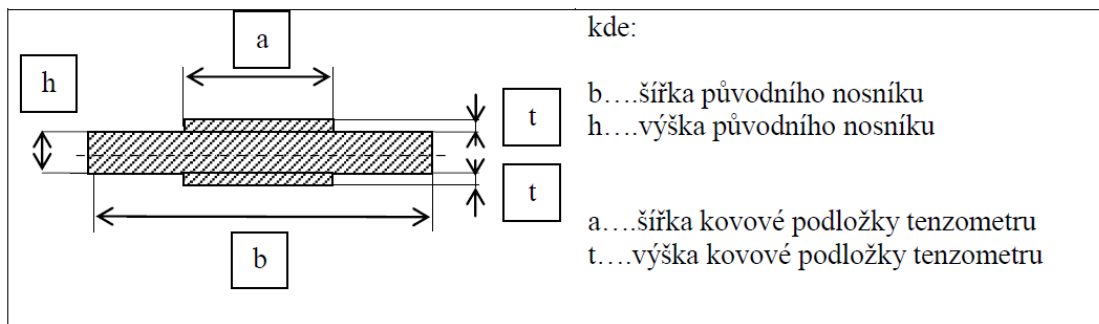
Aby bylo možné porovnat naměřené hodnoty během experimentů mezi sebou a mezi teoretickými výpočty (analytický a MKP), je nutné naměřené hodnoty přetvoření z důvodu výskytu hrubé chyby korigovat. Rozměry a tloušťka kovové podložky způsobují u navařovacích tenzometrů (TML a MM – Vishay) dvě chyby v důsledku základních vztahů mechaniky a geometrie tvaru extenzometru. Navařením kovové podložky na nosník extenzometru dojde k vyztužení nosníku a zvětšení vzdálenosti měrné mřížky tenzometru od neutrální osy. Efekt vyztužení nosníku tenzometrem měřený signál zmenšuje a zvětšení vzdálenosti neutrální osy od měřicí mřížky tenzometru měřený signál naopak zvětšuje. U tenzometrů HBM můžeme deformaci měřicí mřížky považovat za totožnou s deformací nosníku. Dále proběhla kontrola na vliv přivařením ve tvaru „U“ dle metodiky uvedené v článku [11].

Tloušťka nosníku extenzometru je 1 mm s tolerancí  $\pm 0,05$ . Tenzometry mají měřicí mřížku (což je prakticky aktivní prvek snímače) vytvořenou z fólie o tloušťce 0,005 mm a jsou umístěny na podložce o tloušťce 0,02 mm, což při součtu dává hodnotu 0,025 mm. Potom tedy poměr tloušťky mřížky tenzometru vůči tloušťce nosníku je 2,5%. Tato hodnota sice není nulová, ale lze ji považovat za zanedbatelnou, a to i vzhledem k výrobní toleranci tloušťky nosníku. Uvedená hodnota 0,025 mm je shodná pro všechny použité tenzometry, protože i přivařovací tenzometry jsou vyrobeny tak, že na kovové podložce je nanесena měřicí mřížka. U nalepovacích tenzometrů HBM je pak mezi deformovaným tvarem měřeného objektu (nosníkem) a měřicí mřížkou tenzometru lepidlo Z70, jehož vrstva je cca 0,005 mm, což je také zanedbatelná hodnota. Potom tedy uvažujeme, že deformace na povrchu nosníku se bez jakéhokoliv zkreslení (pouze s dílčími nejistotami) přenese na měřicí mřížku tenzometru. U přivařovacích tenzometrů je mezi měřicí mřížkou a deformovaným nosníkem ještě kovová podložka a tudíž se deformace z povrchu nosníku na měřicí mřížku přenáší přes podložku. U tenzometrů TML má tloušťku  $t = 0,08$  mm, délku  $l_t = 24$  mm a šířku  $a = 5$  mm. U tenzometru MM-Vishay jsou rozměry následující  $t = 0,13$  mm,  $l_t = 25,4$  mm ( $2 \times 12,7$  mm),  $a = 7,62$  mm.



Obr. 6.4 Geometrické schéma měrné části nosníku s výztuhou

Princip uvažované korekce vychází ze základního geometricko-deformačního rozboru extenzometru (viz Obr. 6.4 a Obr. 6.5) a dá se vyjádřit vztahem 6.4, kde moment setrvačnosti  $I_T$  je dán vztahem 6.5.



Obr. 6.5 Řez vyztuženou oblastí

$$\varepsilon = \frac{u \cdot (h + t) \cdot b \cdot h^3}{2 \cdot v \cdot (b \cdot h^3 \cdot I_T + 12 \cdot l_z \cdot I_T)} \quad 6.4$$

$$I_T = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t \cdot (h + t)^2 \quad 6.5$$

Zmíněné dvě chyby jsou konstantní pro všechna zatížení (posuvy  $u$ ) a tudíž je lze vyjádřit procentuálně. Uvažujme posuv  $u = 5$  mm pro extenzometr P\_3, P\_4 a P\_5. Po dosazení všech geometrických parametrů extenzometru a přivařovací podložky do vztahu 6.4 obdržíme správný údaj měřené hodnoty tenzometru  $\varepsilon_T$ . Vypočtené hodnoty  $\varepsilon_T$  jsou výrazně menší než návrhové hodnoty deformace nosníku extenzometru bez uvažování kovové podložky tenzometru. Na vypočtených hodnotách  $\varepsilon_T$  je patrné, že efekt vyztužení nosníku tenzometrem (vedoucí ke snížení signálu) převládá nad vlivem zvětšení vzdálenosti měrné mřížky od neutrální osy (vedoucí ke zvětšení signálu).

Při porovnání s teoretickou (návrhovou) hodnotou deformace  $\varepsilon = 536,25$   $\mu\text{m}/\text{m}$  získáme hodnotu chyby  $\varepsilon_T/\varepsilon$ , o kterou je nutné indikované hodnoty během experimentu korigovat. Respektive zvětšit indikovanou hodnotu přetvoření během experimentu o velikost chyby  $\varepsilon_T/\varepsilon$  [%].

