Spolufinancováno Evropskou unií

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

# ONLINE KURZ MATEMATIKY

# (VÝSTUP V PDF)


**doc. RNDr. Dana Hliněná, Ph.D.**
**doc. RNDr. Michal Novák, Ph.D.**



**Kurz je realizován v rámci projektu**
**NEXT GENERATION VUT: Zvyšování kvality a relevance vzdělávání na VUT**
**CZ.02.02.XX/00/23_022/0009052**


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

# 1. Množiny a logika

**Matematický jazyk**

Znalost elementárních matematických poznatků je prospěšná pro život člověka. Celá historie rozvoje lidské společnosti je proto spjata s rozvojem matematiky. V minulosti rozvoj matematických poznatků souvisel s rozvojem přírodních věd, proto se matematika často řadí mezi přírodné vědy. Podstata matematiky je mnohem širší než zkoumání vztahů v živé, nebo neživé přírodě. Matematika vytvořila na základě abstrakcí ideální objekty, prostředníctvím kterých může zkoumat kupříkladu ekonomické procesy, jazykové zákonitosti, sociologický výzkum. Dokonce, matematiku používají všechny vědné oblasti jako univerzální jazyk, pomocí kterého formulují odhalené zákonitosti a úroveň příslušné vědné disciplíny je do značné míry závislá na míře používání matematického jazyka, metod a modelů.
Proto je důležité osvojit si matematický jazyk, který se od běžného jazyka liší nejen symbolikou, ale také způsobem tvoření vět -výroků, tj. speciálních matematických formulí. Důvodem pro používání předmětového, matematického, jazyka je nejen to, že některé matematické poznatky bychom v běžném jazyce vyjádřovali komplikovaně, ale také v tom, že běžný jazyk umožňuje tvorbu různých paradoxů. Kupříkladu, když máme výroky

1. $2 + 2 = 4$.
2. $2 + 2 = 5$.
3. Právě jeden z těchto výroků (t.j. 1-3) je pravdivý.

Jak je to s výrokem 3? Kdyby byl výrok 3 pravdivý, potom výroky 1 a 2 musí být nepravdivé, ale evidentně výrok 1 pravdivý je. Kdyby naopak byl výrok 3 nepravdivý, potom také zbylé dva výroky musejí být nepravdivé, nebo naopak, zbylé dva výroky musejí být pravdivé. Ani jedna z těchto možností není možná a proto se jedná o tzv. paradox. Tento paradox vzniká proto, že, výrok 3 hovoří o pravdivosti výroků 1-3, tedy mj. i sebe sama.
Pro správné pochopení matematických textů a matematiky vůbec, je důležité matematickému jazyku a jeho zákonitostem porozumět. Kdybychom si představili matematiku jako hrad, v jeho základech bude matematická logika a teorie množin. Proto s těmito partiemi matematiky začneme.

## Výroky

Výrokem rozumíme každou oznamovací větu, pro kterou může nastat jen jedna z možností: může být pravdivá nebo nepravdivá. Výrok tedy má danou pravdivostní hodnotu, a to 1, když je pravdivý, nebo 0, když je nepravdivý.

Příklady výroků:

1. Číslo 2 je sudé.
2. Praha je hlavní město České republiky.
3. $\sqrt{2}$ je racionální číslo.

Výroky 1 a 2 jsou pravdivé, poslední výrok je nepravdivý. Za výroky nepovažujeme nadpisy, rozkazovací a tázací věty, ale ani oznamovací věty, které nejsou úplné nebo jsou nejasně formulované. Jinak řečeno, za výroky považujeme jenom taková srozumitelná tvrzení, o jejichž pravdivosti můžeme rozhodnout.

## Složené výroky

Rozhodování o pravdivosti výroků je předmětem studia tzv. výrokového počtu. Kromě výroků relativně jednoduchých (jako v předchozím případě) se výrokový počet zabývá skládáním výroků pomocí tzv. logických spojek, které si postupně představíme.

Jestliže $A$ je výrok, pak $\neg A$ značí jeho negaci, tedy výrok, pro jehož pravdivostní hodnotu platí: jestliže $A$ je pravdivý, tak $\neg A$ je nepravdivý a naopak, jestliže $A$ je nepravdivý, tak $\neg A$ je pravdivý. Když je výrok $A$ zapsán v běžném jazyce, tak jeho negaci tvoříme pomocí slovního spojení „není pravda, že “, záměnou „je“ za „není“, případně pomocí předpony „ne – “.

Např. negací výroku: číslo 2 je sudé, je výrok: Číslo 2 není sudé (nebo: Není pravda, že číslo 2 je sudé, resp. Číslo 2 je liché).

Když $A, B$ jsou výroky zapsané v běžném jazyce, pak „$A$ a $B$“ je také výrok a nazýváme ho konjunkcí výroků $A, B$. Když jsou výroky $A, B$ zapsané pomocí matematického jazyka, tak spojku „a“ nahrazujeme symbolem konjukce $\wedge$. Konjunkce výroků $A, B$ je pravdivá jenom, když jsou oba výroky $A, B$ pravdivé.

Výroky $A, B$ můžeme spojiť spojkou „nebo“, což formálně zapisujeme $A \vee B$. Takový složený výrok nazýváme disjunkcí. Disjunkce výroků $A, B$ je pravdivá, pokud aspoň jeden z výroků $A, B$ je pravdivý.

Najčastěji sa v matematice potkáváme se spojením „jestliže $A$, potom $B$“. Takové složení vŕoků formálně zapisujeme $A \Rightarrow B$ a nazýváme ho implikace s předpokladem $A$ a tvrzením $B$. Čteme ho také „z $A$ vypývá $B$“, nebo „$A$ implikuje $B$“. Implikace $A \Rightarrow B$ je nepravdivá jen tehdy, kdyžk $A$ platí a $B$ neplatí.

Posledním spojením výroků $A, B$ je „$A$ právě když $B$“. Takové složení výroků formálně zapisujeme $A \Leftrightarrow B$ a nazýváme ho ekvivalence výroků $A, B$. Ekvivalence $A \Leftrightarrow B$ je pravdivá v případech, kdy výroky $A, B$ mají stejnou pravdivostní hodnotu.

V matematické logice je závislost pravdivosti složených výroků na pravdivosti jejich složek dána následující tabulkou:

| $ph(p)$ | $ph(q)$ | $ph(\neg p)$ | $ph(p \wedge q)$ | $ph(p \vee q)$ | $ph(p \Rightarrow q)$ | $ph(p \Leftrightarrow q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

Tvoření složených výroků nepodmíňujeme ani obsahovou, ani formální souvislostí jejich složek. Proto z pohledu matematické logiky je korektní také výrok „Když je $2+2=5$, tak existuje trojúhelník, jehož všechny vnitřní úhly jsou pravé“. Tento výrok je navíc pravdivý.

**Výrokové formule**

Proměnnou, jejímž oborem je množina výroků, nazýváme výroková proměnná. Z výrokových proměnných tvoříme pomocí logických spojek $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ výrokové formule. Výroky typu $A \wedge B, A \vee B, A \Rightarrow B, A \Leftrightarrow B$ nazýváme složené výroky. Ze složených výroků můžeme pomocí logických spojek dále tvořit nové složené výroky, resp. výrokové formule. Postup, kterým zjistíme pravdivostní hodnotu výrokové formule pro jednotivé vstupní hodnoty výrokových proměnných ukážeme na příkladu.

Příklad

**Příklad 1.** *Nechť $A, B, C$ jsou výrokové proměnné. Zjistěte, jestli*

$$(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow \big((A \wedge C) \Leftrightarrow (B \wedge C)\big)$$

*je výroková formule. Pokud ano, určete její pravdivostní hodnoty pro vstupní hodnoty výrokových proměnných $A, B, C$.*

**Řešení.** *Vzhledem k tomu, že $A, B, C$ jsou výrokové proměnné a $\Leftrightarrow, \wedge$ jsou logické spojky, jsou $A \Leftrightarrow B, A \wedge C, B \wedge C$ výrokové formule. Potom také $\big((A \wedge C) \Leftrightarrow (B \wedge C)\big)$ je výroková formule. A tedy $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow \big((A \wedge C) \Leftrightarrow (B \wedge C)\big)$ je výroková formule. Uvedenou výrokovou formuli jsme postupně poskládali z formulí: $A, B, C, A \Leftrightarrow B, A \wedge C, B \wedge C, \big((A \wedge C) \Leftrightarrow (B \wedge C)\big), (A \Leftrightarrow B) \Rightarrow \big((A \wedge C) \Leftrightarrow (B \wedge C)\big)$. Tato posloupnost formulí se nazýva vytvářející posloupnost formule $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow \big((A \wedge C) \Leftrightarrow (B \wedge C)\big)$.*

*Pro každou výrokovou formuli můžeme vytvořit tabulku pravdivostních hodnot podla následujícího návodu:*

1. *Do záhlaví napíšeme všechny členy vytvářející posloupnosti formule.*
2. *Pod proměnné vypíšeme do řádků všechny možné $n$–tice utvořené z pravdivostních hodnot $0, 1$. POkud má formule $n$ proměnných, je počet $n$–tic $2^n$. Všimněte si, jak tyto $n-$tice vypisujeme. Pod proměnnou $C$ se střídají hodnoty $0, 1$ v každém řádku, pod proměnnou $B$ v každém druhém řádku a pod proměnnou $A$ v každém čtvrtém řádku (takto bychom při větším počtu proměnných postupovali ve střídání v každém $2^n-$tém řádku). Tento systém nám zabezpečí to, že žádná možnost nebude vynecháná, resp. zopakováná.*
3. *Ve shode s tabulkou pro pravdivostní hodnoty logických spojek vyplníme sloupce pod zbylými členy vytvářející posloupnosti.*

*Pro formuli $F = (A \Leftrightarrow B) \Rightarrow \big((A \wedge C) \Leftrightarrow (B \wedge C)\big)$ vytvoříme následující tabulku.*

| $A$ | $B$ | $C$ | $A \Leftrightarrow B$ | $A \wedge C$ | $B \wedge C$ | $(A \wedge C) \Leftrightarrow (B \wedge C)$ | $F$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

*Vidíme, že formule $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow \big((A \wedge C) \Leftrightarrow (B \wedge C)\big)$ je pravdivá pro všechny kombinace vstupů proměnných $A, B, C$.*

**Tautologie**

V matematice jsou zvlášť důležité takové formule, které mají v posledním sloupci tabulky pouze hodnoty 1. Takové výrokové formule jsou pravdivé pro libovolné hodnoty výrokových proměnných. Nazýváme je tautologie. Formule, která má v posledním sloupci tabuľky jen hodnoty 0, se nazývá kontradikce.
Pomocí tabulek pravdivostních hodnot můžete dokázat, že následující výrokové formule jsou tautologie:

1. $A \Leftrightarrow \neg(\neg A)$,
2. $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$, $\quad (A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$,
3. $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$, $\quad (A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$,
4. $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$, $\quad A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$,
5. $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$, $\quad \neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$,
6. $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)\big)$,
7. $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$,
8. $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$.

## Kvantifikované výroky a výrokové formy

Ve výrokovém počtu jsme se zabývali tvorbou složených výroků a závislostí jejich pravdivosti na pravdivosti jednotlivých složek. Strukturou jednotlivých výroků jsme sa nezabývali.

Nejprve vysvětlíme význam dvou symbolů. Zápis $\exists x$ čteme „existuje $x$“, $\exists$ je tzv. existenční kvantifikátor. Používáme ho tehdy, když chceme říct, že existuje alespoň jeden prvek z množiny, nad kterou pracujeme, pro který platí formule za kvantifikátorem. Zápis $\forall x$ čteme „pro každé $x$“, $\forall$ je všeobecný kvantifikátor. Používáme ho tehdy, když chceme říct, že pro všechny prvky z množiny, nad kterou pracujeme, platí formule za kvantifikátorem.

Kupříkladu $\exists x \in \mathbb{R}\colon (x^2 - 1 = 0)$ znamená, že rovnice $x^2 - 1 = 0$ má alespoň jedno reálné řešení, jinými slovy, že existuje alespoň jedno reálné číslo, pro které je $x^2 - 1 = 0$. Naopak $\forall x \in \mathbb{R}\colon (x^2 + 1 \neq 0)$, znamená, že rovnice $x^2 + 1 = 0$ nemá žádné reálné řešení, případně, že pro každé reálné číslo je $x^2 + 1 \neq 0$.

Pro zavedení množin, pojmu, kterému se budeme věnovat v další části textu, potřebujeme vysvětlit ješte jeden pojem, a to pojem výrokové formy. Výroková forma je tvrzení obsahující proměnné, které se po dosazení přípustných konstant za proměnné stává výrokem. Typickým příkladem výrokové formy jsou rovnice a nerovnice. Když ve výrokové formě nad množinou $A$ s promeňnou $x$ dosadíme za $x$ nějaký prvek $a \in A$, tak můžeme, ale také nemusíme dostat výrok. Například když dosadíme do následující výrokové formy nad $\mathbb{R}$

$$4 - x = \frac{3}{x}$$

za $x$ číslo 1, dostaneme pravdivý výrok, ak dosadíme číslo 2, dostaneme nepravdivý výrok. A když dosadíme za $x$ číslo 0, tak na pravé straně rovnice dostaneme zápis $\frac{3}{0}$, který nereprezentuje žádné reálné číslo. Množinu všech takových prvků, po dosazení kterých dostaneme pravdivý výrok, nazýváme obor pravdivosti výrokové formy. Množiny obvykle zadáváme vyjmenováním prvků ale také jako ako obor pravdivosti výrokové formy, což zapisujeme následovně:

$$M = \{x \in A\colon V(x)\}.$$

Znamená to, že množina $M$ obsahuje všechny prvky z množiny $A$, pro které je výroková forma $V$ s proměnnou $x$ pravdivým výrokem. Například interval $\langle 1, 3)$ můžeme zapsať následujícím způsobem

$$M = \{x \in \mathbb{R}\colon 1 \leq x < 3\}.$$

## Množiny

Pojem množina patří mezi nejzákladnější pojmy v matematice. Dá se říct, že teorie množin je vhodný základ pro všechny matematické disciplíny. Množinou rozumíme souhrn (skupinu, soubor) nějakých navzájem různých objektů, které dle nějakého kritéria tvoří jeden celek.

Množina je určená, když o každém objektu možno rozhodnout, zda je, nebo není jejím prvkem. Jestliže prvek $x$ je prvkem množiny $A$, píšeme $x \in A$. V opačném případě píšeme $x \notin A$. Když kupříkladu prvky množiny $A$ jsou čísla $1, 2, 3$ a jiné prvky množina $A$ nemá, zapisujeme to $A = \{1, 2, 3\}$. Stejně správný zápis bude také $A = \{2, 1, 3\}$. Na pořadí prvků totiž nezáleží. V takomto případě říkáme, že množina je dána výčtem prvků. Prázdnou množinu, tedy množinu, která nemá žádné prvky, označujeme symbolem $\emptyset$, nebo $\{\}$. Množina $\{\emptyset\}$ je naopak jednoprvková množina, prvkem které je prázdná množina.

Obvykle používané číselné množiny označujeme následovně:

- $\mathbb{N}$ – množina přirozených čísel,
- $\mathbb{Z}$ – množina celých čísel,
- $\mathbb{Q}$ – množina racionálních čísel,
- $\mathbb{R}$ – množina reálných čísel,
- $\mathbb{C}$ – množina komplexních čísel.

**Definice 2.** *Řekneme, že množina $A$ je podmnožinou množiny $B$ a píšeme $A \subseteq B$, když každý prvek množiny $A$ je prvkem množiny $B$. Když chceme zdůraznit, že $A \subseteq B$ a $A \neq B$, tak píšeme $A \subset B$ a říkáme, že $A$ je vlastní podmnožina množiny $B$.*

**Poznámka 3.** *Pro každou množinu $A$ platí: $\emptyset \subseteq A$, $A \subseteq A$.*

**Definice 4.** *Řekneme, že množiny $A, B$ se rovnají, pokud platí že $A \subseteq B$ a také $B \subseteq A$.*

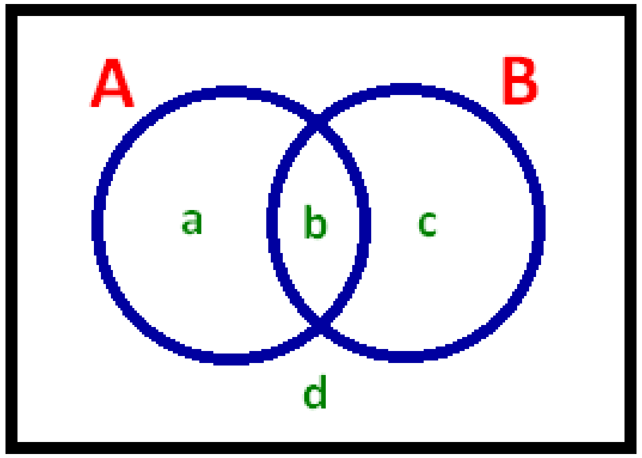
Jak již bylo řečeno, množiny mohou být zadány výčtem prvků, ale také jako obor pravdivosti nějaké výrokové formy. Tento druhý způsob je užitečný zejména při zadávání nekonečných množin. Zopakujeme ho při definování různých typů intervalů na množině reálných čísel:

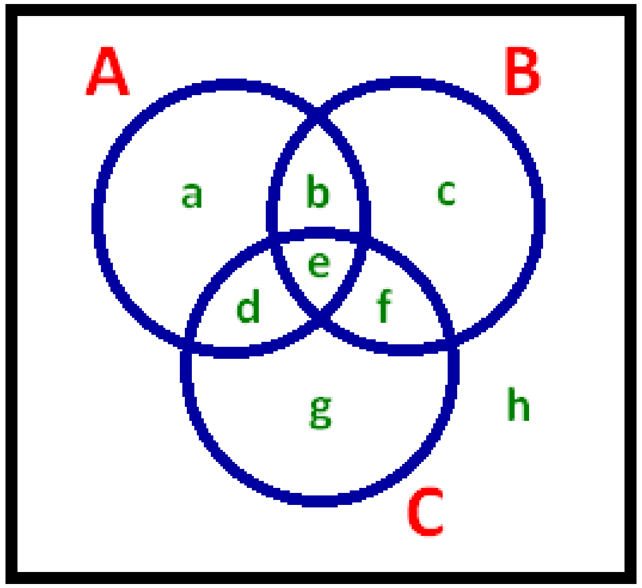
- uzavřený interval je $\langle a, b\rangle = \{x \colon a \leq x \leq b\}$,
- otevřený interval je $(a, b) = \{x \colon a < x < b\}$,
- zleva otevřený a zprava uzavřený interval je $(a, b\rangle = \{x \colon a < x \leq b\}$,
- zprava otevřený a zleva uzavřený interval je $\langle a, b) = \{x \colon a \leq x < b\}$.

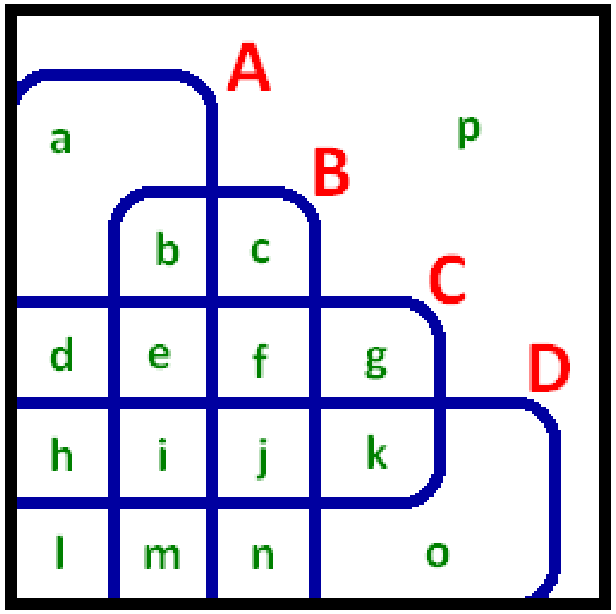
**Poznámka 5.** *Pro $a, b \in \mathbb{R}$, které jsou postupně použité jako levý a pravý okraj intervalů, platí vždy, že $a < b$.*

**Vennovy diagramy**

Pro neformální pochopení je užitečné zobrazovat množinové operace a vztahy pomocí tzv. Vennových diagramů, které umějí znázornit všechny možné vztahy několika množin. Pro dvě, tři a čtyři množiny používáme následující diagramy:




Princip Vennových diagramů vysvětlíme pro dvě množiny. Na obrázku máme množiny $A$ a $B$ a máme vyznačené čtyři oblasti $a, b, c, d$. V oblasti $a$ se nacházejí prvky, které patří do množiny $A$, ale nepatří do množiny $B$. V oblasti $c$ jsou prvky, které patří do množiny $B$ a nepatří do $A$. V oblasti $b$ jsou prvky, které mají množiny $A, B$ společné a do oblasti $d$ patří prvky, které nepatří ani do jedné z množin $A, B$. Analogický postup používáme pro zobrazení vztahů mezi více množinami.

**Množinové operace: sjednocení**

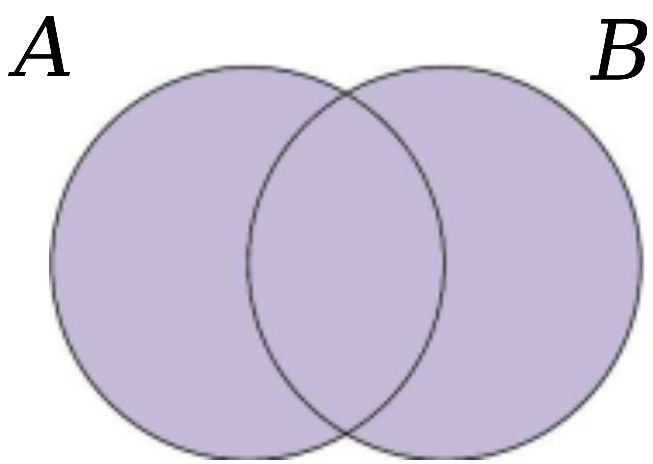
Ke každým dvěma množinám $A, B$ můžeme přiradit množinu

$$A \cup B = \{x \colon x \in A \vee x \in B\},$$

kterou nazýváme sjednocení množin $A, B$, pričemž

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B.$$

Graficky můžeme sjednocení množin znázornit následovně:




Pro sjednocení množin platí:

- $A \cup \emptyset = A$,
- $A \cup A = A$,
- $A \cup B = B \cup A$,
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

**Množinové operace: průnik**

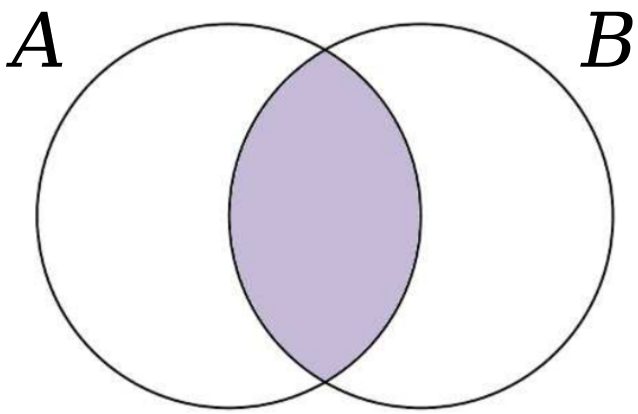
Ke každým dvěma množinám $A, B$ můžeme přiradit množinu

$$A \cap B = \{x \colon x \in A \wedge x \in B\},$$

kterou nazýváme průnik množin $A, B$, pričemž

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B.$$

Graficky můžeme půnik množin znázornit následovně:




Pro průnik množin platí

- $A \cap \emptyset = \emptyset$,
- $A \cap A = A$,
- $A \cap B = B \cap A$,
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

Když o množinách $A, B$ platí $A \cap B = \emptyset$, říkáme, že množiny $A, B$ jsou disjunktní.

## Množinové operace: rozdíl

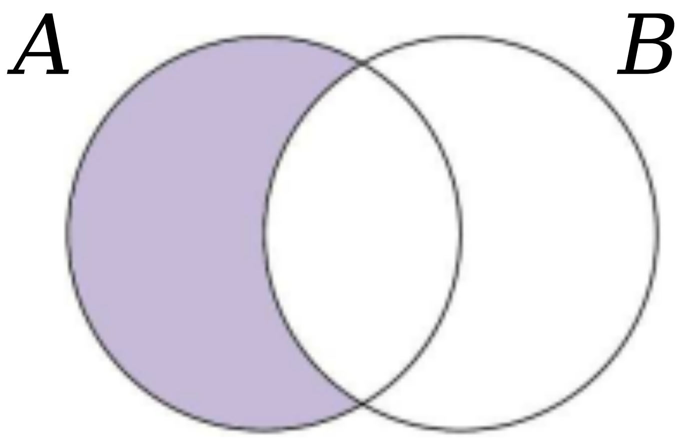
Ke každým dvěma množinám $A, B$ můžeme přiradit množinu

$$A \setminus B = \{x\colon x \in A \wedge x \notin B\},$$

kterou nazýváme rozdíl množin $A, B$, pričemž

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B.$$

Graficky můžeme rozdíl množin znázornit následovně:




Rozdíl množin má následující vlastnosti:

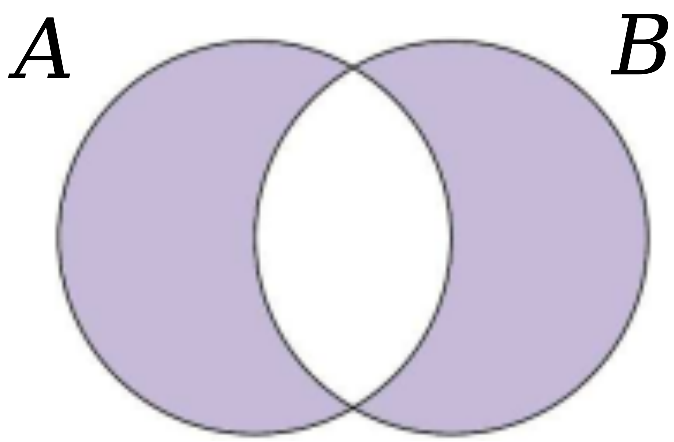
- $A \setminus \emptyset = A$,
- $A \setminus A = \emptyset$,
- $A \setminus B \neq B \setminus A$,
- $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$.

**Množinové operace: symetrický rozdíl**

Ke každým dvěma množinám $A, B$ můžeme přiradit množinu

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

kterou nazýváme symetrický rozdíl množin $A, B$. Graficky to můžeme znázornit následovně:




Symetrický rozdíl množin má následující vlastnosti:

- $A\Delta B = B\Delta A$,
- $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$,
- $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$.

**Množinové operace: doplněk**

Když $M$ je nějaká základní množina a $A \subseteq M$, potom

$$A'_M = M \setminus A$$

je doplněk množiny $A$ vzhledem k množine $M$, pričemž

$$x \in A'_M \Leftrightarrow x \in M \wedge x \notin A.$$

Tato operace je speciální v tom, že vždy musí být uvedeno, k jaké základní množině tvoříme doplněk. Pro $M = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1, 2\}$, je $A'_M = \{3\}$, zatímco pro $P = \{1, 2, 3, 4\}$ je $A'_P = \{3, 4\}$. Pro doplněk množiny $A$ vzhledem množině $M$ platí:

- $(A'_M)'_M = A$,
- $(A \cup B)'_M = A'_M \cap B'_M$,
- $(A \cap B)'_M = A'_M \cup B'_M$,
- $(A \setminus B)'_M = A'_M \cup B$.

## Kartézsky součin

Užitečným matematickým pojmem je uspořádaná dvojice. Pro rovnost uspořádaných dvojic platí:

$$[a, b] = [c, d] \;\Leftrightarrow\; a = c \wedge b = d.$$

**Poznámka 6.** *Studenti často zaměňují* $\{a, b\}$ *a* $[a, b]$*. Rozdíl je v tom, že* $\{a, b\}$ *je zápis dvouprvkové množiny, kde na pořadí prvků nezáleží a tuto dvouprvkovou množinu můžeme zapsat také jako* $\{b, a\}$*. Ale* $[a, b]$ *je uspořádaná dvojice, ve které je pořadí prvků pevně dané.*

S pojmem uspořádané dvojice úzce souvisí pojem kartézského součinu:

**Definice 7.** *Nechť* $A, B$ *jsou množiny. Kartézským součinem* $A \times B$ *množiny* $A$ *a množiny* $B$ *rozumíme množinu všech uspořádaných dvojic, jejichž první složka je prvkem množiny* $A$ *a druhá je prvkem množiny* $B$*. Tedy*

$$A \times B = \{[x, y] \colon x \in A \wedge y \in B\},$$

*pričemž*

$$[x, y] \in A \times B \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B.$$

Příklad

**Příklad 8.** *Vypište všechny prvky množiny $M$, která je zadána jako*

$$M = \{n \in \mathbb{N} \colon 5 \leq n < 10\}.$$

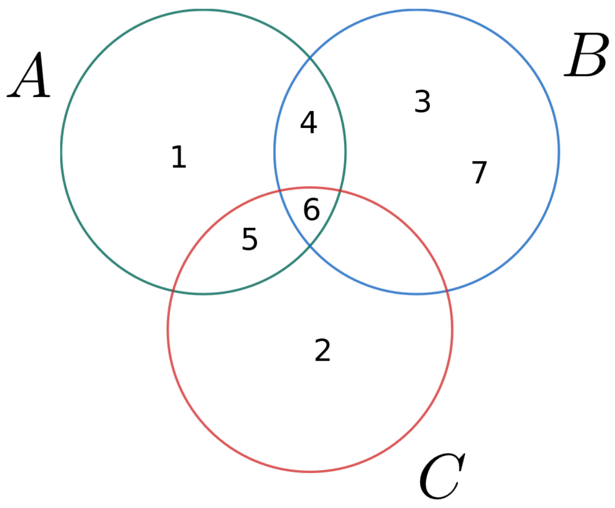
**Řešení.** *Pro každý prvek $n$ z množiny $M$ musí být splněno $5 \leq n < 10$ a také musíme dodržet to, že pracujeme pouze s přirozenými čísly. Proto*

$$M = \{5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Příklad

**Příklad 9.** *Nechť* $A = \{1, 4, 5, 6\}$, $B = \{3, 4, 6, 7\}$, $C = \{2, 5, 6\}$. *Určete* $A \cup B$, $A \cap C$, $C \setminus B$, $A \setminus (C \setminus B)$, $A \cap (B \setminus C)$.

**Řešení.** *Před samotným řešením si uvedené množiny zakreslíme do Vennových diagramů, ve kterých umístíme prvky množin tak, aby odpovídaly skutečnosti. Pak můžeme ihned psát výsledky.*




- $A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$,
- $A \cap C = \{5, 6\}$,
- $C \setminus B = \{2, 5\}$,
- $A \setminus (C \setminus B) = \{1, 4, 6\}$,
- $A \cap (B \setminus C) = \{4\}$,

Příklad

**Příklad 10.** *Nechť* $A = \{1, 2, 3, 13\}, B = \{2, 4, 6, 13\}, C = \{1, 3, 6, 13\}$. *Určete*

$$A\Delta B, A\Delta(B\Delta C).$$

**Řešení.** *Do symetrického rozdílu množin* $A, B$ *patří prvky, které tyto dvě množiny nemají společné, proto*

$$A\Delta B = \{1, 3, 4, 6\}.$$

*Druhá část úlohy je trochu náročnější, zde využijeme toho, že symetrický rozdíl je asociativní (co znamená, že* $\forall A, B, C\colon A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$ *a využijeme předchozí výsledek. Potom*

$$A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C = \{1, 3, 4, 6\}\Delta\{1, 3, 6, 13\}.$$

*A následně je*

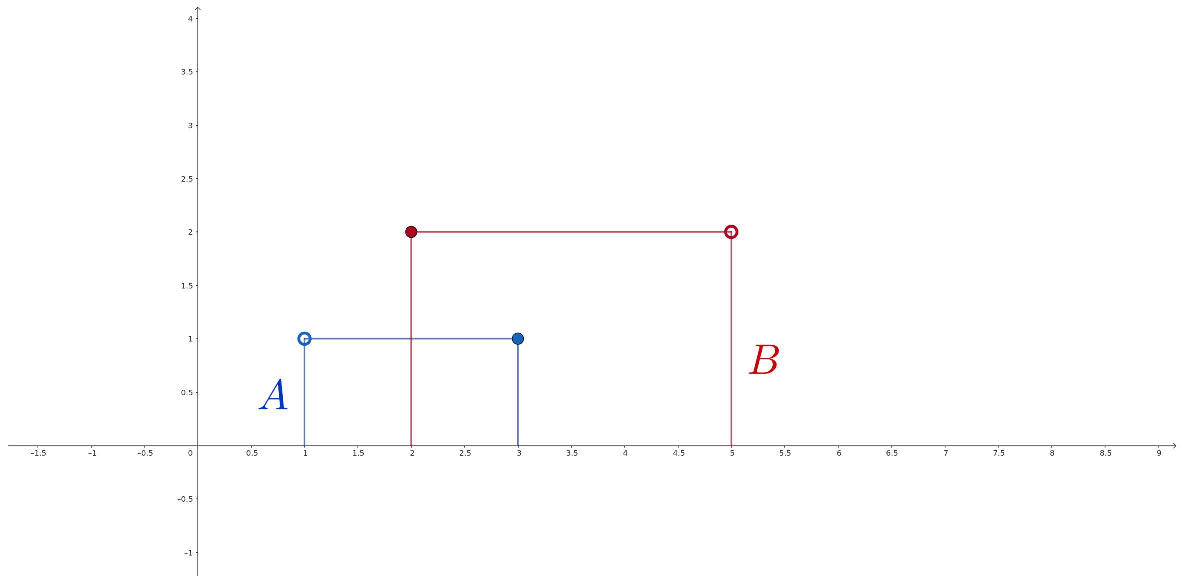
$$A\Delta(B\Delta C) = \{4, 13\}.$$

**Poznámka 11.** *Všimněte si, že množina* $A\Delta(B\Delta C)$ *obsahuje jenom takové prvky, které patří do všech tří množin (prvek* $13$*), nebo takové prvky, které se vyskytují právě v jedné z uvedených tří množin (prvek* $4$*). Toto není náhoda, toto platí pro libovolnou trojici množin.*

Příklad

**Příklad 12.** *Nechť* $A = (1, 3\rangle$, $B = \langle 2, 5)$. *Určete* $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$, $A \setminus (A \setminus B)$, $B \setminus (B \setminus A)$, $A \setminus (B \setminus A)$, $B \setminus (A \setminus B)$, $(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$.

**Řešení.** *Protože pracujeme s intervaly reálných čísel, před samotným řešením si vše zakreslíme na číselnou osu:*




- $A \cup B = (1, 5)$,
- $A \cap B = \langle 2, 3\rangle$,
- $B \setminus A = (3, 5)$,
- $A \setminus (A \setminus B) = \langle 2, 3\rangle$,
- $B \setminus (B \setminus A) = \langle 2, 3\rangle$,
- $A \setminus (B \setminus A) = (1, 3\rangle$,
- $B \setminus (A \setminus B) = \langle 2, 5)$,
- $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$.

**Příklad**

**Příklad 13.** *Nechť* $A = \{1, 2, 3\}, B = \{\circ, \star\}$. *Určete* $A \times B, B \times A$.

**Řešení.** *Z definice kartézskeho součinu máme:*

$$A \times B = \{[1, \circ], [1, \star], [2, \circ], [2, \star], [3, \circ], [3, \star]\},$$

$$B \times A = \{[\circ, 1], [\star, 1], [\circ, 2], [\star, 2], [\circ, 3], [\star, 3]\}.$$

*Při řešení této úlohy je důležité pořadí množin a systematické vypisování dvojic. Při* $A \times B$ *jsme vybrali první prvek z výčtu prvků množiny* $A$ *a vytvořili jsme postupně všechny dvojice, kde tento prvek byl na prvním místě a na druhém místě se postupně vystřídaly prvky z množiny* $B$. $A$ *takto postupujeme, dokud neprojdeme všechny prvky množiny* $A$.

**Příklad**

**Příklad 14.** *Určete možné množiny* $X, Y$ *tak, aby platilo:* $X \cap Y = \emptyset, X \cup Y = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, *ke každému* $a \in X$ *existuje* $b \in Y$ *tak, že* $b = a + 4$.

**Řešení.** *Z podmínky:* $\forall a \in X \exists b \in Y : b = a + 4$ *plyne, že* $X \subseteq \{1,2,3\}$. *Kdyby např.* $4 \in X$, *pak z uvedené podmínky by* $8 \in Y$, *ale* $X \cup Y = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. *Proto máme pro dvojice množin* $X, Y$ *tyto možnosti:*

1. $X_1 = \emptyset, Y_1 = \{1,2,3,4,5,6,7\}$,
2. $X_2 = \{1\}, Y_2 = \{2,3,4,5,6,7\}$,
3. $X_3 = \{2\}, Y_3 = \{1,3,4,5,6,7\}$,
4. $X_4 = \{3\}, Y_4 = \{1,2,4,5,6,7\}$,
5. $X_5 = \{1,2\}, Y_5 = \{3,4,5,6,7\}$,
6. $X_6 = \{1,3\}, Y_6 = \{2,4,5,6,7\}$,
7. $X_7 = \{2,3\}, Y_7 = \{1,4,5,6,7\}$,
8. $X_8 = \{1,2,3\}, Y_8 = \{4,5,6,7\}$.

*Dobře si promyslete, že podmínka ze zadaní platí také pro* $X_1 = \emptyset$. *Podmínka musí být splněna pro všechny prvky množiny* $X_1$. *Vzhledem k tomu, že množina* $X_1$ *neobsahuje žádný prvek, je podmínka automaticky splněna. Množiny je vhodné vypisovat systematicky, abychom na žádnou nezapomněli.*

Příklad

**Příklad 15.** *Uveďte příklad množin* $A, B$*, pro které platí* $A \in B$ *a* $A \subseteq B$.

**Řešení.** *Začneme množinou* $A$. *Každý prvek z množiny* $A$ *musí patřit do množiny* $B$, *ale také celá množina* $A$ *musí být prvkem množiny* $B$. *Nechť* $A = \{2\}$, *potom musí být splněno* $2 \in B$, *protože* $2 \in A$. *A také* $\{2\} \in B$, *protože má platit, že* $A \in B$. *Proto* $B = \{2, \{2\}\}$.

