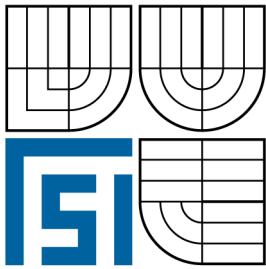


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND
BIOMECHANICS

HODNOCENÍ STABILITY OBECNÝCH KONCENTRÁTORŮ NAPĚTÍ VE VRSTEVNATÝCH MATERIÁLECH

STABILITY ASSESSMENT OF GENERAL STRESS CONCENTRATORS IN LAYERED
MATERIALS

DIZERTAČNÍ PRÁCE
DOCTORAL THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

Ing. LUCIE ŠESTÁKOVÁ

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

prof. RNDr. ZDENĚK KNĚSL, CSc.

© Lucie Šestáková, 2009

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Fakulta strojního inženýrství
Vysoké učení technické v Brně
Technická 2, 616 69 Brno

a

Ústav fyziky materiálů
Akademie věd České republiky, v. v. i.
Žižkova 22, 616 62 Brno

sestakova.lucie@seznam.cz

Abstrakt: Tato disertační práce vznikla pod vedením mého školitele prof. RNDr. Zdeňka Knésly, CSc. a současným dohledem mého školitele specialisty doc. Ing. Luboše Náhlíka, Ph.D. a zabývá se problematikou šíření trhlin v blízkosti a přes materiálovém rozhraní. Nejprve jsou uvedeny základní pojmy nezbytné pro orientaci ve sledované problematice a jsou formulovány cíle výzkumu. Následuje rozsáhlý popis metodiky řešení zadaného problému včetně formulací kritérií stability pro trhlinu s vrcholem na rozhraní. Zásadní část tvoří výsledky prezentované ve formě obecné parametrické analýzy a ukázky praktické aplikace uváděných postupů. Významná část práce spočívá taktéž v podrobné diskuzi výsledků, formulovaných závěrech a navržení možných směrů budoucího výzkumu v této oblasti s návazností na tuto práci. Publikované výsledky a závěry předkládané práce mohou usnadnit spolehlivé hodnocení životnosti konstrukcí sestávajících z vrstevnatých materiálů.

Klíčová slova: Šíření trhlin, bi-materiálové rozhraní, kritéria stability, vrstevnaté polymerní trubky, keramické lamináty

***Abstract:** This Ph.D. Thesis has been created under my supervisors prof. RNDr. Zdeněk Knésl, CSc. and doc. Ing. Luboš Náhlík, Ph.D. and deals with the issue of cracks propagation near and through a material interface. First, basic terms related to the issue studied are explained and main research goals are formulated. Subsequently, a large part of methodology of the problem solution (including presentation of several stability criteria for a crack terminating at an interface) is described. Then, theoretical results are presented in the form of general parametric analysis and especially very important particular applications of the methods follow. Finally, the results published are discussed, conclusions formulated and new research possibilities suggested. The results and conclusions presented can facilitate the reliable life time estimation of layered materials and structures.*

***Key words:** Crack propagation, bi-material interface, stability criteria, multilayer polymer pipes, ceramic laminates*

ŠESTÁKOVÁ, L. Hodnocení stability obecných koncentrátorů napětí ve vrstevnatých materiálech. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2009. 124 s. Vedoucí dizertační práce prof. RNDr. Zdeněk Kněsl, CSc.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto disertační práci zpracovala samostatně a pouze na základě konzultací s mým školitelem prof. RNDr. Zdeňkem Knéslem, CSc., školitelem specialistou doc. Ing. Lubošem Náhlíkem, Ph.D. a s použitím uvedené literatury.

Šestáková Lucie

V Leobenu dne 2. září 2009

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala pracovníkům a kolegům z ÚFM AV ČR, v. v. i., ÚMTMB FSI VUT v Brně a také z STM FAST VUT v Brně za jejich dlouholetou podporu. Největší dík za cenné rady a vždy přátelský přístup patří mému školiteli prof. RNDr. Zdeňku Knéslovi, CSc. Také velmi děkuji svému školiteli specialistovi doc. Ing. Luboši Náhlíkovi, Ph.D. Za finanční podporu patří dík Grantové agentuře ČR a Grantové agentuře AV ČR. Za psychickou a mnohdy významnější podporu si obrovské díky zaslouží má nejbližší rodina. Především za nekončící trpělivost děkuji své životní lásce Jariskovi.

OBSAH

| | |
|--|-----------|
| 1 ÚVOD | 9 |
| 2 ANALÝZA ŘEŠENÉ PROBLEMATIKY | 10 |
| 2.1 Základní pojmy | 10 |
| 2.1.1 <i>Lineárně elastická lomová mechanika</i> | 10 |
| 2.1.2 <i>Součinitel intenzity napětí</i> | 12 |
| 2.1.3 <i>T-napětí</i> | 13 |
| 2.1.4 <i>Faktor hustoty deformační energie</i> | 14 |
| 2.1.5 <i>Otevření trhliny COD</i> | 14 |
| 2.1.6 <i>Otevření ve vrcholu trhliny CTOD</i> | 14 |
| 2.1.7 <i>Kritéria stability</i> | 17 |
| 2.1.8 <i>Obecný singulární koncentrátor napětí</i> | 17 |
| 2.2 Vymezení sledované problematiky | 18 |
| 2.2.1 <i>Trhlina s vrcholem v blízkosti bi-materiálového rozhraní</i> | 18 |
| 2.2.2 <i>Trhlina s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní</i> | 19 |
| 3 FORMULACE PROBLÉMU, CÍLE PRÁCE | 22 |
| 4 STATE-OF-ART | 22 |
| 4.1 Kritéria stability pro trhlinu s vrcholem na rozhraní | 23 |
| 4.2 Vrstevnaté materiály | 25 |
| 5 METODIKA ŘEŠENÍ | 26 |
| 5.1 Napjatost v okolí vrcholu trhliny | 26 |
| 5.1.1 <i>Trhlina obecně orientovaná k materiálovému rozhraní</i> | 26 |
| 5.1.2 <i>Trhlina kolmá k materiálovému rozhraní</i> | 30 |
| 5.2 Kritéria stability | 32 |
| 5.2.1 <i>Kritérium středního napětí</i> | 34 |
| 5.2.2 <i>Kritérium založené na velikosti plastické zóny před vrcholem trhliny</i> | 35 |
| 5.2.3 <i>Kritérium založené na faktoru hustoty deformační energie</i> | 37 |
| 5.2.4 <i>Kritérium otevření ve vrcholu trhliny CTOD</i> | 38 |
| 5.2.5 <i>Kritérium otevření trhliny COD</i> | 42 |
| 5.2.6 <i>Kritérium otevření trhliny na povrchu součásti CMOD</i> | 42 |
| 5.2.7 <i>Volba délkových parametrů v kritériích stability</i> | 43 |
| 5.2.8 <i>Diskuze a zhodnocení uvedených kritérií stability</i> | 45 |
| 5.3 Směr šíření trhliny | 46 |
| 5.3.1 <i>Kritérium maximálních tangenciálních napětí (MTS kritérium)</i> | 46 |
| 5.3.2 <i>Kritérium minimálního faktoru hustoty deformační energie (SEDF kritérium)</i> | 47 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 5.3.3 | <i>Jiné přístupy k odhadu směru dalšího šíření trhliny z rozhraní</i> | 47 |
| 5.4 | Metoda váhových funkcí | 49 |
| 6 | VÝSLEDKY | 49 |
| 6.1 | Teoretické studie | 50 |
| 6.1.1 | <i>Trhlina v blízkosti materiálového rozhraní</i> | 50 |
| 6.1.2 | <i>Kolmá trhlina s vrcholem na rozhraní bi-materiálového tělesa</i> | 52 |
| 6.1.3 | <i>Směr dalšího šíření trhliny z bi-materiálového rozhraní</i> | 54 |
| 6.2 | Aplikace zobecněných postupů LELM na vícevrstvé trubky | 56 |
| 6.2.1 | <i>Geometrie a materiálové vlastnosti</i> | 56 |
| 6.2.2 | <i>Vzorky pro experimentální určení lomové houževnatosti</i> | 58 |
| 6.2.3 | <i>Numerický model</i> | 60 |
| 6.2.4 | <i>K-kalibrační křivky</i> | 60 |
| 6.2.5 | <i>T- napětí</i> | 65 |
| 6.2.6 | <i>Trhlina s vrcholem na rozhraní</i> | 67 |
| 6.3 | Aplikace zobecněných postupů LELM na keramické lamináty | 73 |
| 6.3.1 | <i>Keramické lamináty I (Al_2O_3/ZrO_2)</i> | 73 |
| 6.3.2 | <i>Keramické lamináty II (ATZ/AMZ)</i> | 78 |
| 7 | DISKUZE VÝSLEDKŮ A PERSPEKTIVY DALŠÍHO VÝZKUMU | 91 |
| 7.1 | Teoretické studie | 91 |
| 7.2 | Praktické aplikace | 92 |
| 7.2.1 | <i>Vícevrstvé polymerní trubky</i> | 92 |
| 7.2.2 | <i>Keramické lamináty I (Al_2O_3/ZrO_2)</i> | 94 |
| 7.2.3 | <i>Keramické lamináty II (ATZ/AMZ)</i> | 95 |
| 7.3 | Perspektivy dalšího výzkumu | 97 |
| 8 | ZÁVĚREČNÉ SHRnutí | 98 |
| 8.1 | Teoretické studie | 98 |
| 8.2 | Praktické aplikace | 98 |
| 8.2.1 | <i>Vícevrstvé polymerní trubky</i> | 98 |
| 8.2.2 | <i>Keramické lamináty</i> | 99 |
| | SEZNAM POUŽITÉHO OZNAČENÍ A ZKRATEK | 101 |
| | LITERATURA | 104 |
| | VLASTNÍ PUBLIKOVANÉ PRÁCE | 114 |
| | PŘÍLOHA | 117 |
| | CURRICULUM VITAE | 124 |

1 ÚVOD

Posouzení vzniku a případného šíření trhlin v konstrukcích je dnes běžnou součástí jejich návrhového procesu. Zabránit samotnému vzniku trhlin v konstrukcích je obtížné a často i ekonomicky nevýhodné. Výroba ideálních materiálů bez vměstků a jiných defektů by byla příliš nákladná a mnohdy i nemožná. Hledají se proto jiná východiska a řešení, jak předejít či alespoň snížit následky selhání konstrukcí vlivem existence poruch typu trhlin.

Současným trendem při návrhu nových konstrukčních materiálů se stává koncepce jejich vzájemného vrstvení. Ukazuje se, že vrstevnaté materiály (např. keramické případně polymerové kompozity nebo v praxi velice často využívaná kombinace podklad – ochranná vrstva) vykazují lepší lomově mechanické vlastnosti, než mají původní materiály jednotlivých složek. Vlivem přítomnosti rozhraní v součásti a s tím související skokové změny materiálových vlastností konstrukce dochází k přerozdělení napětí v tělese a tím k ovlivnění chování případné trhliny. Lze konstatovat, že právě existence rozhraní v kompozitu může v některých případech působit jako bariéra proti šíření trhliny, jindy může působit jako místo iniciace trhliny.

Zatímco popis šíření trhliny v homogenních tělesech je dobře znám a dokumentován, v případě trhliny s vrcholem blízko materiálového rozhraní je určení lomově mechanických parametrů často problematické a může být zatíženo větší chybou. V literatuře se poměrně hojně studuje případ trhliny šířící se v rozhraní mezi dvěma materiály. Případ trhliny šířící se přes rozhraní mezi dvěma materiály je v literatuře zastoupen řídce, není plně popsán a proto je námětem autorčiny doktorské práce.

V technické praxi je klíčovým problémem obvykle případ, kdy se trhlina šíří přes jeden materiál, dosáhne materiálového rozhraní a vytvoří tak konfiguraci s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní. Pro odhad zbytkové životnosti v těchto případech je nezbytné rozhodnout, ke které z následujících možností dojde: zda se trhlina bude šířit přes rozhraní do druhého materiálu, zda se na rozhraní zastaví, nebo zda se trhlina od rozhraní „odrazí“, či zda se začne šířit podél něj a způsobí tím delaminaci obou vrstev [82], [86].

Tato práce se zabývá problematikou trhlin s vrcholem v blízkosti bi-materiálového rozhraní, včetně konfigurace trhliny s vrcholem přímo na rozhraní. Trhlina s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní reprezentuje (stejně jako např. V-vrub) tzv. obecný singulární koncentrátor napětí a pro popis jejího chování je nutné zobecnění klasických postupů lomové mechaniky. S návazností na požadavky technické praxe je cílem práce popsat chování takovýchto trhlin, ať už co se týče rychlosti jejich šíření, směru dalšího šíření nebo stabilitních kritérií umožňujících rozhodnout o samotném šíření či nešíření trhliny.

Práce obsahuje kritický teoretický rozbor problematiky a je zaměřena převážně prakticky. Jejím cílem je, mimo jiné, navrhnout a aplikovat vhodné postupy a kritéria popisující chování trhlin v kompozitních materiálech. Praktická část práce je zaměřena na keramické a polymerní kompozity - určování jejich lomových parametrů numericky, návrh zkušebních těles pro určení jejich lomových parametrů experimentálně, odhad směru dalšího šíření trhliny při průchodu přes rozhraní pomocí metody konečných prvků, případně srovnání se směry šíření pozorovanými při experimentech.

2 ANALÝZA ŘEŠENÉ PROBLEMATIKY

V následující kapitole budou vysvětleny pojmy a přístupy lomové mechaniky, které jsou teoretickým základem další práce.

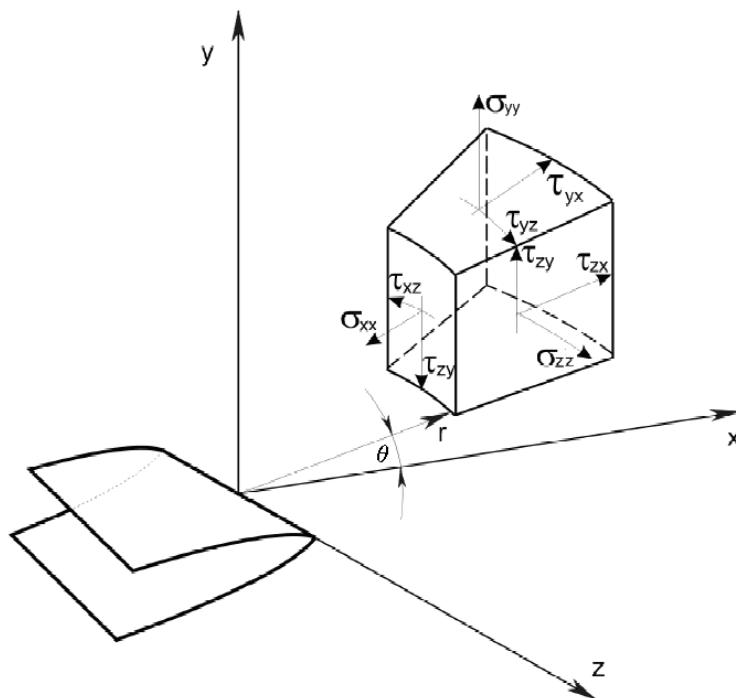
2.1 Základní pojmy

Celá práce předpokládá platnost a podmínky lineárně elastické lomové mechaniky (LELM). Jedná se o oblast lomové mechaniky, která se považuje v případě homogenních těles v podstatě za uzavřenou. Přesto zde v souvislosti s nehomogenitami stále existuje řada neobjasněných problémů.

2.1.1 Lineárně elastická lomová mechanika

Lineárně elastická lomová mechanika [1], [69], [151] předpokládá platnost Hookova zákona, tzn. lineární závislosti mezi napětím a přetvořením. S tím souvisí to, že její použití je omezeno na případy, kdy v okolí vrcholu trhliny nedochází ke vzniku plastických deformací a těleso se deformuje pružně, resp. kdy rozměr plastické zóny v oblasti vrcholu trhliny je mnohem menší než délka trhliny, příp. jiný charakteristický rozměr tělesa (small scale yielding). I přes toto omezení je koncepce LELM použitelná ve velkém množství praktických případů.

Lomová mechanika vychází z mechaniky kontinua a k popisu napjatosti v okolí vrcholu trhliny využívá klasickou teorii pružnosti. S rostoucí složitostí konfigurace tělesa s trhlinou, složitostí zatížení, apod. roste také obtížnost určení pole napětí a deformací. V řadě praktických problémů však zcela postačuje omezení se při řešení na dvojrozměrný problém – rovinnou napjatost či rovinnou deformaci.



Obr. 1 Lokální souřadnicové systémy v okolí vrcholu trhliny (kartézský a polární)

Výpočet rozložení napětí v okolí vrcholu trhliny (viz obr. 1) vychází z předpokladu, že jsou splněny rovnice rovnováhy, rovnice kompatibility vyjadřující spojitost materiálu

deformovaného tělesa a konstitutivní vztahy (Hookeův zákon). Úpravou soustavy zmiňovaných rovnic (viz např. [1], [68], [69]) – vzájemným dosazením – lze odvodit rovnici (1), tj. že součet složek napětí σ_{xx} a σ_{yy} je harmonickou funkcí proměnných x a y .

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0 . \quad (1)$$

V rovnici (1) představuje ∇^2 Laplaceův operátor.

V dalším řešení se pro vyjádření složek tenzoru napětí využívá zavedení tzv. Airyho funkce napětí $\Phi(x,y)$, viz např. [20], která zajišťuje identické splnění rovnic rovnováhy a zároveň je řešením rovnice (1).

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} , \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} , \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x \partial y} . \quad (2)$$

Jsou-li složky tenzoru napětí vyjádřeny v souladu s rovnicemi (2), po jejich dosazení do vztahu (1) vznikne biharmonická rovnice ve tvaru:

$$\frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial y^4} = \nabla^2 \nabla^2 \Phi(x, y) = \nabla^4 \Phi(x, y) = 0 . \quad (3)$$

Přístupů k řešení rovnice (3) existuje více, z nichž nejznámější a nejpoužívanější jsou Williamsův [154], [155] a Muschelišviliho [84].

Muschelišviliho řešení pomocí komplexních potenciálů

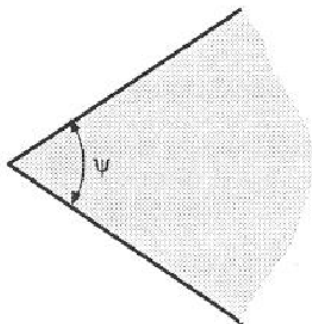
Muschelišvili [84] dokázal, že jakoukoli biharmonickou funkci $\Phi(x,y)$ lze vyjádřit pomocí dvou funkcí komplexní proměnné $z = x + iy$. Na jeho práci navázal Westergaard [153] a dokázal, že pro řadu symetrických úloh je dostačující řešení pomocí jediné funkce komplexní proměnné.

Williamsovo řešení

Williams [154], [155] dokázal v případě trhliny obecnou platnost singularity $r^{-1/2}$. Řešení rovnice (3) hledal ve tvaru nekonečné řady

$$\Phi(x, y) = \sum_k A_k r^{\lambda_k} f_k(\theta) . \quad (4)$$

Williams našel řešení rozložení lokálních polí napětí v rohu stěny při různých okrajových podmínkách a úhlu rohu stěny ψ (viz obr. 2), přičemž trhlina byla pouze speciálním případem jím analyzovaného problému ($\psi = 2\pi$).



Obr. 2 Roh stěny o úhlu ψ analyzovaný Williamsem

Aplikací okrajových podmínek charakterizujících volné líce trhliny získal tzv. Williamsův rozvoj popisující napětí v blízkosti vrcholu trhliny:

$$\sigma_{ij} = \frac{A_1}{\sqrt{r}} f_{ij}^{(1)}(\theta) + A_2 f_{ij}^{(2)}(\theta) + A_3 \sqrt{r} f_{ij}^{(3)}(\theta) + \dots, \quad (5)$$

kde (r, θ) jsou radiální souřadnice s počátkem ve vrcholu trhliny, A_k konstanty a $f_{ij}^k(\theta)$ známé funkce úhlu θ .

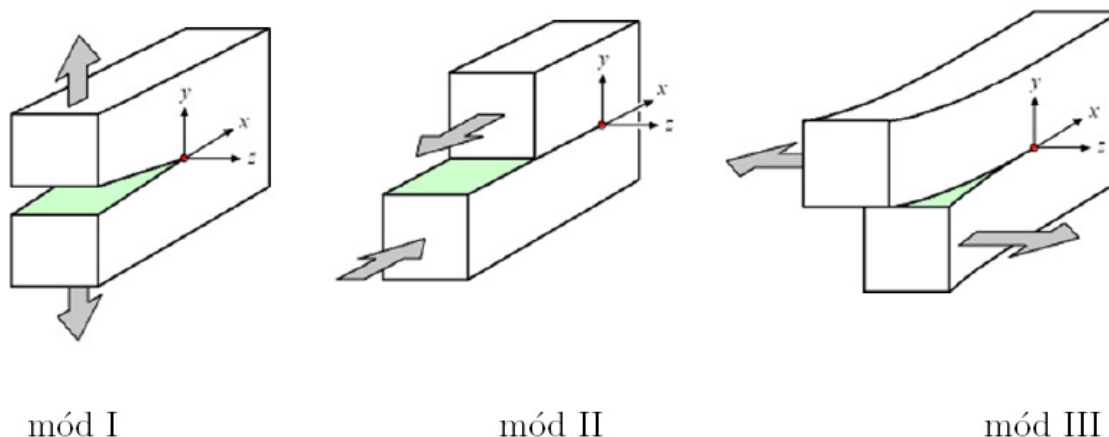
Protože chování trhliny je ovlivněno pouze malou oblastí v okolí jejího vrcholu, ovlivňuje velikost napětí nejvíce první (singulární) člen rozvoje (5). Proto se obvykle využívá pro popis napjatosti v okolí vrcholu trhliny pouze tento člen se singularitou typu $r^{-1/2}$. V LELM se konstanta A_1 singulárního členu používá obvykle ve tvaru:

$$A_1 = \frac{K}{\sqrt{2\pi}}, \quad (6)$$

kde K je tzv. součinitel intenzity napětí.

2.1.2 Součinitel intenzity napětí

Součinitel intenzity napětí charakterizuje pole napětí v okolí vrcholu trhliny. Jedná se o konstantu úměrnosti. Obecně se rozlišují tři základní módy zatěžování tělesa s trhlinou (viz obr. 3) a s nimi související příslušné veličiny K_I , K_{II} , K_{III} .



Obr. 3 Módy zatěžování tělesa s trhlinou

V lineárně elastické lomové mechanice platí princip superpozice, proto pro složky napětí v okolí vrcholu trhliny lze psát:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta) + \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{III}(\theta). \quad (7)$$

Hodnoty součinitele intenzity napětí lze určit různými metodami. Pro některé v praxi se často opakující konfigurace těles s trhlinou jsou jejich hodnoty zaneseny v tabulkách, případně v grafech nebo jsou odvozeny empirické vztahy (např. [83], [118], [147], [156]). Obecně složitější problém je možno řešit numericky např. pomocí metody konečných prvků. Zde se nabízí možnost využití speciálních trhlinových prvků [8], [50], [56], [61], [103], [150] nebo energetických kriterií [33], [48], [104], [114], která popisují chování trhliny na základě energetických úvah (za pomoci hnací síly trhliny, J-integrálu, apod.), přičemž v oblasti LELM existují jednoznačné relace mezi součinitelem intenzity

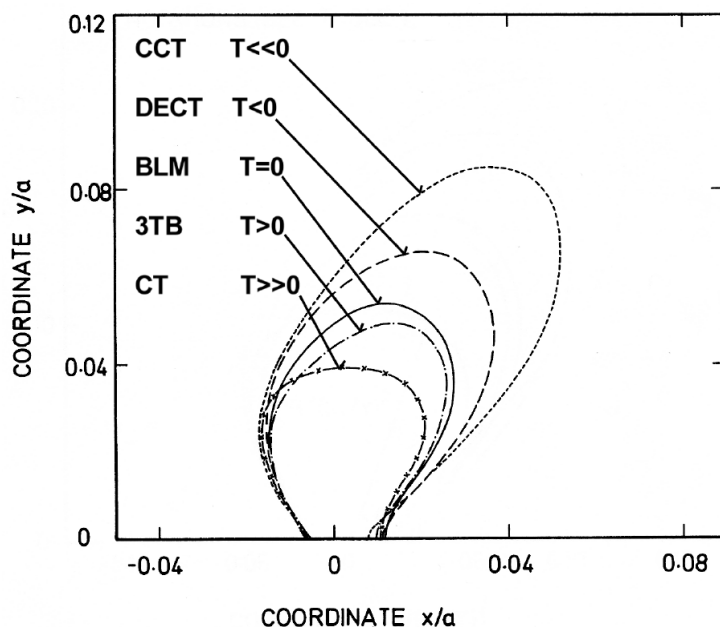
napětí a energetickými veličinami – J-integrálem nebo hnací silou trhliny G . Jednou z nejjednodušších metod stanovení součinitele intenzity napětí je tzv. přímá metoda [103], která je však náročnější z hlediska výpočtového času. Touto metodou se určuje součinitel intenzity napětí většinou buď z rozevřacího napětí před vrcholem trhliny, nebo z posuvů na lících trhliny, které jsou obvykle přesnější. Více o této metodě v kapitole 5.1.1.

V této práci je při výpočtech součinitele intenzity napětí využívána převážně metoda konečných prvků, konkrétně komerční systém Ansys [2]. Tento program v sobě zahrnuje již implementovanou funkci „KCALC“, která v kombinaci s trhlinovými prvky s posunutými středovými uzlovými body určí jednotlivé součinitele intenzity napětí K_I , K_{II} a K_{III} z posuvů uzlových bodů na lících trhliny pro jakoukoli konfiguraci trhliny v homogenním materiálu. Poznamenejme, že tato procedura je funkční pouze u 2D úloh, zatímco u 3D problémů musí být využit jiný způsob určení součinitele intenzity napětí, např. již zmiňovaná přímá metoda.

2.1.3 T-napětí

T-napětí představuje druhý (vzhledem k r i θ konstantní) člen Williamsova rozvoje (5). Zavádí se jako druhá veličina dvouparametrové lomové mechaniky, která se snaží vysvětlit jevy související s multiaxialitou napětí před vrcholem trhliny.

Základním důsledkem multiaxiality napětí je různá velikost plastické zóny před vrcholem trhliny (pro stejnou velikost součinitele intenzity napětí) vyvolaná různou geometrií těles s trhlinou, viz obr. 4. Platí, že pro záporné hodnoty T-napětí se plastická zóna protahuje do směru zatížení a odklání se směrem od vrcholu trhliny dále do materiálu. Je-li hodnota T-napětí naopak kladná, plastická zóna se k trhlině přiklání a velikost ve směru zatížení je významně menší, viz obr. 4.



Obr. 4 Změna velikosti a tvaru plastické zóny před vrcholem trhliny pro stejný součinitel intenzity napětí ale různá T-napětí [71]

Dále platí, že kladné T-napětí obvykle významně neovlivňuje lomové mechanické parametry, kdežto směrem k záporným hodnotám T dochází k výraznému nárůstu velikosti plastické zóny a tím k bránění růstu trhliny. Toto chování je typické pro statické namáhání a součásto s větším zatížením, tedy i větší hodnotou součinitele intenzity napětí. Naopak při

hodnotách K blízkých prahové hodnotě způsobuje záporné T-napětí zvýšení rychlosti růstu trhliny a efekt je tedy opačný [53].

Za pomoci T-napětí se obecně popisuje míra stísnění („constraint“) před vrcholem trhliny, tedy „odolnosti“ proti vzniku plastické deformace. Často se místo pomoci T-napětí míra „constraint“ vyjadřuje pomocí tzv. parametru biaxiality B , jehož výhodou je, že byl zaveden jako bezrozměrná veličina [72] a je tedy vhodnější při porovnávání různých konfigurací:

$$B = \frac{T\sqrt{\pi a}}{K_I} . \quad (8)$$

Je-li známa hodnota T-napětí, resp. parametru biaxiality, je možné na základě koncepce dvouparametrové lomové mechaniky, která předpokládá stejné lomové chování zkušební vzorku a reálné konstrukce pouze v případě rovnosti obou parametrů – K i T , rozhodnout o tom, zda lze bezpečně přenášet lomové charakteristiky zjištěné na zkušebním tělese na reálnou konstrukci.

2.1.4 Faktor hustoty deformační energie

Další veličinou, která je schopna charakterizovat situaci v okolí vrcholu trhliny v homogenním materiálu je tzv. faktor hustoty deformační energie někdy zvaný podle jeho autora Sihův, viz např. [117], [119] nebo [121].

Uveďme zatím jen, že tato veličina byla odvozena z hustoty deformační energie w , která je definována následovně:

$$w = \frac{dW}{dV} = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} , \quad (9)$$

přičemž faktor hustoty deformační energie S je dán jako součin hustoty deformační energie w a radiální vzdálenosti od vrcholu trhliny r , což při dosazení příslušných vztahů pro jednotlivé složky napětí před vrcholem trhliny do vztahu (9) vede na vztah:

$$S = w \cdot r = a_{11}K_I^2 + a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2 . \quad (10)$$

V rovnicích (9) a (10) jsou σ_{ij} a ε_{ij} odpovídající složky tenzoru napětí a přetvoření, dV objemový element, W energie napjatosti, K_I a K_{II} součinitele intenzity napětí pro jednotlivé módy zatěžování a a_{11} , a_{22} a a_{12} jsou známé funkce úhlu θ . V případě zatížení pouze v normálovém módu se dají odvodit přímo vztahy mezi S a K ve tvaru:

$$S = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)K_I^2}{2\pi E} \text{ pro rovinnou deformaci,} \quad (11)$$

$$S = \frac{(1-\nu)K_I^2}{2\pi E} \text{ pro rovinnou napjatost.} \quad (12)$$

Pomocí veličiny S odvodil Sih kritérium stability pro trhlínu v homogenním materiálu [117], [119], [121], podrobněji viz kapitola 5.2.3, a je také možné ji využít pro odhad směru dalšího šíření trhliny – viz dále kapitola 5.3.2.

2.1.5 Otevření trhliny COD

Otevření trhliny COD („crack opening displacement“) je mimo LELM také parametrem tzv. elasto-plastické lomové mechaniky (EPLM), která předpokládá větší oblast

plastických deformací před čelem trhliny, umožňující popsat chování trhliny v tělese. V tomto případě se nejedná o lomově-mechanický parametr v pravém slova smyslu, neboť jeho velikost je v závislosti na délce trhliny a místě určení rozevření trhliny ovlivňována i dalšími (nesingulárními) členy Williamsova rozvoje (5).

Existuje více přístupů, jak analyzovat chování trhliny pomocí jejího otevření. Pro posouzení lze využít:

- a) celý profil trhliny,
- b) část profilu trhliny,
- c) posunutí v jednom konkrétním místě profilu trhliny:
 - otevření trhliny na povrchu vzorku *CMOD* („crack mouth opening displacement“), viz obr. 6 v následující kapitole 2.1.6,
 - posuv pod zatížením *LLD* („load line displacement“), který je dán zejména posuvem profilu trhliny v ose čelistí zkušebního zařízení.

Poznamenejme, že na základě veličiny *CMOD* je v kapitole 5.2.4 formulováno kritérium stability pro trhlínu v tenké povrchové vrstvě s vrcholem na rozhraní povlaku a podkladu.

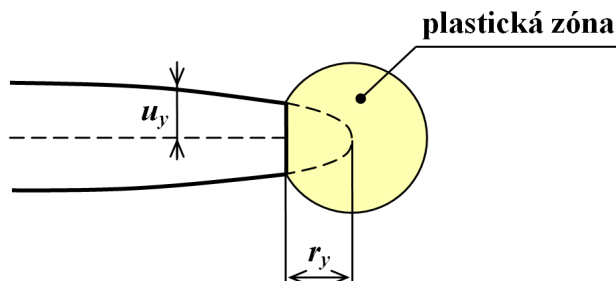
2.1.6 Otevření ve vrcholu trhliny *CTOD*

Další veličinou, která může být použita při hodnocení těles s trhlínou je otevření ve vrcholu trhliny *CTOD* („crack tip opening displacement“). I tato veličina může být definována více způsoby. Jedny ze základních a současně nejstarších definic jsou vztahy odvozené Irwinem [57] a Dugdalem (publikované např. v pracích [6] a [24]).

Irwin předpokládal, že existence plastické zóny před vrcholem trhliny způsobuje, že se trhlina chová tak, jakoby byla delší, a zavedl tzv. korekci délky trhliny na velikost plastické zóny. Na základě tohoto předpokladu a předpokladu malých plastických deformací (*SSY* = „small scale yielding“) lze pro vnitřní trhlínu délky $2a$ v nekonečně široké stěně odvodit vztah pro *CTOD* ve tvaru:

$$CTOD = 2u_y = \frac{4 \cdot \sigma}{E^*} \cdot (2 \cdot a \cdot r_y + r_y^2)^{1/2}, \quad (13)$$

kde σ je napětí působící kolmo na líce trhliny, a je poloviční délka trhliny, r_y je poloměr plastické zóny před čelem trhliny (pro $\theta = 0$), viz obr. 5, a E^* je roven E pro rovinnou napjatost, resp. $E/(1-\nu^2)$ pro rovinnou deformaci.



Obr. 5 Irwinova definice otevření ve vrcholu trhliny *CTOD* [7]

Vztah (13) lze za předpokladu velmi malých plastických deformací ($r_y \ll a$) aproximovat výrazem:

$$CTOD = \frac{4 \cdot \sigma}{E^*} \cdot (2 \cdot a \cdot r_y)^{1/2}. \quad (14)$$

Dugdale definoval $CTOD$ pomocí modelu kohezivních zón, kdy je plastická zóna na čele trhliny modelována pomocí tlakových (zavíracích) napětí o velikosti meze kluzu působících na líce trhliny:

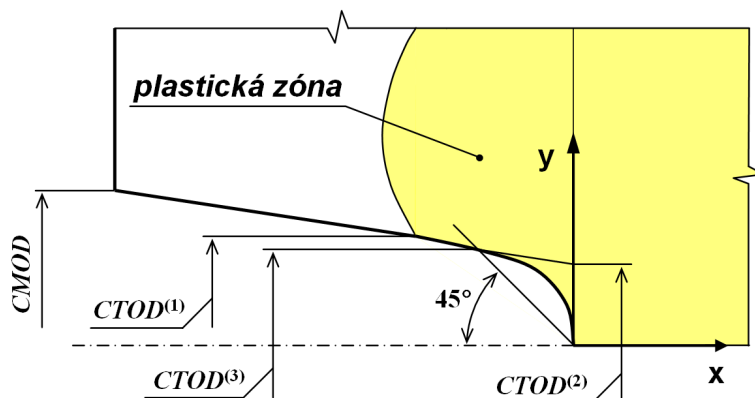
$$CTOD = \frac{8\sigma_o a}{\pi E^*} \ln \sec \left(\frac{\pi \sigma}{2 \sigma_o} \right). \quad (15)$$

Ve vztahu (15) představuje veličina σ_0 mez kluzu daného materiálu.

Další definice $CTOD$, které jsou vhodné především pro stanovování této veličiny z numerických simulací (MKP výpočtů), mohou být např. tyto:

- pomocí otevření trhliny v místě průniku okraje plastické zóny s profilem trhliny [1], [51] – viz $CTOD^{(1)}$ na obr. 6,
- pomocí extrapolace lineární části profilu trhliny do jejího vrcholu [51] – viz $CTOD^{(2)}$ na obr. 6,
- pomocí průniku profilu trhliny s přímkou vycházející z vrcholu trhliny pod úhlem 45° [1], [51] – viz $CTOD^{(3)}$ na obr. 6.

Poznamenejme, že v jednotlivých situacích jsou vždy některé postupy určení $CTOD$ vhodnější než jiné, což bude diskutováno ještě dále.



Obr. 6 Různé definice otevření ve vrcholu trhliny $CTOD$ [7]

Obecně lze však odvodit vztah mezi otevřením ve vrcholu trhliny $CTOD$ a klasickými lomovými parametry jako je součinitel intenzity napětí K_I , případně hnací síla trhliny G_I (za předpokladu velmi malých plastických deformací, $r_y \ll a$):

$$CTOD = \frac{K_I^2}{\lambda \cdot E^* \cdot \sigma_o} = \frac{G_I}{\lambda \sigma_o}, \quad (16)$$

kde λ označuje bezrozměrnou konstantu („plastic constraint“), např. [158]. Tato konstanta nabývá různých hodnot v důsledku použití odlišných předpokladů při analytickém stanovení velikosti poloměru plastické zóny r_y . Pro rovinnou deformaci je podle Irwina $\lambda = \pi/2$, zatímco podle Dugdala je $\lambda = 2$ [109]. Podrobněji je tato problematika diskutována např. v [110].

Na závěr je vhodné poznamenat, že veličiny $CTOD$, COD apod. mají na rozdíl od součinitele intenzity napětí jasný fyzikální význam, fyzikální jednotku a jsou velmi

názorné. Nezanedbatelnou výhodou je možnost jejich využití i u problémů, kdy dochází před vrcholem trhliny ke vzniku plastických deformací většího rozsahu (oblast EPLM).

2.1.7 Kritéria stability

Kritéria stability umožňují rozhodnout, zda se existující trhlina bude či nebude dále šířit. Rozlišují se *kritéria energetická* (koncepte hnací síly trhliny, koncepte hustoty deformační energie, koncepte J-integrálu) a *kritéria odvozená z napětí a posuvů* (koncepte součinitele intenzity napětí, koncepte kritického rozevření trhliny) – základní charakteristika a principy kritérií viz [69], [152].

V praxi nejpoužívanějším kritériem stability je jednoznačně kritérium založené na koncepci součinitele intenzity napětí:

$$K < K_C , \quad (17)$$

kde K_C je kritická hodnota součinitele intenzity napětí označovaná jako lomová houževnatost, která je považována za materiálovou charakteristiku. Trhlina se podle tohoto kritéria v tělese nebude šířit, pokud je hodnota součinitele intenzity napětí pro dané podmínky menší než jeho kritická hodnota K_C . Přitom podmínky pro experimentální určení platných hodnot K_C na zkušebních vzorcích jsou podle americké normy ASTM dány splněním nerovnice [1]:

$$a, B, (W - a) \geq 2,5 \left(\frac{K_I}{\sigma_0} \right)^2 , \quad (18)$$

Ve vztahu (18) je a délka trhliny, B tloušťka zkušebního tělesa, $(W-a)$ rozměr tělesa od vrcholu trhliny k povrchu tělesa ve směru šíření trhliny a σ_0 mez kluzu materiálu.

Na obdobném principu – porovnání veličiny charakterizující situaci v okolí vrcholu trhliny v tělese s kritickou hodnotou této veličiny – jsou postavena všechna dosud odvozená kritéria stability.

2.1.8 Obecný singulární koncentrátor napětí

Obecným singulárním koncentrátorem se označuje koncentrátor napětí (geometrická nebo materiálová nespojitost, resp. nespojitost zatížení), který způsobuje v tělese singulární charakter napětí, a to v závislosti na vzdálenosti r od vrcholu koncentrátoru napětí. Míra singularity napětí je v lomové mechanice popsána veličinou zvanou exponent singularity napětí p a pro singulární rozdělení napětí v okolí koncentrátoru napětí platí, že je úměrné r^{-p} .

$$\sigma_{ij} \approx \frac{1}{r^p} . \quad (19)$$

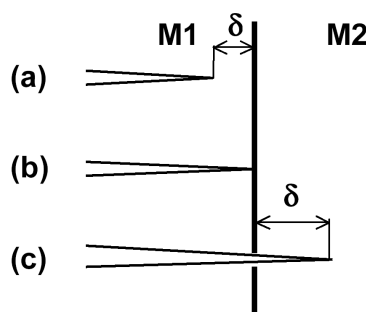
V nejobecnějších případech může být hodnota p z oboru komplexních čísel, přičemž její reálná část leží vždy v intervalu (0;1). V případech, na které se omezuje tato práce je exponent singularity napětí reálné číslo ležící mezi hodnotami 0 a 1.

Mezi obecné singulární koncentrátory napětí se řadí také trhlina s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní (analýza a řešení je cílem této práce), V-vrub a další. Speciálním případem singulárního koncentrátoru napětí je trhlina v homogenním tělese, pro kterou je charakteristická hodnota exponentu singularity napětí $p = 1/2$ a pro níž je odvozena klasická koncepce LELM.

2.2 Vymezení sledované problematiky

2.2.1 Trhlina s vrcholem v blízkosti bi-materiálového rozhraní

Předmětem práce je rovněž analýza lomového chování trhliny s vrcholem na rozhraní mezi dvěma (elastickými) materiály a s tím související posouzení vlivu přítomnosti rozhraní na chování trhliny šířící se v jeho blízkosti (viz obr. 7). Při řešení je uvažována platnost předpokladů LELM, úloha je řešena jako rovinná a předpokládá se dokonalá adheze mezi jednotlivými materiály, které jsou modelovány jako homogenní, izotropní, lineárně elastické. Jednotlivé materiály jsou charakterizovány materiálovými vlastnostmi E a ν (modulem pružnosti v tahu a Poissonovým číslem). Poznamenejme, že vliv Poissonova čísla na chování trhliny není významný, viz např. [3], [32], [88].



Obr. 7 Trhlina v blízkosti materiálového rozhraní

Významně hodnoty součinitele intenzity napětí trhliny šířící se v blízkosti bi-materiálového rozhraní ovlivňuje poměr modulů pružnosti v tahu E_1/E_2 obou materiálů [27], [82]. V důsledku existence rozhraní v tělese (tzn. poměru $E_1/E_2 \neq 1$) dochází k extrémnímu nárůstu či poklesu hodnoty K před i za rozhraním (viz dále).

Napětí před vrcholem trhliny rostoucí směrem k rozhraní je dáno vztahem [4], [27]:

$$\sigma \approx \delta^{\lambda - \frac{1}{2}} r^{-\frac{1}{2}}, \quad (20)$$

kde veličina δ představuje vzdálenost vrcholu trhliny od rozhraní podle obr. 7a v materiálu M1 a r je radiální souřadnice polárního souřadnicového systému s počátkem ve vrcholu trhliny. Vlastní číslo λ je možno určit z výrazu $\lambda = 1 - p$ pro případ, kdy se vrchol trhliny nalézá na materiálovém rozhraní.

V případě trhliny s vrcholem v **bezprostřední** blízkosti bi-materiálového rozhraní ($\delta \rightarrow 0$) o velikosti součinitele intenzity napětí (a primárně o velikosti napětí před vrcholem trhliny) rozhoduje člen $\delta^{\lambda - 1/2}$ a platí, např. [82]:

- je-li $\lambda > 1/2$ ($E_1 < E_2$, trhlina se šíří do tužšího materiálu) pak $K \rightarrow 0$ (obr. 8a),

- je-li $\lambda < 1/2$ ($E_1 > E_2$, trhlina se šíří do poddajnějšího materiálu) pak $K \rightarrow \infty$ (obr. 8b).

Podobným způsobem se v blízkosti rozhraní znehodnocují i hodnoty hnací síly trhliny:

- je-li $\lambda > 1/2$ ($E_1 < E_2$, trhlina se šíří do tužšího materiálu) pak $G \rightarrow 0$,

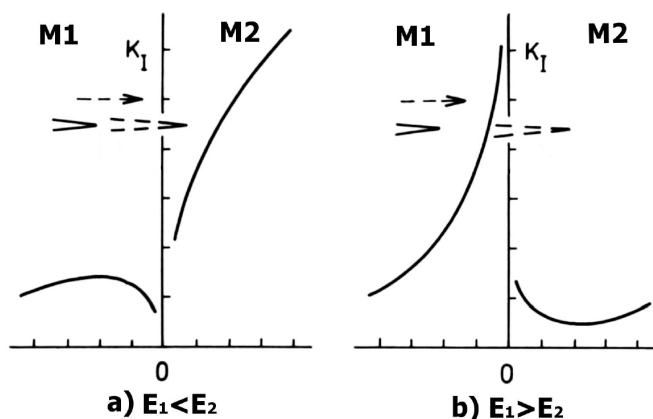
- je-li $\lambda < 1/2$ ($E_1 > E_2$, trhlina se šíří do poddajnějšího materiálu) pak $G \rightarrow \infty$.

Schematické průběhy součinitelů intenzity napětí pro trhlinu s vrcholem v blízkosti bi-materiálového rozhraní odpovídající právě uvedené úvaze jsou na obr. 8. Kvalitativně

stejně závislosti byly publikovány i autorkou během počáteční etapy studia problematiky šíření trhlin v blízkosti bi-materiálového rozhraní (více v pracích [135], [136]).

Jak vyplývá z obr. 8 a předchozího textu, teoretické hodnoty součinitele intenzity napětí pro trhlinu s vrcholem v nejtěsnější blízkosti bi-materiálového rozhraní přestávají mít fyzikální význam (nabývají mezních hodnot 0 a ∞) a je proto žádoucí zabývat se případem, kdy vrchol trhliny dosáhne materiálového rozhraní.

Je tedy zřejmé, že pro řešení problematiky obecných singulárních koncentrátorů napětí, konkrétně trhliny s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní, která je předmětem této práce, je klasická koncepce LELM nevyhovující a je nutné využít jejího zobecnění – viz další text.

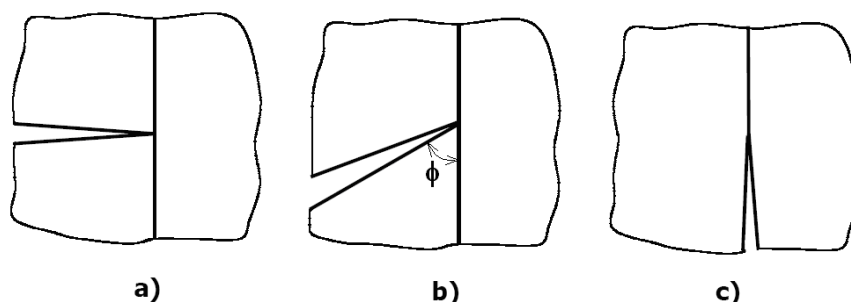


Obr. 8 Průběh součinitele intenzity napětí pro trhlinu šířící se v blízkosti bi-materiálového rozhraní [82]

2.2.2 Trhlina s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní

Obecně lze rozlišit tři základní konfigurace bi-materiálového tělesa s trhlinou (viz obr. 9), jejichž analytické řešení popisu napjatosti v okolí vrcholu trhliny je možné v literatuře nalézt:

- trhlina kolmá k bi-materiálovému rozhraní (obr. 9a);
- trhlina obecně orientovaná k bi-materiálovému rozhraní (obr. 9b);
- trhlina ležící v bi-materiálovém rozhraní (obr. 9c).



Obr. 9 Základní konfigurace trhlina-rozhraní

Případ trhliny ležící v bi-materiálovém rozhraní na obr. 9c) je specifický tím, že exponent singularity napětí p je komplexní číslo ($p = a + ib$), jehož reálná část a je rovna $1/2$ a komplexní část b závisí na materiálových vlastnostech obou materiálů, konkrétně na hodnotě Dundursova parametru β . Analytické řešení napjatosti v okolí vrcholu trhliny je pro tuto konfiguraci v literatuře snadno dostupné, viz např. [36], [38], ale protože není

předmětem zájmu této práce, budou dále pozornost věnována pouze případům a) a b) na obr. 9.

V případě trhliny s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní dochází ve srovnání s trhlinou v homogenním materiálu ke změně exponentu singularity napětí charakterizujícího rozložení napětí v okolí vrcholu. Tato změna zkomplikuje popis chování trhliny. V důsledku exponentu singularity napětí p různého od $\frac{1}{2}$ nelze použít klasickou koncepci LELM, která byla odvozena pro trhlinu v homogenním tělese, ale je nutné její zobecnění. Základní principy zůstávají stejné, tzn. že velikost koncentrace napětí v okolí vrcholu trhliny je vyjádřena jedním parametrem, a to v případě obecného singulárního koncentrátoru napětí tzv. zobecněným součinitelem intenzity napětí H :

$$\sigma_{ij} = \frac{H_I}{\sqrt{2\pi r^p}} f_{ij}(\phi, \theta, p, \alpha, \beta), \text{ resp.} \quad (21)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{H_1}{\sqrt{2\pi r^{p_1}}} f_{ij1}(\phi, \theta, p_1, \alpha_D, \beta_D) + \frac{H_2}{\sqrt{2\pi r^{p_2}}} f_{ij2}(\phi, \theta, p_2, \alpha_D, \beta_D). \quad (22)$$

Vztah (21) je odvozen pro trhlinu kolmou k bi-materiálovému rozhraní (pro detaily viz např. [74]), kde (r, θ) jsou polární souřadnice s počátkem ve vrcholu trhliny, p je příslušný exponent singularity napětí, H_I je zobecněný součinitel intenzity napětí a f_{ij} je známá funkce mimo jiné tzv. kompozitních parametrů α a β , které obecně závisí na modulech pružnosti v tahu a Poissonových číslech jednotlivých materiálů před a za rozhraním. V literatuře se lze setkat s různými definicemi těchto parametrů z nichž nejznámější a nejpoužívanější jsou parametry definované Dundursem např. v pracích [34], [35] (označované v dalším textu α_D a β_D). V souvislosti s problematikou bi-materiálových těles s trhlinou kolmou k rozhraní jsou v této práci používány výhradně kompozitní parametry definované Linem [74], které jsou v rovnici (21) i dalším textu označované z důvodu jednoduchosti α a β . Jejich význam je podobný jako v případě Dundursových parametrů, jsou to elastické konstanty bi-materiálu, ale definice je mírně odlišná, podrobněji viz kapitola 5.1.1.

Vztah (22) platí pro obecný singulární koncentrátor napětí, pro který existují dva reálné exponenty singularity napětí, tj. např. trhlina obecně orientovaná vůči rozhraní [89]. Zde jsou (r, θ) opět polární souřadnice s počátkem ve vrcholu trhliny, p_1 a p_2 jsou exponenty singularity napětí ($p_1 > p_2$, tj. p_1 představuje silnější singularitu), H_1 a H_2 jsou zobecněné součinitele intenzity napětí odpovídající jednotlivým exponentům singularity napětí a zahrnující v sobě každý oba zatěžovací módy (tahový i smykový) a f_{ij1} a f_{ij2} jsou známé funkce, přičemž ϕ je orientace trhliny vzhledem k rozhraní a α_D a β_D jsou Dundursovy kompozitní parametry, viz kapitola 5.1.1 pro detaily.

Zatímco popis rozložení napětí v okolí vrcholu trhliny byl často studován a lze ho v literatuře nalézt (pro trhlinu kolmou k bi-materiálovému rozhraní viz např. [27], [74], [81] a pro trhlinu obecně orientovanou k bi-materiálovému rozhraní viz např. [19], [40], [47]), složitější situace nastává při hledání vhodného stabilitního kritéria, které umožňuje rozhodnout o dalším šíření trhliny z rozhraní.

Přehled formulovaných kritérií lze nalézt např. v [86], kde kritéria spojují prahovou hodnotu zobecněného součinitele intenzity napětí s kritickými veličinami popisujícími v okolí vrcholu trhliny např. velikost plastické zóny (viz [66], [89], [90] pro detaily), střední napětí na charakteristické oblasti d (viz [65], [89] pro detaily), energii (viz [87], [89] pro detaily), otevření trhliny apod.

Aplikace zmiňovaných postupů na konkrétní praktické problémy (keramické a polymerní kompozity) je předmětem práce společně se zhodnocením vhodnosti či nevhodnosti jednotlivých kritérií pro danou aplikaci, případně s diskuzí o jejich omezení apod. Hodnoty určené na základě navržených kritérií budou porovnávány s hodnotami lomových veličin zjištěných experimentálně (v případě, že budou k dispozici vhodná data) a bude komentován případný rozdíl mezi nimi.

3 FORMULACE PROBLÉMU, CÍLE PRÁCE

Ukazuje se (viz např. keramické lamináty, polymerní kompozity nebo kombinace ochranná vrstva - podklad), že existence rozhraní mezi jednotlivými materiálovými složkami v kompozitu může pozitivně ovlivnit jeho lomově mechanické vlastnosti. V případě porušení vyvolaných přítomností trhliny je klíčovou otázkou interakce trhliny s rozhraním. Obecným cílem výzkumu realizovaného v rámci disertace v této oblasti je popsat chování trhliny šířící se v okolí, respektive přes rozhraní dvou různých materiálů a na základě získaných výsledků navrhnout postupy hodnocení vlivu materiálového složení a geometrického uspořádání vrstevnatého kompozitu na jeho odolnost proti lomově-mechanickému porušování. Předpokládaným a žádoucím výsledkem je pak mimo jiné i zvýšení spolehlivosti a provozní životnosti konstrukcí využívajících vrstevnaté kompozity.

Zadané cíle disertace vycházející z těchto formulací řeší problematiku v rámci předpokladů lineární elastické lomové mechaniky a lze je uvést následovně:

S využitím metody konečných prvků navrhnout spolehlivý numerický model umožňující výpočet napětí a deformací v okolí vrcholu trhliny, která se šíří v blízkosti rozhraní dvou elastických materiálů, případně která má vrchol na tomto rozhraní.

Navrhnout postup, který umožňuje v obou případech stanovit hodnoty lomově-mechanických parametrů lineární a zobecněné lineární elastické mechaniky, zejména pak hodnoty součinitele a zobecněného součinitele intenzity napětí.

Pomocí metody konečných prvků stanovit zejména hodnoty součinitele a zobecněného součinitele intenzity napětí v závislosti na materiálovém složení obou materiálů a geometrické konfiguraci trhlina-rozhraní a diskutovat přesnost a spolehlivost získaných veličin.

Diskutovat a analyzovat možnosti aplikací kritérií stability pro trhlínu šířící se přes rozhraní dvou materiálů (včetně stability trhliny s vrcholem na rozhraní) pro různé případy materiálového složení a možné geometrické konfigurace.

Získané postupy a výsledky použít pro řešení praktických příkladů (ochranné vrstvy, vícevrstvé trubky, keramické lamináty, ...) a to jak v laboratorní praxi (kalibrace nehomogenních zkušebních vzorků), tak i v případech konstrukcí porušovaných šířením trhlín (stanovení kritického lomového napětí).

4 SOUČASNÝ STAV ŘEŠENÉ PROBLEMATIKY

Práce se zabývá hodnocením chování těles s trhlinou a je založena na předpokladu platnosti koncepcí lomové mechaniky. Postupy klasické lineární elastické lomové mechaniky (LELM) byly původně odvozeny pro trhlinu v homogenním materiálu s exponentem singularity $\frac{1}{2}$. Základní myšlenkou lomové mechaniky a jejích tzv. lomových kritérií (kritérií stability) je rozhodnout, zda se trhlina v materiálu bude či nebude šířit, případně v jakém směru.