Tab. 6.1 Hodnoty deformace nosníku s přivařenou podložkou tenzometru pro  $u = 5$  mm

Extenzometr	P3	P4	P5
$\varepsilon_T$ [ $\mu\text{m}/\text{m}$ ]	476,20	424,35	414,98
$\varepsilon_T/\varepsilon$ [%]	5,20	15,52	17,39

## 6.5 MKP VÝPOČET

Cílem MKP výpočtu je stanovení teoretického ohybového přetvoření  $\varepsilon_0$  a ohybového napětí  $\sigma_0$  v místě umístění tenzometrů pro zatížení snímače v rozsahu  $\pm 6,5$  mm pro teploty 20°C, 90°C a 290°C. MKP výpočet byl proveden v prostředí Ansys Workbench 17.1. Model extenzometru byl vytvořen dle výkresové dokumentace (viz Obr. 6.1 a Obr. 6.2) v DesingModeler jako solid (objemový) prvek. Síť byla vytvořena na extenzometru pomocí algoritmu „Hex Dominant“ (hexaedr) a v místě umístění tenzometrů (nosníku) byla zjemněna. Zatížení a vazby byly zadány tak, aby co nejvíce odpovídaly reálnému stavu experimentu. Celkem

byly použity tři okrajové podmínky. Na jednom konci snímače bylo použito „Fixed Support“ (vetknutí), na druhém konci snímače bylo použito „Remote Displacement“ a pro teploty 90°C a 290°C byla použita vazba „Thermal Condition“ (teplotní zatížení). Vyhodnocení MKP výpočtu bylo provedeno na základě přetvoření  $\varepsilon$ , což se rovná ohybovému přetvoření  $\varepsilon_o$ , které je během experimentu měřeno tenzometry.

## 6.6 VÝSLEDKY EXPERIMENTU A STANOVENÍ NEJISOTY

V rámci provedeného experimentu byly zpracovány naměřené hodnoty přetvoření z pěti snímačů, kde se na snímačích P1 až P5 prováděly experimenty při pokojové teplotě  $T = 20^\circ\text{C}$  a zvýšené teplotě  $T = 90^\circ\text{C}$  a na snímačích P3, P4 a P5 se navíc prováděly experimenty při vysoké teplotě  $T = 290^\circ\text{C}$ . Naměřené hodnoty ohybového přetvoření  $\varepsilon_o$  v  $\mu\text{V}/\text{V}$  byly dle příslušných *k-faktorů* přepočteny na hodnoty přetvoření v  $\mu\text{m}/\text{m}$ . Dále bylo z měřeného ohybového přetvoření  $\varepsilon_o$  dle Hookova zákona [1] stanoveno ohybové napětí  $\sigma_o$ .

Extenzometry, tak jako tenzometry, jsou relativní snímače. To znamená, že nulová hodnota snímače (tenzometrů) je dána uživatelem. Každý měřicí člen (tenzometr) je po nalepení nebo navaření v jiném výchozím stavu. Nulování extenzometru proběhlo vždy před měřením (kalibrací) pro  $T = 20^\circ\text{C}$ , nebo před spuštěním pece pro  $T = 90^\circ\text{C}$  a  $T = 290^\circ\text{C}$ . Před samotnou kalibrací proběhlo teplotní cyklování snímačů v peci za účelem stabilizace (použitých tenzometrů) a stanovení parazitních vlivů (zdánlivého přetvoření  $\varepsilon_{app}$ ) vznikajících při zvýšených a vysokých teplotách. Během experimentů bylo prokázáno, že pro ustálení hodnoty zdánlivého přetvoření  $\varepsilon_{app}$ , respektive závislosti  $\varepsilon_{app}$  na teplotě, je nutné provést alespoň tři teplotní cykly. Náhrev v peci na požadovanou teplotu probíhal řízeně, a to přibližně  $1^\circ\text{C}$  za 2 minuty. Chladnutí probíhalo samovolně a nepřekročilo zmíněný  $1^\circ\text{C}$  za 2 minuty. Při vyšších teplotách bylo chladnutí rychlejší a se snižující se teplotou klesalo. Hodnota  $1^\circ\text{C}$  za 2 minuty byla určena experimentálně tak, aby se všechny části snímače a zejména tenzometry prohřály přibližně rovnoměrně. Tenzometry byly během experimentu zapojeny do můstku tak, že je kompenzován vliv teplotní roztažnosti a vliv tahové složky [18].

Výsledné ohybové přetvoření  $\varepsilon_o$  bylo při teplotě  $T = 90^\circ\text{C}$  a  $T = 290^\circ\text{C}$  stanoveno na základě vztahu 6.1, kde  $\varepsilon_{mer}$  je hodnota indikovaná na měřicí aparatuře a  $\varepsilon_{app}$  je zdánlivé přetvoření.

$$\varepsilon_o = \varepsilon_{mer} - \varepsilon_{app} [\mu\text{V}/\text{V}] \quad 6.6$$

Zvolená znaménková konvence je pro snímače extenzometry následující:

- + značí stahování (smršťování) snímače
- - značí roztahování (rozevírání) snímače

Výsledky kalibrace snímače byly zpracovány jako závislost ohybového přetvoření  $\epsilon_0$  (napětí  $\sigma_0$ ) na dráze (zatížení)  $L$ . Postup kalibrace byl pro všechny snímače totožný. Stahování a roztahování snímače proběhlo v rozsahu  $\pm 6,5$  mm ( $\pm 6$  mm) vždy v šesti krocích, kdy jeden krok byl v intervalu přibližně 1 mm a 1,5 mm. Nejprve proběhlo stahování ( $0 \rightarrow 6,5$ ) mm a ( $6,5 \rightarrow 0$ ) mm a potom roztahování ( $0 \rightarrow -6,5$ ) mm a ( $-6,5 \rightarrow 0$ ) mm.