# 1 Test

1. Nechť $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 4, 6, 7, 8\}$. Potom $A \setminus B =$
   (a) $\{\}$
   (b) $\{1, 3\}$
   (c) $\{6, 7, 8\}$
   (d) $1, 3$
2. Nechť $A = \langle 1, 5\rangle, B = (-1, 3)$. Potom $A \cap B =$
   (a) $\langle 1, 3)$
   (b) $\langle 1, 3\rangle$
   (c) $(3, 1\rangle$
   (d) $\langle 3, 1\rangle$
3. Nechť $A = \langle 1, 5\rangle, B = (-1, 3)$. Potom $A \setminus B =$
   (a) $\langle 3, 5\rangle$
   (b) $\langle 5, 3\rangle$
   (c) $(-1, 5)$
   (d) $(-1, 1)$
4. Které dvojice množin nejsou disjunktní?
   (a) $A = (1, 2)\,, B = \left\langle -1, \frac{3}{2}\right\rangle$
   (b) $A = (1, 2)\,, B = \langle -1, 1\rangle$
   (c) $A = (-1, 2)\,, B = \left\langle 2, \frac{5}{2}\right\rangle$
   (d) $A = (1, 2\rangle\,, B = \langle 2, 7\rangle$
5. Nechť $M = \{n \in \mathbb{R}\colon 5 \leq n < 10\}$. Potom
   (a) $M = (10, 5\rangle$
   (b) $M = \langle 5, 10)$
   (c) $M = \langle 5, 10\rangle$
   (d) $M = \{5, 6, 7, 8, 9\}$
6. Nechť $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5\}$. Potom $A \times B =$
   (a) $\{[1, 4], [1, 5], [2, 4], [2, 5], [3, 4], [3, 5]\}$
   (b) $\{\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}$
   (c) $\{[4, 1], [5, 1], [4, 2], [5, 2], [4, 3], [5, 3]\}$
   (d) $\{4, 5, 8, 10, 12, 15\}$
7. Jestliže $x \in \langle 1, 5\rangle \wedge x \in (-1, 3)$, potom $x \in$

(a) $\langle 1, 3\rangle$

(b) $(1, 3)$

(c) $(-1, 5\rangle$

(d) $\langle 1, 3)$

8. Jestliže $x \in \langle 1, 5\rangle \vee x \in (-1, 3)$, potom $x \in$

   (a) $\langle -1, 5\rangle$

   (b) $(-1, 5)$

   (c) $(-1, 5\rangle$

   (d) $\langle 1, 3)$

9. Nechť $A = (-\infty, x+2\rangle\,, B = \langle \frac{x}{2}, 4\rangle$. Pro $x = 4$ je

   (a) $A \cap B = \emptyset$

   (b) $A \subseteq B$

   (c) $B \subseteq A$

   (d) $A = B$

10. Nechť $A = (-\infty, x)\,, B = \langle \frac{x}{2}, 6\rangle$. Pro $x = 4$ je

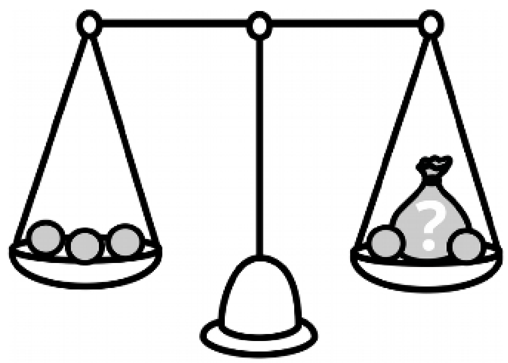
    (a) $A \cap B = \emptyset$

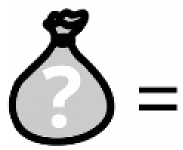
    (b) $A \subseteq B$

    (c) $B \subseteq A$

    (d) $A \cap B \neq \emptyset$

**Rovnice a nerovnice**





### Lineární rovnice

Lineární rovnice je rovnice o jedné neznámé, která v rovnici vystupuje nejvýše v první mocnině. Její základní tvar vypadá následovně:

$$ax + b = 0.$$

Pokud je $a \neq 0$ má rovnice jediné řešení $x = -\frac{b}{a}$. Zadání ale může vypadat nař. také takto:

$$2 \cdot (3 - x) - 3 \cdot (1 - 3x) = 2 \cdot (3 - 4x).$$

Obvykle základní tvar získáme až různých úprav. Tyto úpravy si postupně vysvětlíme.

**Dílčí úpravy rovnic na levé a pravé straně**

Všechny následující úpravy můžeme provádět bez omezení, protože pouze mění podobu výrazů na jednotlivých stranách a tyto výrazy mají před a po úpravě stejný smysl.
**Sčítání a odčítání:**
Obvyklým způsobem pracujeme s čísly a neznámou, např. v rovnici:

$$2x-3+5x-3=3x-7x+2+6$$

sečteme na levé straně čísla $-3$ a $-3$ a dostaneme:

$$2x-6+5x=3x-7x+2+6$$

pak sečteme na levé straně výrazy obsahujíci neznámou $x$

$$7x-6=3x-7x+2+6$$

a podobně upravíme také pravou stranu

$$7x-6=-4x+8.$$

**Dílčí úpravy rovnic na levé a pravé straně**

**Roznásobení závorek a vytýkání před závorku:**

- při roznásobování dáváme pozor na znaménka, např.:

$$2(x-5)-3(1-x)=0$$

$$2\cdot x-2\cdot 5+(-3)\cdot 1+(-3)\cdot(-x)=0$$

$$2x-10-3+3x=0$$

- vytýkání před závorku ukážeme na příkladě

$$3(x-1)-5(x-1)=0$$

Oba výrazy obsahují rozdíl $x-1$, který vytkneme před závorku, dáme pozor na znaménko před druhou závorkou:

$$(x-1)(3-5)=0 \iff (-2)(x-1)=0$$

## Dílčí úpravy rovnic na levé a pravé straně

**Převod na společného jmenovatele:**
V následující rovnici máme zlomky s různými jmenovateli. Pro další úpravy je potřebujeme upravit tak, aby měly stejného jmenovatele, který bude nejmenším společným násobkem jednotlivých jmenovatelů. Tj. bude se jednat o číslo, které je dělitelné všemi jmenovateli a zároveň je ze všech takových čísel nejmenší. Úprava spočívá v rozšíření zlomku vhodným číslem. Např., když chceme, aby zlomek $\frac{3}{4}$ měl ve jmenovateli hodnotu 12 a jeho hodnota se nezměnila, musíme čitatel a jmenovatel rozšířit třemi, co znamená, že

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}.$$

V následující rovnici chceme upravit zlomky na společného jmenovatele:

$$\frac{x}{2} + \frac{x-2}{3} = 2x - \frac{x}{6}.$$

Společný jmenovatel je 6, proto zlomky vhodně rozšíříme:

$$\frac{x \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{(x-2) \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2x \cdot 6}{1 \cdot 6} - \frac{x}{6}$$

po úpravě dostaneme

$$\frac{3x}{6} + \frac{2x-4}{6} = \frac{12x}{6} - \frac{x}{6}$$

a zlomky na obou stranách nyní můžeme sečíst

$$\frac{3x + 2x - 4}{6} = \frac{12x - x}{6}.$$

### Úpravy rovnic

**Přičítání a odčítání stejného výrazu k oběma stranám rovnice.**
Řešení rovnice nezměníme, když k oběma stranám rovnice přičteme stejné číslo, např. v následujícím příkladě −3:

$$x+3=5-2x \qquad \textit{přičteme } -3$$
$$x+3+(-3)=5-2x+(-3)$$
$$x=2-2x$$

nebo odečteme stejné číslo, např. tady 3:

$$x+3=5-2x \qquad \textit{odečteme } 3$$
$$x+3-3=5-2x-3$$
$$x=2-2x$$

nebo přičteme stejný algebraický výraz, např. tady $2x$

$$x=2-2x \qquad \textit{přičteme } 2x$$
$$x+2x=2-2x+2x$$
$$3x=2$$

nebo odečteme stejný algebraický výraz, např. zde $-2x$

$$x=2-2x \qquad \textit{odečteme } -2x$$
$$x-(-2x)=2-2x-(-2x)$$
$$3x=2$$

## Úpravy rovnic

**Násobení rovnice nenulovým číslem.**
Řešení rovnice nezměníme, když rovnici vynásobíme nenulovým číslem. V tomto příkladě např. číslem 2:

$$\tfrac{x}{2} + 3 = 5 - 2x \qquad \text{\textit{vynásobíme číslem} } \color{red}{2}$$

$$\left(\tfrac{x}{2} + 3\right) \cdot \color{red}{2} \color{black} = (5 - 2x) \cdot \color{red}{2}$$

$$\tfrac{x}{2} \cdot \color{red}{2} \color{black} + 3 \cdot \color{red}{2} \color{black} = 5 \cdot \color{red}{2} \color{black} - 2x \cdot \color{red}{2}$$

$$x + 6 = 10 - 4x$$

**Příklad**

**Příklad 1.** *Na množině reálných čísel řešte rovnici:*

$$2\cdot(3-x)-3\cdot(1-3x)=2\cdot(3-4x).$$

**Řešení.**

*přičteme k oběma stranám* — *upravíme levou a pravou stranu*

$$2\cdot(3-x)-3\cdot(1-3x)=2\cdot(3-4x)$$

$$6-2x-3+9x=6-8x$$

$$3+7x=6-8x$$

$$7x+8x=6-3$$

$$15x=3$$

$$x=\tfrac{3}{15}$$

$$x=\tfrac{1}{5}$$

*Řešením rovnice je* $x=\frac{1}{5}$.
*Správnost řešení ověříme zkouškou. Tu provedeme tak, že do levé a pravé strany zadané rovnice dosadíme za* $x$ *hodnotu* $\frac{1}{5}$*:*

$$L=2\cdot\left(3-\frac{1}{5}\right)-3\cdot\left(1-3\cdot\frac{1}{5}\right)=2\cdot\frac{14}{5}-3\cdot\frac{2}{5}=\frac{22}{5},$$

$$P=2\cdot\left(3-4\cdot\frac{1}{5}\right)=2\cdot\frac{11}{5}=\frac{22}{5}.$$

*Po dosazení jsou výsledné hodnoty na levé a pravé straně stejné, tudíž zkouška potvrdila správnost našeho řešení.*

## Lineární nerovnice

Lineární nerovnice má zpravidla takovýto tvar:

$$ax + b > 0.$$

Případně může být uvedený znak nerovnosti $>$ nahrazen jedním ze znaků $<, \leq, \geq$ . Řešením nerovnice může být prázdná množina (tj. nerovnici žádné reálné číslo nevyhovuje), konečná množina, nebo interval reálných čísel. Podobně jako u rovnic se k základnímu tvaru často dopracujeme až různými úpravami. Dílčí úpravy na levé a pravé straně nerovnice jsou stejné jako u rovnic.

## Úpravy lineárních nerovnic

**Přičítání a odčítání stejného výrazu k oběma stranám rovnice.**
Řešení nerovnice nezměníme, když k oběma stranám rovnice přičteme stejné číslo, např. v tomto přípaě $-3$:

$$\begin{aligned} x+3 &< 5-2x && \textit{přičteme } -3 \\ x+3+(-3) &< 5-2x+(-3) \\ x &< 2-2x \end{aligned}$$

nebo odečteme stejné číslo, např. 3 jako zde:

$$\begin{aligned} x+3 &< 5-2x && \textit{odečteme } 3 \\ x+3-3 &< 5-2x-3 \\ x &< 2-2x \end{aligned}$$

nebo přičteme stejný algebraický výraz, např. $2x$,

$$\begin{aligned} x &< 2-2x && \textit{přičteme } 2x \\ x+2x &< 2-2x+2x \\ 3x &< 2 \end{aligned}$$

nebo odečteme stejný algebraický výraz, např. zde $-2x$,

$$\begin{aligned} x &< 2-2x && \textit{odečteme } -2x \\ x-(-2x) &< 2-2x-(-2x) \\ 3x &< 2 \end{aligned}$$

## Úpravy lineárních nerovnic

**Násobení nerovnice kladným číslem.**
Řešení nerovnice nezměníme, když nerovnici vynásobíme kladným číslem. V tomto případě např 2:

$$
\begin{aligned}
\tfrac{x}{2} + 3 &> 5 - 2x \qquad \textit{vynásobíme číslem } {\color{red}2} \\
\left(\tfrac{x}{2} + 3\right) \cdot {\color{red}2} &> (5 - 2x) \cdot {\color{red}2} \\
\tfrac{x}{2} \cdot {\color{red}2} + 3 \cdot {\color{red}2} &> 5 \cdot {\color{red}2} - 2x \cdot {\color{red}2} \\
x + 6 &> 10 - 4x
\end{aligned}
$$

**Toto ovšem platí opravdu jen pro násobení kladným číslem!**

## Úpravy lineárních nerovnic

**Násobení nerovnice záporným číslem.**
Řešení nerovnice **zásadně změníme,** když nerovnici vynásobíme záporným číslem. Zde např $-2$:

$$\frac{x}{2} + 3 > 5 - 2x$$

*vynásobíme číslem $-2$*
*otočí se znak nerovnosti*

$$\left(\frac{x}{2} + 3\right) \cdot (-2) < (5 - 2x) \cdot (-2)$$

$$\frac{x}{2} \cdot (-2) + 3 \cdot (-2) < 5 \cdot (-2) - 2x \cdot (-2)$$

$$-x - 6 < -10 + 4x$$

Příklad

**Příklad 2.** *Na množině reálných čísel řešte nerovnici:*

$$4x - \frac{x-5}{2} > \frac{5x}{3} + 1.$$

**Řešení.**

$$\begin{aligned} 4x - \tfrac{x-5}{2} &> \tfrac{5x}{3} + 1 && \text{vynásobíme obě strany nerovnice nejmenším společným násobkem čísel } 2 \text{ a } 3, \text{ což je } 6 \\ 24x - 3x + 15 &> 10x + 6 \\ 21x + 15 &> 10x + 6 \\ 11x &> -9 \\ x &> -\tfrac{9}{11} \end{aligned}$$

*Řešením jsou všechna reálná čísla z intervalu* $\left(-\frac{9}{11}, \infty\right)$.

Příklad

**Příklad 3.** *Na množině reálných čísel řešte nerovnici:*

$$2x - \frac{x-5}{3} > \frac{5x}{3} + 1.$$

**Řešení.**

$$2x - \tfrac{x-5}{3} > \tfrac{5x}{3} + 1 \quad \textit{vynásobíme obě strany nerovnice číslem } 3$$

$$6x - x + 5 > 5x + 3$$

$$5x + 5 > 5x + 3$$

$$5 > 3$$

*Vzhledem k tomu, že jsme postupnými úpravami dostali pravdivé tvrzení* $(5 > 3)$*, řešením nerovnice jsou všechna reálná čísla.*

**Poznámka**

S řešením nerovnic se potkáváme také při úlohách z teorie množin. Dvě takové úlohy uvádíme.

**Příklad**

**Příklad 4.** *Pro která reálná čísla $x$ mají intervaly $\langle \frac{x-1}{2}, 3\rangle$ a $(-\infty, x+2\rangle$ neprázdný průnik?*

**Řešení.** *Z teorie víme, že levý okraj intervalu musí být menší než pravý okraj, z toho plyne první podmínka:*

$$\frac{x-1}{2} < 3.$$

*Tato podmínka je ekvivaletní s*

$$x - 1 < 6, \quad \textit{proto} \quad x < 7.$$

*Intervaly mají mít neprázdný průnik, z toho dostáváme druhou podmínku:*

$$\frac{x-1}{2} \leq x + 2,$$

*obě strany nerovnice vynásobíme dvěma a dostaneme*

$$x - 1 \leq 2x + 4,$$

*potom*

$$-5 \leq x.$$

*Obě podmínky musí platit současně, proto*

$$x < 7 \ \wedge \ -5 \leq x,$$

*potom*

$$x \in \langle -5, 7) \,.$$

Příklad

**Příklad 5.** *Pro která reálná čísla $x$ mají intervaly* $\left\langle \frac{4x}{3}, \infty \right)$ *a* $\langle -11, \frac{6x-2}{4} \rangle$ *prázdný průnik?*

**Řešení.** *Podobně jako v předchozím příkladu dostáváme první podmínku pro druhý iterval:*

$$-11 < \frac{6x-2}{4}.$$

*Tato podmínka je ekvivaletní s*

$$-44 < 6x - 2, \quad \textit{proto} \quad -42 < 6x,$$

*tedy*

$$-7 < x.$$

*Intervaly mají mít prázdný průnik, z toho dostáváme druhou podmínku:*

$$\frac{6x-2}{4} < \frac{4x}{3},$$

*obě strany nerovnice vynásobíme číslem* 12 *a dostaneme*

$$18x - 6 < 16,$$

*potom*

$$2x < 6 \Rightarrow x < 3.$$

*Obě podmínky musí platit současně, proto*

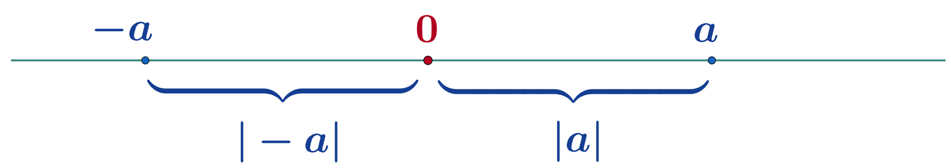
$$-7 < x \ \wedge \ x < 3,$$

*což znamená, že řešením naší úlohy je*

$$x \in (-7, 3)\,.$$

### Absolutní hodnota

Absolutní hodnota čísla je jeho vzdálenost od počátku soustavy souřadnic, tj. v případě reálnych čísel, která zobrazujeme na reálné ose, od nuly.




Absolutní hodnotu čísla $a$ značíme takto $|a|$. Pro kladné číslo $a$ je $|a| = a$, pro záporné číslo $a$ je $|a| = -a$. Absolutní hodnota nenulového čísla je tedy buď číslo samotné, nebo číslo k němu opačné. Toho využijeme dále při určování absolutní hodnoty výrazů, např. $|x - 1|$. Na ukázku uvádíme počítání s absolutní hodnotou:

- $|1| = 1$,
- $|-2| = 2$,
- $4 - |5 - 8| = 4 - |-3| = 4 - 3 = 1$,

Jakou geometrickou interpretaci má rovnice $|x - 1| = 2$? Tato rovnice vede na dvě možnosti, resp. na dvě rovnice: $x - 1 = 2$ nebo $x - 1 = -2$. Řešením první je $x = 3$ a řešením druhé je $x = -1$. Když nás zajímá geometrická interpretace, ptáme se, kdy má $x - 1$ vzdálenost od 0 rovnou hodnotě 2. Jinými slovy, které čísla mají od 1 vzdálenost rovnu 2. Obecně tedy geometrická interpretace rovnice $|x - a| = b$ je, že hledáme všechna $x$, které mají od čísla $a$ vzdálenost právě $b$.

Při řešení rovnic a nerovnic s absolutní hodnotou je klíčové zbavit se absolutní hodnoty. Způsob odstranění absolutní hodnoty si ukážeme na konkrétním příkladu. Jak vyhodnotíme např. výraz $|x - 3|$?

- Musíme si uvědomit, že výraz $x - 3$ v bodě $x = 3$ nabývá hodnotu 0 a nalevo od $x = 3$ nabývá záporných hodnot a napravo od $x = 3$ nabývá kladných hodnot.
- Pro $x \in (-\infty, 3)$ je $x - 3 < 0$ a proto po odstranění absolutní hodnoty změní znaménko, tedy: $|x - 3| = -(x - 3) = 3 - x$.
- Pro $x \in (3, \infty)$ je $x - 3 > 0$, proto po odstranění absolutní hodnoty nemění znaménko, tedy: $|x - 3| = x - 3$.

Příklad

**Příklad 6.** *Na množině reálných čísel řešte rovnici:*

$$|2x+4| = 6.$$

**Řešení.** *Nejdříve rovnici upravíme*

$$|2x+4| = 6 \iff |2(x+2)| = 6 \iff |2| \cdot |x+2| = 6 \iff |x+2| = 3.$$

*Úlohu vyřešíme dvěma způsoby:*

- *První způsob: Absolutní hodnota je vzdálenost, proto hledáme množinu reálných čísel, které mají od čísla* $-2$ *vzdálenost* $3$*. To jsou čísla* $-5$ *a* $1$*. Řešením rovnice je množina* $\{-5, 1\}$.
- *Druhý způsob: výraz* $(x+2)$ *mění znaménko v* $x = -2$*, proto budeme úlohu řešit postupně na intervalech:* $(-\infty, -2)$ *a* $\langle -2, \infty)$ :
  - *Nechť* $x \in (-\infty, -2)$*, v rovnici odstraníme absolutní hodnotu:*

    $$\begin{aligned} -x - 2 &= 3 \\ x &= -5 \quad \wedge \quad -5 \in (-\infty, -2)\,. \end{aligned}$$

  - *Nechť* $x \in \langle -2, \infty)$*, v rovnici odstraníme absolutní hodnotu:*

    $$\begin{aligned} x + 2 &= 3 \\ x &= 1 \quad \wedge \quad 1 \in \langle -2, \infty)\,. \end{aligned}$$

*Proto řešením rovnice je* $\{-5, 1\}$.

Příklad

**Příklad 7.** *Na množině reálných čísel řešte rovnici:*

$$|x-1|+|3+x|=3.$$

**Řešení.** *Výrazy* $(x-1),(3+x)$ *mění znaménko postupně v* $x=1$ *a* $x=-3$. *Tyto dva body rozdělí číselnou osu na intervaly* $(-\infty,-3)\,,\langle -3,1)$ *a* $\langle 1,\infty)\,,$ *proto budeme úlohu postupně řešit na těchto intervalech.*

- *Nechť* $x\in(-\infty,-3)$, *v rovnici odstraníme absolutní hodnoty:*

$$\begin{aligned} 1-x-x-3&=3\\ -2x-2&=3\\ -2x&=5\\ x&=-\tfrac{5}{2}\quad\wedge\quad -\tfrac{5}{2}\notin(-\infty,-3)\,. \end{aligned}$$

  *Vzhledem k tomu, že uvažujeme jen* $x\in(-\infty,-3)$ *a* $-\frac{5}{2}\notin(-\infty,-3)\,,$ *rovnice na intervalu* $(-\infty,-3)$ *nemá řežení.*

- *Nechť* $x\in\langle -3,1)$, *v rovnici odstraníme absolutní hodnoty:*

$$\begin{aligned} 1-x+x+3&=3\\ 4&=3. \end{aligned}$$

  *Poslední rovnost samozřejmě neplatí, takže rovnice nemá řešení ani na intervalu* $\langle -3,1)\,.$

- *Nechť* $x\in\langle 1,\infty)$, *v rovnici odstraníme absolutní hodnoty:*

$$\begin{aligned} x-1+x+3&=3\\ 2x+2&=3\\ 2x&=1\\ x&=\tfrac{1}{2}\quad\wedge\quad \tfrac{1}{2}\notin\langle 1,\infty)\,. \end{aligned}$$

  *Vidíme, že ani na intervalu* $\langle 1,\infty)$ *rovnice řešení nemá.*

*Vzhledem k tomu, že rovnice nemá řešení v žádném ze tří intervalů, tak rovnice řešení nemá.*

Příklad

**Příklad 8.** *Na množině reálných čísel řešte nerovnici:*

$$|x - |1 - x|| < 2.$$

**Řešení.** *V prním kroku odstraníme vnitřní absolutní hodnotu. Výraz $1 - x$ mění znaménko v $x = 1$, proto nerovnici vyřešíme postupně na intervalech $(-\infty, 1)$ a $\langle 1, \infty)$, tj. v situacích, kdy $|1 - x| = 1 - x$ a $|1 - x| = -(1 - x) = x - 1$.*

- *Nechť $x \in (-\infty, 1)$, v nerovnici odstraníme vnitřní absolutní hodnotu:*

$$|x - (1 - x)| < 2$$
$$|x - 1 + x| < 2$$
$$|2x - 1| < 2$$
$$2\left|x - \tfrac{1}{2}\right| < 2$$
$$\left|x - \tfrac{1}{2}\right| < 1$$

  *Poslední nerovnice znamená, že hledáme všechna reálná čísla, které mají od $x = \frac{1}{2}$ vzdálennost menší než 1. To jsou $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Vzhledem k tomu, že pracujeme na intervalu $(-\infty, 1)$, vyhovují jenom $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \cap (-\infty, 1)$, co je ekvivalentní s tím, že $x \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.*

- *Nechť $x \in \langle 1, \infty)$, v nerovnici odstraníme vnitřní absolutní hodnotu:*

$$|x - (x - 1)| < 2$$
$$|x - x + 1| < 2$$
$$|1| < 2$$
$$1 < 2$$

  *Vzhledem k tomu, že $1 < 2$ je pravdivé tvrzení a všechny úpravy byly ekvivaletní, tak toto platí pro každé $x \in \mathbb{R}$. Tuto část řešení jsme prováděli jen na intervalu $\langle 1, \infty)$, proto $x \in \mathbb{R} \cap \langle 1, \infty)$, co znamená, že $x \in \langle 1, \infty)$.*

*Proto řešením nerovnice je $\left(-\frac{1}{2}, 1\right) \cup \langle 1, \infty)$, tj. interval $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$.*

## Kvadratické rovnice

Kvadratická rovnice je rovnice o jedné neznámé, která vystupuje v nejvýše druhé mocnině. Její základní tvar vypadá následovně:

$$ax^2 + bx + c = 0\colon a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Člen $ax^2$ nazýváme kvadratický, $bx$ lineární a $c$ absolutní.

**Speciální typy kvadratických rovnic**

- **Rovnice neobsahuje absolutní člen**
  Rovnice má potom tvar:
  $$ax^2 + bx = 0,$$
  co můžeme přepsat následovně:
  $$x(ax + b) = 0 \iff x = 0 \lor ax + b = 0 \iff x = 0 \lor x = -\frac{b}{a}.$$

- **Rovnice neobsahuje lineární člen**
  Rovnice má potom tvar:
  $$ax^2 + c = 0,$$
  co můžeme přepsat následovně:
  $$ax^2 = -c \iff x^2 = -\frac{c}{a}.$$
  Když $-\frac{c}{a} < 0$, rovnice nemá řešení. Když $-\frac{c}{a} = 0$, rovnice má jediné řešení a to $x = 0$. A když $-\frac{c}{a} > 0$, tak $|x| = \sqrt{-\frac{c}{a}}$, tudíž rovnice má dvě řešení.

**Řešení kvadratické rovnice**

- **Obecně lze rovnici řešit pomocí diskriminantu $D$,** pro který platí:

$$D = b^2 - 4ac.$$

  Pro $D$ mohou nastat tři případy:

  - $D < 0$ rovnice nemá na množině $\mathbb{R}$ řešení
  - $D = 0$ rovnice á jediné řešení $x = -\frac{b}{2a}$
  - $D > 0$ rovnice má dvě různá řešení $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

- **Rovnici lze řešit také pomocí Vietových vztahů,** kdy využijeme faktu, že pro kořeny rovnice platí:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \wedge x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

**Důležité vztahy a úpravy**

Zadání příkladu s kvadratickou rovnicí může vypadat kupříkladu následovně:

$$x \cdot (x-1) - 2x^2 + 2 = x^2 + x - 2.$$

Tudíž se k základnímu tvaru opět dostaneme až použitím různých úprav. Při řešení kvadratických rovnic využijeme všechny úpravy, které byly vysvětleny při lineárních rovnicích a také následující vztahy:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b).$$

**Úprava na úplný čtverec**

Užitečná úprava, kterou při řešení kvadratických rovnic často používáme, je úprava na úplný čtverec, kdy kvadratický trojčlen

$$ax^2 \pm bx + c$$

upravíme pomocí předchozích vztahů na tvar:

$$(x \pm m)^2 + n.$$

Úpravu ukážeme na přikladě. Kvadratický trojčlen $x^2 - 3x + 7$ chceme převést na tvar $(x - m)^2 + n$. Využijeme vztah $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Vidíme, že $2ab = 3x$, kde $a = x$ a proto $b = \frac{3}{2}$. Zřejmě

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = x^2 - 3x + \frac{9}{4} = (x^2 - 3x) + \frac{9}{4}$$

potom

$$x^2 - 3x = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}.$$

Proto

$$x^2 - 3x + 7 = (x^2 - 3x) + 7 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 7 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{19}{4}.$$

Tento tvar je mimořádně užitečný, protože z něho vidíme, že trojčlen $x^2 - 3x + 7$ nabývá nejmenší hodnotu v $x = \frac{3}{2}$ a to je hodnota $\frac{19}{4}$. To plyne z toho, že pro jiné hodnoty $x$ závorka $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$ nabývá větší hodnoty než 0.

**Příklad**

**Příklad 9.** *Na množině reálných čísel řešte rovnici:*

$$x \cdot (x-1) - 2x^2 + 2 = x^2 + x - 2.$$

**Řešení.**

$$x \cdot (x-1) - 2x^2 + 2 = x^2 + x - 2$$

$$x \cdot (x-1) - 2 \cdot (x^2 - 1) = (x-1) \cdot (x+2)$$

$$x \cdot (x-1) - 2 \cdot (x-1) \cdot (x+1) = (x-1) \cdot (x+2)$$

$$(x-1) \cdot (x - 2(x+1)) = (x-1) \cdot (x+2)$$

$$(x-1) \cdot (x - 2x - 2) = (x-1) \cdot (x+2)$$

$$(x-1) \cdot (-x-2) = (x-1) \cdot (x+2)$$

*Řešení může pokračovat dvěma různými způsoby. Oba si ukážeme:*

- *První způsob:*

  *rovnici anulujeme, (tj. všetky pravé strany prevedieme na ľavú stranu) výraz $(x-1)\cdot(x+2)$ …*

  $$(x-1) \cdot (-x-2) - (x-1) \cdot (x+2) = 0$$

  $$(x-1) \cdot (-x-2-x-2) = 0$$

  $$(x-1) \cdot (-2x-4) = 0$$

  $$(-2) \cdot (x-1) \cdot (x+2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 1 \lor x = -2.$$

  *Rešením rovnice je* $\{-2, 1\}$.

- *Druhý způsob: Pro $x \neq 1$ můžeme vykrátit $(x-1)$*

  $$\cancel{(x-1)} \cdot (-x-2) = \cancel{(x-1)} \cdot (x+2)$$

  $$-x-2 = x+2$$

  $$-4 = 2x$$

  $$-2 = x.$$

  *Pro $x = 1$, které sme dosud neuvažovali, dostáváme:*

  $$(1-1) \cdot (-1-2) = (1-1) \cdot (1+2)$$

  $$0 \cdot (-3) = 0 \cdot 3, \text{ což platí}^{\star}$$

  *Rešením rovnice je* $\{-2, 1\}$.

  $^{\star}$ *Co by se stalo, kdyby např. vyšlo $0 \cdot 2 = 1 \cdot (-2)$? Tedy, kdyby rovnost nenastala? V takovém případě by $x = 1$ řešením rovnice nebylo.*

### Kvadratické nerovnice

Kvadratická nerovnice má zpravidla takovýto tvar:

$$ax^2 + bx + c > 0\colon a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Případně, uvedený znak nerovnosti $>$ může být nahrazen jedním ze znaků $<, \leq, \geq$. Řešením nerovnice může být prázdná množina, konečná množina, nebo interval reálných čísel. Podobně, jako u lineárních nerovnic, se k základnímu tvaru musíme probojovat různými úpravami.

**Úpravy kvadratických nerovnic**

Uvedeme několik důležitých pravidel, které nám usnadní řešení kvadratických nerovnic. Často po úpravách dostaneme nerovnici typu $x^2 > d\colon d \geq 0$, ($x^2 < d\colon d \geq 0$). Vyřešit ji můžeme následovně

$$x^2 > d\colon d \geq 0 \iff |x| > \sqrt{d} \iff x \in \left(-\infty, -\sqrt{d}\right) \cup \left(\sqrt{d}, \infty\right),$$

$$\left(x^2 < d\colon d \geq 0 \iff |x| < \sqrt{d} \iff x \in \left(-\sqrt{d}, \sqrt{d}\right)\right).$$

nebo využijeme rozklad na součin a výsledek určíme pomocí znaménka jednotlivých činitelů:

$$x^2 > d\colon d \geq 0 \iff x^2 - d > 0 \iff (x - \sqrt{d}) \cdot (x + \sqrt{d}) > 0 \iff x \in \left(-\infty, -\sqrt{d}\right) \cup \left(\sqrt{d}, \infty\right),$$

$$\left(x^2 < d\colon d \geq 0 \iff x^2 - d < 0 \iff (x - \sqrt{d}) \cdot (x + \sqrt{d}) < 0 \iff x \in \left(-\sqrt{d}, \sqrt{d}\right)\right).$$

V případě, že dostaneme nerovnici typu $x^2 > d\colon d < 0$, nerovnici vyhovují všechna reálná čísla. V případě, že dostaneme nerovnici typu $x^2 < d\colon d < 0$, nerovnici nevyhovuje žádné reálné číslo.

## Úpravy kvadratických nerovnic

Podobně, jako u lineárních nerovnic, také u kvadratických musíme být opatrní při násobení nerovnice záporným číslem. Při kvadratických nerovnicích se situace často komplikuje následovně: Například v nerovnici

$$x(x-1) < x(2x+3)$$

často hrozí, že studenti udělají tento krok:

$$\cancel{x}(x-1) < \cancel{x}(2x+3)$$

a dále řeší lineární nerovnici s nesprávným výsledkem $x \in (-4, \infty)$. Problém je v tom, že o $x$ nevíme nic. Neznámá $x$ může být kupříkladu 0, nebo záporné číslo. Takže tuhle nerovnici je potřeba řešit následovně:

$$x(x-1) < x(2x+3)$$

*nerovnici anulujeme*

*vytkneme x*

*vynásobíme* $-1$

*znak nerovnosti se otočí*

$$
\begin{aligned}
x(x-1) - x(2x+3) &< 0 \\
x(x-1-2x-3) &< 0 \\
x(-x-4) &< 0 \\
-x(x+4) &< 0 \\
x(x+4) &> 0
\end{aligned}
$$

$$x \in (-\infty, -4) \cup (0, \infty)\,.$$

Příklad

**Příklad 10.** *Na množině reálných čísel řešte nerovnici:*

$$x^2 - 9 > 0.$$

**Řešení.** *Nerovnici můžeme řešit dvěma různými způsoby. Oba si ukážeme:*

- *Prvnú způsob:*

$$x^2 - 9 > 0$$

$$(x-3)\cdot(x+3) > 0$$

*Výraz* $x - 3$ *nabývá nulovou hodnotu pro* $x = 3$ *a výraz* $x + 3$ *nabývá nulovou hodnotu pre* $x = -3$*. Tyto hodnoty rozdělí číselnou osu na intervaly* $(-\infty, -3)\,, (-3, 3)\,, (3, \infty)\,.$ *Vzhledem k tomu, že levá strana pro hodnoty* $x = 3$ *a* $x = -3$ *nabývá nulovou hodnotu a nerovnost je ostrá, jsme tyto hodnoty vyloučili. Pro určení výsledné množiny vytvoříme následující tabulku:*

| | $(-\infty,-3)$ | $(-3,3)$ | $(3,\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $x-3$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $x+3$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $(x-3)(x+3)$ | $+$ | $-$ | $+$ |

*Znaménka pro výrazy* $x+3, x-3$ *lze jednoduše určit dosazením libovolné hodnoty z příslušného intervalu. Výsledná znaménka pro výraz* $(x-3)(x+3)$ *plynou z vlastností součinu. Proto je* $x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)\,.$

- *Druhú způsob:*

$$x^2 - 9 > 0$$

$$x^2 > 9$$

$$|x| > 3$$

$$x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)\,.$$

*U tohoto způsobu řešení musíme upozornit na častou chybu:*

$$x^2 - 9 > 0 \qquad \textit{chybný krok}$$

$$x^2 > 9$$

$$x > 3$$

$$x \in (3, \infty)\,, \text{ což je ale chybný výsledek, protože ignorujeme skutečnost, že } (-3)^2 \text{ je také } 9.$$

Příklad

**Příklad 11.** *Na množině reálných čísel řešte nerovnici:*

$$(x+3)\cdot(x-2) > (x-2)\cdot(3x-5).$$

**Řešení.** *Nejdříve si ukážeme nesprávné řešení:*

$$(x+3)\cdot\cancel{(x-2)} > \cancel{(x-2)}\cdot(3x-5) \quad \textit{chybný krok}^{\star}$$

$$x+3 > 3x-5$$

$$8 > 2x$$

$$4 > x$$

$$x \in (-\infty, 4)\,.$$

$^{\star}$ *Výraz $x-2$ může nabývat záporných hodnot, nebo může být roven nule, proto krácení není ekvivalentní úprava.*

*Správné řešení:*

$$(x+3)\cdot(x-2) > (x-2)\cdot(3x-5)$$

$$(x+3)\cdot(x-2)-(x-2)\cdot(3x-5) > 0$$

$$(x-2)\cdot(x+3-(3x-5)) > 0$$

$$(x-2)\cdot(8-2x) > 0$$

$$2\cdot(x-2)\cdot(4-x) > 0$$

$$x \in (2,4)\,.$$

**Příklad**

**Příklad 12.** *Na množině reálných čísel řešte nerovnici:*

$$x^2 - 5x + 7 > 0.$$

**Řešení.** *Využijeme úpravu na úplný čtverec a upravíme levou stranu nerovnice:*

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 7 &> 0 \\ \left(x - \tfrac{5}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{5}{2}\right)^2 + 7 &> 0 \\ \left(x - \tfrac{5}{2}\right)^2 - \tfrac{25}{4} + \tfrac{28}{4} &> 0 \\ \left(x - \tfrac{5}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4} &> 0 \end{aligned}$$

*Výraz na levé straně poslední nerovnice nabýva hodnoty, které jsou alespoň $\frac{3}{4}$, proto nerovnici vyhovuje každé reálné číslo. Proto $x \in \mathbb{R}$.*

## Test

1. Řešením rovnice $|x-1| = 2$ je
   (a) $\{-1, 3\}$
   (b) $(-1, 3)$
   (c) $\langle -1, 3 \rangle$
   (d) $\emptyset$
2. Řešením nerovnice $|x-2| > 2$ je
   (a) $\{0, 4\}$
   (b) $(0, 4)$
   (c) $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$
   (d) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$
3. Řešením rovnice $x^2 - 2 = 2$ je
   (a) $\{2\}$
   (b) $\{-2, 2\}$
   (c) $\{0\}$
   (d) $\emptyset$
4. Řešením nerovnice $x^2 - 2 < 2$ je
   (a) $(-\infty, 2)$
   (b) $(-2, 2)$
   (c) $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$
   (d) $\emptyset$
5. Řešením rovnice $x^2 - 2x = 15$ je
   (a) $(-3, 5)$
   (b) $\{-3, 5\}$
   (c) $\{-5, 3\}$
   (d) $\langle -5, 3 \rangle$
6. Řešením rovnice $|x-1| + |5-x| = 10$ je
   (a) $(-2, 8)$
   (b) $\langle -2, 8 \rangle$
   (c) $\{-2, 3, 8\}$
   (d) $\{-2, 8\}$

7. Řešením rovnice $|1-|x-3||=6$ je

   (a) $\{-4, 10\}$
   (b) $\{-4, -2, 10\}$
   (c) $\{-4, -2, 8, 10\}$
   (d) $\{-4, 8, 10\}$

8. Řešením nerovnice $3x - x^2 \leq 2$ je

   (a) $(-\infty, 1\rangle \cup \langle 2, \infty)$
   (b) $\langle 1, 2\rangle$
   (c) $\langle -2, -1\rangle$
   (d) $(-\infty, -2\rangle \cup \langle -1, \infty)$

9. Řešením nerovnice $|1-x| - |2+x| \geq 2$ je

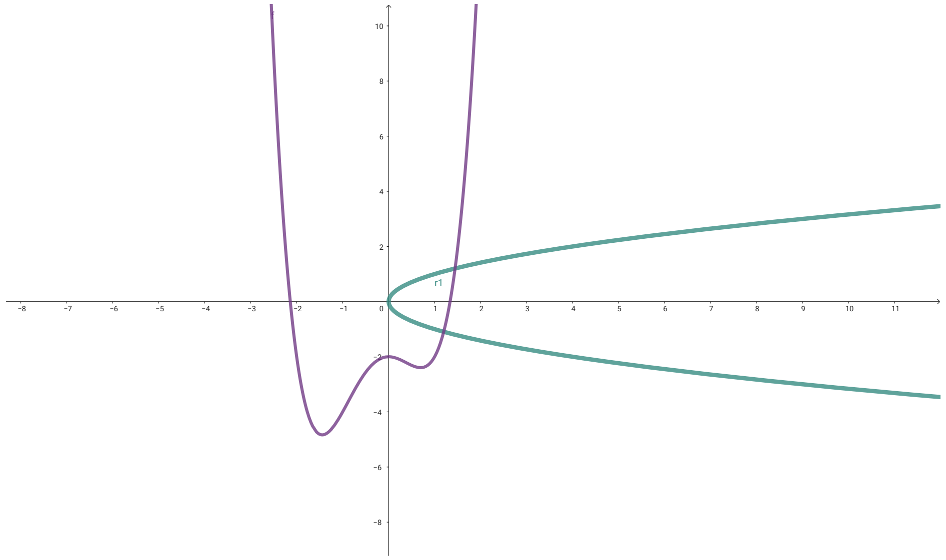
   (a) $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$
   (b) $(-\infty, -2\rangle$
   (c) $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right\rangle$
   (d) $\mathbb{R}$

10. Řešením nerovnice $|x-2|x+1|| \geq 3$ je

   (a) $(-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty)$
   (b) $\emptyset$
   (c) $\left(-\infty, -\frac{5}{3}\right\rangle \cup \langle 1, \infty)$
   (d) $\mathbb{R}$

# 3. Polynomické funkce

## Funkce

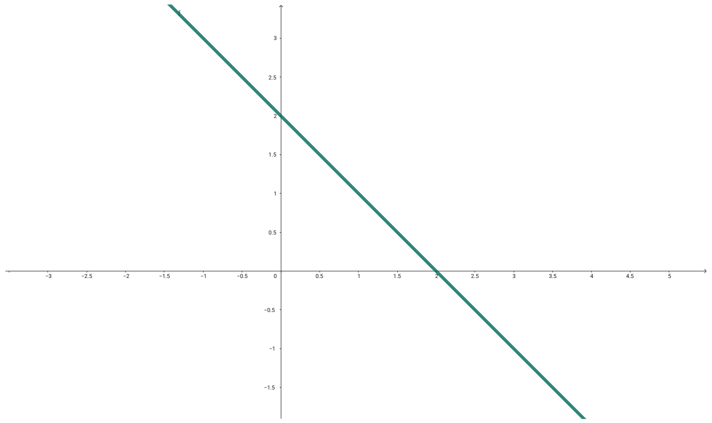


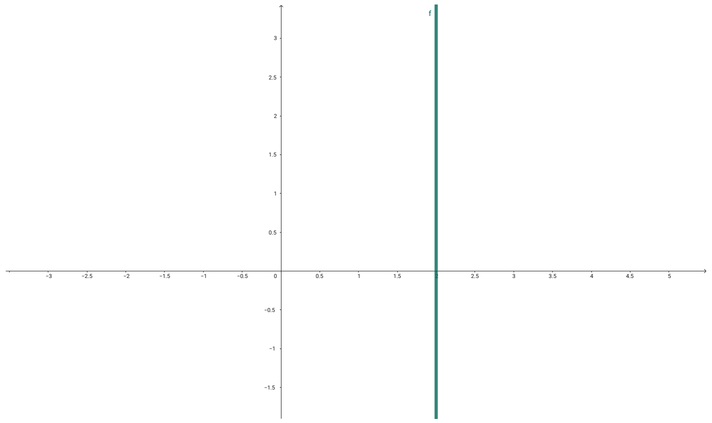
**Funkce**

Co to vlastně je funkce? Toto slovo často používáme v souvislosti s různými přístroji. Když například stiskneme na klávesnici tlačítko A očekáváme, že se na monitoru objeví znak „a“, resp. když stiskneme SHIFT + A, pak očekáváme, že se na monitoru objeví znak „A“. Jinými slovy, funkční je něco, co pro jednoznačně zadaný vstup dává vždy stejný výsledek. Matematicky můžeme tuto představu naformulovat následovně:
Funkce na množině $D \subseteq \mathbb{R}$ je předpis, který každému číslu z množiny $D$ přiřazuje právě jedno reálné číslo.
Funkce obvykle značíme písmenem $f$, ale používáme i jiná písmena např. $g, h, \ldots$.
Argument funkce, nebo také vstupní hodnota, se obvykle značí písmenkem $x$.
Funkční hodnota, nebo také výstupní hodnota, se označuje jako $f(x)$, nebo $y$.
Definiční obor funkce udává podmnožinu reálných čísel, které lze do předpisu funkce dosadit. Pro funkci $f$ ho označujeme symbolem $D(f)$.
Obor hodnot je naopak množina všech reálných čísel $y$, která dostaneme jako výstupní hodnotu funkce $f$, jestliže za $x$ dosadíme všechny hodnoty z $D(f)$. Obor hodnot funkce $f$ značíme $H(f)$.
O funkcích $f$ a $g$ řekneme, že jsou si rovny, když jsou totožné jejich definiční obory $(D(f) = D(g))$ a zároveň pro všechna $x \in D(f)$ je $f(x) = g(x)$, tj. funkční hodnoty obou funkcí jsou pro všechny hodnoty definičního oboru stejné.