Zatímco šíření trhlin v homogenním tělese je již relativně podrobně prostudováno, je v současné době snahou rozšířit teorii lomové mechaniky na materiály s rozhraním, gradientní materiály ([32], [149]) atp., viz např. [37].

Největším problémem v oblasti zobecněné lomové mechaniky jsou kritéria stability. Dosud jich existuje jen velmi málo, přičemž většina z nich se omezuje na konkrétní konfigurace, není ještě dostatečně otestována nebo se teprve vyvíjí. Ačkoli rešeršní studie oblasti řešené problematiky byla předmětem pojednání ke státní doktorské zkoušce, je tematika kritérií stability pro trhlinu s vrcholem na rozhraní natolik důležitá a je natolik aktuálním tématem, že je zde několik vybraných prací zaměřených na toto téma citováno a komentováno.

Taktéž je dále stručně dokumentována aktuálnost problematiky vrstevnatých materiálů (především keramických laminátů), které jsou předmětem zájmu této práce.

4.1 Kritéria stability pro trhlinu s vrcholem na rozhraní

Klíčovým problémem při hodnocení součástí s trhlinou, jejíž vrchol dosáhl materiálového rozhraní je aplikace vhodného kritéria, na základě kterého by bylo možné rozhodnout, zda se trhlina bude šířit do druhého materiálu, nebo se vychýlí směrem do rozhraní, případně jestli se na rozhraní zastaví. Jedná-li se navíc o jiný případ než je čistý zatěžovací mód I, je žádoucí rozhodnout, v jakém směru se trhlina bude šířit dál po průchodu přes materiálové rozhraní.

Pokusy o sestavení lomových kritérií pro trhlinu končící na rozhraní se začaly objevovat teprve během posledních asi dvou desítek let. Pro trhlinu kolmou k rozhraní bylo v [63] navrženo kritérium založené na střední hodnotě normálového napětí na jisté vzdálenosti před vrcholem trhliny. Myšlenka byla založena na předpokladu, že jakmile toto napětí dosáhne kritického napětí σ_c určeného pro materiál za rozhraním, dojde k průchodu trhliny přes materiálové rozhraní. Na stejném principu jsou postavena i kritéria navržená v pracích [64] a [66]. Předpokládají, že mechanismus porušení je u trhliny s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní ekvivalentní s porušením homogenního materiálu s trhlinou. V [66] je kritérium pro stabilitu kolmé trhliny s vrcholem na rozhraní odvozeno z velikosti plastické zóny a je uveden konkrétní numerický příklad pro vzorek s povrchovou vrstvou. Jedním z obecných závěrů těchto prací je, že kritické napětí klesá jednak s rostoucím poměrem materiálových vlastností E_1/E_2 a jednak s rostoucí tloušťkou povrchové vrstvy (tedy i délkou trhliny) pro všechny uvažované materiálové kombinace. Problematika podkladu s povrchovou vrstvou je obsahem i novější práce [64], ve které je publikováno jednoduché kritérium pro odhad kritického napětí nutného pro průchod trhliny přes rozhraní pomocí rozevření lící trhliny (CMOD). Kromě toho je v práci posuzován vliv pole trhlin periodicky se opakujících v povrchové vrstvě a jejich vzájemné vzdálenosti na velikost kritického napětí. Parametr popisující rozevření trhliny (COD) pro své kritérium využívá i Romeo a Ballarini v práci [115], kteří navrhli model kohezní zóny umožňující

hodnotit chování trhlin pomocí parametrů, které definují vztah mezi COD a napětím na lících trhliny.

V literatuře se také poměrně často vyskytují kritéria založená na energetické bilanci, viz např. [28], [58], [79]. V [58] je jako kritérium rozhodující o průchodu trhliny přes rozhraní či jejím vychýlení do rozhraní využita hodnota rychlosti uvolněné energie. Podobně je tomu v práci [79], kde je směr šíření trhliny odhadnut na základě maximální hodnoty doplňkové energie uvolněné během lomu.

[28] je další významná práce, která se zabývá problematikou trhliny kolmé k a končící na rozhraní za podmínek rovinné deformace. Je navržen integrál J_{R0} , pro který za jistých podmínek platí, že je funkcí součinitele intenzity napětí bi-materiálu K_B , poloměru R_0 o dostatečně malé velikosti a materiálových vlastností. Modifikovaný J-integrál lze využít pro výpočet součinitele intenzity napětí bi-materiálu a je konstatováno, že protože přímo souvisí s K_B -dominantní oblastí u vrcholu trhliny, je možné ho využít i jako samostatné kritérium rozhodující o chování trhliny na rozhraní. Další modifikované kritérium založené na J-integrálu lze nalézt např. v [26].

Zatímco předchozí práce se zabývají převážně problematikou kolmé trhliny končící na bi-materiálovém rozhraní, následující část bude věnována problematice trhliny obecně orientované k rozhraní. Jistě jednou z důležitých prací v této oblasti je publikace [47]. Obsahuje návod, jak rozhodnout, zda se trhlina bude šířit do druhého materiálu nebo zda se začne šířit podél rozhraní. Rychlost uvolněné energie pro trhlinu vychýlenou směrem do rozhraní se srovnává s maximální rychlostí uvolněné energie pro trhlinu procházející přes rozhraní.

Kritérium založené na hodnotách rychlosti uvolněné energie je prezentováno taktéž v práci [76]. Motivací tohoto článku je žádoucí vychýlení trhliny do směru rozhraní v souvislosti se zvýšením houževnatosti bi-materiálového systému. Numerické simulace byly prováděny na systému kov – Al_2O_3 a byly diskutovány vlivy počáteční orientace trhliny na chování trhliny.

Na sebe navazující práce [60], [62], [64] a [89] se komplexně zabývají problematikou obecných singulárních koncentrátorů napětí a uvádí kritéria pro hodnocení jejich stability. První část [62] se zabývá formulací univerzálního přístupu pro hodnocení obecných singulárních koncentrátorů napětí, který má fenomenologický charakter a předpokládá stejný mechanismus šíření trhliny v homogenním materiálu a v případě trhliny šířící se z rozhraní. Třetí část [89] volně navazuje na předchozí části a obsahuje návrh tří kritérií stability, přičemž každé je založené na jiném fyzikálním principu. Kritické hodnota aplikovaného zatížení, která způsobí průchod trhliny přes rozhraní do druhého materiálu je odhadována na základě hodnoty středního napětí před vrcholem trhliny, velikosti plastické zóny a zobecněného faktoru hustoty deformační energie. Taktéž je zde uveden postup pro určení směru dalšího šíření trhliny po jejím průchodu rozhraním.

Všechny dosud zmiňované práce se zabývají existencí trhliny v elastickém materiálu s rozhraním. Nicméně v praxi se s výhodou využívají i materiály, které vykazují např. elasto-plastické, orthotropní nebo anizotropní chování. Začíná se tedy studovat i chování trhlin v jiných než elastických materiálech, což samozřejmě danou problematiku ještě více komplikuje. Pro ilustraci je uvedena alespoň jedna publikace [80], ve které je navrženo kritérium stability pro kolmou trhlinu s vrcholem na rozhraní dvou orthotropních materiálů. Toto kritérium je založené na hodnotách rychlosti uvolnění energie a umožňuje rozhodnout o vychýlení trhliny do rozhraní v jednom či obou směrech. Jak již bylo předesláno, jedná se o velice složitou situaci a v článku je ukázáno, že kritérium je velmi

citlivé na změnu orthotropních i bi-materiálových parametrů, a není proto možné sestavit komplexní graf vyjadřující podmínky jednotlivých typů vychýlení trhliny.

4.2 Vrstevnaté materiály

V praxi se často používají materiály, které vykazují křehké chování. Hledají se tedy metody, jak lomové vlastnosti takovýchto materiálů vylepšit. Může být využito např. vyztužování tuhými částicemi, případně vlákny nebo vrstvení jednotlivých vrstev (laminování) a další. Dva možné mechanismy zhouževnatění jsou prezentovány např. v [67].

Za mechanismus zhouževnatění u vrstevnatých kompozitů se dá považovat schodovité šíření trhliny přes jednotlivé vrstvy, které bylo pozorováno při testování některých keramických laminátů, viz např. [45], [70]. V důsledku přítomnosti rozhraní v tělese totiž dochází ke změně směru šíření trhliny při dosažení rozhraní. Tento efekt může být s výhodou využit při návrhu nových vrstevnatých materiálů, které mohou mít lepší lomové vlastnosti než homogenní materiály jednotlivých jejich složek. V literatuře [25] je již možné dokonce nalézt postupy pro odhad lomové houževnatosti vrstevnatých kompozitů. Navržená procedura byla testována na ohýbaném vzorku s trhlinou kolmou k rozhraní, který se skládal z vrstev Al_2O_3 a $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-ZrO}_2$, a získané výsledky lomové houževnatosti kompozitu byly srovnány s hodnotami určenými experimentálně.

Znalost chování trhliny ve vrstevnatých kompozitech umožňuje nalezení vhodné materiálové kombinace a optimalizaci vlastností kompozitního systému. Studium šíření trhliny ve vrstevnatých materiálech je tedy velmi důležité a je předmětem mnoha dalších vědeckých prací [22], [23], [105], [106]. Všechny uváděné práce se zabývají šířením trhlín v keramických laminátech.

Práce Buena a spol. [22], [23] se zabývají keramickými lamináty $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-Al}_2\text{TiO}_5$. Jsou porovnávány lomové vlastnosti monolitů a laminátů a je konstatováno, že vrstvením lze dosáhnout různých lomových a mechanických vlastností výsledných kompozitů, v závislosti na materiálech jednotlivých fází, tloušťkách vrstev apod. Zhouževnatění zde způsobují vrstvy Al_2O_3 , ve kterých dochází k větvení a přemosťování trhlín v důsledku jejich hrubozrné metalografické struktury.

Další významné (především experimentálně založené) práce, na které se autorka často odkazuje ve svých publikacích týkajících se modelování šíření trhlín v keramických kompozitech jsou publikace Bermejo a spol. [11], [12], [14], [15], [17] a další. Autoři se zabývají keramikou na bázi Al_2O_3 a ZrO_2 , přičemž velmi důležitou roli u těchto laminátů hrají reziduální napětí. Vliv reziduálních napětí na pevnost, houževnatost a lomovou práci je diskutován např. v [15]. V [11] je studován vliv tloušťky jednotlivých vrstev na lomové vlastnosti keramického laminátu.

5 METODIKA ŘEŠENÍ

Práce se zabývá problematikou šíření trhlin v nehomogenních tělesech, konkrétně v tělesech s bi-materiálovým rozhraním. Šíření trhliny v tomto typu těles je existencí rozhraní ovlivňováno a jeho analýza a popis jsou nezbytné pro hodnocení životnosti konstrukce. Poznamenejme, že předmětem zájmu práce bude jak případ trhliny kolmé k bi-materiálovému rozhraní (obvyklý u ochranných povlaků), tak případ trhliny obecně orientované vzhledem k rozhraní.

Pro hodnocení lomového chování trhlin s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní je nutné znát analytický popis napětí před vrcholem trhliny, jehož obecné formulace lze nalézt v literatuře, viz např. [27], [74], [81] pro trhlínu kolmou k bi-materiálovému rozhraní a [19], [40], [47] pro trhlínu obecně orientovanou k bi-materiálovému rozhraní.

Je-li známé rozložení pole napětí v okolí vrcholu trhliny (kapitola 5.1), je dále možné aplikovat lomová kritéria rozhodující o mezním stavu stability trhliny (kapitola 5.2), případně kritéria umožňující odhadnout směr dalšího šíření trhliny z rozhraní do druhého materiálu (kapitola 5.3).

5.1 Napjatost v okolí vrcholu trhliny

Analýza rozdělení napětí v okolí vrcholu trhliny je nezbytným krokem předcházejícím samotnému rozhodnutí o chování trhliny s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní, ať už se jedná o stanovování podmínek pro šíření trhliny nebo o odhad směru jejího dalšího šíření z materiálového rozhraní.

5.1.1 Trhlina obecně orientovaná k materiálovému rozhraní

Předtím, než bude detailně rozebrána problematika obecného popisu napjatosti v okolí vrcholu obecně orientované trhliny s vrcholem na rozhraní včetně návrhu metodiky stanovení všech nezbytných parametrů, je vhodné vyslovit jistý předpoklad platný pro všechny následující výpočty a studie.

Vlastní čísla λ_i (a tedy i exponenty singularity napětí p_i) jsou v obecném případě komplexně sdružená čísla, přičemž existují určité speciální případy orientace trhliny vzhledem k rozhraní. Je-li trhlina kolmá k rozhraní, jedná se o ojedinělou konfiguraci, kdy je vlastní číslo λ pouze jedno, a to reálné, nikoli komplexní. Naopak, nachází-li se trhlina v materiálovém rozhraní, jsou vlastní čísla vždy komplexně sdružená a jejich reálná část je rovna $\frac{1}{2}$. V ostatních případech jsou vlastní čísla dvě, a to buď komplexně sdružená (většinou u případů, kdy je trhlina více přikloněna k rozhraní) nebo reálná (konfigurace, kdy je trhlina orientována spíše kolmo k rozhraní) v závislosti na materiálových vlastnostech jednotlivých složek před a za rozhraním a počáteční orientaci trhliny vzhledem k rozhraní, pro podrobnosti viz např. [40]. V dalším textu bude uvažována vždy pouze reálná část vlastního čísla.

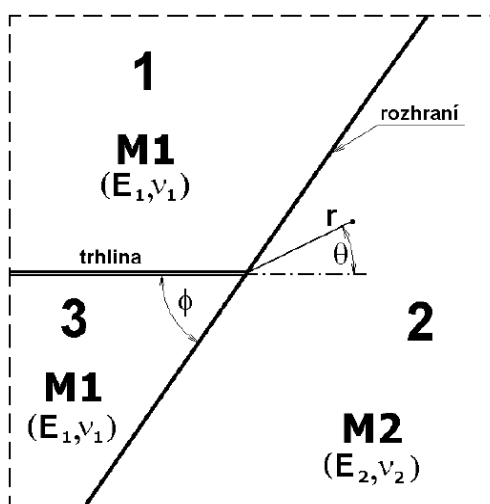
Obecný popis napjatosti v okolí vrcholu obecně orientované trhliny končící na materiálovém rozhraní byl v minulosti často studován a lze ho nalézt v literatuře, viz např. [40], [86]:

$$\sigma_{rr}^{(j)} = - \sum_{i=1}^n \lambda_i r^{\lambda_i-1} \left[a_i^{(j)} (\lambda_i + 1) \sin(\lambda_i + 1)\theta + b_i^{(j)} (\lambda_i + 1) \cos(\lambda_i + 1)\theta + c_i^{(j)} (\lambda_i - 3) \sin(\lambda_i - 1)\theta + d_i^{(j)} (\lambda_i - 3) \cos(\lambda_i - 1)\theta \right] A_i, \quad (23)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(j)} = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\lambda_i + 1) r^{\lambda_i - 1} \left[a_i^{(j)} \sin(\lambda_i + 1)\theta + b_i^{(j)} \cos(\lambda_i + 1)\theta + c_i^{(j)} \sin(\lambda_i - 1)\theta + d_i^{(j)} \cos(\lambda_i - 1)\theta \right] A_i, \quad (24)$$

$$\sigma_{r\theta}^{(j)} = - \sum_{i=1}^n \lambda_i r^{\lambda_i - 1} \frac{H_i}{\sqrt{2\pi}} \left[a_i^{(j)} (\lambda_i + 1) \cos(\lambda_i + 1)\theta - b_i^{(j)} (\lambda_i + 1) \sin(\lambda_i + 1)\theta + c_i^{(j)} (\lambda_i - 1) \cos(\lambda_i - 1)\theta - d_i^{(j)} (\lambda_i - 1) \sin(\lambda_i - 1)\theta \right]. \quad (25)$$

V rovnicích (23) až (25) index i představuje příslušnost označených veličin k danému exponentu singularity napětí p_i (počet exponentů singularity n je buď $n = 2$ pro převážnou část konfigurací obecně orientované trhliny a nebo $n = 1$ pro trhlinu kolmou k rozhraní, jakožto speciální případ obecně orientované trhliny, a minoritní část konfigurací obecně orientované trhliny, které v této práci nebudou řešeny). Horní index (j) poukazuje na spojitost dané veličiny s příslušnou oblastí 1, 2, 3 bi-materiálu (viz obr. 10). Veličina A_i odpovídá zobecněnému součiniteli intenzity napětí příslušející exponentu singularity p_i , resp. parametru λ_i , přičemž $\lambda_i = 1 - p_i$, a (r, θ) jsou polární souřadnice s počátkem ve vrcholu trhliny, pro podrobnosti viz např. [89].



Obr. 10 Trhlina obecně orientovaná k rozhraní materiálů M1 a M2

Pro stanovení složek tenzoru napětí u konkrétní geometrické a materiálové konfigurace je nutné:

- určit odpovídající exponenty singularity napětí;
- nalézt vlastní vektory $a_i^{(1)}$ až $d_i^{(3)}$ odpovídající příslušnému vlastnímu číslu λ_i ;
- určit tzv. zobecněné součinitele intenzity napětí H_i .

(ad a) Exponent singularity napětí

Při určování exponentů singularity napětí p_1 a p_2 se vychází ze znalosti analytického popisu rozložení napětí v blízkosti vrcholu trhliny, viz rovnice (23) až (25), a analytických vztahů pro složky posuvů v blízkosti vrcholu trhliny, viz rovnice (26) a (27).

$$u_r^{(j)} = - \frac{1}{2\mu^{(j)}} \sum_{i=1}^n r^{\lambda_i} \left[a_i^{(j)} (\lambda_i + 1) \sin(\lambda_i + 1)\theta + b_i^{(j)} (\lambda_i + 1) \cos(\lambda_i + 1)\theta + c_i^{(j)} (\lambda_i + 1 - m^{(j)}) \sin(\lambda_i - 1)\theta + d_i^{(j)} (\lambda_i + 1 - m^{(j)}) \cos(\lambda_i - 1)\theta \right] A_i, \quad (26)$$

$$u_{\theta}^{(j)} = \frac{1}{2\mu} \sum_{i=1}^n r^{\lambda_i} \left[-a_i^{(j)}(\lambda_i + 1)\cos(\lambda_i + 1)\theta + b_i^{(j)}(\lambda_i + 1)\sin(\lambda_i + 1)\theta - \right. \\ \left. - c_i^{(j)}(\lambda_i - 1 + m^{(j)})\cos(\lambda_i - 1)\theta + d_i^{(j)}(\lambda_i - 1 + m^{(j)})\sin(\lambda_i - 1)\theta \right] A_i \quad (27)$$

Ve vztazích (26) a (27) představuje konstanta $m^{(j)}$ výraz $4/(1+\nu^{(j)})$ pro případ rovinné napjatosti a $m^{(j)} = 4(1-\nu^{(j)})$ pro rovinnou deformaci. Horní index (j) zde opět představuje příslušnost k dané oblasti materiálu 1, 2 nebo 3 podle obr. 10 a tedy i k daným materiálovým vlastnostem.

Vztahy (23) až (27) pro napětí a posuvy v okolí vrcholu trhliny jsou následně doplněny o okrajové podmínky problému – konkrétně se předpokládají volné líce trhliny a spojitost některých složek napětí a posuvů v místě rozhraní. Celkem se jedná o 12 rovnic, viz vztahy (28):

$$\begin{aligned} \sigma_{1\theta\theta}(r, \pi) &= 0 \\ \sigma_{1r\theta}(r, \pi) &= 0 \\ \sigma_{3\theta\theta}(r, -\pi) &= 0 \\ \sigma_{3r\theta}(r, -\pi) &= 0 \\ u_{1r}(r, \phi) &= u_{2r}(r, \phi) \\ u_{1\theta}(r, \phi) &= u_{2\theta}(r, \phi) \\ \sigma_{1\theta\theta}(r, \phi) &= \sigma_{2\theta\theta}(r, \phi) \\ \sigma_{1\theta r}(r, \phi) &= \sigma_{2\theta r}(r, \phi) \\ u_{3r}(r, \phi - \pi) &= u_{2r}(r, \phi - \pi) \\ u_{3\theta}(r, \phi - \pi) &= u_{2\theta}(r, \phi - \pi) \\ \sigma_{3\theta\theta}(r, \phi - \pi) &= \sigma_{2\theta\theta}(r, \phi - \pi) \\ \sigma_{3\theta r}(r, \phi - \pi) &= \sigma_{2\theta r}(r, \phi - \pi) \end{aligned} \quad (28)$$

Soustava rovnic (28) tedy představuje systém 12 rovnic pro celkem 13 neznámých $a_i^{(1)}$ až $d_i^{(3)}$ a λ_i . Jelikož se jedná o homogenní soustavu rovnic, lze pro určení hodnot tzv. vlastních čísel λ_i využít platnost podmínky nulového determinantu pro netriviální řešení homogenní soustavy rovnic, viz např. [40], [86] pro podrobnosti. Tato podmínka vede na tzv. vlastní rovnici pro λ_i ve tvaru:

$$f(\phi, \alpha_D, \beta_D, \lambda) = 0 \quad (29)$$

Pro trhlínu obecně orientovanou k rozhraní se jedná o rovnici poměrně komplikovanou, (její tvar je možné nalézt např. v [19]) a proto je vhodné zvážit, zda je pro zájemce snazší řešit rovnici (30) nebo hledat řešení přímo z podmínky nulového determinantu. V každém případě je nezbytné použít k nalezení řešení některou z dostupných numerických metod.

$$\begin{aligned} f(\phi, \alpha_D, \beta_D, \lambda) &= [A\beta_D^2 + (2A - B)\beta_D + A - B + 1]\alpha_D^2 + \\ &+ [(-2A + B + C)\beta_D^3 + (-4A + 2B + C - D - 2)\beta_D^2 + (-2A + B - C)\beta_D - C + D]\alpha_D + \quad (30) \\ &+ (A - B - C + D + E + 1)\beta_D^4 + (2A - B - C)\beta_D^3 + (A + C - D - 2E)\beta_D^2 + C\beta_D + E = 0 \end{aligned}$$

kde:

$$\begin{aligned}
 A &= A(\phi, \lambda) = 4(1 - \lambda)^4 \sin(\phi) + \sin^2[(1 - \lambda)(2\phi - \pi)] \quad , \\
 B &= B(\phi, \lambda) = 4(1 - \lambda)^4 \sin(\phi) + 2 \sin^2[(1 - \lambda)(2\phi - \pi)] \quad , \\
 C &= C(\phi, \lambda) = 4(1 - \lambda)^4 \sin(\phi) \left\{ \sin^2((1 - \lambda)\phi) + \sin^2[(1 - \lambda)(\phi - \pi)] - 1 \right\} \quad , \\
 D &= D(\phi, \lambda) = 2 \left\{ \sin^2((1 - \lambda)\phi) + \sin^2[(1 - \lambda)(\phi - \pi)] - 1 \right\} \quad , \\
 E &= E(\lambda) = 1 - \sin^2((1 - \lambda)\pi) \quad .
 \end{aligned} \tag{31}$$

α_D a β_D jsou tzv. Dundursovy (kompozitní) parametry zavedené např. v práci [35], které charakterizují bi-materiálové systémy a jsou vždy funkcí materiálových vlastností obou materiálů:

$$\alpha_D = \frac{\mu_1 m_2 - \mu_2 m_1}{\mu_1 m_2 + \mu_2 m_1} \quad , \quad \beta_D = \frac{\mu_1 (m_2 - 2) - \mu_2 (m_1 - 2)}{\mu_1 m_2 + \mu_2 m_1} \quad . \tag{32}$$

Výrazy pro konstanty m jsou zde totožné jako u rovnic (26) a (27), μ značí moduly pružnosti ve smyku jednotlivých materiálů.

(ad b) Vlastní vektor $a_i^{(1)}$ až $d_i^{(3)}$

Protože je soustava rovnic (28) homogenní, lze získat pouze proporcionální řešení, tj. poměry mezi jednotlivými konstantami, přičemž jako vhodná se ukázala volba $d_i^{(2)} = 1$, neboť pro tuto hodnotu v homogenním případě (tj. pro $E_1 = E_2$ a $\nu_1 = \nu_2$) platí $H \rightarrow K$.

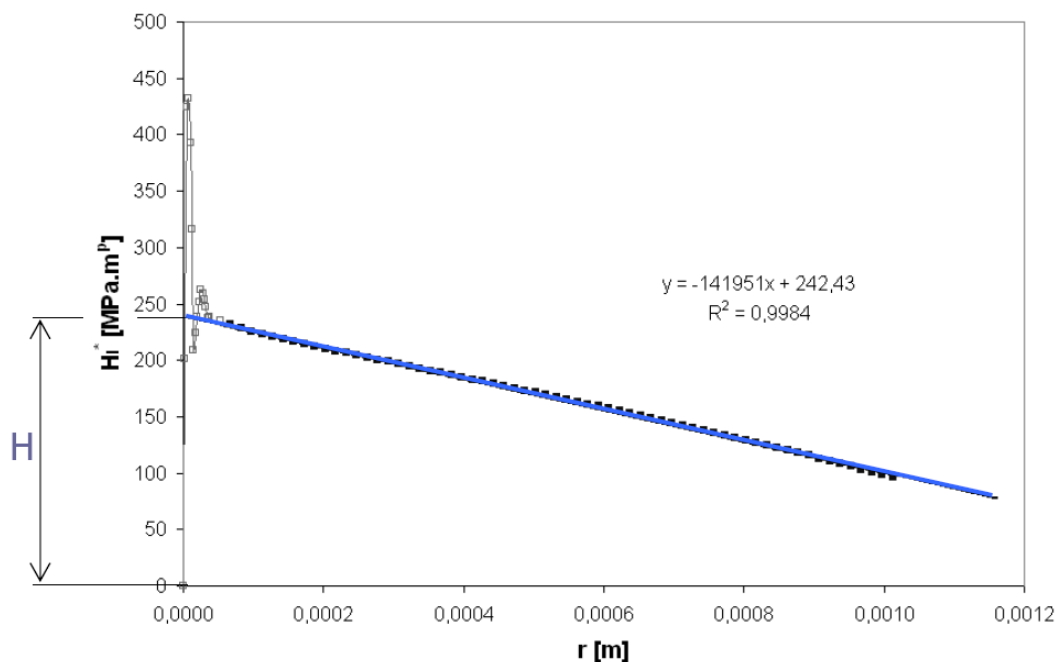
(ad c) Zobecněný součinitel intenzity napětí H_i

Klíčovým lomovým parametrem je tzv. zobecněný součinitel intenzity napětí H , resp. H_1 a H_2 , co by amplituda singulárního členu Williamsova rozvoje napětí (5).

Je-li trhlina v homogenním materiálu, je možné singularitu napětí před vrcholem trhliny modelovat v případě použití MKP pomocí speciálních tzv. trhlinových prvků, které mají posunuté středové uzlové body a přesněji tak vystihují pole napětí v okolí vrcholu trhliny. Např. v systému ANSYS potom existuje implementovaný příkaz KCALC, který umožňuje přímo určit daný součinitel intenzity napětí (K_I , K_{II} nebo K_{III}), a to z posuvů na lících trhliny.

Toto není možné v případě obecného singulárního koncentrátoru napětí, neboť singularita pole napětí je zde odlišná pro jednotlivé materiálové a geometrické konfigurace ($p \neq 1/2$).

K určení hodnot zobecněného součinitele intenzity napětí lze využít tzv. přímou metodu, viz např. [86], [152], pro jejíž aplikaci postačuje libovolný software založený na numerickém řešení (např. metodě konečných prvků apod.) bez dalších úprav. Metoda je založena na porovnání numericky určených hodnot napětí před vrcholem trhliny s analytickým řešením, přičemž je provedena extrapolace lineární části závislosti $H^* = H^*(r)$ do bodu $r = 0$ (tj. do vrcholu trhliny), viz obr. 11. Jestliže je $n = 2$, vzniká však pro každou hodnotu vzdálenosti r soustava dvou rovnic pro neznámé H_1 a H_2 . Je tedy nezbytné sestavit počítačový program řešící zmiňovanou soustavu pro každou vzdálenost r .



Obr. 11 Přímá metoda určení zobecněného součinitele intenzity napětí

Jednou velkou nevýhodou přímé metody je její obrovská náročnost na kvalitu sítě před vrcholem trhliny, kde se provádí extrapolace. Nutnost jemnější sítě je doprovázena nárůstem výpočtového času a provádí-li se řešení 3D úlohy, může se jednat až o řádové zvýšení časové náročnosti.

Alternativou k přímé metodě určení zobecněného součinitele intenzity napětí, která eliminuje náročnost na kvalitu sítě v okolí vrcholu trhliny, je využití tzv. ψ -integrálu či M-integrálu. Tyto integrální postupy jsou založeny na předpokladu platnosti Bettiho recipročního teorému [124], [127] a zobecněný součinitel intenzity napětí je pomocí něj možné určit z křivkového integrálu, který je nezávislý na integrační cestě kolem vrcholu trhliny, viz např. [43], [44], [111], [112], [113] pro detaily. Integrace se v obecném případě provádí numericky, přičemž přesnost výpočtu roste s počtem integračních bodů. V práci [86] bylo provedeno srovnání obou metod (přímé metody a integrální metody) a bylo ukázáno, že výsledky získané pomocí jednotlivých postupů spolu korespondují, není-li rozdíl modulů pružnosti v tahu materiálu před a za rozhraním extrémně velký.

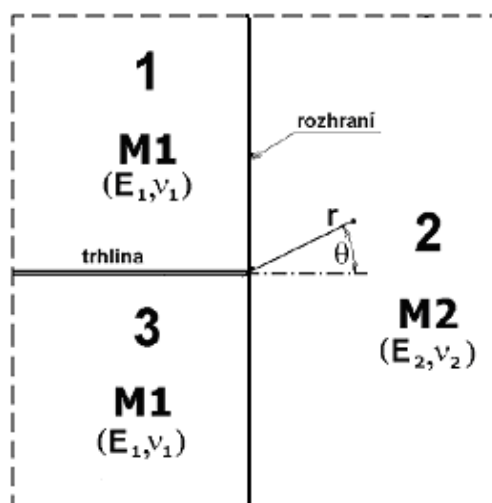
Provedením kroků *a*), *b*) a *c*) je možné získat všech v obecném případě 28 konstant (v případě, kdy je $n = 2$), z nichž 26 je nezávislých:

- λ_1, λ_2 , resp. p_1, p_2 ;
- H_1, H_2 ;
- $a_1^{(1)}, b_1^{(1)}, c_1^{(1)}, d_1^{(1)}, a_1^{(2)}, b_1^{(2)}, c_1^{(2)}, d_1^{(2)}, a_1^{(3)}, b_1^{(3)}, c_1^{(3)}, d_1^{(3)}$,
 $a_2^{(1)}, b_2^{(1)}, c_2^{(1)}, d_2^{(1)}, a_2^{(2)}, b_2^{(2)}, c_2^{(2)}, d_2^{(2)}, a_2^{(3)}, b_2^{(3)}, c_2^{(3)}, d_2^{(3)}$.

5.1.2 Trhlina kolmá k materiálovému rozhraní

Předchozí kapitola byla věnována problematice napjatosti před vrcholem trhliny obecně orientované k materiálovému rozhraní. Nicméně v praxi se lze velice často setkat se speciálním případem, kdy je trhlina k rozhraní orientována kolmo, viz obr. 12. Tato

konfigurace je typická především pro tenké vrstvy na silnějším podkladu, tzn. pro různé ochranné vrstvy či obecně povrchové vrstvy, ať už je jejich primární funkce jakákoli.



Obr. 12 Trhlina kolmo orientovaná k rozhraní materiálů M1 a M2

To, že je trhlina kolmá k rozhraní speciálním případem trhliny obecně orientované k rozhraní, souvisí s tím, že pro tuto konfiguraci popisuje singularitu napětí před vrcholem trhliny pouze jeden exponent singularity napětí $p \neq 1/2$. Tím se vztahy (23) až (25) zjednoduší a konkrétní tvary pro jednotlivé složky napětí je možné nalézt např. v [74]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \lambda r^{\lambda-1} [(2f_R - g_R) \cos(\lambda-1)\theta - (2f_I - g_I) \sin(\lambda-1)\theta - \\
 &\quad - (\lambda-1)(f_R \cos(\lambda-3)\theta - f_I \sin(\lambda-3)\theta)]A \\
 \sigma_{yy} &= \lambda r^{\lambda-1} [(2f_R + g_R) \cos(\lambda-1)\theta - (2f_I + g_I) \sin(\lambda-1)\theta + \\
 &\quad + (\lambda-1)(f_R \cos(\lambda-3)\theta - f_I \sin(\lambda-3)\theta)]A, \text{ resp.} \quad (33) \\
 \sigma_{xy} &= \lambda r^{\lambda-1} [g_R \sin(\lambda-1)\theta + g_I \cos(\lambda-1)\theta + \\
 &\quad + (\lambda-1)(f_R \sin(\lambda-3)\theta + f_I \cos(\lambda-3)\theta)]A \\
 \sigma_{\theta\theta} &= \lambda r^{\lambda-1} [g_R \cos(\lambda+1)\theta - g_I \sin(\lambda+1)\theta + \\
 &\quad + (\lambda+1)(f_R \cos(\lambda-1)\theta - f_I \sin(\lambda-1)\theta)]A \\
 \sigma_{rr} &= \lambda r^{\lambda-1} [g_I \sin(\lambda+1)\theta - g_R \cos(\lambda+1)\theta - \\
 &\quad - (\lambda-3)(f_R \cos(\lambda-1)\theta - f_I \sin(\lambda-1)\theta)]A \\
 \sigma_{r\theta} &= \lambda r^{\lambda-1} [g_R \sin(\lambda+1)\theta + g_I \cos(\lambda+1)\theta + \\
 &\quad + (\lambda-1)(f_R \sin(\lambda-1)\theta + f_I \cos(\lambda-1)\theta)]A
 \end{aligned}$$

Ve vztazích (33), resp. (34) vyskytující se veličiny f_R , f_I , g_R a g_I jsou závislé pouze na materiálových vlastnostech materiálů před a za rozhraním a na vlastním čísle λ (konstanta úměrnosti A tamtéž odpovídá zobecněnému součiniteli intenzity napětí):

- pro materiál M1 platí:

$$\begin{aligned}
f_R &= \frac{\beta[1 + \alpha + (2\alpha\lambda - \alpha)\cos\lambda\pi]}{g_D} \quad , \\
f_I &= \frac{-\beta[(2\alpha\lambda - \alpha)\sin\lambda\pi]}{g_D} \quad , \\
g_R &= \frac{-\beta[\lambda + \alpha\lambda + (2\alpha\lambda^2 + \alpha\lambda - \alpha)\cos\lambda\pi + (1 + \alpha)\cos 2\lambda\pi]}{g_D} \quad , \\
g_I &= \frac{-\beta[(2\alpha\lambda^2 + \alpha\lambda - \alpha)\sin\lambda\pi + (1 + \alpha)\sin 2\lambda\pi]}{g_D} \quad , \\
g_D &= 1 + 2\alpha + 2\alpha^2 - 2(\alpha + \alpha^2)\cos\lambda\pi - 4\alpha^2\lambda^2 \quad .
\end{aligned} \tag{35}$$

- pro materiál M2 platí:

$$\begin{aligned}
f_R &= 1 \quad , \\
f_I &= 0 \quad , \\
g_R &= \lambda - \cos\lambda\pi - \frac{\beta[\alpha + 2\lambda - (1 + 2\alpha - 4\alpha\lambda^2)\cos\lambda\pi + (1 + \alpha)\cos 2\lambda\pi]}{g_D} \quad , \\
g_I &= 0 \quad , \\
g_D &= 1 + 2\alpha + 2\alpha^2 - 2(\alpha + \alpha^2)\cos\lambda\pi - 4\alpha^2\lambda^2 \quad .
\end{aligned} \tag{36}$$

V rovnicích (35) a (36) představují α a β kompozitní parametry definované Linem v práci [74] (odlišně od klasicky zavedených Dundursových parametrů α_D a β_D zmiňovaných v předchozí kapitole), které závisí na materiálových vlastnostech jednotlivých vrstev:

$$\alpha = \frac{\frac{E_1}{E_2}(1 + \nu_2) - (1 + \nu_1)}{4} \quad , \quad \beta = \frac{E_1}{E_2} \quad \text{pro rovinnou napjatost,} \tag{37}$$

$$\alpha = \frac{\frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_2} - 1}{4(1 - \nu_1)} \quad , \quad \beta = \frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{1 - \nu_2^2}{1 - \nu_1^2} \quad \text{pro rovinnou deformaci.} \tag{38}$$

Co se týče určování exponentu singularity napětí p , resp. vlastního čísla λ , jedná-li se o problém trhliny kolmé k rozhraní, je postup principiálně stejný jako pro obecně orientovanou trhlínu – vychází se tedy ze znalosti analytického popisu napětí a posuvů v blízkosti vrcholu trhliny, který se doplní okrajovými podmínkami. Nicméně v tomto případě se přímo nabízí možnost využít pro určení vlastního čísla λ tzv. charakteristickou rovnici, která byla pro tuto konfiguraci v poměrně jednoduchém tvaru odvozena v literatuře, viz např. [30], [74], [157]:

$$\lambda^2(-4\alpha^2 + 4\alpha\beta) + 2\alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\alpha - \beta + 1 + (-2\alpha^2 + 2\alpha\beta - 2\alpha + 2\beta)\cos(\lambda\pi) = 0 \quad . \tag{39}$$

5.2 Kritéria stability

Je-li známa napjatost v okolí vrcholu trhliny, lze na jejím základě sestavit kritéria pro hodnocení stability trhliny s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní, jakožto obecného singulárního koncentrátoru napětí. K rozhodnutí o dalším šíření trhliny slouží tzv. kritéria

stability příslušná danému meznímu stavu. Zatímco pro trhlinu v homogenním materiálu existuje kritérií dostatečné množství (koncepte součinitele intenzity napětí – nejjednodušší a nejnámější kritérium – viz rovnice (17) v kapitole 2.1.7, koncepte J-integrálu, koncepte otevření trhliny COD, resp. CTOD, koncepte hustoty deformační energie, a další), viz např. [5], [18], [31], [49], [73], [120], [125], [131], [148] nebo systematický přehled nejběžnějších kritérií v knize [108], pro trhlinu s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní některá kritéria odvozena byla (viz kapitola 4.1), ale mohou mít jistá omezení, nedostatky, apod..

Při návrhu kritéria stability se často vychází z předpokladu, že mechanismus šíření trhliny s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní (obr. 10) je stejný jako mechanismus šíření trhliny v homogenním tělese, viz např. [62]. Lze tedy říci, že stabilita trhliny je kontrolována v obou případech stejnou veličinou L , která má jasný fyzikální význam a je definovatelná v obou případech (např. hustota deformační energie, otevření trhliny, střední hodnota napětí, apod.). Při použití tohoto přístupu pro šíření trhliny v homogenním materiálu M (u kterého se předpokládá, že má stejné vlastnosti jako materiál M_2 za rozhraním bi-materiálového tělesa) platí: $L = L (...K(M)...)$ a v případě trhliny s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní šířící se do materiálu M_2 platí: $L = L (...H(M_1/M_2)...)$. Na základě předpokladu, že k nestabilnímu šíření trhliny dojde za podmínky: $K = K_C(M)$ a $H = H_C(M_1/M_2)$, tj. veličina L dosáhne své kritické hodnoty $L = L_C$, která je v obou případech identická [62]:

$$L_C (...K_C(M)...) = L_C (...H_C(M_1/M_2)...) . \quad (40)$$

Na základě rovnice (40) lze určit vztah mezi $K_C(M)$ a $H_C(M_1/M_2)$ a dále vypočítat kritické aplikované napětí σ_C , při jehož dosažení dojde k nestabilnímu šíření trhliny, a to z podmínky:

$$H(\sigma_{appl}) < H_C(M_1/M_2) . \quad (41)$$

Stanovení kritického napětí je výhodné s ohledem na fyzikální rozměr zobecněného součinitele intenzity napětí, který je závislý na velikosti exponentu singularity napětí, aby bylo možné porovnávat výsledné veličiny pro různé geometrické i materiálové konfigurace a kombinace.

Poznamenejme ještě, že vztah (41) je analogickým vztahem ke vztahu vyjadřujícímu kritérium stability pro trhlinu v homogenním materiálu založeném na tzv. K -konceptu (rovnice (17) v kapitole 2.1.7). Zatímco však ve vztahu (17) je K_C lomovou houževnatostí, tedy materiálovou charakteristikou, veličinu H_C je nutné odvodit pomocí některého z kritérií stability.

Pro hodnocení stability trhlín s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní v konkrétních aplikacích – polymerních trubkách a keramických kompozitech – je možné využít některé z kritérií, která byla odvozena pro kolmou trhlinu s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní:

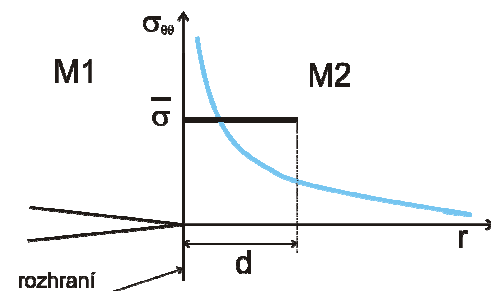
- kritérium středního napětí [89];
- kritérium založené na velikosti plastické zóny před vrcholem trhliny [66];
- kritérium založené na faktoru hustoty deformační energie [86], [89];
- kritérium otevření trhliny [7], [64].

Je důležité na tomto místě poznamenat, že v případě trhliny s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní je většinou nutné (na rozdíl od kritérií stability pro trhlinu

v homogenním materiálu) v závislosti na mechanismu porušení materiálu zavést nový, obvykle délkový parametr r , resp. d před vrcholem trhliny, kde se kritéria aplikují (např. [85], [122], [123]).

5.2.1 Kritérium středního napětí

Kritérium stability založené na hodnotě středního napětí před vrcholem trhliny předpokládá, že veličinou L řídící šíření trhliny je rozevírací napětí před vrcholem trhliny, resp. jeho střední hodnota získaná integrací přes jistou vzdálenost d , viz obr. 13 pro názornost.



Obr. 13 Střední hodnota napětí $\sigma_{\theta\theta}$ před vrcholem trhliny definovaná na vzdálenosti d

Pro odvození samotného kritéria je tedy nezbytné znát průběh napětí $\sigma_{\theta\theta}$ před vrcholem trhliny, a to jak v homogenním materiálu

$$\sigma_{\theta\theta}^{(M)}(r, \theta = 0) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}, \quad (42)$$

tak pro případ trhliny s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní

$$\sigma_{\theta\theta}^{(M1/M2)}(r, \theta = 0) = \frac{H_I}{\sqrt{2\pi}} (1-p)(2-p+g_R)r^{-p}, \quad (43)$$

kde g_R odpovídá materiálu M2 za rozhraním, viz rovnice (36).

Integrací vztahů (42) a (43) přes oblast d je následně možné získat střední hodnoty napětí, resp. jejich kritické hodnoty, které udávají podmínky pro nestabilní šíření trhliny:

$$\bar{\sigma}_C^{(M)} = \frac{1}{d} \int_0^d \frac{K_{IC}}{\sqrt{2\pi r}} dr = \frac{2K_{IC}}{\sqrt{2\pi d}} \quad \text{pro homogenní materiál}, \quad (44)$$

$$\bar{\sigma}_C^{(M1/M2)} = \frac{1}{d} \int_0^d \frac{H_{IC}}{\sqrt{2\pi}} (1-p)(2-p+g_R)r^{-p} dr = \frac{H_{IC}}{\sqrt{2\pi}} d^{-p} (2-p+g_R) \quad \text{pro bi-materiál.} \quad (45)$$

Za předpokladu stejného mechanismu porušování v homogenním materiálu i bi-materiálovém tělese ($L_C(\dots K_C(M)\dots) = L_C(\dots H_C(M1/M2)\dots)$) lze porovnáním kritických hodnot středního napětí před vrcholem trhliny pro dané dvě konfigurace, tzn. vztahů (44) a (45), získat vztah mezi kritickou hodnotou zobecněného součinitele intenzity napětí a lomovou houževnatostí:

$$H_{IC} = K_{IC} \frac{2d^{p-1/2}}{2-p+g_R}, \quad (46)$$

kde g_R stále odpovídá materiálu M2 za rozhraním, viz rovnice (36).

Kritérium stability pro kolmou trhlinu s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní je tedy možné psát ve tvaru:

$$H_I < H_{IC} . \quad (47)$$

S ohledem na jednotku zobecněného součinitele intenzity napětí ($\text{MPa}\cdot\text{m}^p$) je vhodné přepočítat výslednou hodnotu H_{IC} na kritické napětí, případně kritickou sílu podle konfigurace zatížení:

$$\sigma_C = \frac{H_{IC}}{H_I(\sigma_{appl})} \cdot \sigma_{appl} . \quad (48)$$

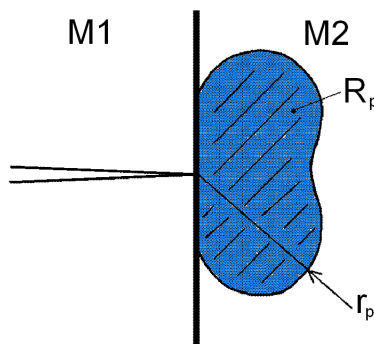
Kritérium stability tak může být přepsáno taktéž do tvaru (49), přičemž toto je pouze jiným vyjádřením vztahu (47). Trhlina se z rozhraní nebude dále šířit, pokud aplikované napětí bude menší než jeho kritická hodnota vypočtená z rovnice (48).

$$\sigma_{appl} < \sigma_C . \quad (49)$$

Poznamenejme, že výpočet hodnot σ_C je vhodný zejména v případech, kdy chceme porovnávat odpor vůči šíření trhliny přes rozhraní pro různé materiálové kombinace.

5.2.2 Kritérium založené na velikosti plastické zóny před vrcholem trhliny

Zatímco kritérium středního napětí je vhodné především pro případy křehkého lomu, kritérium založené na velikosti plastické zóny bylo primárně odvozeno pro únavové trhliny. Pomocí něj je možné odhadnout tzv. prahovou hodnotu zatížení pro cyklicky namáhaná tělesa s trhlinou s vrcholem na rozhraní. Základním předpokladem tohoto kritéria je, že šíření trhliny je kontrolováno velikostí plastické zóny, tedy že $L = R_p$ (viz obr. 14).



Obr. 14 Plastická zóna před vrcholem trhliny (r_p – poloměr, R_p – velikost)

Tvar (poloměr) plastické zóny je možné odvodit z Misesovy podmínky tak, že se položí efektivní napětí rovno mezi kluzu:

$$\sigma_{eff} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)} = \sigma_0 . \quad (50)$$

Po dosazení příslušných složek napětí je možné pro trhlinu v homogenním materiálu odvodit vztah pro poloměr plastické zóny, resp. pro její velikost, jako funkci součinitele intenzity napětí [57]:

$$R_p^{(M)} = \left(\frac{K_I}{\sigma_0} \right)^4 f_{hom}(v) , \quad (51)$$

kde

$$f_{\text{hom}}(\nu) = \frac{64(12\nu^4\pi - 24\nu^3\pi + 21\nu^2\pi - 9\nu\pi + 32\nu^4 - 64\nu^3 + 52\nu^2 - 20\nu + 3) + 123\pi}{1024\pi^2} . \quad (52)$$

Obdobně lze dosazením příslušných vztahů pro napětí, rovnic (23) až (25), do Misesovy podmínky odvodit vztah pro poloměr plastické zóny (najít hranici mezi elastickou a plastickou oblastí před vrcholem trhliny v materiálu M2) pro kolmou trhlinu s vrcholem na rozhraní [66]:

$$r_p^{(M1/M2)} = \left(\frac{H_I}{\sigma_0} \right)^{\frac{2}{p}} \left\{ \frac{(1-p)^2}{2\pi} [6g_R p (\sin(p\theta) \sin((-p-2)\theta) - \cos(p\theta) \cos((-p-2)\theta)) + \right. \\ \left. + 16\nu \cos(p\theta)^2 \left(\nu + \frac{1}{4\nu} - 1 \right) + 3(g_R^2 + p^2) \right\}^{\frac{1}{2p}} , \quad (53)$$

kde všechny materiálové charakteristiky, stejně jako funkce g_R odpovídají materiálu M2 za rozhraním, viz rovnice (36).

Integrací výrazu (53) je možné získat výsledný vztah pro velikost plastické zóny pro kolmou trhlinu s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní, který je analogický ke vztahu (51) a ve kterém funkce $f(\alpha, \beta, \nu)$ odpovídá hodnotě určitého integrálu přes oblast materiálu M2 z výrazu ve složených závorkách umocněného na $1/2p$ v rovnici (53):

$$R_p^{(M1/M2)} = \left(\frac{H_I}{\sigma_0} \right)^{\frac{2}{p}} f(\alpha, \beta, \nu) , \quad (54)$$

Následuje odvození vztahů pro kritickou hodnotu řídicí veličiny L_C z výrazů (51) a (54) zapsaných pro R_p , potažmo pro L . Za předpokladu, že v okamžiku počátku šíření únavové trhliny má plastická zóna stejnou velikost jak v případě trhliny v homogenním materiálu tak v případě trhliny s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní, lze získat výsledný vztah mezi prahovou hodnotou zobecněného součinitele intenzity napětí a prahovou hodnotou součinitele intenzity napětí:

$$H_{th} = K_{th}^{2p} \sigma_0^{1-2p} \left[\frac{f_{\text{hom}}(\nu)}{f(\alpha, \beta, \nu)} \right]^{\frac{p}{2}} . \quad (55)$$

Na závěr lze konstatovat, že únavová trhlina se z rozhraní nebude šířit do materiálu M2 v případě, že hodnota zobecněného součinitele intenzity napětí H_I bude menší než prahová hodnota H_{th} . Podobně jako u předchozího kritéria i zde je možné převést kritérium stability do napěťové formy (viz vztah (49)), přičemž jedná-li se o únavovou trhlinu, je vhodnější hovořit o tzv. *prahovém* napětí a podmínka pro nešíření trhliny z rozhraní vypadá následovně:

$$\sigma_{\text{appl}} < \sigma_{th} , \quad (56)$$

kde

$$\sigma_{th} = \frac{H_{th}}{H_I(\sigma_{\text{appl}})} \cdot \sigma_{\text{appl}} . \quad (57)$$

5.2.3 Kritérium založené na faktoru hustoty deformační energie

V sedmdesátých letech minulého století odvodil Sih kritérium stability pro trhlinu v homogenním materiálu [117], [120], které je založeno na tzv. faktoru hustoty deformační energie. Toto kritérium se považuje za jedno ze základních a na rozdíl od většiny ostatních kritérií stability umožňuje kromě podmínek pro nestabilní šíření odhadnout i směr dalšího šíření trhliny.

Původně vychází Sihovo kritérium ze vztahu pro hustotu deformační energie pro trhlinu v homogenním materiálu. Pro dvojrozměrný problém lze hustotu deformační energie w určit ze vztahu:

$$\begin{aligned} w &= \frac{dW}{dV} = \frac{1}{8\mu} \left[k(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 4\sigma_{r\theta}^2 \right] = \\ &= \frac{1}{r} (a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2) \end{aligned} \quad (58)$$

V rovnici (58) představují σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ a $\sigma_{r\theta}$ jednotlivé složky tenzoru napětí, μ je modul pružnosti ve smyku, konstanta $k = (1-\nu)/(1+\nu)$ pro rovinnou napjatost a $k = 1-2\nu$ pro rovinnou deformaci, r je radiální vzdálenost od vrcholu trhliny, a_{11} , a_{22} a a_{12} jsou známé funkce úhlu θ a K_I , K_{II} jsou součinitele intenzity napětí pro módy zatěžování I a II.

Na základě vztahu (58) zavedl Sih faktor hustoty deformační energie S (někdy též zvaný jako Sihův faktor hustoty deformační energie), který je **nezávislý** na radiální vzdálenosti r od vrcholu trhliny, což je jeho zásadní předností, kvůli které byl původně zaveden a která se projevuje pouze v případě, kdy je exponent singularity napětí roven $1/2$. Sihův faktor hustoty deformační energie S je definován takto:

$$S = wr = a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2 \quad (59)$$

Obdobně byl odvozen tzv. zobecněný faktor hustoty deformační energie Σ pro trhlinu s vrcholem na rozhraní, viz např. [86], [89]:

$$\Sigma = wr = A_{11}H_1^2 + 2A_{12}H_1 H_2 + A_{22}H_2^2 \quad (60)$$

Rovnice (60) se liší od vztahu (59) především tím, že pro trhlinu s vrcholem na rozhraní není možné jednoduše oddělit módy zatěžování a proto jsou indexy zobecněných součinitelů intenzity napětí psány arabskými a nikoli římskými číslicemi a vyjadřují příslušnost k jednotlivým singularitám p_1 a p_2 (tedy nikoli k zatěžovacím módům!).

Druhým zásadním rozdílem je to, že u trhliny s vrcholem na rozhraní jsou A_{11} , A_{22} a A_{12} nejen funkcemi úhlu θ , ale také závisí na radiální vzdálenosti r od vrcholu trhliny. Zřejmým důsledkem je **závislost** i samotného faktoru Σ na veličině r . Z toho plyne, že v případech, kdy je exponent singularity napětí různý od $1/2$, ztrácí faktor hustoty deformační energie svou přednost, kvůli které byl původně u trhliny v homogenním materiálu zaveden. V důsledku toho všechna z něj odvozená kritéria (ať už kritéria stability či kritéria pro určení směru dalšího šíření trhliny z rozhraní) jsou u obecných singulárních koncentrátorů napětí prakticky identická s kritérii odvozenými na základě hustoty deformační energie.

I přes zmíněné komplikace, budou veličiny S , resp. Σ definované vztahy (59) a (60) v následujícím považovány za veličiny řídící šíření či nešíření trhliny a bude vysvětleno odvození kritéria stability pro kolmou trhlinu s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní.

Omezením se na problematiku kolmé trhliny s vrcholem na rozhraní se předchozí vztahy zjednoduší. Při přechodu rovnou k určení kritických hodnot řídicí veličiny L_C vyjde pro rovinnou deformaci a trhlinu v homogenním materiálu:

$$S_C = a_{11} \cdot K_{IC,th}^2 = \frac{1-2\nu}{4\pi\mu} \cdot K_{IC,th}^2 \quad (61)$$

a kolmou trhlinu s vrcholem na rozhraní:

$$\Sigma_C = A_{11} \cdot H_{IC,th}^2 = \frac{(1-p)^2}{4\pi\mu} r^{1-2p} [4(1-2\nu) + (g_R - p)^2] \cdot H_{IC,th}^2 \quad (62)$$

Vztahy (61) a (62) naznačují, že kritérium je vhodné jak pro křehké lomy, tak pro únavové trhliny. V rovnici (62) je taktéž vidět již avizovaná závislost konstanty A_{11} a tedy i zobecněného faktoru hustoty deformační energie na radiální vzdálenosti r od vrcholu trhliny. Význam všech veličin by měl být zřejmý z předchozích vztahů a kapitol.