Nejistota měření ohybového přetvoření  $U_{\epsilon_0}$  a napětí  $U_{\sigma_0}$  byla stanovena dle metody GUF a pro ohybové napětí  $U_{\sigma_0}$  dle metody MMC. Výsledky výpočtu rozšířené nejistoty jsou uvedeny v Tab. 6.2 až Tab. 6.4. Vzhledem k množství naměřených dat byla nejistota měření stanovena pro zatížení  $L = \pm 5$  mm, a to pro všechny snímače (P1 až P5) a teplotní stavy ( $T = 20^\circ\text{C}$ ,  $T = 90^\circ\text{C}$  a  $T = 290^\circ\text{C}$ ).

Nejistota ohybového přetvoření  $U_{\epsilon_0}$  je dána výběrem 13 zdrojů dílčích nejistot uvedených na Obr. 3.1. Velikosti jednotlivých chyb a jejich rozdělení byly určeny dle informací uvedených v Tab. 3.1. Nejistotu ohybového napětí  $U_{\sigma_0}$  tvoří dva zdroje dílčí nejistoty. Nejistota ohybového přetvoření  $u_{\epsilon_0}$  a nejistota modulu pružnosti  $u_E$ . Chyba modulu pružnosti  $\delta_E$  byla pro všechny výpočty stanovena na 10% a uvažujeme rovnoměrné rozdělení. U nejistoty ohybového přetvoření  $u_{\epsilon_0}$  uvažujeme výsledné rozdělení normální, ačkoliv se dá předpokládat, že bude nabývat mírně odlišného tvaru.

Tab. 6.2 Stanovené hodnoty nejistoty měření pro 95,45% interval pokrytí,  $T = 20^\circ\text{C}$

	$U_{\epsilon_0}$ [ $\mu\text{m}/\text{m}$ ]	$U_{\epsilon_0}$ [MPa]	$U_{\sigma_0}$ [MPa] +L	$U_{\sigma_0}$ [MPa] -L
<b>P1 - HBM_P</b>	$\pm 20,44$	$\pm 13,94$	$[-12,04 ; 12,07]_{95,45\%}$	$[-12,08 ; 11,96]_{95,45\%}$
<b>P2 - HBM_C</b>	$\pm 19,47$	$\pm 16,73$	$[-12,03 ; 12,09]_{95,45\%}$	$[-11,82 ; 11,74]_{95,45\%}$
<b>P3 - TML_P</b>	$\pm 31,81$	$\pm 16,73$	$[-12,99 ; 13,07]_{95,45\%}$	$[-13,22 ; 13,01]_{95,45\%}$
<b>P4 - TML_C</b>	$\pm 49,80$	$\pm 15,79$	$[-14,78 ; 15,09]_{95,45\%}$	$[-15,19 ; 14,63]_{95,45\%}$
<b>P5 - MM_P</b>	$\pm 39,05$	$\pm 13,83$	$[-12,84 ; 13,10]_{95,45\%}$	$[-12,91 ; 12,31]_{95,45\%}$

Tab. 6.3 Stanovené hodnoty nejistoty měření pro 95,45% interval pokrytí,  $T = 90^\circ\text{C}$

	$U_{\epsilon_0}$ [ $\mu\text{m}/\text{m}$ ]	$U_{\epsilon_0}$ [MPa]	$U_{\sigma_0}$ [MPa] +L	$U_{\sigma_0}$ [MPa] -L
<b>P1 - HBM_P</b>	$\pm 22,30$	$\pm 13,95$	$[-12,13 ; 12,21]_{95,45\%}$	$[-11,96 ; 11,86]_{95,45\%}$
<b>P2 - HBM_C</b>	$\pm 21,75$	$\pm 16,85$	$[-12,04 ; 12,01]_{95,45\%}$	$[-12,12 ; 12,01]_{95,45\%}$
<b>P3 - TML_P</b>	$\pm 33,52$	$\pm 14,62$	$[-13,42 ; 13,31]_{95,45\%}$	$[-13,55 ; 13,33]_{95,45\%}$
<b>P4 - TML_C</b>	$\pm 50,55$	$\pm 15,99$	$[-14,87 ; 15,18]_{95,45\%}$	$[-15,22 ; 14,88]_{95,45\%}$
<b>P5 - MM_P</b>	$\pm 40,19$	$\pm 14,10$	$[-12,09 ; 13,31]_{95,45\%}$	$[-13,26 ; 13,18]_{95,45\%}$

Tab. 6.4 Stanovené hodnoty nejistoty měření pro 95,45% interval pokrytí,  $T = 290^\circ\text{C}$