## Graf funkce

Graf funkce $f$ je křivka, která graficky popisuje chování funkce $f$. Je to křivka zakreslená do souřadnicového systému tak, že na vodorovnou osu $x$ nanášíme vstupní hodnoty a na svislou osu $y$ hodnoty výstupní. Grafem funkce $f$ je pak množina bodů $x, f(x)$. Vzhledem k tomu, že pro každe $x \in D(f)$ existuje jediná výstupní hodnota $f(x)$, graf nemůže mít v žádném bodě $x \in D(f)$ dvě různé hodnoty. Na ukázku uvádíme dva obrázky. Obrázek vlevo zobrazuje graf nějaké funkce, zatímco obrázek vpravo ne.





## Vlastnosti funkcí

**Monotónnost a ryzí monotónnost:**
Funkci nazveme rostoucí tehdy, když s rostoucí hodnotou $x$ roste hodnota $f(x)$. Formálně zapisujeme následovně:

$$\text{Funkce je rostoucí na} \quad M, \quad \text{když} \;\; \forall x_1, x_2 \in M; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Funkci nazveme klesající tehdy, když s rostoucí hodnotou $x$ klesá hodnota $f(x)$. Formálně zapisujeme následovně:

$$\text{Funkce je klesající na} \quad M, \quad \text{když} \;\; \forall x_1, x_2 \in M; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

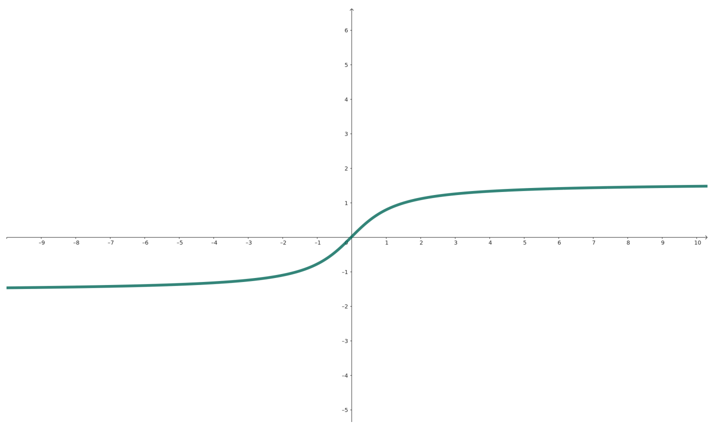
Funkci nazveme **ryze monotónní** tehdy, když je jenom rostoucí, nebo jenom klesající.
Funkci nazveme nerostoucí tehdy, když s rostoucí hodnotou $x$ klesá nebo se nemění hodnota $f(x)$. Formálně zapisujeme následovně:

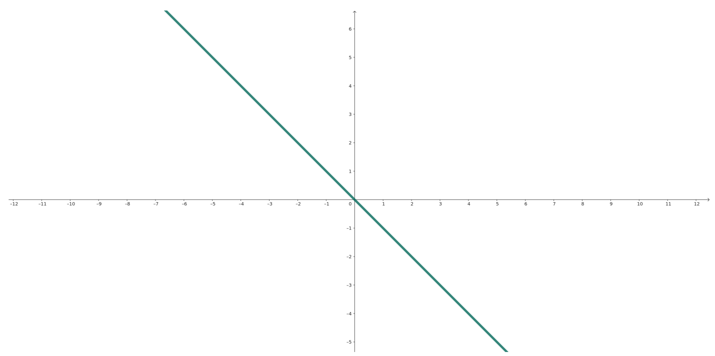
$$\text{Funkce je nerostoucí na} \quad M, \quad \text{když} \;\; \forall x_1, x_2 \in M; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Funkci nazveme neklesající tehdy, když s rostoucí hodnotou $x$ roste nebo se nemění hodnota $f(x)$. Formálně zapisujeme následovně:

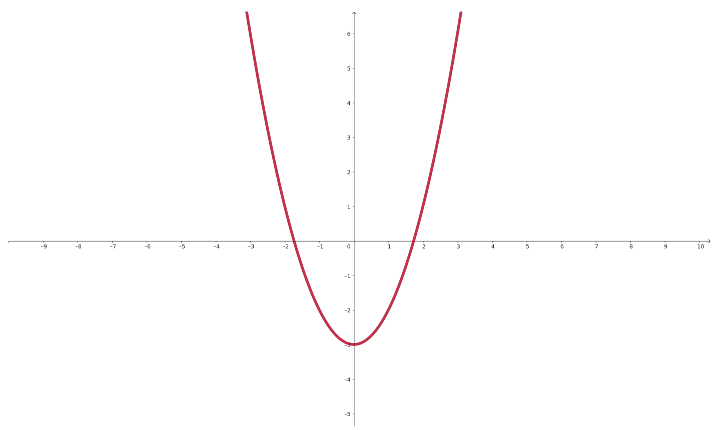
$$\text{Funkce je neklesající na} \quad M, \quad \text{když} \;\; \forall x_1, x_2 \in M; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Funkci nazveme **monotónní** tehdy, když je jenom rostoucí, nebo jenom klesající, nebo jenom nerostoucí, nebo jenom neklesající.
Na obrázku vlevo je rostoucí funkce a na obrázku vpravo je funkce klesající.





Pokud uvažujeme $M$ jako množinu všech reálných čísel, funkce na následujícím obrázku není ani rostoucí, ani klesající. Pokud se ale omezíme např. na $M = \langle 1, 2 \rangle$, je funkce na množině $M$ rostoucí. Podobně např. na intervalu $\langle -1, 0 \rangle$ je klesající.

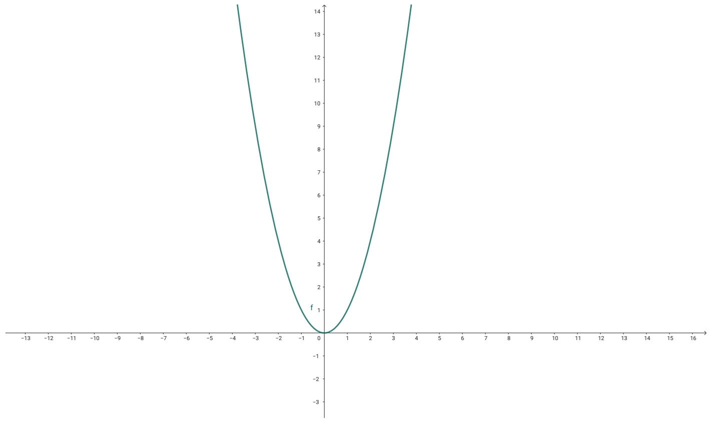


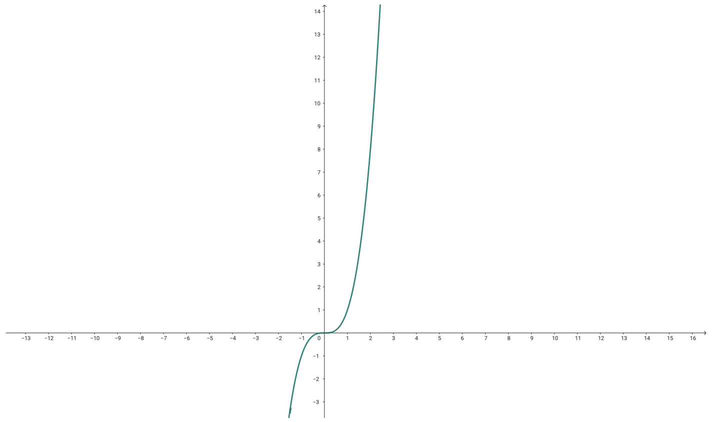
## Vlastnosti funkcí

**Prostá funkce:**
Když o funkci $f$ platí

$$\forall a, b \in D(f); a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b), \text{ tj. když se různé vstupní hodnoty zobrazí na různé výstupní hodnoty,}$$

říkáme že je **prostá**. Na obrázku vlevo je funkce, která není prostá, kupříkladu funkční hodnota v $x = 1$ je stejná jako v $x = -1$. Na obrázku vpravo je funkce prostá. Když budeme vést libovolnou rovnoběžku s osou $x$, tak každá z nich protne graf prosté funkce pouze jednou.





**Poznámka 1.** *Vzhledem k tomu, že implikace $A \Rightarrow B$ je ekvivalentní s implikací $\neg B \Rightarrow \neg A$, (obměněná věta) můžeme definici prosté funkce přepsat následovně:*

$$\forall a, b \in D(f); Fa) = f(b) \Rightarrow a = b,$$

*což využijeme, když budeme dokazovat, že je nějaká funkce prostá.*

## Vlastnosti funkcí

**Parita:**

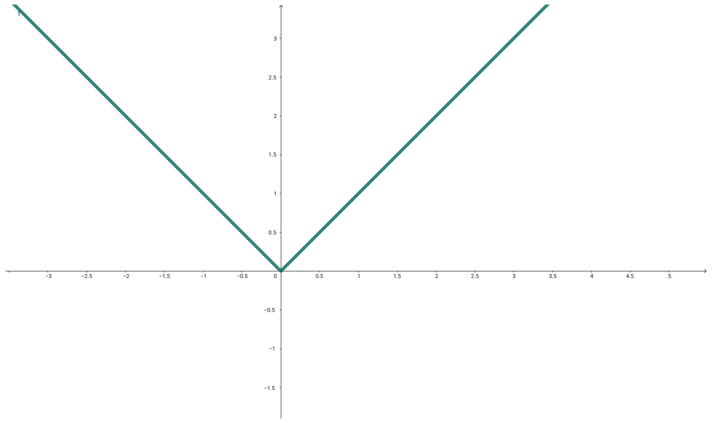
Sudou anebo lichou funkci poznáme z grafu funkce, umíme - li ho ovšem vykreslit a je-li obrázek dostatečně vhodný. Jestliže je graf osově souměrný podle osy $y$, pak se jedná o funkci sudou. Formálně zapisujeme následovně:

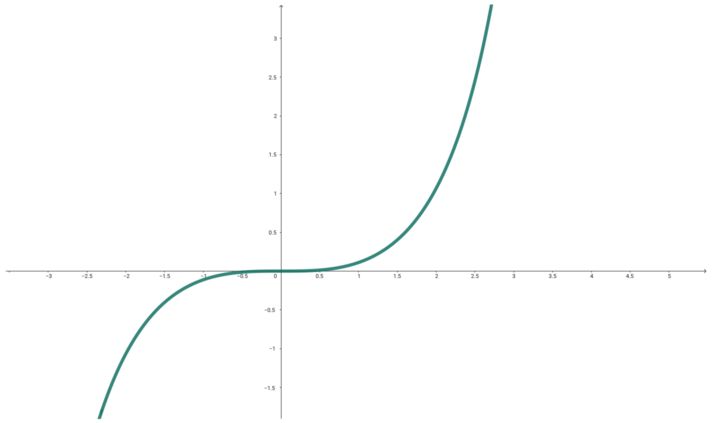
$$\text{Funkce je sudá, když} \quad \forall x \in D_f; f(-x) = f(x).$$

V případě, že je graf funkce středově souměrný podle počátku souřadnicové soustavy, pak říkáme, že funkce lichá. Formálně zapisujeme následovně:

$$\text{Funkce je lichá, když} \quad \forall x \in D_f; f(-x) = -f(x).$$

Na obrázku vlevo je sudá funkce a na obrázku vpravo je funkce lichá.





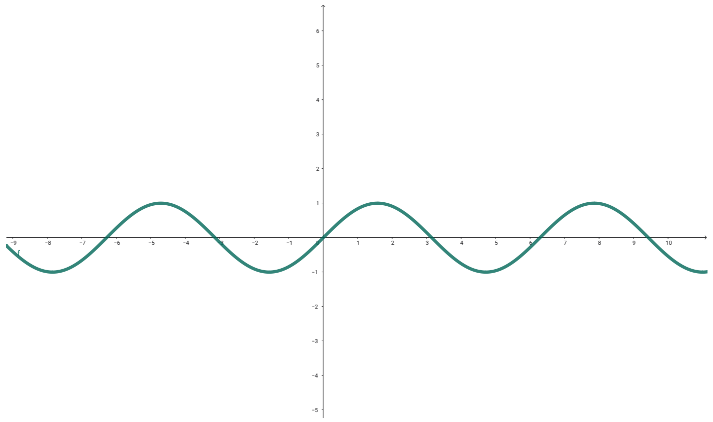
Pokud bychom chtěli rozhodnout o paritě komplikovaněji zadaných funkcí, např. $f(x) = x^7 + 2x^3 - x^2 + 4$, museli bychom samozřejmě aplikovat výše uvedené formální zápisy.

## Vlastnosti funkcí

**Periodicita:**
Periodickou funkci poznáme z grafu funkce. Jestliže je celý graf určen jen částí, která se neustále opakuje, pak je to graf periodické funkce. Formálně zapisujeme následovně:

$$\exists p \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \forall x \in D_f \colon f(x \pm p) = f(x).$$

Jednu periodickou funkci vidíme na obrázku:



*Zamyslete se, proč je nutno brát do úvahy $p \neq 0$.*

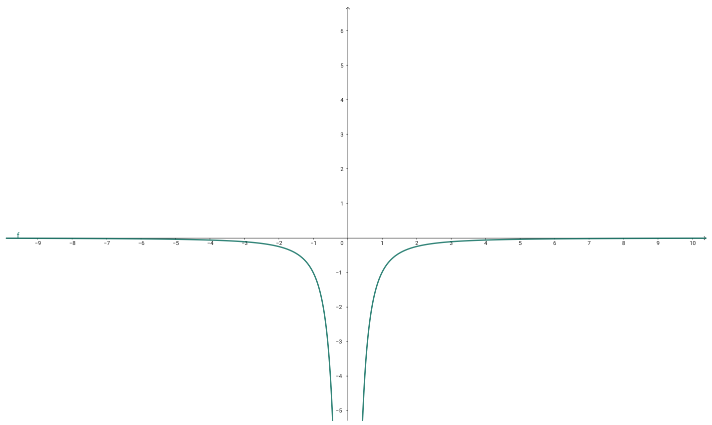
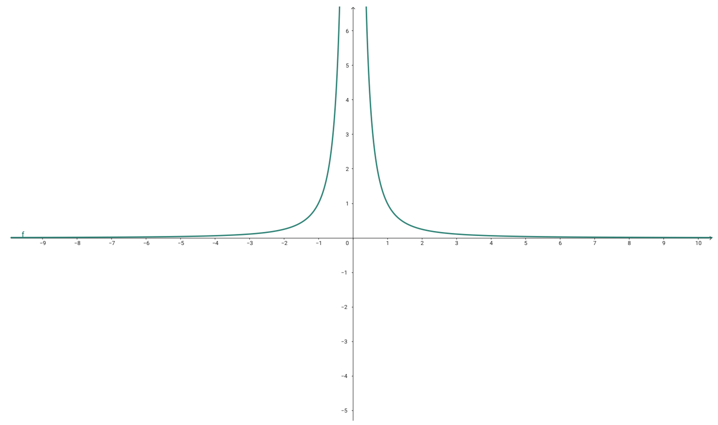
## Vlastnosti funkcí

**Ohraničenost:**

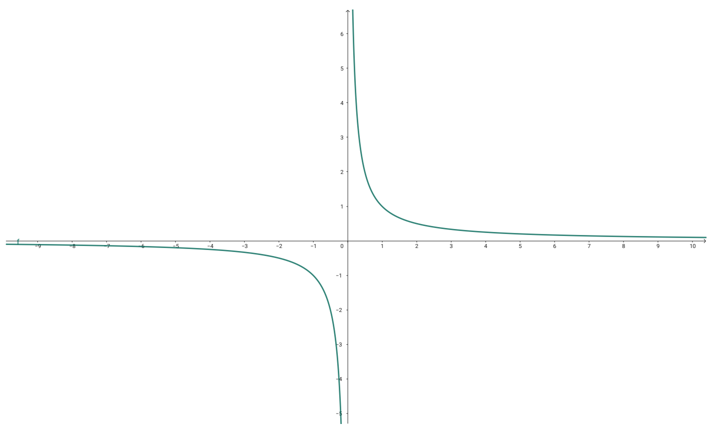
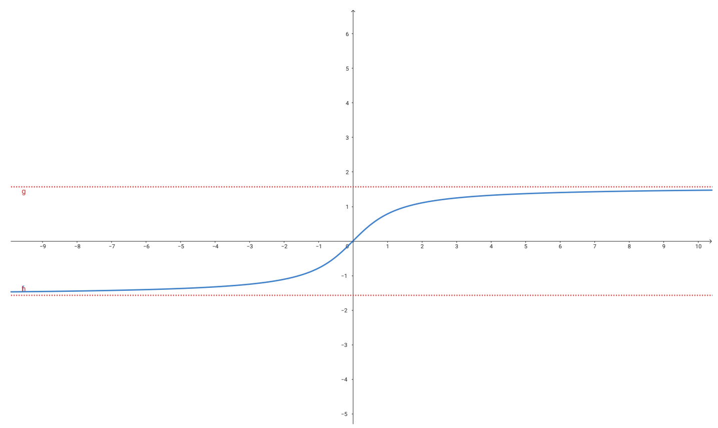
Jestliže je funkce omezená shora, znamená to, že její funkční hodnoty nepřekročí určitou horní hranici. V případě, že je omezená zdola, pak všechny funkční hodnoty neklesnou pod nějakou dolní hranici. Když je funkce omezená shora i zdola, pak řekneme, že je omezená. Formálně zapisujeme následovně:

- Funkce $f$ je omezená shora, jestliže
$$\exists c \in \mathbb{R} \forall x \in D(f)\colon f(x) \leq c.$$
- Funkce $f$ je omezená zdola, jestliže
$$\exists d \in \mathbb{R} \forall x \in D(f)\colon f(x) \geq d.$$
- Funkce $f$ je omezená, jestliže
$$\exists c, d \in \mathbb{R} \forall x \in D(f)\colon d \leq f(x) \leq c.$$

Na obrázku vlevo je funkce omezená zhora, všechny funkční hodnoty jsou menší než nula. Na obrázku vpravo je funkce omezená zdola, všechny funkční hodnoty jsou větší než nula.

Na obrázku vlevo je funkce, která není omezená ani zhora, ani zdola. Na obrázku vpravo je funkce omezená zhora i zdola, tudíž je omezená.

**Lineární funkce**

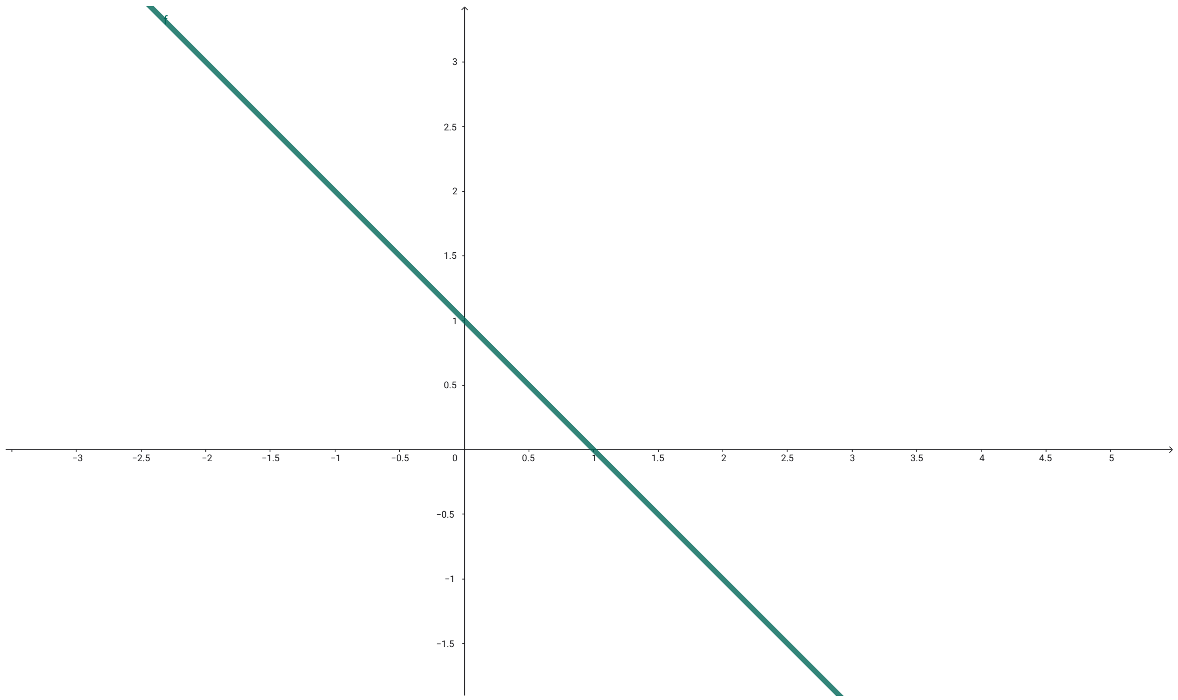
Lineární funkce je taková funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která lze vyjádřit předpisem: $f\colon y = ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Grafem lineární funkce je přímka.
**Základní vlastnosti lineární funkce vzhledem k hodnotám koeficientů $a, b$:**

- Když $a = 0$, funkce $f$ má předpis $y = b$ a je konstantní.
- Když $a > 0$, funkce $f$ je rostoucí.
- Když $a < 0$, funkce $f$ je klesající.
- Když $b = 0$, tak funkce $f$ prochází počátkem souřadnicového systému.

Příklad

**Příklad 2.** *Nechť $f(x) = 1 - x$. Načrtněte funkci a zjistěte, jestli je rostoucí, nebo klesající.*

**Řešení.** *Grafem funkce $f$ je přímka, proto stačí najít dva body, kterými prochází. Pro $x = 0$ je funkční hodnota $f(0) = 1$ a ro $x = 1$ je $f(x) = 1 - x = 0$ p. Funkce tedy prochází body $A = [1, 0], B = [0, 1]$ a její průběh vidíme na obrázku:*




*Funkce je klesající, což je možné určit z grafu, ale také z koeficientu $a$, který je záporný.*

## Inverzne funkce

Inverzní funkci určujeme vždy k nějaké původní funkci $f$. Nutná podmínka pro její existenci je, aby původní funkce $f$ byla prostá. Původní funkce $f$ zobrazuje prvky $D(f)$ na množinu $H(f)$ a její inverzní funkce, $f^{-1}$, zobrazuje prvky $H(f)$ na množinu $D(f)$. Graficky si to lze představit tak, jako bychom k původnímu grafu funkce sestrojili jeho obraz v osové souměrnosti podle osy $y = x$. Předpis inverzní funkce získáme tak, že vyjádříme $x$ jako funkci argumentu $y$. Inverzní funkce k lineární funkci je také lineární funkce.

Příklad

**Příklad 3.** *Najděte inverzní funkci k funkci* $f(x) = 3x - 4$.

**Řešení.** *Funkce* $f$ *je lineární, proto je prostá a tudíž má smysl hledat funkci k ní inverznou. Pro funkci* $f$ *platí*

$$y = 3x - 4.$$

*Proto pro funkci* $f^{-1}$ *musí platit:*

$$x = 3y - 4,$$

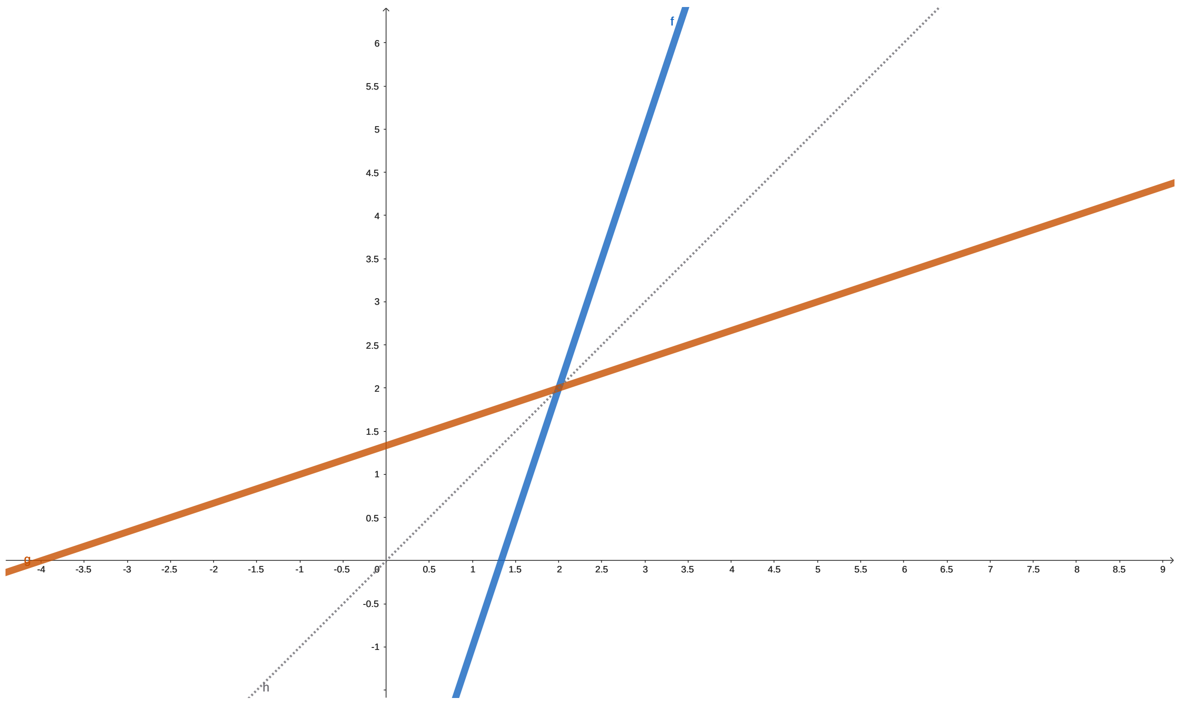
*potom*

$$x + 4 = 3y$$

*a tedy*

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}.$$

*Situaci vidíme na obrázku: funkce* $f$ *je znázorněna modrou barvou, její inverzní funkce* $f^{-1}$ *oranžovou barvou a tečkovanou čarou je vyznačena osa jejich souměrnosti, funkce* $y = x$. *Definiční obor a obor hodnot je pro obě funkce celá množina reálných čísel.*

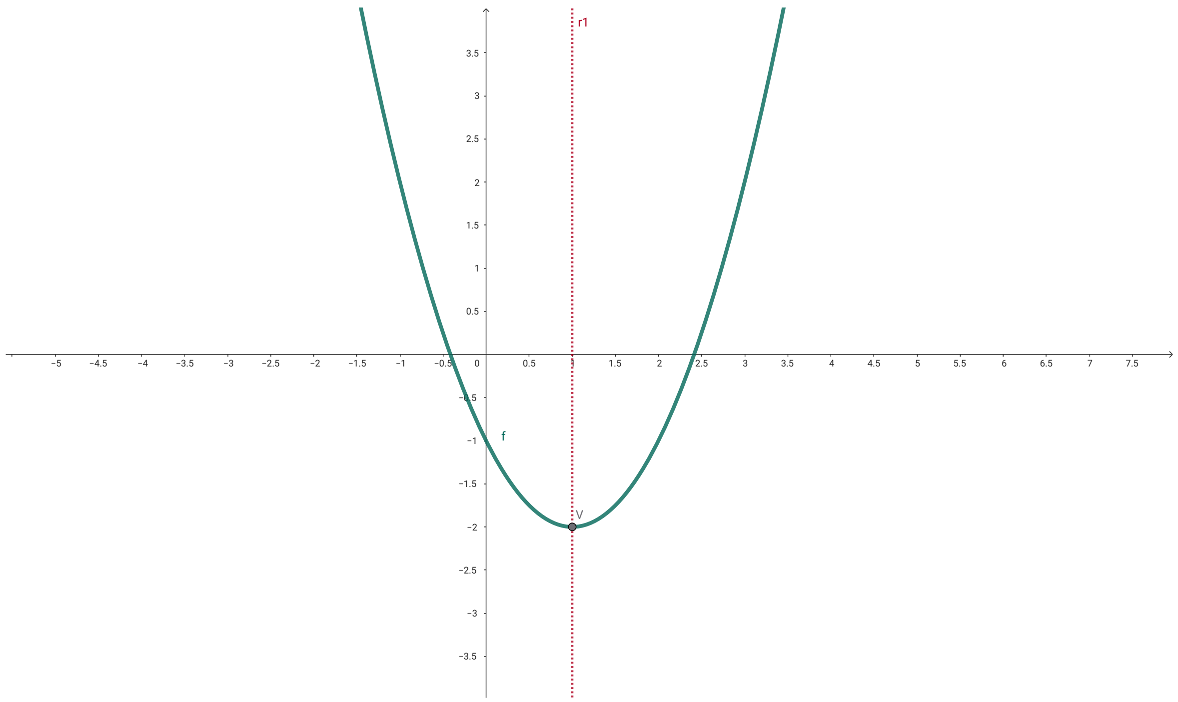


**Kvadratická funkce**

Kvadratická funkce je taková funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která lze vyjádřit předpisem: $f\colon y = ax^2 + bx + c\colon a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Grafu kvadratické funkce se říká parabola.

## Parabola

Grafem kvadratické funkce je parabola. Jednu parabolu vidíme na obrázku. Každá parabola, která je grafem kvadratické funkce, je symetrická křivka, osa symetrie je rovnoběžná s osou $y$ a protíná graf kvadratické funkce ve speciálním bodě $V$, kterému říkáme vrchol paraboly.

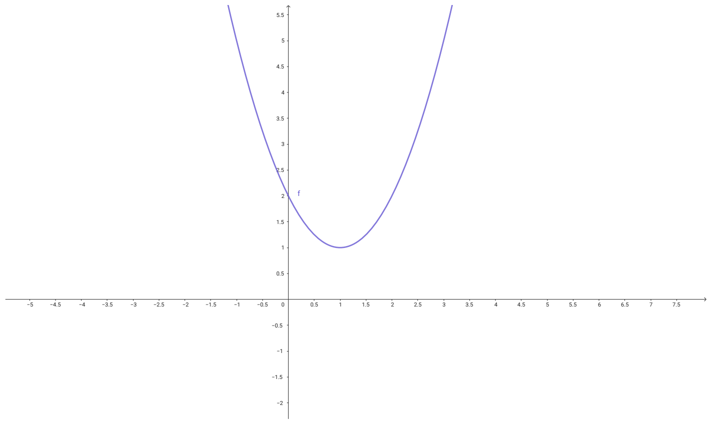
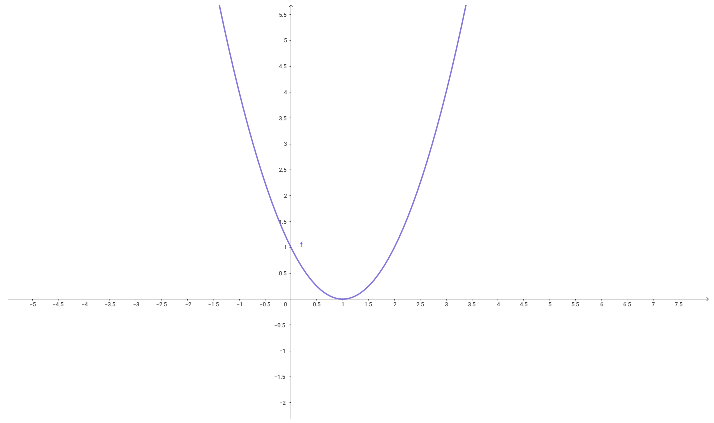
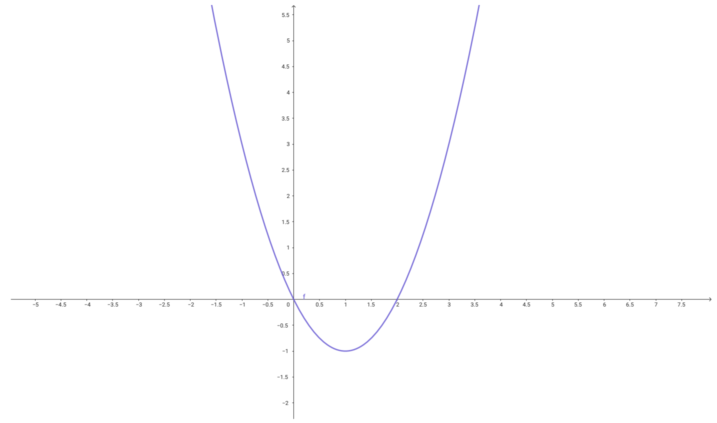


## Vlastnosti kvadratické funkce

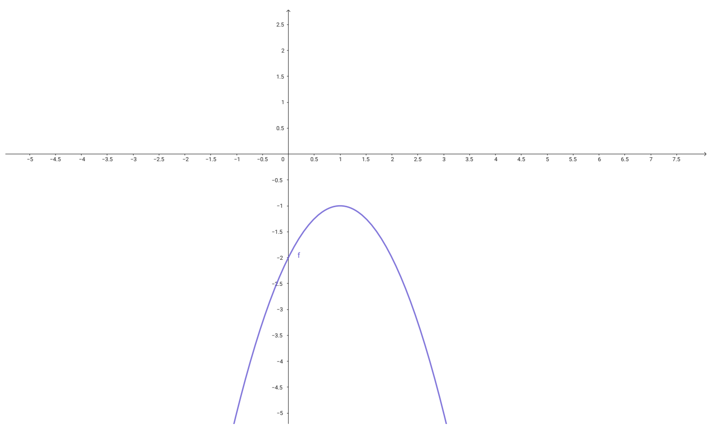
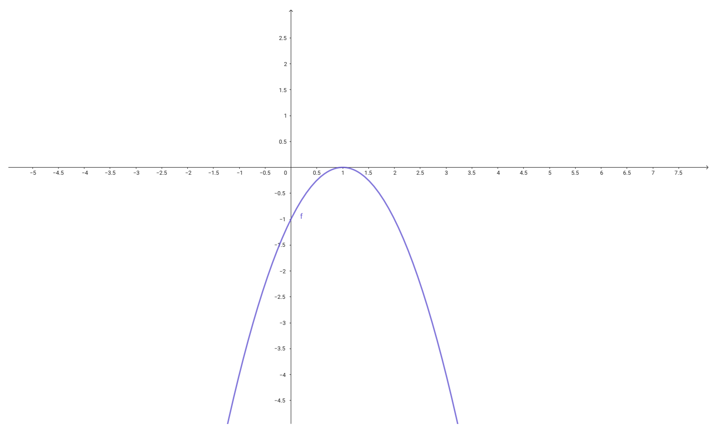
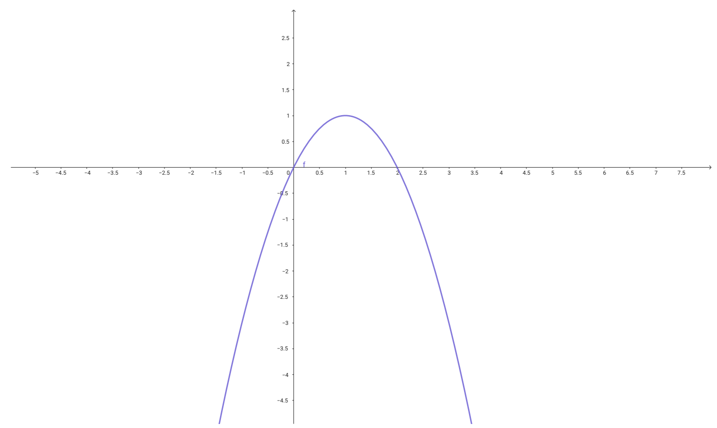
Při vyšetřování kvadratické funkce využijeme vědomosti o řešení kvadratické rovnice. Definiční obor každé kvadratické funkce je množina $\mathbb{R}$. Průběh funkce souvisí s parametrem $a$ :

- **Když je** $a > 0$ :
  V tomto případě je parabola otevřena nahoru, je zdola omezena a může osu $x$ protnout nejvíc dvakrát.