Velikost kritické, potažmo prahové hodnoty zobecněného součinitele intenzity napětí lze určit porovnáním vztahů (61) a (62), tedy za předpokladu, že v okamžiku počátku šíření trhliny (ať už únavového nebo nestabilního) jsou hodnoty S_C a Σ_C totožné:

$$H_{IC,th} = \left(\frac{1-2\nu}{(1-p)^2 [4(1-2\nu) + (g_R - p)^2]} \right)^{\frac{1}{2}} r^{p-\frac{1}{2}} K_{IC,th} \quad (63)$$

Ve vztahu (63) opět všechny materiálové charakteristiky stejně jako funkce g_R odpovídají materiálu M2 za rozhráním, viz rovnice (36).

5.2.4 Kritérium otevření ve vrcholu trhliny CTOD

Kritérium stability založené na otevření ve vrcholu trhliny CTOD [7] může být aplikováno ve dvou různých formách. Jednak byl odvozen ryze numerický přístup založený na výpočtech pomocí MKP, který je univerzální a lze ho použít pro jakékoli kombinace materiálů (lineárně elastické, pružně plastické), a jednak bylo odvozeno kritérium na základě kombinace numerických simulací (MKP) a analytického řešení rozložení napětí a deformací v okolí vrcholu trhliny, jehož použití je omezeno na oblast LELM, tedy oblast malých plastických deformací (SSY).

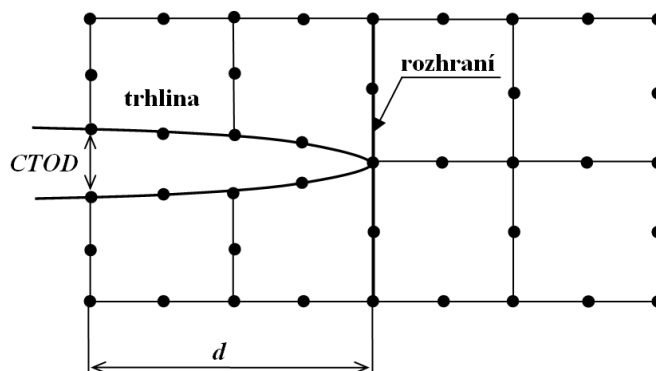
(a) Univerzální kritérium otevření trhliny CTOD (numerický přístup)

Princip této metody spočívá v určení velikosti CTOD přímo z numerických simulací, přičemž stěžejní je vhodná volba způsobu určení parametru CTOD a v úvahu připadají následující možnosti:

- určení CTOD pomocí otevření trhliny v místě průniku okraje plastické zóny s profilem trhliny [1], [51] – viz CTOD⁽¹⁾ na obr. 6,
- určení CTOD pomocí extrapolace lineární části profilu trhliny do jejího vrcholu [51] – viz CTOD⁽²⁾ na obr. 6,
- určení CTOD pomocí průniku profilu trhliny s přímkou vycházející z vrcholu trhliny pod úhlem 45° [1], [51] – viz CTOD⁽³⁾ na obr. 6.

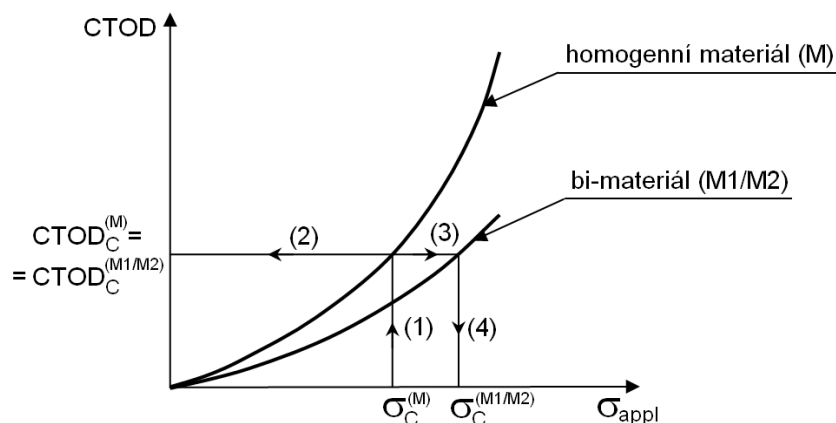
Každý z postupů je vhodný pro jinou skupinu problémů a nelze ho obecně aplikovat na libovolnou konfiguraci. Volba správné metody určení CTOD není snadná a vyžaduje jisté zkušenosti, viz [7] pro podrobnosti.

S výhodou je možné využít způsob stanovení $CTOD$ na základě velikosti posunutí profilu trhliny v dané vzdálenosti od jejího vrcholu (např. [126]), viz obr. 15, kterou odečteme v jednom z uzlů konečno-prvkové sítě, přičemž volba vhodného místa pro určení $CTOD$ hraje opět klíčovou roli. Vzdálenost d by měla zůstat zachována jak při analýze trhliny v homogenním materiálu, tak v bi-materiálu, aby byla zachována kompatibilita a bylo možné hodnoty porovnávat.



Obr. 15 Stanovení $CTOD$ pomocí posunutí v jednom z uzlů na lici trhliny ve vzdálenosti d od jejího vrcholu [7]

Samotný princip kritéria je potom takový, že se provede analýza problému trhliny v homogenním materiálu, stejně jako analýza problému trhliny v bi-materiálu, přičemž v obou případech se určí závislost $CTOD$ v dané vzdálenosti d od vrcholu trhliny na velikosti aplikovaného napětí. Ze znalosti kritického napětí pro trhlínu v homogenním materiálu se v dalším kroku určí kritická hodnota $CTOD$ pro trhlínu v homogenním materiálu, která je při předpokladu stejného mechanismu porušení totožná s kritickou hodnotou $CTOD$ pro trhlínu v bi-materiálu. A z této lze potom odvodit velikost kritického napětí pro bi-materiálové těleso s trhlínou – schéma postupu viz obr. 16.



Obr. 16 Schéma postupu určení kritického napětí pro trhlínu v bi-materiálu pomocí $CTOD$

(b) Kritérium otevření trhliny $CTOD$ (analyticko-numerický přístup)

Odvození kritéria stability založeného na $CTOD$ pomocí analyticko-numerického přístupu má podobnou strukturu jako odvození kritérií v předchozích kapitolách 5.2.1 až 5.2.3 a na rozdíl od předchozího postupu (a), který je univerzální s ohledem na povahu materiálů obou složek bi-materiálu, je omezeno pouze na oblast lineárně elastické lomové mechaniky a oblast malých pružně plastických deformací (SSY). V dalším bude uvažován pouze případ rovinné deformace (analogické vztahy pro rovinnou napjatost lze nalézt např. v [7]).

Na základě známého rozložení napětí před vrcholem trhliny (34) je možné stanovit potřebné složky tenzoru přetvoření ze zobecněného Hookeova zákona:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E} [\sigma_{rr} - \nu(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})] , \quad (64)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E} [\sigma_{\theta\theta} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{zz})] . \quad (65)$$

Posunutí u_r a u_θ v radiálním, resp. obvodovém směru lze následně získat integrací definičních výrazů pro složky tenzoru přetvoření:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} , \quad (66)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} . \quad (67)$$

Po integraci tedy získáme vztahy pro jednotlivá posunutí u_r a u_θ :

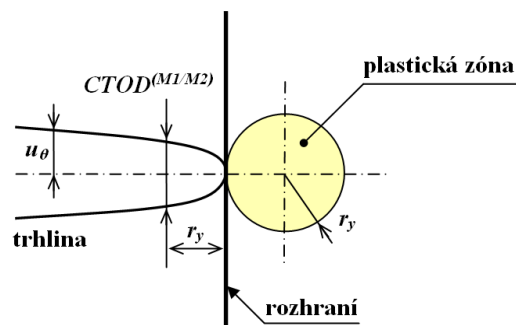
$$u_r^{(M1/M2)} = r^\lambda \frac{1}{E} [g_I(1+\nu)\sin(\lambda+1)\theta - g_R(1+\nu)\cos(\lambda+1)\theta + f_R(3-\lambda-\nu-\lambda\nu-4\nu^2)\cos(\lambda-1)\theta + f_I(-3+\lambda+\nu+\lambda\nu+4\nu^2)\sin(\lambda-1)\theta] A , \quad (68)$$

$$u_\theta^{(M1/M2)} = \lambda r^\lambda \frac{1}{E} \left\{ \frac{g_R}{\lambda}(1+\nu)\sin(\lambda+1)\theta + \frac{g_I}{\lambda}(1+\nu)\cos(\lambda+1)\theta + \frac{f_R}{\lambda-1} \left[(1-\nu^2) \left(\lambda+2-\frac{3}{\lambda} \right) - (\nu+\nu^2) \left(2-\lambda-\frac{1}{\lambda} \right) \right] \sin(\lambda-1)\theta + \frac{f_I}{\lambda-1} \left[(1-\nu^2) \left(\lambda+2-\frac{3}{\lambda} \right) + (\nu+\nu^2) \left(\lambda-2+\frac{1}{\lambda} \right) \right] \cos(\lambda-1)\theta \right\} A . \quad (69)$$

Na základě Irwinovy koncepce a platnosti předpokladu malých pružně plastických deformací lze stanovit otevření ve vrcholu trhliny *CTOD* jako velikost otevření trhliny ve vzdálenosti r_y za kořenem trhliny, viz např. [1]:

$$CTOD^{(M1/M2)} = \left| 2u_\theta^{(M1/M2)}(\theta = \pi, r = r_y) \right| , \quad (70)$$

kde r_y je poloměr plastické zóny na čele trhliny, viz obr. 17.



Obr. 17 Určení *CTOD* na základě Irwinovy koncepce ve vzdálenosti r_y za vrcholem trhliny

Velikost plastické zóny lze odvodit z Misesovy podmínky, tedy vztahu pro efektivní napětí ve tvaru:

$$\sigma_{eff} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2 + 6\sigma_{r\theta}^2} \quad (71)$$

z rovnosti $\sigma_{eff} = \sigma_0$, přičemž σ_0 je mez kluzu materiálu M2.

Výsledný vztah pro *CTOD* lze potom získat dosazením vztahů (34) do rovnice (71) za předpokladu $\theta = 0$ a $\sigma_{eff} = \sigma_0$ (mez kluzu materiálu M2!!!):

$$CTOD^{(M1/M2)} = \left| \frac{2\lambda}{E_1 \sqrt{2\pi}} H_I^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{\sigma_0} \right)^{\frac{1-p}{p}} Z_2 W_1(\pi) \right|, \quad (72)$$

kde

$$Z_2 = \left\{ \frac{(1-p)^2}{2\pi} \left[16\nu \left(\nu + \frac{1}{4\nu} - 1 \right) - 6g_R p + 3(g_R^2 + p^2) \right] \right\}^{\frac{1-p}{2p}} a \quad (73)$$

$$\begin{aligned} W_1(\pi) = & \frac{g_R}{\lambda} (1+\nu) \sin(\lambda+1)\pi + \frac{g_I}{\lambda} (1+\nu) \cos(\lambda+1)\pi + \\ & + \frac{f_R}{\lambda-1} \left[(1-\nu^2) \left(\lambda + 2 - \frac{3}{\lambda} \right) - (\nu + \nu^2) \left(2 - \lambda - \frac{1}{\lambda} \right) \right] \sin(\lambda-1)\pi + . \quad (74) \\ & + \frac{f_I}{\lambda-1} \left[(1-\nu^2) \left(\lambda + 2 - \frac{3}{\lambda} \right) + (\nu + \nu^2) \left(\lambda - 2 + \frac{1}{\lambda} \right) \right] \cos(\lambda-1)\pi \end{aligned}$$

Indexy 1 a 2 u funkcí Z_2 a W_1 symbolizují příslušnost k materiálu M1, resp. M2 a tudíž i všechny materiálové charakteristiky a příslušné funkce f_R , f_I , g_R a g_I musí být dosazeny ve tvaru pro daný materiál M1 ve funkci W_1 a pro materiál M2 ve funkci Z_2 , viz rovnice (35) a (36).

Z obecného postupu pro odvození kritérií stability pro trhlinu s vrcholem na rozhraní je zřejmé, že nyní je potřeba znát ještě výraz pro otevření ve vrcholu trhliny *CTOD* pro trhlinu v homogenním materiálu. Toto lze pro podmínky rovinné deformace nalézt např. v [1]:

$$CTOD^{(M)} = \frac{4}{\pi} \frac{K_I^2}{E \sigma_0} (1-2\nu)(1-\nu^2). \quad (75)$$

Dosazením kritických hodnot H_{IC} a K_{IC} , resp. H_{th} a K_{th} do vztahů (72) a (75) a jejich vzájemným porovnáním lze získat výsledný vztah pro $H_{IC,th}$ jako funkci $K_{IC,th}$ materiálu M2:

$$H_{IC,th} = K_{IC,th}^{2p} \sigma_0^{1-2p} \left| \frac{E_1}{E_2} \frac{2}{1-p} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1-2\nu_2)(1-\nu_2^2) \frac{1}{Z_2} \frac{1}{W_1(\pi)} \right|^p. \quad (76)$$

Poznamenejme, že ve vztahu (76) se poprvé, narozdíl od vztahů (46), (55) a (63) odvozených pro $H_{IC} = H_{IC}(K_{IC})$, resp. $H_{th} = H_{th}(K_{th})$ pomocí předchozích kritérií, kombinují vlastnosti jak materiálu před (M1) tak za (M2) rozhraním bi-materiálového tělesa (u předchozích kritérií se ve výsledných vztazích objevují pouze materiálové charakteristiky a jejich funkce materiálu za rozhraním). Tvar funkcí Z_2 a W_1 odpovídá rovnicím (73) a (74), kde byl současně vysvětlen i význam jejich indexů.

Kritérium stability pro nešíření trhliny z rozhraní lze pak zapsat klasicky například ve tvaru:

$$H_I(\sigma_{appl}) < H_{IC,th}(\sigma_{C,th}). \quad (77)$$

5.2.5 Kritérium otevření trhliny COD

Princip kritéria otevření trhliny *COD* je obdobný jako u kritéria otevření ve vrcholu trhliny *CTOD* založeného ryze na numerickém přístupu – předchozí kapitola 5.2.4, oddíl *a*). Výhodou je tedy opět jeho univerzálnost a mezi nevýhody se dá zařadit výrazná závislost na tzv. oblasti posouzení *d*, která se zvolí pro hodnocení tělesa s trhlinou.

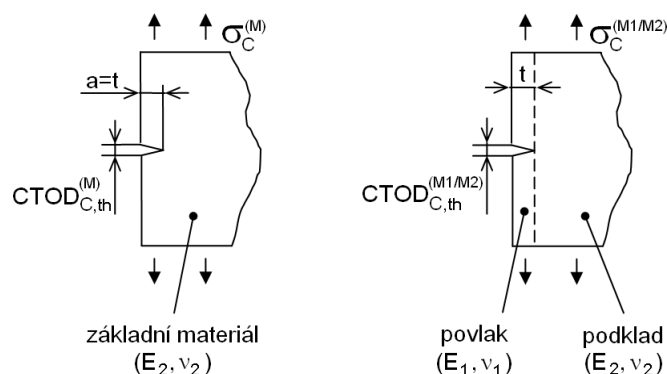
Postup stanovování kritického napětí pro trhlinu s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní spočívá v analýze a srovnání homogenního tělesa s trhlinou a případu trhliny s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní:

- U homogenního tělesa s trhlinou se pro hodnotu kritického napětí vykreslí deformovaný profil trhliny.
- U trhliny s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní je nutné provést rozsáhlejší studii a jednotlivé profily trhliny zaznamenat pro větší rozsah hodnot aplikovaného napětí.
- Profil trhliny v homogenním materiálu při aplikaci kritického napětí se následně porovnává s profily trhliny v bi-materiálovém tělese pro různé hodnoty aplikovaného napětí.
- Kritické napětí pro trhlinu s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní je pak dáno velikostí aplikovaného napětí, pro něž se profil trhliny na tzv. porovnávací oblasti *d* nejlépe shoduje s profilem trhliny v homogenním materiálu při aplikaci kritického napětí (nejlepší shoda se definuje pomocí metody nejmenších čtverců).

Více k této metodě např. v [7].

5.2.6 Kritérium otevření trhliny na povrchu součásti *CMOD*

Kritérium založené na velikosti otevření trhliny na povrchu součásti *CMOD* (jakožto speciálního případu otevření trhliny *COD*) může být s dostatečnou přesností použito u trhlín s vrcholem na rozhraní bi-materiálového tělesa typu podklad-tenká ochranná vrstva, viz obr. 18. Neboť pouze podmínky v bezprostředním okolí vrcholu trhliny rozhodují o dalším šíření či nešíření trhliny, musí být povrchová vrstva dostatečně tenká, aby mohlo být toto kritérium s uspokojivou přesností aplikováno.



Obr. 18 Kritická hodnota otevření trhliny na povrchu tělesa $CMOD_C$ pro trhlinu v homogenním materiálu, resp. bi-materiálovém tělese typu podklad-tenká ochranná vrstva [7]

Dá se ukázat, že dominantní konfigurací u těles sestávajících z podkladu a tenké povrchové vrstvy je trhlinka kolmá k rozhraní (iniciovaná z povrchu povlaku v důsledku namáhání či nejrůznějších vnějších vlivů), a to bez ohledu na velikost poměru materiálových parametrů povrchové vrstvy a podkladu [140]. V citované práci je ukázáno, že základním rysem šíření trhliny v tenkých povrchových vrstvách je tendence stáčení trhliny směrem k rozhraní, a to převážně v důsledku specifické konfigurace studovaného tělesa (geometrie, zatěžování). Základní mechanismus porušování tenkých povrchových vrstev je tedy téměř výhradně spojen s šířením trhliny kolmo k rozhraní.

Aplikace kritéria otevření trhliny na povrchu součásti $CMOD$ může být v zásadě podobně jako u kritéria v kapitole 5.2.4 provedena dvěma způsoby, v závislosti na metodice stanovení parametru $CMOD$ u trhliny v homogenním materiálu. Lze využít buď:

- univerzální postup založený na určení $CMOD$ pomocí numerických simulací nebo
- postup založený na znalosti analytického vztahu pro $CMOD^{(M)}$ v homogenním materiálu, který omezuje platnost této metody na oblast malých pružně plastických deformací (SSY) a tedy oblast lineárně elastické lomové mechaniky.

Numerické simulaci bi-materiálového tělesa s trhlínou na rozhraní se však nelze vyhnout v žádném z obou přístupů.

V prvním kroku je nutné určit kritickou hodnotu $CMOD$ pro trhlínu v homogenním materiálu. Toto je možné provést buď přímým odečtením této hodnoty z modelu po provedení numerické simulace homogenního tělesa s trhlínou délky $a = t$ (kde t je tloušťka povrchové vrstvy bi-materiálu) namáhaného kritickým napětím, nebo pomocí obecně známého analytického vztahu, který však omezuje platnost tohoto postupu pouze na problémy LELM:

$$CMOD_{C,th}^{(M)} = \frac{4(1-\nu^2)}{E} K_{IC,th} \sqrt{\frac{2a}{\pi}} = \frac{4(1-\nu^2)}{E} K_{IC,th} \sqrt{\frac{2t}{\pi}} . \quad (78)$$

Další možností, jak určit tuto hodnotu je provedení experimentu na reálném homogenním vzorku s trhlínou.

Za předpokladu stejného mechanismu porušení homogenního tělesa s trhlínou a bi-materiálu s trhlínou na rozhraní lze považovat kritickou hodnotu $CMOD$ pro trhlínu v homogenním materiálu současně za kritickou hodnotu $CMOD$ pro trhlínu s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní:

$$CMOD_{C,th}^{(M)} = CMOD_{C,th}^{(M1/M2)} . \quad (79)$$

Určení kritického napětí pro trhlínu s vrcholem na rozhraní mezi povrchovou vrstvou a podkladem se následně provádí iteračně pomocí numerických simulací metodou konečných prvků.

5.2.7 Volba délkových parametrů v kritériích stability

Na rozdíl od kritérií stability pro trhlínu v homogenním materiálu, vykazují kritéria stability pro obecný singulární koncentrátor napětí jednu velkou nevýhodu – jsou závislé na jistém délkovém parametru d , případně r . Tato veličina se vyskytuje ve výrazech pro kritické napětí, resp. kritickou či prahovou hodnotu zobecněného součinitele intenzity napětí buď explicitně (jako velikost oblasti před vrcholem trhliny, přes kterou se integruje rozevírací napětí, nebo jako radiální vzdálenost, ve které se určuje zobecněný faktor

hustoty deformační energie – viz kapitoly 5.2.1 a 5.2.3) nebo implicitně (u kritérií založených na vlastnostech plastické zóny – viz kapitola 5.2.2).

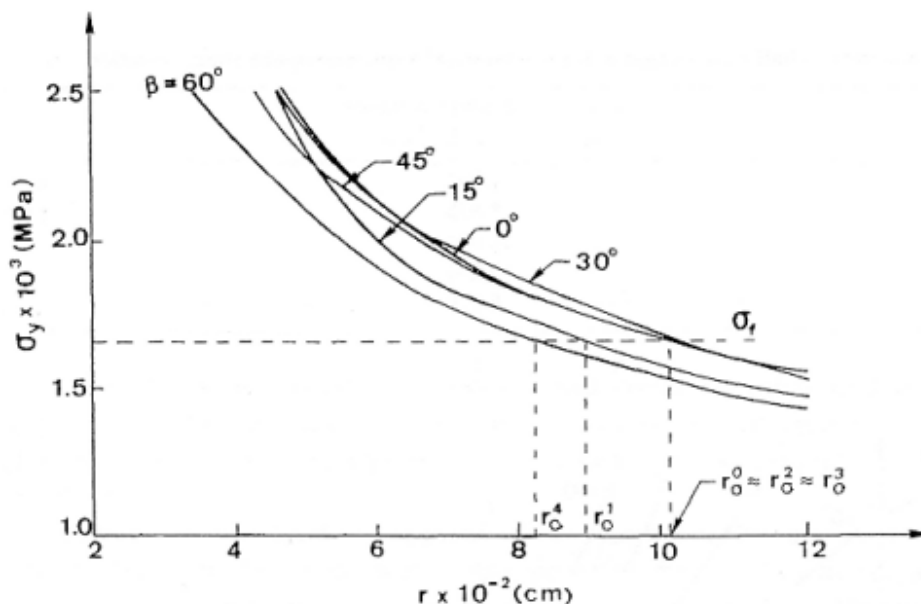
Význam tohoto parametru, resp. metodika pro jeho určení zatím nejsou v literatuře uspokojivě vysvětleny. V souvislosti s touto problematikou je vhodné zmínit tzv. teorii kritických vzdáleností (theory of critical distances, TCD), viz např. [128], [129] a [130], která byla původně odvozena pro hodnocení únavové životnosti součástí s trhlinou. Tato teorie na základě různých koncepcí (bodová metoda, přímková metoda, plošná metoda, objemová metoda a další) zohledňuje při hodnocení součásti s trhlinou právě pomocí tzv. kritických vzdáleností reálné rozložení napětí v okolí vrcholu trhliny, neboť klasická mechanika kontinua nadhodnocuje hodnoty napětí před vrcholem trhliny.

Obecně se dá na základě dostupné literatury o problematice stanovení vhodné vzdálenosti pro aplikaci kritérií stability konstatovat, že:

- délkový parametr by měl nějakým způsobem souviset s mechanismem porušení materiálu;
- u kovů může jeho velikost odpovídat velikosti jednoho či několika zrn (vliv mikrostruktury);
- Sih ve své práci [122] odvozuje tuto veličinu pro křehké porušení u V-vrubů pomocí hodnoty rozevíracího napětí před vrcholem trhliny, přičemž hledá místo, kde je splněna podmínka $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_f$, kde σ_f je lomové napětí – viz obr. 19;
- v práci [116] je na základě Sihovy myšlenky navržen analytický vztah ve tvaru:

$$d = r = \frac{1}{2\pi} \frac{K_{IC}^2}{\sigma_C^2} . \quad (80)$$

- u materiálů, kde vznikají před vrcholem trhliny větší plastické deformace, může délkový parametr souviset s velikostí plastické zóny před vrcholem trhliny.



Obr. 19 Sihův odhad délkového parametru r , resp. d pomocí rozevíracího napětí před vrcholem trhliny pro V-vrubu s různým úhlem rozevření, tzn. s různou singularitou napětí [122]

Přístupů, jak odhadnout tento délkový parametr nezbytný pro aplikaci kritérií stability, je tedy více, přičemž každý způsob je vhodný pro jiné situace. U konkrétního

problému je vždy možné provést alespoň rámcově citlivostní analýzu závislosti kritického napětí na veličině r , resp. d . Ve většině dosud studovaných případů tato závislost není příliš silná a postačuje proto hodnotu r , resp. d odhadnout pouze řádově.

V případě kritérií stability založených na hodnotě otevření trhliny (kapitoly 5.2.4 až 5.2.6) je hodnota délkového parametru dána způsobem definice příslušného lomové mechanického parametru (např. *CTOD*). Dodržuje-li se následně stejná definice pro homogenní případ i pro trhlínu s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní, je výsledné kritické napětí dáno v podstatě poměrem obou veličin a závislost na definici není příliš výrazná.

5.2.8 Diskuze a zhodnocení uvedených kritérií stability

Následující kapitola je věnována krátké diskuzi a zhodnocení uvedených kritérií stability pro trhlínu s vrcholem na rozhraní. Její obsah by měl být shrnutím, případně rozšířením závěrů publikovaných v pracích [7] a [86].

Kritérium středního napětí (kapitola 5.2.1) a kritérium založené na velikosti plastické zóny před vrcholem trhliny (kapitola 5.2.2) jsou vhodná především pro trhliny kolmé k rozhraní (což z nich dělá ideální postupy pro hodnocení trhlín v tenkých povlacích), a ačkoli každé z nich bylo primárně odvozeno pro jiný způsob porušení (křehký lom v případě kritéria středního napětí a šíření únavové trhliny v případě kritéria založeného na velikosti plastické zóny před vrcholem trhliny), dávají obě kritéria podobné výsledky a bylo ukázáno, že lze obě s uspokojivým výsledkem využít pro oba mechanismy porušování.

Kritérium založené na velikosti plastické zóny navíc nevykazuje explicitní závislost na délkovém parametru a je vhodné pro případy, kdy je nutné stanovit rychlost šíření trhliny.

Kritérium zobecněného faktoru hustoty deformační energie (kapitola 5.2.3) lze s výhodou využít u problémů trhliny obecně orientované k bi-materiálovému rozhraní a problémů, kdy je trhlina namáhána ve smíšeném módu, tj. kombinací normálového (I) a smykového (II) módu.

Co se týče kritérií založených na otevření trhliny (kapitoly 5.2.4 až 5.2.6), tato jsou výhodná především z toho hlediska, že umožňují hodnocení chování trhlín s vrcholem na rozhraní nejen mezi lineárně elastickými ale i pružně plastickými materiály. Toto zaručují všechna kritéria založená na ryze numerickém postupu při určování parametrů otevření trhliny. Je-li k odvození těchto parametrů využito analytických vztahů, důsledkem je omezení dalšího použití kritérií pouze na oblast malých pružně plastických deformací (SSY) a LELM.

S výjimkou kritéria stability založeného na veličině *CMOD* (kapitola 5.2.6), které je určeno výhradně pro hodnocení trhliny s vrcholem na rozhraní bi-materiálu typu tenká ochranná vrstva-podklad, je možné všechna ostatní kritéria založená na otevření trhliny (při splnění předpokladů, za jakých byla formulována) využít pro libovolnou geometrickou konfiguraci bi-materiálového tělesa s trhlínou.

Na závěr ještě poznamenejme, že veškerá uváděná kritéria stability pro trhlínu s vrcholem na rozhraní přejdou pro hodnotu exponentu singularity napětí $p = 1/2$ do tvaru kritérií stability pro trhlínu v homogenním materiálu, v jakém jsou známa z klasické LELM.

5.3 Směr šíření trhliny

V řadě praktických aplikací je výhodné z hlediska odhadu zbytkové životnosti konstrukce znát směr dalšího šíření trhliny.

Pro trhlínu šířící se v homogenním materiálu jsou pro určení směru dalšího šíření trhliny obecně orientované vzhledem k zatížení (namáhané kombinací módů I a II) k dispozici např. kritérium maximálních tangenciálních napětí [39], kritérium maximální tangenciální deformace, kritérium maxima tenzoru napětí, kritérium založené na faktoru hustoty deformační energie (někdy též nazývané Sihovo kritérium [120]), kritérium maximální hustoty objemové deformace a další, viz např. [108].

V této práci se pro odhad směru šíření obecně orientované trhliny z rozhraní do materiálu M2 převážně využívá kritérium maximálních tangenciálních napětí (MTS kritérium), kritérium minimální hodnoty faktoru hustoty deformační energie (SEDF kritérium) nebo z něj odvozené modifikace.

5.3.1 Kritérium maximálních tangenciálních napětí (MTS kritérium)

Kritérium maximálních tangenciálních napětí (MTS kritérium) je založeno na předpokladu, že trhlina se bude šířit ve směru $\theta = \gamma$, ve kterém je hodnota tangenciálního napětí $\sigma_{\theta\theta}$ před vrcholem trhliny maximální. Matematicky lze tuto podmínku formulovat následovně:

$$\left(\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} \right)_{\theta=\gamma} = 0 \quad \text{a} \quad \left(\frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} \right)_{\theta=\gamma} < 0 . \quad (81)$$

Hledá se tedy místo (úhel $\theta = \gamma$) před vrcholem trhliny, ve kterém je první derivace výrazu pro rozložení tangenciálního napětí $\sigma_{\theta\theta}$ (rovnice (82)) nulová a druhá derivace téhož výrazu záporná.

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = & \lambda_1(\lambda_1 + 1)r^{\lambda_1-1} \left[a_1^{(2)} \sin(\lambda_1 + 1)\theta + b_1^{(2)} \cos(\lambda_1 + 1)\theta + c_1^{(2)} \sin(\lambda_1 - 1)\theta + \right. \\ & \left. + d_1^{(2)} \cos(\lambda_1 - 1)\theta \right] \frac{H_1}{\sqrt{2\pi}} + \lambda_2(\lambda_2 + 1)r^{\lambda_2-1} \left[a_2^{(2)} \sin(\lambda_2 + 1)\theta + \right. \\ & \left. + b_2^{(2)} \cos(\lambda_2 + 1)\theta + c_2^{(2)} \sin(\lambda_2 - 1)\theta + d_2^{(2)} \cos(\lambda_2 - 1)\theta \right] \frac{H_2}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned} \quad (82)$$

Značení v rovnici (82) je totožné, jako bylo použito a vysvětleno ve vztazích (23) až (25).

Druhým možným přístupem, jak toto kritérium aplikovat, je využít ryze numerické řešení daného problému (numerickou simulací pomocí MKP). Přímo z numerického řešení rozložení napětí před vrcholem trhliny pak lze určit místo (úhel), ve kterém jsou tangenciální napětí maximální.

Připomeňme, že i toto kritérium pro odhad směru dalšího šíření trhliny z bi-materiálového rozhraní je (stejně jako všechna předchozí kritéria stability) závislé na volbě radiální vzdálenosti r , ve které je aplikováno. Toto platí jak při využití analytického vztahu (82), tak při využití ryze numerického řešení, kdy je nutné kolem vrcholu trhliny v materiálu M2 modelovat oblouk poloměru r , po jehož obvodu se pak maximum tangenciálních napětí hledá.

5.3.2 Kritérium minimálního faktoru hustoty deformační energie (SEDF kritérium)

Druhým kritériem pro určení směru dalšího šíření trhliny je kritérium minimálního faktoru hustoty deformační energie, v homogenním případě nazývané taktéž „Sihovo“ kritérium. Toto kritérium využívá pro odhad úhlu γ znalosti rozložení veličiny S , resp. Σ (viz kapitoly 2.1.4 nebo 5.2.3) před vrcholem trhliny. Kritérium bylo stejně jako všechna ostatní kritéria původně odvozeno pro šíření trhliny v homogenním materiálu, přičemž předpokládá, že trhlina se bude šířit ve směru $\theta = \gamma$, ve kterém je hodnota faktoru hustoty deformační energie S minimální:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)_{\theta=\gamma} = 0 \quad \text{a} \quad \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2}\right)_{\theta=\gamma} > 0 . \quad (83)$$

Pro trhlinu s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní bylo analogické kritérium odvozeno a navrženo v práci [86]. Myšlenka je stejná, pouze se zde hovoří o tzv. zobecněném faktoru hustoty deformační energie Σ :

$$\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \theta}\right)_{\theta=\gamma} = 0 \quad \text{a} \quad \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \theta^2}\right)_{\theta=\gamma} > 0 . \quad (84)$$

Protože zobecněný faktor hustoty deformační energie Σ je definován jako:

$$\Sigma = wr = A_{11}H_1^2 + 2A_{12}H_1H_2 + A_{22}H_2^2 , \quad (85)$$

kde A_{11} , A_{12} a A_{22} jsou mj. funkce radiální vzdálenosti r , je taktéž samotné kritérium (vztah (84)) závislé na volbě této veličiny.

5.3.3 Jiné přístupy k odhadu směru dalšího šíření trhliny z rozhraní

(a) Hustota deformační energie

Jednou ze základních modifikací SEDF kritéria je na ryze numerickém přístupu založené kritérium postavené na předpokladu, že trhlina se bude šířit ve směru minimální hustoty deformační energie (SED kritérium). Toto kritérium je odvozené z definičního vztahu mezi zobecněným faktorem hustoty deformační energie Σ a hustotou deformační energie w , viz např. rovnice (85).

Jestliže se v SEDF kritériu v kapitole 5.3.2 hledá minimum zobecněného faktoru hustoty deformační energie, pak podle definičního vztahu (85) je toto místo (úhel), kde Σ tohoto minima nabývá, totožné s místem, kde minimum nastává taktéž pro veličinu w (hustotu deformační energie).

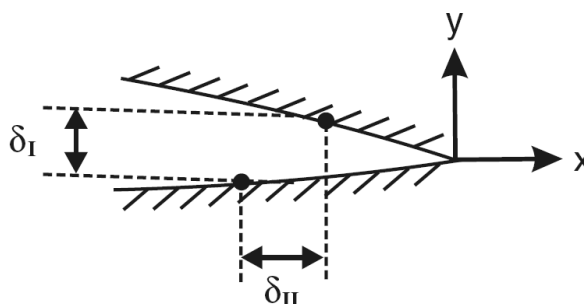
(b) Oddělení zatěžovacích módů I a II

Velkou nevýhodou při popisu obecných singulárních koncentrátorů napětí charakterizovaných dvěma exponenty singularity napětí p_1 a p_2 je to, že ve vztazích pro jednotlivé složky napětí, viz např. rovnice (23) až (25), se vyskytují zobecněné součinitele intenzity napětí H_1 a H_2 odpovídající jednotlivým singularitám ale nikoli zatěžovacím módům, jak je tomu u trhliny v homogenním materiálu. V tomto případě každá veličina H_1 i H_2 v sobě zahrnuje oba zatěžovací módy I i II.

V literatuře [73] se uvádí, že u trhliny v homogenním materiálu se dá směr dalšího šíření odhadnout z posuvů na lících trhliny v jednotlivých směrech:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\delta_{II}}{\delta_I}, \quad (86)$$

kde δ_I a δ_{II} jsou posunutí na lících trhliny podle obrázku 20.



Obr. 20 Posunutí na lících trhliny

Pro homogenní těleso lze vztah (86) přepsat pro úhel $\theta = 0$ (před vrcholem trhliny) do tvaru se součiniteli intenzity napětí pro jednotlivé módy zatěžování [1]:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{K_{II}}{K_I}. \quad (87)$$

U obecných singulárních koncentrátorů napětí se dvěma singularitami napětí je situace komplikovanější vzhledem k tomu, že součinitele intenzity napětí H_I a H_{II} vystupující ve vztazích pro jednotlivé složky napětí před vrcholem trhliny (23) až (25) v sobě primárně zahrnují oba módy zatěžování.

Postup pro oddělení jednotlivých módů byl navržen v práci [140], kde je toto provedeno pro speciální případ $\theta = 0$:

- Z numerického řešení problému lze získat průběh normálové, resp. smykové složky napětí před čelem trhliny v závislosti na radiální vzdálenosti od vrcholu trhliny ($\sigma_{\theta\theta}(r, \theta = 0)$, resp. $\sigma_{r\theta}(r, \theta = 0)$).
- Z těchto průběhů a vztahů platných pro úhel $\theta = 0$ (rovnice (88) a (89)) lze získat nejprve exponenty singularity napětí p_I a p_{II} , dále k nim příslušející vlastní vektory a následně zobecněné součinitele intenzity napětí H_I a H_{II} . Poznamenejme, že tyto veličiny nejsou totožné s veličinami p_1 , p_2 a H_1 , H_2 vyskytujícími se v obecném analytickém řešení problému trhliny s vrcholem na rozhraní (23) až (25).

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{H_I}{r^{p_I}} \cdot f_I(\theta = 0), \text{ resp.} \quad (88)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{H_{II}}{r^{p_{II}}} \cdot f_{II}(\theta = 0). \quad (89)$$

- Uvedený postup je formálně možný, neboť právě pro $\theta = 0$ obsahuje rozvoj popisující napětí $\sigma_{\theta\theta}$ pouze sudé, tedy kosinové členy, které odpovídají módu I zatěžování a podobně napětí $\sigma_{r\theta}$ je pro $\theta = 0$ popsáno pouze lichými, sinovými členy, což odpovídá zatěžujícímu módu II.
- Na základě znalosti zobecněných součinitelů intenzity napětí H_I a H_{II} pro jednotlivé módy zatěžování lze v posledním kroku pro odhad směru dalšího šíření trhliny z rozhraní využít analogický vztah, jako byl odvozen pro trhlínu v homogenním materiálu, viz rovnice (87):

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{H_{II}}{H_I} . \quad (90)$$

(c) *Dominantní singularita napětí*

Další z metod, jak se vypořádat s problémem dvou singularit napětí, které daný problém významně komplikují, je uvažovat při řešení pouze tzv. dominantní singularitu. To znamená určit oba exponenty singularity napětí p_1 i p_2 , ale v dalším řešení uvažovat pouze p_1 , přičemž platí $p_1 > p_2$. Tento postup se velice často vyskytuje v odborné literatuře při řešení problémů s obecnými singulárními koncentrátory napětí.

5.4 Metoda váhových funkcí

Metoda váhových funkcí je jednou z metod pro určení součinitele intenzity napětí navržená Buecknerem [21]. Je vybudována na předpokladu, že pro každou geometrickou konfiguraci tělesa s trhlinou existuje tzv. váhová funkce h . Pokud je tato funkce známa, lze získat součinitel intenzity napětí ze znalosti napětí (jako funkce geometrie tělesa a trhliny) a této váhové funkce pomocí vztahu:

$$K_I = \int_0^a \sigma(x) h(x, a) dx . \quad (91)$$

Obrovskou výhodou této metody je to, že váhová funkce závisí pouze na geometrii součásti s trhlinou. Poté postačuje znalost rozložení napětí v tělese a dostupnost vhodného matematického softwaru pro vyčíslení integrálu (91).

Tato metoda je v literatuře týkající se keramických laminátů, viz např. [12], [14], [15], [17], často využívaná pro určování tzv. zdánlivé lomové houževnatosti těchto kompozitů, přičemž konkrétně se aplikuje váhová funkce pro „edge-cracked plate“, tedy pro desku s rohovou trhlinou [41], [42]:

$$h = \sqrt{\frac{2}{\pi a}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x}{a}}} \left[1 + \sum_{\nu=0}^2 \sum_{\mu=0}^4 \frac{A_{\nu\mu} \left(\frac{a}{W}\right)^\mu}{\left(1 - \frac{a}{W}\right)^{3/2}} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{\nu+1} \right] . \quad (92)$$

Funkce (92) byla odvozena pomocí metody hraničních kolokací, viz např. [41]. Ve vztahu (92) je a délka trhliny, W šířka tělesa ve směru trhliny a konstanty $A_{\nu\mu}$ nabývají hodnot podle tabulky I. Poznamenejme, že ve vztahu (92) představují ν a μ indexy používané autory v [41], přes které se provádí součet, a nikoli elastické konstanty materiálu (Poissonovo číslo, modul pružnosti ve smyku), jak je tomu obvykle.

Tab. I Hodnoty koeficientu $A_{\nu\mu}$ pro váhovou funkci (92)

| $A_{\nu\mu}$ | $\mu = 0$ | $\mu = 1$ | $\mu = 2$ | $\mu = 3$ | $\mu = 4$ |
|--------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\nu = 0$ | 0,498 | 2,4463 | 0,07 | 1,3187 | -3,067 |
| $\nu = 1$ | 0,5416 | -5,0806 | 24,3447 | -32,7208 | 18,1214 |
| $\nu = 2$ | -0,19277 | 2,55863 | -12,6415 | 19,763 | -10,986 |

6 VÝSLEDKY

Následující kapitola věnující se autorčiným výsledkům dosaženým v oblasti problematiky šíření trhlin v blízkosti a přes rozhraní dvou materiálů bude rozdělena na dva samostatné celky.

Jelikož v počátcích studia dané problematiky byl důraz kladen především na obecné studie (např. směru šíření trhliny, existence tzv. rohové singularity apod.) a spíše teoretické problémy, bude první část této kapitoly věnována právě těmto oblastem.

V druhé části pak budou uvedeny všechny nezbytné výsledky týkající se aplikačních oblastí. Jedná se především o šíření kolmých trhlin ve vícevrstvých polymerních trubkách a dále o tzv. zdánlivou lomovou houževnatost keramických laminátů. V druhém případě souvisí nárůst lomové houževnatosti mj. taktéž s tzv. „schodovitým“ mechanismem šíření trhliny skrze tloušťku laminátu a proto bude důraz kladen i na odhad změny směru šíření trhliny při průchodu z jedné vrstvy přes rozhraní do vrstvy další.

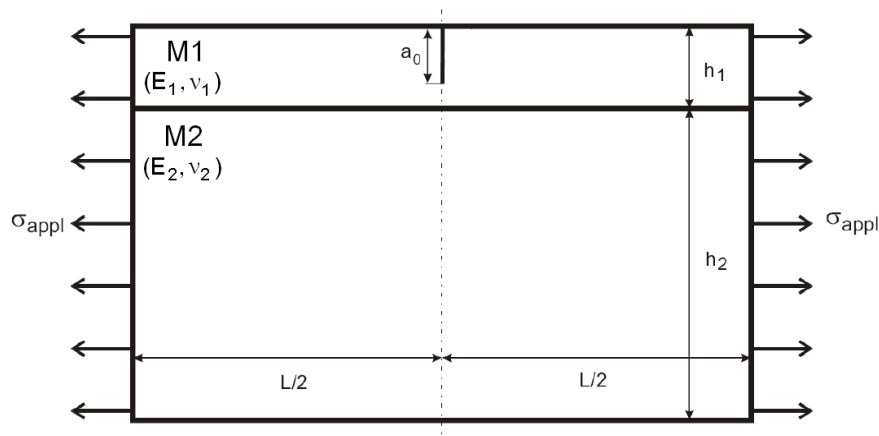
6.1 Teoretické studie

Teoretická část bude věnována provedeným parametrickým studiím v rámci problematiky šíření trhlin v blízkosti a přes rozhraní dvou materiálů. Vzhledem k tomu, že v literatuře jsou často uvedeny výsledky popisující interakci trhliny s rozhraním materiálů bez odkazu na přesnou formulaci okrajových podmínek, je tato problematika analyzována v předkládané práci poměrně detailně. Zejména jsou prezentovány K -kalibrační křivky pro různé poměry elastických vlastností obou materiálů nebo analogické závislosti pro T -napětí, resp. parametr biaxiality B . Budou uvedeny závislosti směru dalšího šíření trhliny z rozhraní, příp. exponentu singularity napětí na materiálových vlastnostech obou složek, diskutován bude vliv volného povrchu na tyto veličiny atd.

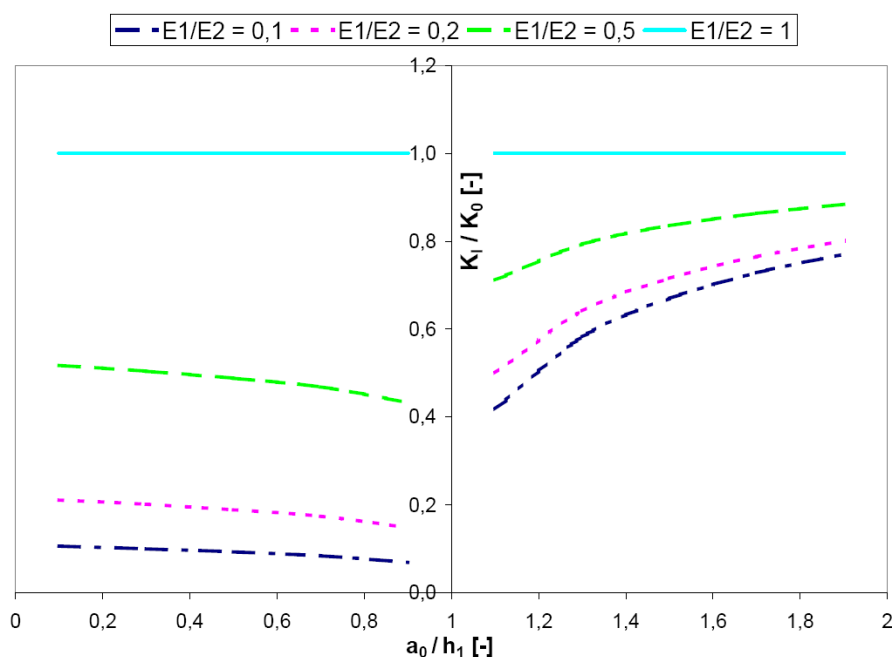
6.1.1 Trhlina v blízkosti materiálového rozhraní

Již v rámci diplomové práce [136] byl studován vliv rozhraní na šíření kolmé trhliny s vrcholem v jeho blízkosti, přičemž bylo odkazováno na práci [77], kde je ukázáno, že ačkoli je počáteční trhlina v tenké vrstvě obecně orientovaná vzhledem k rozhraní, dochází v důsledku specifické geometrie (tenká vrstva – masivní podklad) téměř výhradně (bez ohledu na materiálové vlastnosti obou vrstev) ke stáčení trhliny směrem k rozhraní a následně k vytvoření konfigurace trhliny **kolmé** k rozhraní.

V práci [136] byly pomocí metody konečných prvků určeny K -kalibrační křivky pro kolmou trhlinu blízkou k rozhraní, schéma viz obr. 21, a trhlinu po průchodu rozhraním. Studován byl zejména vliv materiálových vlastností obou složek na hodnotu součinitele intenzity napětí, přičemž byl pozorován tzv. stínící efekt rozhraní (pokles součinitelů intenzity napětí před rozhraním) pro trhlinu šířící se z poddajnějšího do tužšího materiálu, viz obr. 22, a naopak. Analýza byla provedena pro podklad opatřený tenkou povrchovou vrstvou i pro bi-materiálové těleso, kde jsou tloušťky obou materiálů srovnatelné a kde se ukázalo, že rozhraní ovlivňuje hodnoty součinitelů intenzity napětí pouze u trhlin s vrcholem v těsné blízkosti rozhraní. Analogické grafy byly sestrojeny taktéž pro T -napětí.



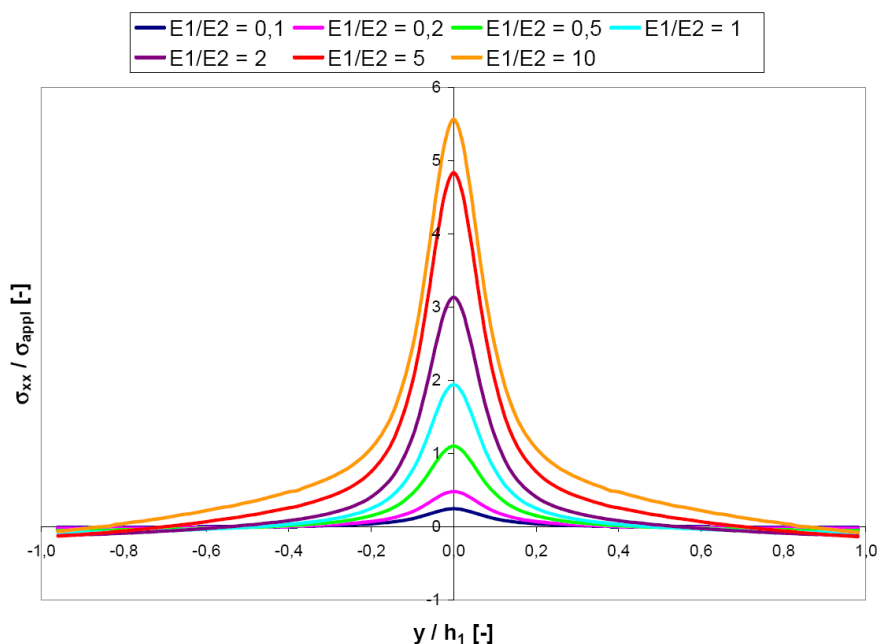
Obr. 21 Schéma a značení modelovaného tělesa s tenkou povrchovou vrstvou obsahující kolmou trhlinu



Obr. 22 Závislost normované hodnoty součinitele intenzity napětí K_1/K_0 na relativní délce trhliny (h_1 je tloušťka povrchové vrstvy) pro případ poddajnější povrchové vrstvy vzhledem k podkladu

Studováno bylo taktéž rozložení napětí v rozhraní pro různé délky trhlin a různé materiálové vlastnosti jednotlivých složek v souvislosti s možnou delaminací povrchové vrstvy [135], [136], [140], [141]. Rozhodující složkou pro delaminaci je obvykle tahová složka napětí působící kolmo k rozhraní. Její průběhy před vrcholem trhliny pro jednotlivé poměry modulů pružnosti v tahu vrstvy a podkladu (E_1/E_2) pro trhlinu s vrcholem vzdáleným 0,1 mm od rozhraní lze vidět na obr. 23.

Na základě zjištěných napjatostních poměrů v tělese a v odborné literatuře nalezených charakteristik rozhraní a mikrostruktury materiálů byla pro konkrétní materiálovou kombinaci Al_2O_3 -ocel diskutována v pracích [135] a [136] možnost delaminace rozhraní versus průchod trhliny přes rozhraní do podkladu.

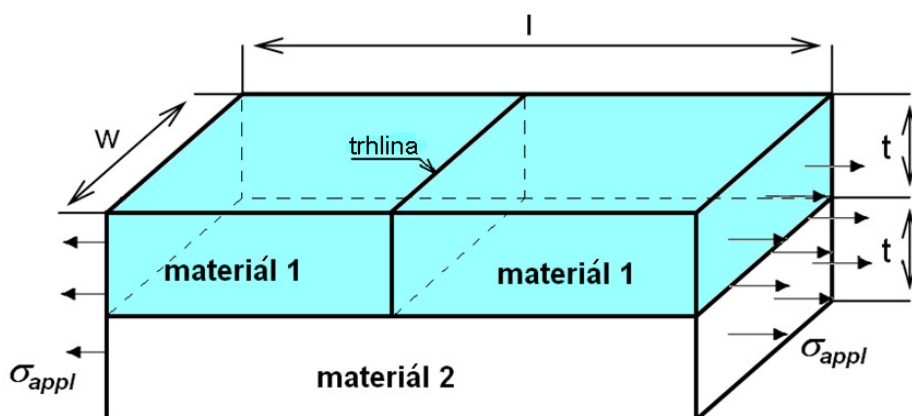


Obr. 23 Průběh normovaného tahového napětí v rozhraní před vrcholem trhliny vzdálené 0,1 mm od rozhraní pro různé poměry modulů pružnosti v tahu vrstvy a podkladu (osu symetrie tělesa představuje svislá osa grafu)

6.1.2 Kolmá trhlina s vrcholem na rozhraní bi-materiálového tělesa

Zatímco předchozí kapitola 6.1.1 se týkala šíření trhliny v blízkosti materiálového rozhraní, následující kapitola již bude věnována komplikovanějšímu případu, a to problému trhliny s vrcholem na rozhraní.

V úvodních kapitolách této práce bylo vysvětleno, že dosáhne-li vrchol trhliny materiálového rozhraní, dochází ke změně singularity napětí z $1/2$ na obecnou hodnotu p , která se nazývá exponent singularity napětí. V jedné z provedených studií [97] byly porovnávány hodnoty p pro kolmou trhlina na rozhraní bi-materiálového tělesa určené jednak analyticky z charakteristické rovnice (39), jednak numericky z 2D modelu za předpokladu podmínek rovinné deformace a jednak z 3D modelu, viz obr. 24.



Obr. 24 Geometrie studovaného bi-materiálového tělesa s trhlinou na rozhraní

Při numerickém řešení bylo využito vztahu:

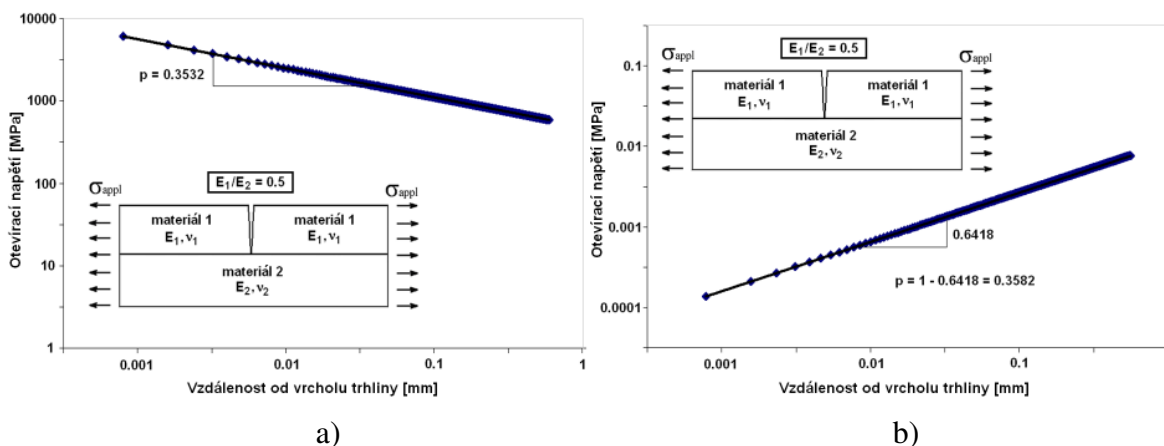
$$\sigma_{ij} = \frac{H_I}{\sqrt{2\pi}} r^{-p} f_{ij}(\theta, p, \alpha, \beta) \quad (93)$$

pro rozevírací napětí před vrcholem trhliny, resp. vztahu:

$$u_i = \frac{H_I}{\sqrt{2\pi}} r^{1-p} g_i(\theta, p, \alpha, \beta) \quad (94)$$

pro posuv ve směru otevření trhliny na jejích lících.