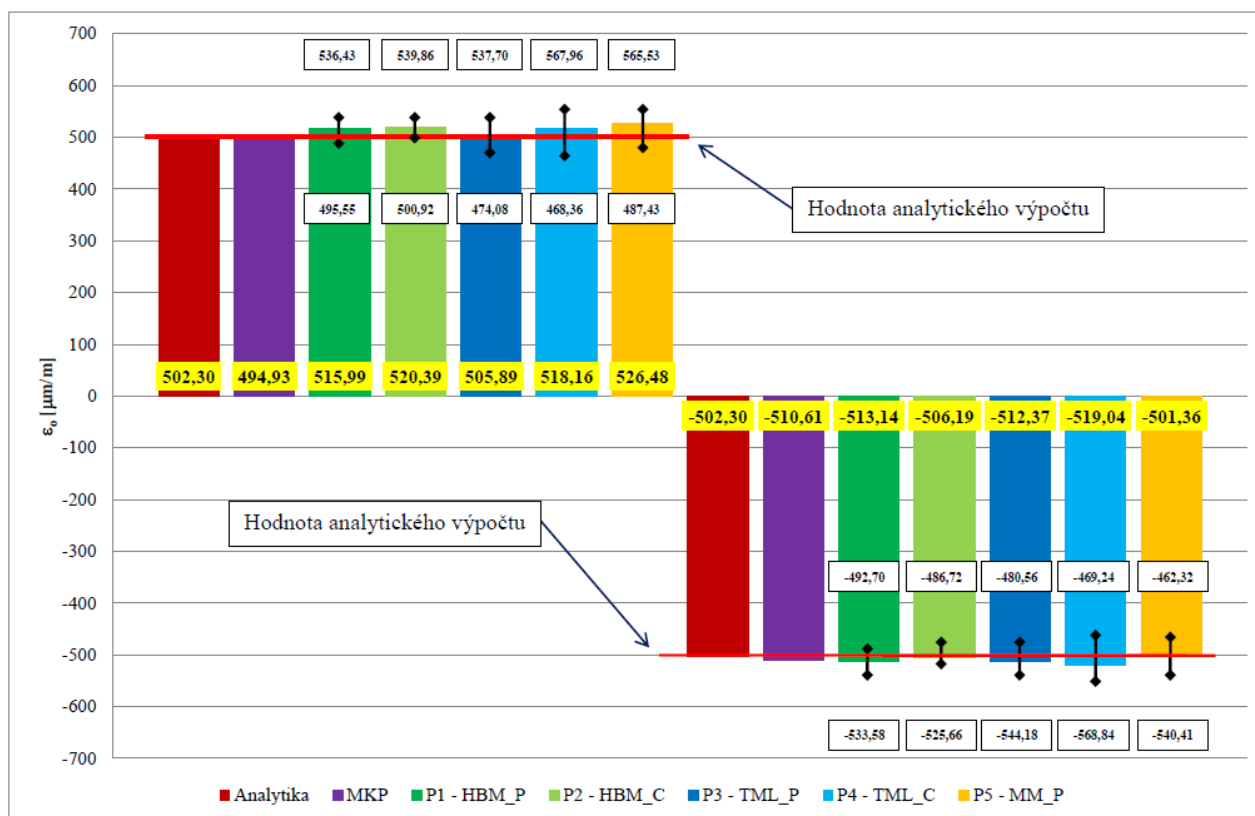
	$U_{\epsilon_0}$ [ $\mu\text{m}/\text{m}$ ]	$U_{\epsilon_0}$ [MPa]	$U_{\sigma_0}$ [MPa] +L	$U_{\sigma_0}$ [MPa] -L
<b>P3 - TML_P</b>	$\pm 35,07$	$\pm 15,18$	$[-13,31 ; 13,63]_{95,45\%}$	$[-13,80 ; 13,58]_{95,45\%}$
<b>P4 - TML_C</b>	$\pm 51,43$	$\pm 16,43$	$[-14,63 ; 15,17]_{95,45\%}$	$[-15,04 ; 14,63]_{95,45\%}$
<b>P5 - MM_P</b>	$\pm 41,32$	$\pm 14,24$	$[-13,25 ; 13,21]_{95,45\%}$	$[-12,78 ; 12,53]_{95,45\%}$

Interval pokrytí 95,45% byl zvolen z důvodu, že se předpokládá, že výsledná nejistota měření má normální (Gaussovo) rozdělení. Dále je zmíněné rozdělení nejčastěji používané v oblasti metrologie a měření. Pro použití vyšší pravděpodobnosti pokrytí, např. 99% nebo 99,73%, není důvod.

## 7 ZHODNOCENÍ, POROVNÁNÍ EXPERIMENTU A VÝPOČTU

Předpokládejme, že hodnota ohybového přetvoření  $\epsilon_0$  získaná analytickým výpočtem je považována za skutečnou hodnotu ohybového přetvoření  $\epsilon_0$  na povrchu nosníku. Potom tedy výsledky získané během experimentu, a to včetně stanoveného rozšíření nejistoty, můžeme porovnat s analytickým a MKP výpočtem.

Z grafu 7.1 až 7.3 je patrné, při zahrnutí stanovené rozšířené nejistoty měření  $U_{\epsilon_0}$  došlo k průniku naměřených hodnot a analytického a MKP výpočtu ohybového přetvoření  $\epsilon_0$ . Pouze při teplotě 20°C u snímače P1 a P2 nedošlo k průniku naměřených hodnot s MKP výpočtem. Nicméně odchylka je velice malá a i MKP výpočet je zatížen taktéž určitou mírou nepřesnosti. V grafech je dále patrné, že hodnota analytického výpočtu se shoduje lépe s naměřenými hodnotami při stahování snímače a naopak hodnota MKP výpočtu se shoduje lépe s naměřenými hodnotami při roztahování snímače.



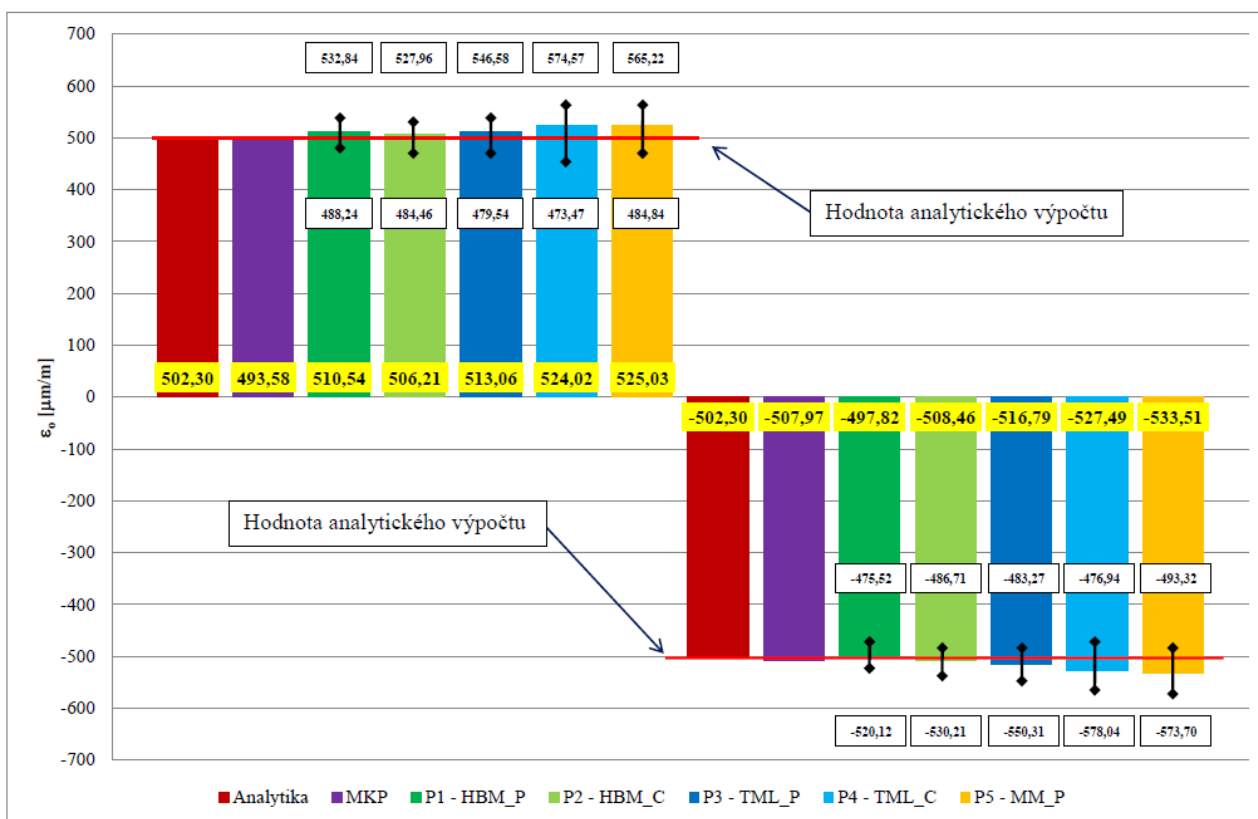
Graf 7.1 Výsledky, porovnání výpočtu a experimentu pro  $L = \pm 5$  mm se zahrnutím nejistoty měření  $U_{\epsilon_0}$ ,  $T = 20^\circ\text{C}$