  Počet průsečíků souvisí s počtem řešením kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$. Když $x_i$ je řešením této rovnice, tak $f(x_i) = 0$ a tudíž je bod $x_i$ průsečík s osou $x$, nebo se v něm funkce $f$ osy $x$ dotýká. To znamená, že počet průsečíků souvisí s hodnotou diskriminantu. Když $D < 0$, funkce neprotíná osu $x$, když $D = 0$, funkce se dotýký osy $x$ a když $D > 0$, funkce protíná osu $x$ ve dvou bodech. Situaci pro různé případy vidíme na obrázcích.

- **Když je** $a < 0$ :
  V tomto případě je parabola otevřena dolů, je omezena shora a může osu $x$ protnout nejvíc dvakrát. Počet průsečíků s osou $x$ zjistíme analogicky jako v předchozím případě.

### Vrchol paraboly

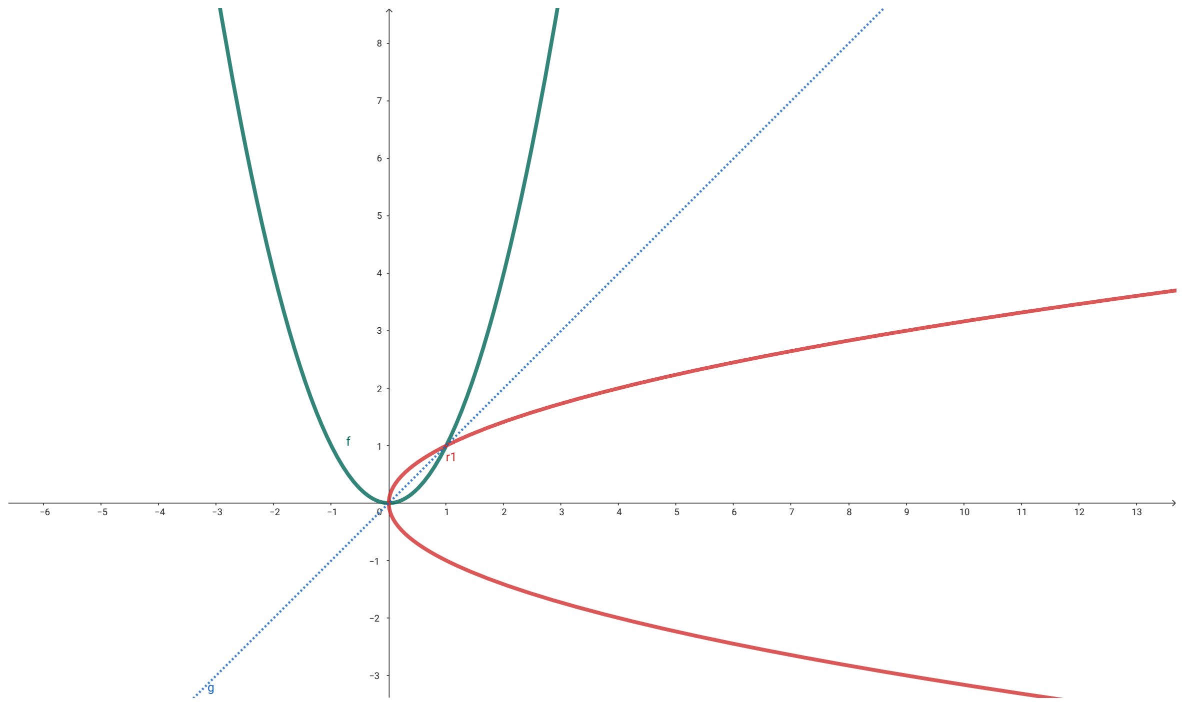
Při určování souřadnic vrcholu využijeme úpravu na úplný čtverec, jak ukážeme na následujícím přikladu. Funkce $f$ má předpis: $y = x^2 - 5x + 7$. Kvadratický trojčlen $x^2 - 5x + 7$ upravíme na úplný čtverec:

$$x^2 - 7x + 13 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 13 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Funkce nabývá nejmenší hodnotu v $x = \frac{7}{2}$ a tato hodnota je přesně $f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{3}{4}$. Vzhledem k tomu, že parabola je otočena nahoru, tak bod $\left[\frac{7}{2}, \frac{3}{4}\right]$ je její vrchol.

**Inverzní funkce po druhé**

*Proč existuje inverzní funkce jenom k prostým funkcím?* Odpověď na tuto otázku vidíme na obrázku. Zelenou barvou je nakreslena funkce $f(x) = x^2$. Evidentně $f(1) = f(-1) = 1$. Funkce $f$ tedy není prostá. Kdyby k ní existovala inverzní funkce, muselo by platit $f^{-1}(1) = 1$, ale také $f^{-1}(1) = -1$, což není možné, když má být $f^{-1}$ funkce. Pro lepší názornost je na obrázku červenou barvou nakreslena parabola, která je symetrická podle osy $y = x$ s funkcí $f(x) = x^2$, ale takto otočená parabola není funkce.



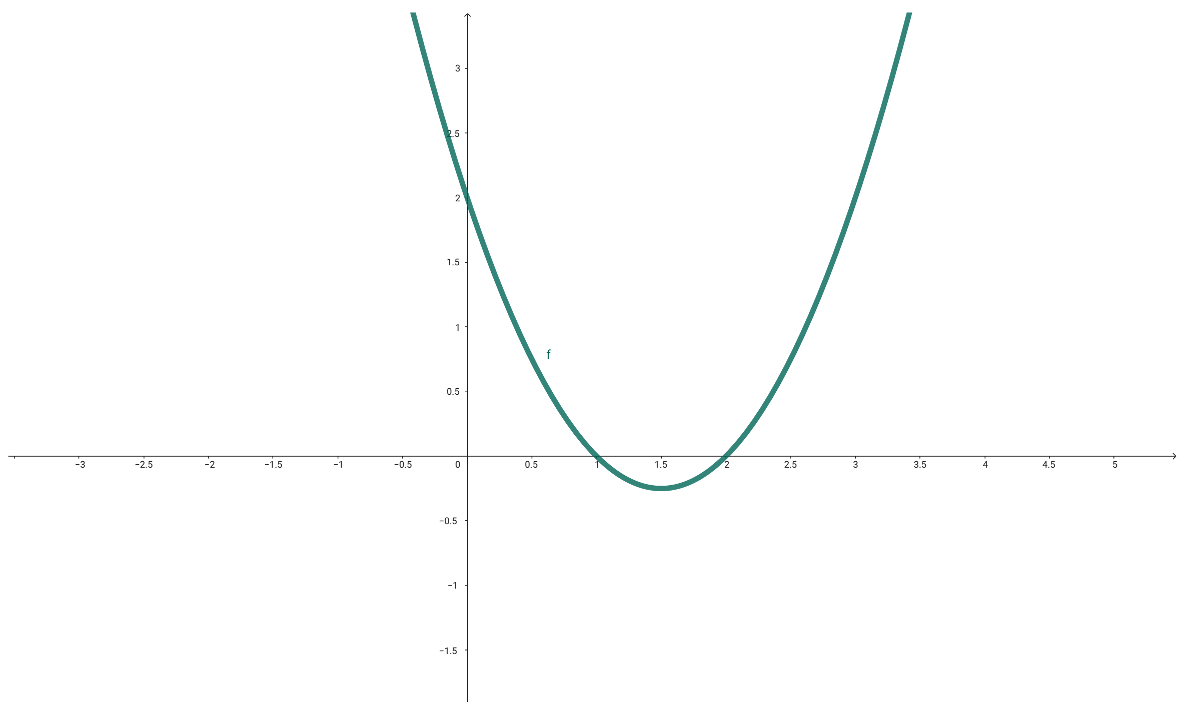
Příklad

**Příklad 4.** *Nechť* $f(x) = x^2 - 3x + 2$. *Najděte intervaly, kde funkce roste a kde klesá.*

**Řešení.** *Funkce* $f$ *je kvadratická, tudíž jejim grafem je parabola. Pomocí Vietových vztahů rozložíme kvadratický trojčlen*

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1) \cdot (x-2),$$

*nebo vyřešíme rovnici* $x^2 - 3x + 2 = 0$ *a zapíšeme ji ve tvaru* $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$, *kde* $x_1, x_2$ *jsou řešení rovnice. Graf funkce* $f$ *protíná osu* $x$ *v bodech* $x_1 = 1$ *a* $x_2 = 2$. *Vzhledem k tomu, že koeficient při* $x^2$ *je kladný, funkci už víme znázornit:*



*Pro určení hledaných intervalů potřebujeme zjistit* $x-$*ovou souřadnici vrcholu* $V = [x_v, y_v]$ *této paraboly. Zde si stačí uvědomit, že parabola je souměrná a její osou souměrnosti je přímka* $x = x_v$. *Tudíž* $x_v$ *leží uprostřed mezi průsečíky paraboly s osou* $x$. *Proto* $x_v = \frac{3}{2}$. *Funkce klesá na intervalu* $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ *a roste na intervalu* $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$.

**Příklad**

**Příklad 5.** *Najděte souřadnice vrcholu paraboly* $y = x^2 - 4x + 5$.

**Řešení.** *Kvadratický trojčlen* $x^2 - 4x + 5$ *upravíme na úplný čtverec následovně:*

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 5 &= x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 + 1 \\ &= (x^2 - 4x + 4) + 1 \\ &= (x - 2)^2 + 1 \end{aligned}$$

*Z posledního zápisu vidíme, že nejmenší hodnotu funkce nabývá v bodě* $x = 2$ *a to hodnotu* $(2-2)^2 + 1 = 1$, *proto souřadnice vrcholu* $V$ *jsou* $[2, 1]$.

## Polynomické funkce

Polynomická funkce, případně polynom, je taková funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která lze vyjádřit předpisem: $f\colon y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots a_1 x + a_0$, kde $a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$. Číslo $n$ se nazývá stupeň polynomu. Lineární a kvadratická funkce jsou speciálním případem polynomické funkce.
Je-li funkční hodnota polynomu v čísle $x_0$ rovna nule, tedy platí-li

$$a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = 0,$$

nazývá se číslo $x_0$ kořenem polynomu. Geometrická interpretace kořenu polynomu je jednoduchá. Jesliže je $x_0$ kořen polynomu, graf polynomu protíná osu $x$, nebo se jí dotýká v bodě $x = x_0$. Polynom stupně $n$ může mít nejvíc $n$ reálných kořenů.

Je-li $x_i$ kořenem polynomu $p(x)$ stupně $n \geq 1$, pak

$$p(x) = (x - x_i) \cdot g(x),$$

kde $g(x)$ je polynom stupně $n - 1$. Polynom $p(x)$ stupně $n \geq 1$ lze zapsat ve tvaru

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n),$$

kde $x_i$ jsou kořeny polynomu a členy $(x - x_i)$ nazýváme kořenové činitele polynomu. Jestliže se v rozkladu na kořenové činitele vyskytují někteří kořenoví činitelé vícekrát, nazýváme příslušné kořeny násobné.

## Racionální kořeny polynomu

Jestliže má polynom celočíselné koeficienty, umíme najít jeho racionální kořeny. Využíváme následující tvrzení:
Pokud je racionální číslo $\frac{p}{q}$ kořen polynomu

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0,$$

$a_0$ je celočíselným násobkem čísla $p$ a $a_n$ je přirozeným násobkem čísla $q$.

**Poznámka 6.** *Připomínáme, že každé racionální číslo umíme zapsat jako zlomek v základním tvaru* $\frac{p}{q}$*, kde* $p$ *je celé číslo,* $q$ *je přirozené číslo a* $p, q$ *jsou nesoudělná.*

**Hornerovo schéma**

Hornerovo schéma je hezký nástroj, který nám pomůže najít kořeny polynomů vyšších stupňů. Polynom druhého stupně můžeme upravit následujícím způsobem:

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = (a_2x + a_1) \cdot x + a_0,$$

podobně umíme upravit i polynom třetího stupně:

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \left(a_3x^2 + a_2x + a_1\right) \cdot x + a_0 = ((a_3x + a_2) \cdot x + a_1) \cdot x + a_0.$$

Analogicky upravíme polynom stupně $n$:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \Big(\Big(\cdots((a_nx + a_{n-1})\,x + a_{n-2})\,x + \cdots + a_2\Big)x + a_1\Big)x + a_0.$$

Tento zápis ukazuje návod, jak jednoduše vypočítat funkční hodnotu polynomu. Když máme kupříkladu polynom $p_3(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 7$, upravíme ho a dostaneme

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 7 = ((x-2)\,x + 3)\,x - 7.$$

Potřebujeme-li vypočítat $p_3(3)$, můžeme dosadit do původního předpisu polynomu a dostaneme: $3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - 7 = 27 - 18 + 9 - 7 = 11$, nebo využijeme upravený předpis a budeme počítat následovně:

1. dosadíme $x = 3$ do vnitřní závorky $(x - 2)$ a dostaneme výsledek $3 - 2 = 1$,
2. výsledek z předchozího kroku vynásobíme hodnotou $x = 3$ a dostaneme $1 \cdot 3 = 3$,
3. přičteme k předchozímu výsledku hodnotu 3 a dostaneme $3 + 3 = 6$,
4. výsledek z předchozího kroku vynásobíme hodnotou $x = 3$ a dostaneme $6 \cdot 3 = 18$,
5. a nakonec přičteme k předchozímu výsledku hodnotu $-7$ a dostaneme $18 - 7 = 11$.

Tento postup je algoritmus, který můžeme provádět naprosto mechanicky pomocí jednoduché tabulky, tzv. Hornerova schématu.

**Hornerovo schéma-tabulka**

Sestavení tabulky si ukážeme v jednotlivých krocích:

1. Do prvního řádku zapíšeme koeficienty polynomu, a to tak, že začneme s koeficientem při nejvyšší mocnině proměnné $x$ a postupně zapisujeme koeficienty u nižších mocnin (sestupně) až po absolutní člen, včetně znamének. Pokud je nějaká mocnina $x$ v polynomu vynechána, je koeficient 0. Pro $p_3(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 7$ dostaneme:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 3 & -7 \\ \hline \end{array}$$

2. Do druhého řádku úplně vlevo zapíšeme vstupní hodnotu, tedy hodnotu, ve které nás hodnota polynomu zajímá. V našem případě je to $x = 3$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 3 & -7 \\ \hline 3 & & & & \end{array}$$

3. Do třetího řádku úplně vlevo (za svislou čáru) si opíšeme koeficient při nejvyšší mocnině $x$ a dostaneme:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 3 & -7 \\ \hline 3 & - & & & \\ & 1 & & & \end{array}$$

Pro lepší orientaci si můžeme dát do druhého řádku do prvního políčka za svislou čáru značku $-$, na toto místo se totiž nic nebude vpisovat.

4. Číslo ve třetím řádku nejvíc vpravo (zatím tam máme jenom jedno číslo) vynásobíme vstupní hodnotou a výsledek zapíšeme do druhého řádku na nejbližší volné místo:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 3 & -7 \\ \hline 3 & - & 3 & & \\ & 1 & & & \end{array}$$

5. Sečteme číslo v prvním a druhém řádku, výsledek zapíšeme do třetího řádku.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 3 & -7 \\ \hline 3 & - & 3 & & \\ & 1 & 1 & & \end{array}$$

6. Kroky 4 a 5 opakujeme dokud tabulku nevyplníme celou. Číslo ve třetím řádku úplně vpravo je hledaná výstupní hodnota.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 3 & -7 \\ \hline 3 & - & 3 & 3 & 18 \\ & 1 & 1 & 6 & \mathbf{11} \end{array}$$

**Důležitá pomůcka**. Pokud je vstupní hodnota $x = c$ kořen, tak pro výstupní hodnotu platí $f(c) = 0$, a navíc hodnoty ve třetím řádku jsou koeficienty mnohočlenu $q_{n-1}(x)$, který vznikne vydělením mnohočlenu $p_n(x)$ výrazem $(x - c)$.

**Poznámka 7.** *Vzhledem k tomu, že hodnoty ve druhém řádku tabulky jsou jen mezivýpočty, lze je vynechat.*

Příklad

**Příklad 8.** *Polynom* $p(x) = x^5 + x^4 - 4x^2 - x + 3$ *rozložte na součin kořenových činitelů a určete* $p(2)$.

**Řešení.** *Množina všech celočíselných dělitelů absolutního členu polynomu* $p$ *je* $\{-1, 1, -3, 3\}$ *a množina přirozených dělitelů koeficientu při nejvyšší mocnině proměnné* $x$ *je* $\{1\}$. *Proto racionální kořeny polynomu mohou být jen čísla z množiny* $\{-1, 1, -3, 3\}$. *Využitím Hornerova schéma dostáváme:*
*Vyzkoušíme* $x = 1$ :

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 1 & 0 & -4 & -1 & 3 \\ \hline 1 & & 1 & 2 & 2 & -2 & -3 \\ & 1 & 2 & 2 & -2 & -3 & \mathbf{0} \end{array}$$

*Potom* $p(x) = (x-1) \cdot (x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3)$. *Množina racionálních kořenů zůstává nezměněna a kořen* $x = 1$ *vyzkoušíme ještě jednou:*

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 2 & -2 & -3 \\ \hline 1 & & 1 & 3 & 5 & 3 \\ & 1 & 3 & 5 & 3 & \mathbf{0} \end{array}$$

*Potom* $p(x) = (x-1)^2 \cdot (x^3 + 3x^2 + 5x + 3)$. *Množina racionálních kořenů se redukuje na* $\{-1, -3\}$, *po dosazení kladného čísla za* $x$ *do* $(x^3 + 3x^2 + 5x + 3)$ *dostaneme vždy kladnou hodnotu, tohle si dobře promyslete. Vyzkoušíme* $x = -1$ :

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & 5 & 3 \\ \hline -1 & & -1 & -2 & -3 \\ & 1 & 2 & 3 & \mathbf{0} \end{array}$$

*Potom* $p(x) = (x-1)^2 \cdot (x+1) \cdot (x^2 + 2x + 3)$. *Kvadratický trojčlen* $(x^2 + 2x + 3)$ *se nad množinou reálných čísel rozložit nedá, tím je úkol vyřešen.*
*Naším ukolem bylo ještě určit hodnotu* $p(2)$. *Opět využijeme Hornerova schéma:*

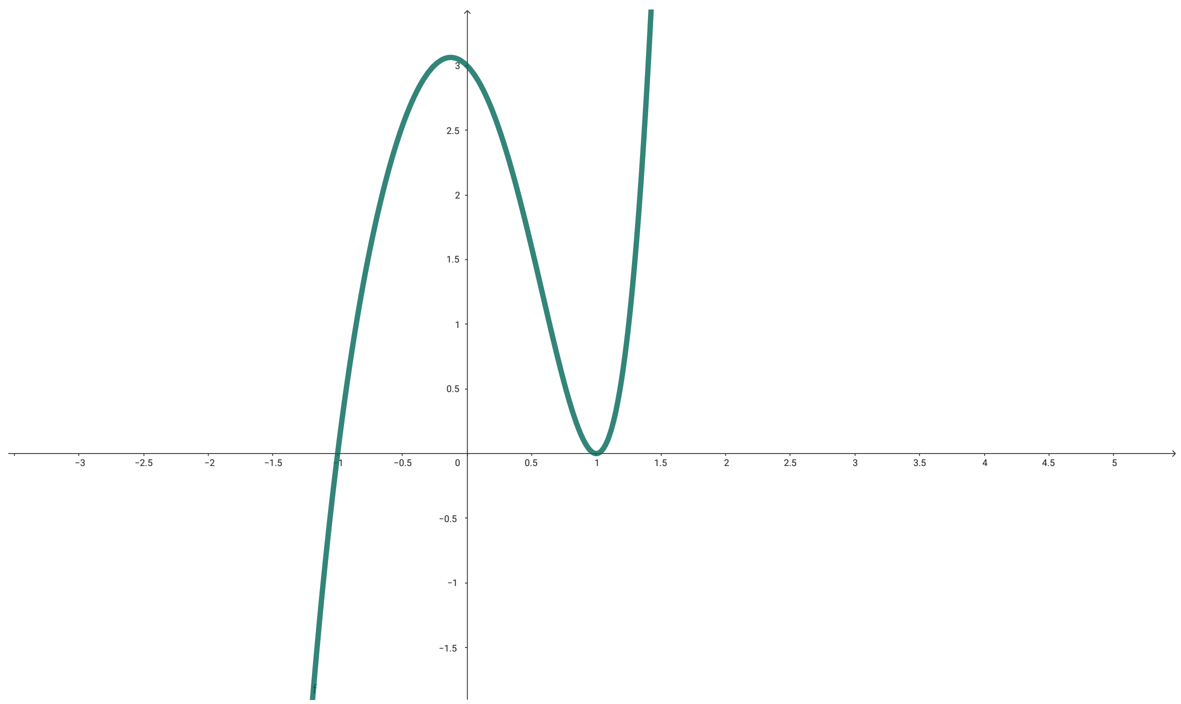
$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 1 & 0 & -4 & -1 & 3 \\ \hline 2 & & 2 & 6 & 12 & 16 & 30 \\ & 1 & 3 & 6 & 8 & 15 & \mathbf{33} \end{array}$$

*Takže hledaná hodnota je* $p(2) = 33$.

Příklad

**Příklad 9.** *Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ nabývá funkce $f(x) = x^5 + x^4 - 4x^2 - x + 3$ kladných hodnot.*

**Řešení.** *Využijeme rozklad polynomu $p$ z předchozího příkladu, který je roven naší funkci $f$. Graf funkce protíná osu $x$ v kořenech polynomu $p$, tedy v bodech $x_1 = -1$ a $x_2 = 1$. Znaménko výrazu $(x-1)^2$ je pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ kladné, znaménko výrazu $(x^2+2x+3)$ je kladné pro všechna $x \in \mathbb{R}$, tudíž na výsledné znaménko funkce $f$ má vliv pouze výraz $(x+1)$ a ten je pro $x \in (-1, \infty)$ kladný a pro $x \in (-\infty, -1)$ záporný. Proto naše funkce nabývá kladných hodnot pro $x \in (-1, 1) \cup (1, \infty)$. Na ilustraci uvádíme její graf:*



**Příklad**

**Příklad 10.** *Polynom* $p(x) = 4x^6 - x^5 + 8x^3 - 38x^2 + 33x - 6$ *rozložte na součin kořenových činitelů a určete* $p(0)$.

**Řešení.** *Množina všech celočíselných dělitelů absolutního členu polynomu* $p$ *je* $\{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6\}$ *a množina přirozených dělitelů koeficientu při nejvyšší mocnině proměnné* $x$ *je* $\{1, 2, 4\}$. *Proto racionální kořeny polynomu jsou z množiny* $M = \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\}$. *Využijeme Hornerovo schéma a vyzkoušíme* $x = 1$ :

| | 4 | −1 | 0 | 8 | −38 | 33 | −6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 4 | 3 | 3 | 11 | −27 | 6 |
| | 4 | 3 | 3 | 11 | −27 | 6 | **0** |

*Potom* $p(x) = (x-1) \cdot (4x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 11x^2 - 27x + 6)$. *Množina* $M$ *zůstává nezměněna a kořen* $x = 1$ *vyzkoušíme ještě jednou:*

| | 4 | 3 | 3 | 11 | −27 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 4 | 7 | 10 | 21 | −6 |
| | 4 | 7 | 10 | 21 | −6 | **0** |

*Potom* $p(x) = (x-1)^2 \cdot (4x^4 + 7x^3 + 10x^2 + 21x - 6)$. *Množina* $M$ *zůstává sice nezměněna, ale po dosazení* $x = 1$ *do* $4x^4 + 7x^3 + 10x^2 + 21x - 6$ *dostáváme číslo větší než* $0$. *Proto vyzkoušíme např.* $x = -2$ :

| | 4 | 7 | 10 | 21 | −6 |
|---|---|---|---|---|---|
| −2 | | −8 | 2 | −24 | 6 |
| | 4 | −1 | 12 | −3 | **0** |

*Potom* $p(x) = (x-1)^2 \cdot (x+2) \cdot (4x^3 - x^2 + 12x - 3)$. *Kořen* $x = 2$ *není násobný, zkuste si ho samy dosadit do výrazu* $(4x^3 - x^2 + 12x - 3)$. *Proto zmnožiny* $M$ *můžeme vyřadit* $1$ *a* $-2$, *dále se tato množina ještě bude redukovat díky změně absolutního členu a to následovně* $M^* = \{-1, 2, -3, 3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\}$. *My vyzkoušíme* $x = \frac{1}{4}$ :

| | 4 | −1 | 12 | −3 |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{4}$ | | 1 | 0 | 3 |
| | 4 | 0 | 12 | **0** |

*Potom* $p(x) = (x-1)^2 \cdot (x+2) \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right) \cdot (4x^2 + 12) = (x-1)^2 \cdot (x+2) \cdot (4x-1) \cdot (x^2+3)$.
*Protože se kvadratický trojčlen* $(x^2 + 3)$ *nad množnou reálných čísel rozložit nedá, můžeme řešení ukončit.*
*Hodnotu* $p(0)$ *můžeme zjistit dosazením přímo do polynomu:*

$$p(0) = 40^6 - 0^5 + 8.0^3 - 38.0^2 + 33.0 - 6 = -6,$$

*nebo pomocí Hornerova schématu:*

| | 4 | −1 | 0 | 8 | −38 | 33 | −6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 4 | −1 | 0 | 8 | −38 | 33 | **−6** |

# 1 Test

1. Funkce $f(x) = 3x - 1$ protíná osu $x$ v bodě:
    (a) $x = 0$
    (b) $x = \frac{1}{3}$
    (c) $x = -\frac{1}{3}$
    (d) $x = 3$

2. Funkce $f(x) = 2 - x$ je
    (a) rostoucí na $\mathbb{R}$
    (b) klesající na $\mathbb{R}$
    (c) konstantní na $\mathbb{R}$
    (d) rostoucí na intervalu $(-\infty, 2)$ a klesající na intervalu $(2, \infty)$.

3. Inverzní funkce k funkci $f(x) = 3x - 1$ je
    (a) $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$
    (b) $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$
    (c) $f^{-1}(x) = 3x + 1$
    (d) $f^{-1}(x) = -3x + 1$

4. Funkce $f(x) = x^2 - 2x - 3$ protíná osu $x$ v bodech:
    (a) $x_1 = 3, x_2 = -1$
    (b) $x_1 = -3, x_2 = 1$
    (c) funkce osu $x$ neprotíná
    (d) $x_1 = x_2 = 0$

5. Vrchol paraboly $y = 9 - x^2$ má souřadnice:
    (a) $[0, 3]$
    (b) $[0, 9]$
    (c) $[0, -9]$
    (d) $[9, 0]$

6. Polynom $p(x) = 2x^5 + 9x^4 + 16x^3 + 14x^2 + 6x + 1$ rozložíme na součin takto:
    (a) $(2x + 1) \cdot (x + 1)^4$
    (b) $(2x - 1) \cdot (x + 1)^4$
    (c) $(2x + 1) \cdot (x - 1)^4$
    (d) $\left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (x + 1)^4$

7. Jedním z kořenů polynomu $p(x) = 2x^5 + 9x^4 + 16x^3 + 14x^2 + 6x + 1$ je:

(a) $x = 1$
(b) $x = -1$
(c) $x = \frac{1}{2}$
(d) $x = 0$

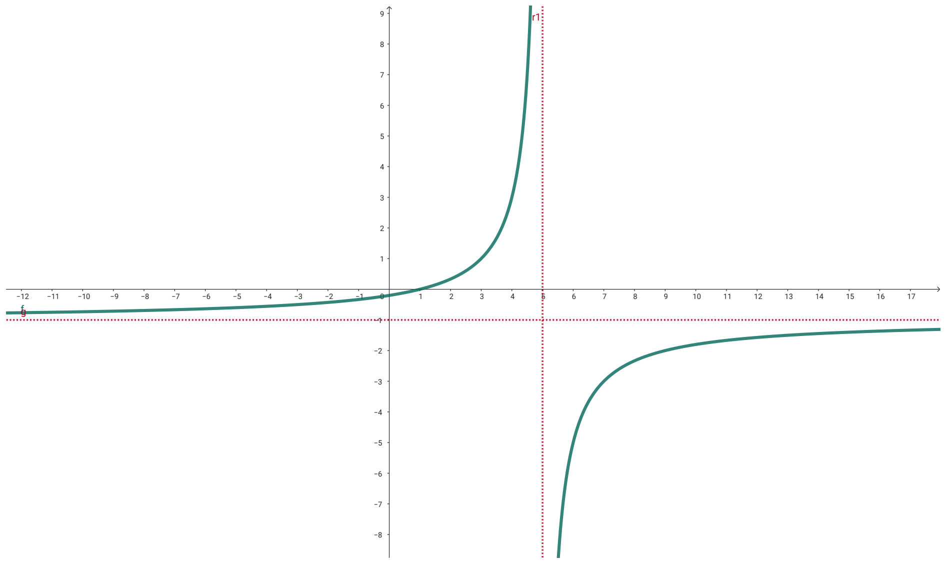
8. Funkce $f(x) = x^2 - 2x + 5$ je klesající na intervalu:
   (a) $(1, \infty)$
   (b) $(-\infty, 1)$
   (c) $\langle 1, 2 \rangle$
   (d) $(-\infty, \infty)$

9. Funkce $f(x) = x^2 - 2x + 5$ nabývá kladných hodnot na intervalu:
   (a) $(0, \infty)$
   (b) $(-\infty, \infty)$
   (c) $\langle 0, \infty)$
   (d) $\langle -2, 5 \rangle$

10. Funkce $f(x) = x^2 - 2x + 5$ protíná osu $y$ v bodech:
   (a) $[0, 5]$
   (b) $[0, -5]$
   (c) $\{0, 5\}$
   (d) $[5, 0]$

# 4. Racionální lomené funkce

## Racionální lomené funkce

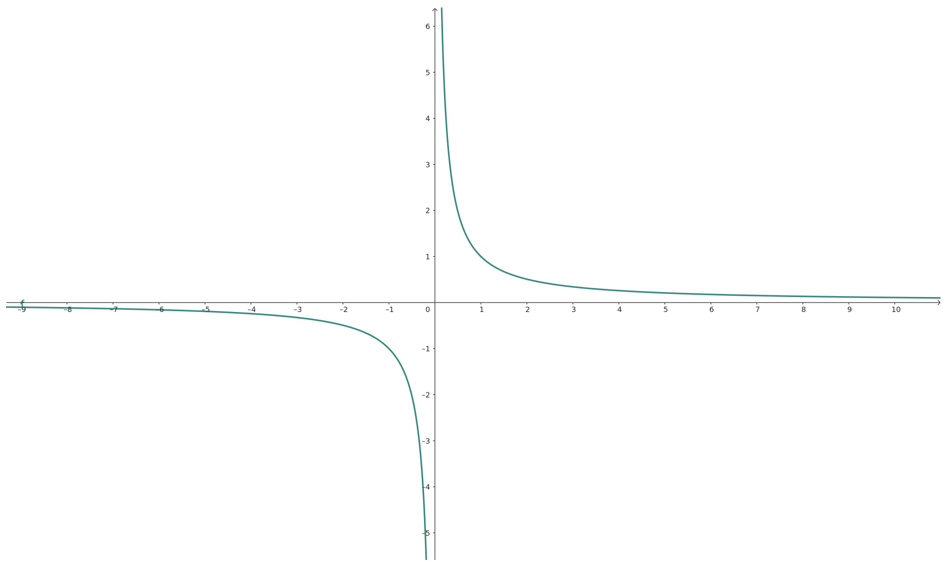


## Racionální lomené funkce

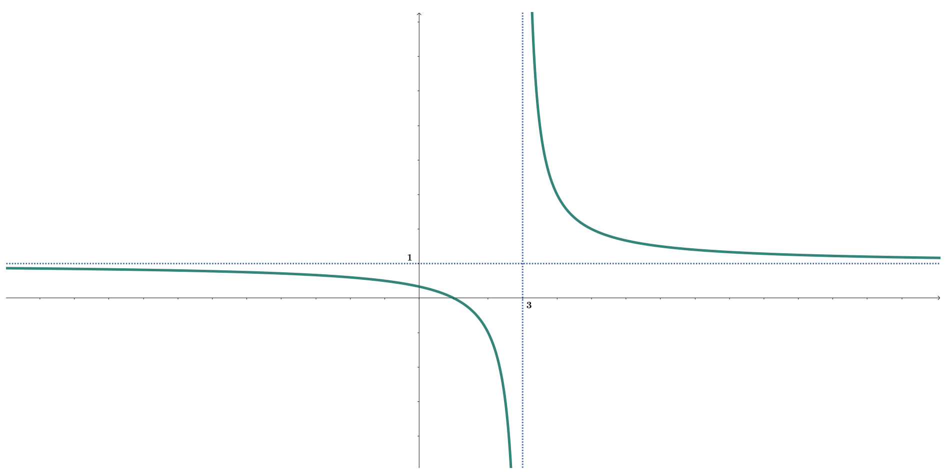
Racionální lomená funkce je každá funkce tvaru

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

kde $P_n$ a $Q_m$ jsou polynomy stupně $n$, resp. $m$. Obecně lze říci, že definičním oborem takovéto funkce je množina všech reálných čísel bez kořenů polynomu $Q_m$, tj. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \colon Q_m(x) \neq 0\}$.
My se budeme zejména věnovat podtřídě racionálních lomených funkcí, kde $P(x) = ax + b$ a $Q(x) = cx + d$ jsou polynomy prvního stupně, které nemají společný kořen. Grafu takovýchto funkcí se říká hyperbola. Základní příklad hyperboly vidíme na obrázku, jedná se o graf funkce $y = \frac{1}{x}$. Definiční obor této funkce je $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ a také její obor hodnot je množina $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Grafem funkce $g(x) = \frac{x-1}{x-3}$ je také hyperbola, jen je posunutá. Z grafu funkce, a také z jejího předpisu, umíme určit definiční obor $D(g) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Obor hodnot funkce $g$ vyčteme z grafu, $H(g) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Určit obor hodnot z předpisu funkce se naučíme v příkladu 1.




Přímky nakreslené v obrázku čárkovaně se nazývají asymptoty grafu funkce. Přímka $x = 3$ se nazývá svislá asymptota, přímka $y = 1$ vodorovná asymptota. Svislá asymptota souvisí s definičním oborem a vodorovná s oborem hodnot.

**Příklad**

**Příklad 1.** *Načrtněte graf funkcie* $f(x) = \frac{x-1}{2-x}$, *určete* $D(f)$ *a* $H(f)$.

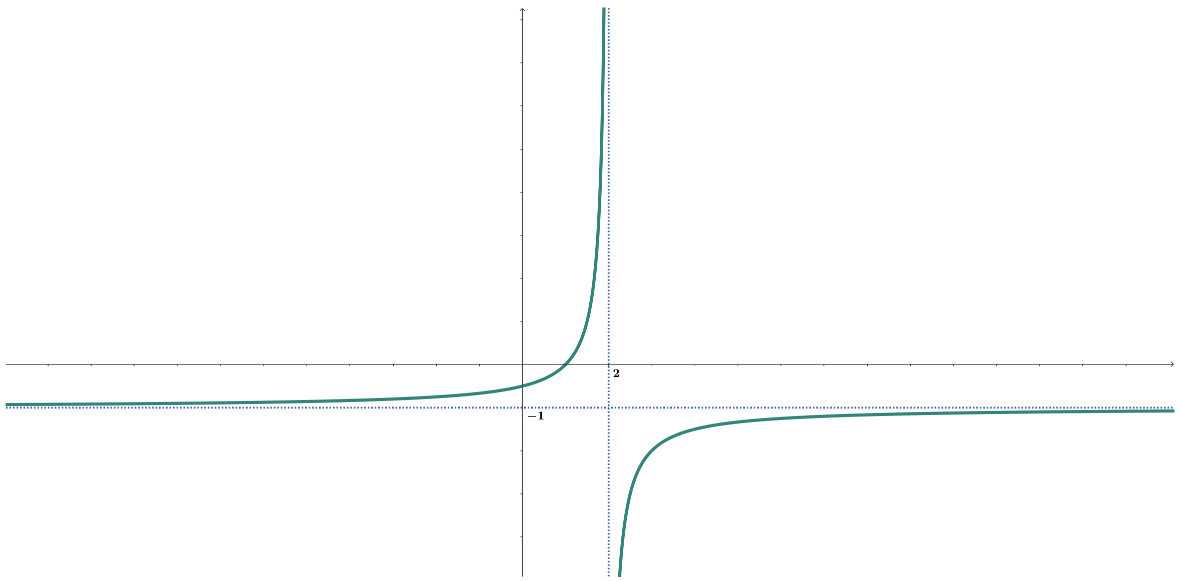
**Řešení.** *Pro určení definičního oboru stačí zjistit, kdy je* $2 - x \neq 0$, *protože výraz* $2 - x$ *je ve jmenovateli. Proto* $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. *To znamená, že svislá asymptota je v* $x = 2$.

*Pro určení oboru hodnot upravíme předpis funkce následovně:*

$$f(x) = \frac{x-1}{2-x} = \frac{-(1-x)}{2-x} = -\frac{(2-x)+1}{2-x} = -\frac{2-x}{2-x} - \frac{1}{2-x} = -1 - \frac{1}{2-x}.$$

*Vzhledem k tomu, že* $\frac{1}{2-x} \neq 0$ *pro všechna* $x \in D(f)$, *je* $f(x) \neq -1$ *pro všechna* $x \in D(f)$, *proto* $H(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. *Proto vodorovná asymptota je v* $y = -1$.

*Pro nakreslení grafu funkce si nejprve nakreslíme svislou a vodorovnou asymptotu. Potom stačí zjistit průsečíky s osami a nakreslíme hyperbolu, která se blíží k asymptotám a prochází přes vypočítané průsečíky. Průsečík s osou* $x$ *je pro funkci* $f$ *bod* $[1, 0]$ *a dostaneme ho z rovnice* $f(x) = 0$. *Průsečík s osou* $y$ *je bod* $\left[0, -\frac{1}{2}\right]$ *a zjistíme ho, když určíme funkční hodnotu v* $x = 0$.