Následným vynesemím závislosti $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}(r)$, resp. $u_{\theta} = u_{\theta}(r)$ do grafu v logaritmických souřadnicích (log-log grafu) lze ze směrnice přímkové závislosti určit přímo (v případě rozevíracích napětí) či nepřímo (v případě posuvů na lících trhliny) exponent singularity napětí p , viz obr. 25 pro ilustraci.



Obr. 25 Princip určování exponentu singularity napětí z numerického řešení: a) z rozevíracího napětí před vrcholem trhliny; b) z posuvů na lících trhliny

Z analytického i numerického řešení pro 2D i 3D těleso zjištěné exponenty singularity napětí jsou uvedeny v tabulce II.

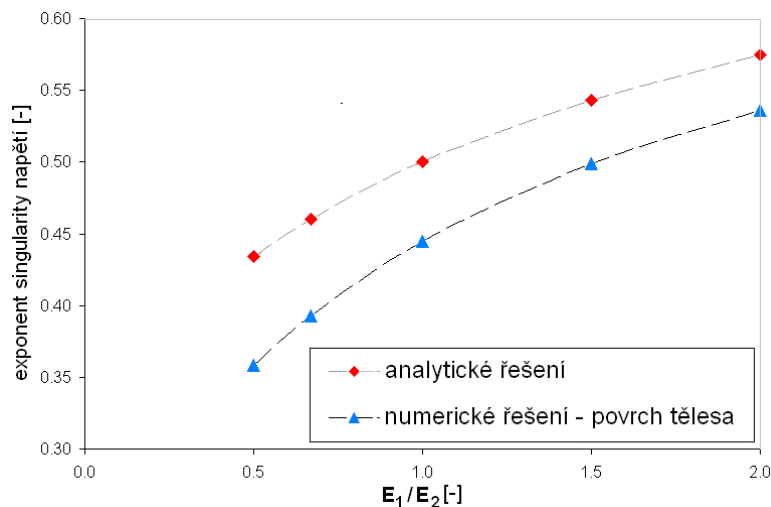
Tab. II Hodnoty exponentů singularity napětí určené jak z analytického řešení, tak z řešení numerického pro 2D model a 3D model na povrchu i v jeho středu pro vybrané poměry E_1/E_2

| E_1/E_2 | Analytické řešení | Numerické řešení | | | | |
|-----------|-------------------|------------------|------------------|----------|-------------------|----------|
| | | 2D model | 3D model | | | |
| | | | Ve středu tělesa | | Na povrchu tělesa | |
| | | | Z napětí | Z posuvů | Z napětí | Z posuvů |
| 0,50 | 0,43389 | 0,4292 | 0,4277 | 0,4284 | 0,3532 | 0,3582 |
| 0,67 | 0,46053 | 0,4588 | 0,4599 | 0,4535 | 0,3941 | 0,3927 |
| 1,00 | 0,50000 | 0,5000 | 0,5026 | 0,4898 | 0,4548 | 0,4445 |
| 1,50 | 0,54279 | 0,5422 | 0,5441 | 0,5276 | 0,5180 | 0,4985 |
| 2,00 | 0,57451 | 0,5723 | 0,5723 | 0,5543 | 0,5617 | 0,5358 |

Na základě hodnot publikovaných v tabulce II lze říci, že chyba v hodnotě exponentu singularity napětí p vznikající při jeho určení z numerického řešení ve středu 3D modelu namísto z řešení analytického je maximálně 4%, přičemž přesnější se jeví odhad z rozevíracího napětí před vrcholem trhliny.

Významně větší odchylky se projevují mezi hodnotami p určenými z analytického řešení a pomoci MKP na povrchu modelovaného 3D tělesa, viz obr. 26. Toto již není způsobeno numerickými chybami, ale hovoří se v tomto případě o vlivu tzv. rohové

singularity. V podstatě se jedná o vliv volného povrchu, přičemž tento fenomén byl v minulosti a stejně tak v poslední době předmětem zájmu mnoha vědeckých prací, viz např. [9], [10], [107].



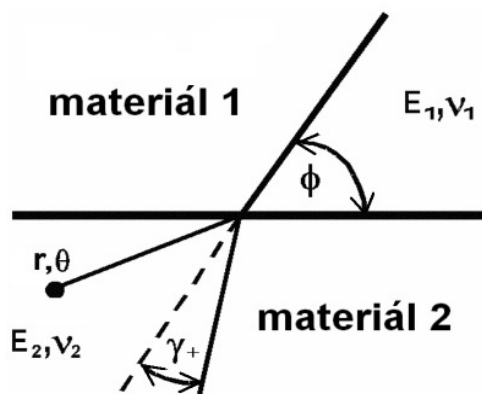
Obr. 26 Rozdíl mezi exponenty singularity napětí určenými analyticky a numericky na povrchu modelovaného 3D tělesa pro vybrané poměry E_1/E_2

Obecně platí, že hodnoty exponentu singularity napětí jsou na povrchu tělesa menší než v jeho středu a závisí na Poissonových číslech obou materiálů, viz [9], [10], [107] pro detaily. Znatelný pokles hodnoty exponentu singularity napětí v důsledku volného povrchu tak může vést k rozdílnému chování trhlin šířících se v tenkých a tlustých tělesech. Dalším z důsledků nižší singularity napětí je také pokles rychlosti šíření únavové trhliny.

Závěrem poznamenejme, že při hodnocení problematiky šíření trhliny přes bi-materiálového rozhraní v tělese s malou tloušťkou by neměl být vliv tzv. rohové singularity opomíjen, neboť může mít výrazný vliv na životnost celé konstrukce.

6.1.3 Směr dalšího šíření trhliny z bi-materiálového rozhraní

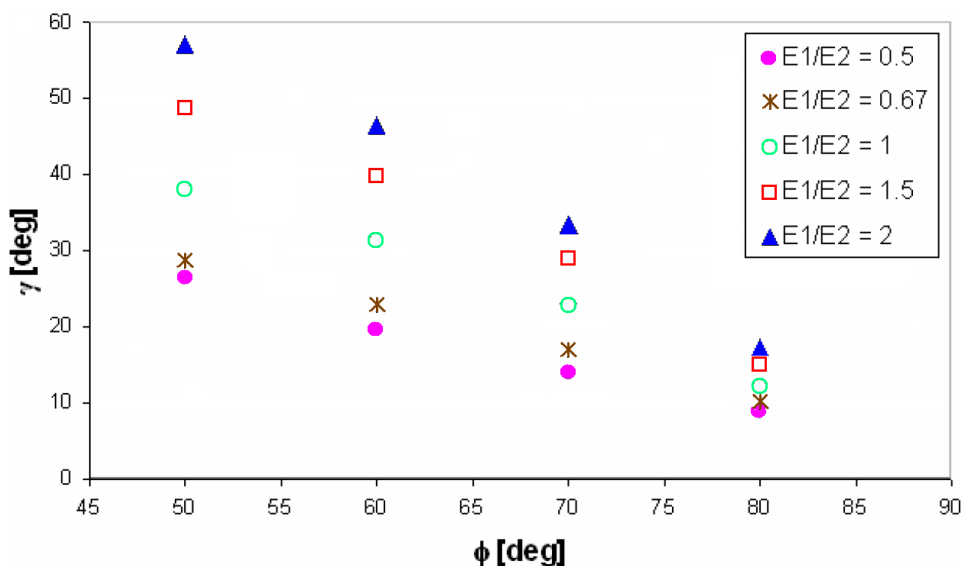
Jedna z parametrických studií provedených během procesu získávání základních informací o tendencích a charakteristických jevech týkajících se problematiky šíření trhlin přes bi-materiálové rozhraní byla provedena pro směr dalšího šíření trhliny z rozhraní do druhého materiálu [93], [94], [96]. Studován byl především vliv různých poměrů modulů pružnosti v tahu obou složek a taktéž počáteční orientace trhliny na úhel γ ; tedy směr, ve kterém se trhlina bude z rozhraní dále šířit, viz schéma na obr. 27.



Obr. 27 Schéma a značení použité pro trhlinu šířící se z rozhraní pod úhlem γ

Za účelem určení směru dalšího šíření trhliny z rozhraní γ bylo aplikováno kritérium minimálního zobecněného faktoru hustoty deformační energie Σ popsané v kapitole 5.3.2.

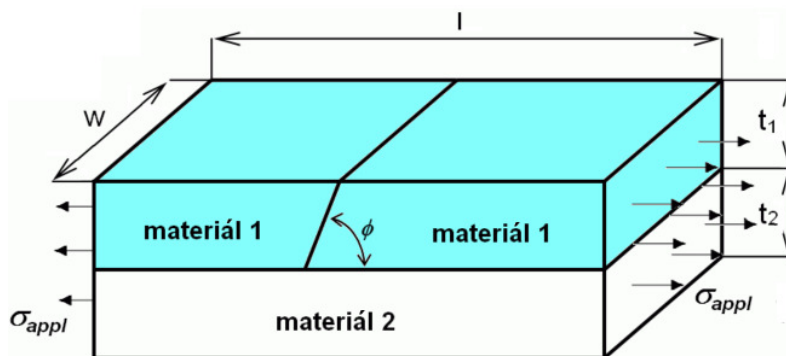
V práci [96] byl nejprve studován vliv rozdílných modulů pružnosti v tahu materiálů před a za rozhraním a vliv počáteční orientace trhliny na směr jejího dalšího šíření z rozhraní v bi-materiálovém tělese namáhaném tahem ve směru rovnoběžném s rozhraním (úloha byla řešena jako 2D). Dosažené výsledky je možné vidět v grafu na obr. 28 a na jejich základě je možné konstatovat, že trhlina se v modelovaném případě stáčí přibližně do směru kolmého k rozhraní (= směr kolmý na zatěžovací napětí). Šíří-li se trhlina do poddajnějšího materiálu je za rozhraním její odklon od původního směru větší než kdyby se šířila v homogenním materiálu a naopak (rozhraní mezi poddajným a tuhým materiálem vykazuje stínící efekt a trhlina se odklání od původního směru šíření méně).



Obr. 28 Závislost směru dalšího šíření trhliny z rozhraní na počáteční orientaci trhliny vzhledem k rozhraní (viz obr. 27) pro různé poměry E_1/E_2

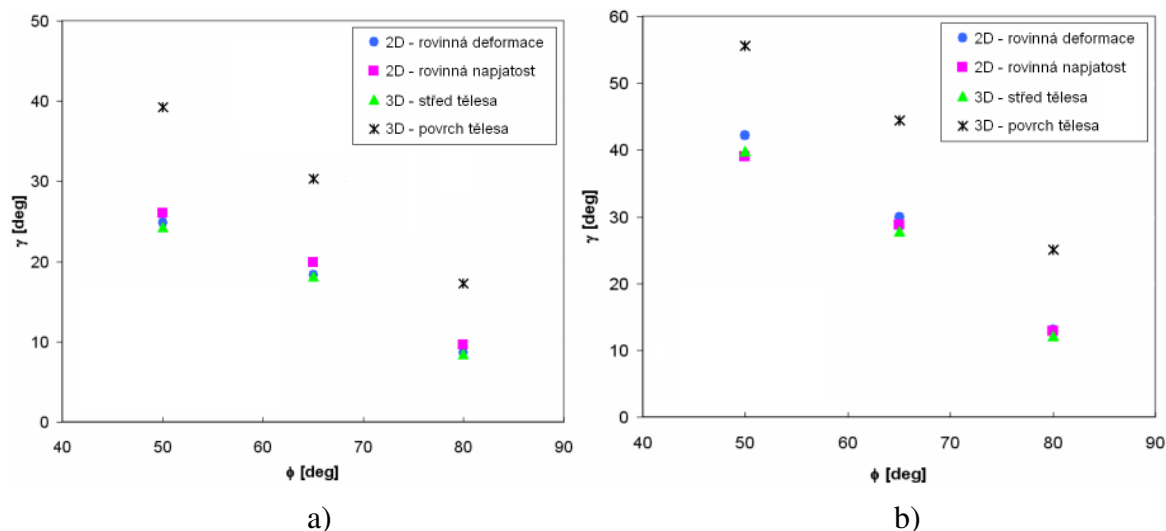
Studie v této oblasti byly následně rozšířeny o řešení podobného problému, ale tentokrát ve 3D [93], [94]. Opět byl za pomoci zobecněného faktoru hustoty deformační energie (kapitola 5.3.2) odhadován směr dalšího šíření trhliny z rozhraní pro různé materiálové i geometrické konfigurace, ale jako rozšíření řešené problematiky bylo provedeno srovnání výsledků získaných z numerických simulací na 2D a 3D modelu.

Modelováno bylo bi-materiálové těleso s trhlinou na rozhraní a s geometrií a zatížením podle obr. 29.



Obr. 29 Schéma modelovaného 3D bi-materiálového tělesa s obecně orientovanou trhlinou

Z výsledků na obr. 30 je opět patrný vliv tzv. rohové singularity – tentokrát se jedná o ovlivnění směru dalšího šíření trhliny z rozhraní.



Obr. 30 Závislost směru dalšího šíření trhliny z rozhraní na její počáteční orientaci odhadnutá na základě numerických simulací na 2D modelu pomocí různých aproximací (rovinné napjatosti a rovinné deformace) a na 3D modelu v různých místech: a) pro poměr $E_1/E_2 = 0,5$; b) pro poměr $E_1/E_2 = 2,0$

Zatímco zjištěné závislosti na obr. 30 se poměrně dobře shodují pro obě aproximace na 2D modelu (rovinnou napjatost i rovinnou deformaci) a pro hodnoty γ určené ve středu modelovaného 3D tělesa, směr dalšího šíření trhliny z rozhraní na povrchu tělesa se výrazně liší. Konkrétně se trhlina na povrchu tělesa odklání více od svého původního směru do směru kolmého na aplikované zatížení než je tomu uvnitř tělesa. Z tohoto důvodu se doporučuje při analýze chování trhlín v tenkých tělesech zahrnout do výpočtů vliv tzv. rohové singularity, více viz [9], [10], [107].

6.2 Aplikace zobecněných postupů LELM na vícevrstvé trubky

Veškeré doposud uvedené výsledky se týkaly pouze obecných tendencí, trendů a typických závislostí, které jsou charakteristické pro bi-materiálová tělesa. Formulované obecné závěry mohou přispět k lepšímu porozumění problematice chování trhlín v takovýchto materiálech a umožňují získat si nadhled nad řešeným problémem.

Nicméně stejně důležitá (ne-li důležitější) je oblast praktických aplikací. Výhodná je na jednu stranu možnost ověření teorií pomocí experimentu na reálných tělesech a na druhou stranu může přinést aplikace postupů na konkrétní problémy nová doporučení a návrhy týkající se cíleného zlepšení vlastností materiálu a následně životnosti daných konstrukcí.

První aplikací, které budou věnovány následující kapitoly 6.2.1 až 6.2.6, jsou vícevrstvé polymerní trubky určené pro rozvod vody a plynu, přičemž tato problematika byla a je zpracovávána ve spolupráci s Ústavem materiálových věd a inženýrství FSI VUT v Brně a Polymer Institute Brno.

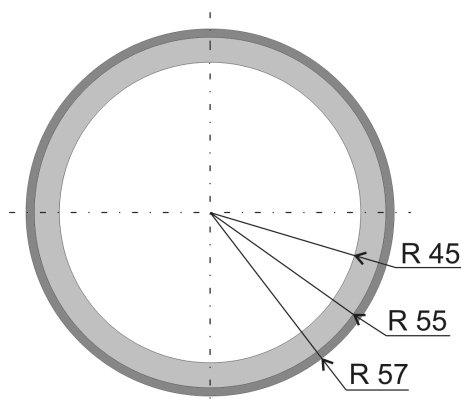
6.2.1 Geometrie a materiálové vlastnosti

Vícevrstvé trubky se obecně mohou skládat z více jednotlivých vrstev, které mohou plnit různé funkce. Základním modelem je trubka sestávající se z hlavní části a jedné nebo dvou ochranných vrstev (vnitřní nebo/a vnější), jejichž materiál by měl být vhodně zvolen, a to

s ohledem především na jeho odolnost proti poškození. V této práci budou uvedeny výsledky týkající se šíření trhlin jednak ve dvouvrstvých trubkách (s vnější povrchovou vrstvou) a jednak ve třívrstvých trubkách (střední základní trubka obklopená z obou stran vrstvami ochrannými).

(a) *Dvouvrstvá trubka*

U studované dvouvrstvé trubky byla vnitřní (základní) vrstva vyrobena z materiálu PE100 s vnějším průměrem 110 mm a tloušťkou stěny 10 mm. Tato byla potažena ochranným pláštěm tloušťky cca 2 mm z modifikovaného PPH s vysokou odolností proti vrypům, oděru a jiným mechanickým poškozením, což trubku předurčuje (jak výrobce uvádí) k použití pro bezvýkopové způsoby pokládky, kde se předpokládá povrchové poškození. Geometrie dvouvrstvé trubky je zobrazena na obr. 31.



Obr. 31 Geometrie dvouvrstvé trubky

Co se týče materiálových charakteristik jednotlivých složek, ty byly stanoveny na Ústavu materiálových věd a inženýrství FSI VUT v Brně na základě standardní tahové zkoušky podle normy ČSN EN ISO 527-1. Protože polymerní materiály obecně vykazují teplotní závislost materiálových vlastností, byly tahové zkoušky provedeny pro tři různé teploty: pokojovou (23 °C), -20 °C a -60 °C, viz tabulka III.

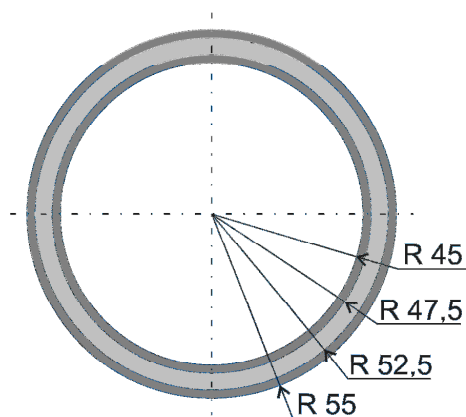
Tab. III Materiálové vlastnosti (modul pružnosti v tahu a mez kluzu) jednotlivých komponent dvouvrstvé trubky (PE100 – základní materiál, PPH – vnější ochranná vrstva)

| Materiál | T = 23 °C | | | T = -20 °C | | | T = -60 °C | | |
|----------|-----------|------------------|-------------------------------|------------|------------------|-------------------------------|------------|------------------|-------------------------------|
| | E [MPa] | σ_0 [MPa] | K_C [MPa.m ^{1/2}] | E [MPa] | σ_0 [MPa] | K_C [MPa.m ^{1/2}] | E [MPa] | σ_0 [MPa] | K_C [MPa.m ^{1/2}] |
| PE100 | 950 | 22 | 3,0 | 1883 | 37 | 2,7 | 2542 | 49 | 2,4 |
| PPH | 1439 | 30 | 3,5 | 3216 | 45 | 3,2 | 3493 | 64 | 3,0 |

(b) *Třívrstvá trubka*

Druhým typem vícevrstvé trubky hodnoceným v rámci této disertační práce byla trubka třívrstvá (s vnitřní i vnější integrovanou ochrannou vrstvou), používaná na vnější tlakovou kanalizaci. Materiálem základní trubky byl opět polyethylen PE100, tentokrát

s tloušťkou stěny 5 mm. Vnější a vnitřní ochranná vrstva byly vyrobeny z extrémně odolného speciálního typu polyethylenu XSC50, každá s tloušťkou 2,5 mm. Vnější průměr celého systému byl 110 mm, viz schéma trubky na obr. 32. I u této trubky je díky ochranným vrstvám garantována spolehlivost (narozdíl od klasického polyethylenového potrubí) i při extrémním poškrábání povrchu, přítomnosti povrchových vrypů nebo rýh či výskytu bodových zatížení.



Obr. 32 Geometrie třívrstvé trubky

Materiálové charakteristiky jednotlivých vrstev určené na Ústavu materiálových věd a inženýrství FSI VUT v Brně pomocí standardní tahové zkoušky podle normy ČSN EN ISO 527-1 jsou pro teploty 23 °C, -20 °C a -60 °C uvedeny v tabulce IV.

Tab. IV Materiálové vlastnosti (modul pružnosti v tahu a mez kluzu) jednotlivých komponent třívrstvé trubky (PE100 – základní materiál, XSC50 – ochranné vrstvy)

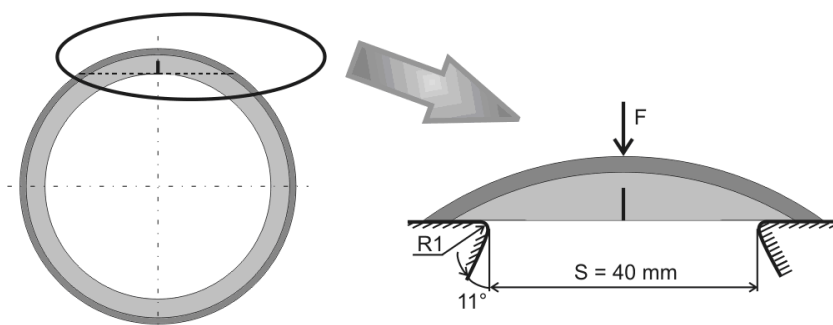
| Materiál | T = 23 °C | | T = -20 °C | | T = -60 °C | |
|----------|-----------|------------------|------------|------------------|------------|------------------|
| | E [MPa] | σ_0 [MPa] | E [MPa] | σ_0 [MPa] | E [MPa] | σ_0 [MPa] |
| PE100 | 1213 | 20 | 2347 | 33 | 3391 | 48 |
| XSC50 | 828 | 16 | 1774 | 31 | 2740 | 45 |

Co se týče Poissonových čísel jednotlivých materiálů, je nutno poznamenat, že tato byla uvažována konstantní pro všechny typy vrstev (jak u dvouvrstvých, tak u třívrstvých trubek) a taktéž pro všechny teploty, $\nu = 0,35$.

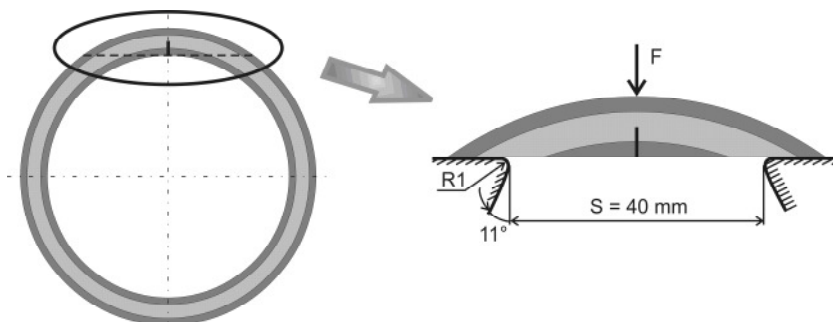
6.2.2 Vzorky pro experimentální určení lomové houževnatosti

Pro určování lomově-mechanických parametrů vícevrstevných trubek byly navrženy dva typy laboratorních vzorků, které byly zhotoveny přímo z dvouvrstvé, resp. třívrstvé trubky, které byly následně testovány a především modelovány za účelem hodnocení chování trhlin v těchto systémech.

Konkrétně byl navržen vzorek pro zkoušku tříbodovým ohybem získaný z původní mezikruhové trubky tečným řezem, viz obr. 33 pro dvouvrstvou trubku, resp. obr. 34 pro třívrstvou trubku.

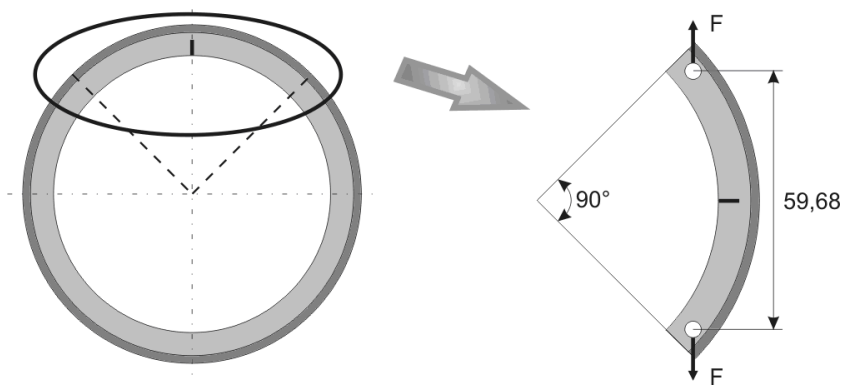


Obr. 33 Ohybový vzorek navržený pro dvouvrstvou trubku

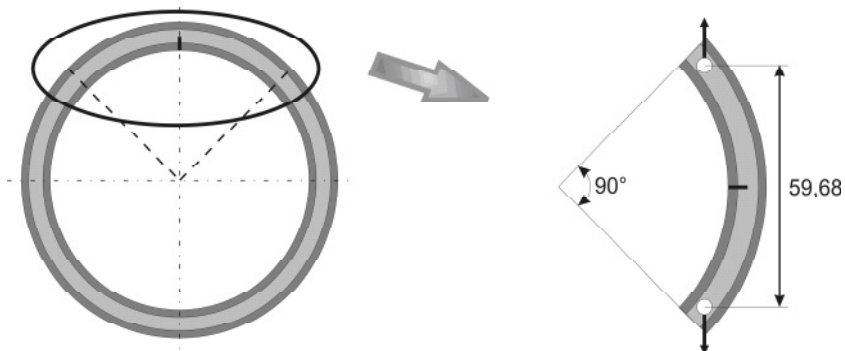


Obr. 34 Ohybový vzorek navržený pro třívrstvou trubku

Druhým typem vzorku, který byl navržen pro laboratorní měření vlastností vícevrstevných trubek, byl vzorek pro tahovou zkoušku. Tento byl z mezikruhové trubky připraven čtvrtkruhovým výřezem, viz obr. 35 pro dvouvrstvou trubku, resp. obr. 36 pro třívrstvou trubku.



Obr. 35 Tahový vzorek navržený pro dvouvrstvou trubku



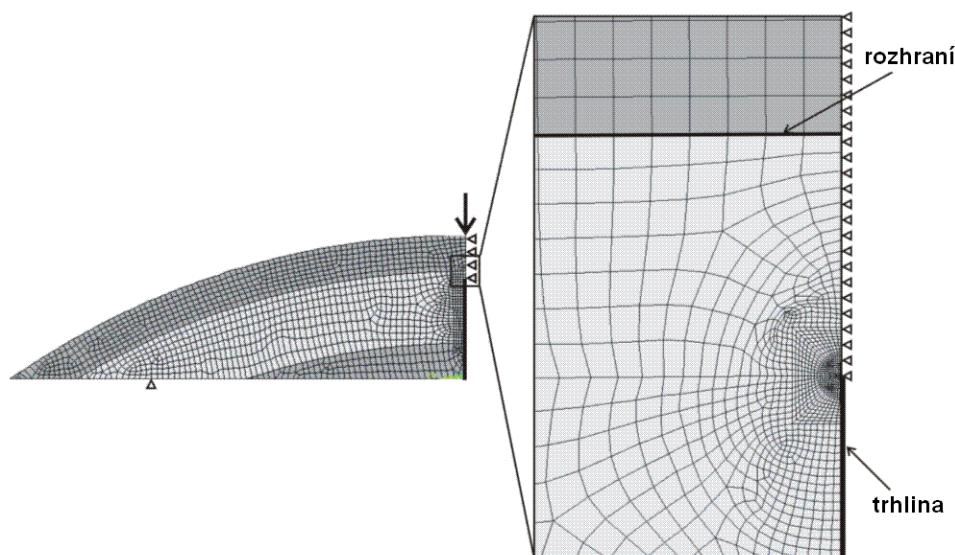
Obr. 36 Tahový vzorek navržený pro třívrstvou trubku

6.2.3 Numerický model

Pro hodnocení chování trhlin ve vícevrstvých trubkách byly vytvořeny numerické modely odpovídající jak reálným trubkám, tak oběma navrženým zkušebními vzorkům. Při modelování byly taktéž dodrženy podmínky experimentálního uspořádání, podle obr. 33 až 36.

Během veškerých simulací lomové mechanických problémů na vícevrstvých trubkách byla uvažována platnost předpokladů LELM a dokonalé adheze mezi jednotlivými vrstvami. Materiály všech vrstev byly modelovány jako homogenní, izotropní a lineárně elastické a trhlina jako ideálně ostrá. Numerické analýzy byly prováděny v komerčním konečno-prvkovém systému ANSYS [2].

Je vhodné na tomto místě připomenout obecně známý fakt, že při simulacích problémů lomové mechaniky, musí být velký důraz kladen na kvalitu a hustotu sítě v okolí vrcholu trhliny (viz obr. 37 pro ilustraci). Je-li to možné, doporučuje se v tomto místě použití speciálních trhlinových prvků s posunutými středovými uzlovými body, které dokáží lépe vystihnout singularitu napětí v okolí vrcholu trhliny (tyto prvky lze samozřejmě aplikovat pouze u případu trhliny v homogenním materiálu, neboť zachycují singularitu typu $1/2$).



Obr. 37 Konečno-prvková síť v okolí vrcholu trhliny (konfigurace pro třívrstvý ohybový vzorek)

6.2.4 K-kalibrační křivky

Jako první byly na polymerních trubkách vyhodnocovány K -kalibrační křivky [52], [55], [101], [133], [137], [138], [139], [145] neboli závislosti součinitele intenzity napětí K , resp. korekční funkce $f(a/W)$ na délce **vnitřní** trhliny a . Tyto závislosti jsou významné především při následném experimentálním určování lomové houževnatosti.

Korekční funkce $f(a/W)$ byly získány z hodnot součinitelů intenzity napětí (určených pomocí MKP výpočtů) jejich normalizací pomocí vztahů (95) až (97) vždy pro příslušný typ úlohy [83] - rovnice (95) pro třibodový ohyb, rovnice (96) pro tahem namáhaný C-vzorek a rovnice (97) pro trubku zatíženou vnitřním přetlakem, jejíž analýza byla provedena za účelem možnosti následného srovnání s navrženými C-vzorky.

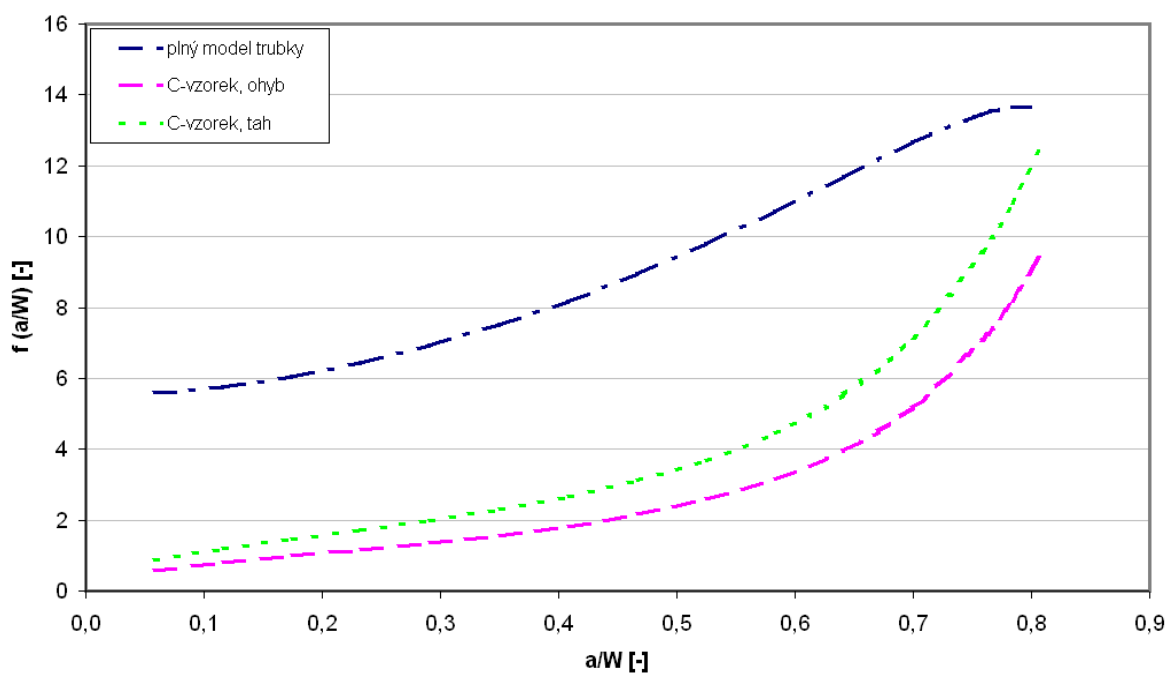
$$K = \frac{3SF}{2tW^2} \cdot \sqrt{\pi a} \cdot f(a/W) , \quad (95)$$

$$K = \frac{F}{tW^{1/2}} \left(\frac{3X}{W} + 1,9 + 1,1 \frac{a}{W} \right) \left[1 + 0,25 \left(1 - \frac{a}{W} \right)^2 \left(1 - \frac{r_1}{r_2} \right) \right] f(a/W) , \quad (96)$$

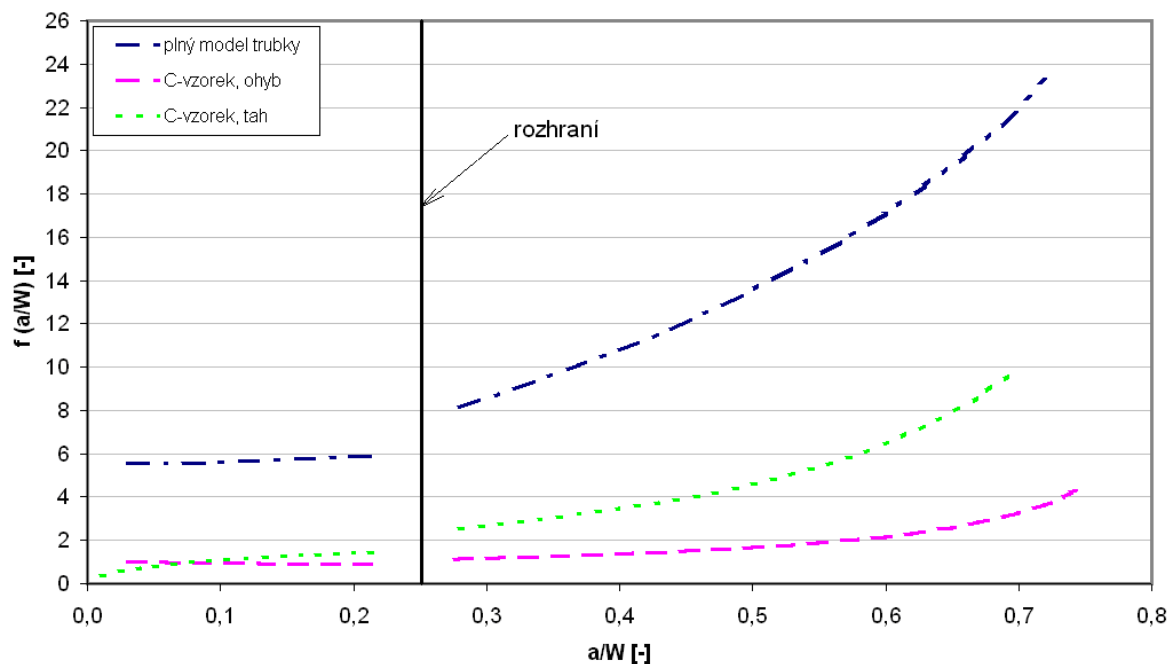
$$K = p \cdot \sqrt{\pi a} \cdot f(a/W) . \quad (97)$$

V rovnicích (95) až (97) představuje F velikost zatěžující síly, t tloušťku vzorku, W šířku vzorku, S vzdálenost podpor u ohybového namáhání, X vzdálenost osy zatěžování od vnitřního povrchu trubky v místě trhliny při tahové zkoušce, r_1 poloměr vnitřní kružnice C-vzorku, r_2 poloměr vnější kružnice C-vzorku, p vnitřní přetlak a a okamžitou délku trhliny (viz obr. 31 až 36, více v [83]).

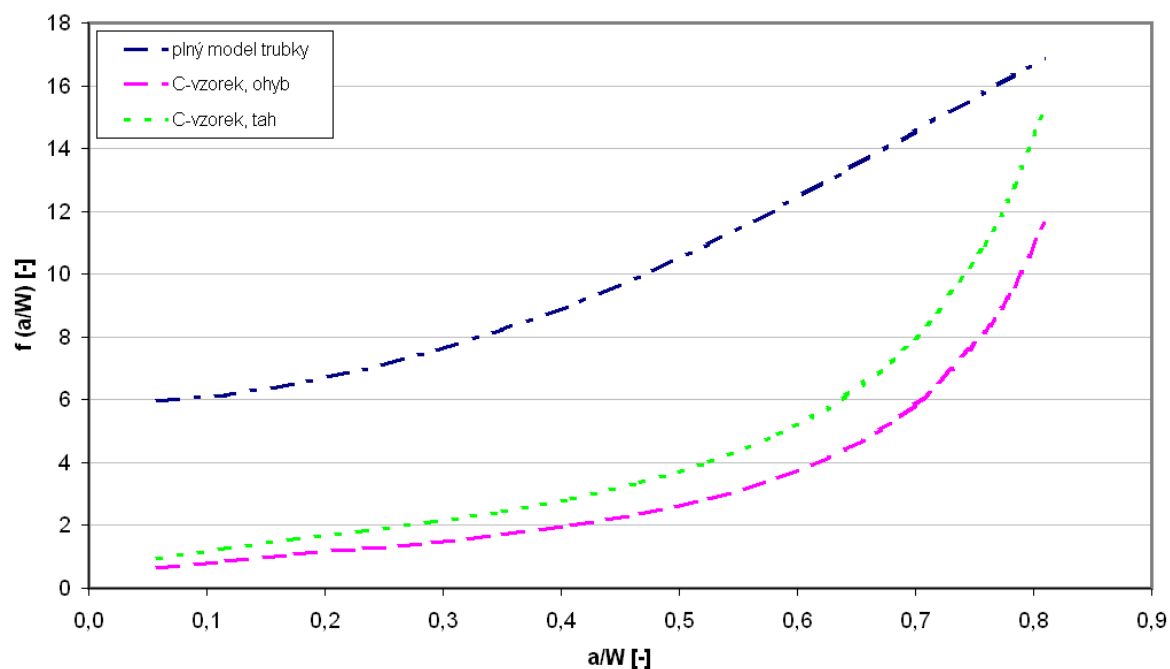
Grafy K -kalibračních křivek byly vypracovány pro všechny tři úlohy (trubku zatíženou vnitřním přetlakem, C-vzorek namáhaný tříbodovým ohybem a C-vzorek namáhaný tahem) a taktéž pro všechny tři v úvodu zmiňované teploty. Tyto závislosti pro pokojovou teplotu jsou pro dvouvrstvou trubku a vnitřní trhlínu v základním materiálu na obr. 38 a pro třívrstvou trubku a trhlínu ve vnitřní a střední (základní) vrstvě na obr. 39. Analogické grafy pro teploty -20 °C a -60 °C jsou pro oba typy trubek (dvouvrstvou i třívrstvou) uvedeny v příloze na obr. P1 až P4. Pro srovnání byla tatáž analýza provedena taktéž pro homogenní případ, u kterého se předpokládá, že celá trubka je vyrobena ze základního materiálu (PE100). Výsledné grafy jsou na obr. 40 a 41.



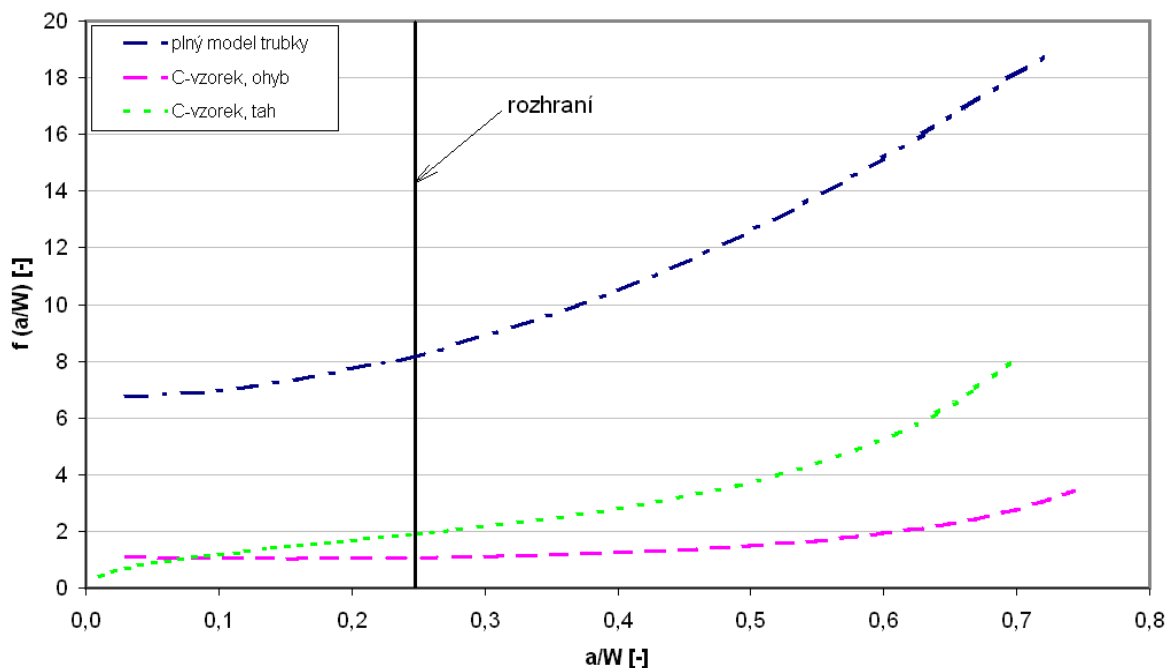
Obr. 38 Průběhy korekční funkce u nehomogenní dvouvrstvé trubky pro vnitřní trhlínu v základním materiálu při teplotě 23 °C pro tři typy úloh – plný model trubky zatížený vnitřním přetlakem, C-vzorek namáhaný tříbodovým ohybem, C-vzorek namáhaný tahem



Obr. 39 Průběhy korekční funkce u nehomogenní třívrstvé trubky pro vnitřní trhlinu ve vnitřní a střední (základní) vrstvě při teplotě 23 °C pro tři typy úloh – plný model trubky zatížený vnitřním přetlakem, C-vzorek namáhaný třibodovým ohybem, C-vzorek namáhaný tahem



Obr. 40 Průběhy korekční funkce u homogenní dvouvrstvé trubky pro vnitřní trhlinu a tři typy úloh – plný model trubky zatížený vnitřním přetlakem, C-vzorek namáhaný třibodovým ohybem, C-vzorek namáhaný tahem



Obr. 41 Průběhy korekční funkce u homogenní třívrstvé trubky pro vnitřní trhlinu a tři typy úloh – plný model trubky zatížený vnitřním přetlakem, C-vzorek namáhaný tříbodovým ohybem, C-vzorek namáhaný tahem

Po vytvoření K -kalibračních křivek na základě numerických simulací pomocí MKP byly tyto aproximovány polynomickými funkcemi, které lze s výhodou využít při laboratorním určování lomové houževnatosti na vícevrstvě vzorku. Stačí pouze na vzorku vytvořit trhlinu dané délky, určit velikost zatížení, při kterém dojde k nestabilnímu šíření a dosazením do příslušného vztahu (95) až (97) v závislosti na použité konfiguraci určit lomovou houževnatost.

Analytické vztahy pro dvouvrstvou trubku jsou uvedeny v tabulce V, pro třívrstvou trubku v tabulce VI.

Tab. V Polynomické funkce získané proložením numericky získaných hodnot korekční funkce $f(a/W)$ pro dvouvrstvou trubku, tři geometrické konfigurace a tři teploty

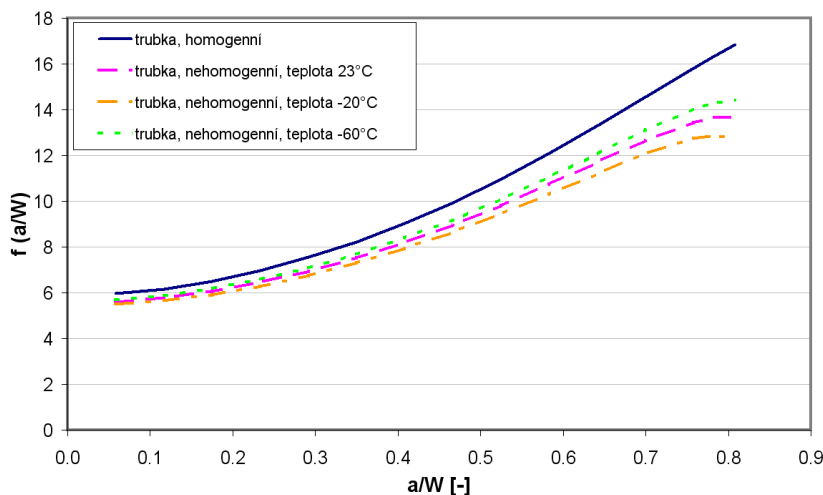
| | | |
|------------------------------------|-------------------|---|
| homogenní materiál | plný model trubky | $-18,403(a/W)^4 + 23,759(a/W)^3 + 6,6821(a/W)^2 + 2,5182(a/W) + 5,7725$ |
| | C-vzorek, ohyb | $143,35(a/W)^4 - 180,82(a/W)^3 + 80,629(a/W)^2 - 10,085(a/W) + 1,1034$ |
| | C-vzorek, tah | $173,04(a/W)^4 - 214,89(a/W)^3 + 94,761(a/W)^2 - 10,857(a/W) + 1,4232$ |
| nehomogenní vzorek, teplota 23 °C | plný model trubky | $-53,119(a/W)^4 + 72,834(a/W)^3 - 18,993(a/W)^2 + 6,3736(a/W) + 5,2392$ |
| | C-vzorek, ohyb | $90,453(a/W)^4 - 106,13(a/W)^3 + 45,035(a/W)^2 - 4,1253(a/W) + 0,7656$ |
| | C-vzorek, tah | $104,52(a/W)^4 - 118,19(a/W)^3 + 48,643(a/W)^2 - 3,0848(a/W) + 0,9933$ |
| nehomogenní vzorek, teplota -20 °C | plný model trubky | $-60,146(a/W)^4 + 82,348(a/W)^3 - 24,073(a/W)^2 + 7,0659(a/W) + 5,088$ |
| | C-vzorek, ohyb | $75,858(a/W)^4 - 85,522(a/W)^3 + 35,257(a/W)^2 - 2,4925(a/W) + 0,673$ |
| | C-vzorek, tah | $85,686(a/W)^4 - 91,63(a/W)^3 + 36,035(a/W)^2 - 0,967(a/W) + 0,8761$ |

| | | |
|------------------------------------|-------------------|--|
| nehomogenní vzorek, teplota -60 °C | plný model trubky | $-46,361(a/W)^4 + 63,499(a/W)^3 - 14,07(a/W)^2 + 5,6697(a/W) + 5,3629$ |
| | C-vzorek, ohyb | $102,6(a/W)^4 - 123,3(a/W)^3 + 53,204(a/W)^2 - 5,4917(a/W) + 0,8431$ |
| | C-vzorek, tah | $120,22(a/W)^4 - 140,36(a/W)^3 + 59,197(a/W)^2 - 4,8611(a/W) + 1,0916$ |

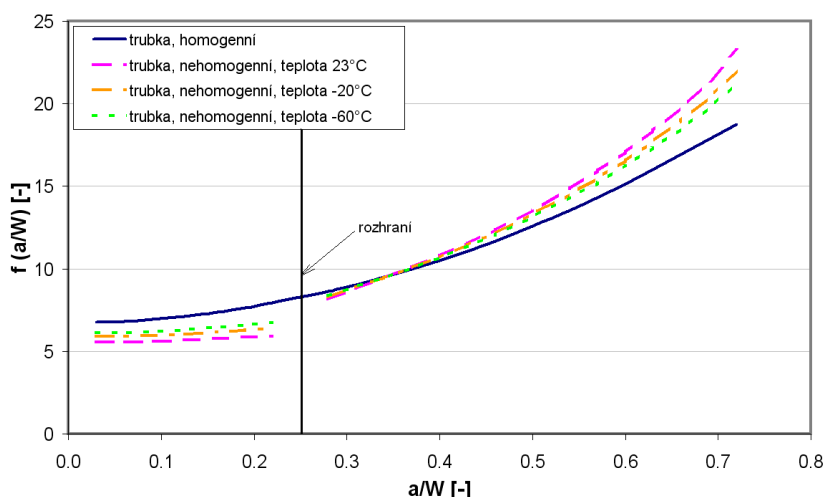
Tab. VI Polynommické funkce získané proložení numericky získaných hodnot korekční funkce $f(a/W)$ pro třívrstvou trubku, tři geometrické konfigurace a tři teploty

| | | |
|------------------------------------|-------------------|--|
| homogenní materiál | plný model trubky | $0,2678(a/W)^3 + 22,468(a/W)^2 + 0,4533(a/W) + 6,7278$ |
| | C-vzorek, ohyb | $13,54(a/W)^3 - 7,9986(a/W)^2 + 1,6185(a/W) + 0,9715$ |
| | C-vzorek, tah | $40,737(a/W)^3 - 28,686(a/W)^2 + 10,918(a/W) + 0,3597$ |
| nehomogenní vzorek, teplota 23 °C | plný model trubky | $72,542(a/W)^3 - 65,523(a/W)^2 + 41,704(a/W) - 0,0052$ |
| | C-vzorek, ohyb | $54,899(a/W)^3 - 65,746(a/W)^2 + 27,826(a/W) - 2,7108$ |
| | C-vzorek, tah | $98,952(a/W)^3 - 105,58(a/W)^2 + 45,364(a/W) - 4,0914$ |
| nehomogenní vzorek, teplota -20 °C | plný model trubky | $49,816(a/W)^3 - 37,21(a/W)^2 + 28,496(a/W) + 2,1223$ |
| | C-vzorek, ohyb | $38,631(a/W)^3 - 44,113(a/W)^2 + 18,562(a/W) - 1,482$ |
| | C-vzorek, tah | $93,885(a/W)^3 - 100,19(a/W)^2 + 43,041(a/W) - 3,8852$ |
| nehomogenní vzorek, teplota -60 °C | plný model trubky | $35,318(a/W)^3 - 19,116(a/W)^2 + 20,013(a/W) + 3,4921$ |
| | C-vzorek, ohyb | $43,091(a/W)^3 - 49,917(a/W)^2 + 20,759(a/W) - 1,7293$ |
| | C-vzorek, tah | $90,694(a/W)^3 - 96,796(a/W)^2 + 41,578(a/W) - 3,7553$ |

Na závěr této kapitoly o K -kalibraci studovaných vícevrstevných polymerních trubek je uveden ještě jeden typ grafů – grafů, ve kterých nejsou srovnávány jednotlivé typy těles (jako je tomu na obr. 38 až 41 a P1 až P4), nýbrž závislosti pro jednotlivé teploty, viz obr. 42 pro dvouvrstvou trubku zatíženou vnitřním přetlakem a obr. 43 pro třívrstvou trubku zatíženou vnitřním přetlakem. Analogické grafy pro dva navržené zkušební vzorky jsou opět v příloze na obr. P5 až P8.



Obr. 42 Průběhy korekční funkce u dvouvrstvé trubky zatížené vnitřním přetlakem pro vnitřní trhlinu v základním materiálu pro různé teploty a pro homogenní případ



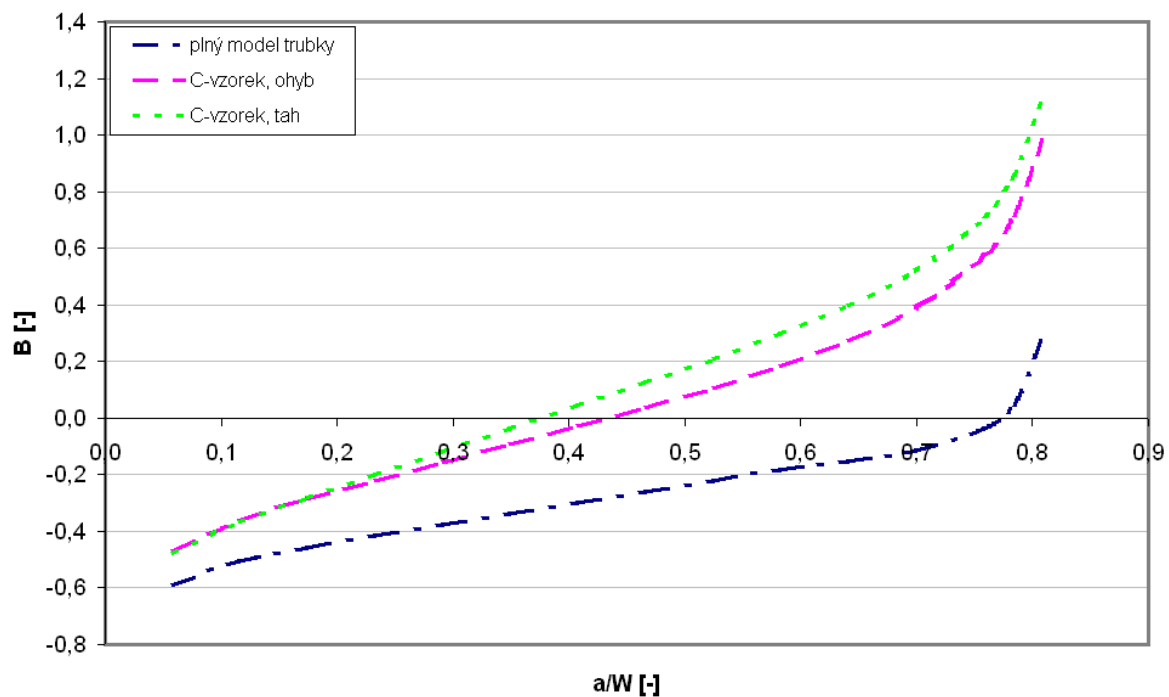
Obr. 43 Průběhy korekční funkce u třívrstvé trubky zatížené vnitřním přetlakem pro vnitřní trhlinu v základním materiálu pro různé teploty a pro homogenní případ

Z grafů na obr. 42, 43 a P5 až P8 v příloze lze vidět, že K -kalibrační křivky pro homogenní případ a nehomogenní případy pro všechny tři teploty se neliší nijak výrazně. Toto je důsledek ne příliš velkého rozdílu materiálových vlastností jednotlivých vrstev. Na základě tohoto poznatku lze konstatovat, že v těchto případech lze pro odhad lomové houževnatosti vícevrstvého systému použít i korekční funkci odvozenou pro homogenní materiál bez dopuštění se příliš velké chyby. Tento závěr je možné zobecnit na vícevrstvé materiály, u nichž se materiálové vlastnosti jednotlivých složek výrazně neliší.

