



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY
A BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND
BIOMECHANICS

MOŽNOSTI URČOVÁNÍ VYBRANÝCH LOMOVÝCH PARAMETRŮ V RÁMCI LELM

POSSIBILITIES OF ESTIMATION OF SELECTED FRACTURE PARAMETERS UNDER
CONDITIONS OF LEFM

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

PETR ZOUHAR

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

Ing. MARTIN ŠEVČÍK, Ph.D.

BRNO 2014

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky

Akademický rok: 2013/14

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Petr Zouhar

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Strojní inženýrství (2301R016)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Možnosti určování vybraných lomových parametrů v rámci LELM

v anglickém jazyce:

Possibilities of estimation of selected fracture parameters under conditions of LEFM

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Cílem bakalářské práce je popis více i méně používaných postupů pro určování vybraných lomových parametrů ve výpočtovém systému ANSYS a kvantifikace přesnosti vzhledem ke známému řešení.

Cíle bakalářské práce:

1. Seznámení se základy lineárně elastické lomové mechaniky (LELM)
2. Popis a literární rešerše postupů určování lomových parametrů
3. Kvantifikace přesnosti jednotlivých postupů
4. Diskuse dosažených výsledků
5. Závěr

Seznam odborné literatury:

Anderson, T.L.: Fracture Mechanics – Fundamentals and Applications, 2nd edition, CRC Press Inc, 1995.

ANSYS Release 13.0 Documentation.

Ševčík, M., Hutař, P., Zouhar, M., Náhlík, L.: Numerical estimation of the fatigue crack front shape for a specimen with finite thickness. International Journal of Fatigue 39, 75-80, 2012.


Staab, G.H.: Estimating singularity powers with finite elements. Computers & Structures 17 (1), 73-78, 1983.

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Martin Ševčík, Ph.D.


Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2013/14.

V Brně, dne 12.3.2014





prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
Ředitel ústavu



doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
Děkan

ABSTRAKT

Předkládaná bakalářská práce se zabývá možnostmi určování vybraných lomových parametrů v rámci lineárně elastické lomové mechaniky (LELM). Cílem této práce je kvantifikace přesnosti jednotlivých metod určování lomových parametrů ze známého pole napětí a přetvoření získaného pomocí numerických metod. K řešení práce je využita metoda konečných prvků. Práce, je rozdělena do dvou logických celků. První část práce tvoří rešeršní popis základů LELM a vybraných metod využívaných pro určování lomových parametrů, jmenovitě faktoru intenzity napětí, hnací síly trhliny a J-integrálu. V druhé části práce, věnované vlastnímu řešení bakalářské práce, je uveden detailní popis výpočtového modelu, citlivostní analýzy na hustotu MKP sítě a dosažené výsledky. Přesnost jednotlivých metod je vždy stanovována porovnáním se známou referenční hodnotou faktoru intenzity napětí. V závěru práce je diskutována a na praktické úloze ukázána použitelnost vybraných metod v trojdimenzionálním prostoru.

KLÍČOVÁ SLOVA

lomová mechanika, metoda hraniční vrstvy, trhlina, faktor intenzity napětí, metoda konečných prvků

ABSTRACT

The presented bachelor's thesis deals with possibilities of estimation of selected fracture parameters under conditions of linear elastic fracture mechanic (LEFM). The aim of this thesis is to quantify the accuracy of specific methods for the estimation of fracture parameters from a known stress and strain field obtained using numerical methods. Thesis is solved using finite element method. The work is divided into two logical parts. The first part of the thesis describes the basic concepts of LEFM and selected methods used for estimation of fracture parameters, namely the stress intensity factor, strain energy release rate and J-integral. A detailed description of the numerical model, a sensitivity analysis of the FEM mesh density and obtained results are described in the second part, focused on the solution of the problem. The accuracy of each method is expressed by comparing with a known reference value of stress intensity factor. The applicability of selected methods for estimation of the stress intensity factor is shown on a practical example of three-dimensional body containing a crack.

KEYWORDS

fracture mechanics, boundary layer method, crack, stress intensity factor, finite element method

Bibliografická citace

ZOUHAR, P. *Možnosti určování vybraných lomových parametrů v rámci LELM*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2014. 51 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Martin Ševčík, Ph.D..

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně, za použití uvedené literatury a pod odborným vedením pana Ing. Martina Ševčíka, Ph.D.

V Brně dne:.....

.....

Petr Zouhar

Poděkování

Touto cestou bych chtěl poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce panu Ing. Martinu Ševčíkovi, Ph.D. za příkladné vedení, cenné rady a ochotné poskytování konzultací, které mě vždy dokázaly nasměrovat správným směrem. Dále bych chtěl poděkovat svým rodičům i všem, kteří mě po dobu mého studia jakkoli podporovali.

Tato práce byla vytvořena ve spolupráci s Ústavem fyziky materiálů Akademie věd České republiky, v. v. i. a podpořena projektem Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy č. CZ.1.07/2.3.00/20.0214 s názvem „Rozvoj lidských zdrojů ve výzkumu fyzikálních a materiálových vlastností modelových, nově vyvíjených a inženýrsky aplikovaných materiálů“



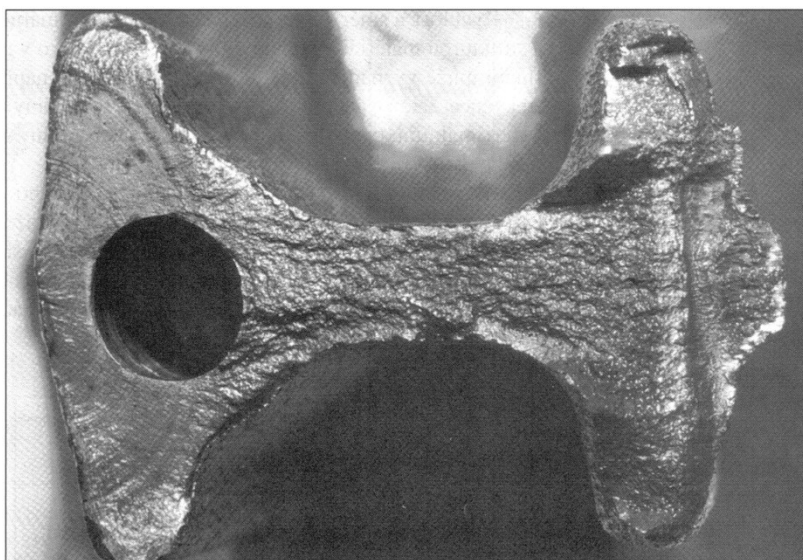
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obsah

1. Úvod.....	14
2. Seznámení se základy LELM	16
2.1 Podmínky platnosti LELM.....	16
2.2 Faktor intenzity napětí.....	16
2.2.1 Metody určování faktoru intenzity napětí	18
2.2.2 Určování faktoru intenzity napětí pomocí metody posunutých uzlových bodů	19
2.2.3 Určování faktoru intenzity napětí pomocí přímé metody [11].....	20
2.3 T-napětí	22
2.3.1 Určování T-napětí.....	22
2.4 Hnací síla trhliny G	23
2.4.1 Určování hnací síly trhliny G	24
2.5 J-integrál.....	24
2.5.1 Určování J-integrálu	25
2.6 Odhad zbytkové životnosti tělesa s trhlinou pomocí faktoru intenzity napětí	26
3. Formulace problému a cíle práce.....	28
4. Vlastní řešení bakalářské práce.....	29
4.1 Popis výpočtového modelu	29
4.1.1 Model geometrie a okrajové podmínky úlohy.....	29
4.1.2 Numerický model	31
4.2 Analýza přesnosti určování lomových parametrů.....	32
4.2.1 Analýza přesnosti určování faktoru intenzity napětí z J-integrálu	33
4.2.2 Analýza přesnosti určování faktoru intenzity napětí z definičních vztahů.....	34
4.2.3 Porovnání přesnosti metod pro určování faktoru intenzity napětí.....	35
4.3 Vliv Poissonova čísla na přesnost řešení jednotlivých metod	36
4.3.1 Vliv poissonova čísla na určování lomových parametrů na reálném CT, MT tělese	37
4.4 Analýza použitelnosti vybraných metod ve 3D	40
5. Závěr a zhodnocení výsledků	44
6. Seznam použitých zkratk a symbolů.....	46
7. Seznam obrázků.....	48
8. Seznam tabulek	49
9. Použitá literatura	50

1. Úvod

Inženýrské konstrukce obvykle obsahují konstrukční vruby nebo technologické defekty, které mohou vést k iniciaci trhliny. Tyto vady se mohou vyskytnout v materiálu již před provozem konstrukce např. nevhodnou technologií výroby. Typickým příkladem jsou svařované konstrukce a odlitky. V případě svařových spojů se jedná zejména o neprůvary a trhliny vzniklé po svařování v důsledku velké zbytkové napjatosti v materiálu. V případě odlitků jsou to hlavně dutiny a trhliny vznikající v průběhu chladnutí u velmi malých poloměrů zaoblení. Dále může dojít v inženýrských konstrukcích ke vzniku vad během jejich provozu. Jedná se nejčastěji o vznik trhliny únavovým procesem při cyklickém zatěžování, současném působení napětí a koroze tzv. koroze pod napětím, creepovým namáháním nebo o křehký lom tělesa. Pokud se tyto vady v konstrukcích objeví, může při provozu dojít k postupnému zvětšování těchto vad až do okamžiku, kdy takto vzniklá trhlina oslabí nosný průřez součásti natolik, že dojde ke křehkému lomu součásti. Ukázka lomové plochy únavové trhliny s patrným iniciačním místem, striacemi odpovídající šíření únavové trhliny a následným křehkým dolomením je na obrázku 1. Místo vzniku trhliny je v místě výronku po kování na jejím levém okraji.



Obr. 1. Lomová plocha únavového lomu kované ojnice [1]

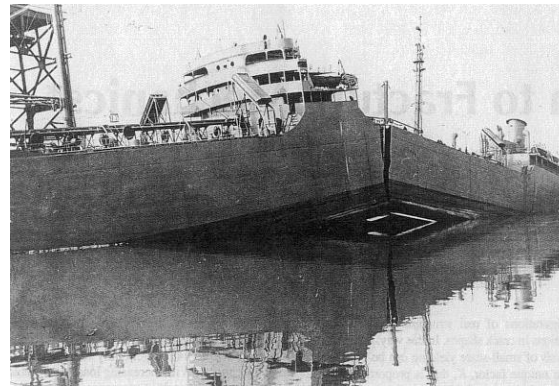
V dřívějších dobách se konstrukce často významně předimenzovávaly z důvodu snížení napětí a zvýšení životnosti. Někdy však nastal případ, kdy došlo k náhlému porušení konstrukce při několikanásobně menším zatížení, než bylo očekáváno. Příkladem může být praskání železničních náprav, kterými se zabýval již roku 1852 německý inženýr August Wöhler, viz obr. 2. Dále pak rozlamování lodí třídy Liberty, kdy z 2500 vyrobených lodí se 145 rozlomilo na dvě části a na 700 jich bylo postiženo vážnými závadami [2], viz obr. 3. I tyto katastrofy, které byly mnohdy provázeny ztrátami lidských životů, daly podnět ke zkoumání materiálů a konstrukcí se snahou predikovat chování trhlin. Tím došlo k vzniku a rozvoji nového vědního oboru - lomové mechaniky.

Za jednoho z prvních badatelů, který se lomovou mechanikou zabýval je považován English. Ten roku 1913 publikoval svoji práci, ve které zkoumal napěťové pole v okolí eliptického otvoru v nekonečně, lineárně elastické desce [3]. Na práci

Ingliške navázal letecký konstruktér Griffith. Ten se ve své práci z roku 1920 [4] zabýval popisem stability trhliny v křehkých materiálech pomocí energetické rozvahy. Dokázal, že k růstu trhliny dochází, když změna celkové potenciální energie tělesa zapříčiněná vznikem nových ploch trhliny je rovna změně práce potřebné k vytvoření nových ploch trhliny. Další, kdo pomohl k rozvoji lomové mechaniky, byl Westergaard. Ten odvodil popis pole napětí a posuvů v okolí vrcholu trhliny [5]. Díky jeho práci definoval Irwin [6] metodiku popisu pole napětí a posuvů pomocí jednoho parametru - faktoru intenzity napětí. Významnou zásluhu na rozvoji lomové mechaniky má i Williams [7], který popsal pole napětí v okolí trhliny pomocí nekonečného rozvoje. Jeho přístup je dodnes hojně používaný.



Obr. 2. Vykolejení vlaku v Rakousku v roce 1875 zapříčiněné únavovým lomem železničního kola [8]



Obr. 3. Rozlomení lodě třídy Liberty [9]

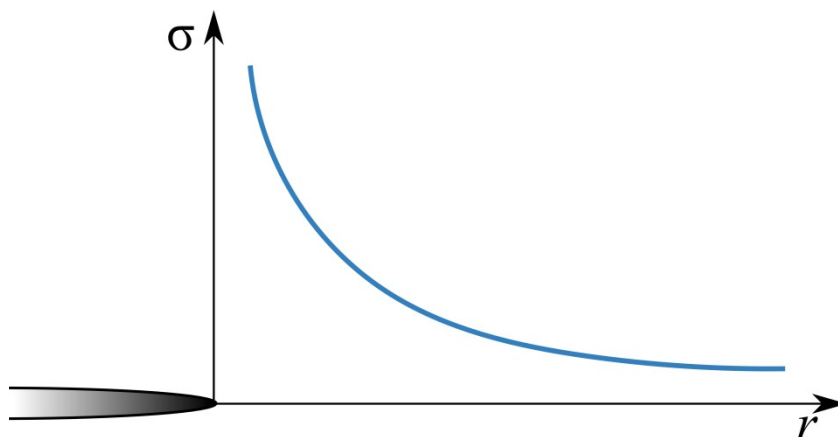
V případě, že při odhadu použijeme Williamsovu nekonečnou řadu a omezíme se pouze na první člen tohoto rozvoje a ostatní členy rozvoje zanedbáme, mluvíme o tzv. jednoparametrové (klasické) lomové mechanice. Tato koncepce používá pro popis napětí a přetvoření v okolí trhliny pouze jeden parametr. Zobecněním klasického, přístupu je dvouparametrová lomová mechanika. Ta pro popis pole napětí a posuvů v okolí vrcholu trhliny používá kromě prvního členu rozvoje popsaného Williamsem i další, konstantní člen tzv. T-napětí. Potom je tedy pole napětí a tím i lomové chování určeno dvěma parametry. Dále je lomová mechanika obvykle rozdělována na lineárně elastickou lomovou mechaniku (LELM) a na elasto-plastickou lomovou mechaniku (EPLM). Toto rozdělení je provedeno na základě velikosti plastické zóny v okolí vrcholu trhliny. Pokud je plastická zóna v okolí vrcholu trhliny malá ve srovnání s velikostí trhliny a tělesa mluvíme o LELM. Pokud již velikost plastické zóny není svými rozměry vůči délce trhliny a charakteristickému rozměru tělesa zanedbatelná, mluvíme o EPLM. V této práci budou veškeré analýzy prováděny za předpokladu platnosti lineárně elastické lomové mechaniky.

2. Seznámení se základy LELM

Lineárně elastická lomová mechanika se zabývá hodnocením stability těles, které obsahují trhlinu popřípadě defekt typu trhlina. Trhlina je silný koncentrátor napětí. LELM tedy popisuje, rozložení napětí a přetvoření v okolí vrcholu trhliny při daných okrajových podmínkách a daném namáhání. LELM je použitelná pouze pro takové zatížení, kdy materiál vykazuje lineárně elastické chování, které odpovídá Hookově zákonu.