*Evidentně je funkce* $f$ *rostoucí na intervalu* $(-\infty, 2)$ *a také na intervalu* $(2, \infty, )$, *ale není rostoucí na jejich sjednocení. Proč? Odpověd nám dává jednoduchý protipříklad. Zřejmě je* $1 < 3$, *ale* $f(1) > f(3)$. *Pokuste se najít jiný protipříklad.*

**Příklad**

**Příklad 2.** *Nechť* $f(x) = \frac{1+x}{3+x}$, *najděte inverzní funkci k funkci* $f$, *obě funkce načrtněte.*

**Řešení.** *Nejdříve zjistíme zda je funkce* $f$ *prostá. To znamená, že zjistíme, zda platí implikace:*

$$\forall a, b \in D(f)\colon f(a) = f(b) \Rightarrow a = b.$$

*Evidentně* $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. *Nechť* $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ *a nechť* $f(a) = f(b)$. *Dosadíme do předpisu funkce:*

$$\frac{1+a}{3+a} = \frac{1+b}{3+b},$$

*potom*

$$(1+a)(3+b) = (1+b)(3+a),$$
$$3 + b + 3a + ab = 3 + a + 3b + ab,$$
$$b + 3a = a + 3b,$$
$$a = b.$$

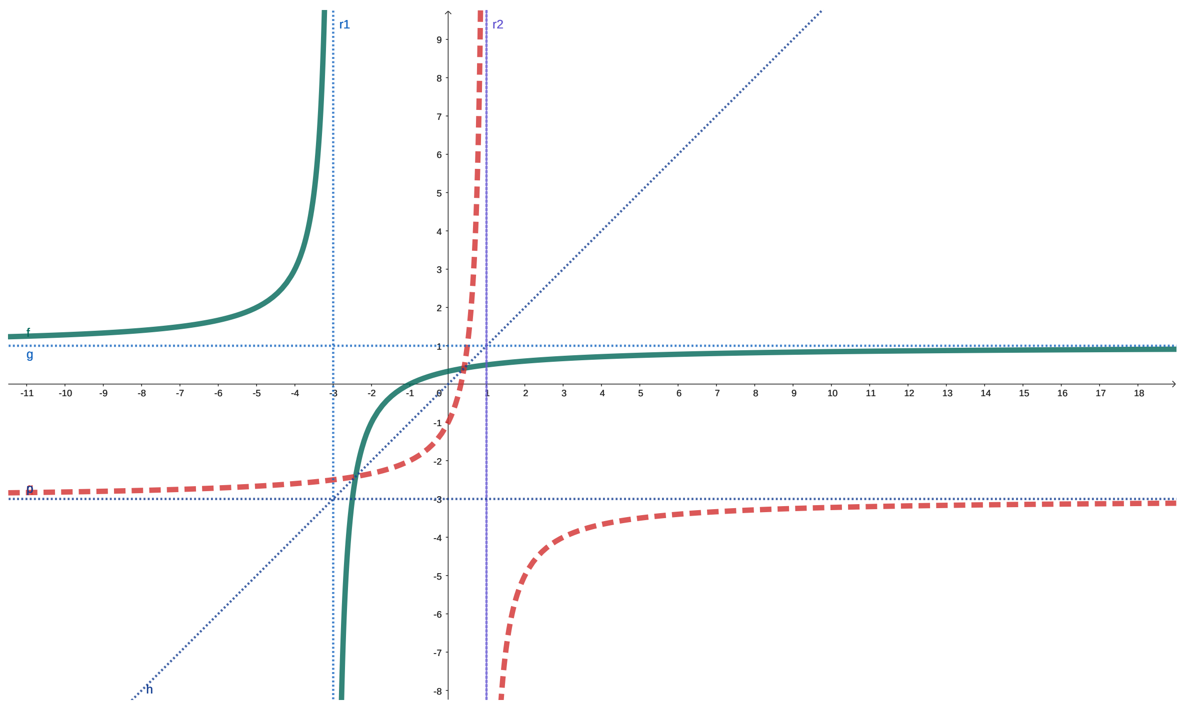
*Vzhledem k tomu, že* $a, b$ *jsou libovolně vybrané prvky z* $D(f)$, *je implikace pro funkci* $f$ *splněna. Tudíž je funkce* $f$ *prostá na celém svém definičním oboru, a proto k ní na celém definičním oboru existuje inverzní funkce. Její předpis dostaneme tak, že v původním předpisu zaměníme* $x$ *za* $y$ *a vyjádříme si* $y$.

$$x = \frac{1+y}{3+y} \Rightarrow x \cdot (3+y) = 1 + y \Rightarrow 3x + xy = 1 + y \Rightarrow xy - y = 1 - 3x,$$

*potom*

$$y = \frac{1-3x}{x-1}.$$

*Grafy funkce a její inverzní funkce, včetně asymptot a osy symetrie vidíme na obrázku, funkce* $f$ *je vykreslena zelenou a* $f^{-1}$ *červenou barvou:*



**Příklad**

**Příklad 3.** *Nechť* $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$. *Určete její definiční obor.*

**Řešení.** *Pro určení definičního oboru potřebujeme zjistit, kdy je* $x^2 - 3x + 2 \neq 0$. *Vyřešíme kvadratickou rovnici* $x^2 - 3x + 2 = 0$ *a její kořeny vyloučíme z definičního oboru. Kvadratický trojčlen na levé straně upravíme na součin:*

$$(x-2)\cdot(x-1) = 0.$$

*Kořeny této rovnice tedy jsou* $x_1 = 2, x_2 = 1$, *proto* $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.

**Příklad**

**Příklad 4.** *Nechť* $f(x) = \frac{1+x}{3+x}$, $g(x) = \frac{2+x}{x+6}$. *Určete souřadnice bodů, ve kterých se jejich grafy protínají.*

**Řešení.** *Pro vyřešení této úlohy stačí zjistit, pro která* $x \in \mathbb{R}$ *se jejich funkční hodnoty rovnají, což znamená, že budeme řešit rovnici*

$$\frac{1+x}{3+x} = \frac{2+x}{x+6}.$$

*Tuto rovnici budeme řešit na množině* $\mathbb{R} \setminus \{-6, -3\}$, *protože v* $x = -6$ *není výraz na pravé straně definován a v* $x = -3$ *není definován výraz na levé straně. Rovnici vynásobíme výrazem* $(3+x) \cdot (x+6)$ *a dostaneme*

$$(1+x) \cdot (x+6) = (2+x) \cdot (3+x).$$

*Po úpravě máme:*

$$x^2 + 7x + 6 = x^2 + 5x + 6,$$

*potom*

$$2x = 0.$$

*Pro* $x = 0$ *funkce* $f$ *a* $g$ *nabývají stejnou funkční hodnotu* $f(0) = g(0) = \frac{1}{3}$, *tedy jejich grafy se protínají v bodě* $A = \left[0, \frac{1}{3}\right]$.

Příklad

**Příklad 5.** *Načrtněte graf funkcie* $f(x) = \frac{|x-1|}{2-x}$*, určete* $D(f)$ *a* $H(f)$*.*

**Řešení.** *Pro určení definičního oboru potřebujeme zjistit, kdy je* $2 - x \neq 0$*. Proto* $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ *a graf funkce bude mít svislou asymptotu v bodě* $x = 2$*. Pro určení oboru hodnot bude nejlepší, když si graf nejdříve nakreslíme. Výraz v čitateli obsahuje absolutní hodnotu, proto si předpis funkce musíme rozepsat pro interval, kde je* $x - 1 < 0$ *a pre interval, kde je* $x - 1 \geq 0$*. Potom*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{2-x} & x \in (-\infty, 1) \\ \frac{x-1}{2-x} & x \in \langle 1, 2) \cup (2, \infty)\,. \end{cases}$$

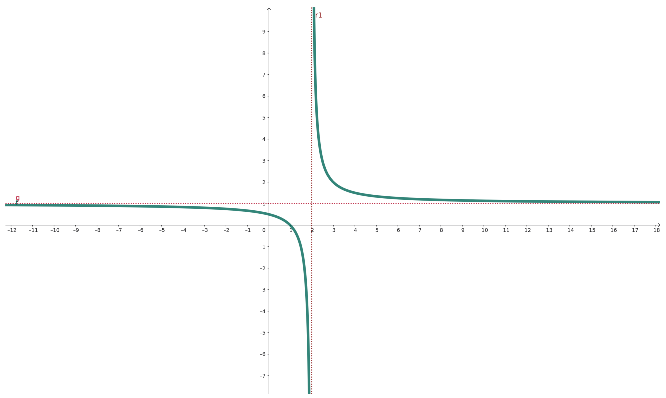
*Graf této funkce nakreslíme pro každou množinu zvlášť. Předpis funkce na intervalu* $(-\infty, 1)$ *upravíme takto:*

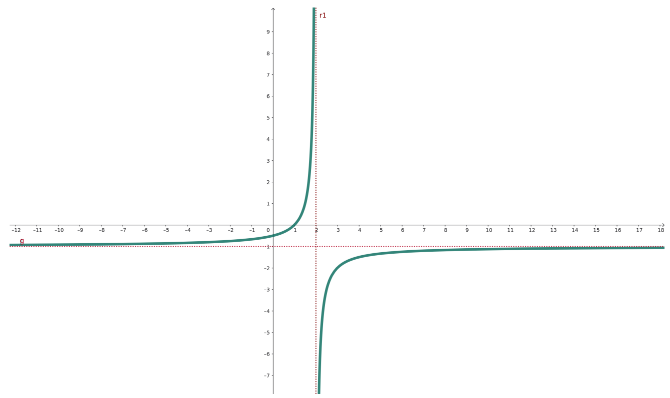
$$\frac{1-x}{2-x} = \frac{2-x-1}{2-x} = 1 - \frac{1}{2-x}.$$

*Vzhledem k tomu, že* $\frac{1}{2-x} \neq 0$*, funkce* $f$ *na tomto intervalu nemůže nabývat hodnotu 1, proto vodorovná asymptota bude* $y = 1$*.*
*Předpis funkce na sjednocení intervalů* $\langle 1, 2) \cup (2, \infty)$ *upravíme podobně*

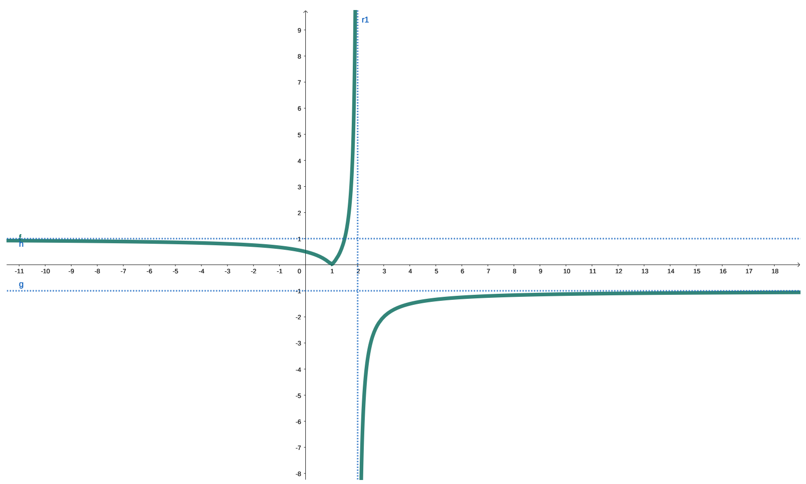
$$\frac{x-1}{2-x} = \frac{x-2+1}{2-x} = -1 + \frac{1}{2-x}.$$

*Evidentně* $\frac{1}{2-x} \neq 0$*, proto funkce na tomto intervalu nemůže nabývat hodnotu* $-1$*, proto vodorovná asymptota bude* $y = -1$*.*
*Jako pomůcku si načrtneme oba grafy*





*Výsledný graf dostaneme tak, že graf vlevo načrtneme jen na intervalu* $(-\infty, 1)$ *a graf vpravo na sjednocení intervalů* $\langle 1, 2) \cup (2, \infty)$*:*



*Z grafu funkce vidíme, že obor hodnot je* $H(f) = (-\infty, -1) \cup \langle 0, \infty)\,.$

Příklad

**Příklad 6.** *Nechť* $f(x) = \frac{1}{x^2-2|x|-3}$. *Určete její definiční obor.*

**Řešení.** *Pro určení definičního oboru potřebujeme zjistit, kdy je* $x^2 - 2|x| - 3 \neq 0$. *Vyřešíme kvadratickou rovnici* $x^2 - 2|x| - 3 = 0$ *a její kořeny vyloučíme z definičního oboru. Kvadratický trojčlen na levé straně obsahuje absolutní hodnotu, proto ho musíme rozepsat pro interval, kde je* $x < 0$ *a pre interval, kde je* $x \geq 0$. *Pro interval* $(-\infty, 0)$ *rovnici přepíšeme na*

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \iff (x+3) \cdot (x-1) = 0 \iff x = -3 \vee x = 1.$$

*Vzhledem k tomu, že pracujeme na intervalu* $(-\infty, 0)$, *rovnici vyhovuje jenom* $x = -3$. *Pro interval* $\langle 0, \infty)$ *rovnici přepíšeme na*

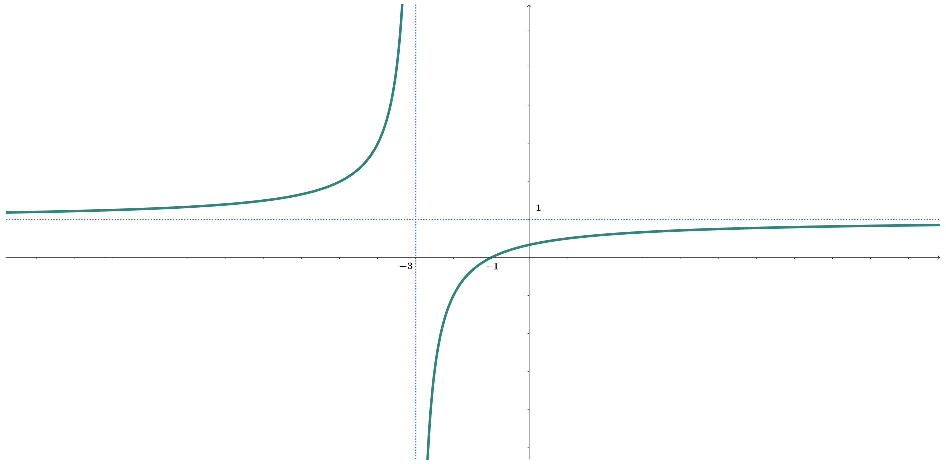
$$x^2 - 2x - 3 = 0 \iff (x-3) \cdot (x+1) = 0 \iff x = 3 \vee x = -1.$$

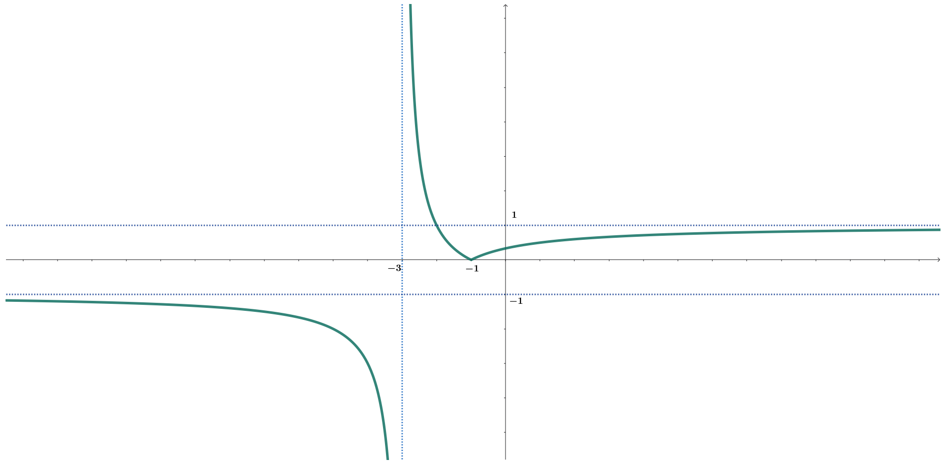
*Vzhledem k tomu, že pracujeme na intervalu* $\langle 0, \infty)$, *rovnici vyhovuje jenom* $x = 3$. *Kořeny původní rovnice jsou* $x_1 = -3, x_2 = 3$, *proto* $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.

Příklad

**Příklad 7.** *Nechť* $f(x) = \frac{1+x}{3+x}$, $g(x) = \frac{|1+x|}{3+x}$. *Najděte všechna* $x \in \mathbb{R}$, *pro která platí* $f(x) = g(x)$.

**Řešení.** *Úlohu můžeme řešit graficky. Na následujících obrázcích vidíme grafy funkcí* $f$ *a* $g$ *a tyto funkce se rovnají na intervalu* $\langle -1, \infty)$ .




*Pro další způsob řešení si stačí uvědomit, že funkci* $g$ *můžeme bez absolutní hodnoty přepsat následovně:*

$$g(x) = \begin{cases} \frac{-1-x}{3+x} & x \in (-\infty, -1)\,, \\ \frac{1+x}{3+x} & x \in \langle -1, \infty)\,. \end{cases}$$

*Proto* $f(x) = g(x)$ *pro* $x \in \langle -1, \infty)$ .

# 1 Test

1. Definiční obor funkce $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$ je

   (a) $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$,

   (b) $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$,

   (c) $\mathbb{R} \setminus \{-3, -2\}$,

   (d) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

2. Inverzní funkce k funkci $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$ má předpis

   (a) $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x+3}$

   (b) $f^{-1}(x) = \frac{3-2x}{x-1}$

   (c) $f^{-1}(x) = \frac{2-3x}{x-1}$

   (d) $f^{-1}(x) = \frac{3-2x}{x+1}$

3. Funkce $f(x) = \frac{1-x}{x-3}$ protína osu $x$ v bodeě

   (a) $A = [1, 0]$

   (b) $B = [0, 1]$

   (c) $C = \left[0, \frac{1}{3}\right]$

   (d) $D = \left[0, -\frac{1}{3}\right]$

4. Definiční obor funkce $f(x) = \frac{x+3}{x^2+2x-3}$ je

   (a) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$,

   (b) $\mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$,

   (c) $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$,

   (d) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

5. Definiční obor funkce $f(x) = \frac{x+3}{x^2-2|x|-3}$ je

   (a) $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$,

   (b) $\mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 1, 3\}$,

   (c) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$,

   (d) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,

6. Funkce $f(x) = \frac{x+1}{|x-2|}, g(x) = \frac{|x+1|}{x-2}$ se rovnají pro $x$ z intervalu

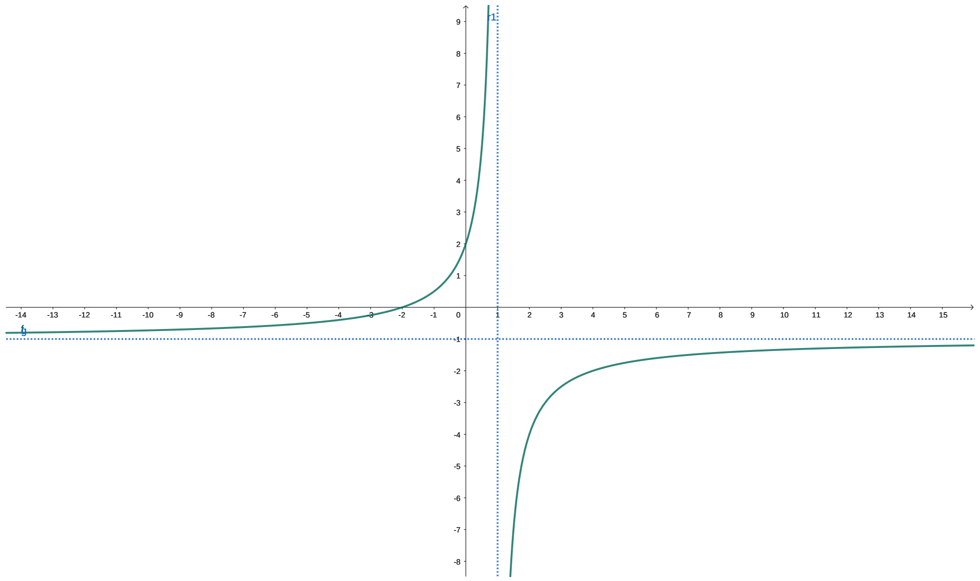
   (a) $(2, \infty)$,

   (b) $(-\infty, -1\rangle$,

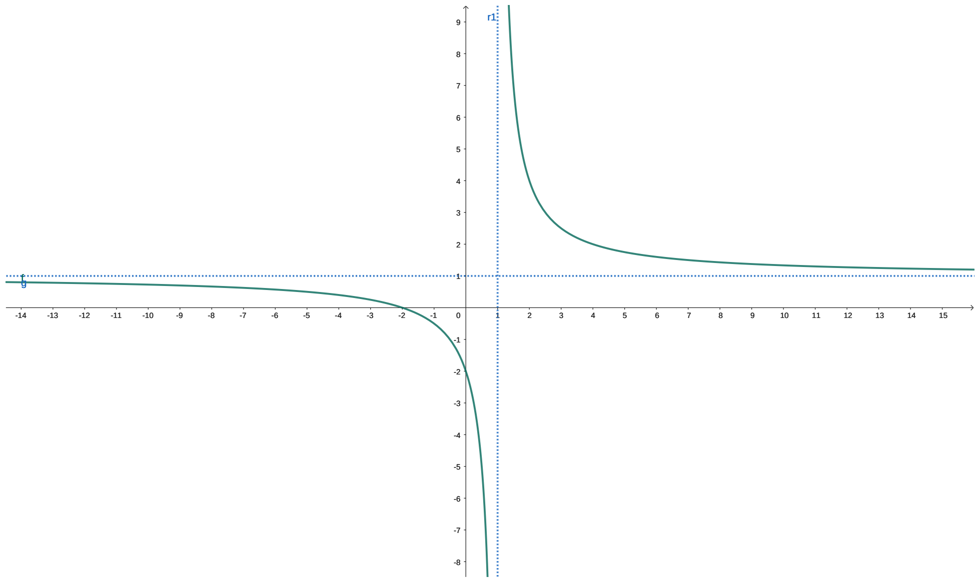
   (c) $\langle 2, \infty)$,

   (d) $(-1, 2)$.

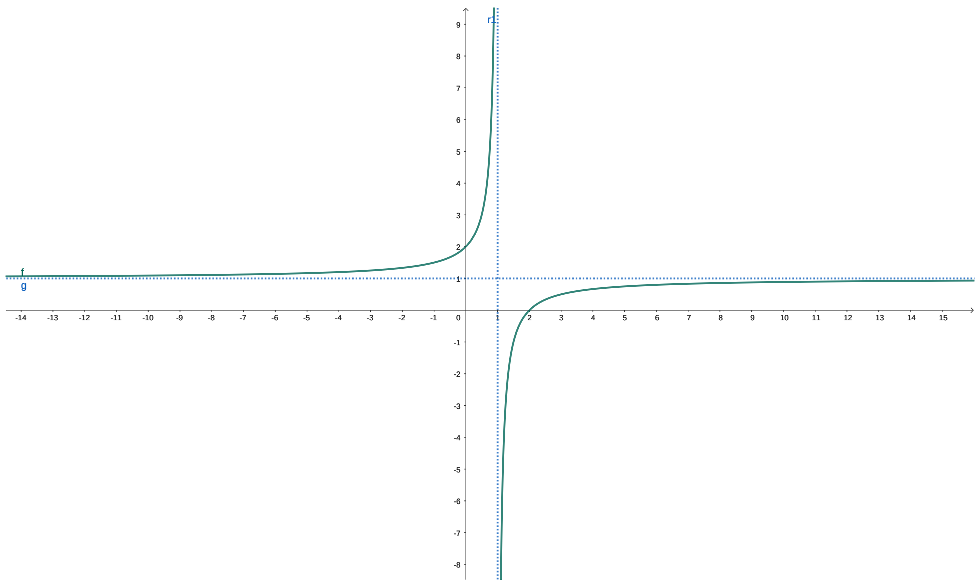
7. Graf funkce $f(x) = \frac{x+2}{1-x}$ je

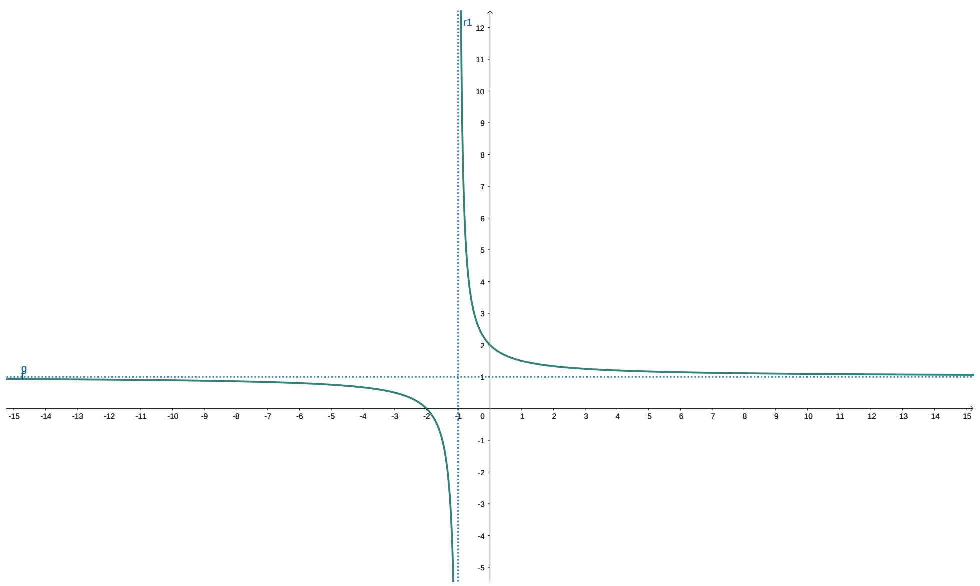


(a)



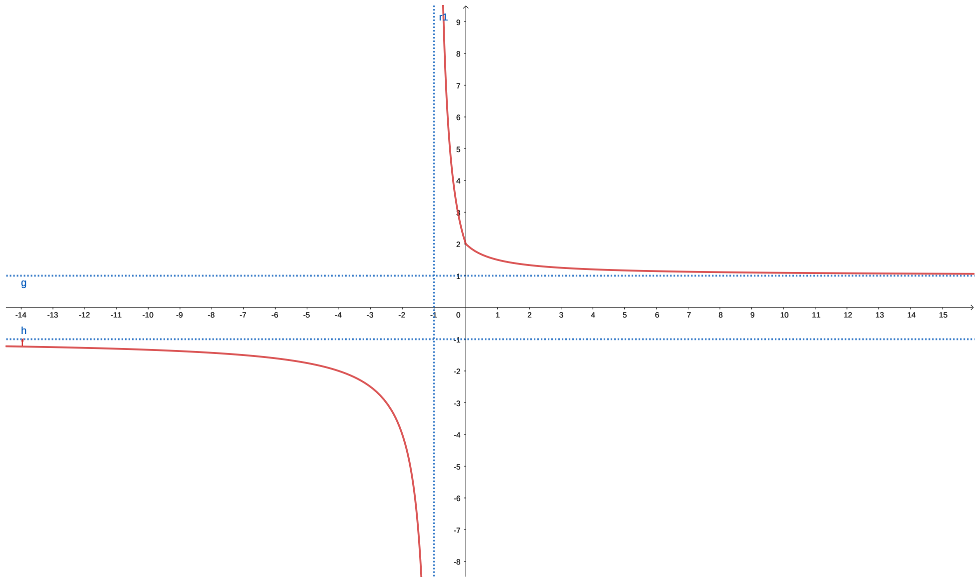
(b)

(c) 

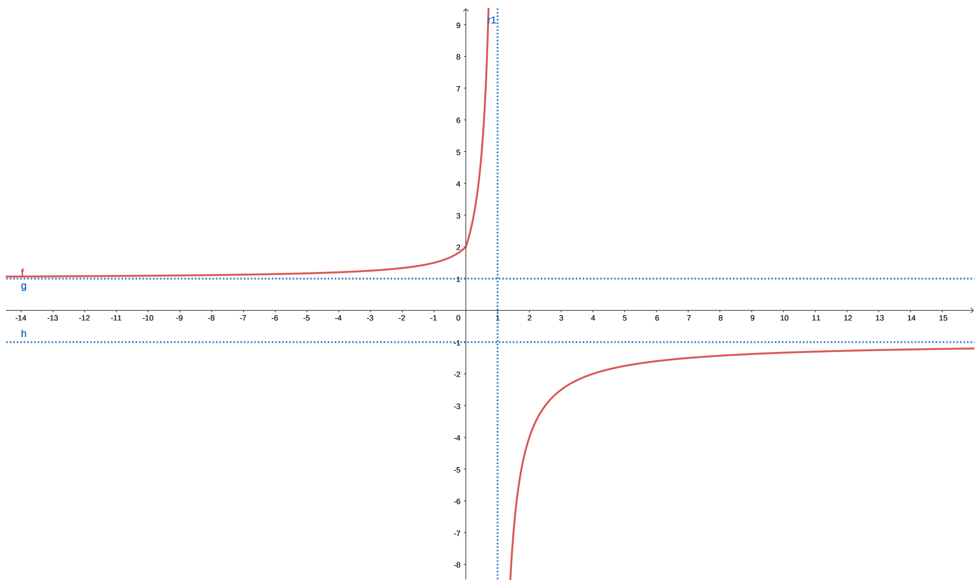
(d) 

8. Graf funkce $f(x) = \frac{|x|+2}{1-x}$ je

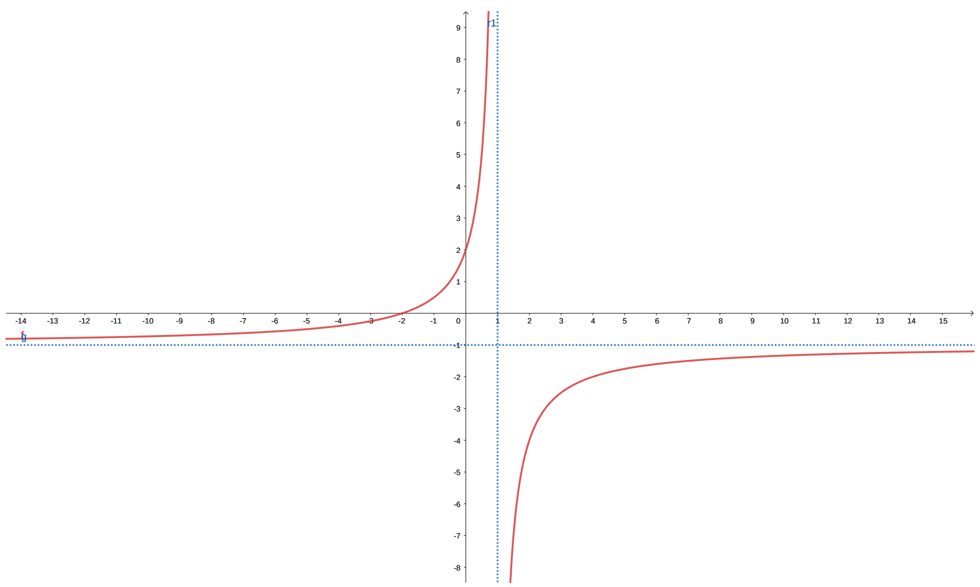
(a)

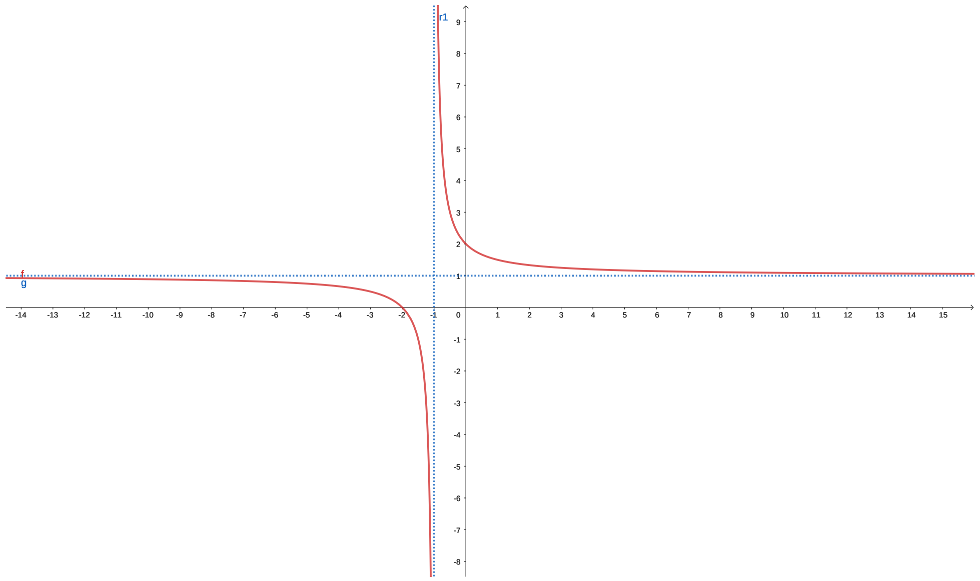



(b)



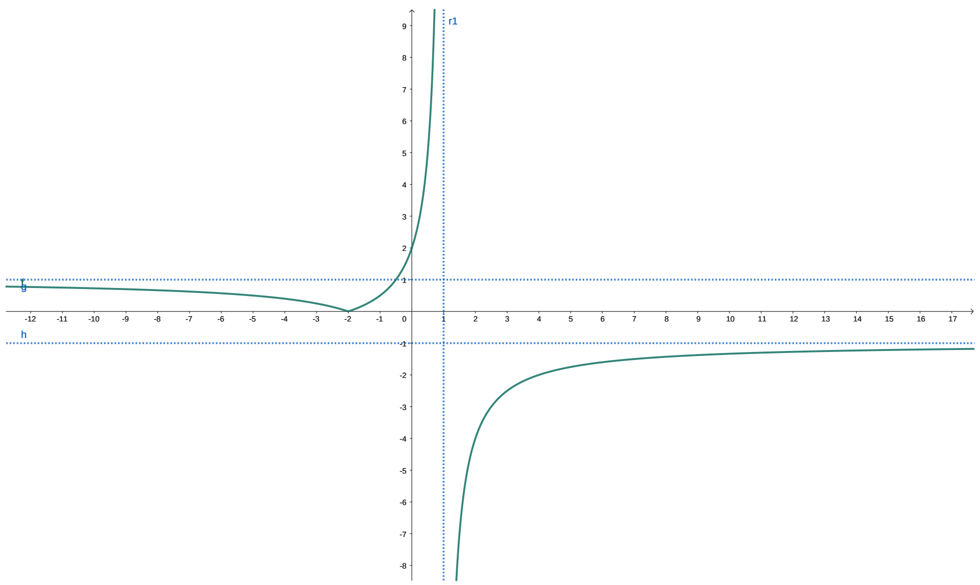

(c)



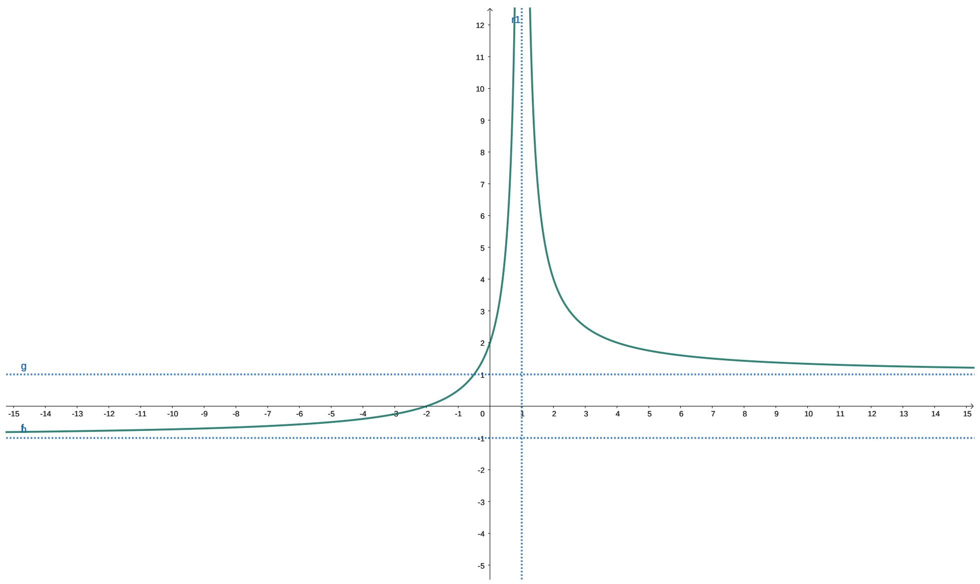



(d)

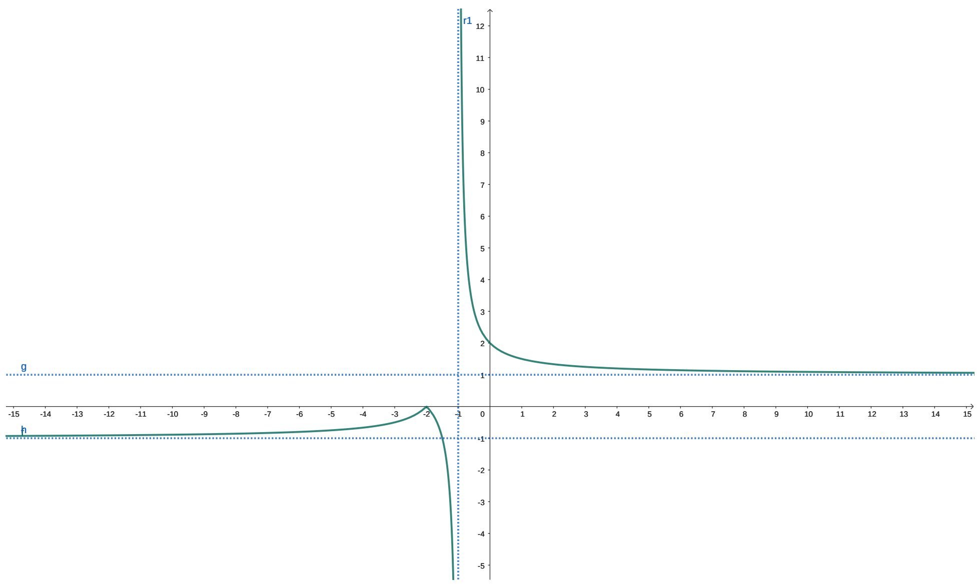
9. Graf funkce $f(x) = \frac{|x+2|}{1-x}$ je



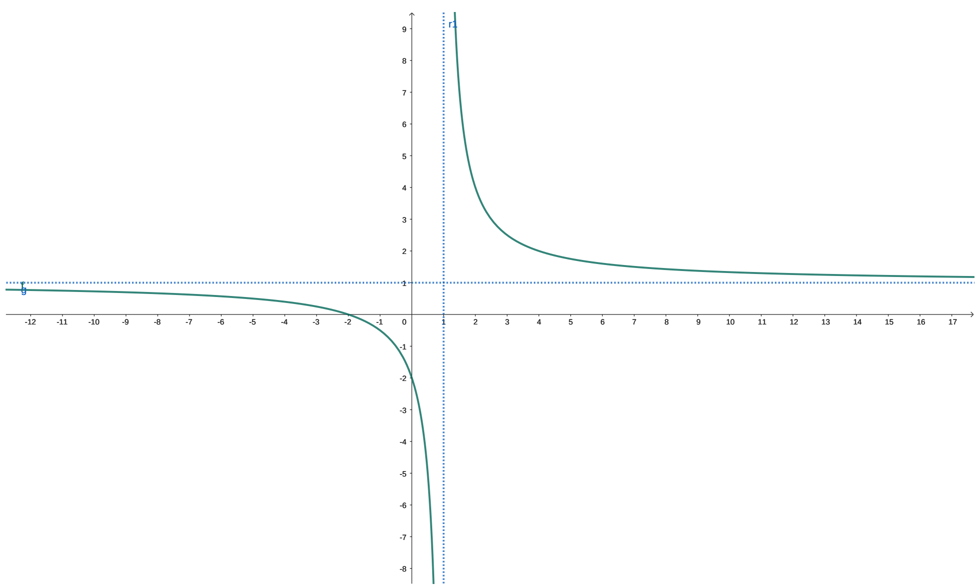

(a)



(b)

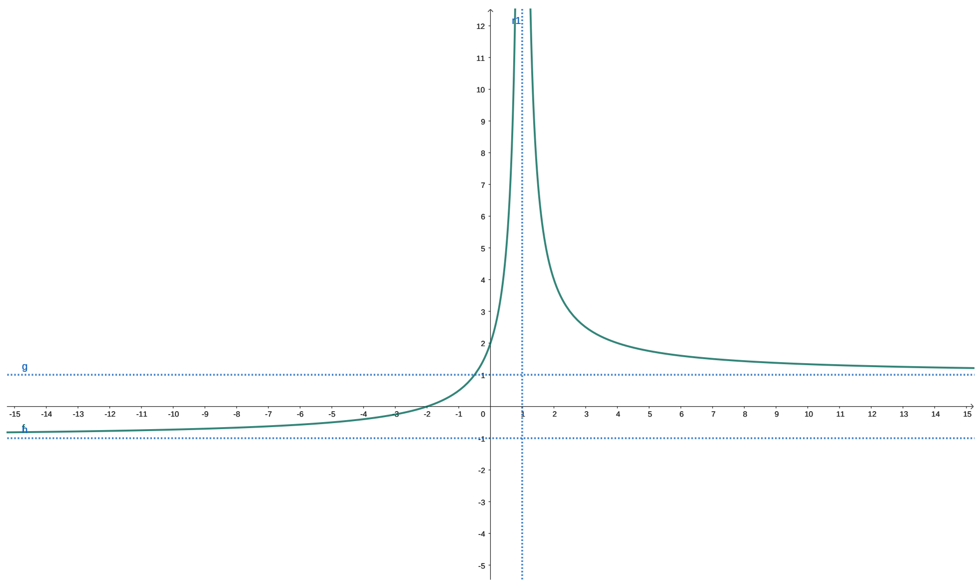


(c)