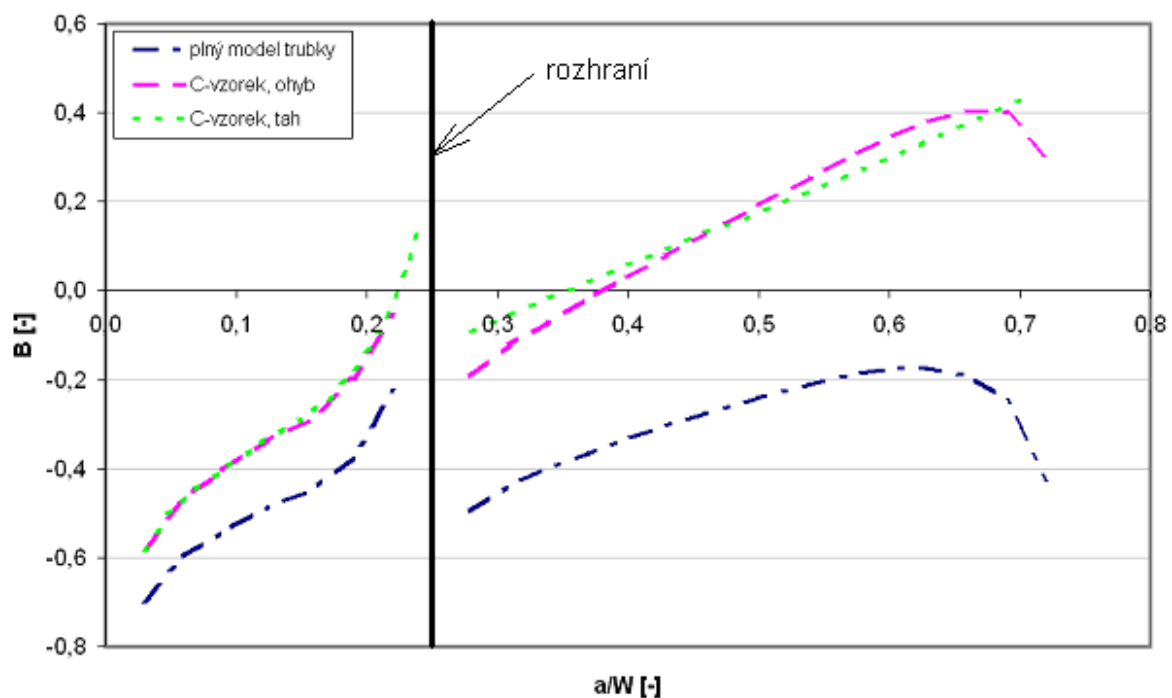
6.2.5 T-napětí

V následující kapitole budou prezentovány obdobné závislosti pro dvou- a třívrstvé trubky, ale tentokrát pro veličinu zvanou T-napětí, resp. parametr biaxiality [55], [101], [133], [137], [138], [145]. Oba tyto parametry charakterizují míru „constraintu“, tzn. stísnění před vrcholem trhliny, jak bylo vysvětleno v kapitole 2.1.3. Tamtéž bylo taktéž popsáno, že vhodnější pro popis situace před vrcholem trhliny je bezrozměrný parametr biaxiality B .

Grafy na obr. 44 a obr. P9 až P11 představují závislosti B na délce trhliny pro dvouvrstvou a grafy na obr. 45 a P12 až P14 pro třívrstvou trubku. Všechny tyto grafy dokazují, že pro každý zkušební vzorek je míra stísnění před vrcholem trhliny trochu jiná.



Obr. 44 Závislost parametru biaxiality pro dvouvrstvou trubku na délce vnitřní trhliny s vrcholem v základním materiálu při teplotě 23 °C pro tři typy úloh – plný model trubky zatížený vnitřním přetlakem, C-vzorek namáhaný třibodovým ohybem, C-vzorek namáhaný tahem



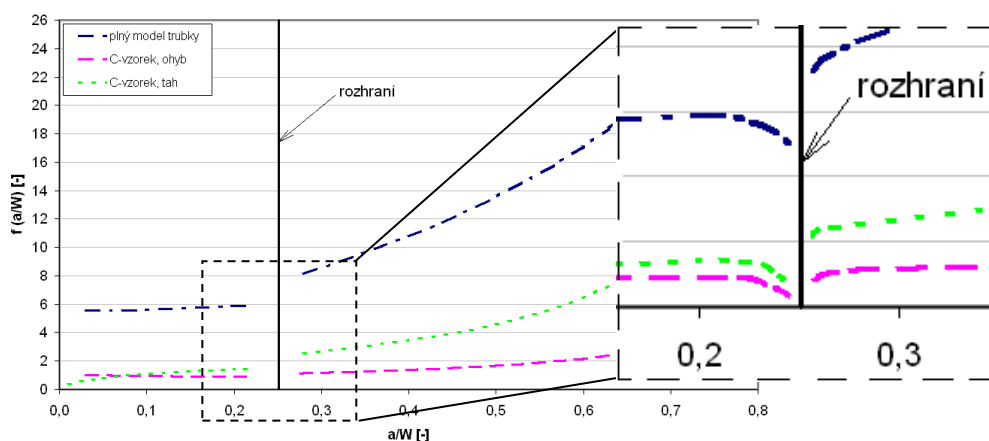
Obr. 45 Závislost parametru biaxiality pro třívrstvou trubku na délce vnitřní trhliny s vrcholem ve vnitřní ochranné vrstvě a v základním materiálu při teplotě 23 °C pro tři typy úloh – plný model trubky zatížený vnitřním přetlakem, C-vzorek namáhaný třibodovým ohybem, C-vzorek namáhaný tahem

Závislosti parametru biaxiality na délce trhliny byly sestrojeny převážně z jednoho důvodu. Na základě koncepce dvouparametrové lomové mechaniky lze pomocí zjištěných závislostí rozhodnout, zda lze hodnoty lomové houževnatosti experimentálně určené na laboratorních vzorcích bezpečně přenést na reálnou vícevrstvou trubku. Princip tohoto posouzení je následující: Je-li míra stísnění deformace před vrcholem trhliny pro laboratorní vzorky větší než pro reálnou konstrukci (jako je tomu v našem případě), jsou hodnoty lomové houževnatosti určené na zkušebních tělesech konzervativními hodnotami.

6.2.6 Trhlina s vrcholem na rozhraní

Poznamenejme na začátek této kapitoly, že veškeré zde publikované výsledky se budou týkat výhradně třívrstevných trubek.

S odkazem na grafy prezentované v kapitole 6.2.4 je důležité upozornit na jednu věc. Zatímco u dvouvrstvé trubky jsou publikované K -kalibrační křivky (viz např. obr. 38) spojitě (uvažuje se totiž existence trhliny pouze v základní vrstvě, tzn. jedná se o případ trhliny v homogenním materiálu, přičemž vnější ochranná vrstva ovlivňuje K -kalibrační křivky pouze v její blízkosti), u třívrstvé trubky dochází k nespojitosti v oblasti rozhraní mezi vnitřní ochrannou vrstvou a střední vrstvou základního materiálu (viz např. obr. 39). Navíc, pokud by se určily hodnoty K a doplnila závislost na obr. 39 blíže k rozhraní, byl by viditelný fenomén již dříve popsáný v kapitole 2.2.1, viz obr. 46, tzn. pokles hodnoty součinitele intenzity napětí těsně před rozhraním, šíří-li se trhlina z poddajnějšího do tužšího materiálu.



Obr. 46 Detail průběhu korekčních funkcí (nespojitosť v místě rozhraní) u nehomogenní třívrstvé trubky pro vnitřní trhlínu ve vnitřní a střední (základní) vrstvě při teplotě 23 °C pro tři typy úloh – plný model trubky zatížený vnitřním přetlakem, C-vzorek namáhaný třibodovým ohybem, C-vzorek namáhaný tahem

Nespojitost K -kalibračních křivek je nežádoucím jevem a v této kapitole bude navržen postup odhadu tzv. efektivní hodnoty součinitele intenzity napětí K_{eff} a efektivní hodnoty lomové houževnatosti pro trhlínu s vrcholem na rozhraní.

Postup odhadu K_{eff} pro zkušební vzorek navržený pro zkoušku třibodovým ohybem byl publikován v autorčiných pracích [101], [133], [145]. Odhady byly provedeny pro trubky při teplotách 23 °C a -60 °C a byla modelována trhlína jak na vnitřním tak na vnějším rozhraní. V postupu určení K_{eff} bylo využito kritéria středního napětí popsaného v kapitole 5.2.1.

Při řešení problému trhliny s vrcholem na rozhraní je nutné použít při vyhodnocování metodiku podrobně popsanou v kapitole 5. Následuje pouze krátké shrnutí nezbytných kroků.

V první řadě je nutné na základě znalosti materiálových vlastností vrstev před a za rozhraním určit pomocí charakteristické rovnice pro trhlinu kolmou k rozhraní (39) exponent singularity napětí p a následně dopočítat jemu odpovídající vlastní vektor. V dalším kroku je provedena numerická simulace problému a zjištěno rozložení napětí před vrcholem trhliny. Porovnáním analytických vztahů pro rozložení napětí před vrcholem trhliny s řešením numerických pak lze pomocí tzv. přímé metody určit hodnotu zobecněného součinitele intenzity napětí H .

Kritickou hodnotu zatěžovací síly F_C , při které dojde k průchodu trhliny přes rozhraní lze následně stanovit pomocí některého z kritérií stability uvedených v kapitole 5.2, přičemž v publikacích [101], [133], [145] bylo využito kritérium středního napětí a vztah:

$$\frac{F_C}{F_{appl}} = \frac{K_C}{H(F_{appl})} \cdot \frac{2d^{p-1/2}}{2-p+g_R}, \quad (98)$$

ve kterém byla navržena hodnota parametru d pomocí jednoho ze způsobů popsaných v kapitole 5.2.7, a to na základě jeho souvislosti s charakteristickým rozměrem daných materiálů, kterým je tzv. tloušťka lamely.

Efektivní hodnota součinitele intenzity napětí pro případ trhliny s vrcholem na rozhraní byla poté odhadnuta na základě původního vztahu pro výpočet součinitele intenzity napětí u tříbodového ohybu (95) za předpokladu dosazení kritické síly F_C a korekční funkce odvozené pro homogenní trubku $f_{hom}(a/W)$ podle tabulky VI:

$$K_{eff} = \frac{3SF_C}{2tW^2} \cdot \sqrt{\pi a} \cdot f_{hom}(a/W). \quad (99)$$

Vybrané vypočtené veličiny, jako např. exponent singularity napětí, zobecněný součinitel intenzity napětí, kritické zatížení nebo efektivní hodnota součinitele intenzity napětí, jsou shrnuty v tabulce VII. Veličina $E_{před}/E_{za}$ představuje poměr modulů pružnosti v tahu materiálu vždy před a za daným rozhraním.

Tab. VII Vybrané veličiny stanovené pro ohybový vzorek navržený z třívrstvé trubky s vnitřní trhlínou na vnitřním a vnějším rozhraní pro teploty 23 °C a -60 °C

| | teplota [°C] | $E_{před}/E_{za}$ [-] | p [-] | H [MPa.m ^p] | F_C [N] | K_{eff} [MPa.m ^{1/2}] |
|------------------|--------------|-----------------------|---------|---------------------------|-----------|-----------------------------------|
| vnitřní rozhraní | 23 | 0,68261 | 0,46454 | 0,7467 | 759 | 4,3 |
| | -60 | 0,80802 | 0,47972 | 0,6550 | 527 | 3,0 |
| vnější rozhraní | 23 | 1,46498 | 0,53914 | 2,3360 | 73 | 2,4 |
| | -60 | 1,23759 | 0,52144 | 2,6830 | 76 | 2,5 |

Podobná analýza byla v pracích [78], [132] provedena pro plný model trubky. Opět bylo snahou odhadnout hodnotu efektivního součinitele intenzity napětí K_{eff} pro trhlinu na rozhraní. Tentokrát bylo využito nejen kritérium středního napětí, ale i kritérium minimálního faktoru hustoty deformační energie a výsledky získané pomocí obou z nich byly vzájemně porovnány. Hodnota K_{eff} byla odhadnuta ze vztahu:

$$K_{eff} = \sigma_C \sqrt{\pi a} \cdot f_{hom}(a/W), \quad (100)$$

kde σ_c , je hodnota kritického vnitřního přetlaku určená pomocí zmíněných kritérií stability, při které dojde k průchodu trhliny přes rozhraní do dalšího materiálu.

Vypočtené hodnoty jsou uvedeny pro třívrstvou trubku s vnitřní trhlinou na rozhraní mezi vnitřní ochrannou vrstvou a základním materiálem v tabulce VIII a pro třívrstvou trubku s vnitřní trhlinou na rozhraní mezi základním materiálem a vnější ochrannou vrstvou v tabulce IX. V obou tabulkách horní indexy 1 a 2 odpovídají použitému kritériu: 1 – kritérium středního napětí, 2 – kritérium zobecněného faktoru hustoty deformační energie. Dolní indexy o a z značí příslušnost k materiálu: o – ochranná vrstva (vnější/vnitřní), z – základní materiál.

Tab. VIII Vybrané veličiny stanovené pro plný model třívrstvé trubky s vnitřní trhlinou na vnitřním rozhraní pro teploty 23 °C, -20 °C a -60 °C; index 1 – kritérium středního napětí, index 2 – kritérium zobecněného faktoru hustoty deformační energie

| teplota [°C] | $E_o - E_z - E_o$ [MPa] | $K_{IC,z}$ [MPa.m ^{1/2}] | H_I [MPa.m ^p] | σ_c^1 [MPa] | σ_c^2 [MPa] | K_{eff}^1 [MPa.m ^{1/2}] | K_{eff}^2 [MPa.m ^{1/2}] |
|--------------|-------------------------|------------------------------------|-----------------------------|--------------------|--------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 23 | 828 - 1213 - 828 | 3,00 | 61,60 | 9,20 | 8,61 | 6,72 | 6,30 |
| -20 | 1774 - 2347 - 1774 | 2,70 | 58,46 | 7,42 | 7,06 | 5,42 | 5,16 |
| -60 | 2740 - 3391 - 2740 | 2,40 | 56,40 | 6,13 | 5,89 | 4,48 | 4,31 |

Tab. IX Vybrané veličiny stanovené pro plný model třívrstvé trubky s vnitřní trhlinou na vnějším rozhraní pro teploty 23 °C, -20 °C a -60 °C; index 1 – kritérium středního napětí, index 2 – kritérium zobecněného faktoru hustoty deformační energie

| teplota [°C] | $E_o - E_z - E_o$ [MPa] | $K_{IC,o}$ [MPa.m ^{1/2}] | H_I [MPa.m ^p] | σ_c^1 [MPa] | σ_c^2 [MPa] | K_{eff}^1 [MPa.m ^{1/2}] | K_{eff}^2 [MPa.m ^{1/2}] |
|--------------|-------------------------|------------------------------------|-----------------------------|--------------------|--------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 23 | 828 - 1213 - 828 | 3,50 | 242,43 | 1,10 | 1,20 | 0,80 | 0,87 |
| -20 | 1774 - 2347 - 1774 | 3,20 | 261,38 | 1,00 | 1,07 | 0,73 | 0,78 |
| -60 | 2740 - 3391 - 2740 | 3,00 | 274,17 | 0,94 | 0,99 | 0,69 | 0,72 |

Z obou tabulek VIII a IX je patrné, že ačkoli jsou kritéria založena každé na jiném fyzikálním principu, poskytují ve všech studovaných případech podobné výsledky. Poznamenejme taktéž, že hodnoty K_{eff} v tabulce IX a rozdíly mezi nimi pro trhlinu na vnějším rozhraní jsou zanedbatelné a tento případ v praxi není pravděpodobný. Důvodem pro jejich stanovení bylo spíše testování kritérií stability.

Důležitým závěrem je také poznatek, že vhodnou volbou materiálů jednotlivých vrstev lze vylepšit lomové vlastnosti celého systému – viz srovnání sloupců K_{eff}^1 a K_{eff}^2 s hodnotou lomové houževnatosti vlastní základnímu materiálu $K_{IC,z}$ v tabulce VIII.

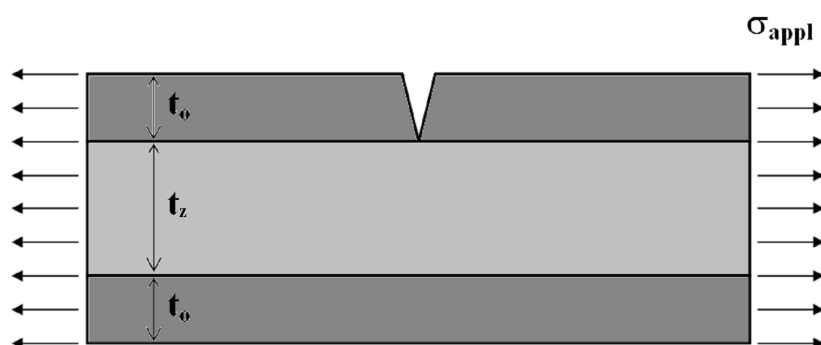
Další oblast výzkumu tedy byla věnována studiu vlivu materiálových vlastností jednotlivých vrstev na výsledné lomové vlastnosti celého systému. V práci [144] byly navrženy dvě nové modelové kombinace materiálů vnější a vnitřní ochranné vrstvy, viz první dva sloupce v tabulce X. Důraz byl tentokrát kladen pouze na případ, kdy vrchol trhliny dosáhne materiálového rozhraní. K odhadu kritických napětí (vnitřního přetlaku), za kterých dojde k průchodu trhliny přes rozhraní do druhého materiálu bylo využito

kritérium středního napětí podle kapitoly 5.2.1 a kritérium zobecněného faktoru hustoty deformační energie, tentokrát v pozměněné podobě, viz dále.

Tab. X Modelové materiálové kombinace navržené pro materiál ochranných vrstev za účelem studia vlivu těchto vlastností na lomové chování třívrstvého systému

| | | | |
|-------------|------|------|------|
| E_o [MPa] | 240 | 600 | 828 |
| E_z [MPa] | 1200 | 1200 | 1213 |

Kromě trubky zatížené vnitřním přetlakem byly modelové materiálové kombinace aplikovány taktéž na třívrstvý pás zatížený tahem (viz obr. 47, kde tloušťky t_o odpovídají tloušťkám vnější a vnitřní ochranné vrstvy u třívrstvé trubky, stejně jako t_z odpovídá tloušťce základní střední vrstvy u třívrstvé trubky), aby byl pro porovnání studován vliv rozhraní také při jiných okrajových podmínkách.



Obr. 47 Schéma modelovaného třívrstvého taženého pásu

Co se týče modifikovaného kritéria stability zobecněného faktoru hustoty deformační energie, to bylo odvozeno za předpokladu, že charakteristickou veličinou L řídící chování trhliny v tělese s trhlinou je hustota deformační energie. Kritické hodnoty pro trhlinu v homogenním materiálu a bi-materiálu tedy musí být stejné:

$$\left(\frac{dW}{dV} \right)_{C,th} = \frac{S_{C,th}}{r} = \frac{\Sigma_{C,th}}{r^{2p}} \quad (101)$$

Za předpokladu, že:

$$\Sigma_{C,th} = A_{11} \cdot H_{IC,th}^2 \quad (102)$$

Ize získat vztah pro kritickou hodnotu zobecněného součinitele intenzity napětí ve tvaru:

$$H_{IC,th} = \sqrt{\frac{S_{C,th}}{A_{11}}} \cdot r^{p-\frac{1}{2}} \quad (103)$$

kde za podmínky rovinné deformace je

$$S_{C,th} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)K_{IC,th}^2}{2\pi E} \quad (104)$$

$$A_{11} = \frac{(1+\nu) \cdot (1-p)^2}{2\pi E} [4(1-2\nu) + (g_R - p)^2] \quad (105)$$

Pomocí zmiňovaných dvou kritérií určené hodnoty kritického vnitřního přetlaku pro třívrstvou trubku s vnitřní trhlinou na rozhraní mezi vnitřní ochrannou vrstvou a základním materiálem, resp. hodnoty kritického tahového napětí pro třívrstvý pás s trhlinou na rozhraní mezi ochrannou vrstvou a základním materiálem jsou uvedeny v tabulce XI, resp. XII.

Poznamenejme ještě, že při určování hodnot zobecněného součinitele intenzity napětí přímou metodou byl v tomto případě pro extrapolaci použit jiný úsek (s ohledem na průběhy všech hodnocených závislostí) a taktéž v kritériích stability byl tentokrát odhadnut parametr d , resp. r na základě vztahu (80) uvedeného v kapitole 5.2.7 a nikoli v souvislosti s charakteristickým rozměrem materiálu, jako tomu bylo u předchozí aplikace.

Tab. XI Vybrané lomové charakteristiky určené pro třívrstvou trubku s vnitřní trhlinou na rozhraní mezi vnitřní ochrannou vrstvou a základní vrstvou; indexy označují příslušnost k použitým kritériím stability: 1 – střední napětí, 2 – zobecněný faktor hustoty deformační energie

| $E_o - E_z - E_o$ [MPa] | E_o/E_z [-] | p [-] | H_I [MPa.m ^p] | σ_c^1 [MPa] | σ_c^2 [MPa] |
|----------------------------|------------------|------------|--------------------------------|-----------------------|-----------------------|
| 240 – 1200 - 240 | 0,20 | 0,38068 | 75,75 | 8,75 | 7,28 |
| 600 – 1200 - 600 | 0,50 | 0,43874 | 63,47 | 7,15 | 6,43 |
| 828 – 1213 - 828 | 0,68 | 0,46454 | 57,71 | 6,62 | 6,20 |
| homogenní trubka | 1,00 | 0,50000 | 49,88 | 6,01 | 6,01 |

Tab. XII Vybrané lomové charakteristiky určené pro třívrstvý pás s trhlinou na rozhraní mezi ochrannou vrstvou a základní vrstvou; indexy označují příslušnost k použitým kritériím stability: 1 – střední napětí, 2 – zobecněný faktor hustoty deformační energie

| $E_o - E_z - E_o$ [MPa] | E_o/E_z [-] | p [-] | H_I [MPa.m ^p] | σ_c^1 [MPa] | σ_c^2 [MPa] |
|----------------------------|------------------|------------|--------------------------------|-----------------------|-----------------------|
| 240 – 1200 - 240 | 0,20 | 0,38068 | 16,27 | 40,76 | 33,89 |
| 600 – 1200 - 600 | 0,50 | 0,43874 | 15,29 | 29,70 | 26,68 |
| 828 – 1213 - 828 | 0,68 | 0,46454 | 14,53 | 26,31 | 24,64 |
| homogenní pás | 1,00 | 0,50000 | 13,27 | 22,61 | 22,61 |

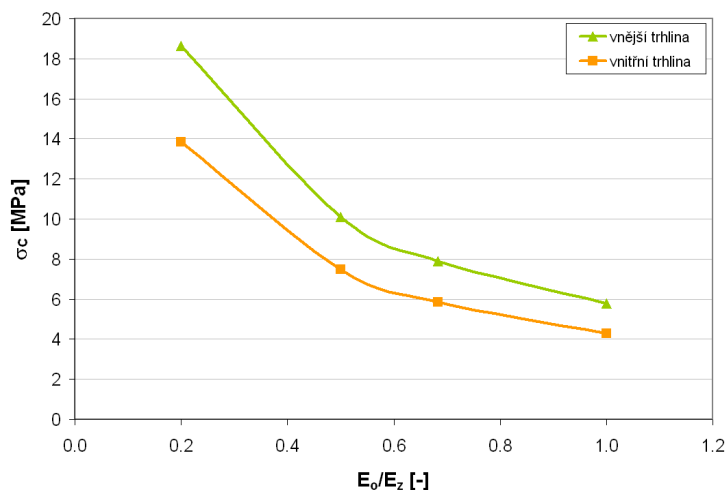
Jak již bylo předesláno, vhodná volba materiálů ochranných vrstev může vylepšit lomové vlastnosti vrstevnatého systému. Jsou-li ochranné vrstvy dostatečně poddajné vzhledem k materiálu základní střední vrstvy, je trubka s trhlinou v místě vnitřního rozhraní schopna vydržet větší vnitřní přetlak, než kdyby tato trubka byla vyrobena celá ze základního materiálu – viz poslední dva sloupce v tabulce XI, srovnání homogenního materiálu s třívrstvou trubkou vyrobenou ze tří navržených materiálových kombinací.

Ještě viditelnější je tento efekt u testovaného taženého pásu, kdy poddajnější ochranné vrstvy mohou způsobit až téměř dvojnásobnou odolnost trubky proti šíření trhliny z místa rozhraní, viz tabulka XII.

Poznamenejme ještě, že opět obě navržená kritéria poskytují ve všech případech srovnatelné hodnoty kritických napětí a trendy zjištěných hodnot jsou kvalitativně stejné.

Dosud byly veškeré výpočty a studie provedeny za předpokladu existence vnitřní trhliny. Část práce [54] je však věnována také případu, kdy se trhlina šíří z vnějšího

povrchu. Konkrétně je v práci popisován vliv materiálových vlastností jednotlivých vrstev na hodnotu kritického napětí (kritického vnitřního přetlaku), při které dojde k nestabilnímu šíření trhliny z rozhraní do základního materiálu. Pro výpočty kritických hodnot je v citovaném článku použito kritérium založené na zobecněném faktoru hustoty deformační energie, viz kapitola 5.2.3. Publikovány jsou následující výsledky, zobrazené v grafu na obr. 48.



Obr. 48 Závislost kritického napětí (vnitřního přetlaku) pro vnitřní a vnější trhlinu s vrcholem na rozhraní mezi ochrannou vrstvou (vnitřní/vnější) a základním materiálem v třívrstvé trubce

Na základě výsledků publikovaných v grafu na obr. 48 a v článku [54] lze konstatovat, že šíří-li se trhlina z vnějšího povrchu, jedná se v případě studovaných trubek vždy o méně nebezpečný případ, než šíří-li se trhlina z povrchu vnitřního.

Druhým významným závěrem vyplývajícím ze závislostí na obr. 48 je, že ať se jedná o vnitřní či vnější trhlinu, šíří-li se tato z poddajnějšího do tužšího materiálu, vytváří rozhraní tzv. stínící efekt a trhlina má tendenci se na rozhraní zastavit – na rozdíl od případu, šíří-li se v homogenním materiálu. Čím poddajnější jsou vrstvy, ze kterých se trhlina šíří, tím vyšší je odolnost trubky proti nestabilnímu šíření trhliny přes rozhraní do základního materiálu.

Poslední srovnání, které bylo v rámci problematiky třívrstevných trubek s trhlinou na rozhraní provedeno, je porovnání 2D a 3D řešení. Tato tematika byla nastíněna v práci [98] a znovu v práci [54], kde bylo taktéž zhodnoceno, že simulace provedené na 2D modelech poskytují konzervativní výsledky. Je tedy možné je bez obav použít pro odhady lomových parametrů vrstevnatých trubek a ušetřit tím obrovské množství výpočtového času, který by byl potřebný pro simulace na komplikovaných 3D modelech.

Pro ilustraci jsou uvedeny hodnoty alespoň pro reálnou materiálovou konfiguraci při teplotě 23 °C a pro trubku vyrobenou z homogenního materiálu, viz tabulka XIII.

Tab. XIII Hodnoty kritický napětí (kritických vnitřních přetlaků) pro třívrstvou trubku s vnitřní trhlinou na rozhraní mezi vnitřní ochrannou vrstvou a základním materiálem určené numerickými simulacemi na 2D a 3D modelu

| $E_o - E_z - E_o$ [MPa] | E_o/E_z [-] | σ_c (2D) [MPa] | σ_c (3D) [MPa] |
|----------------------------|------------------|--------------------------|--------------------------|
| 828 – 1213 - 828 | 0,68 | 5,85 | 9,87 |
| homogenní trubka | 1,00 | 4,27 | 7,43 |

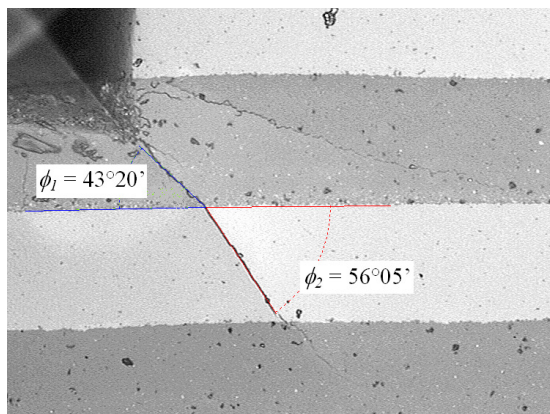
6.3 Aplikace zobecněných postupů LELM na keramické lamináty

Předchozí kapitola byla věnována praktickým aplikacím zobecněné lomové mechaniky na vícevrstevných polymerních trubkách. Jedním z motivačních důvodů bylo jistě to, že plasty v současné době nahrazují stále více konstrukčních materiálů ve všech možných průmyslových oblastech, a to především kvůli své nízké hustotě, potažmo hmotnosti, výborné zpracovatelnosti a nízké ceně. Dalším z materiálů, který nahrazuje dosud materiály nejrozšířenější a tradiční (zejména oceli), je keramika. Ta vyniká zejména svou odolností proti opotřebení, odolností vůči vysokým teplotám a dalšími specifickými vlastnostmi. Dalo by se říct, že jejím jediným ale o to závažnějším nedostatkem je její křehkost. Proto se hledají nové alternativy, jak lomové chování keramiky vylepšit a rozšířit tak její praktickou aplikovatelnost. Jedním ze způsobů, jak toho dosáhnout, je vzájemné vrstvení různých druhů keramiky, přičemž velmi často se lze v literatuře i praxi setkat s kombinací keramických materiálů $\text{Al}_2\text{O}_3 - \text{ZrO}_2$. Proto i druhá aplikační oblast v této disertační práci se bude zabývat touto problematikou.

Následující analýzy byly na základě dostupné literatury přizpůsobeny konkrétně dvěma různým geometrickým konfiguracím, pro které byla k dispozici experimentální data pro porovnání s predikcemi lomového chování a vlastností provedenými na základě numerických výpočtů pomocí MKP. Prvním typem keramik se zabývá kolektiv pracovníků kolem Hynka Hadraby na ÚFM AV ČR, v. v. i. a ÚMVI FSI VUT v Brně [45], [46], [59] a druhý keramický laminát byl předmětem zájmu Raúla Bermeja a spol., viz např. [12] až [17].

6.3.1 Keramické lamináty I ($\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$)

První typ laminátu, na kterém byly prováděny experimenty, jež byly publikovány v pracích [45], [46] a [59], byl vyroben elektroforetickou metodou a skládá se z 59 pravidelně se střídajících vrstev keramiky Al_2O_3 a ZrO_2 . Všechny vrstvy mají přibližně stejnou šířku (cca 42 μm), takže celý vzorek má rozměry cca 2 x 2,5 x 25 mm (š x v x d). Během testování těchto materiálů bylo sledováno šíření trhlin, které se iniciovaly v rohu vpichu po indentoru, viz obr. 49.



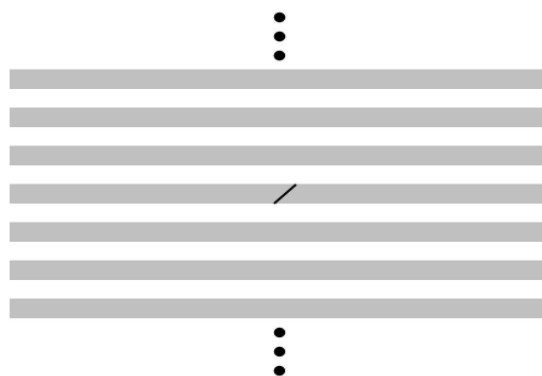
Obr. 49 Změna směru šíření trhliny, vyvolané vpichem indentoru, na rozhraní mezi dvěma vrstvami keramiky (publikováno se svolením H. Hadraby)

V tabulce XIV jsou uvedeny zjištěné změny směru šíření trhliny na rozhraní mezi jednotlivými vrstvami keramického kompozitu. Právě směr dalšího šíření trhliny z rozhraní byl předmětem zájmu autorčiných numerických studií [134], [142], [143].

Tab. XIV Pozorované úhly počáteční orientace trhliny a směr jejího dalšího šíření po průchodu trhliny rozhraním (průměrné hodnoty z měření)

| Al ₂ O ₃ | | ZrO ₂ | |
|--------------------------------|----------------|------------------|----------------|
| ϕ_1 [deg] | ϕ_2 [deg] | ϕ_1 [deg] | ϕ_2 [deg] |
| 52,5 | 60,4 | 58,0 | 43,9 |
| 73,0 | 77,5 | 64,5 | 53,4 |
| 82,5 | 87,0 | 78,5 | 72,0 |

Na základě informací dostupných v citované literatuře [45], [46] a [59] byl vytvořen numerický model keramického laminátu s trhlinou, viz schéma na obr. 50. Úloha byla řešena jako rovinná a z důvodu vysokých nároků na lokální zjemnění sítě v okolí vrcholu trhliny při řešení problémů lomové mechaniky byl pro potřebu numerického řešení zredukován původní počet vrstev reálného vzorku na počet nižší, a to tak, aby se nezměnila napjatost v okolí defektu a aby nedošlo k ovlivnění numerických výsledků.



Obr. 50 Schematické znázornění řešeného problému – keramický laminát s trhlinou s vrcholem na rozhraní mezi jednotlivými složkami kompozitu

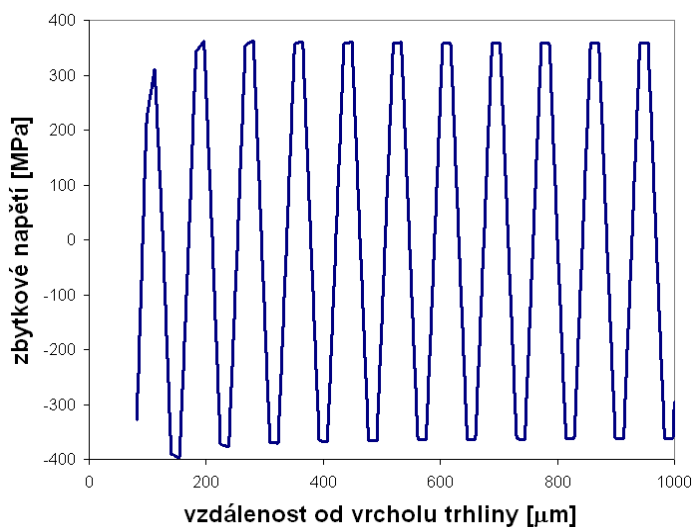
Byly řešeny dva možné případy, tzn. přítomnost trhliny jak ve vrstvě Al₂O₃, tak ve vrstvě ZrO₂, a to vždy pro tři zvolené počáteční orientace trhliny vzhledem k rozhraní v závislosti na dostupných experimentálních datech (tím je zaručena možnost porovnání experimentálních dat s numericky určenými hodnotami) - viz tabulka XIV, kde jsou uvedeny úhly počáteční orientace trhliny vzhledem k rozhraní (označení ϕ_1) společně s experimentálně zjištěnými směry dalšího šíření trhliny po průchodu přes rozhraní (označení ϕ_2). V numerických simulacích byly použity materiálové charakteristiky jednotlivých vrstev uvedené v tabulce XV, převzato z [46], [59].

Tab. XV Materiálové charakteristiky vrstev keramického laminátu

| MATERIÁLOVÉ CHARAKTERISTIKY | keramika | |
|--|--------------------------------|----------------------|
| | Al ₂ O ₃ | ZrO ₂ |
| modul pružnosti v tahu [MPa] | $3,8 \cdot 10^5$ | $2,1 \cdot 10^5$ |
| Poissonovo číslo [-] | 0,26 | 0,31 |
| součinitel teplotní roztažnosti [K ⁻¹] | $8,5 \cdot 10^{-6}$ | $10,3 \cdot 10^{-6}$ |

Vzhledem k rozměrům vzorku, na kterém byly prováděny experimenty (2 x 2,5 x 25 mm), bylo v prvním kroku nutné určit, zda je vhodné použít aproximaci

rovinné napjatosti či rovinné deformace. Byl vytvořen MKP model kompozitu bez trhliny, který byl namáhán pouze teplotně (ochlazením ze slinovací teploty 1500 °C na pokojovou teplotu) a zjištěna napjatost v jednotlivých vrstvách. V grafu na obr. 51 je zobrazen průběh napětí ve směru největšího rozměru vzorku v jednotlivých vrstvách laminátu. Na obrázku je patrná skoková změna mezi tahovými a tlakovými napětími v jednotlivých vrstvách kompozitu, která je způsobena rozdílnými součiniteli teplotní roztažnosti materiálů obou složek. Výpočtem tak byla zjištěna velikost tahového/tlakového napětí v jednotlivých vrstvách ± 362 MPa pro případ rovinné deformace a ± 600 MPa pro případ rovinné napjatosti. Experimentální měření (viz [59]) udávají velikost reziduálních napětí v jednotlivých vrstvách ± 367 MPa. Na základě tohoto zjištění bylo rozhodnuto, že další řešení bude prováděno za podmínek rovinné deformace.



Obr. 51 Rozložení napětí v jednotlivých vrstvách laminátu pro případ rovinné deformace

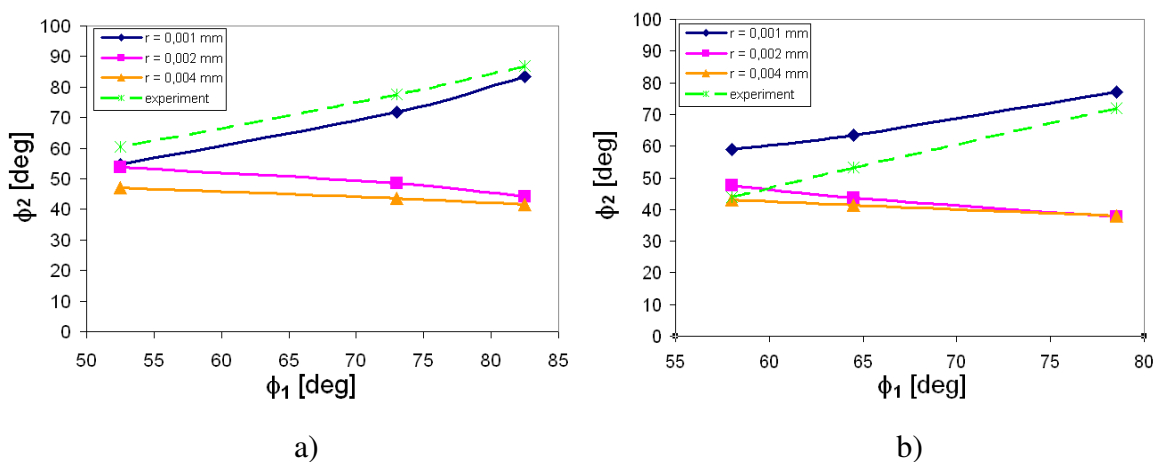
Poznamenejme, že u velkého množství keramických laminátů jsou to právě alternující reziduální napětí v jednotlivých vrstvách, která zajišťují lepší lomové vlastnosti těchto materiálů. Reziduální napětí mohou způsobit jednak vychýlení trhliny za rozhraním (případně může dojít i k rozdvojení trhliny), což zvýší lomovou energii tohoto laminátu, nebo mohou dokonce způsobit zastavení trhliny v místě rozhraní, jak bude ukázáno u druhého studovaného typu laminátu. U laminátu I byla pozornost věnována směru šíření trhliny, tedy vlivu reziduálních napětí na vychýlení trhliny z jejího původního směru a tím větší absorpci energie trhliny šířící se z rozhraní.

První práce věnované odhadu směru dalšího šíření trhliny z rozhraní byly založeny ryze na numerických simulacích [134], [143]. Využita byla kritéria maximálních tangenciálních napětí (MTS kritérium, viz kapitola 5.3.1) a minimální hustoty deformační energie (SED kritérium, viz kapitola 5.3.3). S ohledem na rozměry zkušební vzorku (ačkoli byla provedena redukce celkového počtu vrstev kompozitu a optimalizace sítě) byl numerický výpočet sloužící k predikci směru dalšího šíření trhliny poměrně náročný. Příčinou bylo především extrémní lokální zjemnění sítě v okolí vrcholu trhliny. Bylo totiž nutné, navíc oproti klasickému problému tělesa s trhlinou, v místě blízkého okolí vrcholu trhliny definovat půlkruhovou cestu, na které byly odečítány veličiny nezbytné pro aplikaci kritérií pro určení směru dalšího šíření trhliny.

V prvním ze zmíněných kritérií, MTS kritériu, je rozhodující veličinou pro šíření trhliny hodnota maximálního obvodového napětí. Ačkoli byly hodnoty $\sigma_{\theta\theta}$ určovány na několika různých poloměrech, v žádném z řešených případů nevedlo kritérium

maximálních tangenciálních napětí k uspokojivým výsledkům. Vypočítané hodnoty směru šíření neodpovídaly provedenému experimentu ani praktickým zkušenostem a použití uvedeného kritéria pro daný typ úlohy se ukázalo jako nevhodné.

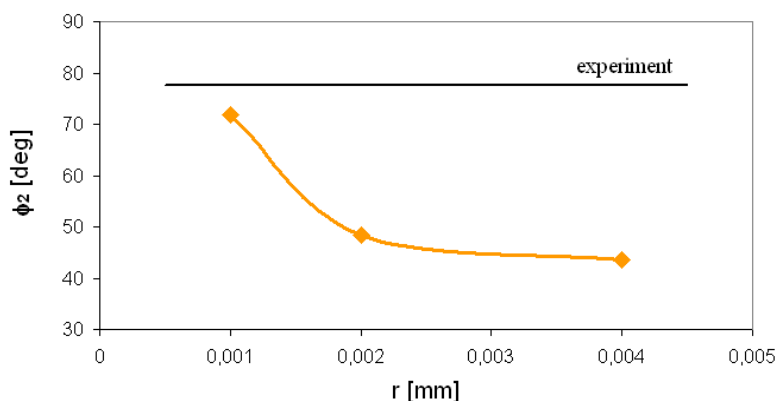
Jako vhodnější se ukázalo použití druhého kritéria, SED kritéria. Podobně jako u MTS kritéria i tady bylo provedeno více výpočtů pro různé velikosti poloměru půlkruhového oblouku, na kterém byla určována hodnota hustoty deformační energie w . Jak ukazuje obr. 52, nepříjemnou vlastností této metody (ve studovaném případě) je její závislost na poloměru oblouku r , na kterém se zjišťuje hustota deformační energie. Z výsledků uvedených na obr. 52 je zřejmé, že při dostatečném zjemnění sítě v okolí vrcholu trhliny (dostatečně malém poloměru r) je možné za pomoci hustoty deformační energie a MKP predikovat další směr šíření trhliny po jejím průchodu přes rozhraní dvou materiálů.



Obr. 52 Směry šíření trhliny po průchodu rozhraním ϕ_2 pro zvolené poloměry r a pro podmínku rovinné deformace v závislosti na počáteční orientaci trhliny ϕ_1 určené z ryze numerického řešení pomocí SED kritéria; a) rozhraní $Al_2O_3 - ZrO_2$, b) rozhraní $ZrO_2 - Al_2O_3$

Aby byla přesnost určení směru dalšího šíření trhliny přijatelná, musí být zjemnění sítě v okolí kořene trhliny extrémní. Výpočet ukázal, že dostatečný poloměr pro určení směru šíření trhliny, pro daný typ úlohy, je $r < 0,001$ mm. To znamená, že na poloměru 0,001 mm a menším (je-li potřeba dosáhnout přesnějších výsledků) v okolí vrcholu trhliny, musí model obsahovat řádově minimálně desítky prvků. Tento požadavek klade velké nároky na tvorbu modelu (extrémní zhuštění sítě v okolí vrcholu trhliny) a celkový počet elementů modelu.

Míra zpřesnění změny směru šíření trhliny se změnou radiální vzdálenosti r je vidět na obr. 53. Z obrázku vyplývá, že se zmenšujícím se poloměrem r se zpřesňuje odhad směru šíření trhliny (pro daný typ úlohy lze dosáhnout přijatelné shody s experimentem pro velikost $r = 0,001$ mm). Ke zpřesnění výsledků odhadu tedy vede zjemnění sítě (podobně jako např. u určování hodnot součinitele intenzity napětí). Na rozdíl od způsobu určování hodnot součinitele intenzity napětí, musí být síť pro odhad směru šíření trhliny mnohem jemnější. Z výpočtů lze odhadnout, že pro uspokojivé určení změny směru šíření je potřeba síť s elementy cca o dva řády menšími v okolí vrcholu trhliny, než by tomu bylo při určování hodnot součinitele intenzity napětí.



Obr. 53 Vypočítané hodnoty směru dalšího šíření trhliny po průchodu rozhraním v závislosti na vzdálenosti r od vrcholu trhliny, ve které byla určována hustota deformační energie, v porovnání s experimentálními daty

Problémem je, že většinou dopředu není známa vhodná velikost r , což činí celý tento postup prakticky nepoužitelný pro odhad směru šíření trhliny (byť se dá předpokládat, že velikost r bude podobná i v jiných případech), resp. použitelný, ale pouze pro první hrubý odhad směru dalšího šíření trhliny.

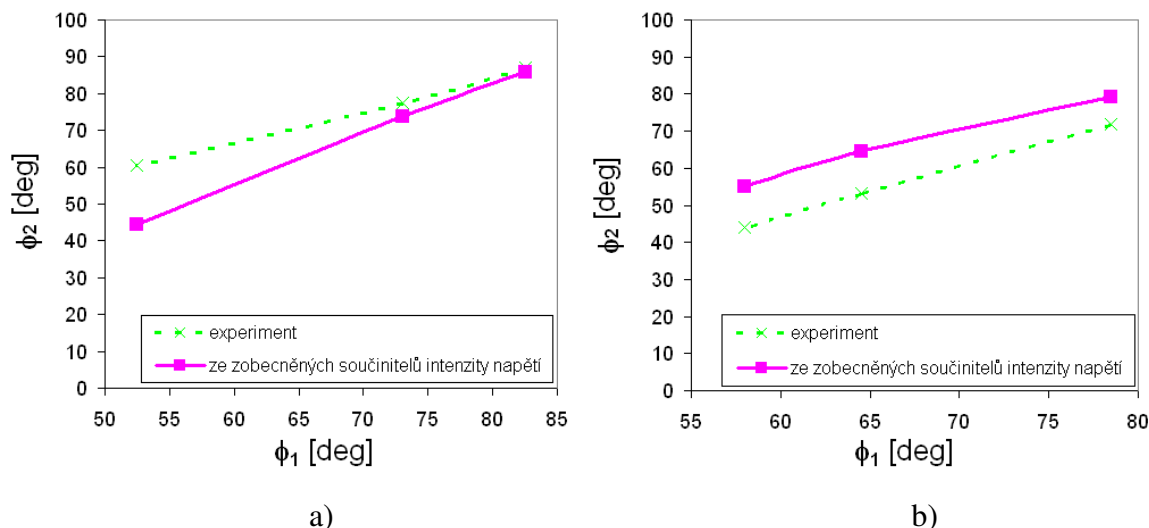
Jako druhá varianta postupu pro odhad směru dalšího šíření trhliny z rozhraní v keramickém laminátu se nabízela kombinace numerického řešení s řešením analytickým, která umožňuje eliminovat extrémní nároky na hustotu sítě podmíněné výraznou závislostí přesnosti určení dalšího směru šíření trhliny na vzdálenosti r od vrcholu trhliny [134], [142].

Konkrétně byla použita metodika popsaná v kapitole 5.3.3 v odstavci (b). Připomeňme jenom stručně, že se jedná o postup, který před vrcholem trhliny ($\theta = 0$) dokáže oddělit jednotlivé zatěžovací módy a jim příslušející zobecněné součinitele intenzity napětí H_I a H_{II} společně s exponenty singularity napětí p_I a p_{II} . Na základě analogie s případem trhliny v homogenním materiálu je pak možné odhadnout směr dalšího šíření trhliny ze vztahu:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{H_{II}}{H_I}, \quad (106)$$

kde γ je odklon od původního směru podle obr. 27.

Výsledky zjištěné tímto postupem jsou na obr. 54, kde lze vidět poměrně dobrou shodu s experimentálně určenými směry šíření trhliny z rozhraní v keramickém laminátu, a to i přes jisté zjednodušující předpoklady provázející odvození vztahu (106) a především separaci jednotlivých zatěžovacích módů. Mírný nesoulad výsledků může být způsoben použitím dvojrozměrného modelu při numerickém řešení pomocí MKP. Při uvažování tohoto zjednodušení není v modelu zachycen reálný poloeliptický tvar trhliny, což může mít vliv na dosažené výsledky. Další výzkum týkající se lomového chování tohoto typu laminátů může být tedy zaměřen tímto směrem.

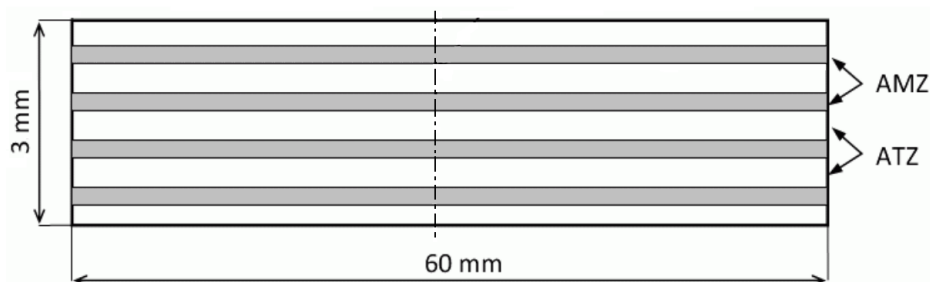


Obr. 54 Směry šíření trhliny po průchodu rozhraním ϕ_2 pro podmínku rovinné deformace v závislosti na počáteční orientaci trhliny ϕ_1 určené ze zobecněných součinitelů intenzity napětí odpovídajících zatěžovacím módům I a II; a) rozhraní $\text{Al}_2\text{O}_3 - \text{ZrO}_2$, b) rozhraní $\text{ZrO}_2 - \text{Al}_2\text{O}_3$

V každém případě lze na základě výsledků na obr. 54 konstatovat, že poměr zobecněných součinitelů intenzity napětí H_{II}/H_I a využití analogie s problematikou trhlín v homogenním materiálu se ukázalo jako možný postup určení změny směru šíření trhliny na rozhraní mezi dvěma materiály. Klíčovou záležitostí je v tomto případě separace jednotlivých módů zatěžování, a to nejen pro $\theta = 0$. Toto může být opět námětem dalšího výzkumu.

6.3.2 Keramické lamináty II (ATZ/AMZ)

Druhý studovaný laminát je také typu $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-ZrO}_2$, ale liší se kromě geometrie, viz obr. 55, také složením jednotlivých vrstev. Obě vrstvy se skládají vždy ze směsi obou složek, přičemž jedna vrstva je tvořena materiálem Al_2O_3 s pětiprocentním objemovým podílem tetragonálního ZrO_2 (materiál $\text{Al}_2\text{O}_3/5\text{vol.}\%t\text{-ZrO}_2$ dále označovaný jako ATZ) a druhá vrstva se skládá z materiálu Al_2O_3 tentokrát s třicetiprocentním objemovým množstvím monoklinické složky ZrO_2 (materiál $\text{Al}_2\text{O}_3/30\text{vol.}\%m\text{-ZrO}_2$ dále označovaný jako AMZ).



Obr. 55 Schéma keramického laminátu II

Co se týče geometrie studovaného laminátu, jedná se o pravidelně se střídajících devět vrstev, přičemž tloušťka vrstev z materiálu ATZ je $t_{ATZ} = 0,52$ mm a tloušťka vrstev z materiálu AMZ je $t_{AMZ} = 0,1$ mm. Celková tloušťka laminátu je tedy 3 mm, jak naznačuje obr. 55.

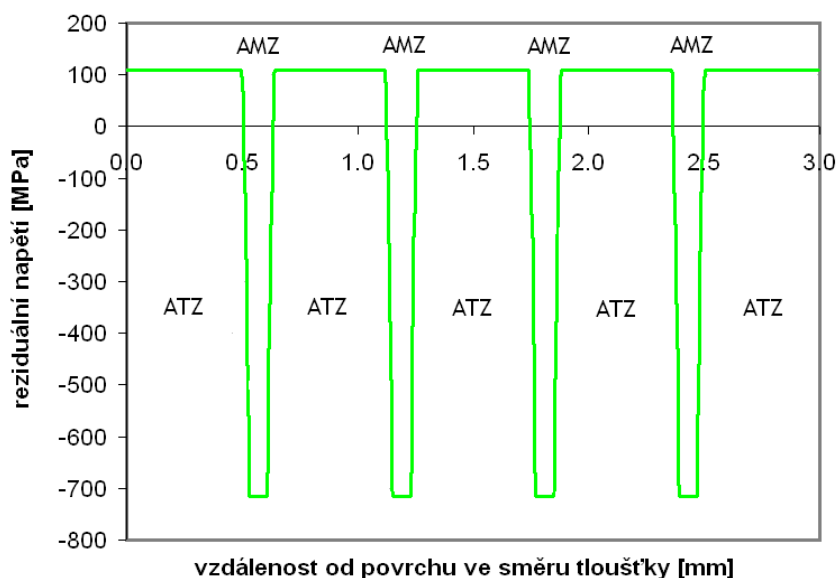
Stejně jako u řady dalších keramických laminátů i u tohoto typu se využívá ke zlepšení jeho lomových vlastností střídání vrstev s různými mechanickými vlastnostmi,

především s rozdílnými koeficienty teplotní roztažnosti, viz tabulka XVI (poznamenejme na tomto místě, že jiný mechanismus zlepšení lomových vlastností materiálu mají např. lamináty se slabými rozhraními, ve kterých se trhlina při dosažení rozhraní do něj vychýlí a dojde k delaminaci, viz např. [29], [70], [105], [106]). Důsledkem jsou pak během výrobního procesu vznikající reziduální napětí v jednotlivých vrstvách, která mohou mít při správném návrhu laminátu pozitivní vliv při šíření trhliny v takovémto tělese, jak již bylo zmíněno u předchozího typu laminátu.

Tab. XVI Materiálové charakteristiky vrstev studovaného keramického laminátu, viz např. [11] nebo [14]

| MATERIÁLOVÉ CHARAKTERISTIKY | keramika | |
|--|----------------------|----------------------|
| | ATZ | AMZ |
| modul pružnosti v tahu [MPa] | $3,9 \cdot 10^5$ | $2,8 \cdot 10^5$ |
| Poissonovo číslo [-] | 0,22 | 0,22 |
| součinitel teplotní roztažnosti [K^{-1}] | $9,82 \cdot 10^{-6}$ | $8,02 \cdot 10^{-6}$ |
| lomová houževnatost [$MPa \cdot m^{1/2}$] | 3,2 | 2,6 |
| pevnost [MPa] | 422 | 90 |

Průběhy reziduálních napětí ve studovaném keramickém laminátu určené na základě numerických simulací jsou zobrazeny na obr. 56. Upozorníme na to, že u tohoto laminátu jsou povrchové vrstvy namáhány tahovými reziduálními napětími (jejich hodnoty ale nejsou příliš vysoké) a vrstvy s mnohem většími tlakovými reziduálními napětími jsou umístěny až v určité vzdálenosti pod povrchem. Poznamenejme, že v literatuře se vyskytuje i druhý typ keramických laminátů, u kterých jsou vrstvy s reziduálními tlakovými napětími umístěny přímo na povrchu, viz např. [25], [75].