2.1 Podmínky platnosti LELM

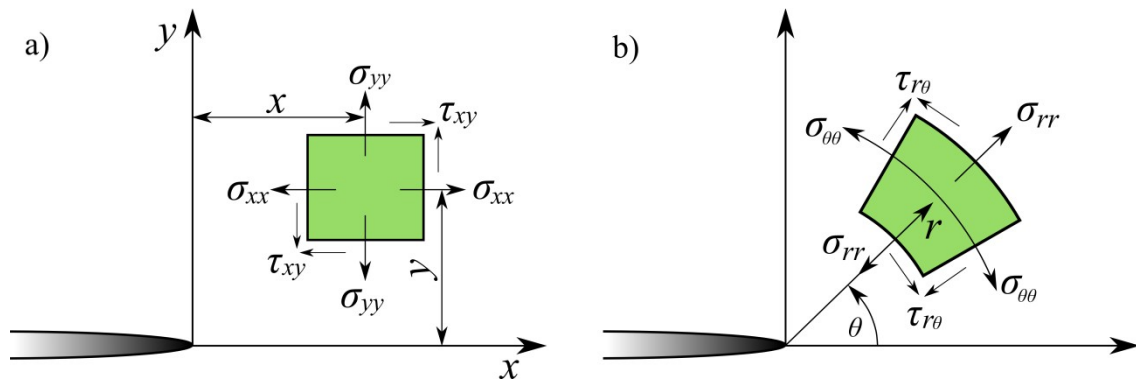
Jelikož jsou trhliny silnými koncentratory napětí, mělo by napětí ve vrcholu atomárně ostré trhliny teoreticky nabývat nekonečných hodnot, viz obr. 4. Tento stav však často neodpovídá skutečnosti. Vrchol skutečné trhliny totiž většinou není atomárně ostrý a také v něm obvykle dochází k určité plastické deformaci, vedoucí k redistribuci napětí. Čím je plasticky deformovaná zóna větší, tím méně je přesnější analýza napětí pomocí LELM. Pokud se však celá konstrukce chová lineárně elasticky a velikost plastické zóny v okolí vrcholu trhliny je ve srovnání s velikostí zkoumaného tělesa zanedbatelná, lze potom ve vrcholu trhliny tuto malou plastickou zónu rovněž zanedbat a použít postupy LELM.



Obr. 4. Průběh napětí v okolí vrcholu trhliny v lineárně elastickém materiálu

2.2 Faktor intenzity napětí

Rozložení napětí v tělese, které obsahuje trhlinu, se často popisuje pomocí funkce napětí ve tvaru nekonečné mocninné řady, kterou odvodil Williams [7]. Jednotlivé složky tenzoru napětí se obvykle vyjadřují v kartézském nebo polárním souřadnicovém systému. Počátek těchto systémů je vždy umístěn ve vrcholu trhliny, viz obr. 5.



Obr. 5. a) Kartézský souřadnicový systém; b) polární souřadnicový systém

Obecný zápis pole napětí v okolí vrcholu trhliny podle Williamse vyjádřený v polárních souřadnicích potom vypadá takto [7]:

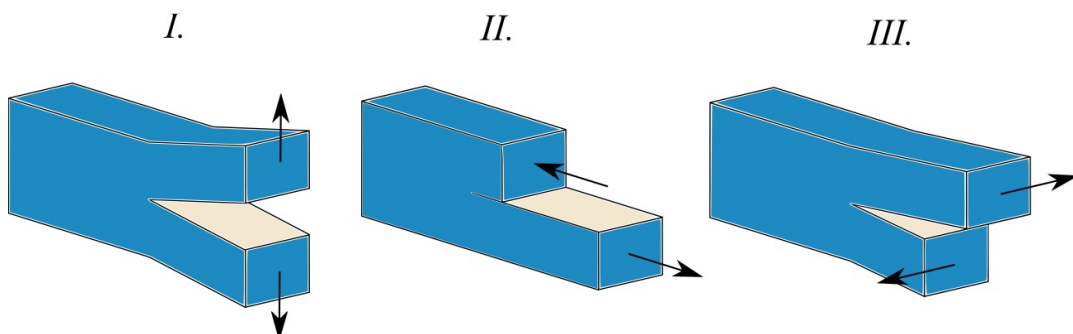
$$\sigma_{ij} = \frac{A_1}{\sqrt{r}} \cdot f_{ij}(\theta) + \sum_{k=2}^{\infty} A_k r^{\frac{k-2}{2}} g_{ij}^{(k)}(\theta), \quad (1)$$

kde σ_{ij} je tenzor napětí; r, θ – jsou polární souřadnice, A_1 je konstanta, a f_{ij}, g_{ij} jsou bezrozměrné tvarové funkce úhlu θ . Řešení pro jakoukoliv konkrétní geometrii obsahuje potom první člen, který se pro $r \rightarrow 0$ blíží k nekonečnu, zatímco ostatní členy zůstávají konečné, nebo se blíží k nule. Proto se v popisu napětí často omezujeme jen na první člen a mluvíme o takzvané jednoparametrové lomové mechanice. Konstantu A nahrazujeme faktorem intenzity napětí K zavedeným Irwinem [6] následovně:

$$K = A\sqrt{2\pi}, \quad (2)$$

Pokud zatížíme těleso s trhlinou, tak podle vzájemných pohybů povrchů líců trhliny rozlišujeme tři základní, vzájemně nezávislé typy deformování tělesa, takzvané módy zatížení [10]:

- **Mód I** – otevírací, napětí působí kolmo na rovinu trhliny (normální mód)
- **Mód II** – smykový, napětí působí rovnoběžně s rovinou trhliny a kolmo na čelo trhliny (smykový mód)
- **Mód III** – antirovinný smykový, napětí působí na rovinu trhliny i na čelo trhliny v kolmém směru (antirovinný mód)



Obr. 6. Módy zatěžování

Každému z daných módů zatížení, můžeme přiřadit vlastní faktor intenzity napětí. Ty se pak označují K_I , K_{II} , K_{III} odpovídající danému módu zatížení. Stejně tak i tvarové funkce se označují podle daných módů zatížení f_{ij}^I , f_{ij}^{II} , f_{ij}^{III} . Při uvažování pouze singulárního členu rozvoje (1) je pak možné psát složky tenzoru pro jednotlivé módy zatěžování v následujícím tvaru:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta), \quad (3a)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{II} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta), \quad (3b)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{III} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{III}(\theta), \quad (3c)$$

V obecně zatíženém tělese s trhlinou lze pak vyjádřit celkové napětí pomocí principu superpozice jako součet příspěvků jednotlivých zatěžovacích módů takto [11]:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^{II} + \sigma_{ij}^{III}, \quad (4)$$

Díky svým vlastnostem je faktor intenzity napětí jedním z nejpoužívanějších lomových parametrů popisující chování tělesa s trhlinou. Vyjadřuje stav napjatosti v okolí vrcholu trhliny, ale zároveň jej můžeme korelovat s experimentálně změřenými rychlostmi šíření (únavové) trhliny. V takových případech nám dobře slouží i při určování dalšího chování trhliny jako je např. určování zbytkové životnosti tělesa s trhlinou.

2.2.1 Metody určování faktoru intenzity napětí

Určování lomových parametrů je možné provádět analyticky, experimentálně, nebo numericky. Analytické řešení lze provést jen v některých případech a používá se pro jednodušší úlohy, často rovinné. V praxi se může analytické řešení použít například k ověření výsledku laboratorních zkoušek na zkušebních tělesech. Pro jednoduchá zkušební tělesa je možné určit faktor intenzity napětí pomocí obr. 7. a následujícího vztahu [11]:

$$K_I = \frac{P}{B\sqrt{W}} f\left(\frac{a}{W}\right), \quad (5)$$

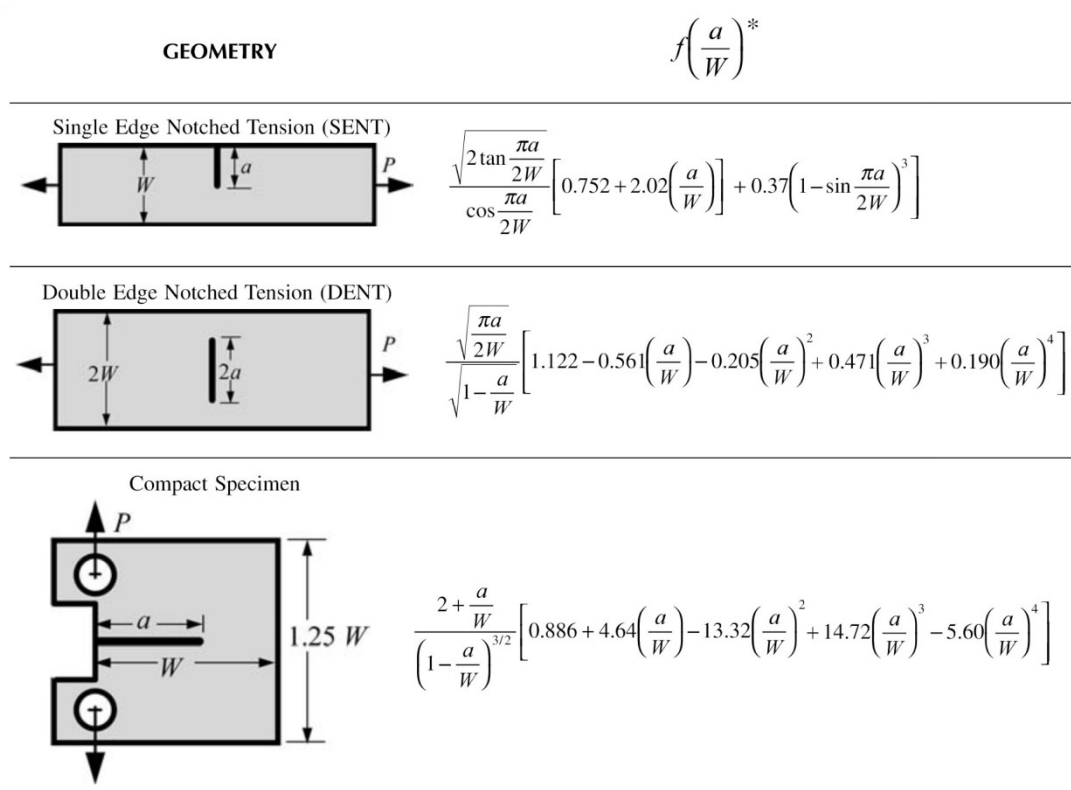
kde P je zatěžovací síla, B je tloušťka vzorku, W šířka vzorku a $f(a/w)$ je známá tvarová funkce. Tato funkce charakterizuje geometrii tělesa a je proto jasné, že ji lze odvodit pouze pro jednoduché geometrie. Příklady geometrií a tvarových funkcí používaných laboratorních prvků jsou uvedeny na obr. 7. Je možné také využít tzv. handbucky, které obsahují množství základních geometrií a odpovídající tvarové funkce, např. [12,13]

Experimentální metody jsou založeny na měření charakteristických hodnot během zatěžování zkušebních vzorků v laboratořích, např. měření poddajnosti materiálu a následného určení hnací síly trhliny, nebo rozevření líců trhliny.

U složitějších úloh lze určit faktor intenzity napětí pomocí numerických metod, např. pomocí metody konečných prvků (MKP). V současnosti existuje celá řada metod pro

odhad faktoru intenzity napětí pomocí MKP. Nejčastěji jsou však používány metody, jejichž algoritmus odhadu je již zahrnut v některém z komerčních MKP systémů, např. ABAQUS, ANSYS. Mezi tyto metody patří odhad pomocí speciálních trhlinových prvků s posunutými uzlovými body, J-integrálu atd. Další metody si už musí výpočtář naprogramovat sám. Jsou to např. přímá metoda určování faktoru intenzity napětí, T-napětí, hnací síly trhliny apod.

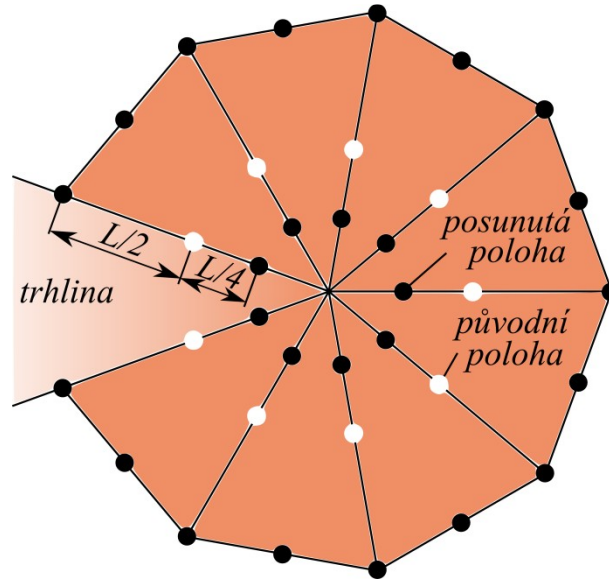
Při použití metody konečných prvků je potřeba zajistit aby řešení bylo dostatečně přesné a nebylo závislé na hustotě sítě. V praxi proto musíme vždy provést citlivostní analýzu hustoty sítě MKP prvků, protože některé z metod vyžadují pro přesný odhad lomového parametru velmi jemnou síť. V neposlední řadě je nutné správně stanovit charakteristický interval pro některé metody, např. přímá metoda určování faktoru intenzity napětí atd. Tento interval je třeba volit co nejbližší vrcholu trhliny, protože je zde nejpřesnější pole rozložení posuvů a deformace. Avšak prvky v těsné blízkosti vrcholu trhliny jsou značně ovlivněny numerickou chybou. Ukazuje se tedy, že pro správný odhad lomových parametrů je nutná jistá zkušenost výpočtáře.



Obr. 7. Příklady geometrií a tvarových funkcí zkušebních vzorků [11]

2.2.2 Určování faktoru intenzity napětí pomocí metody posunutých uzlových bodů

Jedná se o metodu často implementovanou v MKP softwarech. Spočívá ve vytvoření speciálních trhlinových prvků v okolí čela trhliny, jejichž středové uzlové body jsou posunuty do $\frac{1}{4}$ délky prvku, čímž modelují singularitu $r^{-1/2}$.



Obr. 8. Ukázka speciálních trhlinových prvků

Faktor intenzity napětí se pak určuje pomocí posuvů uzlových bodů u_i , v_i na lících trhliny z následujících vztahů [14]:

$$K_I = \frac{E}{3(1+\nu)(1+\kappa)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \left[4(v_2 - v_4) - \frac{v_3 - v_5}{2} \right], \quad (6)$$

$$K_{II} = \frac{E}{3(1+\nu)(1+\kappa)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \left[4(u_2 - u_4) - \frac{u_3 - u_5}{2} \right], \quad (7)$$

kde ν je Poissonovo číslo a parametr κ je definován následovně:

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{pro rovinnou napjatost} \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{pro rovinnou deformaci} \end{cases} \quad (8)$$

Posunutí uzlových bodů se ve výpočetním systému ANSYS realizuje pomocí příkazu KSCON, výpočet faktoru intenzity napětí je obsažen v příkazu KCALC [14].

Výhoda této metody spočívá ve snadném určení jednotlivých faktorů intenzity napětí pro kombinované namáhání. Nevýhoda metody je nutnost určení charakteru napjatosti při trojrozměrných úlohách.