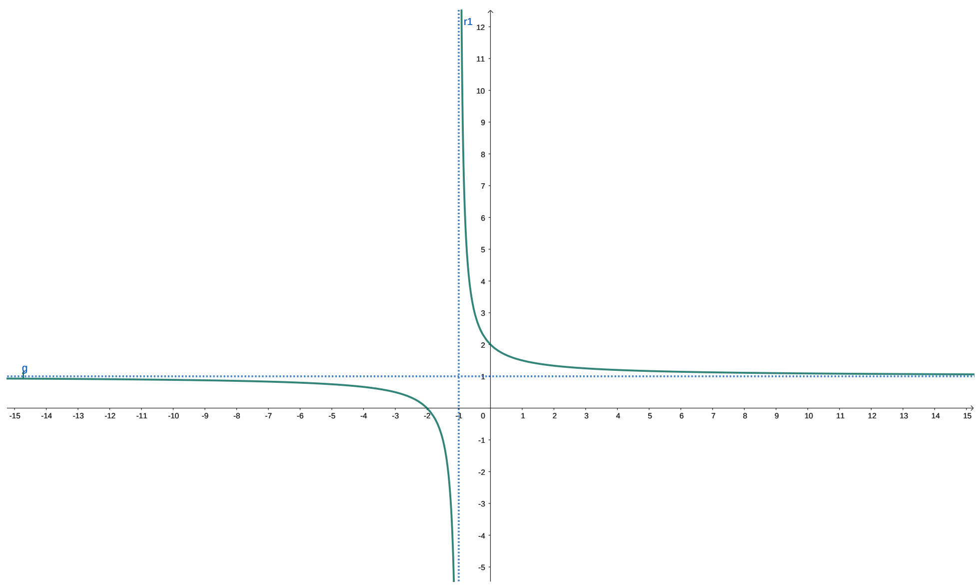


(d)

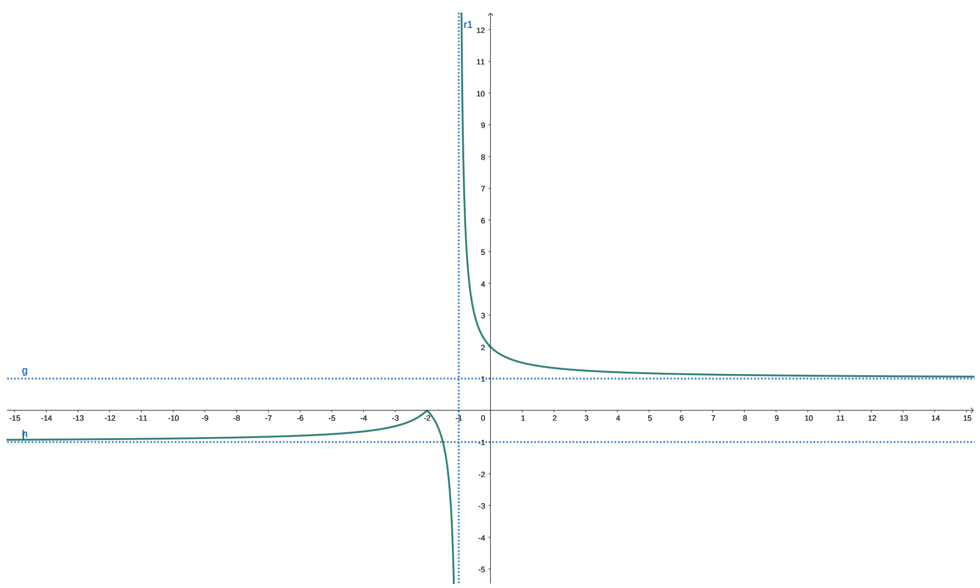
10. Graf funkce $f(x) = \frac{x+2}{|1-x|}$ je




(a)

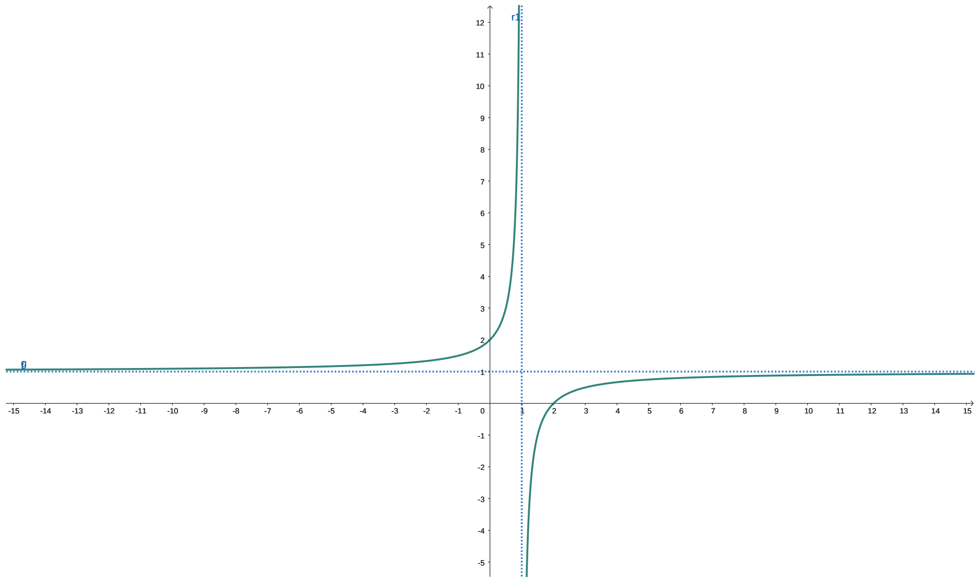



(b)



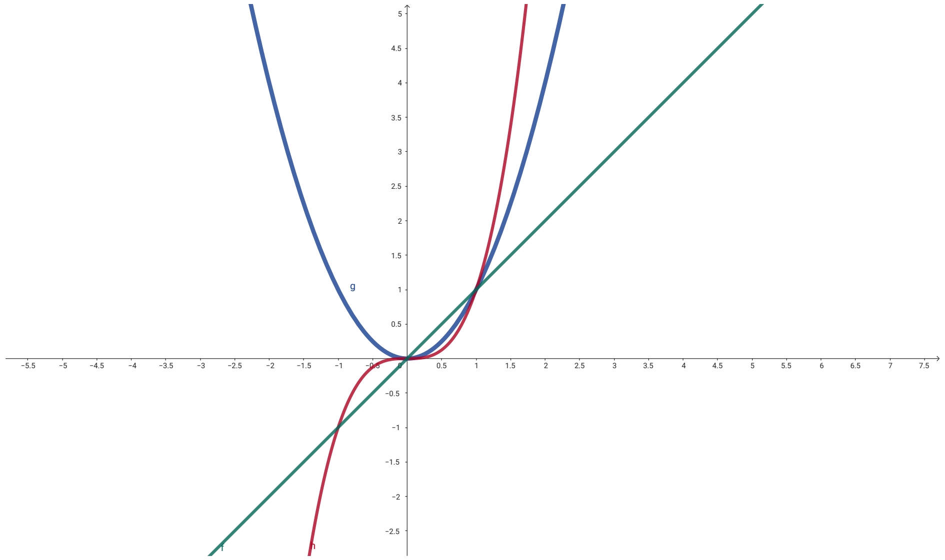

(c)

(d)



# 5. Mocninné funkce

**Mocninné funkce**



## Mocninné funkce

Mocninnou funkcí nazýváme funkci $f$ danou pro $a \in \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = x^a.$$

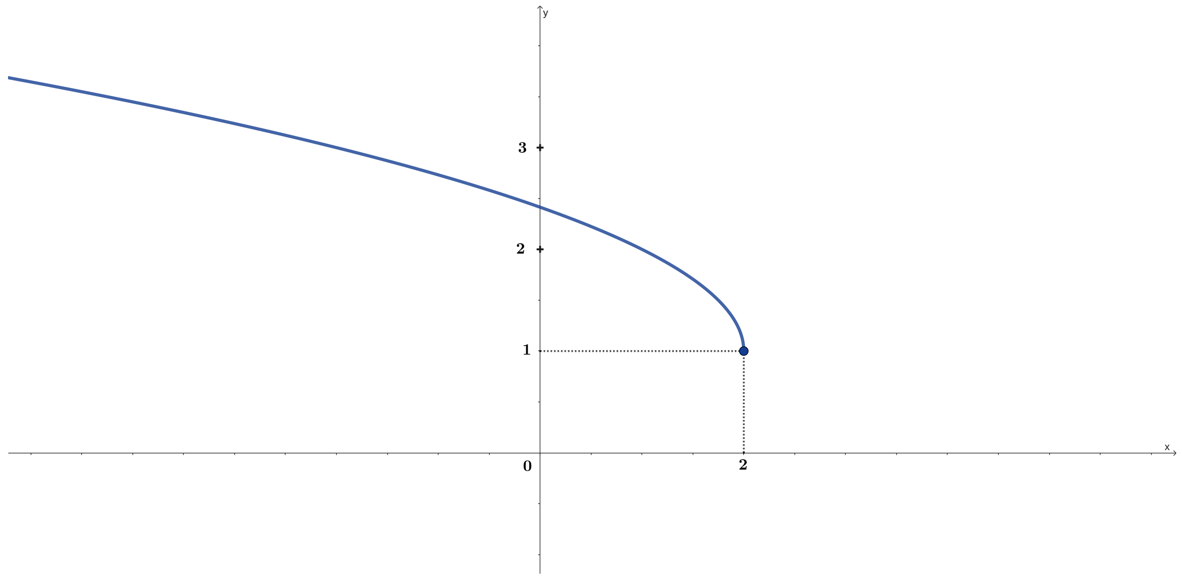
Přitom mohou nastat tyto případy:

- $a = 0$. Jedná se o konstantní funkci $f(x) = 1$ pro $x \neq 0$.
- $a \in N \setminus \{0\}$. Mocninná funkce s přirozeným exponentem je definovaná $\forall x \in \mathbb{R}$. Je-li $a$ sudé číslo, jedná se o sudou funkci, která je klesající na intervalu $(-\infty, 0)$ a rostoucí na intervalu $(0, \infty)$. Je-li $a$ liché číslo, jedná se o lichou a rostoucí funkci.
- $a = -r \colon r \in \mathbb{N}$. Potom $f(x) = \frac{1}{x^r}$. Funkce je definovaná pro $x \neq 0$.
- $a = \frac{1}{r} \colon r \in \mathbb{N}$. Potom $f(x) = x^{\frac{1}{r}} = \sqrt[r]{x}$. Funkce je definovaná na intervalu $\langle 0, \infty)$ pro $r$ sudé a na intervalu $(-\infty, \infty)$ pro $r$ liché. Je rostoucí.
- $a \in \mathbb{Q}$ a přitom nespadá do předchozích případů. Potom $f(x) = x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$. Pro $\frac{p}{q} > 0$, a $q$ sudé, je funkce $f$ definovaná pro $x \in \langle 0, \infty)$, pro $\frac{p}{q} > 0$, a $q$ liché, je funkce $f$ definovaná pro $x \in (-\infty, \infty)$, pro $\frac{p}{q} < 0$, a $q$ sudé, je funkce $f$ definovaná pro $x \in (0, \infty)$ pro $\frac{p}{q} > 0$, a $q$ liché, je funkce $f$ definovaná pro $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- Pro $a$ iracionální je mocninná funkce definovaná na intervalu $\langle 0, \infty)$ pro $a > 0$ a na intervalu $(0, \infty)$ pro $a < 0$.

Příklad

**Příklad 1.** *Nechť* $f(x) = \sqrt{2-x} + 1$. *Určete její definiční obor a obor hodnot.*

**Řešení.** *Pro určení definičního oboru stačí zjistit, kdy je* $2 - x \geq 0$, *protože výraz* $2 - x$ *je pod odmocninou. Potom* $D(f) = (-\infty, 2\rangle$ . *Vzhledem k tomu, že předpis funkce je součet odmocniny a čísla* 1, *funkce nabývá hodnoty, které jsou alespoň* 1, *proto* $H(f) = \langle 1, \infty)$ . *Graf funkce vidíme na obrázku:*




*Tečka v bodě* $[2, 1]$ *naznačuje, že* $x = 2$ *náleží do definičního obore funkce. Kdyby bylo* $2 \notin D(f)$ *použili bychom v bodě* $[2, 1]$ *symbol* $\circ$.

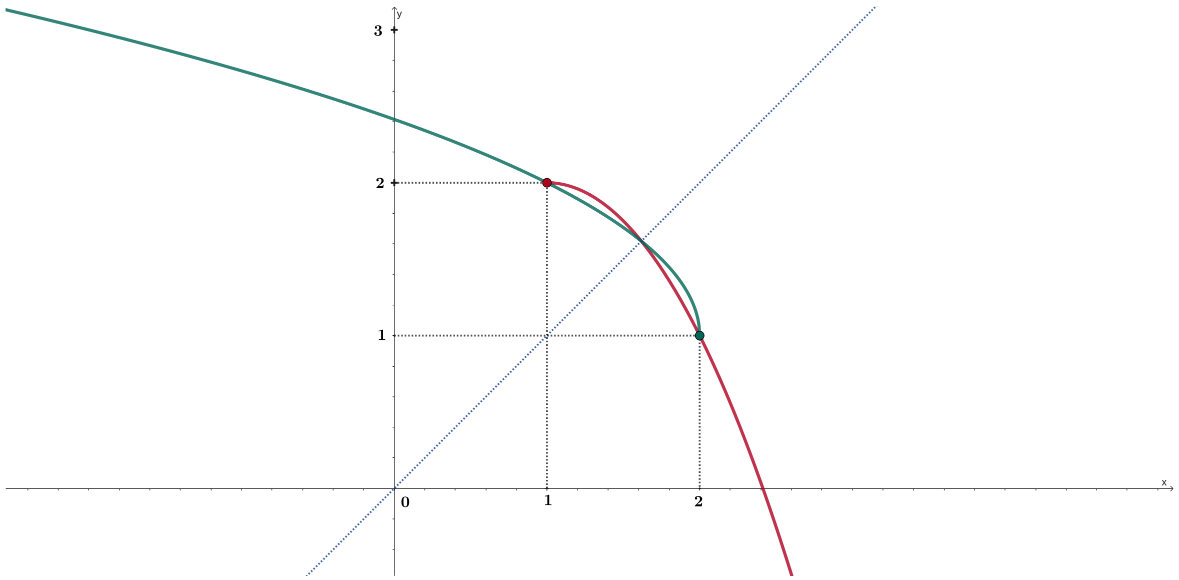
Příklad

**Příklad 2.** *Nechť* $f(x) = \sqrt{2-x}+1$, *najděte inverzní funkci k funkci* $f$. *Obě funkce načrtněte.*

**Řešení.** *Z předchozího příkladu víme, že funkce* $f$ *je prostá funkce, proto k ní existuje funkce inverzní. Předpis dostaneme tak, že v původním předpisu zaměníme* $x$ *za* $y$ *a vyjádříme si* $y$.

$$x = \sqrt{2-y}+1 \Rightarrow x-1 = \sqrt{2-y} \Rightarrow (x-1)^2 = 2-y \Rightarrow y = 2-(x-1)^2.$$

*Vidíme, že funkce* $y = 2-(x-1)^2$ *je kvadratická, tudíž není prostá. Teď se musíme vrátit k předchozímu příkladu a uvědomit si, že* $D(f) = (-\infty, 2\rangle = H(f^{-1})$ *a* $H(f) = \langle 1, \infty) = D(f^{-1})$. *Toto omezení definičního oboru kvadratické funkce nám zabezpečí, že již bude prostá a tudíž inverzní k funkci* $f$. *Proto zápis inverzní funkce je:* $f^{-1}(x) = 2-(x-1)^2 \wedge x \in \langle 1, \infty)$. *Bez uvedeného omezení se o inverzní funkci nejedná.*
*Grafy funkce a její inverzní funkce, včetně osy symetrie, vidíme na obrázku, funkce* $f$ *je vykreslena zelenou a* $f^{-1}$ *červenou barvou:*



Příklad

**Příklad 3.** *Nechť* $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{2-x}}$. *Určete její definiční obor.*

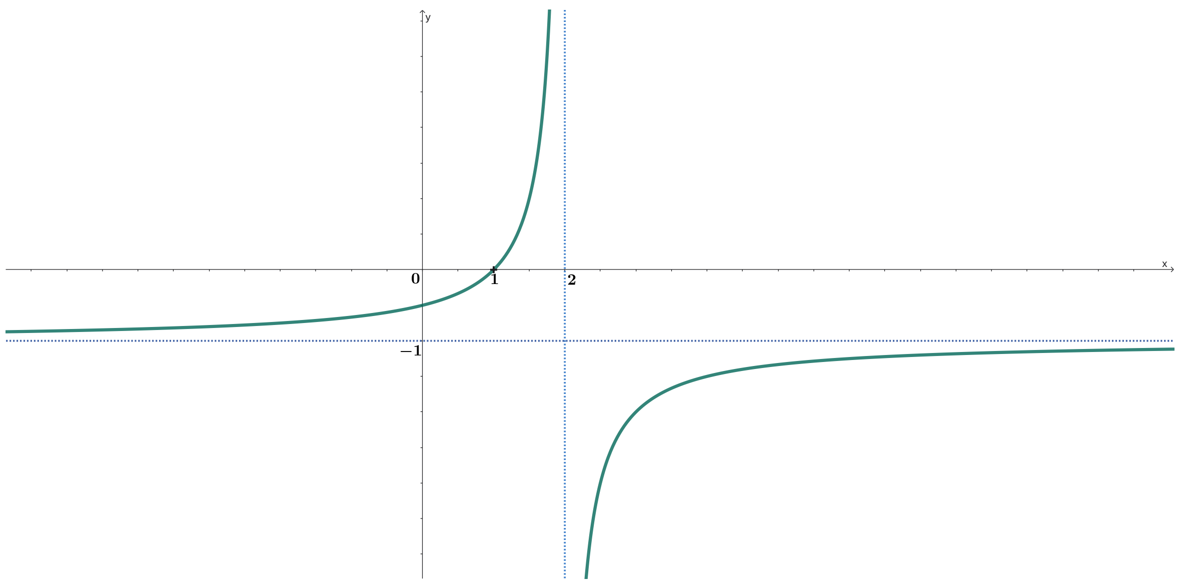
**Řešení.** *Pro určení definičního oboru stačí zjistit, kdy je* $\frac{x-1}{2-x} \geq 0$, *protože výraz* $\frac{x-1}{2-x}$ *je pod odmocninou.*

$$\frac{x-1}{2-x} \geq 0 \iff (x-1 \geq 0 \wedge 2-x > 0) \vee (x-1 \leq 0 \wedge 2-x < 0)\,.$$

*Postupne vyřešíme obě podmínky:*

- $x-1 \geq 0 \wedge 2-x > 0 \iff x \geq 1 \wedge x < 2 \iff x \in \langle 1, \infty) \wedge x \in (-\infty, 2) \iff x \in \langle 1, 2)\,.$
- $x-1 \leq 0 \wedge 2-x < 0 \iff x \leq 1 \wedge x > 2 \iff x \in (-\infty, 1\rangle \wedge x \in (2, \infty) \iff x \in \emptyset.$

*Sjednocením množin* $\langle 1, 2)$ *a* $\emptyset$ *je množina* $\langle 1, 2)$ *a tudíž* $D(f) = \langle 1, 2)\,$. *Definiční obor jsme mohli najít i graficky, pomocí grafu funkce* $g(x) = \frac{x-1}{2-x}$, *která je vnitřní složkou funkce* $f$. *Graf funkce* $g$ *vidíme na obrázku:*




*Funkční hodnoty této funkce nabývají nezáporných hodnot jen na intervalu* $\langle 1, 2)$, *proto jenom pro* $x \in \langle 1, 2)$ *je funkce* $f$ *definována.*

**Příklad**

**Příklad 4.** *Nechť* $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2-x}}$. *Určete její definiční obor.*

**Řešení.** *Pro určení definičního oboru stačí zjistit, kdy je* $x - 1 \geq 0 \wedge 2 - x > 0$, *protože výrazy* $x - 1$, $2 - x$ *jsou pod odmocninou.*

$$x - 1 \geq 0 \wedge 2 - x > 0 \iff x \geq 1 \wedge x < 2 \iff x \in \langle 1, \infty) \wedge x \in (-\infty, 2) \iff x \in \langle 1, 2)\,.$$

*Potom definiční obor je* $D(g) = \langle 1, 2)\,.$

**Poznámka 5.** *Funkce* $g$ *a funkce* $f$ *z předchozího příkladu mají stejný definiční obor a také pro všechna* $x \in D(f)$, *resp.* $x \in D(g)$ *platí* $f(x) = g(x)$. *To znamená, že se tyto dvě funkce rovnají.*

Příklad

**Příklad 6.** *Nechť* $f(x) = \sqrt{\frac{|x|-1}{2-x}}$. *Určete její definiční obor.*

**Řešení.** *Pro určení definičního oboru stačí zjistit, kdy je* $\frac{|x|-1}{2-x} \geq 0$, *protože výraz* $\frac{|x|-1}{2-x}$ *je pod odmocninou.*

$$\frac{|x|-1}{2-x} \geq 0 \iff (|x|-1 \geq 0 \wedge 2-x > 0) \vee (|x|-1 \leq 0 \wedge 2-x < 0)\,.$$

*Postupně vyřešíme obě podmínky:*

- $|x|-1 \geq 0 \wedge 2-x > 0 \iff |x| \geq 1 \wedge x < 2 \iff (x \in (-\infty,-1\rangle \cup \langle 1,\infty)) \wedge (x \in (-\infty,2))$, *potom*
$$x \in (-\infty,-1\rangle \cup \langle 1,2)\,.$$
- $|x|-1 \leq 0 \wedge 2-x < 0 \iff |x| \leq 1 \wedge x > 2 \iff x \in \langle -1,1\rangle \wedge x \in (2,\infty) \iff x \in \emptyset.$

*Sjednocením množin* $(-\infty,-1\rangle \cup \langle 1,2)$ *a* $\emptyset$ *je množina* $(-\infty,-1\rangle \cup \langle 1,2)$ *a tudíž* $D(f) = (-\infty,-1\rangle \cup \langle 1,2)$.

Příklad

**Příklad 7.** *Nechť* $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x+2}}$. *Určete její definiční obor.*

**Řešení.** *Pro určení definičního oboru stačí zjistit, kdy je* $\frac{x^2-3x+2}{x+2} \geq 0$, *protože výraz* $\frac{x^2-3x+2}{x+2}$ *je pod odmocninou.*

$$\frac{x^2-3x+2}{x+2} \geq 0 \iff \Big(x^2-3x+2 \geq 0 \wedge x+2 > 0\Big) \vee \Big(x^2-3x+2 \leq 0 \wedge x+2 < 0\Big).$$

*Postupně vyřešíme obě podmínky:*

$$\Big(x^2-3x+2 \geq 0 \wedge x+2 > 0\Big) \iff (x-1)\cdot(x-2) \geq 0 \wedge x+2 > 0$$

*potom*

$$x \in (-\infty, 1\rangle \cup \langle 2, \infty) \wedge x \in (-2, \infty),$$

*tedy*

$$x \in (-2, 1\rangle \cup \langle 2, \infty).$$

*Druhá podmínka je:*

$$\Big(x^2-3x+2 \leq 0 \wedge x+2 < 0\Big) \iff (x-1)\cdot(x-2) \leq 0 \wedge x+2 < 0$$

*potom*

$$x \in \langle -1, 1\rangle \wedge x \in (-\infty, -2) \iff x \in \emptyset.$$

*Sjednocením množin* $(-2, 1\rangle \cup \langle 2, \infty)$ *a* $\emptyset$ *je množina* $(-2, 1\rangle \cup \langle 2, \infty)$ *a tudíž* $D(f) = (-2, 1\rangle \cup \langle 2, \infty)$.

**Rovnice s odmocninami**

Při řešení rovnic s odmocninami je důležité si uvědomit, že umocňování je důsledková úprava, díky které se mohou objevit falešné kořeny. Když máme kupříkladu rovnici:

$$\sqrt{x-2} = x - 4$$

snažíme se zbavit odmocniny a proto obě strany rovnice umocníme:

$$x - 2 = (x-4)^2 \Rightarrow x - 2 = x^2 - 8x + 16 \Rightarrow x^2 - 9x + 18 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-6) = 0.$$

Řešením poslední rovnice jsou $x_1 = 3$ a $x_2 = 6$. Po dosazení do původní rovnice zjistíme, že $x_1 = 3$ nevyhovuje, dostaneme na levé straně $\sqrt{3-2} = 1$, zatímco na pravé straně $3 - 4 = -1$, co není pravda. *Proč se tento falešný kořen objevil?*

Problém je v umocnění. Evidentně je $1 \neq -1$, ale po umocnění dostaneme na obou stranách stejné hodnoty. Toto jsme mohli odhalit určením podmínek. Pod odmocninou může být jen nezáporné číslo, proto první podmnínka je $x - 2 \geq 0 \iff x \in \langle 2, \infty)$. Vzhledem k tomu, že druhá odmocnina je vždy nezáporná, i pravá strana rovnice musí být nezáporná a druhá podmínka je $x - 4 \geq 0 \iff x \in \langle 4, \infty)$. Obě podmínky musejí být splněny současně. Proto $x \in \langle 4, \infty)$. Tato podmínka vyloučí falešný kořen $x_1 = 3$. *Proto je nutné buď provádět na závěr zkoušku správnosti, nebo si před samotným řešením rovnice vyjasnit podmínky řešitelnosti a na závěr zkontrolovat, jestli nalezené kořeny těmto podmínkám vyhovují.*

Příklad

**Příklad 8.** *Vyřešte rovnici* $2\sqrt{x+5} = x+2$.

**Řešení.** *Rovnici vyřešíme dvěma různými způsoby:*

- *Umocníme obě strany rovnice a dostaneme:*

  $$4(x+5) = (x+2)^2,$$

  *přičemž po úpravě dostaneme*

  $$4x + 20 = x^2 + 4x + 4,$$

  $$x^2 - 16 = 0 \iff |x| = 4 \iff x = 4 \vee x = -4.$$

  *Vzhledem k tomu, že umocnění nebyla ekvivaletní úprava, je nutné provést zkoušku správnosti pro* $x = 4$ *a pro* $x = -4$.

  *Pro* $x = 4$ *dostaneme:*

  $$L = 2\sqrt{4+5} = 2 \cdot 3 = 6 \wedge P = 4 + 2 = 6,$$

  *tedy* $L = P$.

  *Pro* $x = -4$ *dostaneme:*

  $$L = 2\sqrt{-4+5} = 2 \cdot 1 = 2 \wedge P = -4 + 2 = -2,$$

  *tedy* $L \neq P$.
  *Řešením rovnice je tedy jen* $x = 4$. *Proč zkouška pro* $x = -4$ *nevyšla? Důvod je prostý. Když umocníme* $-2$ *a* $2$, *výsledek dostaneme stejný, přitom* $2 \neq -2$.

- *Řešení začneme určením podmínek, za kterých můžeme rovnici umocnit. Pod odmocninou je výraz* $x+5$, *který musí být nezáporný, proto* $x \in \langle -5, \infty)$. *Na levé straně rovnice máme tedy pro každé* $x \in \langle -5, \infty)$ *nezáporné číslo a proto také pravá strana, tedy výraz* $x + 2$ *musí nabývat jenom nezáporné hodnoty. Proto* $x \in \langle -2, \infty)$. *Průnikem těchto množin je interval* $\langle -2, \infty)$. *Teprve teď rovnici umocníme:*

  $$4(x+5) = (x+2)^2,$$

  *po úpravě dostaneme*

  $$4x + 20 = x^2 + 4x + 4,$$

  $$x^2 - 16 = 0 \iff |x| = 4 \iff x = 4 \vee x = -4.$$

  *Vzhledem k tomu, že pracujeme na intervalu* $\langle -2, \infty)$ *a* $-4 \notin \langle -2, \infty)$, *řešením rovnice je pouze* $x = 4$. *Dospěli jsme tedy ke stejnému výsledku i jako při řešení předchozího postupu.*

### Nerovnice s odmocninami

Při řešení nerovnic tohoto typu je důležité zajistit, aby výraz pod odmocninou byl nezáporný. Dále je nutné věnovat pozornost umocňování, protože se při umocňování mohou objevit zdánlivá řešení. Kupříkladu, nerovnice $\sqrt{x-2} < -1$ nemá řešení, protože odmocnina je vždy nezáporná. Ovšem po umocnění bychom dostali $x - 2 < 1$, tedy $x < 3$, co by vzhledem k podmínce $x - 2 \geq 0$ dávalo falešné řešení $x \in \langle 2, 3)$. Proto je důležité před umocněním nerovnice zjistit, jaká znaménka mají její strany. Když máme kupříkladu nerovnici:

$$\sqrt{x-2} < x - 4,$$

určíme podmínku pro existenci výrazu na levé straně, tedy $x - 2 \geq 0$, čímž zjistíme, že $x \in \langle 2, \infty)$. Na pravé straně máme výraz, který může nabývat kladnývh, ale také záporných hodnot, a proto před umocněním musíme toto zohlednit. Když je $x - 4 < 0$, tedy $x \in (-\infty, 4)$ , nerovnice nemá řešení. Pro $x \in \langle 4, \infty)$, je $x - 4 \geq 0$. Pro všechna $x \in \langle 4, \infty)$ je definován také výraz na levé straně a tudíž můžeme nerovnici umocnit a dostaneme:

$$x - 2 < (x-4)^2 \Rightarrow x - 2 < x^2 - 8x + 16 \Rightarrow x^2 - 9x + 18 > 0 \Rightarrow (x-3) \cdot (x-6) > 0.$$

Řešením poslední nerovnice je $x \in (-\infty, 3) \cup (6, \infty)$. Pro vyřešení původní nerovnice si musíme uvědomit, že jsme umocňovali na intervalu $\langle 4, \infty)$, proto řešením původní rovnice je $x \in [(-\infty, 3) \cup (6, \infty)] \cap \langle 4, \infty)$, tedy $x \in (6, \infty)$.

**Příklad**

**Příklad 9.** *Nechť* $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x+2}}$. *Určete definiční obor funkce* $f$.

**Řešení.** *Nejprve určíme podmínky pro obě odmocniny:*

$$(x + 2 \geq 0) \wedge (x + \sqrt{x+2} \geq 0).$$

*Z první podmínky dostaneme:* $x \geq -2 \Rightarrow x \in \langle -2, \infty)$.
*Druhá podmínka bude o něco zajímavější:*

$$x + \sqrt{x+2} \geq 0,$$

*kdybychom nerovnici umocnili v tomto tvaru, odmocniny bychom se nezbavili, proto ji upravíme:* $x \geq -\sqrt{x+2}$.
*Evidentně* $-\sqrt{x+2} \leq 0$ *pro každé* $x \in \langle -2, \infty)$ *. Na levé straně je* $x$*, a proto před umocněním nerovnice musíme rozlišit dvě možnosti, jestli je* $x \geq 0$ *nebo* $x < 0$.

- *Nechť* $x \geq 0$*:*

$$(x \geq 0) \;\wedge\; (-\sqrt{x+2} \leq 0),$$

  *potom*

$$x \geq -\sqrt{x+2} \quad \textit{pre} \quad \forall x \in \langle 0, \infty).$$

- *Nechť* $x < 0$*. Potom z nerovnice*

$$x \geq -\sqrt{x+2}$$

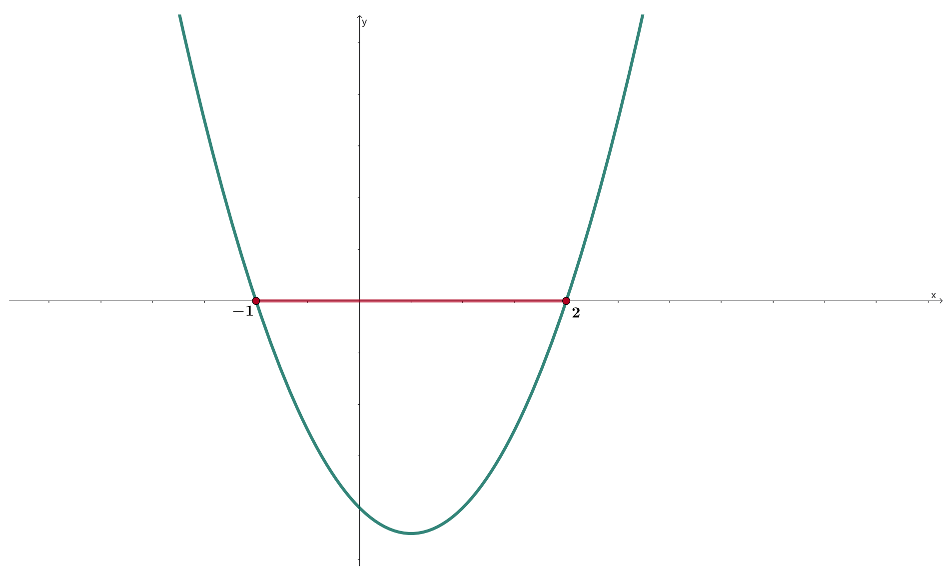
  *po umocnění dostaneme*

$$x^2 \leq x + 2,$$

  *(toto si dobře promyslete!) Potom*

$$(x-2)(x+1) \leq 0 \iff x \in \langle -1, 2 \rangle,$$

  *interval můžeme určit z obrázku:*




  *Vzhledem k tomu, že je* $x < 0$*, dostaneme:* $x \in \langle -1, 0)$ .

- *Pro podmíeku* $(x + \sqrt{x+2} \geq 0$ *dostanem interval* $\langle 0, \infty) \cup \langle -1, 0) = \langle -1, \infty)$.

*Na závěr určíme průnik intervalů, které jsme dostali z podmínek:*

$$x \in \langle -2, \infty) \cap \langle -1, \infty) \Rightarrow x \in \langle -1, \infty) .$$

Příklad

**Příklad 10.** *Nechť* $f(x)=\sqrt{x-\sqrt{x+2}}$. *Určete definiční obor funkce* $f$.

**Řešení.** *Nejprve určíme podmínky pro obě odmocniny:*

$$(x+2\geq 0)\wedge(x-\sqrt{x+2}\geq 0).$$

*Z první podmínky dostaneme:* $x\geq -2\Rightarrow x\in\langle -2,\infty)$.
*Druhá podmínka bude o něco zajímavější:*

$$x-\sqrt{x+2}\geq 0,$$

*kdybychom nerovnici umocnili v tomhle tvaru, odmocniny bychom se nezbavili, proto ji upravíme:* $x\geq\sqrt{x+2}$.
*Evidentně* $\sqrt{x+2}\geq 0$ *pro každé* $x\in\langle -2,\infty)$. *Na levé straně máme* $x$ *a proto před umocněním nerovnice musíme rozlišit dvě možnosti, jestli je* $x\geq 0$ *nebo* $x<0$.

- *Nechť* $x<0$ :

$$(x<0)\ \wedge\ (\sqrt{x+2}\geq 0),$$

  *potom podmínka* $x\geq\sqrt{x+2}$, *nebude platit pro žádné* $x<0$.

- *Nechť* $x\geq 0$ :

$$x\geq\sqrt{x+2}$$

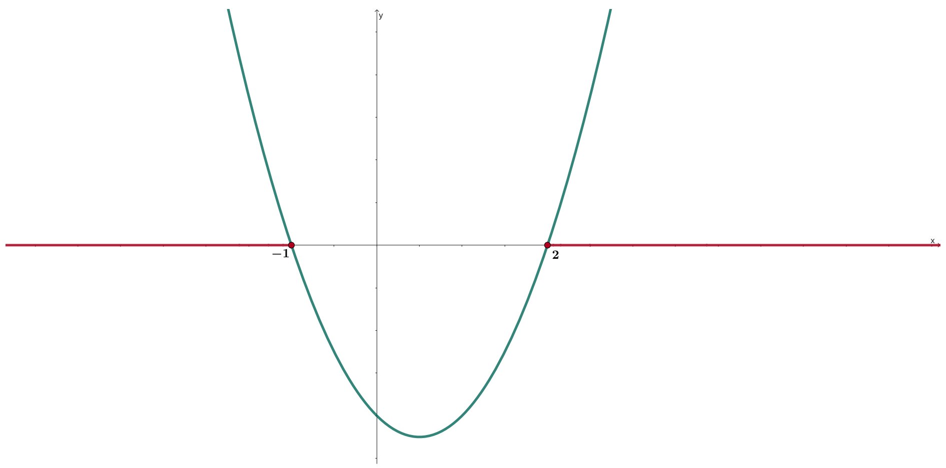
  *po umocnění dostaneme*

$$x^2\geq x+2.$$

  *Potom*

$$(x-2)(x+1)\geq 0\iff x\in(-\infty,-1\rangle\cup\langle 2,\infty)\,,$$

  *interval můžeme určit také z obrázku:*




  *Vzhledem k tomu, že* $x\geq 0$, *dostaneme:* $x\ \in\ \langle 2,\infty)\,.$

- *Pro podmínku* $(x-\sqrt{x+2}\geq 0$ *dostaneme interval*

$$\langle 2,\infty)\cup\emptyset=\langle 2,\infty).$$

*Na závěr určíme průnik intervalů, které jsme dostali z podmínek:*

$$x\in\langle -2,\infty)\cap\langle 2,\infty)\Rightarrow x\in\langle 2,\infty)\,.$$

# 1 Test

1. Definiční obor funkce $f(x) = 1 - \sqrt{3-x}$ je:
   (a) $(-\infty, 3)$
   (b) $(-\infty, 3\rangle$
   (c) $\langle 3, \infty)$
   (d) $(-\infty, -3)$
2. Inverzní funkce k funkci $f(x) = 1 - \sqrt{3-x}$ má předpis:
   (a) $y = 3 - (1-x)^2$
   (b) $y = 3 - (1-x)^2$ pro $x \in (-\infty, 1\rangle$
   (c) $y = 3 - (1-x)^2$ pro $x \in \langle 0, \infty)$
   (d) inverzní funkce neexistuje.
3. Definiční obor funkce $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{1-x}}$ je:
   (a) $\left\langle \frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1 \right\rangle$
   (b) $\left\langle \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \infty \right)$
   (c) $\left\langle \frac{-\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right\rangle$
   (d) $\emptyset$
4. Definiční obor funkce $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{2x-3}$ je:
   (a) $\left\langle 1, \frac{3}{2} \right\rangle$
   (b) $\emptyset$
   (c) $\{1\}$
   (d) $\left\langle \frac{2}{3}, 1 \right\rangle$
5. Definiční obor funkce $f(x) = \sqrt{\frac{3-x}{2x+5}}$ je:
   (a) $\left\langle -\frac{5}{2}, 3 \right\rangle$
   (b) $\langle 3, \infty)$
   (c) $\left( -\frac{5}{2}, 3 \right\rangle$
   (d) $\left( -\frac{5}{2}, \infty \right)$
6. Funkce $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{2+x}}$ a $g(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2+x}}$ se rovnají pro $x$ z intervalu:
   (a) $(-2, 1)$
   (b) $(-2, 1\rangle$
   (c) $\langle -2, 1)$

(d) $\langle -2, 1\rangle$

7. Funkce $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x+2}}$ a $g(x) = \sqrt{\frac{1-x}{|x+2|}}$ se rovnají pro $x$ z intervalu:

    (a) $(-\infty, 1)$
    (b) $(-\infty, 1\rangle$
    (c) $(-\infty, 1\rangle \setminus \{-2\}$
    (d) $(-2, 1\rangle$

8. Definiční obor funkce $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1-x}}$ je:

    (a) $\left\langle \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, 1 \right\rangle$
    (b) $\left\langle \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \infty \right)$
    (c) $\emptyset$
    (d) $\left\langle \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right\rangle$

9. Definiční obor funkce $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-x-2}{x-2}}$ je:

    (a) $(-1, 2) \cup (2, \infty)$
    (b) $(-1, \infty)$
    (c) $(2, \infty)$
    (d) $\langle 2, \infty)$

10. Řešením rovnice $4 + 2\sqrt{x-4} = x$ je:

    (a) $\{8\}$
    (b) $\{4, 8\}$
    (c) $\{0, 4\}$
    (d) $\{4\}$

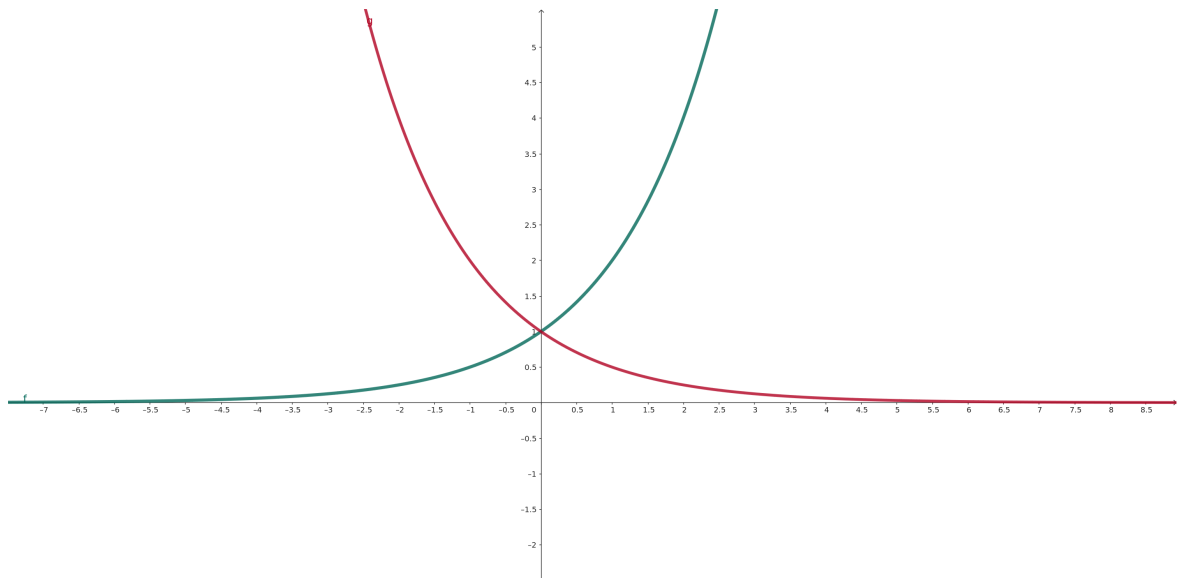
# 6. Exponenciální a Logaritmické funkce

**Exponenciální funkce**

Exponenciální funkce $f$ má tvar

$$f(x) = a^x,$$

kde $a, x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$. Číslo $a$ se nazývá základ.
Proč klademe na hodnotu základu nějaké podmínky? Pokud by bylo $a = 1$, dostali bychom konstantní funkci, ale konstantní funkci mezi exponenciální nezařazujeme. Proto je $a \neq 1$. Ze stejného důvodu musí platit $a \neq 0$. Vzhledem k tomu, že exponencální funkce jsou definovány pro všechna reálná čísla a neceločíselnými exponenty můžeme bez omezení umocňovat pouze kladná čísla, základ mocniny musí být kladný. Pokud je $a \in (0, 1)$, pak je funkce $f$ klesající. Pokud je $a \in (1, \infty)$, pak je funkce $f$ rostoucí. V obou případech se jedná o funkce prosté. Grafem exponenciální funkce je exponenciála. Na obrázku je zelenou barvou vykreslen graf funkce $f(x) = 2^x$ a červenou barvou graf funkce $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.