Po stanovení rozšířené nejistoty měření  $U_{\epsilon_0}$  na jednotlivých snímačích vždy pro jednu teplotu experimentu se předpokládalo, že při porovnání se budou jednotlivé rozšířené nejistoty měření (jejich intervaly výskytu skutečné hodnoty) překrývat. Tento stav pro zvolený matematicko-technický model u snímače P1 a P2 a MKP výpočtu nenastal. Uvažujme potom tedy možné situace, proč nedošlo

k očekávanému průniku (překrytí) rozšířených nejistot měření  $U_{\epsilon_0}$  u ohybového přetvoření  $\epsilon_0$  na snímači P1 a P2.

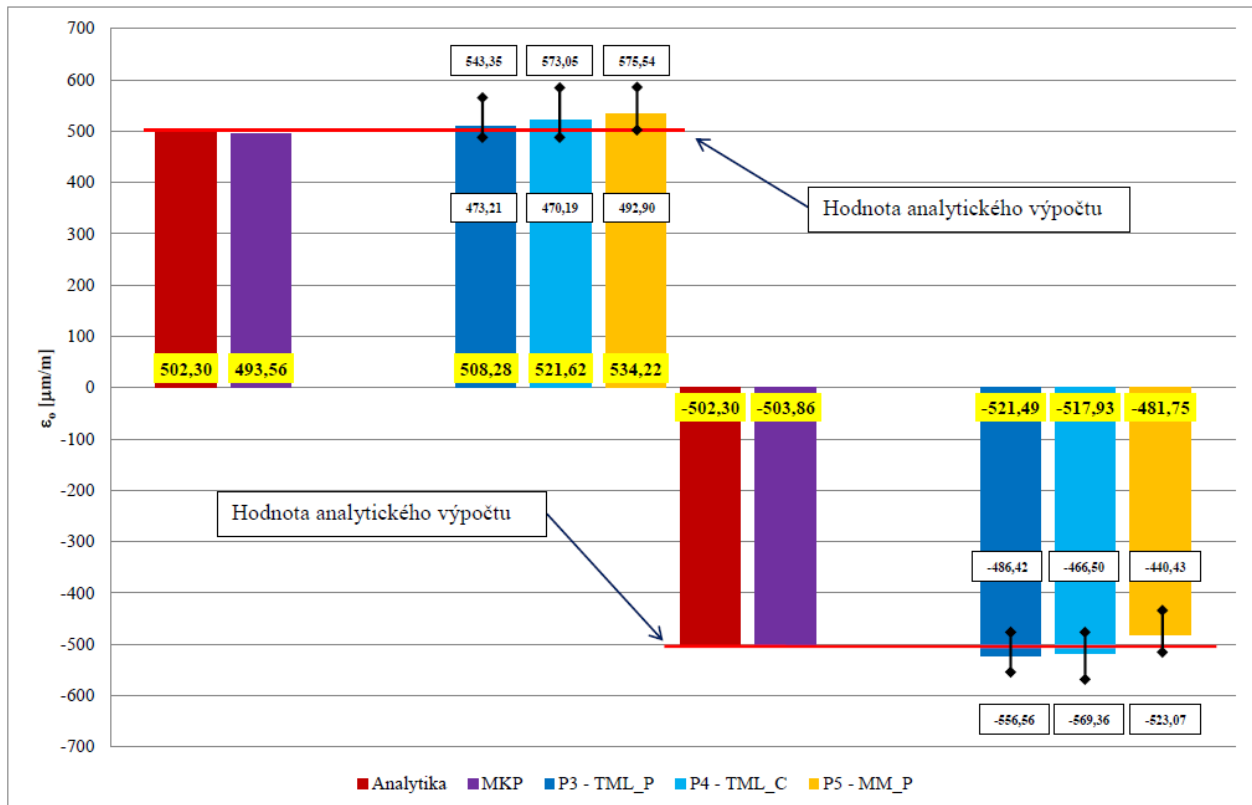
- 1) Byl opomenut nějaký dílčí zdroj(e) nejistoty nebo podhodnocen odhad hodnoty zdroje nejistoty (chyby).
- 2) Koeficient rozšíření odpovídající 95,45% pravděpodobnosti pokrytí skutečné hodnoty je nedostačující. Pokud by se použil koeficient rozšíření  $k = 3$  odpovídající hodnotě 99,73% pravděpodobnosti pokrytí, potom by se hodnota rozšířené nejistoty měření zvýšila o 50%.
- 3) Během kalibrace byly extenzometry zatíženy nějakým parazitním vlivem, který není kompenzován, nebo který zkreslí výsledné chování extenzometru.
- 4) Kombinace výše uvedených situací.