Obr. 56 Průběh reziduálních napětí v jednotlivých vrstvách keramického laminátu II

Reziduální napětí v jednotlivých vrstvách keramického laminátu určená na dvojrozměrném numerickém modelu keramického laminátu bez trhliny za podmínek rovinné deformace se téměř dokonale shodují s hodnotami reziduálních napětí určenými pomocí analytických vztahů [102]:

$$\sigma_{res,ATZ} = \frac{\int_{T_{sf}}^{T_0} (\alpha_{AMZ} - \alpha_{ATZ}) dT}{\frac{1}{E_{ATZ}^*} + \frac{1}{E_{AMZ}^*} \cdot \rho \cdot \frac{N+1}{N-1}} \quad \text{a} \quad (107)$$

$$\sigma_{res,AMZ} = -\sigma_{res,ATZ} \cdot \rho \cdot \frac{N+1}{N-1} . \quad (108)$$

Ve vztazích (107) a (108) představují α_{AMZ} a α_{ATZ} koeficienty teplotní roztažnosti materiálů AMZ a ATZ, N je počet vrstev laminátu, ρ je poměr tloušťek jednotlivých vrstev (t_{ATZ}/t_{AMZ}), T_{sf} je tzv. „stress free temperature“, tedy teplota, při které začínají v materiálu vznikat reziduální napětí (1250 °C) a T_0 je pokojová teplota (20 °C). Hodnoty E^* představují výrazy $E/(1-\nu)$.

Hodnoty reziduálních napětí v jednotlivých vrstvách ATZ a AMZ keramického laminátu určené pomocí numerických simulací a analytických vztahů (107) a (108) jsou srovnány v tabulce XVII.

Tab. XVII Reziduální napětí v jednotlivých vrstvách keramického laminátu určená na základě numerických simulací a analytických vztahů (107) a (108)

| Numerické simulace (MKP) | | Analytické vztahy (107) a (108) | |
|--------------------------|--------------------------|---------------------------------|--------------------------|
| $\sigma_{res,ATZ}$ [MPa] | $\sigma_{res,AMZ}$ [MPa] | $\sigma_{res,ATZ}$ [MPa] | $\sigma_{res,AMZ}$ [MPa] |
| 110,11 | -715,72 | 109,95 | -715,83 |

Znovu zdůrazněme, že jsou to právě tlaková reziduální napětí, která mají příznivý vliv na lomové chování keramického systému. Přitom mechanismů zhouževnatění může existovat více najednou a prvním z nich, který byl poměrně detailně studován a bude popsán v následujícím textu, souvisí s možností zastavení trhliny na rozhraní typu AMZ/ATZ, přičemž tlaková reziduální napětí ve vrstvách AMZ fungují jako bariéry proti šíření trhliny. Právě v důsledku přítomnosti vysokých tlakových reziduálních napětí ve vrstvách AMZ (viz obr. 56 a tabulka XVII) dochází v této oblasti k nárůstu tzv. zdánlivé lomové houževnatosti laminátu K_{appt} .

Nachází-li se trhlina o délce a v materiálu s reziduálními napětími, je součinitel intenzity napětí pro tuto trhlinu dán vztahem [14]:

$$K_{tip}(a) = K_{appl}(a) + K_{res}(a) . \quad (109)$$

Kritérium stability pro mezní stav nestabilního šíření trhliny má v tomto případě následující tvar:

$$K_{tip}(a) = K_C \quad (110)$$

a tedy

$$K_{appl}(a) = K_C - K_{res}(a) , \quad (111)$$

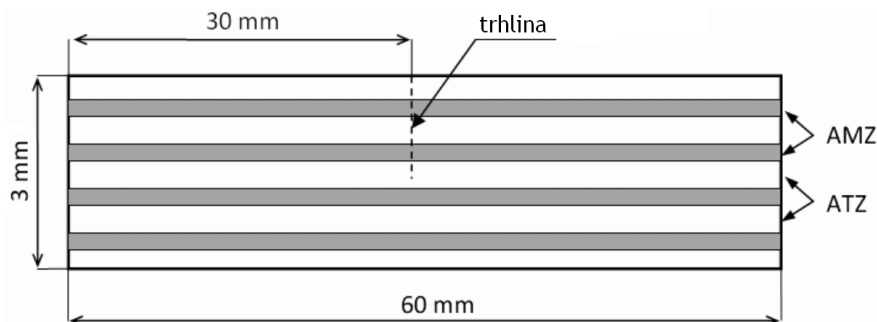
přičemž lze označit

$$K_C - K_{res}(a) = K_{appt}(a) . \quad (112)$$

Ve vztazích (109) až (112) představuje veličina $K_{tip}(a)$ součinitel intenzity napětí pro trhlinu délky a v tělese zatíženém aplikovaným napětím σ_{appl} a současně reziduálními napětími σ_{res} . $K_{appl}(a)$ a $K_{res}(a)$ jsou potom součinitele intenzity napětí příslušející jednotlivým složkám namáhání – aplikovanému napětí σ_{appl} a reziduálním napětím σ_{res} . K_C je lomovou houževnatost, jakožto materiálová charakteristika dané vrstvy materiálu, a $K_{appl}(a)$ je tzv. zdánlivá lomová houževnatost.

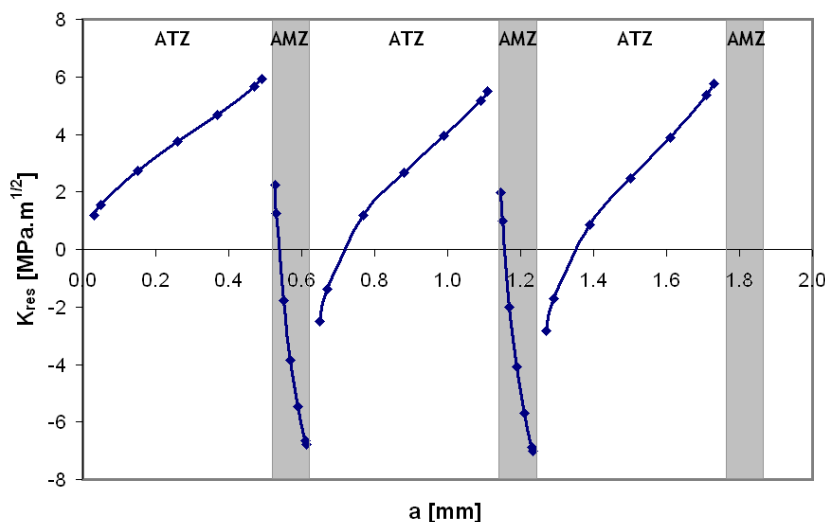
Při určování veličiny $K_{appl}(a)$ je tedy (jak vyplývá ze vztahu (112)) nezbytné sestrojít K -kalibrační křivky pro keramický laminát s trhlinou zatížený pouze reziduálními napětími.

Studie zabývající se problematikou zdánlivé lomové houževnatosti keramického laminátu byla provedena a publikována v [95], [99], [100] pro geometrii naznačenou na obr. 57 za předpokladu trhliny kolmé k rozhraní. Laminát s trhlinou je zatížen pouze alternujícími (tahovými/tlakovými) reziduálními napětími vznikajícími v kompozitu v důsledku výrobního procesu a v důsledku rozdílných součinitelů teplotní roztažnosti materiálů jednotlivých vrstev (ATZ/AMZ).



Obr. 57 Schéma keramického laminátu II s kolmou trhlinou

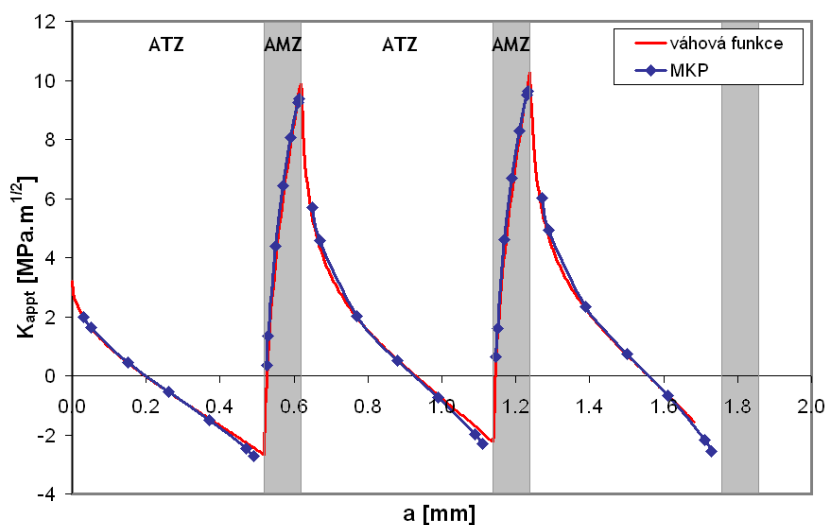
K -kalibrační křivky (závislosti součinitele intenzity napětí K_{res} na délce trhliny) získané na základě numerických simulací popsání problému jsou uvedeny v grafu na obr. 58.



Obr. 58 K -kalibrační křivky pro kolmou trhlinu v keramickém laminátu s vlivem reziduálních napětí

Analogický graf pro zdánlivou lomovou houževnatost K_{appl} jako funkci délky trhliny lze získat přepočtem ze vztahu (112). Výsledná závislost je na obr. 59, kde lze také vidět zmiňovaný vliv reziduálních napětí ve vrstvách AMZ na nárůst zdánlivé lomové

houževnatosti keramického laminátu [95], [99], [100]. Zatímco jednotlivé vrstvy mají lomovou houževnatost okolo $3 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$ (viz tabulka XVI), vrstevnatý laminát má hodnotu K_{appI} až trojnásobnou (viz druhé rozhraní laminátu mezi vrstvami AMZ a ATZ na obr. 59).



Obr. 59 Zdánlivá lomová houževnatost v jednotlivých vrstvách keramického laminátu určená pomocí numerických simulací a metody váhových funkcí

Na obr. 59 je kromě závislosti určené na základě numerických simulací pomocí MKP zobrazena i tatáž závislost ale získaná pomocí metody váhových funkcí (červená křivka), viz kapitola 5.4 pro podrobnosti. Je zřejmé, že výsledky získané oběma metodami se velice dobře shodují a pro odhad zdánlivé lomové houževnatosti keramických laminátů je tedy možné použít libovolnou z metod v závislosti především na prostředcích a dostupnosti příslušného softwaru daného pracoviště.

Poznamenejme, že zatímco při aplikaci metody váhových funkcí nezpůsobují rozhraní při řešení žádné komplikace, pouze je nutné zohlednit skokovou změnu napětí v tomto místě, numerické simulace provedené na základě platnosti klasických postupů lomové mechaniky jsou použitelné pouze pro trhlinu v homogenním materiálu. Jak již bylo komentováno v dřívějším textu, viz např. kapitola 2.2.1 nebo 6.1.1, v blízkosti rozhraní může narůstat nepřesnost řešení a pro případ rozhraní je dokonce nutné použít zobecněné postupy LELM.

Pro zpřesnění hodnot v blízkosti rozhraní byly na základě kritéria stability založeného na hodnotě faktoru hustoty deformační energie (viz kapitola 5.2.3) odhadnuty hodnoty K_{appI} pro první čtyři rozhraní. Byla tedy modelována problematika kolmé trhliny v keramickém laminátu zatíženém reziduálními napětími s vrcholem na rozhraní mezi jednotlivými vrstvami. Z hodnot zobecněných součinitelů intenzity napětí H byly pomocí kritéria stability vypočteny hodnoty efektivní hodnoty součinitele intenzity napětí pro trhlinu na rozhraní a pomocí vztahu (112) byly určeny výsledné velikosti K_{appI} . Tyto jsou uvedeny v tabulce XVIII.

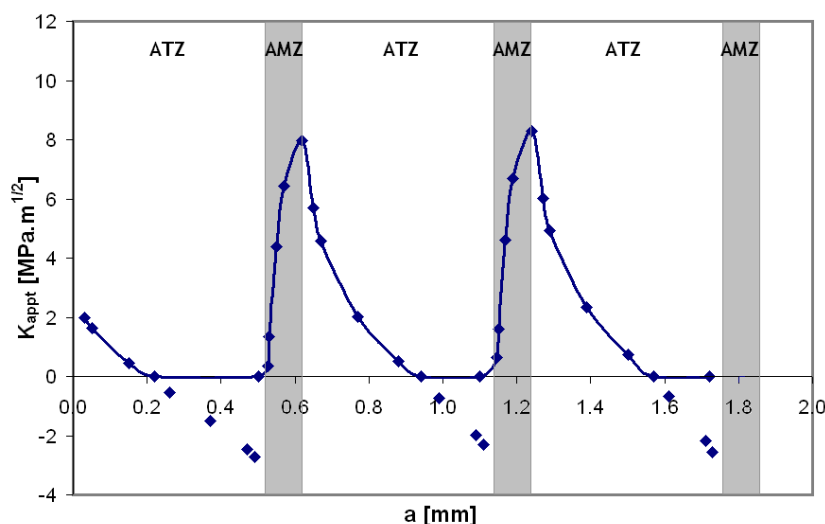
Připomeňme, že ještě před aplikací daného kritéria stability bylo třeba stanovit délkový parametr r , ve kterém bude kritérium založené na hodnotě zobecněného faktoru hustoty deformační energie aplikováno – ten byl stanoven na základě vztahu (80). Konkrétně pro rozhraní typu ATZ/AMZ byla odhadnuta hodnota 0,133 mm a pro druhý typ rozhraní (AMZ/ATZ) byla na základě vztahu (80) určena hodnota 0,009 mm.

Tab. XVIII Hodnoty zdánlivé lomové houževnatosti K_{appt} pro kolmou trhlinu a první čtyři rozhraní keramického laminátu II; ¹určené na základě numerických simulací pomocí kritéria stability založeného na hodnotě faktoru hustoty deformační energie, ²experimentálně určené hodnoty [17]

| Délka trhliny a [mm] | K_{eff} [MPa.m ^{1/2}] | K_{appt}^1 [MPa.m ^{1/2}] | K_{appt}^2 [MPa.m ^{1/2}] |
|-------------------------|-----------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 0,52 (rozhraní ATZ/AMZ) | 2,5 | 0,1 | - |
| 0,62 (rozhraní AMZ/ATZ) | -4,8 | 8,0 | 7,1 |
| 1,14 (rozhraní ATZ/AMZ) | 2,2 | 0,4 | - |
| 1,24 (rozhraní AMZ/ATZ) | -5,1 | 8,3 | 8,1 |

V tabulce XVIII je vidět taktéž dobrá shoda hodnot zdánlivé lomové houževnatosti pro první a druhé rozhraní typu AMZ/ATZ určených jednak na základě numerických simulací [95], [99], [100] a jednak pomocí experimentu [17].

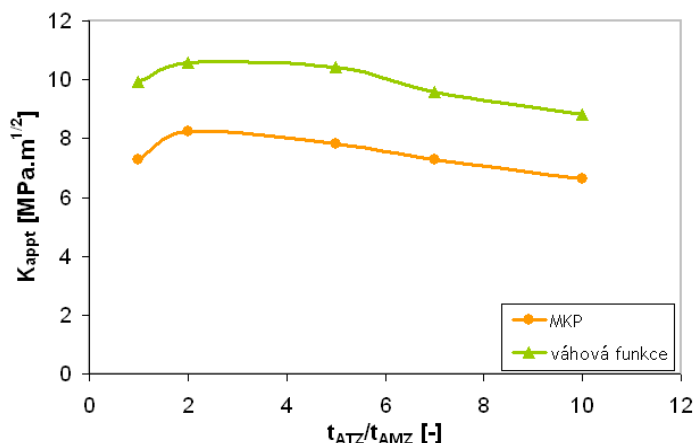
S ohledem na data uvedená v tabulce XVIII se jeví jako vhodné upravit původní graf závislosti K_{appt} na délce trhliny na obr. 59. Kromě zahrnutí hodnot určených pro trhlinu na prvních čtyřech rozhraních se liší nový graf také tím, že nepřipouští záporné hodnoty zdánlivé lomové houževnatosti, viz obr. 60.



Obr. 60 Zdánlivá lomová houževnatost v jednotlivých vrstvách keramického laminátu za předpokladu zahrnutí hodnot K_{appt} určených pro trhlinu na prvních čtyřech rozhraních a omezení se pouze na kladné hodnoty zdánlivé lomové houževnatosti

Jak je vidět na obr. 59 i 60, je zdánlivá lomová houževnatost studovaného keramického laminátu prakticky stejná pro všechna rozhraní typu AMZ/ATZ a nezávisí tedy na absolutní délce trhliny. Mj. také s ohledem na tuto skutečnost, byla pro další studie týkající se optimalizace geometrie keramického laminátu s ohledem na jeho lomovou houževnatost zvolena jako reprezentativní hodnota K_{appt} pro celý systém hodnota na jeho druhém rozhraní (tzn. na rozhraní typu AMZ/ATZ).

Optimalizační proces byl proveden na základě jak numerických simulací, tak pomocí váhových funkcí. Snahou bylo nalézt optimální poměr tloušťek jednotlivých vrstev, tzn. parametr $\rho = t_{ATZ}/t_{AMZ}$, tak, aby byla maximalizována hodnota zdánlivé lomové houževnatosti určená na rozhraní typu AMZ/ATZ, jak bylo vysvětleno výše. Testovány byly modelové poměry 1:1, 2:1, 5:1, 7:1 a 10:1. Získané závislosti jsou na obr. 61.

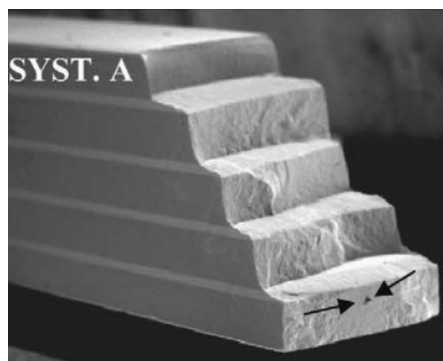


Obr. 61 Zdánlivá lomová houževnatost keramického laminátu definovaná jako K_{apppt} na rozhraní typu AMZ/ATZ a určená pomocí numerických simulací (MKP) a metody váhových funkcí

Jak je vidět z obr. 61, ačkoli aplikované metody (MKP a váhové funkce) nedávají kvantitativně stejné výsledky, kvalitativně co do trendů jsou křivky totožné a je tedy možné na jejich základě navrhnout optimální design keramického laminátu tak, aby bylo dosaženo jeho maximální zdánlivé lomové houževnatosti. U konkrétního studovaného laminátu typu ATZ/AMZ se jeví jako ideální poměr tloušťek t_{ATZ}/t_{AMZ} jednotlivých vrstev přibližně 2:1 nebo mírně vyšší. Lomová houževnatost takto navrženého laminátu může dosahovat až trojnásobku hodnot lomových houževnatostí jednotlivých složek.

Poznamenejme na závěr k této problematice, že tlaková napětí ve vrstvách AMZ nezaručují pouze vyšší lomovou houževnatost celého systému, ale způsobují také, že daný typ laminátu vykazuje poměrně stálou hodnotu tzv. „threshold strength“ neboli prahové pevnosti σ_{th} a s tím související konstantní hodnotu kritické délky trhliny, viz např. [14] pro detaily.

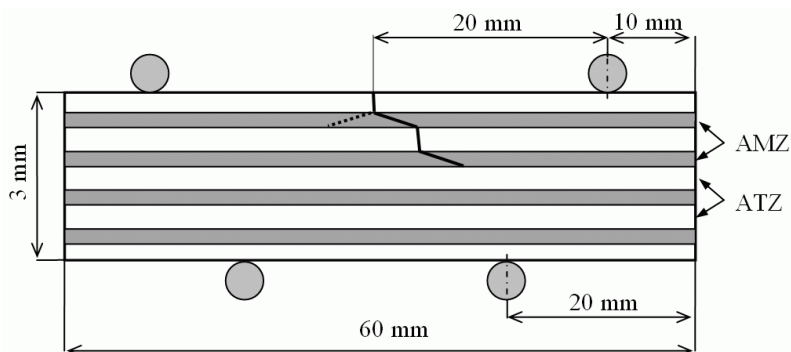
Zatímco předchozí text byl věnován výhradně mechanismu zhouževnatění keramického laminátu vlivem působení reziduálních napětí jakožto bariéry proti šíření trhliny a v souvislosti s tím nárůstu tzv. zdánlivé lomové houževnatosti, následující a současně závěrečná problematika této disertační práce bude věnována jinému typu zhouževnatění, které je charakteristické pro studovaný keramický kompozit. K tomuto typu zhouževnatění dochází v důsledku tzv. schodovitého mechanismu šíření trhliny přes jednotlivé vrstvy laminátu, který byl experimentálně pozorován na keramických vzorcích a dokumentován např. v pracích [12], [13], [15], viz obr. 62. V souvislosti s tímto jevem dochází ke zvýšení odolnosti celého keramického systému proti šíření trhliny, neboť během šíření trhliny ve vychýleném směru dochází k větší absorpci její energie.



Obr. 62 Schodovitý mechanismus šíření trhliny pozorovaný v keramickém laminátu II (publikováno se svolením R. Bermeja [15])

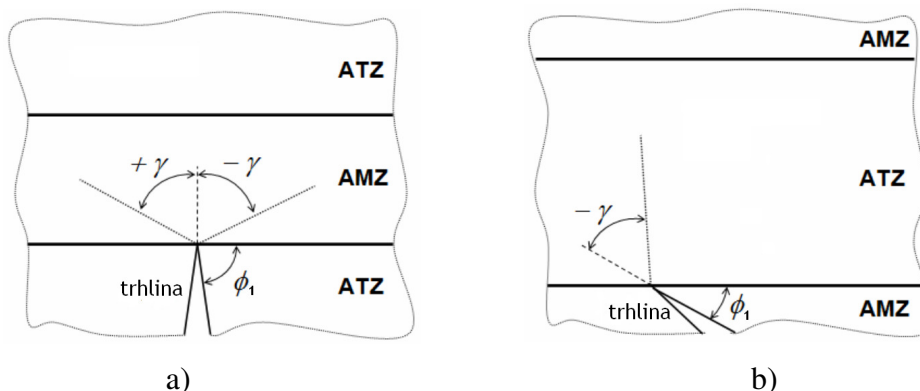
Znalost směru dalšího šíření trhliny z rozhraní proto hraje důležitou roli při hodnocení lomového chování, případně životnosti takovýchto materiálů. Odhady těchto směrů na základě lomových kritérií byly autorkou publikovány v pracích [91], [92] a [146], ve kterých pro tyto odhady byly využity výsledky získané z numerických simulací problému. Konkrétně pro odhad směru dalšího šíření trhliny byla využita dvě kritéria, a to kritérium MTS (viz kapitola 5.3.1) a kritérium SED (viz kapitola 5.3.3). Obě tato kritéria jsou založena na hledání minima nebo maxima určité veličiny charakterizující nějakým způsobem napjatost v okolí vrcholu trhliny. Poznamenejme, že jednak byla opět využita ryze numerická forma kritérií (byly hledány extrémy daných veličin na půloblouku poloměru r před vrcholem trhliny) a jednak bylo opět před aplikací těchto kritérií potřeba stanovit zmiňovaný délkový parametr r , ve kterém budou tato kritéria aplikována.

Kritéria byla poté aplikována a v pracích [91], [92] a [146] byly publikovány analýzy šíření trhliny v keramickém laminátu II z jeho vnějšího povrchu přes jednotlivé vrstvy. Konkrétně byly studovány změny směru šíření trhliny na prvních několika rozhraních laminátu. Kromě zatížení reziduálními napětími vznikajícími v jednotlivých vrstvách v důsledku výrobního procesu byly u laminátu současně aplikovány okrajové podmínky čtyřbodového ohybu podle obr. 63.



Obr. 63 Experimentální uspořádání zkoušky čtyřbodovým ohybem simulované pomocí MKP na keramickém laminátu s vnější trhlinou

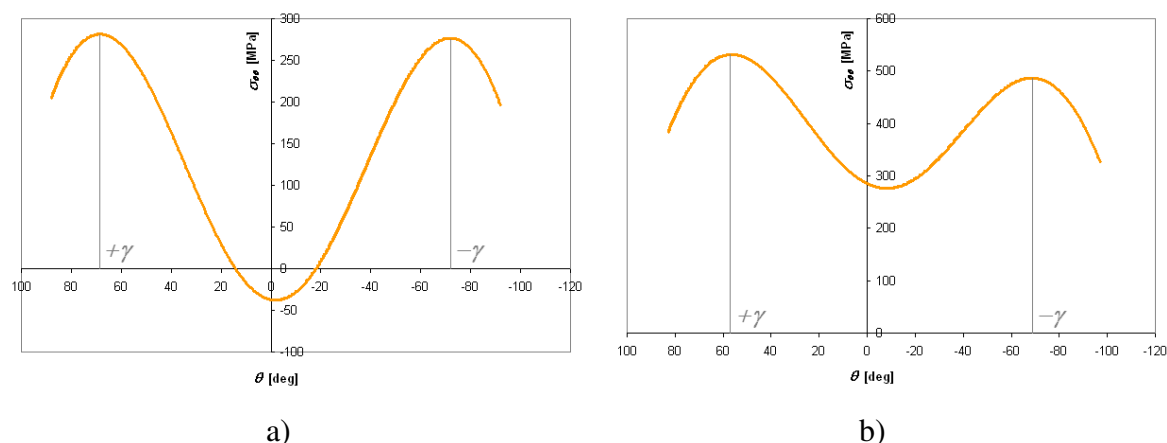
Trhlina v první vrstvě (ATZ s tahovými reziduálními napětími) byla modelována jako téměř kolmá k rozhraní a bylo sledováno její chování (změna směru šíření) při dosažení prvních čtyř rozhraní (použitá symbolika viz obr. 64).



Obr. 64 Schéma a použité označení pro trhlinu s vrcholem: a) na rozhraní typu ATZ/AMZ, b) na rozhraní typu AMZ/ATZ

Obecně byly u studovaných laminátů zjištěny 2 rozdílné tendence v chování trhliny na rozhraní. Na rozhraní typu ATZ/AMZ, viz obr. 64a), kdy se trhlina šíří do materiálu s tlakovými reziduálními napětími, může snadno dojít k bifurkaci trhliny. Alespoň to

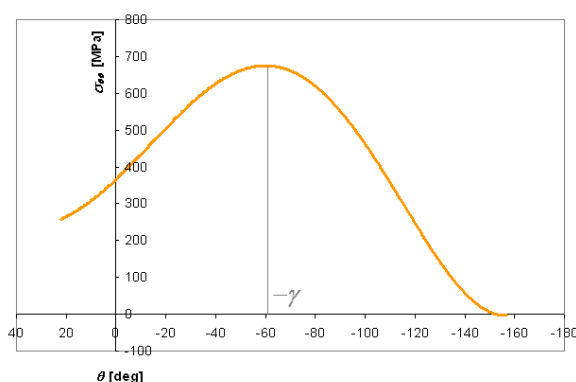
naznačují průběhy vyšetřovaných veličin (tangenciálního napětí i hustoty deformační energie) před vrcholem trhliny, viz obr. 65 pro názornost.



Obr. 65 Průběhy tangenciálních napětí před vrcholem trhliny (studované na půloblouku poloměru r) pro rozhraní typu ATZ/AMZ; a) první rozhraní v laminátu, b) třetí rozhraní v laminátu

Z obr. 65 je zřejmé, že tangenciální napětí dosahuje pro trhlínu na rozhraní typu ATZ/AMZ svého lokálního maxima ve dvou různých směrech, které jsou téměř symetrické vzhledem k původnímu směru šíření trhliny, což podporuje teorii o bifurkaci trhliny na rozhraní tohoto typu a současně je v souladu s experimentálním pozorováním tohoto jevu, viz např. [11], [13]. Zda dojde k bifurkaci trhliny, či zda se trhlína pouze vychýlí z původního směru nebylo předmětem zájmu této práce, ale mohlo by být zajímavým námětem analýz do budoucna.

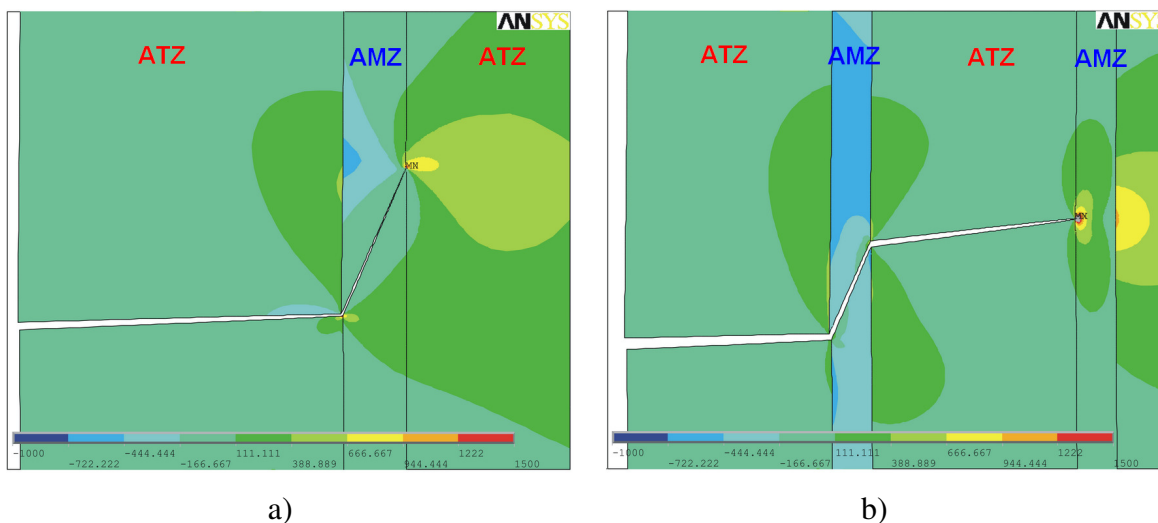
Pro úplnost je uveden i grafický průběh tangenciálních napětí před vrcholem trhliny pro druhý typ rozhraní (AMZ/ATZ), kdy se trhlína šíří do materiálu s tahovými reziduálními napětími. Z průběhu na obr. 66 je vidět, že na tomto typu rozhraní určuje směr dalšího šíření trhliny pouze jeden lokální extrém studované veličiny (tangenciálního napětí $\sigma_{\theta\theta}$ případně hustoty deformační energie w). Poloha tohoto lokálního extrému je v tomto případě blízká směru kolmému k rozhraní, což souvisí s tím, že se trhlína ve vrstvě ATZ šíří kolmo ke směru tahových napětí.



Obr. 66 Průběh tangenciálního napětí před vrcholem trhliny (studovaného na půloblouku poloměru r) pro rozhraní typu AMZ/ATZ

Rozložení tangenciálních napětí v jednotlivých vrstvách keramického laminátu II lze vidět na obr. 67, kde je taktéž zřetelný směr před vrcholem trhliny, ve kterém je tato veličina maximální. Konkrétně na obr. 67a) se vrchol trhliny nachází na druhém rozhraní, trhlína se má šířit do vrstvy ATZ s tahovými reziduálními napětími a tangenciální napětí

dosahuje maximálních hodnot ve směru kolmém k rozhraní. Na rozdíl od toho na obr. 67b) dosáhl vrchol trhliny třetího rozhraní a trhlina má tendenci k rozděvení nebo alespoň k výraznějšímu vychýlení se ze svého původního směru.



Obr. 67 Rozložení tangenciálních napětí v keramickém laminátu II; a) druhé rozhraní v laminátu (AMZ/ATZ), b) třetí rozhraní v laminátu (ATZ/AMZ)

Jako doplňková byla v rámci problematiky šíření trhliny ve studovaném laminátu přes jednotlivá rozhraní provedena analýza závislosti směru dalšího šíření trhliny z rozhraní ϕ_2 na počáteční orientaci trhliny ϕ_1 , viz publikace [146]. Bylo modelováno pět různých počátečních orientací trhliny ϕ_1 ve vrstvě ATZ vzhledem k rozhraní a pro každou z nich byla pomocí obou kritérií (MTS i SED) odhadnuta změna směru dalšího šíření trhliny na rozhraní γ , viz obr. 64a) pro použité značení. Zjištěné hodnoty γ byly následně přepočítány na výsledný směr šíření trhliny označený ϕ_2 (úhel mezi směrem dalšího šíření trhliny a rozhraním $\phi_2 = \phi_1 - \gamma$), analogické značení jako u keramického laminátu I na obr. 49. Poznamenejme, že byl uvažován vždy pouze jeden lokální extrém dané veličiny (γ kladné). Výsledky jsou uvedeny v tabulce XIX.

Tab. XIX Směry šíření trhliny ϕ_2 z rozhraní ATZ/AMZ v závislosti na počáteční orientaci trhliny ϕ

| ϕ_1 [deg] | γ [deg] | | $\phi_2 (= \phi_1 - \gamma)$ [deg] | |
|----------------|----------------|------|------------------------------------|------|
| | MTS | SED | MTS | SED |
| 88 | 68,7 | 61,5 | 19,3 | 26,5 |
| 85 | 65,7 | 58,2 | 19,3 | 26,8 |
| 80 | 60,6 | 53,0 | 19,4 | 27,0 |
| 70 | 50,7 | 42,1 | 19,3 | 27,9 |
| 60 | 40,5 | 30,7 | 19,5 | 29,3 |

Jak ukazují hodnoty v tabulce XIX, nemá počáteční orientace trhliny v první vrstvě keramického laminátu téměř žádný vliv na směr dalšího šíření trhliny z rozhraní. Pro široký rozsah počátečních orientací trhliny vzhledem k rozhraní jsou odhady směru dalšího šíření trhliny z rozhraní ATZ/AMZ téměř totožné a to pro obě zvolená kritéria. Trhlina se ve studovaném laminátu po průchodu první vrstvou podle výsledků v tabulce XIX na rozhraní vychýlí do směru asi 20 až 30 stupňů od roviny rozhraní a pod tímto úhlem se

bude šířit vrstvou AMZ (připomeňme, že je možná kromě deflekce trhliny i její bifurkace na tomto typu rozhraní).

Publikace [146] obsahuje taktéž první studii šíření trhliny v daném keramickém laminátu přes první čtyři rozhraní a dokumentuje tak soulad s experimentálně pozorovaným schodovitým mechanismem šíření trhliny přes jednotlivé vrstvy. Autorčiny práce [91] a [92] pak rozšiřují tuto problematiku a sledují směr šíření trhliny ve studovaném laminátu s jiným poměrem tloušťek jednotlivých vrstev.

Zatímco původní laminát měl poměr tloušťek jednotlivých vrstev $\rho = t_{ATZ}/t_{AMZ}$ roven přibližně 5:1, v publikacích [91] a [92] byly nově studovány tři další modelové konfigurace s poměrem tloušťek jednotlivých vrstev 2:1, 7:1 a 10:1. Přitom byla zachována konstantní celková tloušťka laminátu 3 mm. Odpovídající hodnoty t_{ATZ} a t_{AMZ} včetně příslušných reziduálních napětí v jednotlivých vrstvách vznikajících v laminátu v důsledku výrobního procesu při ochlazení na pokojovou teplotu jsou uvedeny v tabulce XX. Poznamenejme, že hodnoty reziduálních napětí zjištěné pomocí numerických simulací a uvedené v tabulce XX jsou opět ve velmi dobré shodě s hodnotami určenými pomocí analytických vztahů (107) a (108), viz tabulka XVII a odpovídající komentář.

Tab. XX Tloušťky jednotlivých vrstev a odpovídající reziduální napětí pro různé geometrické konfigurace keramického laminátu II

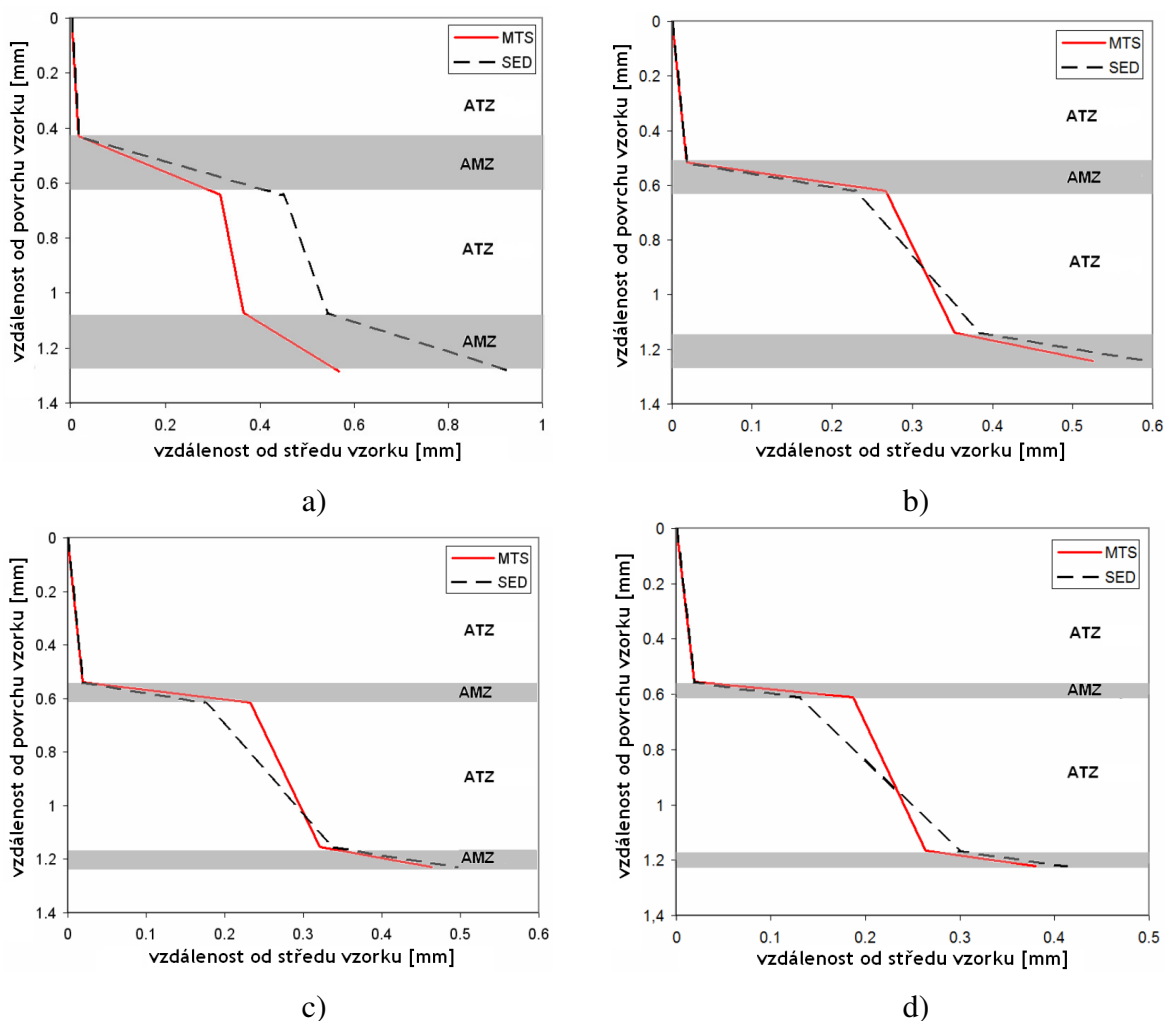
| Poměr tloušťek jednotlivých vrstev ρ (t_{ATZ}/t_{AMZ}) | 2:1 | 5:1 | 7:1 | 10:1 |
|--|--------|--------|--------|--------|
| t_{ATZ} [mm] | 0,4288 | 0,5170 | 0,5384 | 0,5556 |
| t_{AMZ} [mm] | 0,2140 | 0,1038 | 0,0770 | 0,0556 |
| σ_{ATZ} [MPa] | 247 | 115 | 84 | 60 |
| σ_{AMZ} [MPa] | -620 | -715 | -737 | -754 |

Při odhadech směru dalšího šíření trhliny ϕ_2 z prvního rozhraní typu ATZ/AMZ pomocí obou kritérií a pro všechny uvedené poměry tloušťek jednotlivých vrstev ρ byla jako počáteční orientace trhliny zvolena hodnota $\phi_1 = 88^\circ$ (tedy trhlina téměř kolmá k rozhraní). Jak lze vidět z výsledků uvedených v tabulce XXI, nemá ani poměr tloušťek jednotlivých vrstev ρ výrazný vliv na směr dalšího šíření trhliny z rozhraní typu ATZ/AMZ. Veškeré výsledné hodnoty se opět pohybují v rozsahu $20\text{-}30^\circ$, stejně jako při analýze vlivu počáteční orientace ϕ_1 na výsledný směr šíření trhliny za rozhraním v tabulce XIX.

Tab. XXI Směry dalšího šíření trhliny ϕ_2 z prvního rozhraní ATZ/AMZ odhadnuté na základě kritérií MTS a SED pro různé poměry tloušťek jednotlivých vrstev ρ

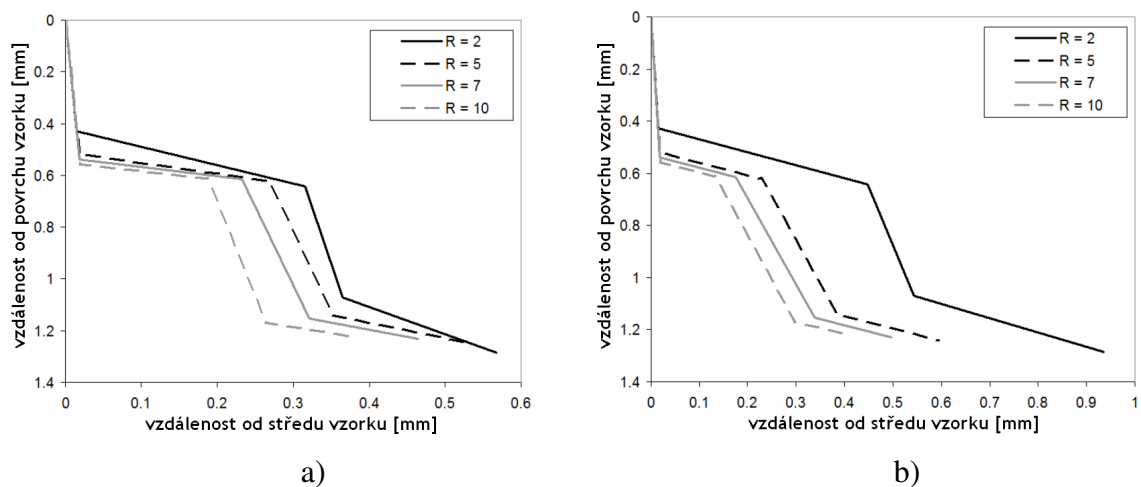
| Poměr tloušťek jednotlivých vrstev ρ (t_{ATZ}/t_{AMZ}) | | 2:1 | 5:1 | 7:1 | 10:1 |
|--|---------------|------------|------------|------------|------------|
| ϕ_2 [deg] | MTS kritérium | $\pm 35,5$ | $\pm 22,7$ | $\pm 19,8$ | $\pm 18,4$ |
| | SED kritérium | $\pm 25,3$ | $\pm 26,3$ | $\pm 26,3$ | $\pm 26,3$ |

Rozšíří-li se studie směru šíření trhliny v keramickém laminátu i na další rozhraní, lze získat výsledné grafické průběhy šíření trhliny přes první čtyři vrstvy laminátu, viz schémata na obr. 68.



Obr. 68 Schématické znázornění výsledné trajektorie trhliny šířící se přes první čtyři vrstvy keramického laminátu získané pomocí kritérií MTS a SED pro poměr tloušťek; a) 2:1, b) 5:1, c) 7:1, d) 10:1

Závěrečným shrnutím trajektorií trhliny pro studované poměry tloušťek jednotlivých vrstev získané na základě numerických simulací vždy do jednoho grafu pro příslušné kritérium lze získat schémata na obr. 69.



Obr. 69 Schématické znázornění výsledné trajektorie trhliny šířící se přes první čtyři vrstvy keramického laminátu pro poměry tloušťek jednotlivých vrstev 2:1, 5:1, 7:1 a 10:1 získané pomocí numerických simulací a aplikace a) MTS kritéria, b) SED kritéria

Především na základě výsledků na obr. 69a) se dá říci, že pro větší poměry tloušťek jednotlivých vrstev ρ roste i odklon trhliny od původního směru ve vrstvách s tlakovými reziduálními napětími. Ačkoli toto je na první pohled žádoucí jev, který může zvýšit odolnost laminátu proti šíření trhliny (čím větší odklon od původního směru, tím déle se může trhlina ve vrstvě za rozhraním šířit než dosáhne dalšího rozhraní), v kombinaci s odpovídající příliš malou tloušťkou vrstvy s tlakovými reziduálními napětími je dráha trhliny ve vrstvě za rozhraním ve skutečnosti kratší. Při návrhu keramických laminátů je tedy v tomto ohledu nutná jistá optimalizace.

Poznamenejme na závěr, že další zvyšování poměru tloušťek jednotlivých vrstev ρ nad hodnotu 10:1 nevede k výraznějším změnám ve výsledné trajektorii trhliny v laminátu a z praktického pohledu nemají tak vysoké poměry tloušťek jednotlivých vrstev smysl.

7 DISKUZE VÝSLEDKŮ A PERSPEKTIVY DALŠÍHO VÝZKUMU

Obecným cílem disertační práce bylo popsat chování trhliny šířící se v okolí, respektive přes rozhraní dvou různých materiálů a na základě získaných výsledků navrhnout postupy hodnocení vlivu materiálového složení a geometrického uspořádání vrstevnatého kompozitu na jeho odolnost proti lomově-mechanickému porušování. Součástí disertační práce je kritické a hodnotící shrnutí kritérií stability odvozených pro trhlinu s vrcholem na rozhraní, na jejichž základě je možné hodnotit chování trhliny, jejíž vrchol dosáhl rozhraní. Cílem práce nebylo tato kritéria navrhnout, nýbrž především je testovat a aplikovat za účelem posouzení lomových vlastností příslušných materiálů a konstrukcí. Nejprve bylo provedeno několik obecných studií a analýz, které mohou přispět k lepšímu pochopení obecných zákonitostí a principů chování trhliny s vrcholem na rozhraní. Teprve následně byla práce zaměřena na praktické aplikace, a to převážně na polymerních vícevrstvých trubkách a keramických laminátech.

7.1 Teoretické studie

Nachází-li se vrchol šířící se trhliny v blízkosti materiálového rozhraní, může být chování trhliny v této oblasti významně ovlivněno, neboť materiálové rozhraní významně ovlivňuje původně homogenní pole napětí v tělese. Jak výrazně bude šíření trhliny v blízkosti rozhraní ovlivněno, to závisí především na poměru modulů pružnosti v tahu jednotlivých materiálů před a za rozhraním. Šíří-li se trhlina směrem do tužšího materiálu, působí rozhraní tzv. stínícím efektem a brání trhlíně v jejím dalším šíření (zpomaluje ji). Je-li tomu naopak, jedná se o značně nebezpečnější případ, kdy je trhlina poddajnějším materiálem „přitahována“ a celkově je její šíření v materiálu snazší.

Zásadní otázkou většinou je, co se stane, dosáhne-li vrchol trhliny materiálového rozhraní. V tomto případě přestávají platit přístupy klasické LELM a je nutné její zobecnění, neboť se mění exponent singularity napětí z hodnoty $\frac{1}{2}$ na obecnou hodnotu p (pro trhlinu kolmou k rozhraní), resp. p_1 a p_2 (pro trhlinu obecně orientovanou vzhledem k rozhraní). Jak bylo ukázáno i na tyto hodnoty mají vliv elastické vlastnosti materiálu před i za rozhraním. Nachází-li se vrchol trhlina na rozhraní mezi poddajným a tuhým materiálem, její exponent singularity napětí je menší než 0,5. V opačném případě, kdy se trhlina šíří z tužšího materiálu, je hodnota p na rozhraní větší než 0,5.

V souvislosti s exponenty singularity napětí je nutné poznamenat, že v rámci disertační práce bylo ověřeno, že hodnoty p určené ať už na 2D modelu (při aproximaci pomocí rovinné deformace) nebo uprostřed 3D modelu se velice dobře shodují s výsledky analytického řešení. Naproti tomu hodnoty exponentu singularity napětí určené na povrchu 3D modelu se výrazně lišily, což bylo vysvětleno existencí tzv. rohové singularity, neboli vlivu volného povrchu. Tento fenomén je v současné době předmětem zájmu vědeckých prací a bylo už například dokázáno, že hodnota rohové singularity závisí na Poissonových číslech obou materiálů. Jedním z důsledků nízké singularity napětí na volném povrchu je např. pokles rychlosti šíření únavové trhliny v těchto místech. Je tedy zřejmé, že volný povrch může hrát významnou roli při hodnocení chování šířící se trhliny a proto je především u tenkých těles vhodné tento vliv neopomíjet a zahrnout ho do hodnocení životnosti dané konstrukce.

Další obecnou parametrickou studií, která byla v rámci procesu „seznamování se“ s problematikou trhin na rozhraní provedena, byla zaměřena na analýzu směru dalšího šíření trhliny z rozhraní. V prvním kroku byl sledován vliv materiálových vlastností

(modulů pružnosti v tahu) obou složek a taktéž počáteční orientace trhliny vzhledem k rozhraní na změnu směru šíření trhliny na rozhraní. Důležitým závěrem konstatovaným na základě výsledků numerických simulací je, že trhlina se nezávisle na počáteční orientaci odklání vždy přibližně do směru kolmého na aplikované tahové napětí. Uvažujme nyní případ, kdy mají oba materiály stejné vlastnosti (v podstatě se tedy jedná o trhlina v homogenním materiálu), jako referenční. Potom platí, že šíří-li se trhlina z tužšího materiálu do poddajnějšího, bude její odklon od původního směru na rozhraní větší než v referenčním (homogenním) případě a naopak (při šíření z poddajnějšího do tužšího materiálu se od původního směru odchýlí méně, než kdyby měly oba materiály stejné vlastnosti).

Poznamenejme, že směry dalšího šíření trhliny z materiálového rozhraní byly odhadovány na základě numerických simulací a aplikace kritéria zobecněného faktoru hustoty deformační energie, a bylo ukázáno, že i při určování odklonu trhliny od původního směru lze využít jak simulace na 2D modelu, tak ve středu 3D modelu. Výsledky v obou případech jsou totiž kvalitativně i kvantitativně srovnatelné. Během analýz na 3D modelu byl znovu pozorován vliv tzv. rohové singularity. Na základě pozorovaných tendencí se doporučuje při odhadech směru dalšího šíření trhliny z rozhraní v tenkých tělesech vliv volného povrchu postihnout, neboť jak bylo zjištěno, na povrchu tělesa se trhlina odklání více od svého původního směru než je tomu ve středu tělesa, což může mít vliv na celkovou trajektorii trhliny i obecně na její chování.

7.2 Praktické aplikace

Jak bylo ukázáno v rámci vybraných analýz a v rámci shrnutí v předchozí kapitole 7.1, dají se v oblasti šíření trhlín v tělesech s materiálovými rozhraními nalézt jisté obecné zákonitosti (většinou pouze kvalitativního charakteru), na jejichž základě lze lépe porozumět problematice porušování bi-materiálových těles. Ne vždy je ale kvalitativní hodnocení dostačující a pro konkrétní aplikace je většinou zapotřebí dílčí analýza daného problému a požadují se i kvantitativně porovnatelné výsledky. Následující kapitoly jsou proto věnovány praktickým aplikacím, a to jmenovitě na vícevrstvých polymerních trubkách a dvou vybraných typech keramických laminátů.

7.2.1 Vícevrstvé polymerní trubky

Problematika vícevrstvých polymerních trubek je na Ústavu fyziky materiálů AV ČR, v. v. i. v Brně studována již delší dobu, a to mj. ve spolupráci s Ústavem materiálových věd a inženýrství FSI VUT v Brně a Polymer Institute Brno, kde také probíhají nezbytné experimenty např. pro určení mechanických vlastností materiálů jednotlivých vrstev dvou- a třívrstvých trubek, jejichž znalost je klíčová pro vytvoření numerických modelů.

Výsledkem zmiňované spolupráce jsou například nové geometrie zkušebních vzorků navržených pro laboratorní měření lomové houževnatosti vrstevnatého polymerního systému. Tyto vzorky byly navrženy s ohledem na jejich snadnou přípravu, aby byly snadno vyrobitelné přímo z dvou-, resp. třívrstvé trubky. Na modelech těchto vzorků (stejně jako na modelu celé trubky) byly následně provedeny veškeré numerické simulace. V některých případech byly vzhledem k teplotní závislosti materiálových vlastností polymerů modelovány materiálové konfigurace pro různé teploty (23 °C, -20 °C a -60 °C).

Jelikož byly vzorky navrženy pro experimentální určování lomové houževnatosti vícevrstvých systémů, bylo zapotřebí v první řadě na základě numerických simulací

sestrojit pro oba vzorky (navržené pro zkoušku ohybem a zkoušku tahem) K -kalibrační křivky, tzn. závislosti součinitele intenzity napětí K , resp. korekční funkce $f(a/W)$ na délce trhliny. Pomocí lineární regrese mohly být z těchto závislostí (pro oba zkušební vzorky i model celé trubky, pro všechny tři teploty a navíc pro homogenní případ) sestaveny polynommické funkce závislé na poměru a/W , do kterých jde při laboratorních testech snadno dosadit a získat tím výslednou hodnotu lomové houževnatosti.

Poznamenejme, že u studovaných dvou- a třívrstevných trubek bylo zjištěno, že K -kalibrační křivky sestavené pro různé teploty (a tedy pro různé materiálové vlastnosti) se výrazně neliší od křivky sestavené pro trubku z homogenního materiálu (toto platí pro oba typy zkušebních vzorků i reálnou trubku). Na základě tohoto zjištění lze konstatovat, že pro odhad lomové houževnatosti vícevrstvého systému lze použít pro rutinní měření také korekční funkci odvozenou pro homogenní materiál, aniž by vznikla příliš velká chyba. Jedná se o důsledek malého rozdílu mezi elastickými vlastnostmi materiálu před a za rozhraním, a proto je možné prezentovaný závěr zobecnit na všechny vícevrstvé materiály, u nichž se materiálové vlastnosti jednotlivých složek výrazně neliší.

Otázka toho, zda lze hodnoty lomové houževnatosti určené na navržených vzorcích bezpečně přenést na reálnou trubku, byla zodpovězena s využitím koncepce tzv. dvouparametrové lomové mechaniky. Byly sestaveny analogické kalibrační křivky pro T -napětí, resp. parametr biaxiality B . Na základě těchto závislostí bylo možno konstatovat, že hodnoty K_{IC} změřené na navržených zkušebních vzorcích jsou konzervativní, neboť hodnota parametru biaxiality B a současně tedy i míra „constraintu“ (stísnění deformace před vrcholem trhliny) u těchto těles je v obou případech vyšší než u reálné trubky.