Definičním oborem exponenciálních funkcí je množina všech reálných čísel a oborem hodnot je interval $(0, \infty)$.
Připomeňme si základní vztahy mezi mocninami

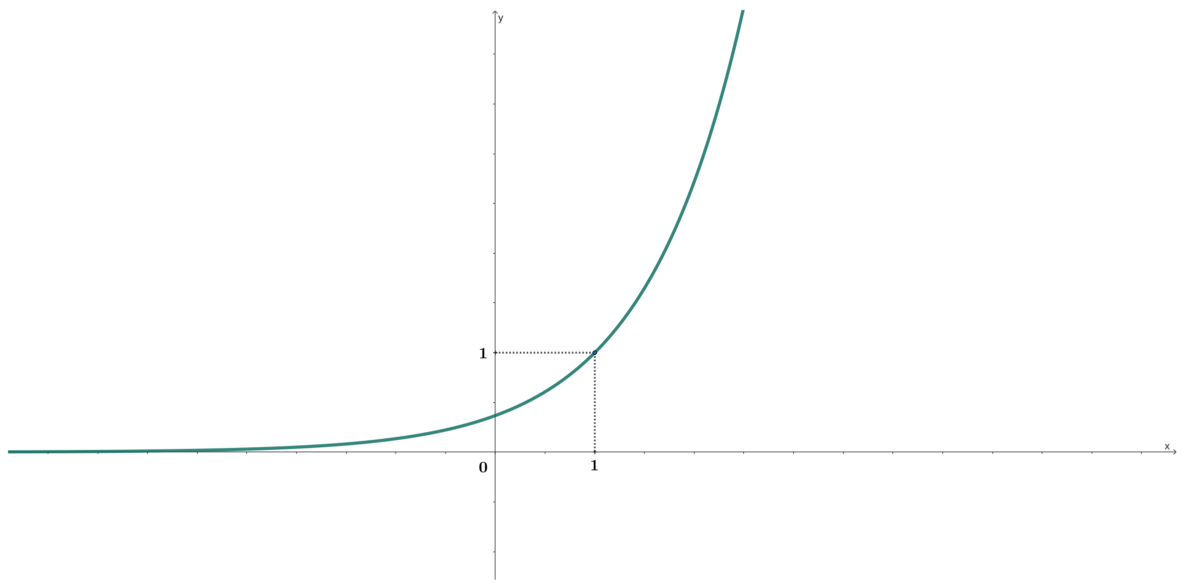
$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y,$$
$$(a^x)^y = a^{x \cdot y},$$

které spolu s vlastnostmi exponenciálních funkcí využijeme i při řešení exponenciálních rovnic a nerovnic.

Příklad

**Příklad 1.** *Načrtněte graf funkce* $f(x) = e^{x-1}$ *a* $g(x) = e^{|x-1|}$.

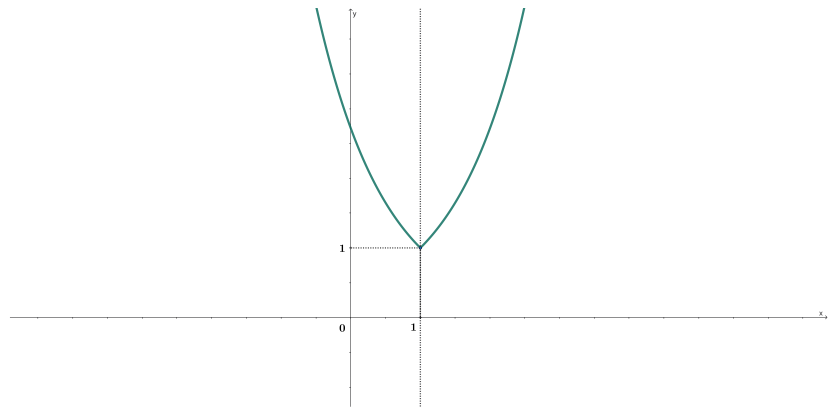
**Řešení.** *Definiční obor obou funkcí je* $D(f) = D(g) = \mathbb{R}$. *Průběh funkce* $h(x) = e^x$ *známe. Funkce* $f$ *je jen posunutá doprava, přičemž v bodě* $x = 1$ *nabývá stejnou hodnotu jako funkce* $h$ *v bodě* $x = 0$. *Graf funkce* $f$ *je tento:*




*U grafu funkce* $g$ *si musíme uvědomit, že na intervalu* $\langle 1, \infty)$ *je identická s funkcí* $f$. *Na intervalu* $(-\infty, 1)$ *je předpis funkce* $g$ *po odstranění absolutní hodnoty následující:*

$$g(x) = e^{1-x} \colon x \in (-\infty, 1) \,.$$

*Proto je její průběh symetrický s průběhem na intervalu* $\langle 1, \infty)$. *Graf funkce* $g$ *vidíme na obrázku:*



Příklad

**Příklad 2.** *Nechť* $f(x) = 2^{\frac{1}{\sqrt{x-2}}}$. *Určete její definiční obor a obor hodnot.*

**Řešení.** *Pro určení definičního oboru stačí zjistit, kdy je* $x - 2 > 0$, *protože výraz* $x - 2$ *je pod odmocninou a ve jmenovateli. Vyřešíme nerovnici*

$$x - 2 > 0 \iff x > 2$$

*proto*

$$x \in (2, \infty).$$

*Potom* $D(f) = (2, \infty)$. *Pro určení oboru hodnot se musíme zamyslet hlouběji. Výraz* $\sqrt{x-2}$ *pro* $x \in D(f)$ *nabýva všechny kladné reálné hodnoty. Také jeho převrácená hodnota, tedy* $\frac{1}{\sqrt{x-2}}$ *nabývá všechny kladné reálné hodnoty. Tedy funkce* $f$ *nabývá hodnoty větší než* $1$. *Proto* $H(f) = (1, \infty)$.

Příklad

**Příklad 3.** *Na množině reálných čísel vyřešte rovnici:* $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 224.$

**Řešení.** *Vzhledem k tomu, že všechny výrazy, které se vyskytují v rovnici na levé a pravé straně, jsou definovány pro všechna reálná čísla, budeme rovnici řešit bez omezení. Rovnici budeme upravovat a využijeme následující rovnosti*

$$2^{x-1} = 2 \cdot 2^{x-2}, \quad 2^{x-1} = 2^2 \cdot 2^{x-3}.$$

*Potom*

$$2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 224 \iff 2^{x-3}\,(4+2+1) = 224.$$

*Po úpravě*

$$2^{x-3} \cdot 7 = 224 \iff 2^{x-3} \cdot 7 = 32 \cdot 7 \iff 2^{x-3} = 32 \iff 2^{x-3} = 2^5.$$

*Zřejmě* $x = 8$, *co je jediné řešení rovnice.*

**Příklad**

**Příklad 4.** *Na množině reálných čísel vyřešte nerovnici:* $\frac{2^{x-1}-1}{2^{x+1}+1} < 0$.

**Řešení.** *Vzhledem k tomu, že se v nerovnici vyskytuje zlomek, je potřeba zkontrolovat, kdy je tento zlomek definován. Výraz* $2^{x+1}$ *nabývá pro každé reálné číslo* $x$ *kladné hodnoty a tudíž* $2^{x+1}+1 > 0$. *Proto nerovnici řešíme na celé množině reálných čísel. Vzhledem k tomu, že na pravé straně nerovnice je* $0$, *řešení rovnice přepíšeme následovně:*

$$\frac{2^{x-1}-1}{2^{x+1}+1} < 0 \iff \left(2^{x-1}-1 > 0 \wedge 2^{x-1}+1 < 0\right) \vee \left(2^{x-1}-1 < 0 \wedge 2^{x-1}+1 > 0\right).$$

*Konjunkce v první závorce nemůže nastat, neboť* $2^{x+1}+1 > 0$ *pro všechna reálná čísla, proto řešíme pouze tu ve druhé zázorce:*

$$\left(2^{x-1}-1 < 0 \wedge 2^{x-1}+1 > 0\right) \iff \left(2^{x-1} < 1\right) \iff \left(2^{x-1} < 2^{0}\right).$$

*Z monotónnosti exponenciální funkce dostáváme*

$$x-1 < 0 \iff x < 1.$$

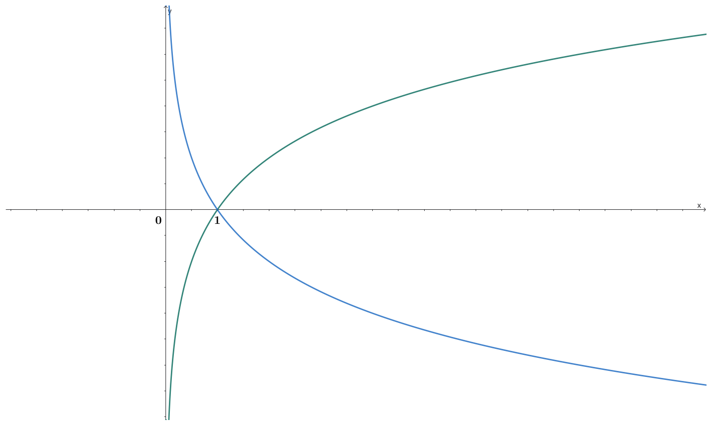
*Řešením nerovnice je interval* $(-\infty, 1)$.

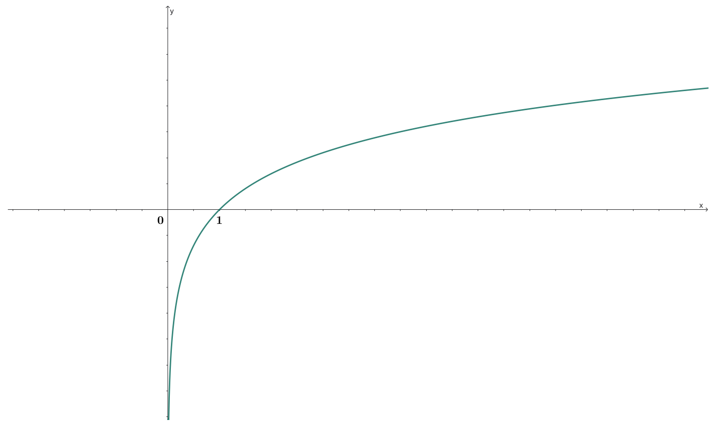
## Logaritmické funkce

Logaritmická funkce o základu $a$ je každá funkce $f$ inverzní k exponenciální funkci $g(x) = a^x$. Zapisujeme ji následovně

$$f(x) = \log_a x,$$

kde základ $a$ je kladné číslo různé od 1.
Vzhledem k tomu, že definičním oborem exponenciálních funkcí je množina všech reálných čísel a oborem hodnot je interval $(0, \infty)$ a logaritmická funkce je inverzní k exponenciální, je definičním oborem logaritmických funkcí interval $(0, \infty)$ a oborem hodnot je množina všech reálných čísel. Monotónnost logaritmických funkcí je stejná jako u funkcí exponenciálních. Pokud je $a \in (0, 1)$, pak je funkce $f$ klesající. Pokud je $a \in (1, \infty)$, je funkce $f$ rostoucí. V obou případech se jedná o funkce prosté. Na obrázku vlevo je zelenou barvou vykreslen graf funkce $f(x) = \log_2 x$ a červenou barvou graf funkce $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$. Na obrázku vpravo je graf logaritmické funkce, jejímž základem je Eulerovo číslo $e$. Tento logaritmus se nazývá přirozený a značí se $\ln$.




Pro $x, x_1, x_2 \in (0, \infty), r \in \mathbb{R}, a, b \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ platí

$$\begin{aligned}
\log_a (x_1 x_2) &= \log_a x_1 + \log_a x_2, \\
\log_a \left(\frac{x_1}{x_2}\right) &= \log_a x_1 - \log_a x_2, \\
\log_a x^r &= r \log_a x, \\
\log_a a &= 1, \\
\log_a 1 &= 0.
\end{aligned}$$

Tyto vztahy, spolu s vlastnostmi logaritmických funkcí, využijeme i při řešení logaritmických rovnic a nerovnic.

Příklad

**Příklad 5.** *Nechť $f(x) = 2e^{x-2}$. Určete její definiční obor, obor hodnot a předpis funkce k ní inverzní.*

**Řešení.** *Definiční obor a obor hodnot funkce $f$ určíme snadno. Výraz $2e^{x-2}$ je definován pro každé reálné číslo, proto $D(f) = \mathbb{R}$. Vzhledem k tomu, že funkce $y = e^x$ nabývá hodnot z množiny $(0, \infty)$ a funkce $f$ je jen její dvojnásobek posunutý doprava, je také $H(f) = (0, \infty)$ . Ješte potřebujeme zjistit, jestli je funkce $f$ prostá. Jak víme z dřívějška, definice prosté funkce můžeme symbolicky zapsat takhle:*

$$\forall a, b \in D(f) \colon f(a) = f(b) \Rightarrow a = b.$$

*Budeme předpokládat, že pro libovolné $a, b \in D(f)$ je $f(a) = f(b)$, což znamená, že*

$$2e^{a-2} = 2e^{b-2} \iff e^{a-2} = e^{b-2} \iff a - 2 = b - 2 \iff a = b.$$

*Tedy funkce $f$ je prostá a existuje k ní inverzní funkce. Pro inverzní funkci $f^{-1}$ je $D(f^{-1}) = (0, \infty)$ a $H(f^{-1}) = \mathbb{R}$. Na závěr ještě určíme předpis inverzní funkce obvyklým způsobem. Nejdříve v předpisu funkce $f$ zaměníme proměnné $x$ a $y$.*

$$x = 2e^{y-2}.$$

*Rovnost se zachová, pokud obě strany zlogarimujeme. Potom dostáváme:*

$$\ln x = \ln 2e^{y-2}.$$

*Využijeme rovnost $\ln xy = \ln x + \ln y$ a dostaneme*

$$\ln x = \ln 2 + \ln e^{y-2}.$$

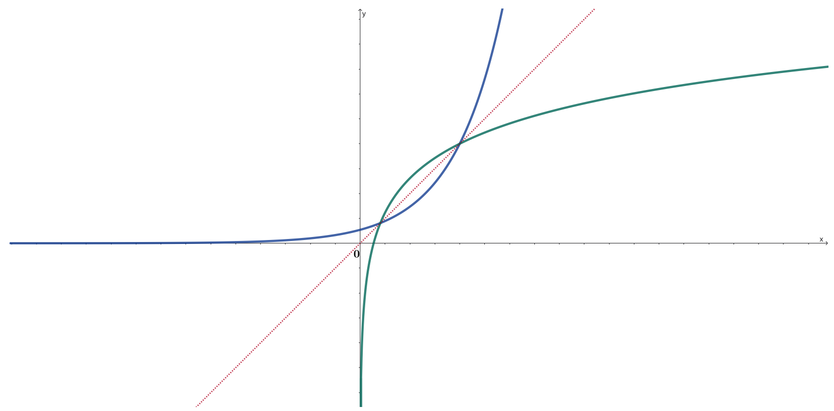
*Ještě využijeme faktu, že $\ln x^\alpha = \alpha \cdot \ln x$ a toho, že $\ln e = 1$*

$$\ln x = \ln 2 + (y - 2) \cdot \ln e \iff \ln x = \ln 2 + y - 2 \iff \ln x - \ln 2 + 2 = y.$$

*Potom*

$$y = \ln \frac{x}{2} + 2.$$

*Oba grafy, včetně přímky $y = x$ (jejich osa symetrie), jsou vykreslené na obrázku. Funkce $f$ je modrá, její inverzní funkce je zelená .*



Příklad

**Příklad 6.** *Načrtněte grafy funkcí* $f(x) = \ln(x-3)$ *a* $g(x) = \ln|x-3|$.

**Řešení.** *Pro určení definičního oboru funkce* $f$ *stačí zjistit, kdy je* $x - 3 > 0$*, protože výraz* $x - 3$ *je argument logaritmu. Proto* $D(f) = (3, \infty)$. *Pro upřesnění ještě potřebujeme zjistit průsečíky s osami* $x$ *a* $y$. *Vzhledem k definičnímu oboru, nebude mít graf s osou* $y$ *žádný průsečík . Pro zjištění průsečíku s osou* $x$ *musíme vyřešit rovnici*

$$\ln(x-3) = 0,$$

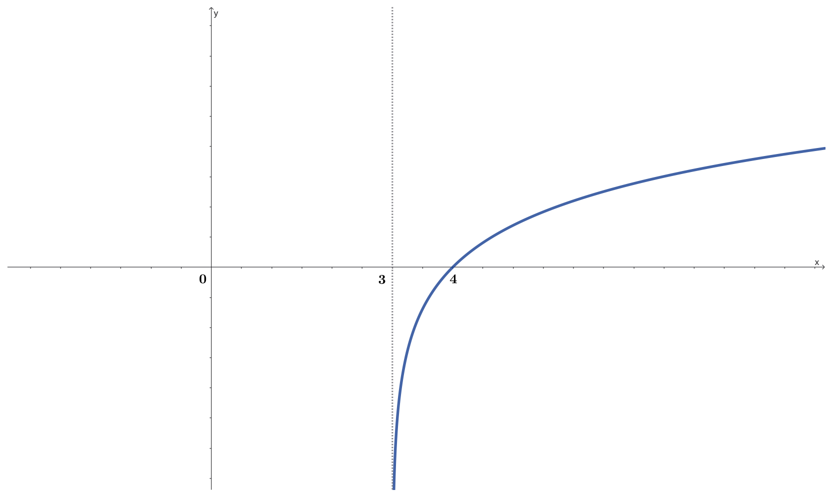
*což je ekvivaletní s rovnicí*

$$x - 3 = 1,$$

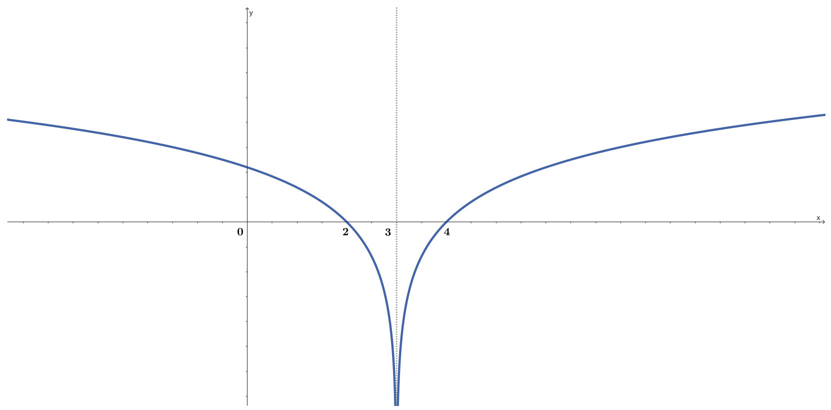
*a proto je*

$$x = 4.$$

*Graf funkce* $f$ *vidíme na obrázku:*




*U grafu funkce* $g$ *si musíme uvědomit, že na intervalu* $(3, \infty)$ *je identická s funkci* $f$. *Funkce* $g$ *je ovšem definována také na intervalu* $(-\infty, 3)$. *Přímka* $x = 3$ *je svislou asymptotou obou funkcí a také osou symetrie pro funkci* $g$. *Graf funkce* $g$ *vidíme na obrázku:*



Příklad

**Příklad 7.** *Nechť* $f(x) = \ln \frac{x}{x-1}$ *Určete její definiční obor a obor hodnot.*

**Řešení.** *Pro určení definičního oboru stačí zjistit, kdy je* $\frac{x}{x-1} > 0$*, protože výraz* $\frac{x}{x-1}$ *je argumentem logaritmu. Vyřešíme nerovnici*

$$\frac{x}{x-1} > 0$$

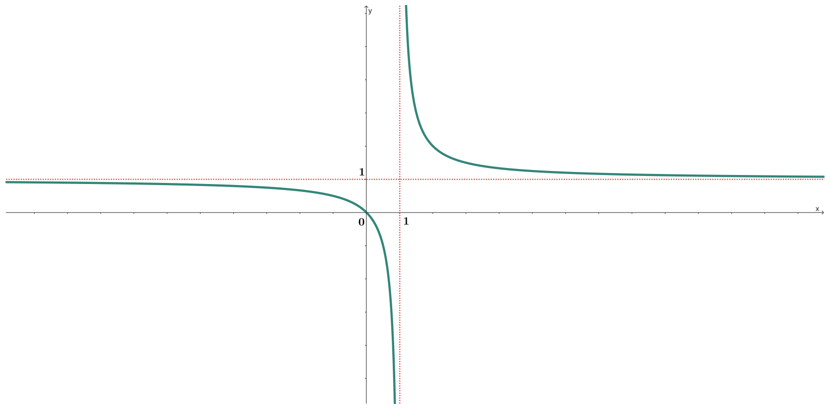
*což je ekvivaletní s tím, že*

$$(x > 0 \wedge x - 1 > 0) \vee (x < 0 \wedge x - 1 < 0)\,,$$
$$(x > 0 \wedge x > 1) \vee (x < 0 \wedge x < 1)\,,$$

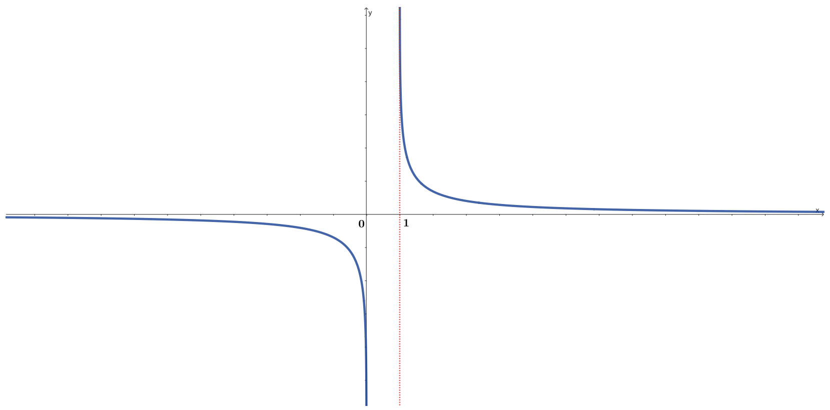
*proto*

$$x \in (1, \infty) \vee x \in (-\infty, 0) \iff x \in (1, \infty) \cup (-\infty, 0)\,.$$

*Potom* $D(f) = (1, \infty) \cup (-\infty, 0)$ . *Pro určení oboru hodnot se musíme zamyslet hlouběji. Nejprve si načrtneme graf pomocné funkce* $g(x) = \frac{x}{x-1}$*, která je vnitřní složka funkce* $f$*. Graf funkce* $g$ *vidíme na obrázku:*



*Funkce* $g$ *nabýva kladných hodnot na množině* $(1, \infty) \cup (-\infty, 0)$ , *což je* $D(f)$*. Pomocí grafu funkce* $g$ *a grafu funkce* $h(x) = \ln x$ *sestrojíme graf funkce* $f$*. Funkce* $g$ *má asymptotu v* $+\infty$ *přímku* $y = 1$*, funkce* $h$ *nabývá v bodě* $x = 1$ *hodnotu* $0$*, proto funkce* $f$*, která je složením funkcí* $g$ *a* $h$ *bude mít v* $+\infty$ *asymptotu osu* $x$*. Podobnou úvahou zjistíme, že v* $x = 1$ *bude mít funkce svislou asymptou, dalši svislá asymptota bude v* $x = 0$ *a v* $-\infty$ *bude mít asymptotu osu* $x$*. Potom graf funkce* $f$ *bude následovný:*



*Proto* $H(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Příklad

**Příklad 8.** *Nechť* $f(x) = \ln \frac{x-2}{x+1}$. *Určete její definiční obor, obor hodnot a předpis funkce k ní inverzní.*

**Řešení.** *Pro určení definičního oboru stačí zjistit, kdy je* $\frac{x-2}{x+1} > 0$, *protože výraz* $\frac{x-2}{x+1}$ *je argumentem logaritmu. Vyřešíme nerovnici*

$$\frac{x-2}{x+1} > 0$$

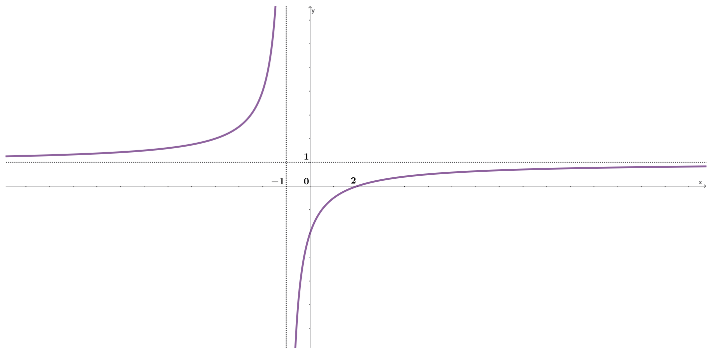
*což je ekvivaletní s tím, že*

$$(x-2 > 0 \wedge x+1 > 0) \vee (x-2 < 0 \wedge x+1 < 0)\,,$$
$$(x > 2 \wedge x > -1) \vee (x < 2 \wedge x < -1)\,.$$

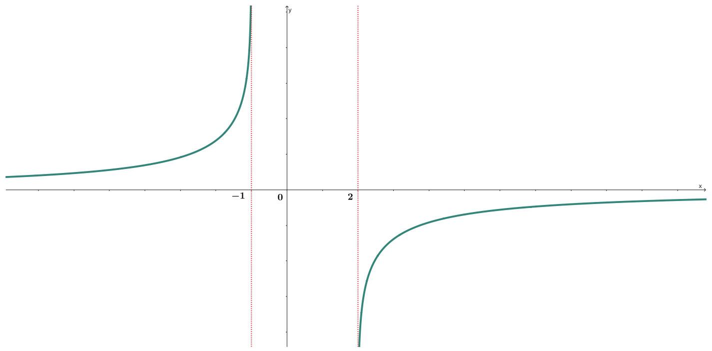
*Proto*

$$x \in (2,\infty) \vee x \in (-\infty,-1) \iff x \in (2,\infty) \cup (-\infty,-1)\,.$$

*Potom* $D(f) = (2,\infty) \cup (-\infty,-1)$. *Určení definičního oboru jsme mohli udělat podobně jako v předchozím příkladu pomocí grafu vnitřní funkce* $g(x) = \frac{x-2}{x+1}$. *Graf funkce* $g$ *vidíme na obrázku:*



*Pomocí tohoto grafu umíme sestrojit graf funkce* $f$.



*Z grafu funkce vidíme, že funkce* $f$ *je prostá a proto k ní existuje inverzní funkce. Rovněž z grafu vidíme, že* $H(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Pro inverzní funkci* $f^{-1}$ *je* $D(f^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *a* $H(f^{-1}) = (2,\infty) \cup (-\infty,-1)$.

**Příklad-pokračování**

To, že je funkce $f$ prostá, si také dokážeme. Definice prosté funkce můžeme symbolicky zapsat následovně:

$$\forall a, b \in D(f)\colon f(a) = f(b) \Rightarrow a = b.$$

Budeme předpokládat, že pro libovolné $a, b \in D(f)$ je $f(a) = f(b)$, což znamená, že

$$\ln \frac{a-2}{a+1} = \ln \frac{b-2}{b+1} \iff \frac{a-2}{a+1} = \frac{b-2}{b+1} \iff (a-2)\cdot(b+1) = (b-2)\cdot(a+1),$$

Po roznásobení

$$ab + a - 2b - 2 = ab + b - 2a - 2 \iff a - 2b = b - 2a \iff 3a = 3b \iff a = b.$$

Na závěr ještě určíme předpis inverzní funkce obvyklým způsobem. Nejdříve v předpisu funkce $f$ zaměníme proměnné $x$ a $y$

$$x = \ln \frac{y-2}{y+1}.$$

Potom zřejmě platí:

$$e^x = e^{\ln \frac{y-2}{y+1}}.$$

Využijeme rovnost $e^{\ln x} = x$ a dostaneme

$$e^x = \frac{y-2}{y+1}.$$

Po roznásobení

$$e^x \cdot (y+1) = y - 2 \iff e^x \cdot y + e^x = y - 2 \iff e^x \cdot y - y = -2 - e^x.$$

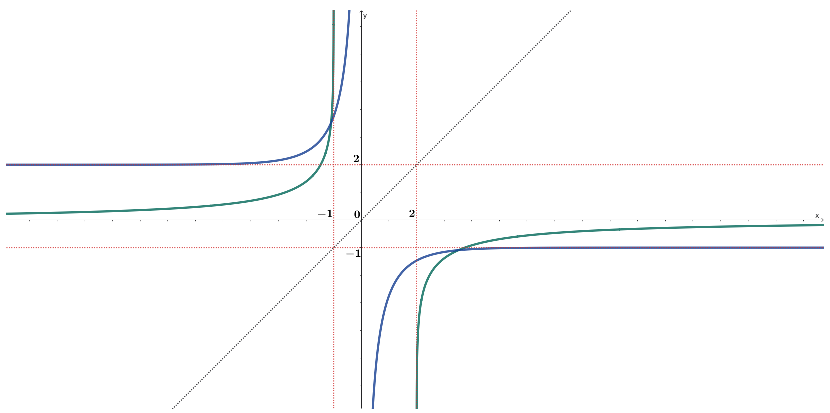
Potom

$$y = \frac{-2 - e^x}{e^x - 1}$$

resp.

$$y = \frac{2 + e^x}{1 - e^x}.$$

Oba grafy, včetně přímky $y = x$ (jejich osa symetrie), jsou na obrázku. Funkce $f$ je zelená, její inverzní funkce je modrá.



Příklad

**Příklad 9.** *Na množině reálných čísel vyřešte rovnici:* $\ln(x-2)+\ln(x+5)=2\ln x$.

**Řešení.** *Vzhledem k tomu, že se v rovnici vyskytují logaritmy, nejdříve zjistíme, pro jaké* $x \in \mathbb{R}$ *mají výrazy na levé a pravé straně rovnice smysl. Zřejme*

$$x-2>0 \wedge x+5>0 \wedge x>0 \iff x \in (2,\infty)\,.$$

*Rovnici budeme upravovat a využijeme následující vlastnosti logaritmů:*

$$\ln x+\ln y=\ln x \cdot y, \ln x^{\alpha}=\alpha \cdot \ln x.$$

*Potom*

$$\ln(x-2)+\ln(x+5)=2\ln x \iff \ln(x-2)\cdot(x+5)=\ln x^2.$$

*Následně stačí porovnat argumenty logaritmů na obou stranách rovnice:*

$$(x-2)\cdot(x+5)=x^2 \iff x^2+3x-10=x^2 \iff 3x=10 \iff x=\frac{10}{3}.$$

*Evidentně* $\frac{10}{3} \in (2,\infty)$, *proto je* $x=\frac{10}{3}$ *jediné řešení rovnice.*

Příklad

**Příklad 10.** *Na množině reálných čísel vyřešte nerovnici:* $\ln(x-2) - \ln(x+2) \leq 0$.

**Řešení.** *Vzhledem k tomu, že se v nerovnici vyskytují logaritmy, nejdříve zjistíme, pro jaké* $x \in \mathbb{R}$ *mají výrazy na levé a pravé straně nerovnice smysl. Zřejme*

$$x - 2 > 0 \wedge x + 2 > 0 \iff x \in (2, \infty) .$$

*Nerovnici budeme upravovat a využijeme následující vlastnosti logaritmů:*

$$\ln x - \ln y = \ln \frac{x}{y}, \ln 1 = 0.$$

*Potom*

$$\ln(x-2) - \ln(x+2) \leq 0 \iff \ln \frac{x-2}{x+2} \leq \ln 1.$$

*Následně využijeme monotónnosit logaritmických funkcí a porovnáme argumenty logaritmů na obou stranách nerovnice:*

$$\frac{x-2}{x+2} \leq 1 \iff \frac{x-2}{x+2} - 1 \leq 0 \iff \frac{x-2-x-2}{x+2} \leq 0 \iff -\frac{4}{x+2} \leq 0 \iff x+2 > 0.$$

*Poslední nerovnost je ekvivalentní s tím, že* $x \in (-2, \infty)$ *. Evidentně je* $(-2, \infty) \cap (2, \infty) = (2, \infty)$*, proto je řešením nerovnice interval* $(2, \infty)$.

# 1 Test

1. Definiční obor funkce $f(x) = \ln \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ je:

   (a) $(-\infty, 1)$
   (b) $(-\infty, 1\rangle$
   (c) $\langle 1, \infty)$
   (d) $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$.

2. Inverzní funkce k funkci $f(x) = 1 - \ln(3 - x)$ má předpis:

   (a) $y = 3 - \ln(1 - x)$
   (b) $y = 3 + \ln(1 - x)$
   (c) $y = 3 - e^{1-x}$
   (d) inverzní funkce neexistuje.

3. Definiční obor funkce $f(x) = \sqrt{\ln \frac{x-1}{x+2}}$ je:

   (a) $(-\infty, -2\rangle$
   (b) $(-\infty, 2)$
   (c) $(-\infty, -2)$
   (d) $\emptyset$

4. Definiční obor funkce $f(x) = \ln(1 - x) - \ln(2x - 3)$ je:

   (a) $\left\langle 1, \frac{3}{2} \right\rangle$
   (b) $\emptyset$
   (c) $\{1\}$
   (d) $\left\langle \frac{2}{3}, 1 \right\rangle$

5. Definiční obor funkce $f(x) = \ln \frac{1-x}{2x-3}$ je:

   (a) $\left(1, \frac{3}{2}\right)$
   (b) $\emptyset$
   (c) $\langle 1, \frac{3}{2}\rangle$
   (d) $(-\infty, 1)$

6. Funkce $f(x) = 0$ a $g(x) = \ln \frac{x-1}{|x-1|}$ se rovnají pro:

   (a) $x \in (1, \infty)$
   (b) $x \in \langle 1, \infty)$
   (c) $x \in \emptyset$
   (d) $x \in \langle -1, 1\rangle$.

7. Funkce $f(x) = e^{3-x}$ a $g(x) = e^{|3-x|}$ se rovnají pro:

   (a) $(-\infty, 3)$
   (b) $(-\infty, 3\rangle$
   (c) $(-\infty, 3\rangle \setminus \{0\}$
   (d) $\emptyset$

8. Definiční obor funkce $f(x) = e^{\sqrt{\frac{x-2}{3-x}}}$ je:

   (a) $(-\infty, 2\rangle \cup (3, \infty)$
   (b) $(2, 3\rangle$
   (c) $\emptyset$
   (d) $\langle 2, 3)$ .

9. Inverzní funkce k funkci $f(x) = 5e^{-x}$ je:

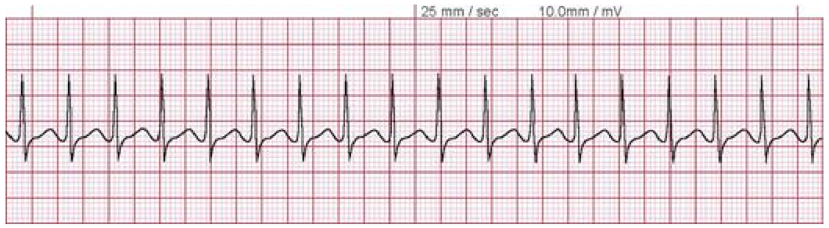
   (a) $y = -\ln \frac{x}{5}$
   (b) $y = e^{5x}$
   (c) $y = \frac{1}{5}e^{x}$
   (d) inverzní funkce neexistuje

10. Řešením rovnice $\ln(x^3 + 1) - \ln(2 + x) = 2 \ln x$ je:

   (a) $\{\frac{1}{2}\}$
   (b) $\{\frac{\sqrt{2}}{2}\}$
   (c) $\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\}$
   (d) $\emptyset$

# 7. Goniometrické funkce

## Periodické funkce




Periodická funkce je v matematice taková funkce, jejíž hodnoty se s určitým intervalem opakují, což naznačuje matematický zápis

$$f(x+p) = f(x) \text{ pro každé } x \in D(f),$$

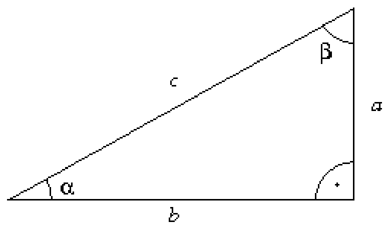
kde $p$ je perioda. Graf periodické funkce se opakuje v pravidelných intervalech na ose $x$.

## Goniometrické funkce

Goniometrické (neboli trigonometrické) funkce popisují vztahy mezi úhly a délkami stran v trojúhelníku a jsou užitečným nástrojem při řešení problémů nejen v geometrii a fyzice. Tyto funkce mají rozsáhlé praktické aplikace, například v navigaci, nebeské mechanice a popisu komplexních čísel, která jsou klíčová pro popis dějů v elektrotechnice. Mezi základní funkce patří *sinus, kosinus, tangens a kotangens*.