2.2.3 Určování faktoru intenzity napětí pomocí přímé metody [11]

Přímá metoda patří mezi časté způsoby určení faktoru intenzity napětí. K jeho určení je využito vztahu pro jednoparametrový popis pole napětí v okolí vrcholu trhliny v polárních souřadnicích dle vztahu:

$$\sigma_{rr}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[\frac{5}{4} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right], \quad (9a)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[\frac{3}{4} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right], \quad (9b)$$

$$\sigma_{r\theta}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[\frac{1}{4} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right], \quad (9c)$$

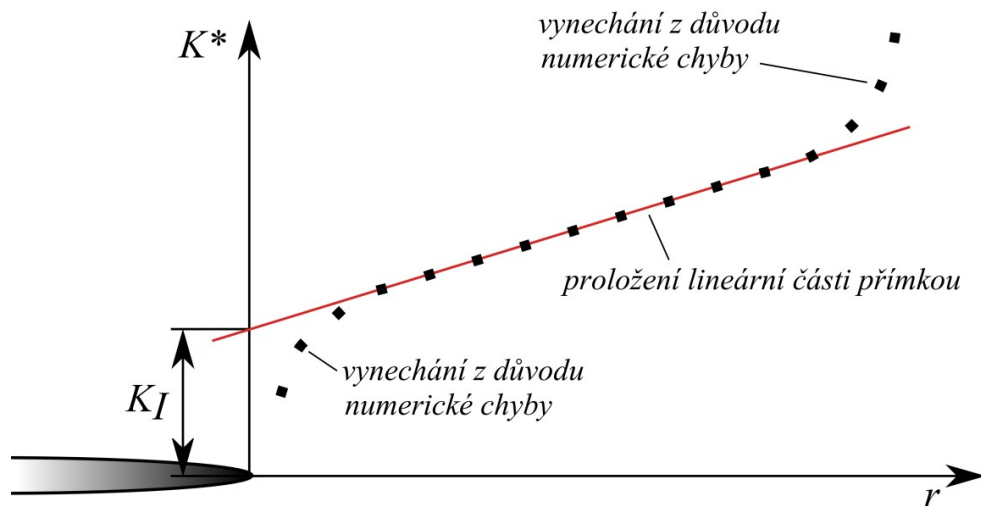
Pokud používáme souřadnicové systémy podle obr. 5, můžeme označit složku napětí σ_{yy} resp. $\sigma_{\theta\theta}$ (pro $\theta = 0$) jako otevírací napětí a můžeme dále psát:

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{K_I^*}{\sqrt{2\pi r}}, \quad (10)$$

a dále pomocí matematické úpravy můžeme psát:

$$K_I^*(r) = \sigma_{\theta\theta}(r) \sqrt{2\pi r}, \quad (11)$$

Pomocí tohoto vztahu lze určit faktor intenzity napětí tak, že do grafu vyneseme závislost K_I^* v závislosti na vzdálenosti r od vrcholu trhliny. Lineární část závislosti $K_I^*(r)$ proložíme přímkou s tím, že vynecháme hodnoty v těsné blízkosti vrcholu trhliny a hodnoty ve velké vzdálenosti od vrcholu trhliny. Ty jsou zatíženy velkou numerickou chybou, případně ovlivněny vyššími členy Williamsova rozvoje (1). Výsledná hodnota faktoru intenzity napětí je část, kterou vytíná přímka na svislé ose grafu.



Obr. 9. Ukázka odhadu K-faktoru pomocí přímé metody

Výhoda této metody, jedná-li se o její napěťovou variantu, spočívá v tom, že nepotřebujeme znát charakter napjatosti (rovinná napjatost/deformace). Je ovšem náročná na tvorbu MKP sítě, protože zejména v okolí trhliny je potřeba velké hustoty sítě k zaručení přesnosti odhadu. To může vést k velkým nárokům na výpočetní výkon zejména u 3D úloh. Další nevýhoda spočívá v tom, že je potřeba stanovit vhodný interval k extrapolaci dat, to znamená maximální a minimální vzdálenost od vrcholu trhliny. To vyžaduje jistou zkušenost výpočtáře. Další nevýhoda je, že tato metoda většinou není obsažena v komerčních výpočetních systémech a výpočtář si ji tedy musí

naprogramovat sám. Přímých metod určování faktoru intenzity napětí z posuvů a napětí existuje celá řada. Přehled možných metod je uveden v tabulce 1.

Tabulka 1. Přehled možných přímých metod pro I. mód namáhání [15]

	θ	Mód I
u_x	0	$K_I^* = \frac{2\mu}{\kappa - 1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} u_x$
u_y	π	$K_I^* = \frac{2\mu}{\kappa + 1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} u_y$
σ_{xx}	0	$K_I^* = \sqrt{2\pi r} \sigma_{xx}$
σ_{yy}	0	$K_I^* = \sqrt{2\pi r} \sigma_{yy}$

kde μ , je modul pružnosti v krutu, κ je určena dle rovnice (8).

2.3 T-napětí

Pro přesnější popis napjatosti v okolí čela trhliny je možné použít koncepcí dvouparametrové lomové mechaniky. Ukazuje se, že pomocí T-napětí můžeme charakterizovat tzv. constraint, neboli stísnění před čelem trhliny. Existují rovněž teorie o vlivu T-napětí na prahové hodnoty faktoru intenzity napětí a na rychlost šíření únavové trhliny [16]. Tyto fenomény lze studovat s pomocí Williamsova rozvoje, kde pro popis tělesa použijeme první dva členy tohoto rozvoje a ostatní zanedbáme. Pole napětí pak popisuje první singulární člen Williamsova rozvoje se singularitou $r^{-1/2}$ a druhý, konstantní člen, T-napětí. To charakterizuje vliv geometrie tělesa a úroveň dosažené deformace na tahové napětí působící na lince trhliny, a to jako důsledek různého stupně triaxiality napětí [2]. Pole napětí pak lze vyjádřit následovně [11]:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \right) \cdot f_{ij}(\theta) + T \delta_{li} \delta_{lj}, \quad (12)$$

kde T je T-napětí a δ_{ij} je Kroneckerovo delta. T-napětí je tedy napětí působící ve směru osy x a může nabývat kladných i záporných hodnot a tím zvyšovat nebo snižovat úroveň triaxiality v okolí vrcholu trhliny a určovat stabilitu směru šíření trhliny.

2.3.1 Určování T-napětí

Pro odhad T-napětí existuje množství metod. Poměrně často se používá přímé metody určování T-napětí z posuvů nebo napětí před/za vrcholem trhliny. Tyto metody jsou založeny na principu porovnávání numerických řešení (např. z MKP) s řešeními

z analytických vztahů, odvozených pomocí Williamsova rozvoje. Nejpoužívanější postup je pomocí porovnání složek napětí před čelem trhliny ($\theta = 0$). Pokud použijeme vztah pro popis pole napětí v ose x podle rovnice (4) a odečteme od něj složku napětí v ose y a získané hodnoty extrapolujeme do vzdálenosti od vrcholu trhliny, získáme hledanou hodnotu T-napětí. Popsaná metoda je vyjádřena rovnicí (13) [17].

$$T = \sigma_{xx} - \sigma_{yy}; \quad (13)$$

Přehled parametrů vhodných pro určování T-napětí pomocí přímé metody je uveden v tabulce 2.

Tabulka 2. Přehled možných metod určování T-napětí [11], [15]

T-napětí		
$\sigma_{xx,yy}$	0	$T^* = \sigma_{xx} - \sigma_{yy}$
σ_{xx}	π	$T^* = \sigma_{xx}$
u_x	0	$T^* = \frac{2(1+\nu)\mu}{r(1-\nu^2)} u_x$
u_y	$\pi/2$	$T^* = -\frac{2(1+\nu)\mu}{r(\nu-\nu^2)} u_y$

kde ν je Poissonovo číslo a μ je modul pružnosti v krutu.

2.4 Hnací síla trhliny G

Hnací síla trhliny je energie, která je nutná pro vznik jednotkového povrchu trhliny. Máme-li zatížené těleso bez trhliny, můžeme jeho celkovou potenciální energii Π_0 vyjádřit následovně:

$$\Pi_0 = U_0 + L \quad (14)$$

kde U_0 je energie napjatosti tělesa bez trhliny a L je potenciální energie vnějších sil; $L < 0$. Dojde-li ke vzniku trhliny, dojde tím i ke vzniku nových lomových povrchů. Dále dochází také k lokální plastifikaci oblasti kolem čela trhliny a k lokálnímu ohřevu tělesa [2]. Aby tyto procesy vznikly, je zapotřebí jisté disipační energie. Tedy energie potřebné k rozptýlení energie nebo přeměně části energie v jinou atd. Podle 1. zákona termodynamiky (zákon o zachování energie) je celková energie v termodynamické soustavě a v jejím okolí stálá. Při přechodu z nerovnovážného stavu do stavu rovnovážného tedy nedochází ke změně celkové energie. Celková potenciální energie tělesa s trhlinou Π se potom dá vyjádřit vztahem (15):

$$\Pi = \Pi_0 + U_T \quad (15)$$

kde U_T vyjadřuje změnu energie napjatosti tělesa v důsledku vzniku trhliny. Hnací sílu trhliny G můžeme tedy odvodit jako energii nutnou pro vznik nového povrchu takto:

$$G = -\frac{d\Pi}{dS} = -\frac{d\Pi}{da} \cdot \frac{1}{B} = \frac{dU}{da} \cdot \frac{1}{B} \quad (16)$$

kde dS vyjadřuje přírůstek plochy (vznik nové plochy), da změnu délky trhliny a B tloušťku zkoumaného tělesa. V rámci platnosti LELM existují jednoznačné vztahy mezi faktorem intenzity napětí K a hnací silou trhliny G . Lze tedy psát:

$$G = \frac{K^2}{E'} \quad \begin{array}{l} \text{kde } E' \text{ je pro rovinnou napjatost rovno: } E' = E \\ \text{kde } E' \text{ je pro rovinnou deformaci rovno: } E' = \frac{E}{1-\nu^2} \end{array} \quad (17)$$

kde E je modul pružnosti a ν je Poissonovo číslo.

2.4.1 Určování hnací síly trhliny G

K určení faktoru intenzity napětí z hnací síly trhliny se používá vztah (17). Hnací síla trhliny se většinou určuje numericky, např. pomocí metody dvojího výpočtu [11]. Principem metody je provedení dvou výpočtů energie napjatosti. Při druhém výpočtu mírně zvětšíme délku trhliny, nejčastěji o jeden element konečno-prvkové sítě, při stejných okrajových podmínkách jako u prvního výpočtu. Hnací síla trhliny je pak dána vztahem:

$$G \approx \frac{[U(a) - U(a + da)]}{da \cdot B} \quad (18)$$

Hledaný faktor intenzity napětí K se poté vyjádří za pomoci vztahu (17) následovně:

$$K = \sqrt{G \cdot E'} \quad (19)$$

kde E' určíme podle charakteru napjatosti z rovnice (17). Výhoda této metody je v tom, že se jedná o energetickou metodu. Dosahujeme tedy velmi přesných výsledků i při poměrně hrubé síti. Nevýhoda je v tom, že musíme provést dva výpočty, což zvyšuje časovou náročnost na přípravu modelu.

2.5 J-integrál

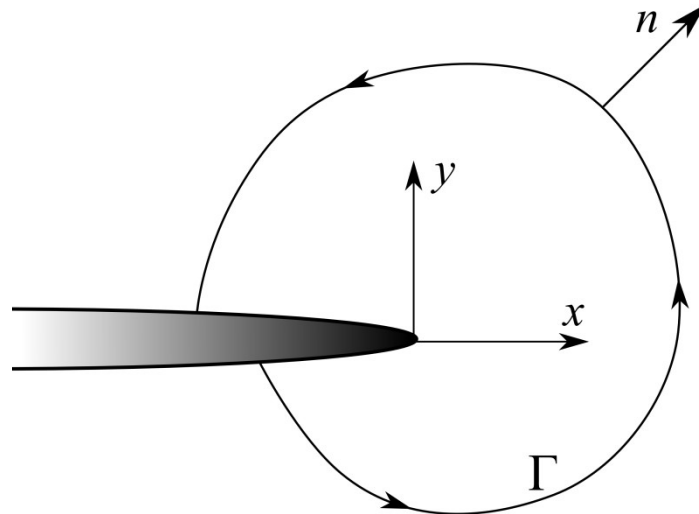
J-integrál, je křivkový integrál nezávislý na integrační cestě. J-integrál je zobecněním hnací síly trhliny a umožňuje použití i v případech plastické deformace většího rozsahu. Lze jej vyjádřit ve tvaru [18]:

$$J = \oint_{\Gamma} (w dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds) \quad (20)$$

kde Γ je integrační cesta (uzavřená křivka), w je hustota deformační energie, ds je element integrační cesty Γ , u_i jsou složky vektoru posuvů a T_i je vektor povrchových sil vyjádřen:

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \quad (21)$$

kde σ_{ij} jsou složky tenzoru napětí a n_j jsou složky vektoru normály integrační křivky Γ .



Obr. 10. Souřadnicový systém a křivka Γ použité pro definici J-integrálu

Integrační křivku volíme tak, aby procházela pouze elasticky deformovanými oblastmi mimo plastickou zónu. V lineárně elastickém případě je J-integrál roven hnací síle trhliny G . Lze jej tedy použít stejně jako G k odhadu faktoru intenzity napětí. Bylo odvozeno, že J-integrál charakterizuje napětí a deformaci v okolí trhliny v nelineárních materiálech. J-integrál lze tedy v elasto-plastické lomové mechanice použít jako parametr popisující chování trhliny v silně zplastizované oblasti. Výpočet J-integrálu je také obsažen ve výpočetním systému ANSYS, kde je integrován v příkazu CINT [14].

2.5.1 Určování J-integrálu

Určení faktoru intenzity napětí pomocí J-integrálu se často provádí podobně jako v případě hnací síly trhliny pomocí numerických metod, přičemž tato metoda bývá většinou obsažena v komerčních výpočetních MKP systémech. Pro odstranění numerické chyby vzniklé v důsledku velkého gradientu napětí se výpočet většinou provádí pro více integračních cest a výsledek se určí jako aritmetický průměr ze všech hodnot. V lineárně elastickém případě je hodnota J-integrálu rovna hnací síle trhliny G . Z toho důvodu lze jednoduše vyjádřit z J-integrálu faktor intenzity napětí pomocí rovnice (19) následovně:

$$K = \sqrt{J \cdot E'} \quad (22)$$

Výhoda této metody podobně jako v předchozím případě spočívá ve velmi přesném řešení při relativně hrubé MKP síti. Nevýhoda spočívá v tom, že pro určení faktoru intenzity napětí potřebujeme znát charakter napjatosti (rovinná napjatost – rovinná deformace).

2.6 Odhad zbytkové životnosti tělesa s trhlinou pomocí faktoru intenzity napětí

Pokud těleso obsahuje únavovou trhlinu, je možné pomocí postupů lomové mechaniky odhadnout následné chování trhliny a tedy predikovat zbytkovou životnost součásti, např. počet cyklů do lomu. Rychlost šíření trhliny je závislá na mnoha faktorech, např. délka trhliny, velikost rozkmitu a amplitudy zatížení, geometrie tělesa, únavové vlastnosti materiálu, provozní podmínky apod. Veličinou, která zahrnuje výše popsané vlivy je např. rozkmit faktoru intenzity napětí ΔK_I , což je rozdíl mezi maximální a minimální hodnotou faktoru intenzity napětí během jednoho zátěžného cyklu. Pokud tedy sestrojíme závislost rychlosti šíření trhliny (přírůstek trhliny za určitý počet cyklů) na rozkmitu faktoru intenzity napětí v log-log souřadnicích, můžeme ji rozdělit na tři oblasti, viz obr. 11.