Všechny následující analýzy provedené v rámci studia vícevrstevných polymerních trubek byly zaměřeny na posouzení vlivu vrstvení na lomové chování **třívrstvého** systému s trhlinou na rozhraní. Byly provedeny a vyhodnoceny numerické simulace na ohybovém vzorku i reálné trubce (pro materiálové kombinace při uvedených teplotách i pro nové modelové konfigurace) a na základě kritérií stability (kritéria středního napětí a kritéria faktoru hustoty deformační energie) odhadovány hodnoty efektivní lomové houževnatosti, resp. kritického zatížení pro trhlinu s vrcholem na rozhraní. Byly simulovány taktéž různé případy trhlin (vnitřní, vnější, s vrcholem na vnitřním rozhraní, s vrcholem na vnějším rozhraní, trhlina ve 2D modelu, trhlina ve 3D modelu) a formulovány následující závěry:

- ⇒ výsledky získané na základě obou zmiňovaných kritérií (kritéria středního napětí, kritéria zobecněného faktoru hustoty deformační energie) jsou ve velmi dobré shodě, ačkoli jsou tato kritéria založena na rozdílných fyzikálních principech;
- ⇒ případ vnitřní trhliny s vrcholem na vnějším rozhraní a vnější trhliny s vrcholem na vnitřním rozhraní není v praxi pravděpodobný;
- ⇒ při pokojové teplotě, kdy je nejnižší poměr mezi moduly pružnosti v tahu ochranné a základní vrstvy (ochranná vrstva je nejpoddajnější vzhledem k základnímu materiálu), vykazuje trubka s vnitřní trhlinou s vrcholem na vnitřním rozhraní nejvyšší efektivní lomovou houževnatost a potažmo i hodnotu kritického zatížení (kritického vnitřního přetlaku, kritické síly) ze všech studovaných materiálových kombinací při různých teplotách;
- ⇒ efekt poddajných ochranných vrstev na zlepšení lomově-mechanických vlastností třívrstvého systému zesiluje tím více, čím poddajnější vrstvy jsou;
- ⇒ tentýž trend (vyšší kritické napětí pro poddajnější ochranné vrstvy) byl pozorován i u taženého třívrstvého pásu, kde byly rozdíly ještě výraznější;

- ⇒ pro vnější trhlinu s vrcholem na vnějším rozhraní platí tytéž závěry ohledně vyšší odolnosti trubky proti šíření trhliny, jsou-li ochranné vrstvy poddajnější než základní materiál;
- ⇒ vnější trhlina je u studovaných třívrstvých trubek vždy méně nebezpečnější než trhlina šířící se z vnitřního povrchu;
- ⇒ simulace na 2D modelech dávají konzervativní výsledky kritických zatížení při ušetření obrovského množství času vyžadovaného numerickými simulacemi na 3D modelech.

Poznamenejme, že je vždy velmi důležité před aplikací kritérií stability odhadnout délkový parametr, ve kterém budou kritéria aplikována – ať už na základě souvislosti s charakteristickým rozměrem materiálu, na základě velikosti plastické zóny, aj. (viz kapitola 5.2.7 pro detaily).

7.2.2 Keramické lamináty I ($\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$)

Lamináty, neboli vrstevnaté kompozity, představují nový směr v navrhování především keramických materiálů, který má za cíl vylepšit typicky křehké chování keramiky, které tento materiál, s jinak velice dobrými vlastnostmi, znehodnocuje a velmi omezuje jeho použití. V této práci byly studie zaměřeny na lomové chování dvou konkrétních vrstevnatých kompozitů (keramický laminát I sestávající z 59 alternujících vrstev Al_2O_3 a ZrO_2 a keramický laminát II tvořený devíti vrstvami vzájemně se střídajících materiálů ATZ a AMZ) ve snaze mít k dispozici experimentální data k porovnání s výsledky provedených numerických analýz.

U prvního typu laminátu byly numerické simulace zaměřeny převážně na studie změny směru šíření trhliny na rozhraní mezi jednotlivými vrstvami, což souvisí jednak s rozdílnými moduly pružnosti v tahu jednotlivých materiálů a jednak s reziduálními napětími existujícími v jednotlivých vrstvách v důsledku výroby a rozdílných koeficientů teplotní roztažnosti jednotlivých složek. Na základě dostupných experimentálních dat byly vytvořeny příslušné modely laminátu s trhlinou obecně orientovanou k materiálovému rozhraní.

První z aplikovaných kritérií pro určení směru dalšího šíření trhliny z rozhraní, tzv. MTS kritérium, se pro daný keramický laminát ukázalo jako nevhodné, neboť v žádném z uvažovaných případů nevedlo k cíli. Určené hodnoty směru šíření trhliny neodpovídaly ani provedenému experimentu a ani praktickým zkušenostem.

O něco lepší výsledky byly získány pomocí druhého kritéria – SED kritéria. Připomeňme, že i toto bylo aplikováno v jeho ryze numerické formě, což souvisí s jeho závislostí na parametru r , tedy poloměru půloblouku, na kterém se hustota deformační energie v numerickém modelu určovala. Ukázalo se, že při dostatečném zjemnění sítě v okolí vrcholu trhliny a při dostatečně malém poloměru r je možné pomocí tohoto kritéria predikovat směr dalšího šíření trhliny po jejím průchodu přes materiálové rozhraní. Dostatečně malým poloměrem je v tomto případě myšlena hodnota 0,001 mm, jak vyplývá z prezentovaných výsledků.

Protože ale většinou dopředu vhodná velikost r není známa, doporučuje se SED kritérium používat pouze pro první hrubý odhad směru šíření trhliny z rozhraní. Problém se závislostí na parametru r a s tím souvisejícím extrémním zjemněním sítě v okolí vrcholu trhliny eliminuje kritérium kombinující řešení numerické s analytickým. Toto kritérium je založeno na analogii s problémem trhliny v homogenním materiálu a pro odhad směru

dalšího šíření využívá poměru zobecněných součinitelů napětí pro jednotlivé módy zatěžování. Ačkoli toto kritérium bylo představeno spolu s určitými zjednodušujícími předpoklady, výsledky získané při jeho aplikaci jsou v přijatelné shodě s experimentálně zjištěnými daty. Mírná odchylka výsledků může být vysvětlena tím, že numerické simulace byly prováděny na 2D modelu, v důsledku čehož byl zanedbán reálný poloeliptický tvar trhliny.

7.2.3 Keramické lamináty II (ATZ/AMZ)

Keramický laminát ATZ/AMZ byl podroben podrobnějším studiím, které byly zaměřeny na dva typické mechanismy zhouževnatění charakteristické pro daný typ kompozitu. Oba tyto mechanismy jsou důsledkem pro tyto materiály typického průběhu reziduálních napětí existujících v laminátu. V první řadě dochází v důsledku tlakových reziduálních napětí ve vrstvách AMZ k nárůstu tzv. zdánlivé lomové houževnatosti vrstevnatého systému a v druhé řadě dochází ke zvýšení odolnosti laminátu proti šíření trhliny vlivem deflektce (a/nebo bifurkace) trhliny na rozhraní typu ATZ/AMZ při šíření trhliny do materiálu s tlakovými reziduálními napětími.

V souvislosti s prvním jmenovaným mechanismem zhouževnatění byl nejprve verifikován použitý numerický model srovnáním reziduálních napětí zjištěných numerickými simulacemi s hodnotami určenými z analytických vztahů. Následně byl na základě numerických simulací pomocí MKP sestaven průběh tzv. zdánlivé lomové houževnatosti keramického laminátu pro jeho prvních pět vrstev a dále byl proveden proces optimalizace geometrie laminátu za účelem maximalizace jeho zdánlivé lomové houževnatosti. Na základě provedených analýz je možné formulovat následující závěry:

- ⇒ tlaková reziduální napětí ve vrstvě AMZ zvyšují zdánlivou lomovou houževnatost keramického laminátu, přičemž maxima jsou dosahována na rozhraních typu AMZ/ATZ;
- ⇒ závislost zdánlivé lomové houževnatosti keramického laminátu určená na základě numerických simulací pomocí MKP se velice dobře shoduje s toutéž závislostí určenou pomocí metody váhových funkcí;
- ⇒ ve snaze o zpřesnění byly provedeny výpočty zdánlivé lomové houževnatosti na základě kritéria zobecněného faktoru hustoty deformační energie pro trhlínu s vrcholem na prvních čtyřech rozhraních a tyto hodnoty se ukázaly jako mírně nižší než hodnoty predikované pomocí metody váhových funkcí;
- ⇒ hodnoty K_{app} určené pro trhlínu na rozhraní typu AMZ/ATZ se dobře shodují s experimentálně určenými hodnotami;
- ⇒ zdánlivá lomová houževnatost studovaného keramického laminátu je prakticky stejná pro všechna rozhraní typu AMZ/ATZ a nezávisí tedy na absolutní délce trhliny (tento efekt je způsoben tím, že dochází k zavírání trhliny v tlakem namáhaných vrstvách);
- ⇒ na základě předchozího formulovaného závěru byla jako hodnota zdánlivé lomové houževnatosti celého laminátu při optimalizačním procesu uvažována hodnota K_{app} na druhém rozhraní laminátu, tzn. na prvním rozhraní typu AMZ/ATZ;
- ⇒ ačkoli při optimalizačním procesu nedávaly numerické simulace a metoda váhových funkcí kvantitativně stejné výsledky, jejich trendy byly stejné a bylo proto možné na základě obou použitých metod navrhnout optimální design (tloušťky vrstev) keramického laminátu;

- ⇒ u studovaného typu laminátu je s ohledem na maximalizaci jeho zdánlivé lomové houževnatosti optimální poměr tloušťek $t_{ATZ}:t_{AMZ}$ přibližně 2:1 nebo mírně vyšší;
- ⇒ je-li keramický laminát vyroben podle návrhu s poměrem tloušťek jednotlivých vrstev 2:1, může zdánlivá lomová houževnatost tohoto kompozitu dosáhnout až trojnásobku hodnot lomových houževnatostí jednotlivých složek.

U druhého mechanismu zhouževnatění keramického laminátu vlivem tzv. „schodovitého“ mechanismu šíření trhliny přes jednotlivé vrstvy dochází k vyšší absorpci energie trhliny během jejího šíření ve vychýleném směru. Důležitou roli zde hrají opět tlaková reziduální napětí ve vrstvách AMZ. Pro určení směru dalšího šíření trhliny z rozhraní byla aplikována kritéria MTS a SED, a to ve svých numerických formách. Kromě zatížení reziduálními napětími, byl laminát vystaven modelové zkoušce čtyřbodovým ohybem, která se tradičně používá při zkoušení těchto materiálů. Trhlina v první vrstvě byla modelována jako téměř kolmá k rozhraní a byla sledována její trajektorie přes prvních několik vrstev keramického laminátu.

Je důležité zdůraznit, že obecně byly na základě numerických simulací pozorovány dvě rozdílné tendence chování trhliny v závislosti na typu daného rozhraní. Šíří-li se trhlina do materiálu s tlakovými reziduálními napětími, naznačují průběhy vyšetřovaných veličin (tangenciálního napětí a hustoty deformační energie), že může snadno na rozhraní dojít k bifurkaci (rozdvojení) trhliny. Vyšetřované veličiny totiž dosahují svých extrémních hodnot ve dvou různých směrech, které jsou přibližně symetrické vzhledem k původnímu směru šíření trhliny. Na druhém typu rozhraní (AMZ/ATZ), kdy se trhlina šíří do vrstvy s tahovými reziduálními napětími, určuje směr dalšího šíření trhliny pouze jeden extrém vyšetřovaných veličin, jehož poloha je blízká směru kolmému k tahovým reziduálním napětím (a tedy kolmá k rozhraní).

V návaznosti na pozorované dva základní trendy šíření trhliny přes jednotlivé typy rozhraní byly provedeny rozsáhlé analýzy, jejichž výsledky lze shrnout takto:

- ⇒ aplikací obou kritérií lze získat srovnatelné výsledky směru dalšího šíření trhliny z rozhraní;
- ⇒ počáteční orientace trhliny v první vrstvě keramického laminátu nemá téměř žádný vliv na směr dalšího šíření trhliny po jejím průchodu rozhraním – trhlina se nezávisle na své počáteční orientaci na rozhraní typu ATZ/AMZ vychýlí vždy do směru cca 20 – 30 stupňů od roviny rozhraní;
- ⇒ ani poměr tloušťek jednotlivých vrstev (studovány poměry 2:1, 5:1, 7:1 a 10:1) nemá zásadní vliv na změnu směru šíření trhliny na rozhraní typu ATZ/AMZ – trhlina se ve vrstvě AMZ stále odchyluje do směru cca 20 – 30 stupňů od roviny rozhraní;
- ⇒ pro větší poměry tloušťek jednotlivých vrstev (např. 10:1) roste odklon trhliny od původního směru ve vrstvách AMZ;
- ⇒ ačkoli je předchozí závěr na jednu stranu žádoucím jevem, aby se trhlina více vychylovala do směru rovnoběžného s rozhraním a tím se mohla v dané vrstvě šířit déle, v důsledku s vysokým poměrem tloušťek jednotlivých vrstev má trhlina méně prostoru se ve vrstvě AMZ šířit a její dráha je tedy ve skutečnosti kratší, což souvisí s menší absorpcí energie;
- ⇒ s ohledem na tento mechanismus zhouževnatění je nutné nalézt rovnováhu mezi poměrem tloušťek jednotlivých vrstev a odklonem trhliny od jejího původního

směru na rozhraní typu ATZ/AMZ tak, aby byla maximalizována dráha trhliny ve vrstvě vyrobené z materiálu AMZ;

⇒ zvyšování poměru tloušťek jednotlivých vrstev nad hodnotu 10:1 nevede k výrazným změnám v trajektorii trhliny šířící se v keramickém laminátu.

7.3 Perspektivy dalšího výzkumu

Disertační práce navazuje na tradiční výzkum Ústavu fyziky materiálů AV ČR, v. v. i. v oblasti lomové mechaniky a rozšiřuje ho především v aplikační oblasti. Většina numerických simulací v rámci této práce však byla provedena na 2D modelech a jak bylo v některých kapitolách zmíněno, mohou být některé nepřesnosti v získaných výsledcích důsledkem právě tohoto zjednodušení. V budoucnu by tedy bylo jistě zajímavé aplikovat publikované postupy na numerické simulace na trojrozměrných modelech, kde by byl zahrnut například vliv volného povrchu, reálný tvar trhliny a další jevy nepostihnuté při dvojrozměrném modelování.

Zatímco o aplikační části týkající se keramických laminátů lze říci, že použité principy lineárně elastické lomové mechaniky jsou obecně platné (u křehkých keramických materiálů nevznikají před vrcholem trhliny žádné nebo pouze malé plastické deformace), u aplikací na vícevrstvých trubkách by bylo vhodnější do simulací zahrnout kromě elastických i plastické vlastnosti materiálů jednotlivých vrstev a využít pro hodnocení součásti s trhlinou teorie a principy elasto-plastické lomové mechaniky (při hodnocení stability trhliny lze aplikovat například některé z kritérií založených na otevření trhliny, která jsou právě pro problémy s větší plastickou zónou před vrcholem trhliny vhodná). I přes zmiňované zjednodušení realizované aplikací postupů LELM na problematiku polymerních vícevrstvých trubek s trhlinou lze konstatovat, že takto (aplikací postupů LELM) získané výsledky jsou konzervativní a lze je v praxi použít pro spolehlivé hodnocení životnosti i v tomto případě.

U keramických laminátů by mohla být optimalizační studie týkající se návrhu vhodného poměru tloušťek jednotlivých vrstev s ohledem na maximalizaci zdánlivé lomové houževnatosti keramického systému rozšířena i na jiné typy keramických laminátů, případně by se mohlo přistoupit ke komplikovanějším geometrickým a materiálovým konfiguracím (použití více různých materiálů o různých tloušťkách s efektem postupného nárůstu tlakových reziduálních napětí).

8 ZÁVĚREČNÉ SHRNU TÍ

Cílem disertační práce bylo popsat chování trhliny šířící se v okolí, respektive přes rozhraní dvou různých materiálů a na základě získaných výsledků navrhnout postupy hodnocení vlivu materiálového složení a geometrického uspořádání vrstevnatého kompozitu na jeho odolnost proti lomově mechanickému porušování.

Kromě toho, že disertační práce obsahuje hodnotící rešerši týkající se současného poznání v oblasti kritérií stability pro obecné singulární koncentrátory napětí, její součástí je také přehledné shrnutí a vysvětlení kritérií stability odvozených v rámci několikaletého výzkumu v oblasti zobecněné lomové mechaniky na Ústavu fyziky materiálů AV ČR, v. v. i. v Brně. Dílčí závěry formulované v rámci výzkumu během autorčina doktorského studia jsou rozděleny na dvě oblasti.

8.1 Teoretické studie

- ⇒ S využitím metody konečných prvků byl navržen spolehlivý numerický model umožňující výpočet pole napětí a posuvů v okolí vrcholu trhliny šířící se v blízkosti a přes rozhraní dvou elastických materiálů. Byla sledována citlivost výsledků na volbu sítě MKP a nalezena optimální velikost prvků v oblasti vrcholu trhliny zaručující spolehlivé výsledky.
- ⇒ Byla navržena metodika umožňující stanovení lomově mechanických parametrů pro trhlínu s vrcholem v blízkosti a na materiálovém rozhraní.
- ⇒ Na základě navržených postupů byly stanovovány hodnoty součinitele a zobecněného součinitele intenzity napětí pro různé geometrické a materiálové konfigurace.
- ⇒ Byla diskutována nepřesnost hodnot součinitelů intenzity napětí v těsné blízkosti rozhraní a byla navržena metoda pro odhad efektivního součinitele intenzity napětí K_{eff} pro oblast materiálového rozhraní.
- ⇒ Byla aplikována vybraná kritéria stability a diskutována jejich vhodnost pro dané problémy.
- ⇒ Na základě analogie s trhlínou v homogenním materiálu bylo na základě poměru zobecněných součinitelů intenzity napětí navrženo kritérium pro odhad změny směru šíření trhliny na rozhraní dvou materiálů.
- ⇒ Zdůrazněna byla nutnost vhodné volby délkového parametru r , resp. d , ve které jsou kritéria stability aplikována, a byla citována a testována doporučení dostupná v literatuře.

8.2 Praktické aplikace

Další závěry byly formulovány v rámci aplikace navržené metodiky pro hodnocení součástí s trhlínami na konkrétní praktické aplikace, tj. v tomto případě na vícevrstvé polymerní trubky a keramické lamináty.

8.2.1 Vícevrstvé polymerní trubky

- ⇒ Byly navrženy dva zkušební vzorky pro laboratorní měření lomové houževnatosti vícevrstvých polymerních trubek.

- ⇒ Pro oba nehomogenní zkušební vzorky, stejně jako pro reálnou trubku byly stanoveny kalibrační funkce usnadňující určování lomové houževnatosti daných materiálů v laboratorních podmínkách.
- ⇒ Na základě dvouparametrové lomové mechaniky byla diskutována přenositelnost parametrů určených na zkušebních vzorcích na reálnou trubku a ukázáno, že v případě navržených nehomogenních vzorků jsou naměřené hodnoty lomové houževnatosti konzervativní.
- ⇒ Pomocí vybraných kritérií stability byly stanoveny hodnoty kritických zatížení pro šíření trhliny přes materiálové rozhraní.
- ⇒ Provedené analýzy umožňují formulovat doporučení, která mohou přispět k vyšší odolnosti vícevrstvých polymerních trubek proti nestabilnímu šíření trhliny.

8.2.2 Keramické lamináty

- ⇒ Bylo ukázáno, že reziduální napětí vznikající u keramických laminátů v důsledku jejich výroby mohou mít příznivý vliv na jejich lomové vlastnosti. Přitom může existovat více různých mechanismů zhouževnatění.
- ⇒ Na základě postupů zobecněné LELM byla odhadnuta hodnota zdánlivé lomové houževnatosti keramického laminátu. Vypočítané hodnoty jsou v dobré shodě s publikovanými daty určenými experimentálně.
- ⇒ Na základě numerických simulací, stejně jako pomocí metody váhových funkcí byl navržen optimální design keramického laminátu s ohledem na dosažení jeho maximální lomové houževnatosti.
- ⇒ Bylo ukázáno, že u mechanismu zhouževnatění vlivem „schodovitého“ mechanismu šíření trhliny přes jednotlivé vrstvy laminátu je při optimalizaci laminátu nutné najít rovnováhu mezi odklonem trhliny na rozhraní a poměrem tloušťek jednotlivých vrstev tak, aby byla maximalizována dráha trhliny ve vrstvách s tlakovými reziduálními napětími.

Předložená disertační práce byla vypracována za finanční podpory těchto grantů:

- | | |
|-----------------------------|--|
| Fondy vědy FSI č. BD1373005 | “Šíření trhlín ve vrstevnatých kompozitech” |
| GA AV ČR č. 1QS200410502 | “Vlastnosti konstrukčních materiálů vyvíjených a v krátkodobém horizontu použitelných v dopravě, zdravotnictví a energetice” |
| GA AV ČR č. KJB200410803 | “Zobecnění lineární elastické lomové mechaniky na problémy šíření trhlín v nehomogenních materiálech” |
| GA ČR č. 106/04/P084 | “Vliv rozhraní dvou materiálů na šíření únavových trhlín” |
| GA ČR č. 101/05/0227 | “Studium lomového chování kompozitních trubek z polyolefinů” |
| GA ČR č. 101/05/0320 | “Řešení obecných koncentrátorů napětí v anisotropních heterogenních prostředích pomocí kombinace MKP a techniky spojitě rozložených dislokací” |

| | |
|----------------------|--|
| GA ČR č. 106/05/H008 | “Víceúrovňový design pokrokových materiálů” |
| GA ČR č. 106/06/P239 | “Vliv volného povrchu na šíření únavové trhliny” |
| GA ČR č. 106/07/1284 | “Houževnatost polyolefinových kompozitů se submikroskopickými částicemi” |
| GA ČR č. 106/08/1409 | “Role struktury sesíťované polymerní matrice v částicovém kompozitu. Víceúrovňové modelování a experimentální ověření” |
| GA ČR č. 101/09/J027 | “Souvislost mezi strukturálními změnami, rozvojem poškození a šířením trhlín ve svařovaných polymerních součástech” |
| GA ČR č. 106/09/0279 | “Mechanismy lomového porušování vrstevnatých polymerních prostředí” |
| GA ČR č. 106/09/H035 | “Víceúrovňový design pokrokových materiálů” |

SEZNAM POUŽITÉHO OZNAČENÍ A ZKRATEK

V seznamu jsou uvedena označení a zkratky vyskytující se v celém textu. V případě, že se v textu vyskytuje další značení, vztahuje se pouze k dané části textu a jeho význam je tamtéž uveden.

| Označení | Popis |
|-------------------|---|
| a_i, \dots, d_i | Konstanty příslušející i -tému exponentu singularity napětí p_i |
| B | Parametr biaxiality |
| COD | „Crack opening displacement“ = otevření trhliny |
| $COD_{C,th}$ | Kritická, resp. prahová hodnota otevření trhliny COD |
| $CMOD$ | „Crack mouth opening displacement“ = otevření trhliny na povrchu vzorku |
| $CMOD_{C,th}$ | Kritická, resp. prahová hodnota otevření trhliny na povrchu vzorku $CMOD$ |
| $CTOD$ | „Crack tip opening displacement“ = otevření ve vrcholu trhliny |
| $CTOD_{C,th}$ | Kritická, resp. prahová hodnota otevření ve vrcholu trhliny $CTOD$ |
| d | Vzdálenost před vrcholem trhliny, na které se aplikuje kritérium středního napětí |
| E | Modul pružnosti v tahu |
| EPLM | Elasto-plastická lomová mechanika |
| f_{ij} | Známa funkce odpovídající příslušným složkám tenzoru napětí |
| F_C | Kritická hodnota síly při tříbodovém ohybu |
| g_i | Známa funkce odpovídající příslušným složkám vektoru posunutí |
| G | Hnací síla trhliny |
| $h, h(x,a)$ | Váhová funkce |
| H | Zobecněný součinitel intenzity napětí |
| H_C, H_{IC} | Kritická hodnota součinitele intenzity napětí |
| H_{th} | Prahová hodnota součinitele intenzity napětí |
| K | Součinitel intenzity napětí |
| K_{appt} | Zdánlivá lomová houževnatost |
| K_C, K_{IC} | Kritická hodnota součinitele intenzity napětí = lomová houževnatost |
| K_{eff} | Efektivní hodnota součinitele intenzity napětí (v místě rozhraní) |
| K_{res} | Součinitel intenzity napětí při daných reziduálních napětích |
| K_{th} | Prahová hodnota součinitele intenzity napětí |
| L | Veličina řídící chování trhliny |
| L_C | Kritická hodnota veličiny, která je základem kritéria stability |
| LELM | Lineárně elastická lomová mechanika |

| | |
|------------------------------|---|
| LLD | „Load line displacement“ = posuv pod zatížením |
| M | Označení homogenního materiálu |
| $M1, M2$ | Označení jednotlivých složek bi-materiálového tělesa (kompozitu) |
| MKP | Metoda konečných prvků |
| MTS | „Maximal tangential stress“ = maximální tangenciální napětí |
| n | Počet exponentů singularity napětí |
| N | Celkový počet vrstev v keramickém laminátu |
| p | Exponent singularity napětí |
| S | Faktor hustoty deformační energie |
| S_C | Kritická hodnota faktoru hustoty deformační energie |
| SED | „Strain energy density“ = hustota deformační energie |
| $SEDF$ | „Strain energy density factor“ = faktor hustoty deformační energie |
| SSY | „Small scale yielding“ = malé pružně plastické deformace |
| t_{ATZ}, t_{AMZ} | Tloušťka jednotlivých vrstev ATZ a AMZ keramického laminátu |
| T | T-napětí |
| T_0 | Pokojová teplota |
| T_{sf} | „Stress free temperature“ = teplota, při které začínají v materiálu vznikat reziduální napětí |
| w | Hustota deformační energie |
| W | Energie napjatosti |
| α, β | Kompozitní parametry definované v práci [74] |
| $\alpha_{ATZ}, \alpha_{AMZ}$ | Koeficienty teplotní roztažnosti materiálů ATZ a AMZ |
| α_D, β_D | Dundurovy kompozitní parametry |
| δ | Vzdálenost vrcholu trhliny od rozhraní |
| ε_{ij} | Složky tenzoru přetvoření (i, j nabývají hodnot x, y nebo r, θ) |
| ϕ_1 | Počáteční orientace trhliny vzhledem k rozhraní, viz obr. 49 |
| ϕ_2 | Směr dalšího šíření trhliny z rozhraní, viz obr. 49 |
| γ | Změna směru šíření trhliny na rozhraní |
| λ | Vlastní číslo, $\lambda = 1 - p$ |
| μ | Modul pružnosti ve smyku |
| ν | Poissonovo číslo |
| ρ | Poměr tlouštěk jednotlivých vrstev t_{ATZ} / t_{AMZ} u keramického laminátu II |
| σ_0 | Mez kluzu |
| σ_{appl} | Hodnota aplikovaného napětí |
| σ_C | Kritická hodnota aplikovaného napětí |

| | |
|----------------|--|
| σ_{ij} | Složky tenzoru napětí (i, j nabývají hodnot x, y nebo r, θ) |
| σ_{res} | Residuální napětí |
| σ_{th} | Prahová hodnota napětí pro šíření únavové trhliny |
| Σ | Zobecněný faktor hustoty deformační energie |
| Σ_C | Kritická hodnota zobecněného faktoru hustoty deformační energie |
| $\Phi(x,y)$ | Airyho funkce napětí |
| ψ | Úhel rohu stěny ve Williamsově původním řešení |
| I, II, III | Označení jednotlivých módů zatěžování |
| (r, θ) | Polární souřadnice s počátkem ve vrcholu trhliny |
| ∇^2 | Laplaceův operátor |

LITERATURA

- [1] Anderson, T. L. *Fracture mechanics: fundamentals and applications*. 2nd ed. London: CRC Press, 2000.
- [2] *ANSYS Release 10.0 Documentation*. Swanson Analysis System, Inc., Houston, Pennsylvania, 2005.
- [3] Aslantas, K.; Tasgetiren, S. Debonding between coating and substrate due to rolling-sliding contact. *Materials and Design*. 2002, vol. 23, pp. 571-576.
- [4] Atkinson, C. On the stress intensity factors associated with cracks interacting with an interface between two elastic media. *International Journal of Engineering Sciences*. 1975, vol. 13, pp. 489-504.
- [5] Ayatollahi, M. R.; Aliha, M. R. M.; Hassani, M. M. Mixed mode brittle fracture in PMMA – An experimental study using SCB specimens. *Materials Science and Engineering*. 2006, vol. A417, pp. 348-356.
- [6] Barenblatt, G. I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle solids. *Advanced Applied Mechanics*. 1962, vol. 7, pp. 55-129.
- [7] Bareš, P. *Analýza šíření trhliny přes rozhraní dvou různých materiálů: disertační práce*. Brno: VUT Brno, Fakulta strojního inženýrství, 2007.
- [8] Barsoum, R. S. On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. *International Journal of Numerical Method in Engineering*. 1976, vol. 10, pp. 25-37.
- [9] Bažant, Z. P.; Estenssoro, L. F. Surface singularity and crack propagation. *International Journal of Solids and Structures*. 1979, vol. 15, pp. 405-426.
- [10] Benthem, J. P. State of stress at the vertex of a quarter-infinite crack in a half-space. *International Journal of Solids and Structures*. 1977, vol. 13, pp. 479-492.
- [11] Bermejo, R.; Baudín, C.; Moreno, R.; Llanes, L.; Sánchez-Herencia, A. J. Processing optimisation and fracture behaviour of layered ceramic composites with highly compressive layers. *Composites Science and Technology*. 2007, vol. 67, pp. 1930-1938.
- [12] Bermejo, R.; Ceseracciu, L.; Llanes, L.; Anglada, M. Fracture of layered ceramics. *Key Engineering Materials*. 2009, vol. 409, pp. 94-106.
- [13] Bermejo, R.; Sánchez-Herencia, A. J.; Llanes, L.; Baudín, C. High-temperature mechanical behaviour of flaw tolerant alumina-zirconia multilayered ceramics. *Acta Materialia*. 2007, vol. 55, pp. 4891-4901.
- [14] Bermejo, R.; Pascual, J.; Lube, T.; Danzer, R. Optimal strength and toughness of Al₂O₃-ZrO₂ laminates designed with external or internal compressive layers. *Journal of the European Ceramic Society*. 2008, vol. 28, pp. 1575-1583.
- [15] Bermejo, R.; Torres, Y.; Sánchez-Herencia, A. J.; Baudín, C.; Anglada, M.; Llanes, L. Residual stresses, strength and toughness of laminates with different layer thickness ratios. *Acta Materialia*. 2006, vol. 54, pp. 4745-4757.
- [16] Bermejo, R.; Llanes, L.; Anglada, M.; Supancic, P.; Lube, T. Thermal shock behavior of an Al₂O₃/ZrO₂ multilayered ceramic with residual stresses due to phase transformations. *Key Engineering Materials*. 2005, vol. 290, pp. 191-198.

- [17] Bermejo, R.; Torres, Y.; Baudín, C.; Sánchez-Herencia, A. J.; Pascual, J.; Anglada, M.; Llanes, L. Threshold strength evaluation on an Al₂O₃-ZrO₂ multilayered system. *Journal of the European Ceramic Society*. 2007, vol. 27, pp. 1443-1448.
- [18] Bian, L.-C.; Kim, K. S. The minimum plastic zone radius criterion for crack initiation direction applied to surface cracks and through-cracks under mixed mode loading. *International Journal of Fatigue*. 2004, vol. 26, pp. 1169-1178.
- [19] Bogy, D. B. On the plane elastostatic problem of a loaded crack terminating at a material interface. *Journal of Applied Mechanics*. 1971, vol. 38, pp. 911-918.
- [20] Brdička, M. *Mechanika kontinua*. Praha: Nakladatelství ČSAV, 1959.
- [21] Bueckner, H. A novel principle for the computation of stress intensity factors. *ZAMM*. 1970, vol. 50, pp. 529-546.
- [22] Bueno, S.; Baudín, C. Layered materials with high strength and flaw tolerance based on alumina and aluminium titanate. *Journal of European Ceramic Society*. 2007, vol. 27, pp. 1455-1462.
- [23] Bueno, S.; Moreno, R.; Baudín, C. Design and processing of Al₂O₃-Al₂TiO₅ layered structures. *Journal of the European Ceramic Society*. 2005, vol. 25, pp. 847-856.
- [24] Burdekin, F. M.; Stone, D. E. W. The crack opening displacement approach to fracture mechanics in yielding material. *Journal of Strain Analysis*. 1966, vol. 1, pp. 145-153.
- [25] Chen, C. R.; Pascual, J.; Fischer, F. D.; Kolednik, O.; Danzer, R. Prediction of the fracture toughness of a ceramic multilayer composite – Modeling and experiments. *Acta Materialia*. 2007, vol. 55, pp. 409-421.
- [26] Chen, W. H.; Wu, C. W. On the J-integral for a pressurized crack in bonded materials. *International Journal of Fracture*. 1980, vol. 16, pp. R47-R51
- [27] Chiang, C. R. On the stress intensity factors of crack near an interface between two media. *International Journal of Fracture*. 1991, vol. 47, pp. R55-R88.
- [28] Chiang, C. R.; Chen, W. H.; Chen, K. T. An integral J_{R0} for a crack perpendicular to the interface of a bonded composite. *Engineering Fracture Mechanics*. 1987, vol. 28, no. 3, pp. 301-307.
- [29] Clegg, W. J.; Kendall, K.; Alford, N. M.; Button, T. W.; Birchall, J. D. A simple way to make tough ceramics. *Nature*. 1990, vol. 347, pp. 455-457.
- [30] Cook, T. S.; Erdogan, F. Stresses in bonded materials with a crack perpendicular to the interface. *International Journal of Engineering Science*. 1972, vol. 10, pp. 677-697.
- [31] Dalle Donne, C. The crack tip displacement vector approach to mixed-mode fracture. In: Miller, K. J.; McDowell, D. L. *Mixed-mode crack behavior*. Philadelphia: ASTM, 1999.
- [32] Delale, F.; Erdogan, F. The crack problem for nonhomogeneous plane. *International Journal of Applied Mechanics*. 1983, vol. 50, pp. 609-614.
- [33] Dixon, J. R.; Strannigan, J. S. Determination of energy release rates and stress-intensity factors by the finite-element method. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*. 1972, vol. 7, pp. 125-131.

- [34] Dundurs, J. Effect of elastic constants on stress in a composite under plane deformation. *Journal of Composite Materials*. 1967, vol. 1, pp. 310-322.
- [35] Dundurs, J. Elastic interaction of dislocation with inhomogeneities. In: *Mathematical theory of dislocations*. New York: The American Society of Mechanical Engineers, 1969.
- [36] England, A. H. A crack between dissimilar media. *Journal of Applied Mechanics*. 1964, no. 64, pp. 1-3.
- [37] Erdogan, F. Fracture Mechanics. *International Journal of Solids and Structures*. 2000, vol. 37, pp. 171-183.
- [38] Erdogan, F. Stress distribution in a nonhomogeneous elastic plate with cracks. *Journal of Applied Mechanics*. 1971, pp. 232-236.
- [39] Erdogan, F.; Sih, G. C. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *Journal of Basic Engineering*. 1963, vol. 85, pp. 519-527.
- [40] Fenner, D. N. Stress singularities in composite materials with an arbitrarily oriented crack meeting an interface. *International Journal of Fracture*. 1976, vol. 12, pp. 705-721.
- [41] Fett, T. *Stress intensity factors and weight functions for the edge cracked plate calculated by the boundary collocation method: KfK-Report 4791*. Karlsruhe: Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1990.
- [42] Fett, T.; Munz, D. *Stress intensity factors and weight functions*. Southampton: Computational Mechanics Publications, 1997.
- [43] Gröger, R. Integral methods for determination of fracture characteristics of the general stress concentrators. *Sborník konference Aplikovaná mechanika 2002*. TU Ostrava, 2002.
- [44] Gröger, R.; Náhlík, L. Výpočty lomových parametrů obecných koncentrátorů napětí: II. Integrované formulace výpočtu lomových parametrů pro materiálově nehomogenní tělesa. *Sborník semináře Únava a lomová mechanika 2002*. Žinkovy, 2002.
- [45] Hadraba, H.; Klimeš, J.; Máca, K. Crack propagation in layered $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$ composites prepared by electrophoretic deposition. *Journal of Materials Science*. 2007, vol. 42, pp. 6404-6411.
- [46] Hadraba, H.; Máca, K.; Cihlář, J. Electrophoretic deposition of alumina and zirconia – II. Two-component systems. *Ceramics International*. 2004, vol. 30, no. 6, pp. 853-865.
- [47] He, M.-Y.; Hutchinson, J. W. Crack deflection at an interface between dissimilar elastic materials. *International Journal of Solids Structures*. 1989, vol. 25, no. 9, pp. 1053-1097.
- [48] Hellen, T. K. On the method of virtual crack extension. *International Journal of Numerical Method in Engineering*. 1975, vol. 9, pp. 187-207.
- [49] Hellen, T. K.; Blackburn, W. S. The calculation of stress intensity factors for combined tensile and shear loading. *International Journal of Fracture*. 1975, vol. 1, no. 4, pp. 605-617.
- [50] Henschell, R. D.; Shawk, K. G. Crack tip elements are unnecessary. *International Journal of Numerical Method in Engineering*. 1975, vol. 9, pp. 495-509.

- [51] Hutař, P.; Knésl, Z. Vliv T-napětí na přepočtové vztahy pro otevření v kořeni trhliny a J-integrálu. *Sborník konference Inženýrská mechanika 2002*. Svatka, 2002.
- [52] Hutař, P.; Knésl, Z.; Nezbedová, E.; Náhlík, L.; Šestáková, L. Special fracture mechanics problems connected with multilayer plastic pipes. *Proceedings of conference SEICO 2009*. Paris, France, 2009.
- [53] Hutař, P.; Náhlík, L.; Knésl, Z. Vliv geometrie zkušebního tělesa na rychlost šíření únavové trhliny. *Sborník semináře Únava a lomová mechanika 2006*. Žinkovy, 2006.
- [54] Hutař, P.; Náhlík, L.; Šestáková, L.; Ševčík, M.; Knésl, Z.; Nezbedová, E. A fracture mechanics assessment of surface cracks existing in protective layers of multilayer composite pipes. Zasláno k publikaci do časopisu *Composite Structures*.
- [55] Hutař, P.; Šestáková, L.; Knésl, Z.; Nezbedová, E.; Náhlík, L. Special fracture mechanics specimens for multilayer plastic pipes testing. *Polymer Testing*, doi:10.1016/j.polymertesting.2009.06.011.
- [56] Ingraffea, A. R.; Manu, C. Stress-intensity factor computation in three dimensions with quarter-point elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1980, vol. 15, pp. 1427-1445.
- [57] Irwin, G. R. Plastic zone near a crack and fracture toughness. *Proceedings of Seventh Sagamore Ordnance Materials Conference*. Syracuse University, 1960.
- [58] Kaddouri, K.; Belhouari, M.; Bouiadjra, B. B.; Serier, B. Finite element analysis of crack perpendicular to bi-material interface: Case of couple ceramic-metal. *Computational Materials Science*. 2006, vol. 35, pp. 53-60.
- [59] Klimeš, J.; Hadraba, H. Popis šíření trhliny přes rozhraní $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$ keramiky. *Sborník semináře Problémy lomové mechaniky IV*. Brno, 2004.
- [60] Klusák, J.; Knésl, Z.; Náhlík, L. Crack initiation criteria for singular stress concentrators – part II: Stability of sharp and bi-material notches. *Engineering Mechanics*. 2007, vol. 14, no. 6, pp. 409-422.
- [61] Knésl, Z.; Hutař, P.; Seitzl, S. Výpočet faktoru intenzity napětí metodou konečných prvků. *Sborník semináře Výpočty konstrukcí metodou konečných prvků*. Praha, 2002.
- [62] Knésl, Z.; Klusák, J.; Náhlík, L. Crack initiation kriteria for singular stress concentrations – part I: A universal assessment of singular stress concentrations. *Engineering Mechanics*. 2007, vol. 14, no. 6, pp. 399-408.
- [63] Knésl, Z.; Knápek, A.; Bednář, K. Evaluation of the critical stress in bonded materials with a crack perpendicular to the interface. In: *Surface Modification Technologies XI*. Scarborough, Canada: Emptek Inc., 1998.
- [64] Knésl, Z.; Náhlík, L.; Bareš, B. Crack initiation criteria for singular stress concentrations – part IV: Applications to fracture of coated structures. *Engineering Mechanics*. 2008, vol. 15, no. 4, p. 1-8.
- [65] Knésl, Z.; Náhlík, L.; Keršner, Z. Calculation of the critical stress in two-phase materials. *Proceedings of International Conference on Structural Engineering, Mechanics and Computation*. Cape Town, 2001.
- [66] Knésl, Z.; Náhlík, L.; Radon, L. C. Influence of interface on fatigue threshold values in elastic bimetals. *Computational Materials Science*. 2003, vol. 28, pp. 620-627.

- [67] Kotoul, M.; Vrbka, J. Crack bridging and trapping mechanism used to toughen brittle matrix composite. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2003, vol. 40, pp. 23-44.
- [68] Kučera, J. *Úvod do mechaniky lomu. Nestabilní lom ocelových těles při statickém a dynamickém zatížení*. Ostrava: VŠB-TU Ostrava, 2006.
- [69] Kunz, J. *Základy lomové mechaniky*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 1994.
- [70] Kuo, D.-H.; Kriven, W. M. Fracture of multilayer oxide composites. *Materials Science and Engineering*. 1998, vol. A241, pp. 241-250.
- [71] Larsson, S. G.; Carlsson, A. J. *Influence of non-singular stress terms on small scale yielding at crack tips in elastic-plastic materials*. Stockholm: 1972.
- [72] Leever, P. S.; Radon, J. C. Inherent stress biaxiality in various fracture specimen geometries. *International Journal of Fracture*. 1982, vol. 19, pp. 311-325.
- [73] Li, C. Vector CTD analysis for crystallographic crack growth. *Acta Metallurgica et Materialia*. 1990, vol. 38, no. 11, pp. 2129-2134.
- [74] Lin, K. Y.; Mar, J. W. Finite element analysis of stress intensity factors for cracks at bi-material interface. *International Journal of Fracture*. 1976, vol. 12, pp. 521-531.
- [75] Lube, T.; Pascual, J.; Chalvet, F.; de Portu, G. Effective fracture toughness in Al₂O₃-Al₂O₃/ZrO₂ laminates. *Journal of the European Ceramic Society*. 2007, vol. 27, pp. 1449-1453.
- [76] Madani, K.; Belhouari, M.; Bouiadjra, B. B.; Serier, B.; Benguediab, M. Crack deflection at an interface of alumina/metal joint: A numerical analysis. *Computational Materials Science*. 2007, vol. 38, pp. 625-630.
- [77] Majer, Z. *Numerická analýza růstu povrchové trhliny v ochranných vrstvách: diplomová práce*. Brno: VUT Brno, Fakulta strojního inženýrství, 2006.
- [78] Majer, Z.; Šestáková, L.; Náhlík, L.; Hutař, P.; Knésl, Z. Numerical analysis of a crack approaching the interface of two dissimilar materials. *Proceedings of conference Polymeric Materials P2008*. Halle/Saale, Germany, 2008.
- [79] Martin, E.; Leguillon, D.; Lacroix, C. A revised criterion for crack deflection at an interface in a brittle bimaterial. *Composite Science and Technology*. 2001, vol. 61, pp. 1671-1679.
- [80] Martínez, D.; Gupta, V. Energy criterion for a crack deflection at an interface between two orthotropic media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1994, vol. 42, no. 8, pp. 1247-1271.
- [81] Meguid, S. A.; Tan, M.; Zhu, Z. H. Analysis of cracks perpendicular to biomaterial interfaces using a novel finite element. *International Journal of Fracture*. 1995, vol. 73, pp. 1-23.
- [82] Menčík, J. *Mechanics of components with treated or coated surfaces*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [83] Murakami, Y. and Co-editors. *Stress intensity factors handbook Vol. 1*. Tokyo: Pergamon Press, 1987.
- [84] Muskhelishvili, N. I. *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. Groningen, The Netherlands: Noordhoff, 1972.

- [85] Náhlík, L. Crack trapping in the interface between matrix and inclusion. *Engineering Mechanics*. 2004, vol. 11, no. 5, pp. 371-376.
- [86] Náhlík, L. *Šíření únavových trhlin v okolí rozhraní dvou elastických materiálů: disertační práce*. Brno: VUT Brno, Fakulta strojního inženýrství, 2002.
- [87] Náhlík, L.; Knésl, Z. Estimation of the critical stress for failure of protective coating *Proceedings of Materials Structure and Micromechanics of Fracture 3*. Brno, 2001.
- [88] Náhlík, L.; Knésl, Z. Kritické napětí pro šíření trhlin v betonu. *Sborník semináře Problémy modelování*. Ostrava-Poruba, 2002.
- [89] Náhlík, L.; Knésl, Z.; Klusák, J. Crack initiation criteria for singular stress concentrations – part III: An application to a crack touching a bimaterial interface. *Engineering Mechanics*. 2008, vol. 15, no. 2, pp. 99-114.
- [90] Náhlík, L.; Knésl, Z.; Vrbka, J. Propagation of a fatigue crack through a protective layer. *Proceedings of conference Surface Treatment 2001*. Sevilla, 2001.
- [91] Náhlík, L.; Šestáková, L.; Hutař, P. Crack behaviour in laminar ceramics with strong interfaces. *Key Engineering Materials*. 2010, vols. 417-418, pp. 301-304 (in press).
- [92] Náhlík, L.; Šestáková, L.; Hutař, P. Crack propagation in laminar ceramics. Accepted for publication in *Proceedings of Crack Paths 2009*. Vicenza, Italy, 2009.
- [93] Náhlík, L.; Šestáková, L.; Hutař, P. Crack propagation in the vicinity of the interface between two elastic materials. *Proceedings of 1st African Interquadrennial ICF Conference 2008*. Algiers, Algeria, 2008.
- [94] Náhlík, L.; Šestáková, L.; Hutař, P. Crack propagation in the vicinity of the interface between two elastic materials. In: Boukharouba et al. *Damage and Fracture Mechanics*. Dordrecht: Springer Science + Business Media B.V., 2009, pp. 255-264.
- [95] Náhlík, L.; Šestáková, L.; Hutař, P. Estimation of apparent fracture toughness of ceramic laminates based on generalized strain energy density factor. *Proceedings of European Conference on Fracture*. Brno, 2008.
- [96] Náhlík, L.; Šestáková, L.; Hutař, P. Estimation of the crack propagation direction of a crack touching the interface between two elastic materials. *Materials Science Forum*. 2008, vols. 567-568, no. 567-568, pp. 225-228.
- [97] Náhlík, L.; Šestáková, L.; Hutař, P. Numerical investigation of stress singularities in cracked bimaterial body. *Key Engineering Materials*. 2008, vols. 385-387, pp. 125-128.
- [98] Náhlík, L.; Šestáková, L.; Hutař, P.; Knésl, Z. Crack propagation in the vicinity of interface between two elastic materials. *Proceedings of 5th International Conference on Fracture of Polymers, Composites and Adhesives*. Les Diablerets, Switzerland, 2008.
- [99] Náhlík, L.; Šestáková, L.; Hutař, P.; Knésl, Z. Estimation of the critical stress for failure of layered composite materials. *Proceedings of abstracts of 18th International Symposium on Computational Mechanics of Materials*. Beijing, China, 2008.
- [100] Náhlík, L.; Šestáková, L.; Hutař, P. Estimation of apparent fracture toughness of ceramic laminates. *Computational Materials Science*. 2009, vol. 45, pp. 653-657.

- [101] Nezbedová, E; Knésl, Z.; Šestáková, L.; Vlach, B. Fracture mechanics analysis of multi-layer pipes. *Proceedings of conference Fibre Reinforced Composites Conference 2007*. Port Elizabeth, South Africa, 2007.
- [102] Oel, H.J.; Fréchet, V. D. Stress distribution in multiphase systems – part I: Composites with planar interfaces. *Journal of the American Ceramic Society*. 1967, vol. 50, pp. 542-549.
- [103] Owen, D. R. J.; Fawkes, A. J. *Engineering fracture mechanics: Numerical methods and application*. Swansea: Pineridge Press Limited, 1983.
- [104] Parks, D. M. A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors. *International Journal of Fracture*. 1974, vol. 10, pp. 487-502.
- [105] Phillipps, A. J.; Clegg, W. J.; Clyne, T. W. Fracture behaviour of ceramic laminates in bending – I. Modeling of crack propagation. *Acta Metallurgica et Materialia*. 1993, vol. 41, no. 3, pp. 805-817.
- [106] Phillipps, A. J.; Clegg, W. J.; Clyne, T. W. Fracture behaviour of ceramic laminates in bending – II. Comparison of model predictions with experimental data. *Acta Metallurgica et Materialia*. 1993, vol. 41, no. 3, pp. 819-827.
- [107] Picu, R. C.; Gupta, V. Three dimensional stress singularities at the tip of a grain triple junction line intersecting the free surface. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1997, vol. 45, pp. 1495-1520.
- [108] Pook, L. P. *Crack paths*. Boston: WIT Press, 2002.
- [109] Pratap, C. R.; Panley, R. K. A new approach to determination of CTOD and axis of rotation in small scale yielding situation. *Engineering Fracture Mechanics*. 1984, vol. 19, no. 5, pp. 1139-1150.
- [110] Pratap, C. R.; Panley, R. K. Studies of constraint factors in K-CTOD and K-R relationships: Effect of specimen, loading geometry and material. *Engineering Fracture Mechanics*. 1989, vol. 34, no. 1, pp. 233-243.
- [111] Profant, T.; Ševeček, O.; Kotoul, M. Calculation of K -factor and T -stress for cracks in anisotropic bimetals. *Engineering Fracture Mechanics*. 2008, vol. 75, pp. 3707-3726.
- [112] Qian, Z. Q. On the evaluation of wedge corner stress intensity factors of bi-materials joints with surface tractions. *Computers and Structures*. 2001, vol. 79, pp. 53-64.
- [113] Qian, Z. Q.; Akisanya, A. R. Wedge corner stress behaviour of bonded dissimilar materials. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 1999, vol. 32, pp. 209-222.
- [114] Rice, J. R.; Rosengren, G. F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1968, vol. 35, pp. 379-386.
- [115] Romeo, A.; Ballarini, R. A cohesive zone model for cracks terminating at a bimaterial interface. *International Journal of Solids and Structures*. 1997, vol. 34, no. 11, pp. 1307-1326.
- [116] Seweryn, A.; Lukaszewicz, A. Verification of brittle fracture criteria for elements with V-shaped notches. *Engineering Fracture Mechanics*. 2002, vol. 69, pp. 1487-1510.

- [117] Sih, G. C. A special theory of crack propagation. In: *Mechanics of Fracture*. Leyden: Noordhoff International Publishing, 1977.
- [118] Sih, G. C. *Handbook of Stress-Intensity Factors*. Bethlehem, Pennsylvania: Lehigh University, 1993.
- [119] Sih, G. C. Mechanics and physics of energy density theory. *Theoretical and Applied Mechanics*. 1985, vol. 4, pp. 157-173.
- [120] Sih, G. C. *Mechanics of fracture I: Methods of analysis and solutions of crack problems*. Leyden: Noordhoff International Publishing, 1973.
- [121] Sih, G. C. Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems. *International Journal of Fracture*. 1974, vol. 10, no. 3, pp. 305-321.
- [122] Sih, G. C.; Ho, J. W. Sharp notch fracture strength characterized by critical energy density. *Journal of Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 1991, vol. 16, pp. 179-214.
- [123] Sih, G. C.; Moyer Jr., E. T.; Gdoutos, E. E. Discussion "The Mises elastic-plastic boundary as the core region in fracture criteria" by P.S. Theocaris and P. Andrianopoulos. *Engineering Fracture Mechanics*. 1983, vol. 18, no. 3, pp. 731-733.
- [124] Sinclair, G. B.; Okajima, M.; Griffin, J. H. Path independent integrals for computing stress intensity factors at sharp notches in elastic plates. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*. 1984, vol. 20, pp. 999-1008.
- [125] Soh, A. K.; Bian, L. C. Mixed mode fatigue crack growth criteria. *International Journal of Fracture*. 2001, vol. 23, pp. 427-439.
- [126] Solanski, A.; Daniewicz, S. R.; Newman, J. C., Jr. A new methodology for computing crack opening values from finite element analyses. *Engineering Fracture Mechanics*. 2004, vol. 71, no. 7-8.
- [127] Stern, M.; Soni, M. L. On the computation of stress intensities at fixed-free corners. *International Journal of Solids of Structures*. 1976, vol. 12, pp. 331-337.
- [128] Susmel, L. The theory of critical distances: a review of its applications in fatigue. *Engineering Fracture Mechanics*. 2008, vol. 75, pp. 1706-1724.
- [129] Susmel, L.; Taylor, D. On the use of the theory of critical distances to predict static failures in ductile metallic materials containing different geometrical features. *Engineering Fracture Mechanics*. 2008, vol. 75, pp. 4410-4421.
- [130] Susmel, L.; Taylor, D. The theory of critical distances to predict static strength of notched brittle components subjected to mixed-mode loading. *Engineering Fracture Mechanics*. 2008, vol. 75, pp. 534-550.
- [131] Sutton, M. A.; Deng, X.; Ma, F.; Newman Jr., J. C.; James, M. Development and application of a crack tip opening displacement-based mixed mode fracture criterion. *International Journal of Solids of Structures*, 2000, vol. 37, pp. 3591-3618.
- [132] Šestáková, L. Crack propagation in the vicinity of bi-material interface: Application to multi-layer pipes. *Sborník konference Víceúrovňový design pokročilých materiálů*. Velké Bílovice, 2008.
- [133] Šestáková, L. Lomově mechanické parametry bi-materiálového tělesa. *Sborník konference Víceúrovňový design pokrokových materiálů 2007*. Brno, 2007.