Dále je patrné, že některé stanovené rozšířené nejistoty měření (intervaly výskytu skutečné hodnoty) jsou příliš velké. Což může být zapříčiněno nadhodnocením nějakého dílčího zdroje nejistoty nebo koeficientu rozšíření. Příliš velká stanovená rozšířená nejistota měření může vést ke zpochybnění stanovení nejistoty a samotného měření.



Graf 7.2 Výsledky, porovnání výpočtu a experimentu  $L = \pm 5 \text{ mm}$  se zahrnutím nejistoty měření  $U_{\epsilon_0}$ ,  $T = 90^\circ\text{C}$

Při porovnání naměřených přetvoření na jednotlivých extenzometrech a hodnoty získané analytickým výpočtem se odchylky při teplotě 20° pohybují v rozmezí přibližně 0,2 až 4,8%, při teplotě 90°C v rozmezí přibližně 0,7 až 5,8% a při teplotě 290°C v rozmezí přibližně 1,2 až 6,4%. Při porovnání s MKP výpočtem se intervaly zvětší o přibližně o 0,5 až 2%. Za zmínku stojí i rozdíly naměřených přetvoření na jednotlivých extenzometrech. Při porovnání naměřených hodnot přetvoření na pěti nosnících extenzometrů se při 20°C a 90°C, kde byly použity tenzometry od tří výrobců HBM, TML a MM–Vishay, dosahovaly rozdíly průměrné 4%. Při 290°C, kde byly použity tenzometry TML a MM-Vishay dosahovaly rozdíly až 8%.



Graf 7.3 Výsledky, porovnání výpočtu a experimentu  $L = \pm 5 \text{ mm}$  se zahrnutím nejistoty měření  $U_{\epsilon_0}$ ,  $T = 290^\circ\text{C}$

Dle základních fyzikálních principů mechaniky těles lze nezávisle na sobě posuzovat hodnoty přetvoření a mechanického napětí. Z hlediska stanovení nejistoty měření přetvoření  $u_\epsilon$  a mechanického napětí  $u_\sigma$  nastává otázka, jestli a do jaké míry vstupuje chyba modulu pružnosti  $\delta_E$  (což se dá definovat jako odolnost materiálu vůči deformaci) taktéž do nejistoty měření přetvoření. Při komplexním posouzení nejistoty tenzometrických měření a případných porovnání měřených hodnot se pak jeví mnohem efektivnější pracovat s mechanickým napětím a jeho nejistotou měření.

## 8 ZÁVĚR

V předkládané dizertační práci je uveden rozbor a postup stanovení nejistoty měření přetvoření a mechanického napětí pomocí odporových tenzometrů. V práci je vytvořen matematicko-technický model založený na analytické metodě GUF (nejistota stanovená metodou B) a numerické metodě MMC (Monte Carlo). Vytvořený postup a informace o dílčích nejistotách poskytují dostatečně technicky spolehlivý a věrohodný návod pro stanovení nejistoty měření přetvoření a mechanického napětí získaných z jednoosých tenzometrů, tenzometrických křížů a pravoúhlých růžic.

Základní ideou stanovení nejistoty měření přetvoření a mechanického napětí je kombinace pochopení přesnosti měření odporové tenzometrie, stanovení chyb a vlastností fyzikálních veličin ovlivňujících tenzometrické měření jako celek a následná implementace získaných hodnot dle teorie nejistot měření. Zpráva představuje komplexní a ucelený souhrn úvah, informací, vztahů a algoritmů, které vedou k pochopení přesnosti měření přetvoření a mechanického napětí a na jejichž základě lze stanovit nejistotu měření, respektive míru (ne)presnosti přetvoření a mechanického napětí. Zejména metoda MMC se jeví jako velice efektivní nástroj pro výpočet napjatosti z měřeného přetvoření a následného stanovení nejistoty měření mechanického napětí.

Provedený experiment, který porovnává naměřené hodnoty ohybového přetvoření a stanovených nejistot měření z pěti různých tenzometrů od tří celosvětových výrobců při teplotě 20°C, 90°C a 290°C s analytickým a MKP výpočtem doplňuje teoretické informace o reálné měření a stanovení nejistoty měření. Výsledky experimentu potvrdily komplikovanost a složitost tenzometrických měření a s tím souvisejících chyb a nejistot měření. Provedený experiment v laboratorním prostředí byl realizován na hrotovém snímači posuvu (extenzometru), který pracuje na elementárním principu zatížení ohybem.

Při vyhodnocení naměřených hodnot a vzájemném porovnání ohybového přetvoření mezi jednotlivými snímači, analytickým a MKP výpočtem byly indikovány odchylky v řádu jednotek %. Mezi snímači s tenzometry HBM, TML a MM-Vishay dosahovaly odchylky při teplotě 20°C a 90°C průměrné hodnoty 4%. Maximální odchylka byla dosažena při teplotě 290°C a dosahovala hodnoty 8%. Odchylky mezi naměřenými hodnotami a analytickým výpočtem při teplotě 20°C se pohybovaly v rozmezí 0,2 až 4,8%, při teplotě 90°C se pohybovaly v rozmezí 0,7 až 5,8% a při teplotě 290°C v rozmezí 1,2 až 6,4%. Při porovnání naměřených hodnot ohybového přetvoření se zahrnutím příslušné stanovené rozšířené nejistoty měření došlo k průniku hodnot na všech extenzometrech s analytickým a MKP výpočtem ohybového přetvoření, a to pro všechny teploty. Pouze ve dvou případech při teplotě 20°C u snímače P1 a P2 nedošlo ke zmíněnému průniku u MKP výpočtu, to znamená, že stanovená rozšířená nejistota měření byla nejspíš podhodnocena.

## SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] KOBAYASHI, Albert S.: Handbook on experimental mechanics. 2nd rev. ed. Bethel, CT, USA: SEM, c1993. ISBN 1560816406.
- [2] HOFFMAN, Karl. An Introduction to Measurements using Strain Gages, Publisher: Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH, Darmstadt 1989, 273s.
- [3] TREBUŇA, František a ŠIMČÁK, František: Průručka experimentálnej mechaniky. Vydanie I. Košice: TypoPress, 2007, 1526 s. ISBN 970-80-8073-816-7.
- [4] JCGM 100:2008 – GUM 1995 with minor corrections. Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in Measurements. BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP, OIML, 2008.
- [5] JCGM 101:2008. Evaluation of measurement data – Supplement1 to the „Guide to the expression of uncertainty in measurement” – Propagation of distributions using a Monte Carlo method, 2008.
- [6] JCGM 102:2011. Evaluation of measurement data – Supplement2 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” – Extension to any number of output quantities, 2011.
- [7] M. G. Cox, M. P. Dainton, and P. M. Harris, “Software specifications for uncertainty evaluation and associated statistical analysis”, Technical Report CMSC 10/01, National Physical Laboratory, Teddington.UK, 2001.
- [8] CHUDÝ, Vladimír: *Meranie technických veličín*. 1. vyd. V Bratislave: Slovenská technická univerzita v Bratislave, 1999, 688 s. Edícia vysokoškolských učebníc. ISBN 80-227-1275-2.
- [9] ŠÍRA, Martin: *Jak na nejistoty metodou Monte Carlo jednoduše a bez drahých programů* [online]. Elektrevue, 2014, (2) [cit. 2017-04-18]. ISSN 1213-1539.
- [10] MONTERO, W., et al: Uncertainties associated with strain-measuring systems using resistance strain gauges. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 2011, 46.1: 1-13.
- [11] Arpin-Pont J., Gagnon M., Tahan S. A., Coutu A. and Thibault D.: 2015 Methodology for estimating strain gauge measurement biases and uncertainties. *J Strain Analysis*. 50 (2015) 40-50
- [12] Pople J.: Errors and uncertainties in strain measurement. *Strain gauge technology*. 2nd ed. London: Elsevier Applied Science, 1992.
- [13] Pople J.: Errors in strain measurement – the human factor (or how much do I contribute?). *Exp Techniques* 1984; 8(9): 34–38.
- [14] JAREŠ, Vojtěch: Základní zkoušky kovů a jejich teorie. Vyd. 1. Praha: Academia, 1966. 210 s.
- [15] NTD A.S.I., Sekce II. Charakteristiky materiálů pro zařízení a potrubí jaderných elektráren typu VVER. Asociace strojních inženýrů, Praha, 2013, ev. č. 1.
- [16] JANÍČEK, Přemysl, Emanuel ONDRÁČEK, Jan VRBKA a Jiří BURŠA: *Mechanika těles: Pružnost a pevnost 1*. třetí přepracované vydání. Brno, 2004. ISBN 80-214-2592-x.
- [17] PTÁČEK, Luděk: *Nauka o materiálu I*. 2. opr. a rozš. vyd. Brno: CERM, 2003, 516 s. ISBN 80-720-4283-1.
- [18] J. Borndhardt: ELEKTRONIK 16 Nr. 9/1967, Arbeitsblatt Nr. 19.
- [19] JAROŠ, Petr: Analytické řešení deformací při ohybu nosníku namáhané rovnoměrným momentem. 2017. 2 s.

## SEZNAM NEJDŮLEŽITĚJŠÍCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

Symbol	Jednotka	Popis
$\mu$	[-]	Poissonovo číslo
E	[10 <sup>5</sup> MPa]	Modul pružnosti v tahu
L, u	[mm]	Dráha, zatížení, stažení – rozevření extenzometru, posuv
R <sub>e</sub> (R <sub>p0,2</sub> )	[MPa]	Mez kluzu, smluvní mez kluzu
T	[°C]	Teplota
c <sub>i</sub> , A <sub>i</sub>	[-]	Koeficient citlivosti nebo parciální derivace
U	[-]	Rozšířená nejistota
u, u(x <sub>i</sub> )	[-]	Standardní nejistota
u( $\bar{y}$ )	[-]	Výběrová směrodatná odchylka
M	[-]	Počet opakování (u metody Monte Carlo)
$\chi$	[-]	Typ rozdělení
u <sub>A</sub>	[-]	Nejistota stanovená metodou A, nejistota typu A
u <sub>B</sub>	[-]	Nejistota stanovená metodou B, nejistota typu B
u <sub>c</sub>	[-]	Kombinovaná standardní nejistota
$\bar{y}$	[-]	Aritmetický průměr, průměrná hodnota
u <sub><math>\mu</math></sub> , u <sub>E</sub> , u <sub><math>\varepsilon</math></sub> , u <sub><math>\sigma</math></sub>	[-]	Nejistota $\mu$ , E, přetvoření a mechanického napětí
$\delta$	[%]	Chyba
$\varepsilon$	[ $\mu\text{m}/\text{m}$ ]	Přetvoření, relativní přetvoření, deformace
$\varepsilon_0$	[ $\mu\text{m}/\text{m}$ ]	Ohybové přetvoření
$\varepsilon_{1,2}$	[ $\mu\text{m}/\text{m}$ ]	Hlavní normálové přetvoření
$\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$	[ $\mu\text{m}/\text{m}$ ]	Měřené přetvoření na tenzometrické růžici ve směru a, b, c
$\varepsilon_{\text{app}}$	[ $\mu\text{m}/\text{m}$ ]	Zdánlivé přetvoření (apparent strain)
$\varepsilon_{\text{I,II}}$	[ $\mu\text{m}/\text{m}$ ]	Hlavní normálové přetvoření – tenzometrické růžice
$\sigma_{1,2}$	[MPa]	Hlavní normálové napětí – tenzometrické kříže
$\sigma_{\text{I,II}}$	[MPa]	Hlavní normálové napětí – tenzometrické růžice
$\sigma_N$	[MPa]	Normálové napětí
$\varphi_H$	[°]	Úhel mezi $\sigma_{\text{I}}$ , ( $\sigma_{\text{II}}$ ) a ose $\sigma_x$ , ( $\sigma_y$ )