V první oblasti je rychlost šíření velmi malá. Křivka se blíží k takzvané prahové hodnotě ΔK_{th} . Je-li zatížení tělesa s trhlinou natolik nízké, že faktor intenzity napětí pro danou trhlinu nedosahuje prahové hodnoty K_{th} , lze říci, že trhlina nebude dále růst. V druhé oblasti lze nalézt lineární závislost mezi rychlostí šíření trhliny a faktorem intenzity napětí. Tuto závislost je možné popsat pomocí tzv. Parisova-Erdoganova zákona [19]:

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_I)^m \quad (25)$$

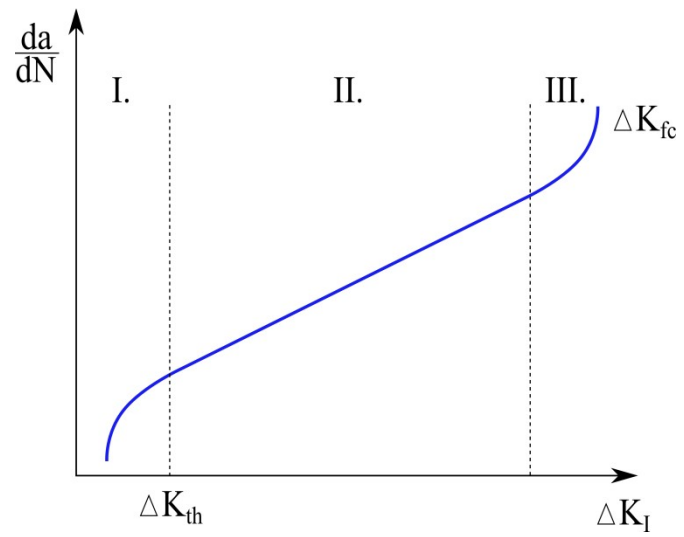
kde C , m jsou materiálové konstanty konkrétního materiálu.

Ve třetí oblasti je rychlost šíření trhliny velice vysoká, blíží se kritické hodnotě faktoru intenzity napětí, kterou v únavě nazýváme únavová lomová houževnatost K_{fc} . V takovém případě zbývá do dolomení tělesa několik posledních cyklů.

Samotný odhad zbytkové životnosti tělesa s trhlinou vychází ze vztahu (25), který po úpravě můžeme psát následovně [20]:

$$N = \int_{a_0}^{a_{krit}} \frac{da}{C(\Delta K)^m} \quad (26)$$

kde a_0 je počáteční délka trhliny, a_{krit} je kritická délka trhliny v okamžiku lomu a N je počet cyklů do lomu.



Obr. 11. Závislost rychlosti šíření trhliny na rozkmitu faktoru intenzity napětí

3. Formulace problému a cíle práce

V současnosti se čím dál více začíná prosazovat trend navrhování inženýrských konstrukcí s přípustným poškozením [1]. Vychází se z předpokladu, že konstrukce obsahuje vady a trhliny ještě před zahájením provozu nebo že vzniklé trhliny mohou růst během provozu. Tento přístup tedy vedl k tomu, že se součásti s trhlinou automaticky nevyřazují hned z provozu, ale trhlina je sledována a součást je vyřazena těsně předtím než trhlina dosáhne své kritické velikosti. Předpověď chování trhlin tedy hraje velkou roli zejména tam, kde je poruchou konstrukce ohrožen život a zdraví lidí. V takových případech je nutné posoudit životnost konstrukce co nejpřesněji, k čemuž nám slouží lomová mechanika.

V minulosti, kdy nebyly výpočetní systémy na takové úrovni jako dnes, se komplexní trojdimenzionální úlohy často zjednodušovaly na dvojdimenzionální, s předpokladem platnosti rovinné napjatosti nebo rovinné deformace. Tato zjednodušení byla často opodstatněná a obvykle vedla k rychlým a konzervativním výsledkům. V současné době je však trendem zpřesňování numerických modelů a s tím spojené modelování těles konečných rozměrů obsahující obecně zakřivené trhliny. Je však otázkou zdali a s jakou přesností se dají metody určování lomových parametrů u 2D úloh používat také pro výpočty v trojdimenzionálním prostoru. Z výše popsaných důvodů byla zpracována tato bakalářská práce, která se zabývá především zhodnocením přesnosti jednotlivých metod určování faktoru intenzity napětí, hnací síly trhliny a J -integrálu. Za tímto účelem bude nutné splnit následující dílčí cíle:

- vytvořit vhodný výpočtový model tělesa s trhlinou, na němž bude možné definovat zatížení libovolnou kombinací jednotlivých členů Williamsova rozvoje
- provést citlivostní analýzu hustoty sítě MKP prvků pro vybrané metody určování lomových parametrů
- studovat vliv Poissonova čísla na přesnost jednotlivých metod určování lomových parametrů
- posoudit přesnost určování lomových parametrů z posuvů, napětí a energetických metod a vybrat vhodné metody pro použití u trojdimenzionálních úloh
- na obecném trojdimenzionálním tělese otestovat přesnost a vhodnost použití vybraných metod určování lomových parametrů

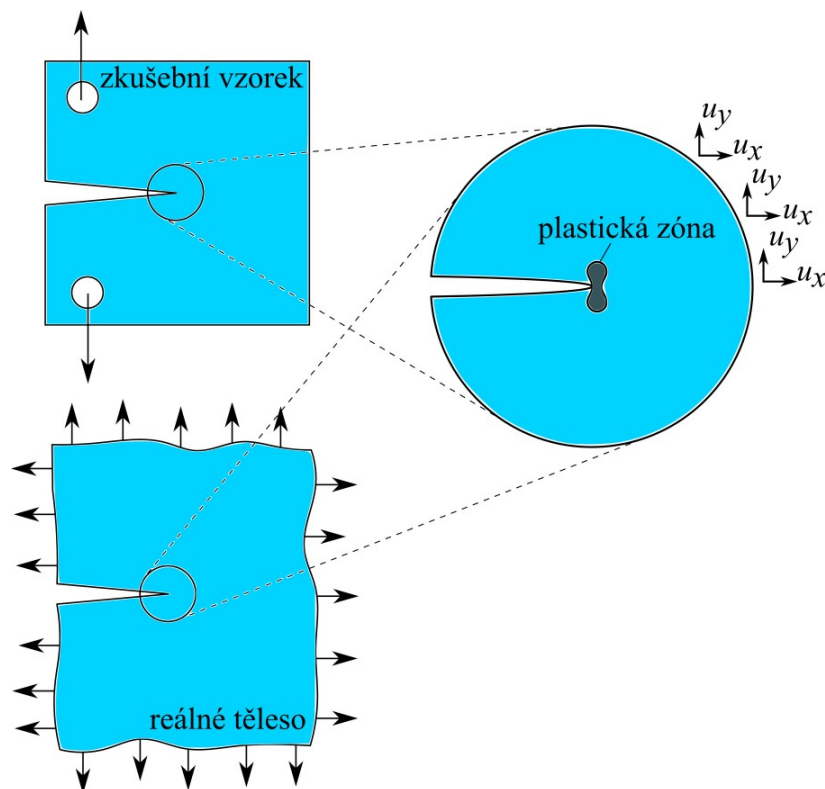
4. Vlastní řešení bakalářské práce

4.1 Popis výpočtového modelu

Při výskytu trhliny v obecném tělese je mnohdy problematické určit další chování trhliny. Je to často způsobováno složitým tvarem součásti či nadměrnými velikostmi kde by bylo neekonomické provádět zkoušky na takovýchto tělesech. Vydeme-li z předpokladu, že faktor intenzity napětí popřípadě T-napětí jsou dostatečné parametry pro popsání rozložení napětí a deformací v okolí vrcholu trhliny, lze ze zkoumaného tělesa vyjmout podoblast a okraj této podoblasti opatřit vhodnými okrajovými podmínkami (obr. 12). Tyto okrajové podmínky jsou definované pomocí základních vztahů lomové mechaniky. S jejich pomocí lze pro známou hodnotu faktoru intenzity napětí nebo T-napětí určit odpovídající velikost posuvů nebo napětí v určité vzdálenosti od vrcholu trhliny, např. pomocí Williamsova rozvoje. Napjatost v okolí vrcholu trhliny vytvořeného modelu však musí být za předpokladů LELM stejná jako v reálném tělese s trhlinou, které je charakterizované stejným faktorem intenzity napětí popřípadě T-napětím.

Vyjmutí podoblasti ze zkoumaného tělesa a opatření okrajů této podoblasti okrajovými podmínkami pomocí singulárního členu Williamsova rozvoje se nazývá metoda hraniční vrstvy (BLM) [13]. Při uvažování singulárního i konstantního (T-napětí) členu mluvíme o tzv. modifikované metodě hraniční vrstvy (MBLM). Pomocí BLM popřípadě MBLM lze tedy ve vyjmuté podoblasti vyvolat takové rozložení napětí a posuvů, které odpovídá jednotlivým členům Williamsova rozvoje a tím simulovat napjatost v okolí vrcholu trhliny v reálných inženýrských konstrukcích.

4.1.1 Model geometrie a okrajové podmínky úlohy



Obr. 12. Příklad vyjmutého disku ze zkušebního tělesa či reálné konstrukce [11]

Výpočtový model tělesa s trhlinou byl vytvořen s pomocí metody hraniční vrstvy a modifikované metody hraniční vrstvy. Pro výpočtový model byl volen tvar kruhového disku, jehož poloměr byl desetinásobek jeho uvažované tloušťky. Geometrie kruhového disku byla volena z důvodu snadné aplikace okrajových podmínek při použití polárního souřadnicového systému.

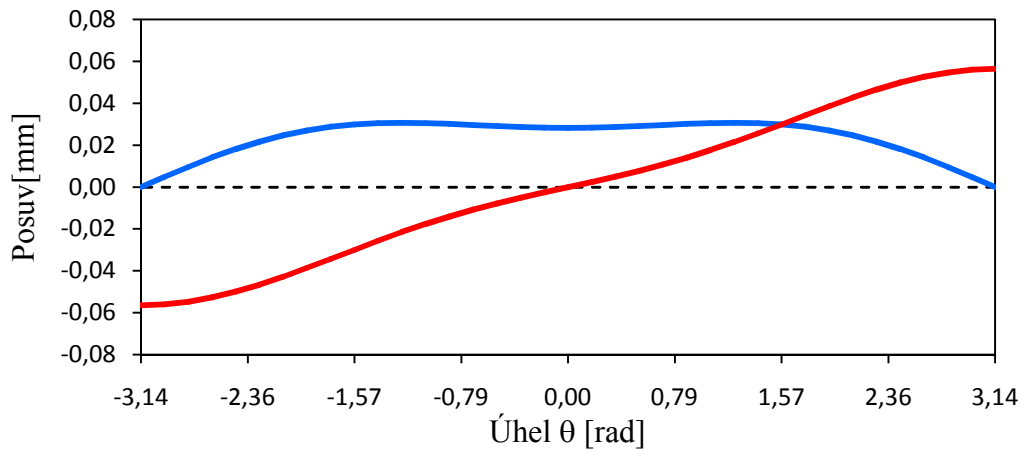
Řešení bakalářské práce bylo prováděno na dvojdimenzionálních a trojdimenzionálních výpočtových modelech. Pro analýzu přesnosti určování lomových parametrů, studii vlivu Poissonova čísla (kapitola 4.2, 4.3) a analýzu přesnosti určování T-napětí (kapitola 4.3) byl použit dvojdimenzionální model ve tvaru kruhového disku, kde délka trhliny odpovídala poloměru disku. Pro analýzu použitelnosti vybraných metod ve 3D (kapitola 4.4) byl použit trojdimenzionální model ve tvaru kruhového disku s definovanou tloušťkou, kde délka trhliny odpovídala poloměru disku. Ve všech případech bylo využito symetrie součástí a za použití symetrických vazeb byly modelovány jen nezbytně nutné části těles. U dvojdimenzionálních modelů byly modelovány pouze poloviny disků. U trojdimenzionálních modelů bylo využito přítomností dvou rovin symetrie, a tedy byla modelována pouze 1/4 disku. Počátek globálního souřadnicového systému byl vždy ve vrcholu trhliny a kladná osa x mířila ve směru dalšího růstu trhliny.

Okrajové podmínky byly definovány jako předpis posuvů na okraji disku pro stav rovinné deformace. Jejich zápis v polárních souřadnicích je uveden v tabulce 3. a grafické znázornění je ukázáno na obr. 13., 14. V celé práci je uvažováno referenční zatížení tělesa s trhlinou odpovídající faktoru intenzity napětí $K_I = 10 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$.

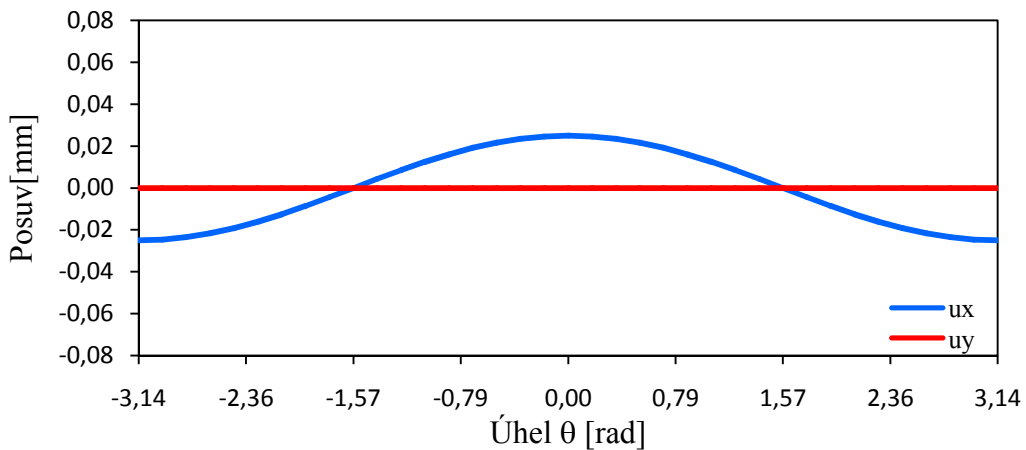
Tabulka 3. Posuvové okrajové podmínky pro I. mód namáhání (BLM) a pro T-napětí (MBLM) s uvažováním polárního souřadnicového systému [15]

posuv	Mód I	posuv	T-napětí
u_x	$\frac{K_I \sqrt{r}}{2\mu\sqrt{2\pi}} \cos\frac{\theta}{2} \left[\kappa - 1 + 2\sin^2\frac{\theta}{2} \right]$	u_x	$\frac{Tr}{2(1+\nu)\mu} (1-\nu^2) \cos\theta$
u_y	$\frac{K_I \sqrt{r}}{2\mu\sqrt{2\pi}} \sin\frac{\theta}{2} \left[\kappa + 1 - 2\cos^2\frac{\theta}{2} \right]$	u_y	$\frac{-Tr}{2(1+\nu)\mu} (\nu + \nu^2) \sin\theta$

kde μ je modul pružnosti v krutu, ν je Poissonovo číslo a κ je určena dle rovnice (8).