- [134] Šestáková, L. Šíření trhlin ve vrstevnatých kompozitech. *Sborník FSI Junior konference*. Brno, 2008.
- [135] Šestáková, L. Vliv povrchových trhlin na delaminaci ochranné vrstvy a podkladu. *Sborník konference Problémy lomové mechaniky VI*. Brno, 2006.
- [136] Šestáková, L. *Vliv povrchových trhlin na delaminaci povrchové vrstvy a substrátu: diplomová práce*. Brno: VUT Brno, Fakulta strojního inženýrství, 2006.
- [137] Šestáková, L.; Hutař, P.; Fiedler, L.; Náhlík, L. K-kalibrace nehomogenních zkušebních těles typu C. *Sborník konference Aplikovaná mechanika 2008*. Gliwice, Poland, 2008.
- [138] Šestáková, L.; Majer, Z. Numerická analýza nehomogenních vzorků používaných pro měření lomové mechanických parametrů polyethylenu. *Sborník semináře Křehký lom 2007*. Brno, 2007.
- [139] Šestáková, L.; Majer, Z.; Fiedler, L.; Knésl, Z. K-Calibration of specimens used for lifetime estimation of multilayer pipes. *Proceedings of 11th Problemseminar Deformation und Bruchverhalten von Kunststoffen*. Merseburg, Germany, 2007.
- [140] Šestáková, L.; Majer, Z.; Náhlík, L.; Knésl, Z. Numerická analýza povrchové trhliny v ochranných vrstvách. *Sborník konference Inženýrská mechanika 2006*. Svratka, 2006.
- [141] Šestáková, L.; Náhlík, L.; Hutař, P. Delaminace ochranné vrstvy způsobená povrchovou trhlínou. *Sborník konference SEMDOK 2007*. Žilina – Súlov, Slovakia, 2007.
- [142] Šestáková, L.; Náhlík, L.; Hutař, P. Vliv bi-materiálového rozhraní na směr šíření trhliny ve vrstevnatém kompozitu. *Sborník konference Inženýrská mechanika 2007*. Svratka, 2007.
- [143] Šestáková, L.; Náhlík, L.; Hutař, P. Vliv rozhraní vrstevnatého kompozitu na směr šíření trhliny. *Sborník konference Aplikovaná mechanika 2007*. Ostrava, 2007.
- [144] Šestáková, L.; Náhlík, L.; Hutař, P.; Knésl, Z. Crack propagation in the vicinity of the interface in layered materials. *Applied and Computational Mechanics*. 2009, vol. 3, no. 1, pp. 195-204.
- [145] Šestáková, L.; Náhlík, L.; Hutař, P.; Knésl, Z. Fracture mechanics parameters of multilayer pipes. *Applied and Computational Mechanics*. 2007, vol. 1, no. 1, pp. 299-306.
- [146] Šestáková, L.; Náhlík, L.; Hutař, P. Numerical estimation of crack behaviour and apparent fracture toughness of layered composites with strong interfaces. *Proceedings of International Conference on Fracture (ICF-12)*. Ottawa, Canada, 2009.
- [147] Tada, H.; Paris, P. C.; Irwin, G. R. *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. Hellertown, Pennsylvania: Del Research Corporation, 1973.
- [148] Theocaris, P. S.; Papadopoulos, G. The distribution of the elastic strain-energy density at the crack tip for fracture modes I and II. *International Journal of Fracture*. 1982, vol. 18, no. 2, pp. 81-112.
- [149] Tilbrook, M. T.; Moon, R. J.; Hoffman, M. Crack propagation in graded materials. *Composites Science and Technology*. 2005, vol. 65, pp. 201-220.

- [150] Tong, P. et al. A Hybrid element approach to crack problems in plane elasticity. *International Journal of Numerical Method in Engineering*. 1973, vol. 7, pp. 297-308.
- [151] Vlk, M. *Mezní stavy a spolehlivost*. 1. vydání. Brno: Nakladatelství VUT v Brně, 1991.
- [152] Vlk, M.; Florian Z. *Mezní stavy a spolehlivost*. 2. vydání. Brno: Nakladatelství VUT v Brně, 2007.
- [153] Westergaard, H. M. Bearing pressures and cracks. *Journal of Applied Mechanics*. 1939, vol. 6, pp. 49-53.
- [154] Williams, M. L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *Journal of Applied Mechanics*. 1957, vol. 24, pp. 109-114.
- [155] Williams, M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corner of plates in extension. *Journal of Applied Mechanics*. 1952, vol. 74, pp. 526-528.
- [156] Wu, X. R.; Carlsson, D. J. *Weight functions and stress intensity factor solutions*. Oxford: Pergamon Press, 1991.
- [157] Zak, A. R.; Williams, M. L. Crack point stress singularities at a bi-material interface. *Journal of Applied Mechanics*. 1963, vol. 30, pp. 142-143.
- [158] Zemánková, J. *Technická mechanika I: Úvod do lomové mechaniky*. Skripta ČVUT-FJFI. Praha: AS ČVUT, 1981.

VLASTNÍ PUBLIKOVANÉ PRÁCE

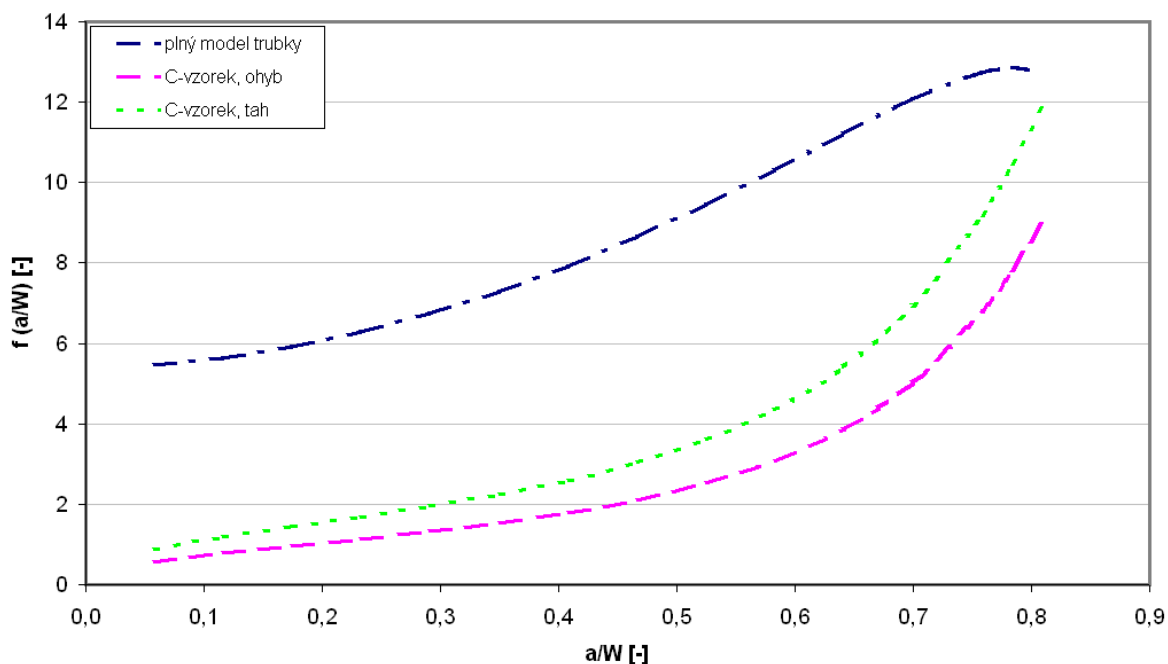
- [i] Šestáková, L.; Majer, Z.; Náhlík, L.; Knésl, Z. Numerická analýza povrchové trhliny v ochranných vrstvách. *Sborník konference Inženýrská mechanika 2006*. Svratka, 2006.
- [ii] Šestáková, L. *Vliv povrchových trhlin na delaminaci povrchové vrstvy a substrátu: diplomová práce*. Brno: VUT Brno, Fakulta strojního inženýrství, 2006.
- [iii] Šestáková, L. Vliv povrchových trhlin na delaminaci ochranné vrstvy a podkladu. *Sborník konference Problémy lomové mechaniky VI*. Brno, 2006.
- [iv] Šestáková, L.; Náhlík, L.; Hutař, P. Delaminace ochranné vrstvy způsobená povrchovou trhlinou. *Sborník konference SEMDOK 2007*. Žilina – Súlov, Slovakia, 2007.
- [v] Šestáková, L.; Náhlík, L.; Hutař, P. Vliv rozhraní vrstevnatého kompozitu na směr šíření trhliny. *Sborník konference Aplikovaná mechanika 2007*. Ostrava, 2007.
- [vi] Šestáková, L.; Náhlík, L.; Hutař, P. Vliv bi-materiálového rozhraní na směr šíření trhliny ve vrstevnatém kompozitu. *Sborník konference Inženýrská mechanika 2007*. Svratka, 2007.
- [vii] Šestáková, L.; Majer, Z.; Fiedler, L.; Knésl, Z. K-Calibration of specimens used for lifetime estimation of multilayer pipes. *Proceedings of 11th Problemseminar Deformation und Bruchverhalten von Kunststoffen*. Merseburg, Germany, 2007.
- [viii] Náhlík, L.; Šestáková, L.; Hutař, P. Estimation of the crack propagation direction of a crack touching the interface between two elastic materials. *Proceedings of abstracts of conference Materials Structure and Micromechanics of Fracture 5*. Brno, 2007.
- [ix] Hutař, P.; Náhlík, L.; Šestáková, L.; Knésl, Z. Quantification of the influence of vertex singularities on crack behaviour. *Book of abstracts IWCM17*. Paris, France, 2007.
- [x] Šestáková, L.; Náhlík, L.; Hutař, P.; Knésl, Z. Fracture mechanics parameters of multilayer pipes. *Applied and Computational Mechanics*. 2007, vol. 1, no. 1, pp. 299-306.
- [xi] Šestáková, L.; Majer, Z. Numerická analýza nehomogenních vzorků používaných pro měření lomově mechanických parametrů polyethylenu. *Sborník semináře Křehký lom 2007*. Brno, 2007.
- [xii] Šestáková, L. Lomově mechanické parametry bi-materiálového tělesa. *Sborník konference Víceúrovňový design pokrokových materiálů 2007*. Brno, 2007.
- [xiii] Nezbedová, E; Knésl, Z.; Šestáková, L.; Vlach, B. Fracture mechanics analysis of multi-layer pipes. *Proceedings of conference Fibre Reinforced Composites Conference 2007*. Port Elizabeth, South Africa, 2007.
- [xiv] Náhlík, L.; Šestáková, L.; Hutař, P. Estimation of the crack propagation direction of a crack touching the interface between two elastic materials. *Materials Science Forum*. 2008, vols. 567-568, no. 567-568, pp. 225-228.
- [xv] Šestáková, L. Šíření trhlin ve vrstevnatých kompozitech. *Sborník FSI Junior konference*. Brno, 2008.

- [xvi] Šestáková, L.; Hutař, P.; Fiedler, L.; Náhlík, L. K-kalibrace nehomogenních zkušebních těles typu C. *Sborník konference Aplikovaná mechanika 2008*. Gliwice, Poland, 2008.
- [xvii] Hutař, P.; Majer, Z.; Náhlík, L.; Šestáková, L.; Knésl, Z. The influence of particle size on the fracture toughness of PP-based particle composite. *Proceedings of abstracts of conference Mechanics of Composite Materials*. Riga, Latvia, 2008.
- [xviii] Náhlík, L.; Šestáková, L.; Hutař, P. Crack propagation in the vicinity of the interface between two elastic materials. *Proceedings of 1st African Interquadrennial ICF Conference 2008*. Algiers, Algeria, 2008.
- [xix] Hutař, P.; Majer, Z.; Knésl, Z.; Náhlík, L.; Šestáková, L.; Prod'homme, G. Computational estimation of micro-crack behaviour in polypropylene copolymer. *Proceedings of abstracts of 8th World Congress on Computational Mechanics WCCM8*. Venice, Italy, 2008.
- [xx] Náhlík, L.; Šestáková, L.; Hutař, P. Numerical investigation of stress singularities in cracked bimaterial body. *Key Engineering Materials*. 2008, vols. 385-387, pp.125-128.
- [xxi] Náhlík, L.; Šestáková, L.; Hutař, P. Estimation of apparent fracture toughness of ceramic laminates based on generalized strain energy density factor. *Proceedings of European Conference on Fracture*. Brno, 2008.
- [xxii] Náhlík, L.; Šestáková, L.; Hutař, P.; Knésl, Z. Crack propagation in the vicinity of interface between two elastic materials. *Proceedings of 5th International Conference on Fracture of Polymers, Composites and Adhesives*. Les Diablerets, Switzerland, 2008.
- [xxiii] Majer, Z.; Šestáková, L.; Náhlík, L.; Hutař, P.; Knésl, Z. Numerical analysis of a crack approaching the interface of two dissimilar materials. *Proceedings of conference Polymeric Materials P2008*. Halle/Saale, Germany, 2008.
- [xxiv] Náhlík, L.; Šestáková, L.; Hutař, P.; Knésl, Z. Estimation of the critical stress for failure of layered composite materials. *Proceedings of abstracts of 18th International Symposium on Computational Mechanics of Materials*. Beijing, China, 2008.
- [xxv] Šestáková, L. Crack propagation in the vicinity of bi-material interface: Application to multi-layer pipes. *Sborník konference Víceúrovňový design pokročilých materiálů*. Velké Bílovice, 2008.
- [xxvi] Šestáková, L.; Náhlík, L.; Hutař, P.; Knésl, Z. Crack propagation in the vicinity of the interface in layered materials. *Applied and Computational Mechanics*. 2009, vol. 3, no. 1, pp. 195-204.
- [xxvii] Hutař, P.; Majer, Z.; Náhlík, L.; Šestáková, L.; Knésl, Z. Influence of particle size on the fracture toughness of a PP-based particulate composite. *Mechanics of Composite Materials*. 2009, vol. 45, no. 3, pp. 281-286.
- [xxviii] Náhlík, L.; Šestáková, L.; Hutař, P. Crack propagation in the vicinity of the interface between two elastic materials. In: Boukharouba et al. *Damage and Fracture Mechanics*. Dordrecht: Springer Science + Business Media B.V., 2009, pp. 255-264.

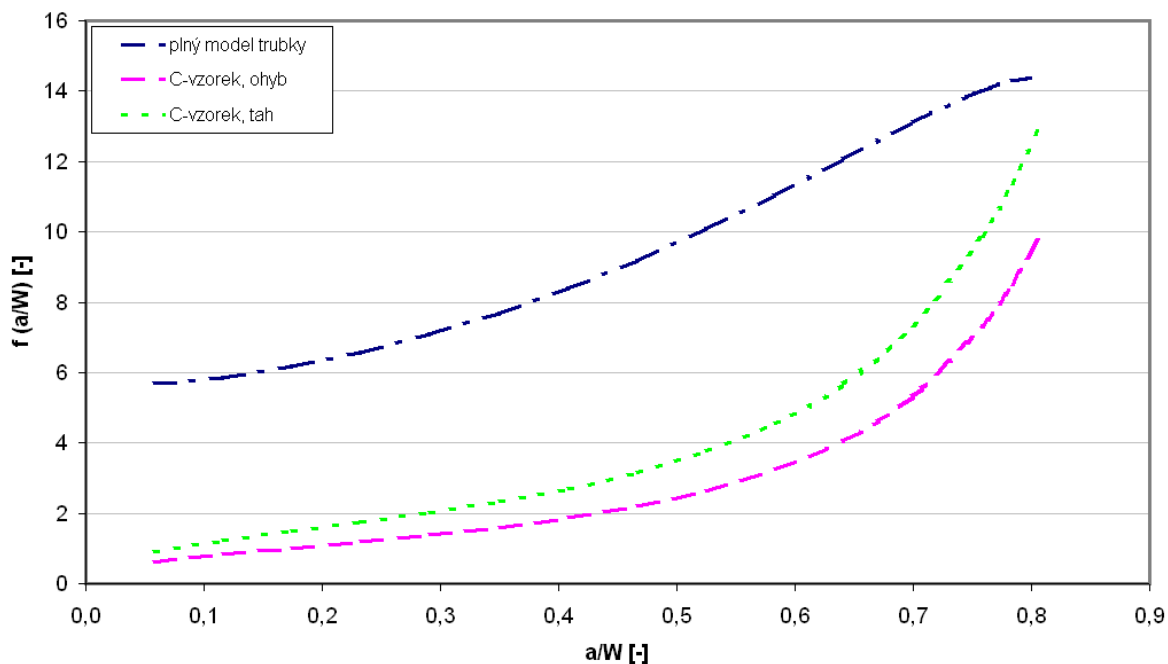
- [xxix] Hutař, P.; Knésl, Z.; Nezbedová, E.; Náhlík, L.; Šestáková, L. Special fracture mechanics problems connected with multilayer plastic pipes. *Proceedings of conference SEICO 2009*. Paris, France, 2009.
- [xxx] Náhlík, L.; Šestáková, L.; Hutař, P. Estimation of apparent fracture toughness of ceramic laminates. *Computational Materials Science*. 2009, vol. 45, pp. 653-657.
- [xxxii] Šestáková, L.; Náhlík, L.; Hutař, P. Numerical estimation of crack behaviour and apparent fracture toughness of layered composites with strong interfaces. *Proceedings of International Conference on Fracture (ICF-12)*. Ottawa, Canada, 2009.
- [xxxiii] Náhlík, L.; Šestáková, L.; Hutař, P. Crack propagation in laminar ceramics. Accepted for publication in *Proceedings of Crack Paths 2009*. Vicenza, Italy, 2009.
- [xxxiiii] Náhlík, L.; Šestáková, L.; Hutař, P. Crack behaviour in laminar ceramics with strong interfaces. *Key Engineering Materials*. 2010, vols. 417-418, pp. 301-304 (in press).
- [xxxv] Hutař, P.; Šestáková, L.; Knésl, Z.; Nezbedová, E.; Náhlík, L. Special fracture mechanics specimens for multilayer plastic pipes testing. *Polymer Testing*, doi:10.1016/j.polymertesting.2009.06.011.
- [xxxvi] Hutař, P.; Náhlík, L.; Šestáková, L.; Ševčík, M.; Knésl, Z.; Nezbedová, E. A fracture mechanics assessment of surface cracks existing in protective layers of multilayer composite pipes. Zasláno k publikaci do časopisu *Composite Structures*.

PŘÍLOHA

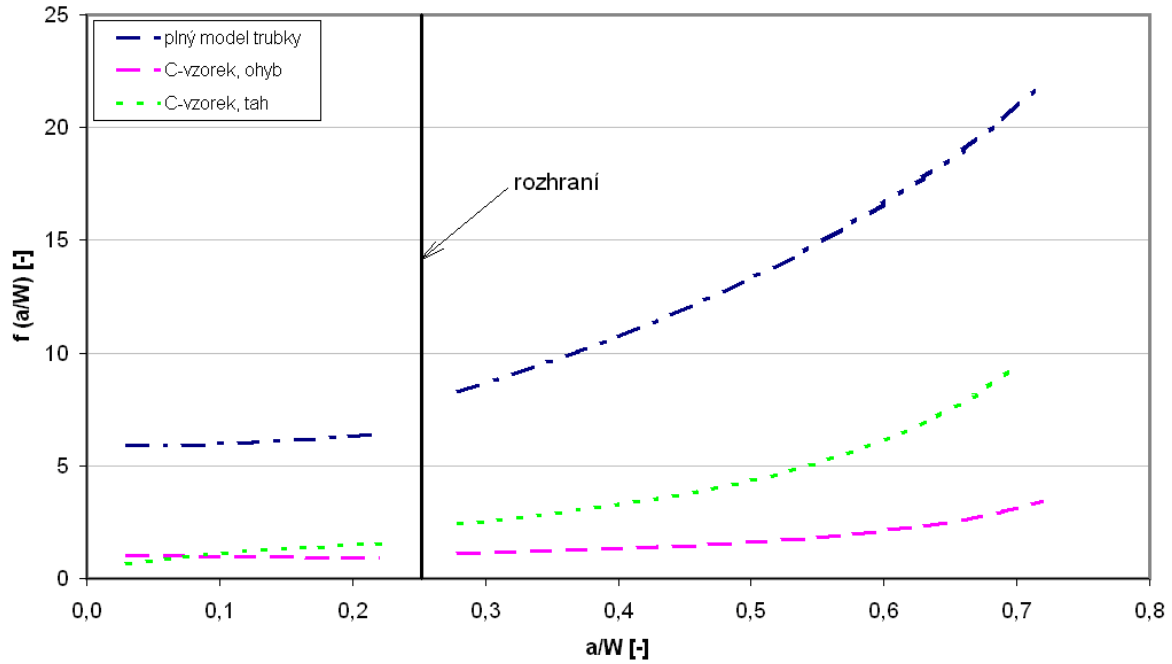
V následujícím jsou zobrazeny závislosti určené na dvouvrstvých a třívrstvých polymerních trubkách, které rozšiřují oblast výsledků uvedených v kapitolách 6.2.4 a 6.2.5.



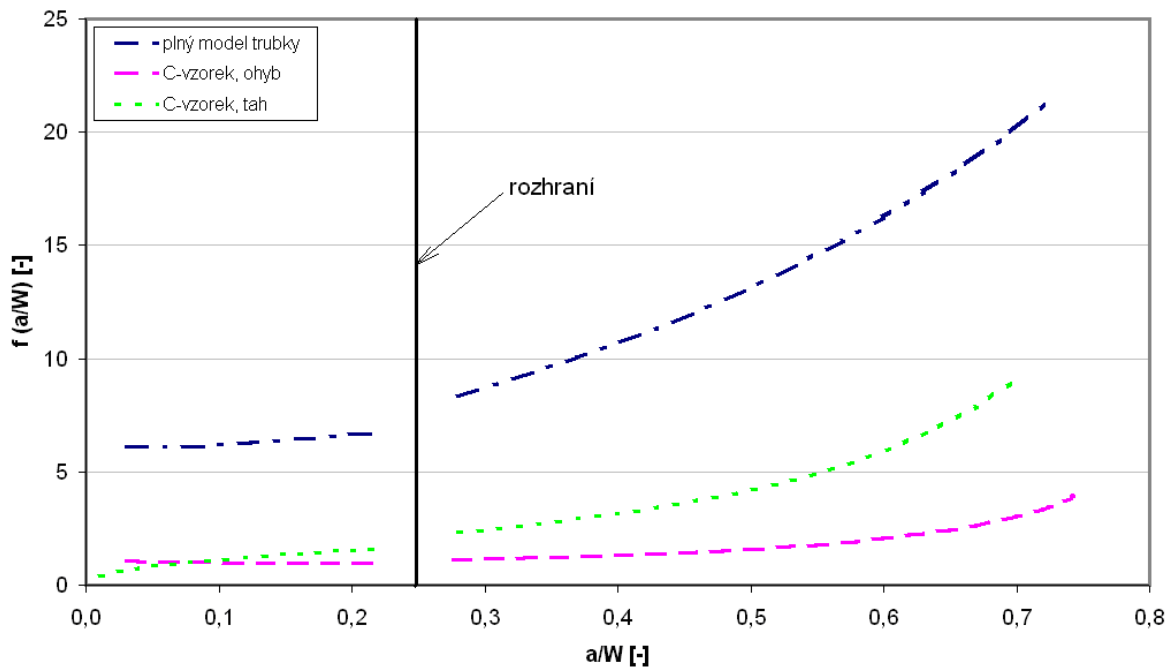
Obr. P1 Průběhy korekční funkce u nehomogenní dvouvrstvé trubky pro vnitřní trhlinu v základním materiálu při teplotě -20 °C pro tři typy úloh – plný model trubky zatížený vnitřním přetlakem, C-vzorek namáhaný tříbodovým ohybem, C-vzorek namáhaný tahem



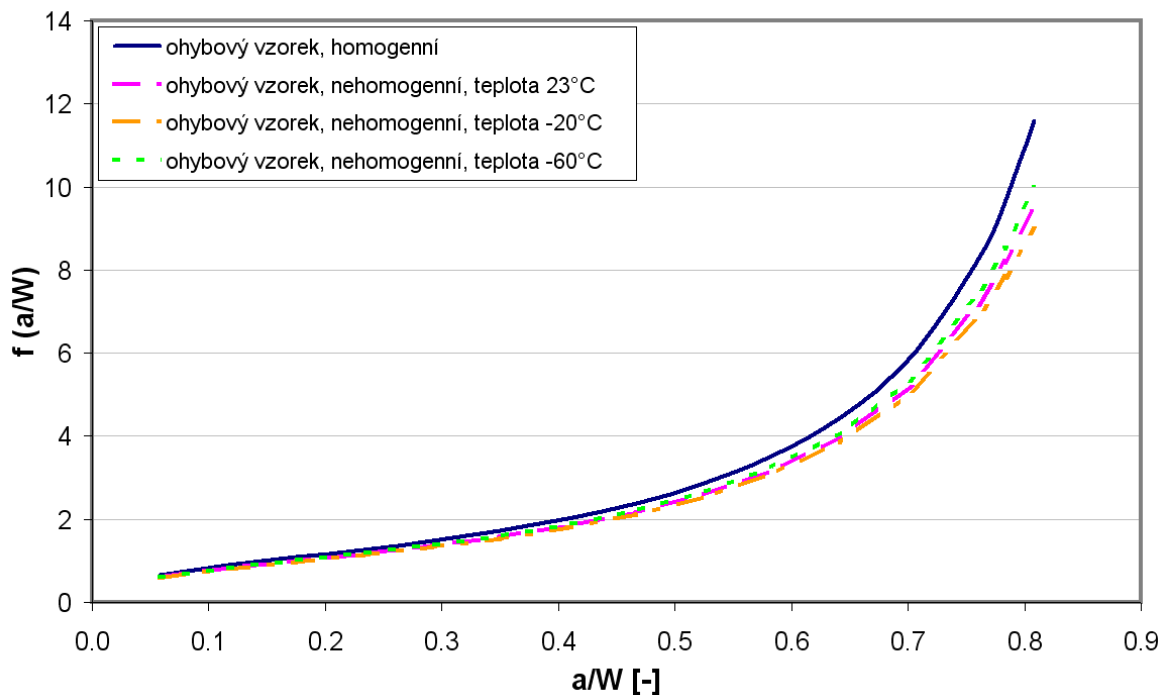
Obr. P2 Průběhy korekční funkce u nehomogenní dvouvrstvé trubky pro vnitřní trhlinu v základním materiálu při teplotě -60 °C pro tři typy úloh – plný model trubky zatížený vnitřním přetlakem, C-vzorek namáhaný tříbodovým ohybem, C-vzorek namáhaný tahem



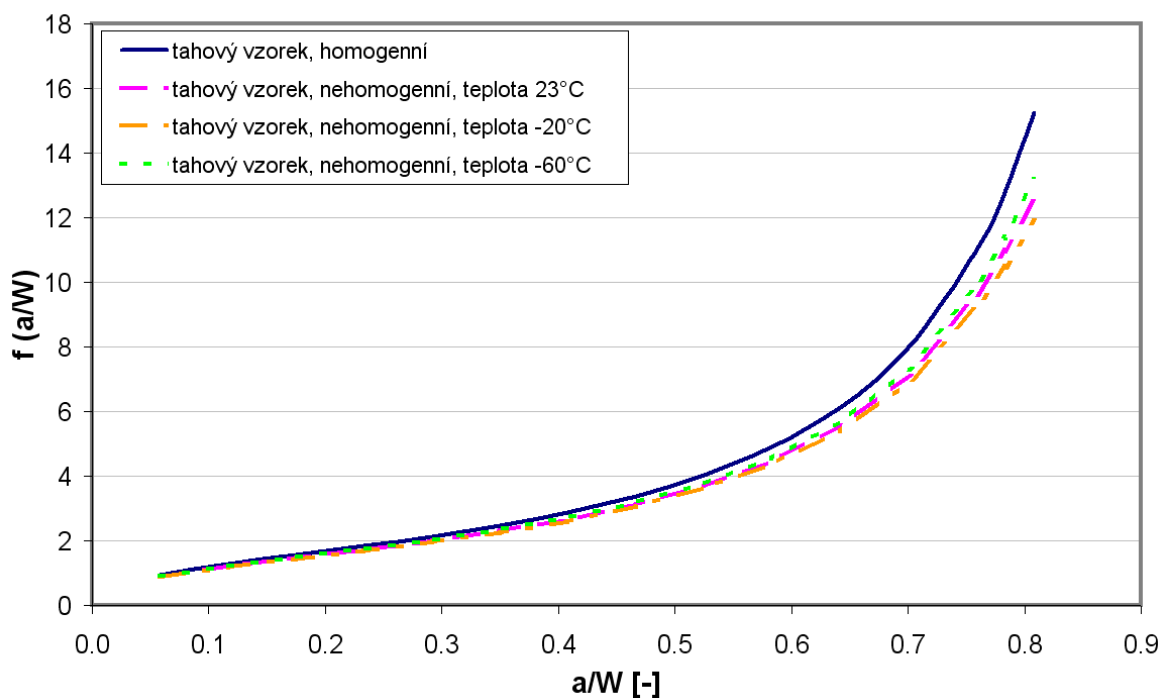
Obr. P3 Průběhy korekční funkce u nehomogenní třívrstvé trubky pro vnitřní trhlinu ve vnitřní a střední (základní) vrstvě při teplotě $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ pro tři typy úloh – plný model trubky zatížený vnitřním přetlakem, C-vzorek namáhaný třibodovým ohybem, C-vzorek namáhaný tahem



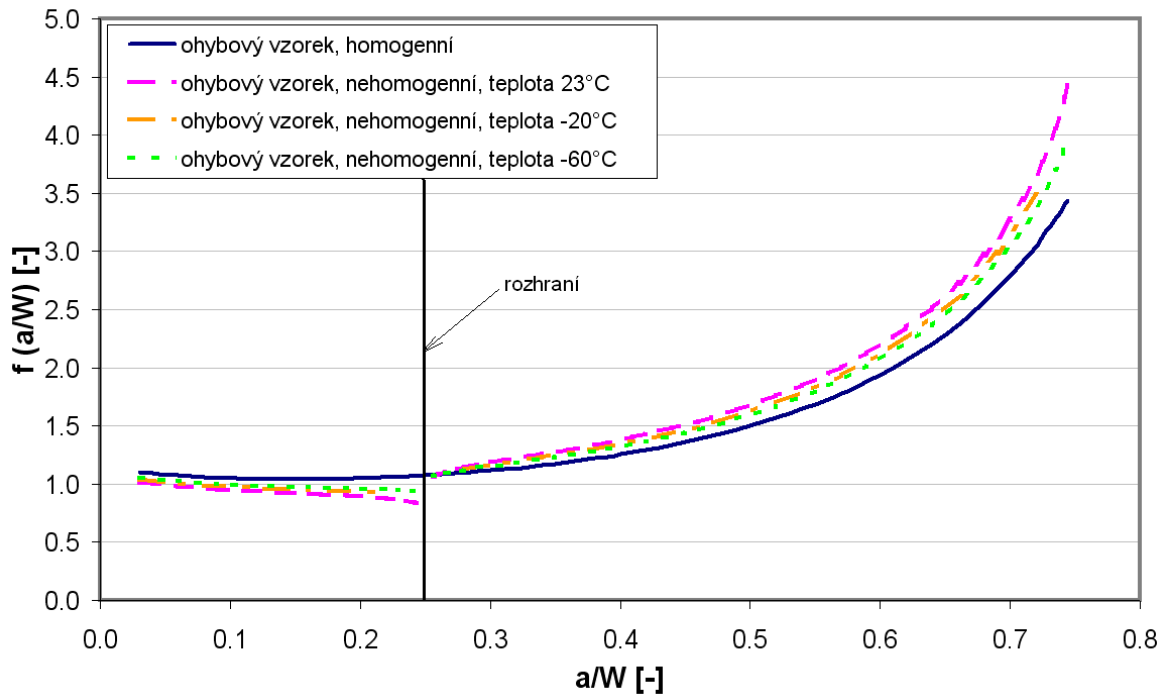
Obr. P4 Průběhy korekční funkce u nehomogenní třívrstvé trubky pro vnitřní trhlinu ve vnitřní a střední (základní) vrstvě při teplotě $-60\text{ }^{\circ}\text{C}$ pro tři typy úloh – plný model trubky zatížený vnitřním přetlakem, C-vzorek namáhaný třibodovým ohybem, C-vzorek namáhaný tahem



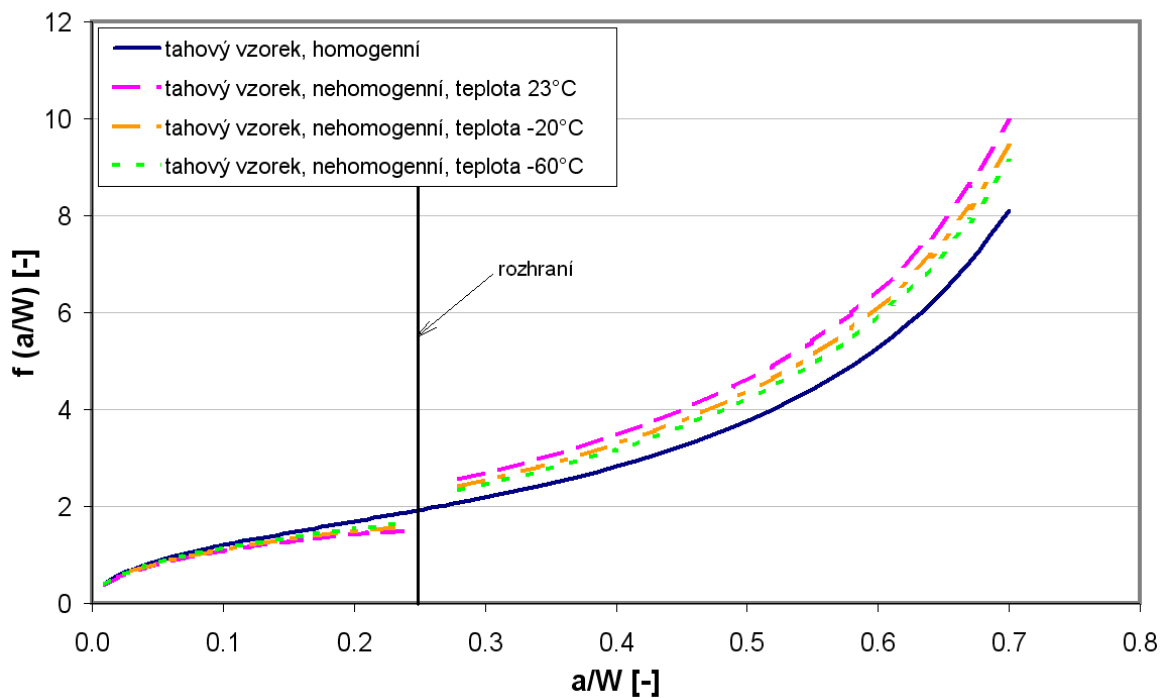
Obr. P5 Průběhy korekční funkce u ohybového vzorku dvouvrstvé trubky pro vnitřní trhlinu v základním materiálu pro různé teploty a pro homogenní případ



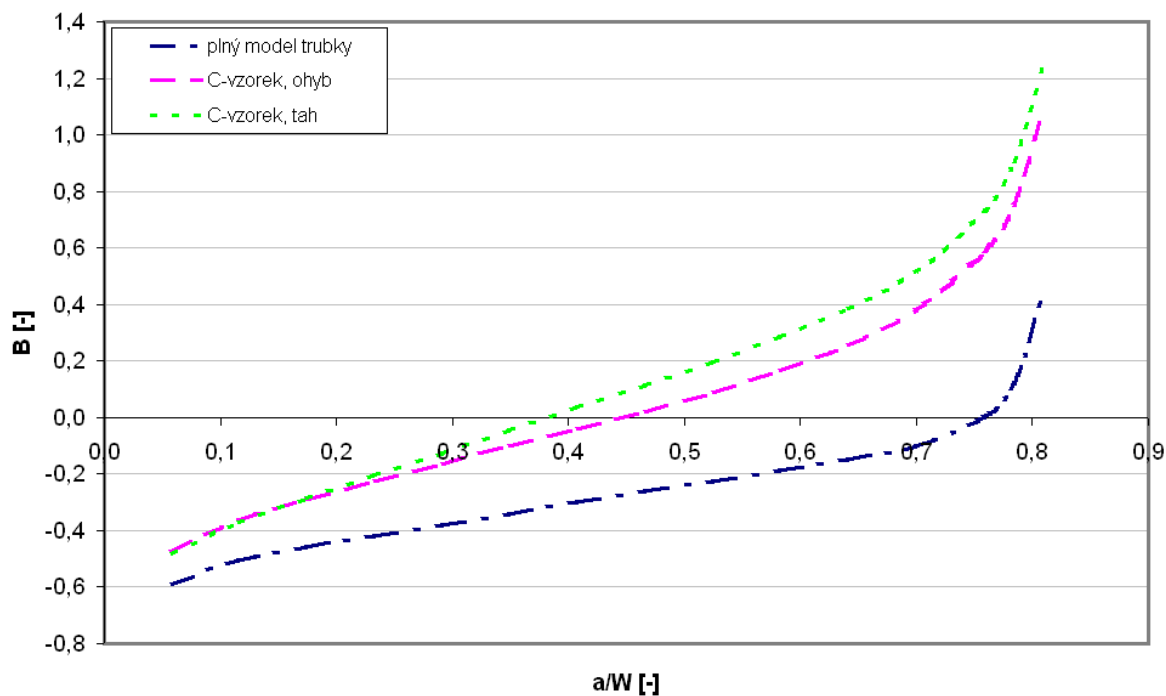
Obr. P6 Průběhy korekční funkce u tahového vzorku dvouvrstvé trubky pro vnitřní trhlinu v základním materiálu pro různé teploty a pro homogenní případ



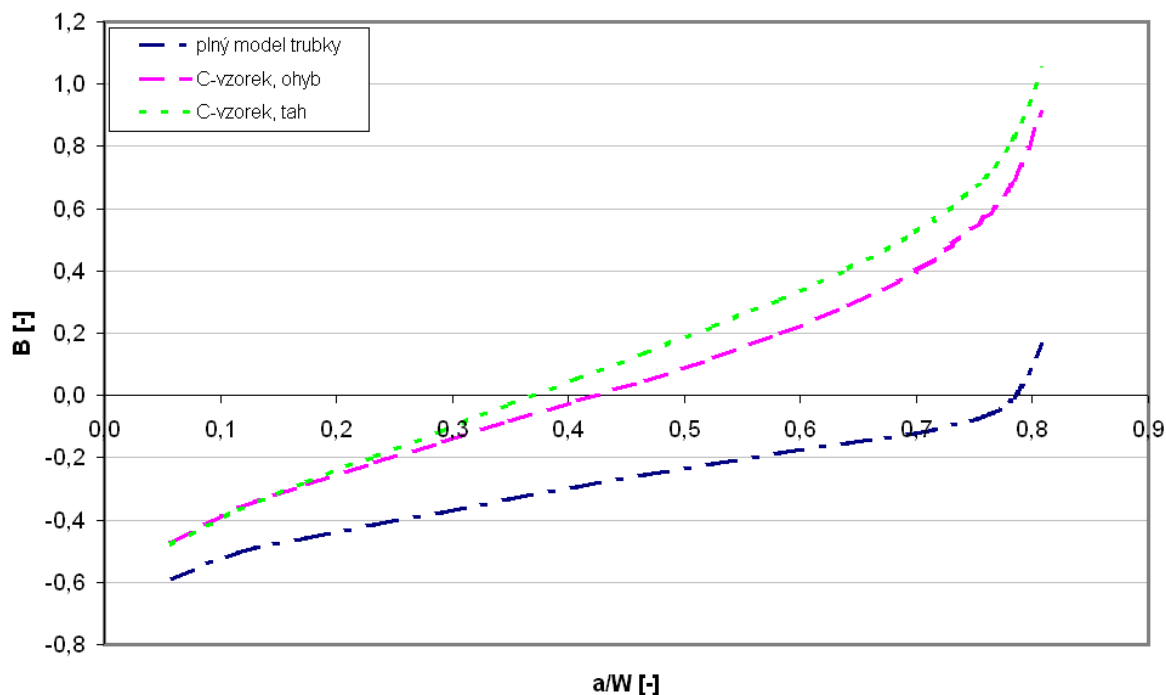
Obr. P7 Průběhy korekční funkce u ohybového vzorku třívrstvé trubky pro vnitřní trhlinu v základním materiálu pro různé teploty a pro homogenní případ



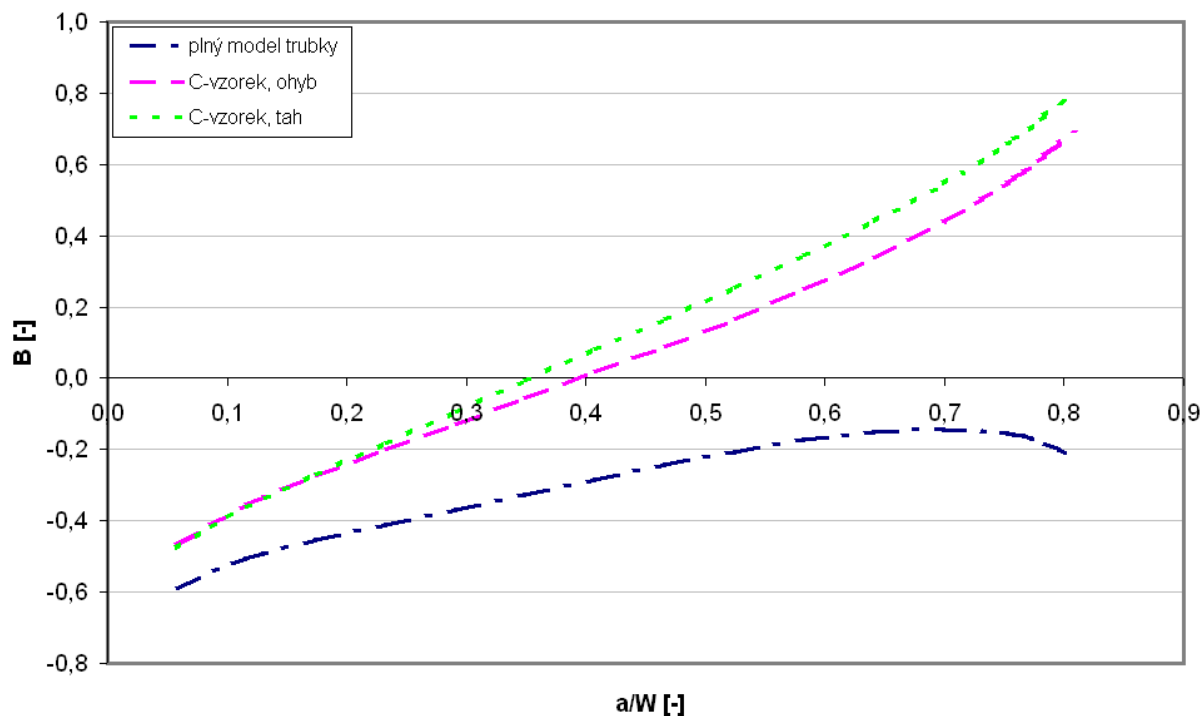
Obr. P8 Průběhy korekční funkce u tahového vzorku třívrstvé trubky pro vnitřní trhlinu v základním materiálu pro různé teploty a pro homogenní případ



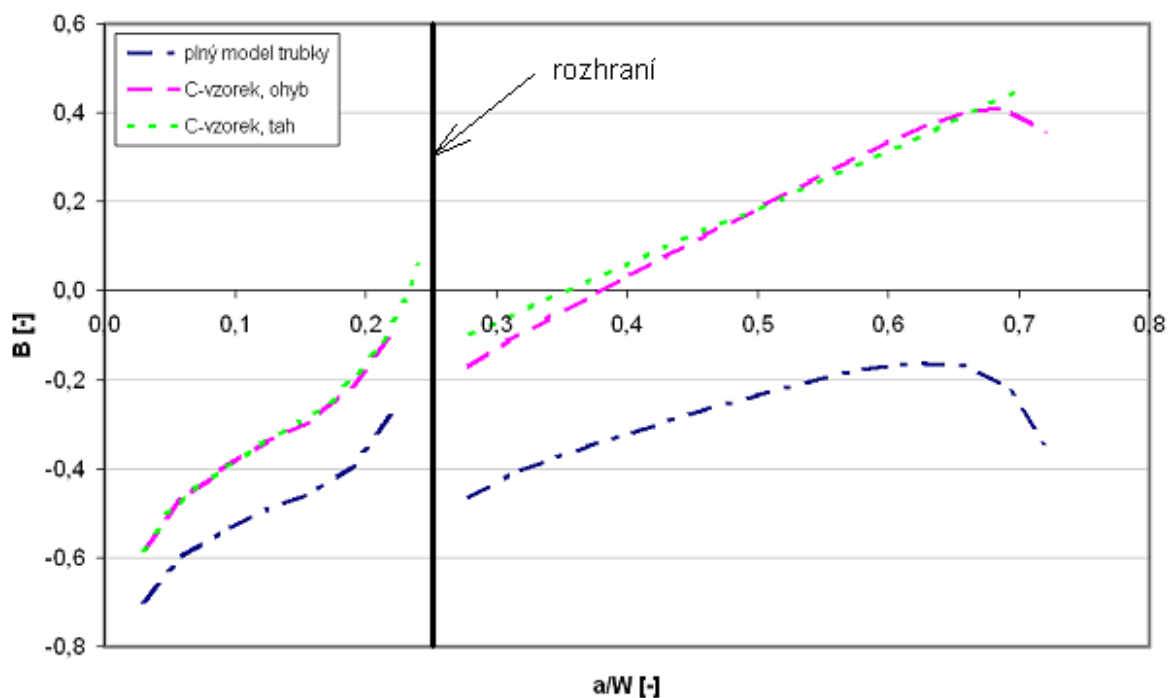
Obr. P9 Závislost parametru biaxiality pro dvouvrstvou trubku na délce vnitřní trhliny s vrcholem v základním materiálu při teplotě -20 °C pro tři typy úloh – plný model trubky zatížený vnitřním přetlakem, C-vzorek namáhaný tříbodovým ohybem, C-vzorek namáhaný tahem



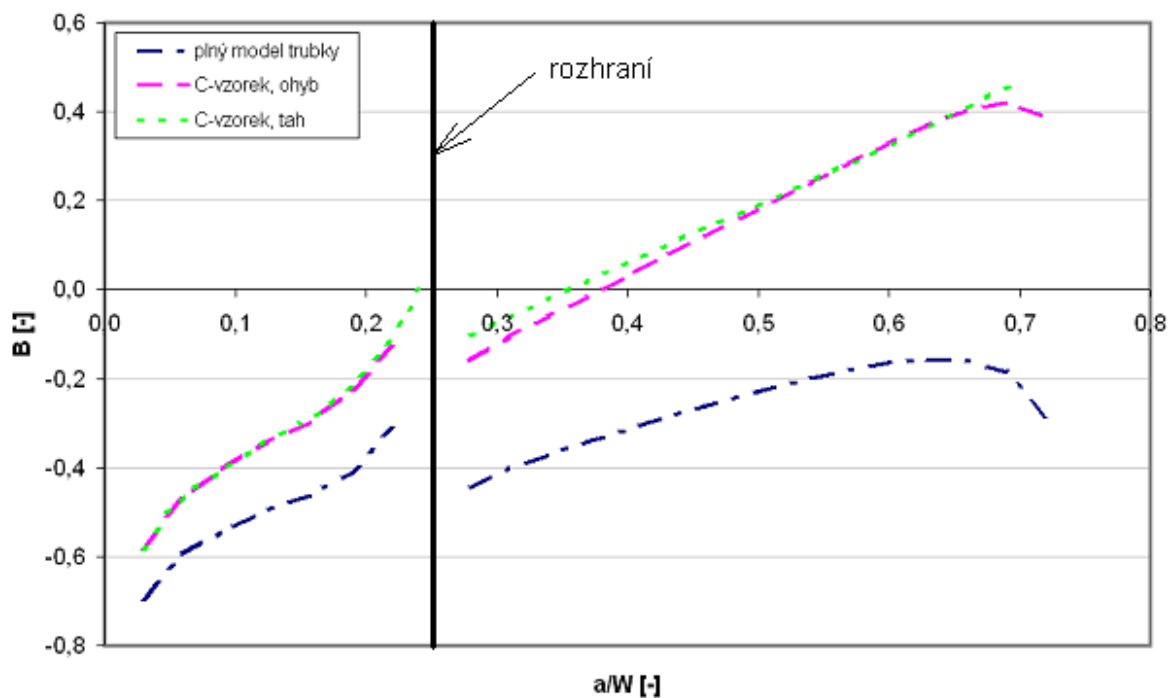
Obr. P10 Závislost parametru biaxiality pro dvouvrstvou trubku na délce vnitřní trhliny s vrcholem v základním materiálu při teplotě -60 °C pro tři typy úloh – plný model trubky zatížený vnitřním přetlakem, C-vzorek namáhaný tříbodovým ohybem, C-vzorek namáhaný tahem



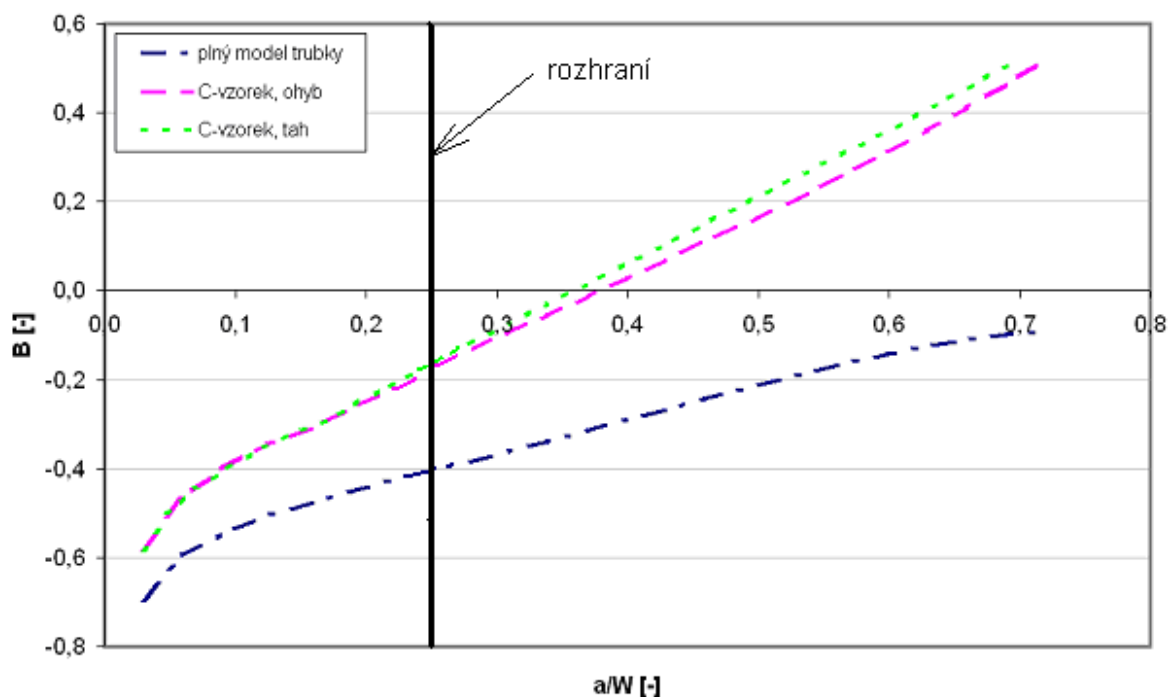
Obr. P11 Závislost parametru biaxiality pro dvouvrstvou trubku vyrobenou z homogenního materiálu (materiálu základní vrstvy) na délce vnitřní trhliny pro tři typy úloh – plný model trubky zatížený vnitřním přetlakem, C-vzorek namáhaný třibodovým ohybem, C-vzorek namáhaný tahem



Obr. P12 Závislost parametru biaxiality pro třívrstvou trubku na délce vnitřní trhliny s vrcholem ve vnitřní ochranné vrstvě a v základním materiálu při teplotě $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ pro tři typy úloh – plný model trubky zatížený vnitřním přetlakem, C-vzorek namáhaný třibodovým ohybem, C-vzorek namáhaný tahem



Obr. P13 Závislost parametru biaxiality pro třívrstvou trubku na délce vnitřní trhliny s vrcholem ve vnitřní ochranné vrstvě a v základním materiálu při teplotě $-60\text{ }^{\circ}\text{C}$ pro tři typy úloh – plný model trubky zatížený vnitřním přetlakem, C-vzorek namáhaný tříbodovým ohybem, C-vzorek namáhaný tahem



Obr. P14 Závislost parametru biaxiality pro třívrstvou trubku vyrobenou z homogenního materiálu (materiálu základní vrstvy) na délce vnitřní trhliny pro tři typy úloh – plný model trubky zatížený vnitřním přetlakem, C-vzorek namáhaný tříbodovým ohybem, C-vzorek namáhaný tahem

CURRICULUM VITAE

Jméno a příjmení: Ing. Lucie Šestáková

Datum narození: 11.10.1982

Národnost: česká

Rodinný stav: svobodná

Adresa: Jívová 10, pošta Dolany, 783 16

Telefon: +420777596124

E-mail: sestakova.lucie@seznam.cz



VZDĚLÁNÍ:

- 2006 – Fakulta strojního inženýrství VUT v Brně, Brno a Ústav fyziky materiálů Akademie věd ČR, v. v. i., Brno; obor Inženýrská mechanika - postgraduální studium (téma disertační práce: Hodnocení stability obecných koncentrátorů napětí ve vrstevnatých materiálech)
- 2001 – 2006 Fakulta strojního inženýrství VUT v Brně, Brno; obor Aplikovaná mechanika - pětileté magisterské studium zakončené získáním titulu Ing. (téma diplomové práce: Vliv povrchových trhlin na delaminaci povrchové vrstvy a substrátu)
- 1994 – 2001 Gymnázium ve Šternberku (Všeobecné vzdělání)

ODBORNÁ ČINNOST:

- 2009 – Vědecká pracovnice u firmy Materials Center Leoben na Institut für Struktur- und Funktionskeramik, Montanuniversität Leoben v Rakousku
- 2009 – „Junior researcher“ na rakouském projektu č. A7.4 s názvem “Mechanical reliability of LTCC components for automotive applications”
- 2009 Vyžádaná přednáška na Ústavu stavební mechaniky FAST VUT v Brně na téma „Praktické aplikace zobecněné lomové mechaniky“
- 2008 – 2009 Členka řešitelského týmu grantu GA AV ČR č. KJB200410803 s názvem: “Zobecnění lineární elastické lomové mechaniky na problémy šíření trhlin v nehomogenních materiálech”
- 2007 – 2009 Členka mezioborového týmu řešitelů doktorského projektu GA ČR č. 106/05/H008 a 106/09/H035 s názvem „Víceúrovňový design pokrokových materiálů“
- 2007 Řešitelka grantu Fondu vědy FSI č. BD1373005 s názvem: „Šíření trhlin ve vrstevnatých kompozitech“
- 2007 Absolventka „Kurzů základů vědecké práce“ ve dnech 12.-16. listopadu 2007
- 2006 – 2007 Vedoucí cvičení z předmětů Pružnost a pevnost I a Pružnost a pevnost II na Fakultě strojního inženýrství VUT v Brně

VĚDECKÁ OCENĚNÍ:

- 2006 Cena děkana Fakulty strojního inženýrství VUT v Brně
- 2006 Cena Nadace Preciosa