Zkratka	Význam
CDF	Cumulative distribution function (kumulativní distribuční funkce)
PDF	Probability density function (funkce hustoty pravděpodobnosti)
GUF	Gum Uncertainty Framework (Metoda na výpočet nejistot)
GUM	Guide to the Expression of Uncertainty in Measurements (Návod pro vyjadřování nejistot v měření)
P	Označení hrotového snímače posuvu (extenzometru)
C, P	Zapojení tenzometru do celomostu, půlmostu
MCM, MMC	Monte Carlo Method, (Metoda Monte Carlo)
s.c.i.	Shortest coverage interval (nejkratší interval pokrytí)

## AUTOROVO CURRICULUM VITAE

Jméno a příjmení: Pavel Dokoupil  
Datum narození: 2. 12. 1985  
Národnost: česká  
Trvalé bydliště: Nad Přehradou 1369/3, Brno-Bystrc  
Telefon: +420 724 446 996  
Email: dokoupilp@uam.cz

### Vzdělání:

2014 - dosud: doktorské studium: VUT v Brně, Fakulta strojního inženýrství, obor Konstrukční a procesní inženýrství  
2012 – 2014: magisterské studium: VUT v Brně, Fakulta strojního inženýrství; obor Výrobní stroje, systémy a roboty; diplomová práce: Měření napjatosti ve spirále vodní turbíny pomocí tenzometrů  
2009 – 2012: bakalářské studium: VUT v Brně, Fakulta strojního inženýrství, obor Stavba strojů a zařízení; bakalářská práce: Modelový výzkum vodních turbín  
2005 – 2008: bakalářské studium: VUT v Brně, Fakulta strojního inženýrství, obor Aplikovaná informatika a řízení; studium nedokončeno  
2001 – 2005: Střední průmyslová škola a Vyšší odborná škola technická Brno, Sokolská 1, obor Technické Lyceum

### Pracovní zkušenosti:

2012 – dosud: Ústav aplikované mechaniky Brno, s.r.o. – Samostatný zkušební technik ve strojírenství, výzkumu a vývoji, Manažer kvality a zástupce vedoucího AZL č. 1228  
2008 – 2012: ČKD Blansko Holding, a.s. – Zkušební technik

### Odborné zaměření:

- Zkoušky a měření v oblasti mechaniky těles (statické, dynamické, únavové a destrukční), měření vibrací a hluku, síly a hmotnosti, residuálního napětí, tenzometrie a krouticího momentu. Zkoušky a měření procesních veličin jako je teplota, průtok a tlak média
- Experimentální mechanika
- Měření dynamiky energetických strojů a jejich zařízení
- Měření průtokových a dynamických vlastností hydraulických strojů a hydrotechnických zařízení

### Projekty:

Hlavní řešitel projektu TAČR – TH01011352: Inovativní výzkum zpětných klappek pro extrémní provozní podmínky v energetice

## ABSTRAKT

Práce se zabývá stanovením nejistoty měření přetvoření a mechanického napětí pomocí odporových tenzometrů. V práci jsou uvedeny dvě metody pro stanovení nejistoty měření. Metody GUF a MMC jsou následně aplikovány na měření prováděná odporovými tenzometry. Stanovení nejistoty měření bylo provedeno pro přetvoření měřené jednoosými a dvojosými tenzometry. Nejistota mechanického napětí byla stanovena pro jednoosé tenzometry, kříže a růžice.

Pro měřené přetvoření a vypočtené mechanické napětí byly vytvořeny universální matematicko–technické modely, které lze následně aplikovat na standardní i speciální měření, jako jsou vysokoteplotní měření nebo měření v radiačním poli. Jednotlivé dílčí složky nejistoty přetvoření a mechanického napětí jsou rozebrány z hlediska velikosti chyby a tvaru pravděpodobnostní funkce, které mohou nabývat. Největší důraz byl kladen na chyby ovlivňující měřené přetvoření, jako jsou vlastnosti tenzometru, instalace a provozní vlivy, vnější a časové vlivy a vliv měřeného objektu. Chyby ovlivňující mechanické napětí jsou uvedeny a rozebrány dvě, a to chyba modulu pružnosti a chyba Poissonova čísla.

Práce je koncipována jako souhrn informací vztahující se k chybám měření pomocí odporových tenzometrů a metod pro stanovení nejistoty měření tak, aby příslušný experimentátor mohl zde obsažené informace a metody aplikovat na příslušná měření. V závěrečných kapitolách jsou pro jednoosou a dvojosou napjatost uvedeny reprezentativní příklady stanovení nejistoty měření napjatosti dle metody GUF a MMC. Dále je proveden experiment, který porovnává naměřené hodnoty přetvoření a stanovených nejistot měření z několika různých typů tenzometrů při různých teplotách s teoretickým výpočtem přetvoření. Experiment byl proveden na snímači posuvu, který pracuje na elementárním principu zatížení ohybem.

## **ABSTRACT**

The dissertation thesis deals with the determination of uncertainty of strain measurement and the stress using resistance strain gages. You can find two methods to define the uncertainty in the thesis, GUF and MMC, and both are applied for measurements carried out with resistance strain gages. Definition of the measurement uncertainty was set for the strain measured by uniaxial and biaxial strain gages. The uncertainty of the stress was defined for linear strain gages, T Rosettes and Rosettes.

There were universal mathematic-technical models defined to measure strain and stress, these models can be used either for standard and special measurements i.e. high-temperature, or for measurements in radiation field. Each part of the strain uncertainty and stress is analyzed from the point of view of a size of uncertainty and a form of probability of the function that strain and stress can adopt. The maximum focus was dedicated to the mistakes influencing measured strain like strain gage properties, installation and operating influences, external influences, time effects and the influence of the measured object. There are two mistakes influencing the stress described and analyzed in the thesis, the mistake of the Young's modulus of elasticity and the mistake of the Poisson's ratio.

The thesis is conceived as a complex of information related to the measurement uncertainties using the resistance strain gages and methods of defining the measurement uncertainty in a way that the experimenter can apply the gained info and methods in the required measurements. The final chapters give representative examples to define measurement uncertainties for uniaxial and biaxial stress applying GUF and MMC method. The thesis also includes the experiment that compares measured values of strain and measurement uncertainties, using several different types of strain gages at different temperatures, with theoretical calculation of strain. The experiment was carried out using the displacement sensor that works on an elementary principle of bending load.