Obr. 13. Grafické znázornění okrajových podmínek pro namáhání čistým módem I podle tabulky 3. pro rovinnou deformaci

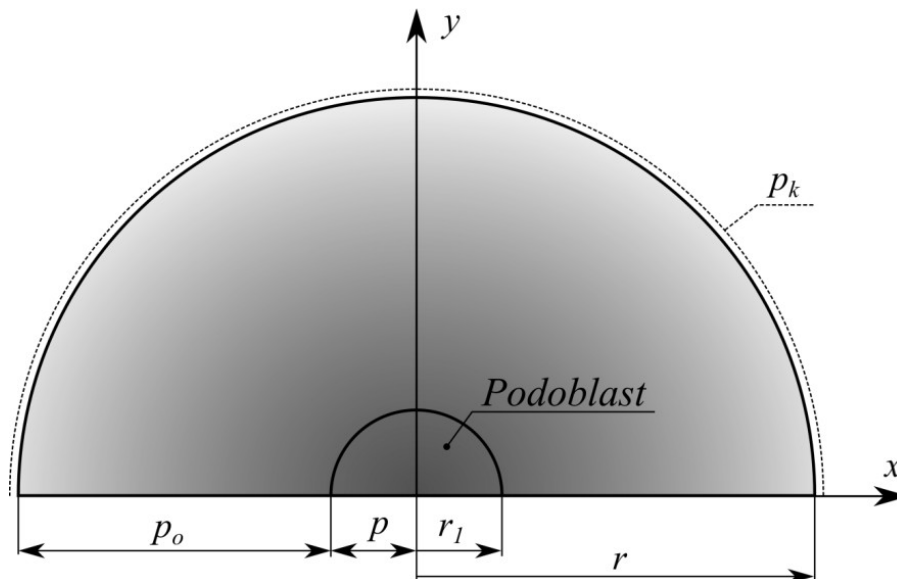


Obr. 14. Grafické znázornění okrajových podmínek pro namáhání čistě T-napětím podle tabulky 3. pro rovinnou deformaci

4.1.2 Numerický model

Jednotlivé výpočetní situace byly modelovány v konečno-prvkovém výpočetním systému ANSYS za stavu rovinné deformace. Výpočtové modely i postprocessing byl kompletně vytvořen v programovacím jazyku APDL (ANSYS Parametric Design Language). Pro dvojrozměrné úlohy byly použity kvadratické prvky PLANE183. Pro trojrozměrné úlohy byly použity kvadratické prvky SOLID186. Materiál byl uvažován jako homogenní, lineárně-elastický, izotropní s modulem pružnosti v tahu $E = 2 \times 10^5$ MPa a s Poissonovým číslem v závislém na charakteru úlohy v rozmezí od 0 do 0,499.

Důležitým faktorem ovlivňujícím přesnost výsledku je volba charakteristického intervalu na výpočtovém modelu, ze kterého jsou získávány hodnoty potřebné k určení hledaných lomových parametrů. Tento interval, jak již bylo uvedeno v kapitole 2.2.1, byl volen co nejbližší vrcholu trhliny, a proto bylo nutné v této oblasti zajistit dostatečně kvalitní MKP síť.



Obr. 15. Ukázka 2D numerického modelu

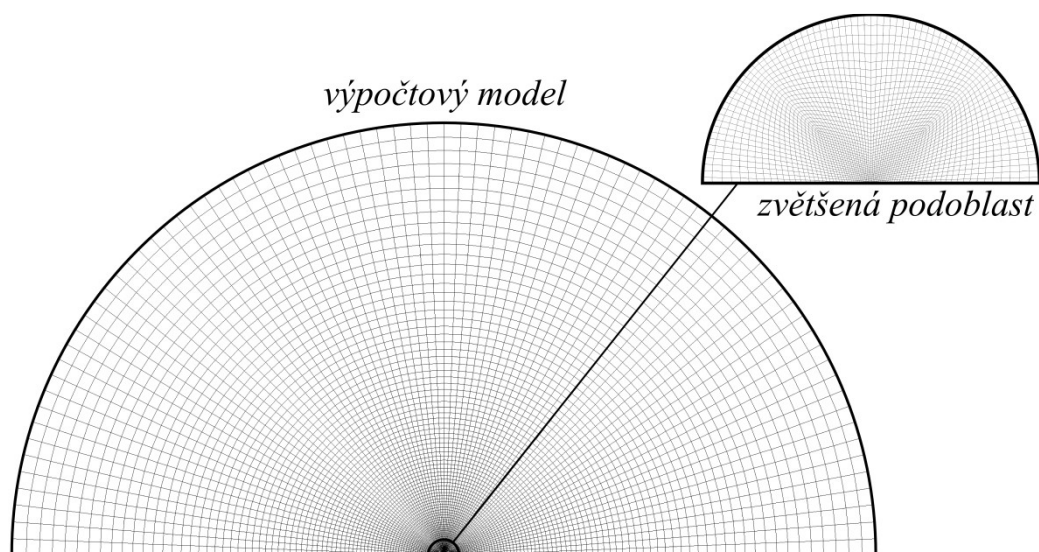
Za tímto účelem byla na každém výpočtovém modelu vytvořena podoblast, ve které byla MKP síť jemnější než na zbytku disku. Schéma takového modelu je uvedeno na obrázku 15. Poloměr podoblasti r_1 byl ve všech případech volen 2 mm. Hustota sítě v podoblasti byla charakterizována parametrem p , který udával počet prvků, na který byla rozdělena vzdálenost mezi vrcholem trhliny a okrajem podoblasti. Parametr p_o , charakterizoval počet prvků, na který byla rozdělena vzdálenost mezi okrajem podoblasti a okrajem disku a parametr p_k , charakterizoval počet prvků vytvořených na okraji disku. Síť v podoblasti i na zbylém disku byla vytvořena tak, aby se ve směru k vrcholu trhliny zjemňovala. Tím bylo dosaženo dobrého popisu gradientu napětí v okolí vrcholu trhliny.

4.2 Analýza přesnosti určování lomových parametrů

V první fázi numerické simulace tělesa s trhlinou je nutné nejprve ověřit závislost získaného výsledku na hustotě MKP sítě. Z tohoto důvodu byla pro každou zkoumanou výpočetní metodu provedena citlivostní analýza hustoty MKP sítě. Pomocí metody hraniční vrstvy a modifikované metody hraniční vrstvy byl ve výpočtovém modelu studován stav rozložení posuvů a napětí odpovídající určitým lomovým parametrům. Takovéto zatížení bylo bráno jako referenční zatížení, pomocí něhož byla určována přesnost zkoumaných metod. Jako dostatečně přesný výsledek byl brán ten, který se svou hodnotou nelišil od známého řešení o více než 0,1%.

Citlivostní analýza byla potom provedena následujícím způsobem. Ve vymodelované polokruhové podoblasti o poloměru 2 mm se středem ve vrcholu trhliny byla měněna hustota MKP sítě. Odhad vždy začínal s velmi hrubou sítí, která se následně zjemňovala. Nejhrubší síť v podoblasti disku byla charakterizována parametrem $p = 6$, což znamená, že poloměr podoblasti tvořilo 6 prvků. V průběhu výpočtů se parametr p postupně zvětšoval. Na zbývajícím poloměru disku bylo vytvořeno 80 prvků, tzn. $p_o = 80$ a na okraji disku také 80 prvků ($p_k = 80$). Parametry p_o , p_k se v průběhu všech výpočtů neměnily, protože v této oblasti pole posuvů a napětí nevykazuje silné gradienty a tedy zde můžeme použít méně prvků než v okolí vrcholu trhliny bez ztráty přesnosti. V obou oblastech, podoblasti i okolní oblasti se potom

prvky zmenšovaly směrem k vrcholu trhliny tak, že nejmenší prvek byl 10krát menší než největší prvek dané oblasti. Příklad MKP sítě je uveden na obrázku 16.

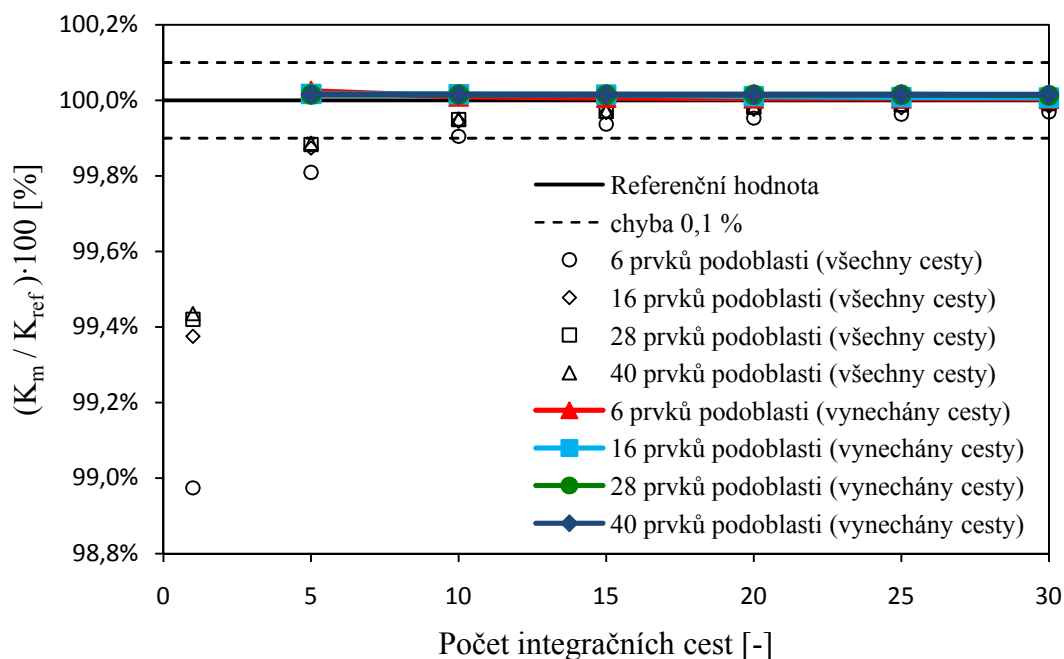


Obr. 16. Ukázka hustoty MKP sítě na výpočtovém modelu

Abychom mohli jednotlivé metody pro určování různých lomových parametrů mezi sebou přímo porovnávat, byla citlivostní analýza provedena pro faktor intenzity napětí. Hodnota K-faktoru určeného podle dané metody byla označována K_m , hodnota známá byla označována K_{ref} .

4.2.1 Analýza přesnosti určování faktoru intenzity napětí z J-integrálu

Výpočet J-integrálu se většinou provádí pro více integračních cest a výsledek je potom roven aritmetickému průměru hodnot ze všech integračních cest. První analýza byla tedy provedena pro zjištění potřebného počtu integračních cest. Při odhadu je vhodné vynechat několik prvních integračních cest z důvodu velké numerické chyby projevující se na těchto integračních cestách. Analýza byla tedy provedena pro dva případy s vynecháním dvou prvních cest a bez vynechání cest. Hodnotu J-integrálu je možné podle vztahu (22) přepočítat na hodnotu faktoru intenzity napětí. Přesnost řešení byla posuzována jako podíl výsledku určeného pomocí J-integrálu a známého řešení (referenční hodnoty). Výsledky analýzy jsou uvedeny na obrázku 17.

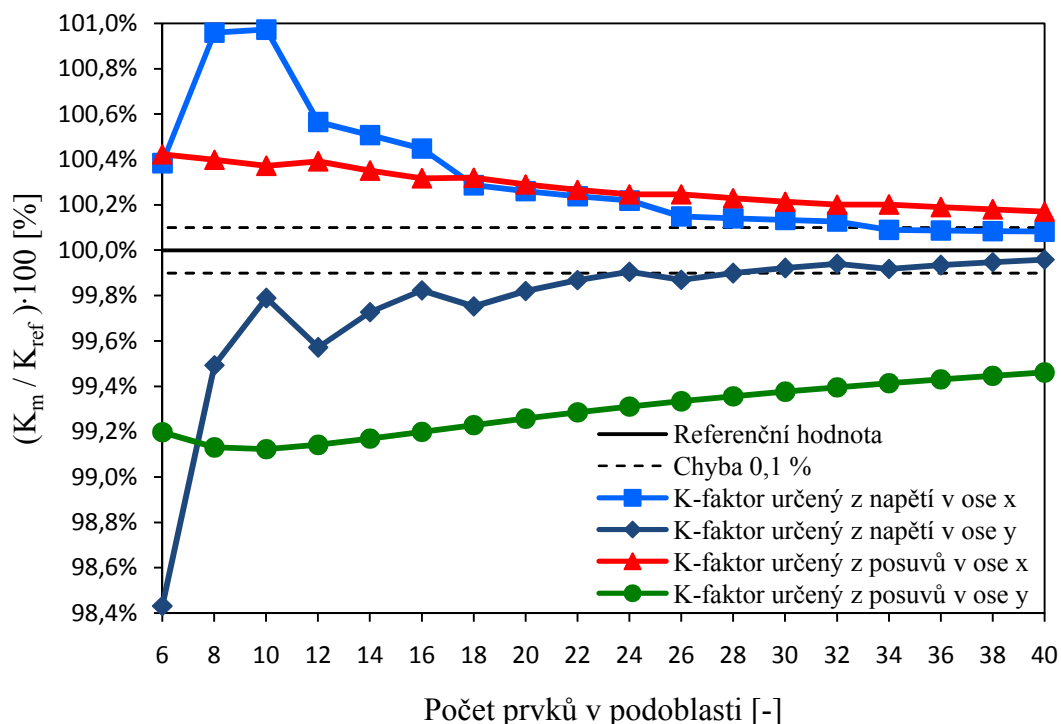


Obr. 17. Závislost počtu integračních cest na přesnosti určení faktoru intenzity napětí z J-integrálu

Z výsledků analýzy jasně vyplývá, že při vynechání dvou prvních integračních cest dosahujeme daleko větší přesnosti řešení. Nicméně pokud integrační cesty nevynecháme, stačí nám i při nejhrubší síti použít 10 integračních cest a chyba řešení je menší než 0,1 % což je dostatečná přesnost. Pro další výpočty byl J-integrál počítán z 20 respektive po vynechání prvních dvou cest z 18 integračních cest.

4.2.2 Analýza přesnosti určování faktoru intenzity napětí z definičních vztahů

Určovat faktor intenzity napětí je možné za pomoci známých definičních vztahů pro pole posuvů nebo napětí v okolí vrcholu trhliny. V praxi takový postup nazýváme přímá metoda určení faktoru intenzity napětí. Metoda je založená na principu extrapolace napětí nebo posuvů v závislosti na vzdálenosti od vrcholu trhliny. V této práci byly použity všechny přístupy, uvedené v tabulce 1. Výsledné faktory intenzity napětí v porovnání s referenční hodnotou jsou uvedeny na obrázku 18.



Obr. 18. Citlivostní analýza vlivu hustoty MKP sítě na hodnotu faktoru intenzity napětí určeného pomocí přímé metody při zatížení módem I

Z výsledků analýzy je patrné, že přesnost přímé metody určení faktoru intenzity napětí je významně závislá na hustotě konečno-prvkové sítě. Ukazuje se, že z hlediska přesnosti určení faktoru intenzity napětí je nejvhodnější přímá metoda založená na extrapolaci napětí působícího kolmo na líce trhliny (otevíracího napětí σ_{yy}). Naopak, nejméně přesné výsledky nám dává metoda založená na extrapolaci posuvů kolmých na líce trhliny. Na základě provedené analýzy tedy lze konstatovat, že metody založené na extrapolaci napětí jsou obvykle přesnější, než metody založené na extrapolaci posuvů.

4.2.3 Porovnání přesnosti metod pro určování faktoru intenzity napětí

Pro porovnání výše uvedených metod určování faktoru intenzity napětí byly vybrány následující metody:

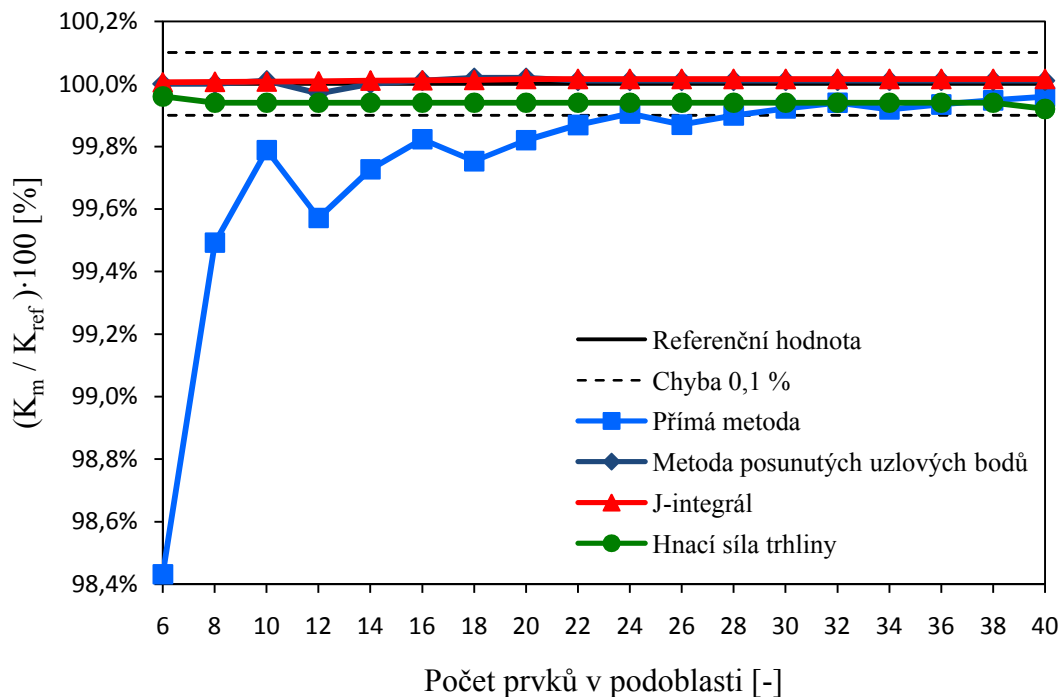
Lokální metody určení faktoru intenzity napětí:

- přímá metoda založená na extrapolaci otevíracího napětí
- metoda posunutých uzlových bodů

Energetické metody určení faktoru intenzity napětí:

- ze známé hodnoty hnací síly trhliny
- ze známé hodnoty J-integrálu

Odhady hodnot jednotlivých metod byly opakovány na postupně se zjemňující síti. Referenční zatížení bylo voleno stejně jako v předchozích případech $K_{ref} = 10 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$. Výsledky analýzy jsou uvedeny na obrázku 19.



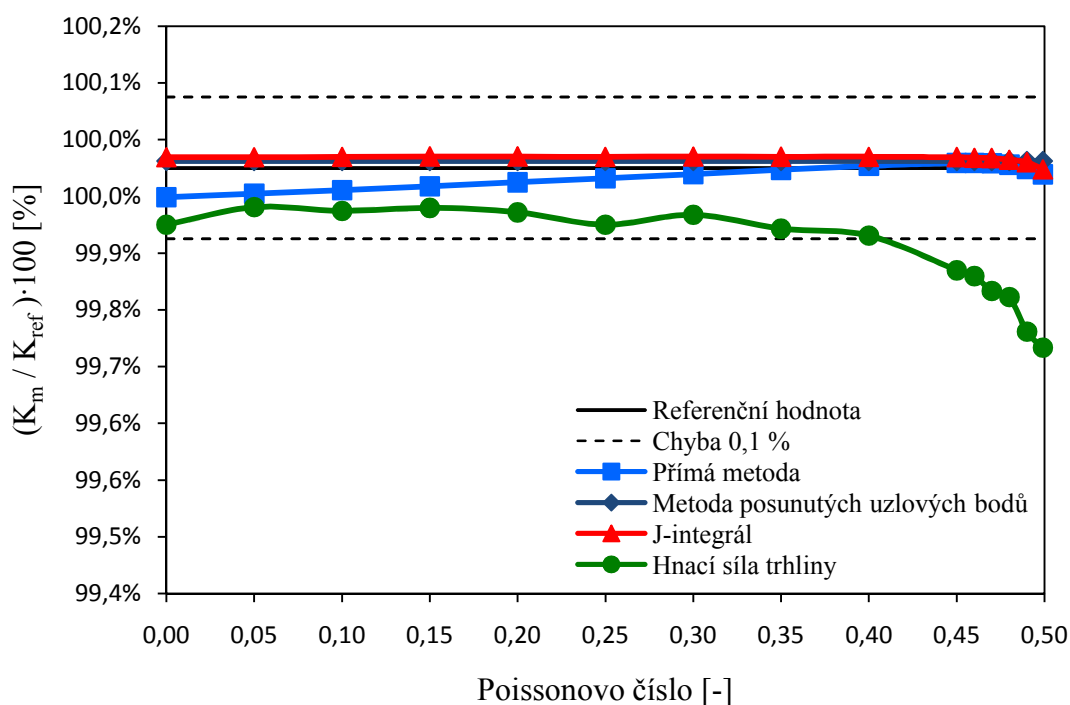
Obr. 19. Citlivostní analýza vybraných metod výpočtu

Z analýzy vyplývá, že energetické metody a metoda posunutých uzlových bodů jsou velice přesné a pro zvolenou přesnost (chyba 0,1%) téměř nezávislé na hustotě sítě. Přímá metoda určení k-faktoru je na síti poměrně významně závislá. K dosažení zvolené přesnosti je potřeba MKP síť s minimálně třiceti prvky na poloměru podoblasti.

Nejvhodnější metody pro určování faktoru intenzity napětí se tedy jeví metody založené na energetické bilanci tělesa s trhlinou, následované metodou posunutých uzlových bodů. Je však nutné zmínit fakt, že všechny tyto metody vyžadují, pro určení faktoru intenzity napětí, předepsání stavu napjatosti, který je někdy těžké definovat, zvláště u trojdimenzionálních úloh. Zde se tedy projevuje velká výhoda přímé metody určování faktoru intenzity napětí z napětí, jelikož je charakter napjatosti implicitně zahrnut v poli napětí zjištěného na trojdimenzionálních úlohách.

4.3 Vliv Poissonova čísla na přesnost řešení jednotlivých metod

Další analýza byla zaměřena na zjištění vlivu Poissonova čísla na přesnost jednotlivých metod výpočtu. Odhad byl proveden pro přímé metody určení K-faktoru a energetické metody J-integrál a hnací sílu trhliny. Při výpočtu bylo měněno Poissonovo číslo v rozsahu od 0 do 0,499. Na základě předchozí analýzy byl počet prvků na poloměru podoblasti p volen 40 prvků. Výsledky analýzy jsou uvedeny na obrázku 20.



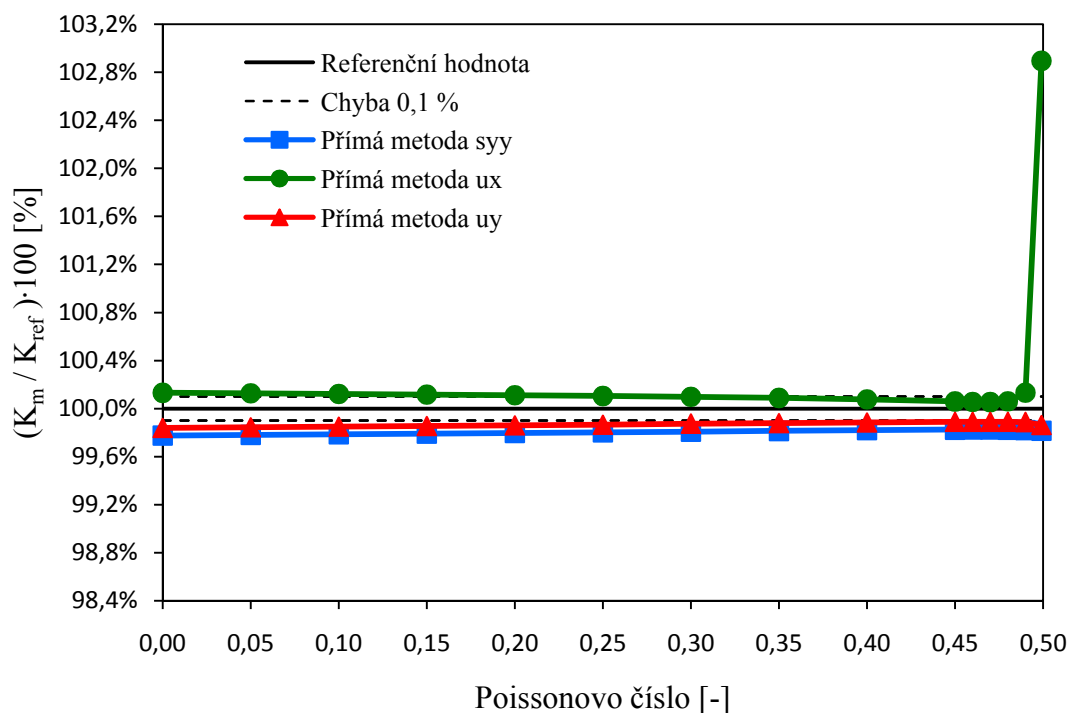
Obr. 20. Vliv Poissonova čísla na hodnotu K-faktoru při 2D RD

Z výsledků je patrné, že vliv Poissonova čísla u dvojdimenzionálních úloh, ve stavu rovinné deformace, je zanedbatelný. Na obrázku 20 jsou sice mezi metodami znatelné jisté rozdíly, ale ty jsou pravděpodobně způsobeny spíše numerickou chybou výpočtu. Vliv Poissonova čísla na hodnotu faktoru intenzity napětí však bude velmi silný v případě trojdimenzionálních úloh, jak bude uvedeno později.

4.3.1 Vliv poissonova čísla na určování lomových parametrů na reálném CT, MT tělese

Výhodou numerického modelu, používaného v této práci, je jeho možnost přizpůsobení okrajových podmínek tak, aby v blízkosti vrcholu trhliny bylo stejné pole napětí a přetvoření, jako na požadované geometrii. Toho lze docílit tak, že přiřadíme jednotlivým členům Williamsova rozvoje takové hodnoty, jaké odpovídají požadované geometrii tělesa s trhlinou. V této práci se zabýváme dvěma zkušebními tělesy, která se používají při únavových testech konstrukčních materiálů – CT (Compact Tension) a MT (Middle Tension) těleso. Pro transfer charakteru napjatosti byly použity první dva členy Williamsova rozvoje. Rozdíl mezi CT a MT tělem je, kromě geometrie, hlavně v rozdílné hodnotě T-napětí. T-napětí, které odpovídá CT tělesu, bylo $T = 21,4$ MPa a pro MT těleso $T = -42,5$ MPa. Tyto hodnoty byly již dříve určeny na kompletních numerických modelech CT a MT tělesa při stejné délce trhliny. Je možné je dohledat i v literatuře, např. v [12], [13].

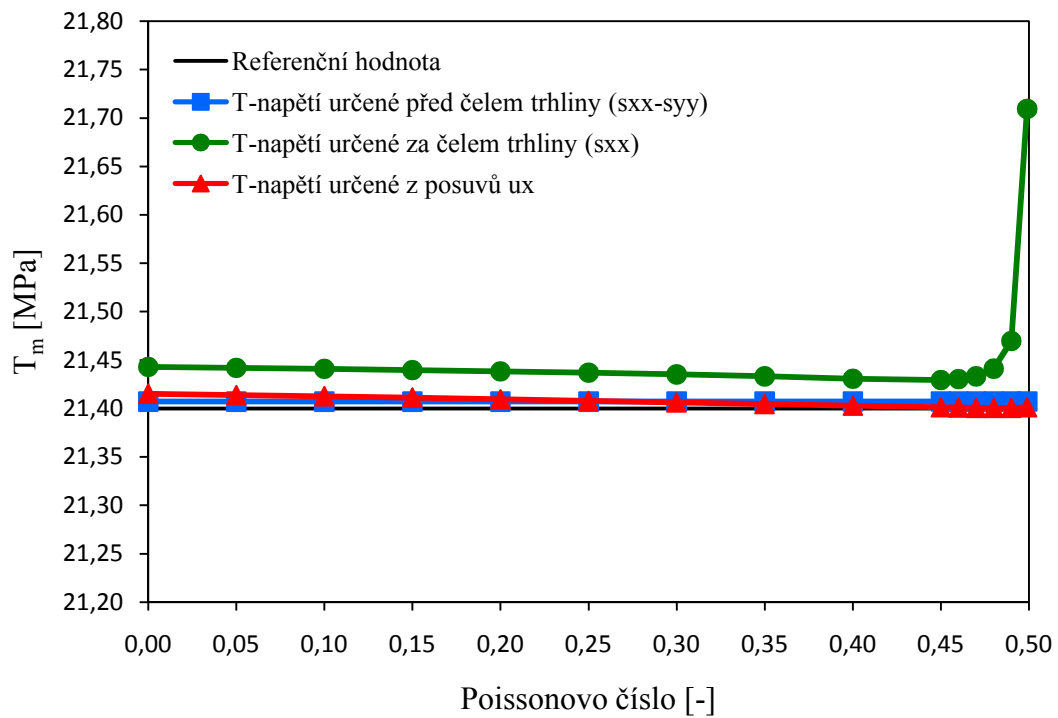
První analýza byla provedena za účelem zjištění, zdali má při modelování reálných CT a MT těles v rovinné deformaci na výsledek vliv Poissonovo číslo. Zjištění hodnot faktoru intenzity napětí bylo provedeno pomocí přímé metody z tabulky 1 na MKP síti, která měla stejně jako v předchozím případě 40 prvků na poloměru podoblasti ($p = 40$) a parametry p_o , p_k rovny 80. Provedená analýza pro CT a MT těleso je uvedena na obrázku 21.



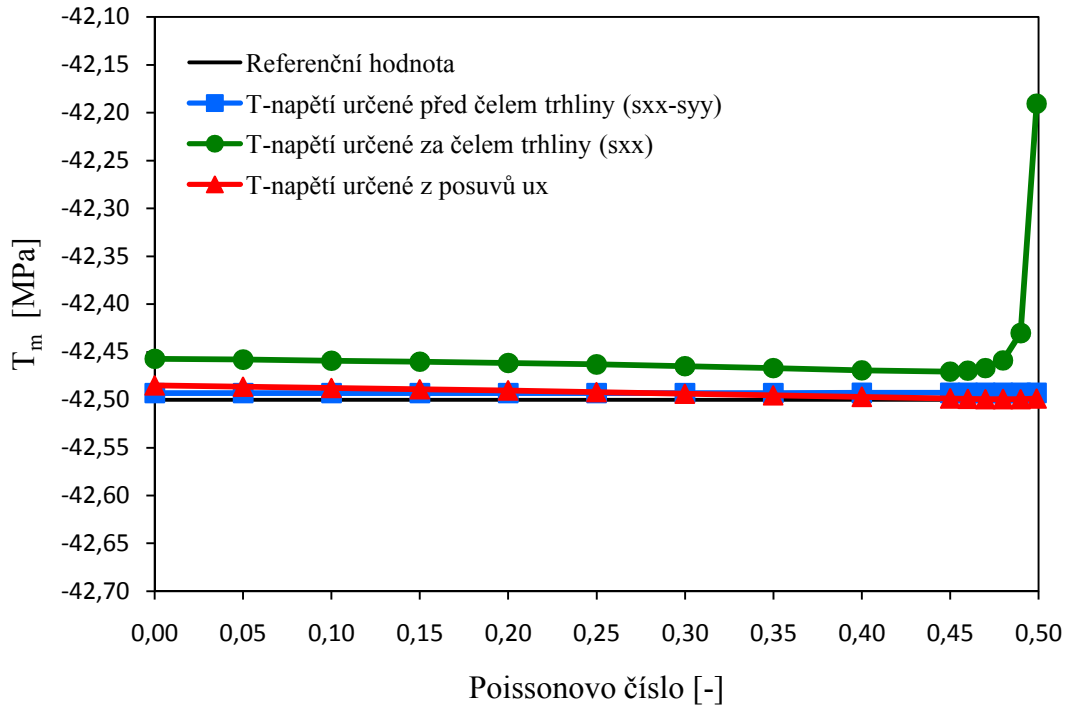
Obr. 21. Vliv Poissonova čísla na hodnotu K-faktoru u CT, MT tělesa

Analýza ukázala, že faktor intenzity napětí určený pro CT a MT těleso je prakticky stejný, tedy použité metody nejsou závislé na kombinaci zatížení referenční hodnotou faktoru intenzity napětí a T-napětí. Jen pro hodnotu Poissonova čísla blízkou 0,5 došlo k nárůstu chyby pro metodu založenou na extrapolaci posuvů v ose x . Výsledné závislosti faktoru intenzity napětí na hodnotě Poissonova čísla jsou velmi obdobné těm, které jsou uvedeny na obrázku 20, nicméně došlo ke snížení přesnosti určení faktoru intenzity napětí. Důvodem je fakt, že pole napětí zde obsahuje i příspěvek od T-napětí. Použité metody však nejsou schopny tento příspěvek odseparovat a tím dochází ke snížení přesnosti.

V dalším kroku byl studován vliv Poissonova čísla na přesnost určení T-napětí. Získané závislosti jsou uvedeny na obrázcích 22. a 23.



Obr. 22. Vliv Poissonova čísla na hodnotu T-napětí u CT tělesa



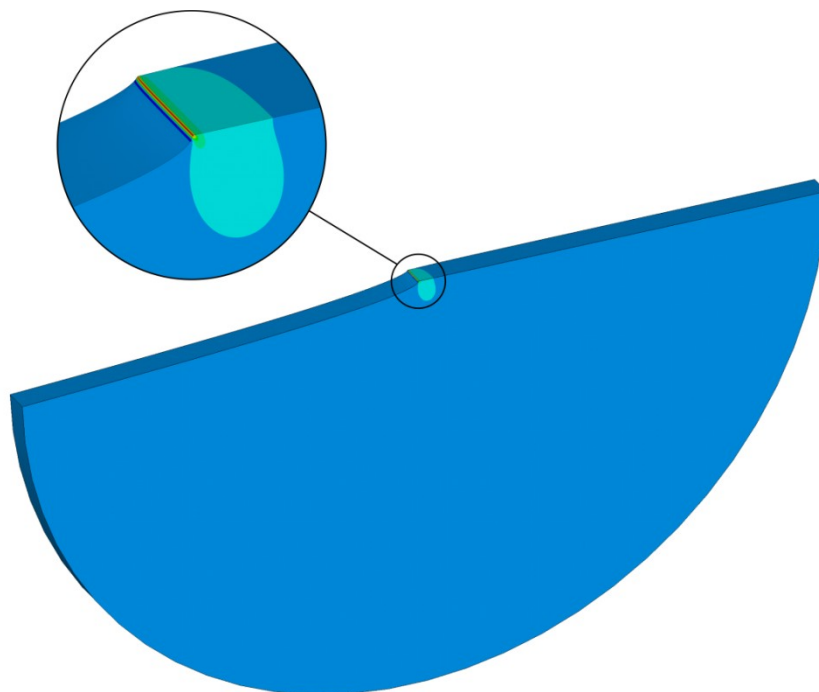
Obr. 23. Vliv Poissonova čísla na hodnotu T-napětí u MT tělesa

I zde se ukazuje, že vliv Poissonova čísla na přesnost určení T-napětí je spíše zanedbatelný. Významnější vliv má pouze v případě určování z napětí σ_{xx} na lících trhliny a to navíc jen pro Poissonova čísla blízké hodnotě 0,5. Lze tedy obecně říci, že

ve 2D úlohách při stavu rovinné deformace je vliv Poissonova čísla na hodnotu faktoru intenzity napětí a T-napětí zanedbatelný.

4.4 Analýza použitelnosti vybraných metod ve 3D

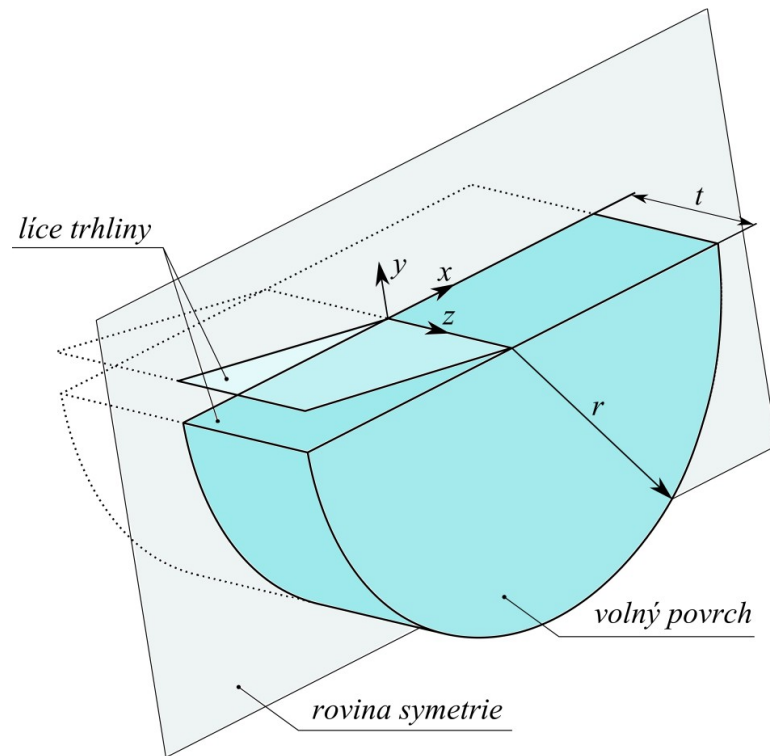
Trojdimenzionální úlohy se často zjednodušují na, do jisté míry idealizované případy, 2D úlohy. Proto bude v této kapitole studováno, zda má toto zjednodušení např. zanedbání vlivu konečné tloušťky [21] tělesa, významnější vliv na faktor intenzity napětí. Dále je ověřena použitelnost metod vybraných na základě předchozích analýz v trojdimenzionálním prostoru. Pro trojdimenzionální analýzu byla volena přímá metoda využívající otevírací napětí a J-integrál. Ukázka rozložení otevíracího napětí na disku o tloušťce 2 mm je uvedena na obrázku 24.



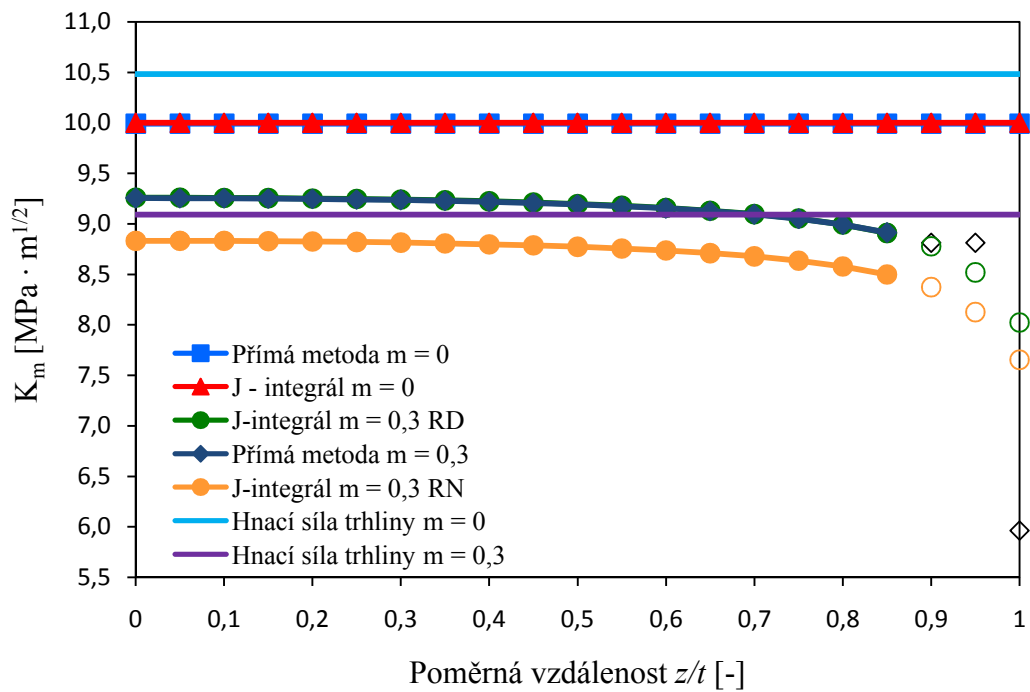
Obr. 24. Ukázka rozložení otevíracího napětí na disku o tloušťce 2mm, s Poissonovým číslem $\nu = 0,3$

Analýza byla zaměřena hlavně na výpočet faktoru intenzity napětí po čele trhliny a k tomu jsou tyto metody velice vhodné. Pro ověření postupů byl proveden odhad faktoru intenzity napětí také pomocí hnací síly trhliny. Pro tuhle metodu nebyl výpočet proveden po celém čele trhliny, ale získáváme jednu hodnotu, platnou pro celé těleso. Výpočtový model byl modelován jen jako čtvrtina disku s použitím symetrických podmínek z důvodu menší náročnosti na výpočetní výkon.

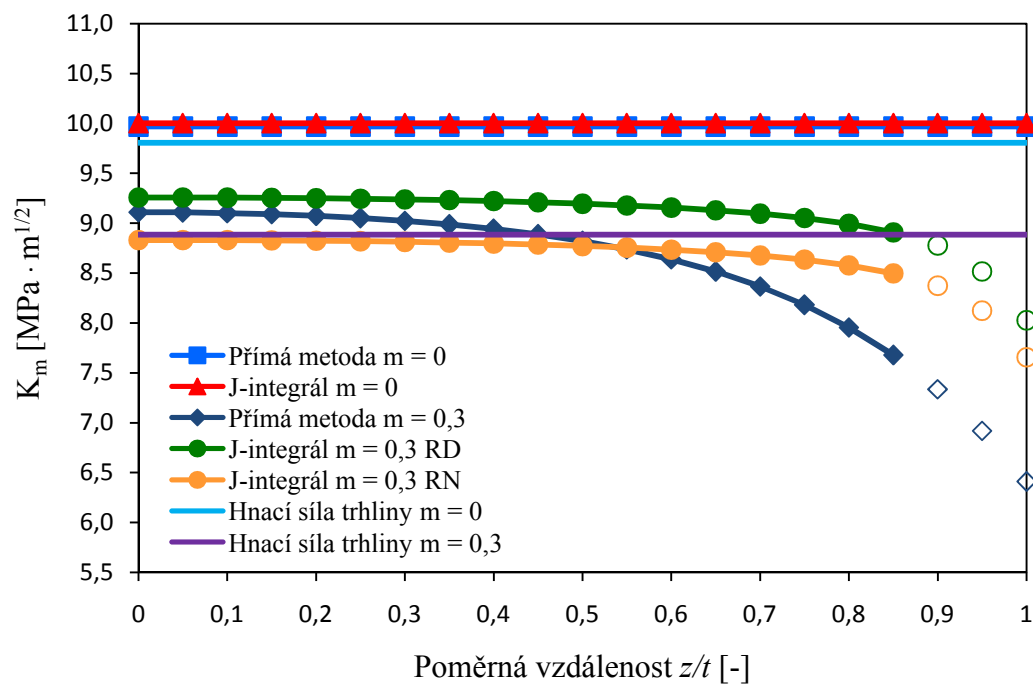
Abychom mohli porovnávat vliv konečné tloušťky tělesa, byla analýza provedena pro dva disky s rozdílnou tloušťkou. První disk měl tloušťku 50 mm, druhý disk 2 mm. Analýza byla dále provedena pro dvě hodnoty Poissonova čísla pro 0 a pro 0,3. Okrajové podmínky byly definovány tak, aby posuvy na vnějším poloměru disku odpovídaly stavu rovinné deformace. Výsledky analýzy jsou uvedeny na obrázcích 26. a 27. Odhadnuté hodnoty faktoru intenzity napětí zde byly vyneseny v závislosti na relativní vzdálenosti od roviny symetrie disku z/t viz obrázek 25.



Obr. 25. Ukázka trojdimenzionálního modelu, kde r je poloměr disku, t je tloušťka disku a x, y, z , jsou osy souřadnicového systému

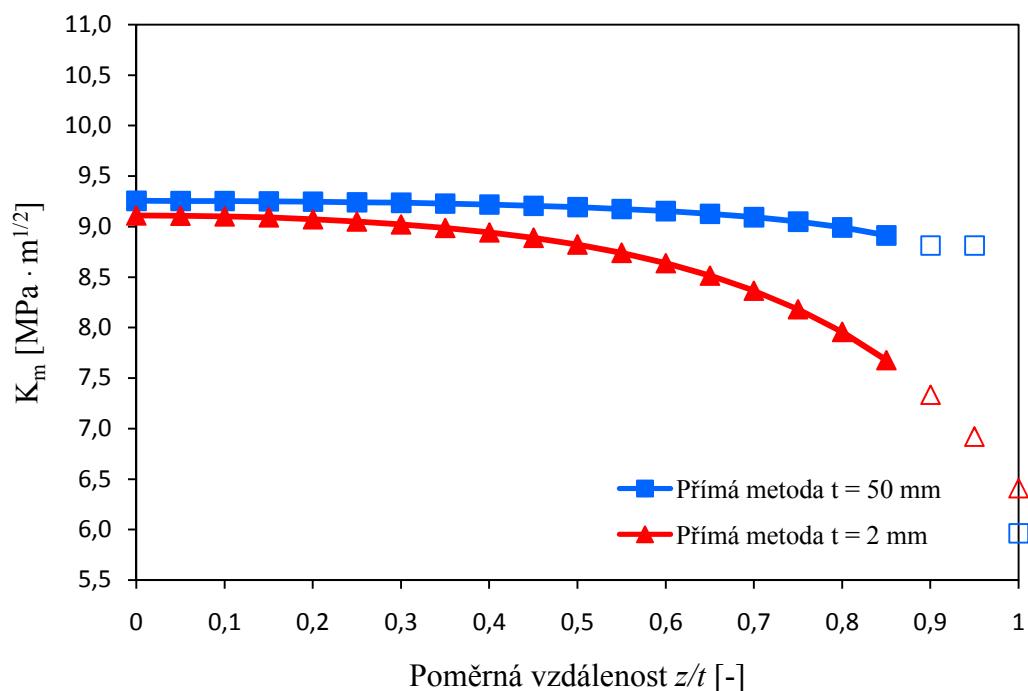


Obr. 26. Průběh K-faktoru po čele trhliny pro disk o tloušťce $t = 50$ mm



Obr. 27. Průběh K-faktoru po čele trhliny pro disk o tloušťce $t = 2$ mm

Z výsledků analýzy se dá říci, že při Poissonově čísle 0 jsou výsledky srovnatelné s výsledky dvojdimenzionální analýzy. Hodnoty K-faktoru z obou metod výpočtu jsou při přesnosti jednotlivých metod a přesnosti MKP systému naprosto dostačující. Při Poissonově čísle $0,3$ jsou však výsledky podstatně odlišné. Pro tento případ byly hodnoty faktoru intenzity napětí určeny pomocí J-integrálu jak pro rovinnou deformaci, tak pro rovinnou napjatost. Srovnání výsledků pro obě výpočetní tělesa je uvedeno na obrázku 28, kde jsou uvedeny pouze hodnoty faktoru intenzity napětí určené pomocí přímé metody. Hodnoty určené pomocí J-integrálu mají totiž pro obě tloušťky naprosto stejný průběh a hodnoty určené pomocí hnací síly trhliny nebyly určovány po čele trhliny.



Obr. 28. Porovnání průběhů K-faktorů po čele trhlin obou disků určených přímou metodou

Analýza ukázala, že faktor intenzity napětí není podél čela trhliny konstantní a směrem k volnému povrchu tělesa klesá. Nekonstantní rozložení lomových parametrů podél čela trhliny je jednou z příčin zakřivení čela trhliny. Navíc je hodnota lomových parametrů silně závislá na tloušťce tělesa a je tedy odůvodněné provádět analýzy v trojdimenzionálním prostoru. Dále se u trojdimenzionálních úloh projevil vliv Poissonova čísla, který způsobuje pokles faktoru intenzity napětí oproti referenční hodnotě, přičemž vliv Poissonova čísla u 2D úloh byl zcela zanedbatelný. V blízkosti volného povrchu došlo ke značnému poklesu hodnot faktoru intenzity napětí. To je patrně způsobeno vlivem volného povrchu tělesa. Singulární pole je tu silně ovlivněno a má jiný charakter než pro jaký byly odvozeny výpočetní metody. Použití těchto metod v takovéto oblasti vede tedy k nekorektnímu určení faktoru intenzity napětí a to z důvodu přítomnosti rohové singularity [21].

5. Závěr a zhodnocení výsledků

Bakalářská práce se zabývá metodami určení lomových parametrů a kvantifikací jejich přesnosti vzhledem ke známému řešení. Ke splnění cílů práce byla využita metoda konečných prvků implementovaná v systému ANSYS.

Na základě stanovených cílů bakalářské práce, lze vyvodit tyto závěry:

- *vytvořit vhodný výpočtový model tělesa s trhlinou, na němž bude možné definovat zatížení libovolnou kombinací jednotlivých členů Williamsova rozvoje*

Pro jednotlivé analýzy byly vytvořeny výpočtové modely ve tvaru kruhových disků. Tato metoda, označovaná jako metoda hraniční vrstvy resp. modifikovaná metoda hraniční vrstvy, umožnila definovat okrajové podmínky tak, že bylo možné výpočtové modely zatěžovat libovolnou kombinací jednotlivých členů Williamsova rozvoje.

- *provést citlivostní analýzu hustoty sítě MKP prvků pro vybrané metody určování lomových parametrů*

Byla provedena citlivostní analýza a z jejích výsledků lze konstatovat, že energetické metody určení faktoru intenzity napětí a metoda posunutých uzlových bodů dosahují velice přesných výsledků i s poměrně hrubou sítí. Silnou závislost na hustotě MKP sítě vykazovala pouze přímá metoda určování faktoru intenzity napětí. Pro její použití je nutno vytvořit velice jemnou MKP síť v okolí vrcholu trhliny.

- *studovat vliv Poissonova čísla na přesnost jednotlivých metod určování lomových parametrů*

Pro dvojdimenzionální úlohy modelované jako rovinná deformace, je vliv Poissonova čísla na lomové parametry zanedbatelný. U trojdimenzionálních úloh je vliv Poissonova čísla významný, zvláště u volného povrchu tělesa, kde dochází k poklesu faktoru intenzity napětí a také u tenkostěnných těles.

- *posoudit přesnost určování lomových parametrů z posuvů, napětí a energetických metod a vybrat vhodné metody pro použití u trojdimenzionálních úloh*

Po provedení citlivostní analýzy se jako nejpřesnější ukázaly energetické metody určování faktoru intenzity napětí. Přímá metoda určení faktoru intenzity napětí pomocí extrapolace napětí se jeví jako přesnější, než pomocí extrapolace posuvů. Jejich přesnost se ale při použití dostatečně jemné sítě s přesností energetických metod stírá. Použitelnost jednotlivých metod shrnuje tabulka 4.

Tabulka 4. Shrnutí poznatků o použitelnosti vybraných metod

Metoda	Požadavky na síť	Obsaženo v komerčních systémech	Použití ve 3D
Přímá metoda	Potřeba jemná síť	Ne	Ano
Metoda posunutých uzlových bodů	Stačí hrubší síť	Ano	Omezené (nutno znát stav napjatosti RN, RD)
J-integrál	Stačí hrubší síť	Ano	Omezené (nutno znát stav napjatosti RN, RD)
Hnací síla trhliny	Stačí hrubší síť	Ano	Omezené (nutno znát stav napjatosti RN, RD)

Lze tedy říci, že nejvhodnější metoda pro použití ve 3D je přímá metoda určení faktoru intenzity napětí pomocí extrapolace napětí před čelem trhliny. Ostatní metody, energetické či metoda posunutých uzlových bodů, sice nepotřebují kvalitní MKP síť, potřebují ale definici charakteru napjatosti, který často u trojdimenzionálních úloh není přesně definován.

- *na obecném trojdimenzionálním tělese určit průběh faktoru intenzity napětí podél čela trhliny a ověřit použitelnost jednotlivých metod*

Ke splnění tohoto cíle byl vytvořen trojdimenzionální model disku s přímou trhlinou s celkovou tloušťkou 2 a 50 mm. Faktor intenzity napětí byl určován pomocí přímé metody, ze známé hodnoty J-integrálu a hnací síly trhliny. Ukázalo se, že faktor intenzity napětí podél čela trhliny není konstantní a směrem k volnému povrchu tělesa klesá. Přesnost jednotlivých metod silně závisí na tloušťce tělesa. Dále se projevil vliv Poissonova čísla, který způsobuje pokles faktoru intenzity napětí oproti referenční hodnotě. Navíc se projevil také vliv volného povrchu, který vede k nekorektnímu určení faktoru intenzity napětí z důvodu komplikovaného singulárního pole napětí ovlivněného přítomností rohové singularity.

Metody a postupy použité v této práci mají obecnou platnost a lze je využít i pro řešení celé řady jiných úloh. Výsledky a závěry autorovy práce by v budoucnu měly usnadnit spolehlivější odhad lomových parametrů u trojdimenzionálních těles s obecně zakřivenou geometrií čela trhliny. Závěrem lze konstatovat, že cíle bakalářské práce, formulované v kapitole 3, byly splněny.

6. Seznam použitých zkratek a symbolů

symbol	popis symbolu
A_I	konstanta
B	tloušťka vzorku
C	materiálová konstanta
D	průměr disku
E	modul pružnosti v tahu
E'	součinitel určující stav napjatosti
G	hnací síla trhliny
I, II, III	označení jednotlivých módů namáhání
J	J-integrál
K	faktor intenzity napětí
K_{fc}	lomová houževnatost
K_I^*	funkce faktoru intenzity napětí
K_I, K_{II}, K_{III}	faktor intenzity napětí pro daný mód namáhání
K_m	hodnota faktoru intenzity napětí určená danou metodou
K_{ref}	referenční hodnota faktoru intenzity napětí
L	délka prvku
N	počet cyklů do lomu
P	zatěžovací síla
T	T-napětí
T_i	vektor povrchových sil
U	energie napjatosti tělesa
W	šířka vzorku
a	délka trhliny
a_0	počáteční délka trhliny
a_{krit}	kritická délka trhliny
da	změna délky trhliny
dN	změna zátěžných cyklů
dS	změna plochy trhliny
ds	element integrační cesty
dU	změna energie napjatosti
$f(a/W)$	známá tvarová funkce
f_{ij}	bezrozměrná tvarová funkce úhlu θ
$f_{ij}^I, f_{ij}^{II}, f_{ij}^{III}$	bezrozměrná tvarová funkce úhlu θ pro daný mód namáhání
g_{ij}	bezrozměrná tvarová funkce úhlu θ
m	materiálová konstanta
n_j	složky vektoru normály integrační křivky Γ
p	počet prvků na poloměru podoblasti
p_k	počet prvků na okraji disku

p_o	počet prvků na okolním poloměru
r	polární souřadnice
t	tloušťka modelu
u_i	posuv v ose x
u_x, u_y, u_z	posuv v ose x, y, z
w	hustota deformační energie
x, y, z	souřadnice x, y, z
Π	potenciální energie tělesa
δ_{li}	Kroneckerovo delta
ΔK_I	rozkmit faktoru intenzity napětí
ΔK_{th}	prahová hodnota faktoru intenzity napětí
$d\Pi$	změna celkové potenciální energie tělesa s trhlinou
Γ	integrační cesta
κ	bezrozměrný parametr
μ	modul pružnosti v krutu
ν	Poissonovo číslo
π	Ludolfovo číslo
θ	polární souřadnice
σ_{ij}	tenzor napětí
$\sigma_{ij}^I, \sigma_{ij}^{II}, \sigma_{ij}^{III}$	tenzor napětí pro daný mód namáhání
$\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{rr}$	napětí polárního souřadnicového systému
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$	napětí kartézského souřadnicového systému

zkratka

LELM

EPLM

SENT

DENT

MKP

BLM

MBLM

CT

MT

RN

RD

APDL

popis zkratky

Lineární elastická lomová mechanika

Elasto plastická lomová mechanika

Single edge notched tension (těleso s boční trhlinou)

Double edge notched tension (těleso s centrální trhlinou)

Metoda konečných prvků

Metoda hraniční vrstvy

Modifikovaná metoda hraniční vrstvy

Compact tension (zkušební těleso typu CT)

Middle Tension (zkušební těleso typu MT)

rovinná napjatost

rovinná deformace

ANSYS Parametric Design Language (programovací jazyk programu ANSYS)

7. Seznam obrázků

číslo	popis obrázku
Obr. 1.	Lomová plocha únavového lomu kované ojnice
Obr. 2.	Vykolejení vlaku v Rakousku v roce 1875 zapříčiněné únavovým lomem železničního kola
Obr. 3.	Rozlomení lodě třídy Liberty
Obr. 4.	Průběh napětí v okolí trhliny v lineárně elastickém materiálu
Obr. 5.	Souřadnicové systémy
Obr. 6.	Módy zatěžování
Obr. 7.	Příklady geometrií a tvarových funkcí zkušebních vzorků
Obr. 8.	Ukázka speciálních trhlinových prvků
Obr. 9.	Ukázka odhadu K-faktoru pomocí přímé metody
Obr. 10.	Souřadnicový systém a křivka Γ použité pro definici J-integrálu
Obr. 11.	Závislost rychlosti šíření trhliny na rozkmitu faktoru intenzity napětí
Obr. 12.	Příklad vyjmutého disku ze zkušebního tělesa či reálné konstrukce
Obr. 13.	Grafické znázornění okrajových podmínek pro namáhání čistým módem I podle tabulky 3. pro rovinnou deformaci
Obr. 14.	Grafické znázornění okrajových podmínek pro namáhání čistě T-napětím podle tabulky 3. pro rovinnou deformaci
Obr. 15.	Ukázka 2D numerického modelu
Obr. 16.	Ukázka hustoty MKP sítě na výpočtovém modelu
Obr. 17.	Závislost počtu integračních cest na přesnosti určení faktoru intenzity napětí z J-integrálu
Obr. 18.	Citlivostní analýza vlivu hustoty MKP sítě na hodnotu faktoru intenzity napětí určeného pomocí přímé metody při zatížení módem I
Obr. 19.	Citlivostní analýza vybraných metod výpočtu
Obr. 20.	Vliv Poissonova čísla na hodnotu K-faktoru při 2D RD
Obr. 21.	Vliv Poissonova čísla na hodnotu K-faktoru u CT, MT tělesa
Obr. 22.	Vliv Poissonova čísla na hodnotu T-napětí u CT tělesa
Obr. 23.	Vliv Poissonova čísla na hodnotu T-napětí u MT tělesa
Obr. 24.	Ukázka rozložení otevíracího napětí na disku o tloušťce 2 mm, s Poissonovým číslem $\nu = 0,3$
Obr. 25.	Ukázka trojdimenzionálního modelu
Obr. 26.	Průběh K-faktoru po čele trhliny pro disk o tloušťce $t = 50$ mm
Obr. 27.	Průběh K-faktoru po čele trhliny pro disk o tloušťce $t = 2$ mm
Obr. 28.	Porovnání průběhů K-faktorů po čele trhlin obou disků určených přímou metodou

8. Seznam tabulek

číslo	popis tabulky
Tabulka 1.	Přehled možných přímých metod pro I. mód namáhání
Tabulka 2.	Přehled možných přímých metod určování T-napětí
Tabulka 3.	Posuvové okrajové podmínky pro I. mód namáhání (BLM) a pro T-napětí (MBLM) s uvažováním polárního souřadnicového systému
Tabulka 4.	Shrnutí poznatků o použitelnosti vybraných metod

9. Použitá literatura

- [1] SHIGLEY, J.E., C.R. MISCHKE, R.G. BUDYNAS.: *Konstruování strojních součástí*. 1. vyd. Editor Martin Hartl, Miloš Vlk. Brno: VUTIUM, 2010, 1159 s. ISBN 978-80-214-2629-0.
- [2] VLK, M.: *Mezní stavy a spolehlivost* [online]. Vyd. 1. Brno: VUT Brno, 1991, 185 s. [cit. 2014-05-16]. Učební texty vysokých škol (Vysoké učení technické v Brně). ISBN 80-214-0386-1.
- [3] INGLISH, C.E. Stresses in Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners. *Transactions of the Institute of Naval Architects* 55, 1913, 219-241.
- [4] GRIFFITH, A.A. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions Series A*, 1920, 163-198.
- [5] WESTERGAARD, H.M. Bearing pressures and cracks. *Journal of Applied Mechanics* 24, 1939, 49-53.
- [6] IRWIN, G.R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics* 24, 1957, 361-364.
- [7] WILLIAMS, M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *Journal of Applied Mechanics* 24, 1957, 109-114.
- [8] STOCKER, LRv. Eisenbahnunfälle. *Beitrag zur Eisenbahnbetriebslehre*. 1913, roč. 2, obr. 84.
- [9] VLACH, B.: *Tranzitní lomové chování ocelí* [online]. 2012 [cit. 2014-05-19]. Ústav Materiálových Věd a Inženýrství. Dostupné z WWW: http://ime.fme.vutbr.cz/images/umvi/vyuka/mezni_stavy/podklady/04%20-%20Tranzitni%20lomove%20chovani.pdf
- [10] KUNZ, J.: *Základy lomové mechaniky*. Skriptum ČVUT v Praze, 2000.
- [11] ANDERSON, T.L.: *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*, 2nd edition, CRC Press Inc, 1995.
- [12] MURAKAMI, Y.: *Stress Intensity Factors Handbook*, (Pergamon Press, Oxford), 1987.
- [13] Bednář, K.: *Dvoupřímá lomová mechanika: Výpočet parametrů a jejich význam při popisu chování únavových trhlin*. Brno. 117 s. Disertační práce, ÚMTMB FSI VUT v Brně. 1999.
- [14] ANSYS Release 13.0 Documentation.
- [15] YOSHIBASHI, Z.: Singularities in Elliptic Boundary Value Problems and Elasticity and Their Connection with Failure Initiation. *Interdisciplinary Applied Mathematics* 37, 2012, ISBN 978-1-4614-1508-4, 111-115.

- [16] HUTAŘ, P.: *Dvouparametrový popis malých trhliny ovlivněných polem napětí obecných koncentrátorů*. Disertační práce na VUT v Brně, Brno, 2004.
- [17] HUTAŘ, P.: *Problémy lomové mechaniky IV: Výpočet T-napětí pomocí metody posunutých uzlových bodů*, Brno, 2004, 28-39.
- [18] RICE, J.R.: A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. *Journal of Applied Mechanics* 35, 1968, 379-386.
- [19] PARIS, P.C, et al. A Critical Analyses of Crack Propagation Laws. *Journal of Basic Engineering*, roč. 85, 1960, 528-534.
- [20] WANG, C.H.: *Introduction to fracture mechanics*. Aeronautical and Maritime Research Laboratory Report GSTO-GD-0103. 1996.
- [21] ŠEVČÍK, M., HUTAŘ, P., ZOUHAR, M., NÁHLÍK, L.: Numerical estimation of the fatigue crack front shape for a specimen with finite thickness. *International Journal of Fatigue* 39, 2012, 75-80.