## Goniometrické funkce a pravoúhly trojúhelník

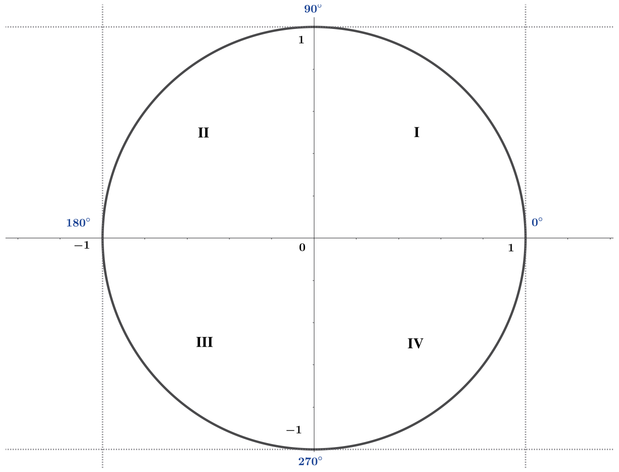
Pro správné pochopení goniometrických funkcí se na úvod obejdeme bez kreslení grafů těchto funkcí. Jejich význam si vysvětlíme pomocí úhlů v pravoúhlém trojúhelníku.




Goniometrické funkce (sinus, kosinus, tangens, kotangens) jsou definovány jako poměr délek stran pravouhlého trojúhelníka. Určují se vždy pro některý z vnitřních úhlů, různých od pravého, a to takto:

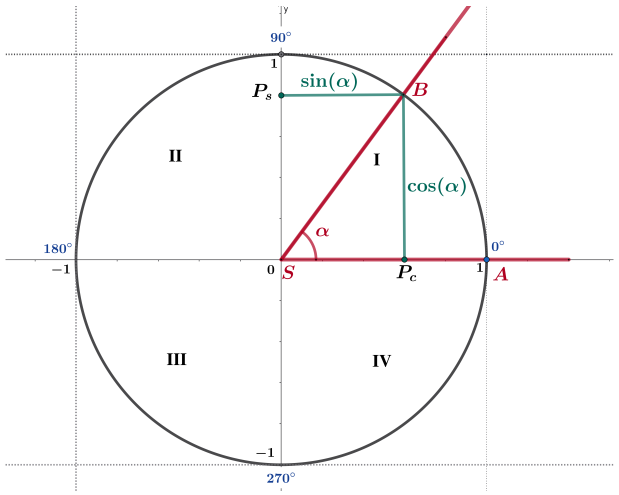
| | |
|---|---|
| $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přepona}}$ | $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{přepona}}$ |
| $\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přilehlá odvěsna}}$ | $\mathrm{cotg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{protilehlá odvěsna}}$ |

## Jednotková kružnice




Jednotková kružnice je kružnice, která má poloměr roven jedné. Slouží mj. k hezkému znázornění jednotlivých goniometrických funkcí. Kružnice je rozdělena do čtyř částí, kterým říkáme kvadranty. Vpravo nahoře je kvadrant první, vlevo nahoře druhý, vlevo dole třetí a vpravo dole čtvrtý. Vzhledem k tomu, že ji budeme používat k znázorňování úhlů, jsou na kružnici zvýrazněny stupně.

## Funkce sinus a cosinus na jednotkové kružnici




Jak již bylo uvedeno, na jednotkové kružnici se dají hezky znázornit goniometrické funkce. Nejprve na jednotkovou kružnici naneseme úhel s vrcholem v počátku soustavy souřadnic a jedním ramenem na kladné poloose $x$, např. úhel $\sphericalangle ASB$ (červeně). Tento úhel označíme $\alpha$. Ramena úhlu protínají jednotkovou kružnici v bodech $A$ a $B$. Pokud z bodu $B$ povedeme přímku rovnoběžnou s osou $x$ (na obrázku je to čárkovaná horizontální čára), tak tato přímka protne osu $y$ v jediném bodě. Tento bod označíme $P_s$. Potom platí, že délka úsečky $SP_s$ (zelená) je rovna $\sin\alpha$. Protože se pohybujeme v jednotkové kružnici, která má střed v počátku souřadnicového systému, je délka úsečky $SP_s$ rovna $y-$ové souřadnici bodu $P_s$, což je také $y-$ová souřadnice bodu $B$. Proč? Vysvětlení vyplývá z trojúhelníku $SP_sB$. Ten je pravoúhlý a platí, že $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle SBP_s| = \alpha$. Z definice funkce sinus víme, že

$$\sin\alpha = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přepona}}.$$

Zřejmě je délka protilehlé odvěsny rovna $|SP_s|$ a délka přepony je rovna poloměru kružnice, potom

$$\sin\alpha = \frac{|SP_s|}{1} = |SP_s|.$$

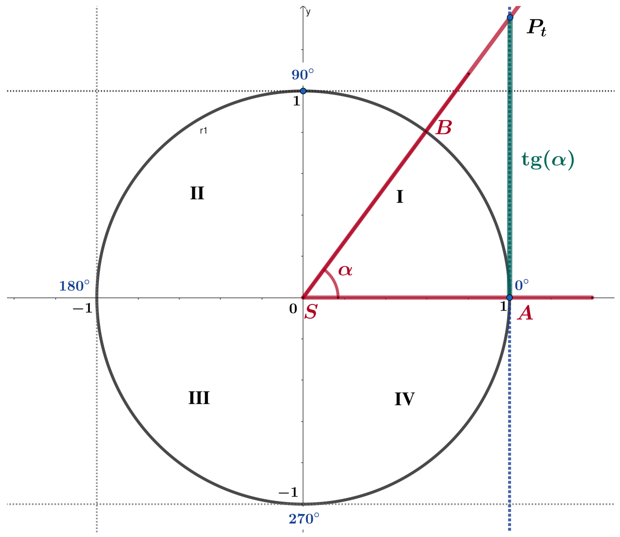
Podobnou úvahou můžeme na jednotkové kružnici zjistit také hodnotu $\cos\alpha$. Bodem $B$ vedeme přímku rovnoběžnou s osou $y$. Tato přímka protne osu $x$ v bodě $P_c$. Délka úsečky $SP_c$ je rovna $\cos\alpha$. Tato hodnota je rovna $x-$ové souřadnici bodu $B$. Pro zdůvodnění tohoto výsledku vyjdeme z pravoúhlého trojúhelníku $SP_cB$ a dostaneme:

$$\cos\alpha = \frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{přepona}}.$$

Po dosazení je

$$\cos\alpha = \frac{|SP_c|}{1} = |SP_c|.$$

## Funkce tangens na jednotkové kružnici




Podobně, jako jsme na jednotkové kružnici určili hodnoty $\sin\alpha$ a $\cos\alpha$, můžeme zde najít hodnoty pro tg$\alpha$ a cotg$\alpha$. Pro přehlednost si nejprve ukážeme postup, jak najít tg$\alpha$. K tomu budeme potřebovat další přímku. Tato přímka je rovnoběžná s osou $y$ a prochází bodem $A$, tedy bodem $[1,0]$. Na obrázku je to modrá přímka. Tato přímka protíná polopřímku $SB$ v jediném bodě, který označíme ho $P_t$. Délka úsečky $AP_t$ je rovna tg$\alpha$.
Pro zdůvodnění vezmeme v úvahu pravoúhlý trojúhelník $SAP_t$. Z definice funkce tangens víme, že

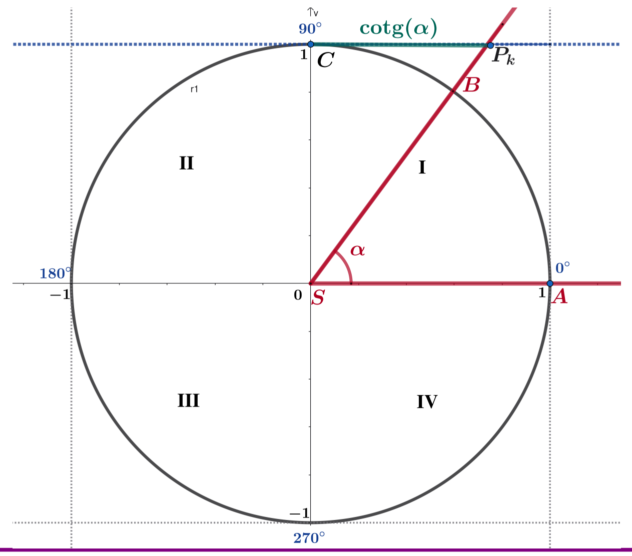
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přilehlá odvěsna}}.$$

Délka protilehlé odvěsny je rovna $|AP_t|$ a délka přilehlé odvěsny je rovna poloměru kružnice, proto

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{|AP_t|}{1} = |AP_t|.$$

Otázkou je, co se stane, pokud bude úhel $\alpha = 90°$. Tangens pro tento úhel není definován, protože takové rameno bude rovnoběžné s osou $x$ a bude tak i rovnoběžné s přímkou, se kterou by se mělo protnout.

## Funkce kotangens na jednotkové kružnici




Abychom na jednotkové kružnici znázornili cotg$\alpha$, budeme potřebovat další přímku. Tato přímka prochází bodem $[0,1]$ a je rovnoběžná s osou $x$. Je zvýrazněna modrou barvou a protíná polopřímku $SB$ v jediném bodě, který označíme $P_k$. Délka úsečky $CP_k$ je rovna cotg$\alpha$.
Pro zdůvodnění si prostudujte pravoúhlý trojúhelník $SP_kC$. Z definice funkce cotangens víme, že

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{protilehlá odvěsna}}.$$

Délka přilehlé odvěsny je rovna $|CP_k|$ a délka protilehlé odvěsny je rovna poloměru kružnice, proto

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|CP_k|}{1} = |CP_k|.$$

V případě, že $\alpha = 180°$, kotangens pro tento úhel není definován. Důvod je podobný jako u funkce tangens, přímka $p$ a rameno úhlu se nikdy neprotnou, protože budou rovnoběžné.

### Stupně a radiany

Tradičním způsobem měření úhlů je měření ve stupních. Toto měření se používá po celém světě. Jeden stupeň je definován jako jedna tři sta šedesátina plného kruhu. Plný kruh se tedy dělí na 360 stupňů. Tak například pravý úhel měří $90°$, polovina pravého úhlu je $45°$ atd.

Alternativním způsobem měření úhlů, který je často používán zejména ve vědeckých a technických oborech, je měření v radianech. Radián je definován jako poměr délky oblouku k poloměru tohoto kruhu (resp. oblouku). Plný kruh odpovídá hodnotě $2\pi$. Úhel se pak vyjadřuje jako část celého kruhu, kde jednotkou je jeden radián. Například pravý úhel se rovná $\frac{\pi}{2}$ radiánu, polovina pravého úhlu je $\frac{\pi}{4}$ radiánu atd.

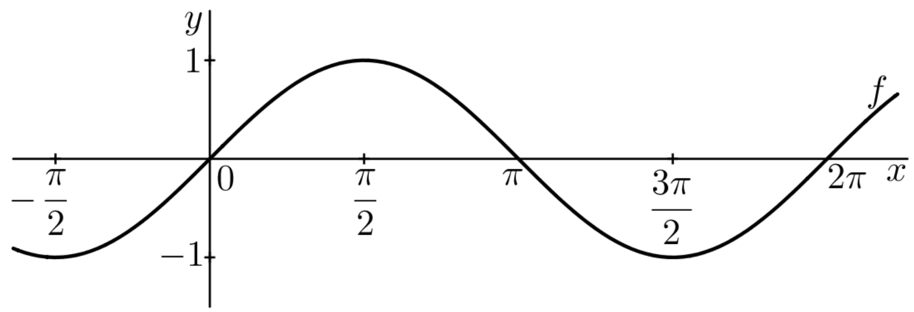
Při potřebě převodu mezi stupni a radiány vystačíme s jednoduchými vzorci. Pro převod stupňů na radiány vynásobíme hodnotu úhlu v stupních konstantou $\frac{\pi}{180}$. Naopak, pro převod radiánů na stupně vynásobíme hodnotu úhlu v radiánech konstantou $\frac{180}{\pi}$.

## Orientovaný úhel

Úhel $\sphericalangle AVB$ chápeme jako část roviny, která je ohraničená dvěma polopřímkami $VA, VB$. Polopřímky $VA, VB$ se nazývají ramena úhlu. Nyní si zavedeme nový pojem, který budeme potřebovat při práci s goniometrickými funkcemi. Orientovaný úhel je úhel, u kterého je určeno, které jeho rameno je počáteční a které je koncové.
Orientace úhlu $\sphericalangle AVB$ je dána pořadím písmen v jeho zápisu, počáteční rameno je rameno $VA$ a koncové rameno je rameno $VB$.
Počáteční a koncové rameno orientovaného úhlu si můžeme představit jako hodinové ručičky. Koncové rameno se může otáčet kolem vrcholu úhlu buď po směru pohybu hodinových ručiček nebo proti směru. Podle směru pohybu hovoříme o kladném, resp. záporném smyslu otáčení. Pokud se koncové rameno otáčí proti směru pohybu hodinových ručiček, hovoříme o kladném smyslu otáčení, v opačném případě se jedná o kladný směr otáčení. Tuto myšlenku potřebujeme k zavedení pojmu základní velikost orientovaného úhlu $\sphericalangle AVB$ , což je velikost úhlu $\sphericalangle AVB$, který vytvoří polopřímka $VA$ otočením v kladném smyslu do polopřímky $VB$.
Základní velikost orientovaného úhlu je číslo z intervalu $\langle 0°, 360°)$ ve stupních, nebo $\langle 0, 2\pi)$ v radiánech. Jestliže počáteční rameno orientovaného úhlu splývá s koncovým, nazýváme tento úhel nulový orientovaný úhel.
Pojem základní velikost bylo nutné zavést proto, že velikost orientovaného úhlu $\sphericalangle AVB$ může být libovolná hodnota $\alpha + k \cdot 360°$, příp. $\alpha + k \cdot 2\pi$, kde $\alpha$ je základní velikost $\sphericalangle AVB$ a $k \in \mathbb{Z}$. Například fakt, že má orientovaný úhel $\sphericalangle AVB$ velikost $420°$, lze zapsat jako $60° + 1 \cdot 360°$, nebo $\frac{\pi}{6} + 1 \cdot 2\pi$. Na jednotkové kružnici si tento úhel můžeme představit tak, že provedeme jedno otočení o jeden celý kruh a pak navíc ještě o $60°$, nebo o $\frac{\pi}{6}$ radiánu. Tudíž úhel $60°$, nebo $\frac{\pi}{6}$ je základní velikost úhlu $420°$ a na jednotkové kružnici jim přísluší stejný úhel.
Tuto představu využijeme při rozšíření goniometrických funkcí pro úhly s velikostí nad $360°$, nebo nad $2\pi$ radiánů. Vzhledem k tomu, že orientovanému úhlu o velikosti $\alpha + 2k\pi$ přísluší stejný úhel jako úhlu $\alpha$, budou také hodnoty goniometrických funkcí v těchto úhlech stejné. Proto jsou goniometrické funkce periodické.

**Graf funkce sinus**

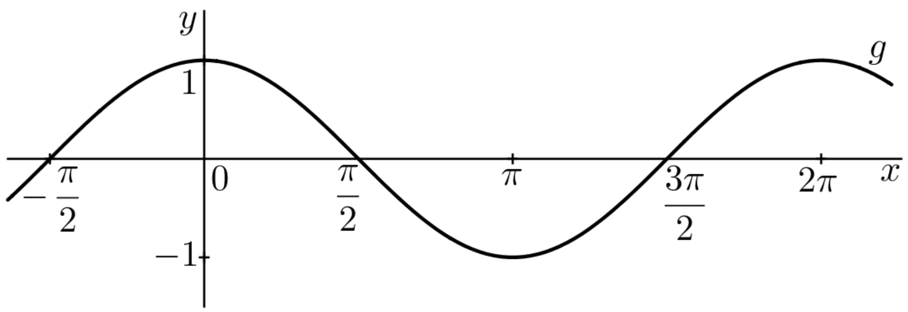
Grafem funkce sinus je křivka zvaná sinusoida. Graf si můžete prohlédnout na následujícím obrázku.




Sinus je lichá, ohraničená a periodická funkce, která má periodu $2\pi$. Pro její definiční obor a obor hodnot platí: $D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \langle -1, 1 \rangle$.

### Graf funkce kosinus

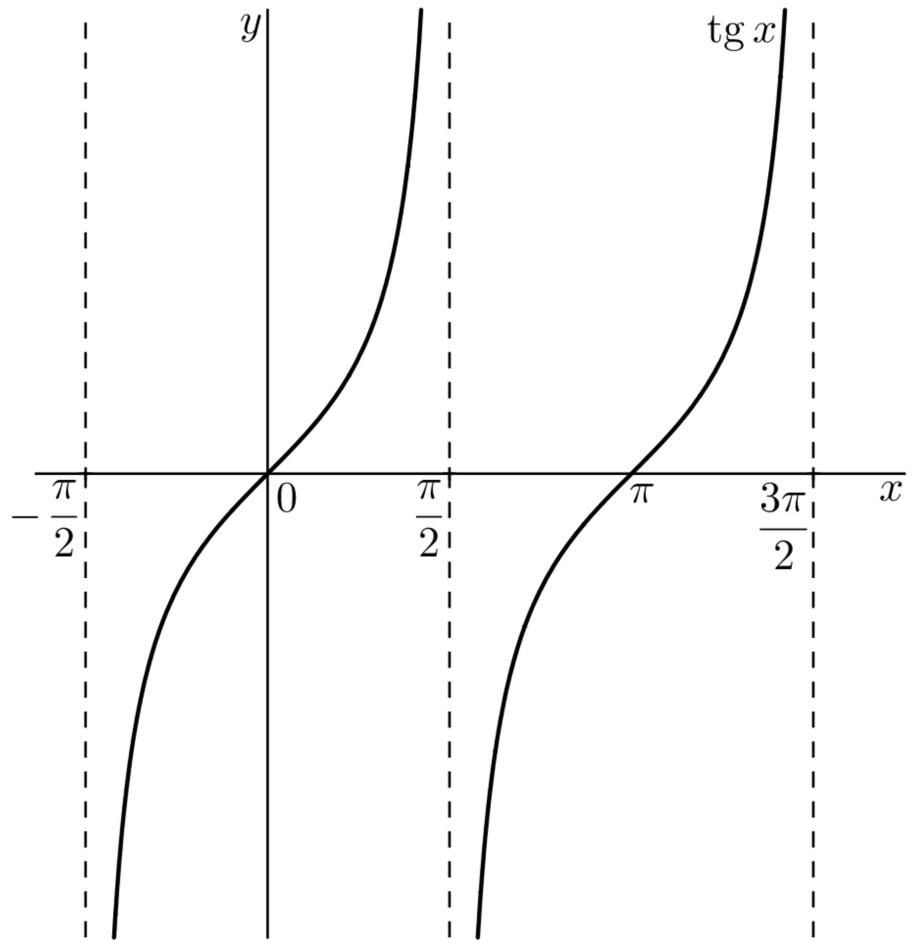
Grafem funkce cosinus je křivka zvaná cosinusoida. Graf si můžete prohlédnout na následujícím obrázku:




Cosinus je sudá, ohraničená a periodická funkce, která má periodu $2\pi$. Pro její definiční obor a obor hodnot platí: $D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \langle -1, 1 \rangle$.

**Graf funkce tangens**

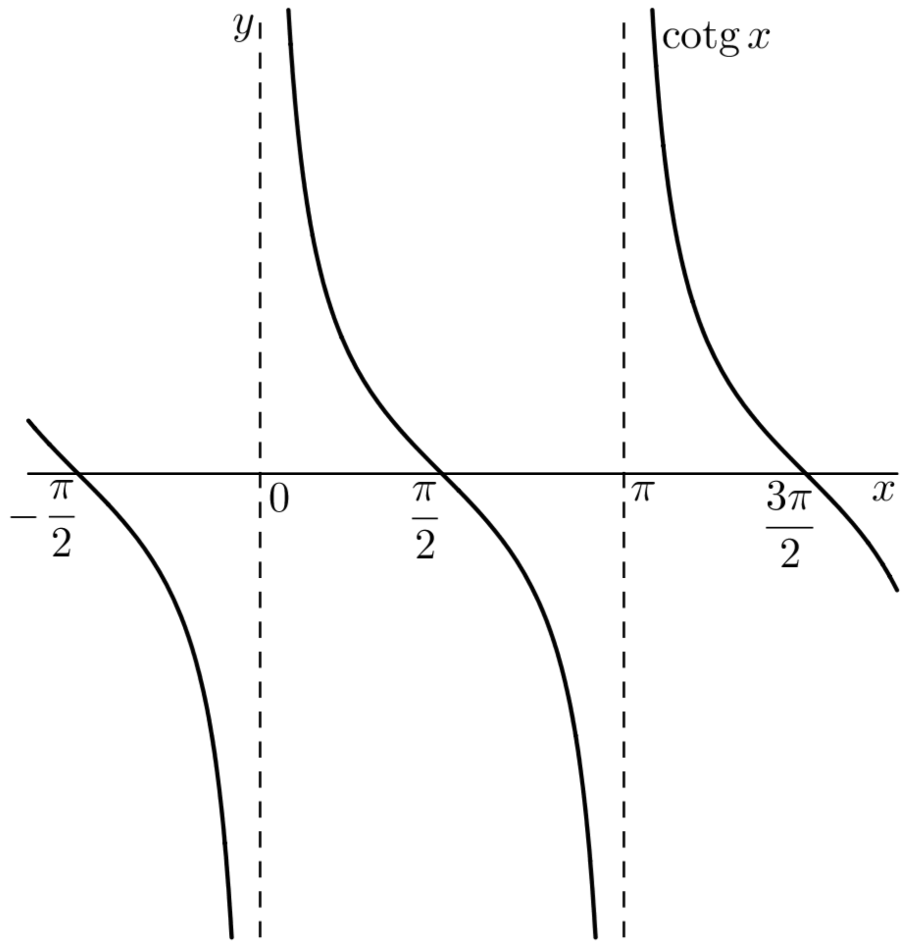
Grafem funkce tangens je křivka zvaná tangentoida:




Tangens je lichá, neohraničená a periodická funkce, která má periodu $\pi$. Pro její definiční obor a obor hodnot platí: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\colon k \in \mathbb{Z}\right\}, H(f) = \mathbb{R}$.

**Graf funkce kotangens**

Grafem funkce kotangens je křivka zvaná cotangentoida:




Kotangens je lichá, neohraničená a periodická funkce, která má periodu $\pi$. Pro její definiční obor a obor hodnot platí: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}, H(f) = \mathbb{R}$.

## Tabulka hodnot goniometrických funkcí

V následující tabulce shrneme hodnoty goniometrických funkcí pro velikosti některých úhlů.

| Funkce | $30°$ ($\frac{\pi}{6}$) | $45°$ ($\frac{\pi}{4}$) | $60°$ ($\frac{\pi}{3}$) | $90°$ ($\frac{\pi}{2}$) | $120°$ ($\frac{2\pi}{3}$) | $135°$ ($\frac{3\pi}{4}$) | $150°$ ($\frac{5\pi}{6}$) | $180°$ ($\pi$) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin(\alpha)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\cos(\alpha)$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ |
| $\mathrm{tg}(\alpha)$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | nedef. | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ |
| $\mathrm{cotg}(\alpha)$ | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-1$ | $-\sqrt{3}$ | nedef. |

**Vztahy mezi goniometrickými funkcemi**

Pro goniometrické funkce platí celá řada vztahů, které využíváme při řešení goniometrických rovnic a nerovnic.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\mathrm{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

**Vztahy pro goniometrické funkce součtu argumentů**

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

**Vztahy pro součet hodnot goniometrických funkcí**

$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{y}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{y}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{y}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{y}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

**Vztahy pro dvojnásobný argument**

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\mathrm{tg} 2x = \frac{2\mathrm{tg} x}{1 - \mathrm{tg}^2 x}$$

Příklad

**Příklad 1.** *Nechť* $f(x) = \frac{1}{1-\cos x}$. *Určete definiční obor funkce* $f$.

**Řešení.** *Pro určení definičního oboru stačí zjistit, kdy je* $1 - \cos x \neq 0$, *protože výraz* $1 - \cos x$ *je ve jmenovateli. Vyřešíme rovnici*

$$1 - \cos x = 0$$

*což je ekvivaletní s tím, že*

$$\cos x = 1.$$

*Funkce* $\cos x$ *nabýva hodnotu* $1$ *v sudých násobcích* $\pi$, *proto poslední rovnici vyhovují* $x \in \{2k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}$. *To znamená, že* $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}$.

Příklad

**Příklad 2.** *Nechť* $f(x) = \sqrt{1 - \sin x}$. *Určete definiční obor funkce* $f$.

**Řešení.** *Pro určení definičního oboru stačí zjistit, kdy je* $1 - \sin x \geq 0$, *protože výraz* $1 - \sin x$ *je pod odmocninou. Vyřešíme nerovnici*

$$1 - \sin x \geq 0$$

*což je ekvivaletní s tím, že*

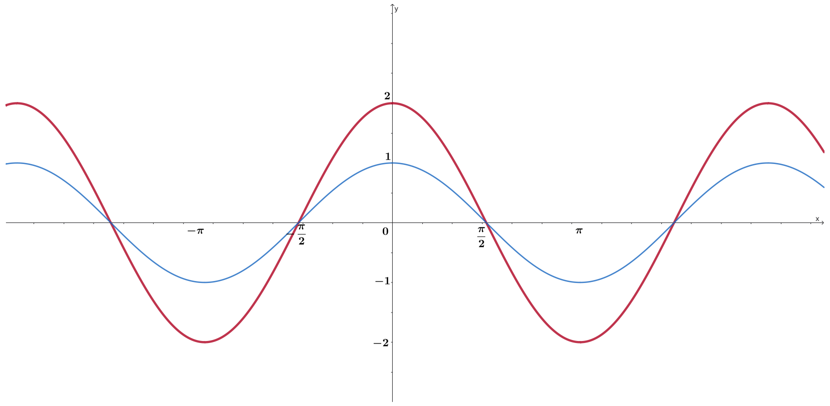
$$1 \geq \sin x.$$

*Protože funkce* $\sin x$ *nabýva pouze hodnoty z intervalu* $\langle -1, 1 \rangle$, *vyhovují nerovnici všechna reálná čísla. To znamená, že* $D(f) = \mathbb{R}$.

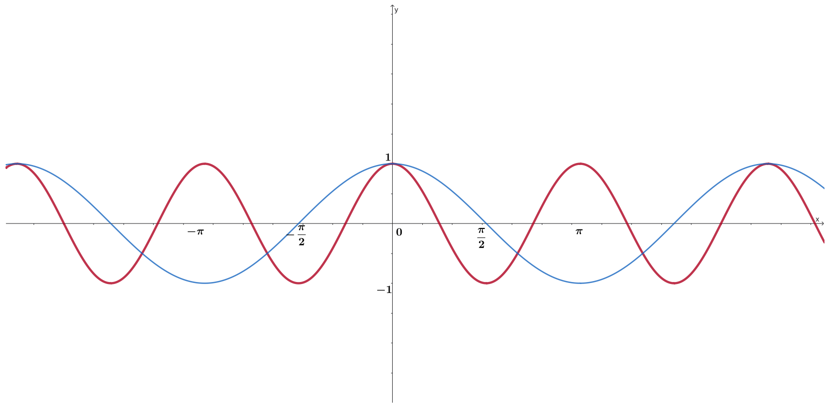
Příklad

**Příklad 3.** *Načrtněte grafy funkcí:* $f(x) = 2 \cdot \cos x$ *a* $g(x) = \cos(2x)$.

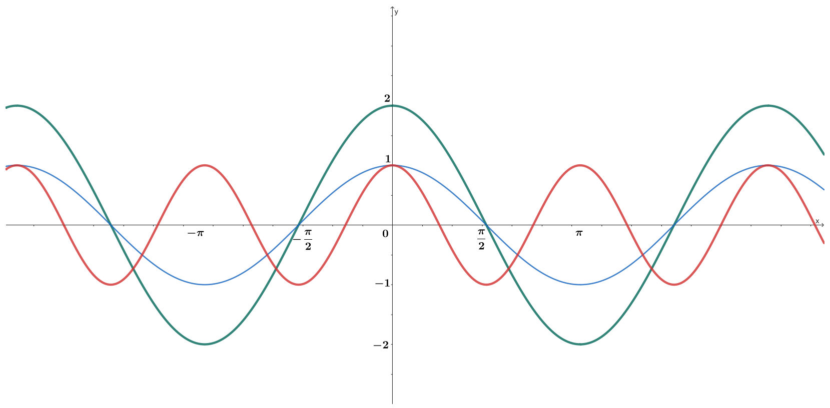
**Řešení.** *Nejprve se budeme věnovat grafu funkce* $f$. *Musíme si uvědomit, že* $2 \cdot \cos x$ *znamená, že všechny funkční hodnoty se zdvojnásobí, což mj. znamená, že tam, kde je* $\cos x = 0$, *se grafy funkcí* $f(x) = 2 \cdot \cos x$ *a* $g(x) = \cos(2x)$ *budou protínat, proto* $\cos x = 2 \cdot \cos x$ *právě když* $\cos x = 2 \cdot \cos x = 0$. *Takovými body jsou všechna* $x \in \left\{\frac{2k+1}{2} \cdot \pi \colon k \in \mathbb{Z}\right\}$. *Na následujícím obrázku je červenou barvou vykreslen graf funkce* $f$ *a modrou barvou graf funkce* $y = \cos x$.



*Pro nakreslení grafu funkce* $g(x) = \cos(2x)$ *si musíme uvědomit, že její argument je dvojnásobný, což znamená, že např. v* $x = \pi$ *bude funkční hodnota funkce* $g$ *stejná jako v* $x = 2\pi$ *u funkce* $y = \cos x$. *To znamená, že perioda funkce* $g$ *bude v porovnání s periodou funkce* $y = \cos x$ *poloviční. Na následujícím obrázku je červenou barvou vykreslen graf funkce* $g$ *a modrou barvou graf funkce* $y = \cos x$.



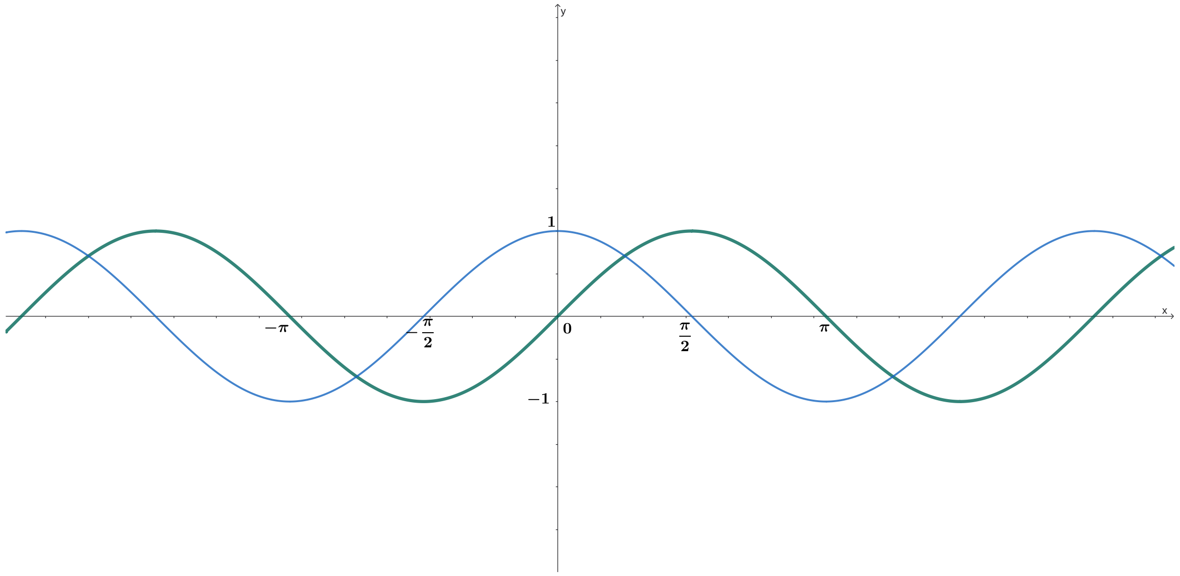
*Na závěr ještě uvádíme grafy funkcí* $f, g$ *a* $y = \cos x$ *současně:*



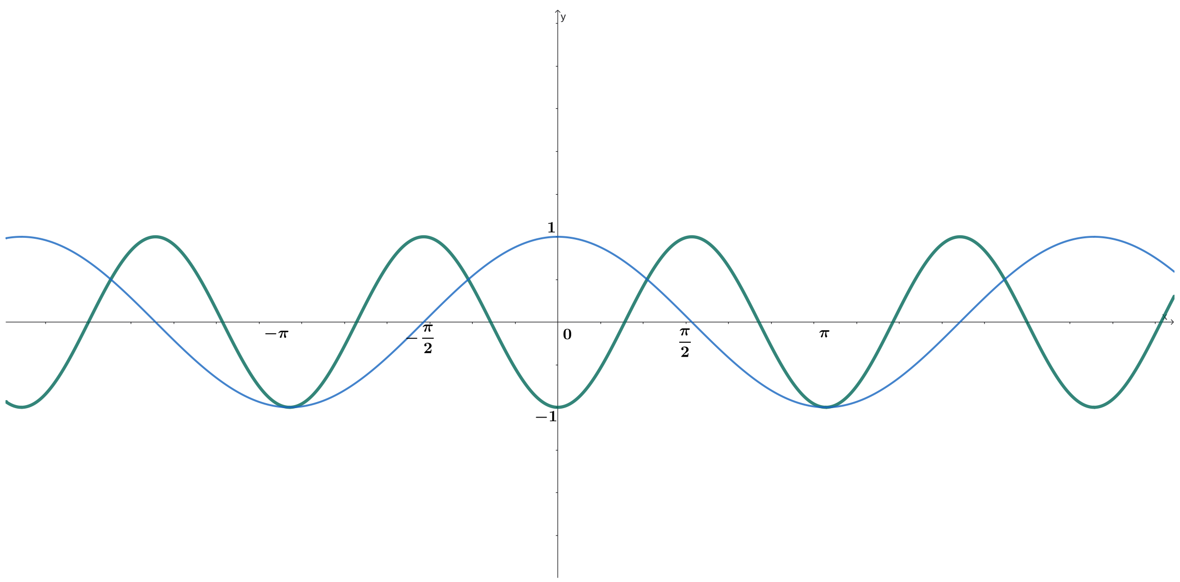
Příklad

**Příklad 4.** *Načrtněte grafy funkcí:* $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ *a* $g(x) = \cos(2x - \pi)$.

**Řešení.** *Při kreslení grafu funkce* $f$ *si nejdříve musíme zjistit, kdy je* $x - \frac{\pi}{2} = 0$. *Tento úkol je jednoduchý, je to pro* $x = \frac{\pi}{2}$. *V tomto bodě funkce nabývá hodnoty* $1$, *stejně jako funkce* $y = \cos x$ *v bodě* $x = 0$. *Proto graf funkce* $f$ *je stejný jako graf funkce* $y = \cos x$ *jenom posunutý doprava o* $\frac{\pi}{2}$. *Tento graf (zelená barva), spolu s grafem funkce* $y = \cos x$ *vidíme na obrázku.*




*Při kreslení grafu funkce* $g(x) = \cos(2x - \pi)$ *nejdříve upravíme argument* $2x - \pi$ *tak, že vytkneme* $2$ *před závorku, tedy dostaneme:* $2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. *Z tohoto vyjádření lépe vidíme, že argument je roven* $0$ *pro* $x = \frac{\pi}{2}$. *V tomto bodě funkce* $g$ *nabýva hodnotu* $1$, *ale na rozdíl od funkce* $f$ *bude mít poloviční periodu, co plyne z toho, že koeficient při* $x$ *je* $2$. *Tento graf (zelená barva), spolu s grafem funkce* $y = \cos x$ *vidíme na obrázku.*



Příklad

**Příklad 5.** *Upravte výraz* $\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{\sin x}$.

**Řešení.** *Nejdříve zjistíme, pro která* $x \in \mathbb{R}$ *má výraz smysl. Zřejmě*

$$1 + \cos x \neq 0 \quad \wedge \quad \sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq (2k+1)\pi \quad \wedge \quad x \neq k\pi \colon k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq k\pi \colon k \in \mathbb{Z}.$$

*Zlomky sečteme*

$$\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + (1+\cos^2 x)^2}{(1+\cos x)\cdot \sin x}$$

*a následně upravíme*

$$\frac{\sin^2 x + (1+\cos x)^2}{(1+\cos x)\cdot \sin x} = \frac{\sin^2 x + 1 + \cos^2 x + 2\cos x}{(1+\cos x)\cdot \sin x} = \frac{2 + 2\cos x}{(1+\cos x)\cdot \sin x} = \frac{2(1+\cos x)}{(1+\cos x)\cdot \sin x} = \frac{2}{\sin x}.$$

*Při úpravách jsme využili vztah* $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ *a běžné úpravy, jako umocnění nebo vytýkání před závorku.*

Příklad

**Příklad 6.** *Na množině reálných čísel řešte rovnici* $2 \cdot \sin^2 x - 3 \cdot \sin x + 1 = 0$

**Řešení.** *Pro vyřešení rovnice*

$$2 \cdot \sin^2 x - 3 \cdot \sin x + 1 = 0$$

*je klíčové zavést substituci* $z = \sin x$, *díky které už stačí vyřešit kvadratickou rovnici:*

$$2z^2 - 3z + 1 = 0.$$

*Určíme diskriminant:*

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1.$$

*Potom*

$$z_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{D}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}.$$

*Proto* $z_1 = 1$ *a* $z_2 = \frac{1}{2}$. *Vzhledem k tomu, že* $z = \sin x$, *je nutné, aby* $z \in \langle -1, 1 \rangle$, *co je pro* $z_1$ *i pro* $z_2$ *splněno. Teď stačí vyřešit dvě rovnice:*

$$\sin x = 1 \iff x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \colon k \in \mathbb{Z} \right\},$$

*a*

$$\sin x = \frac{1}{2} \iff x \in \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \colon k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

*Řešením původní rovnice je*

$$\left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \colon k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \colon k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Příklad

**Příklad 7.** *Na množině reálných čísel řešte rovnici* $\mathrm{tg}(2x-3)=1$.

**Řešení.** *Pro vyřešení rovnice*

$$\mathrm{tg}(2x-3)=1$$

*je klíčové uvědomit si, že funkce* $y=\mathrm{tg}x$ *nabývá hodnotu* $1$ *v* $x=\frac{\pi}{4}$ *a to, že perioda této funkce je* $d=\pi$. *Potom původní rovnici převedeme na rovnici*

$$2x-3=\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi,\quad \textit{kde } k\in\mathbb{Z}.$$

*Po úpravách dostaneme*

$$x=\frac{\pi}{8}+\frac{3}{2}+\frac{\pi}{2}\cdot k,\quad \textit{kde } k\in\mathbb{Z}.$$

*Výraz na pravé straně ještě upravíme a tedy řešením původní rovnice je* $\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{4k+1}{4}\cdot\pi+3\right):k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Příklad

**Příklad 8.** *Na množině reálných čísel řešte nerovnici* $\sin 2x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

**Řešení.** *Pro vyřešení nerovnice*

$$\sin 2x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

*je nutné si uvědomit, že*

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \textit{ nebo } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad \textit{kde } k \in \mathbb{Z}.$$

*Na sjednocení intervalů* $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \langle \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \rangle$ *je potom* $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

*V naší nerovnici nemáme* $\sin x$*, ale* $\sin 2x$*, proto potřebujeme zjistit, kdy* $\sin 2x$ *nabýva hodnotu* $\frac{\sqrt{2}}{2}$. *Využijeme předchozí informace a dostáváme:*

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \left(2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ \vee \ 2x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \colon k \in \mathbb{Z}.\right).$$

*Potom*

$$x = \frac{\pi}{8} + k\pi \ \vee \ x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \colon k \in \mathbb{Z}.$$

*Proto řešením nerovnice je sjednocení intervalů* $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \langle \frac{\pi}{8} + k\pi, \frac{3\pi}{8} + k\pi \rangle$.

# 1 Test

1. Definiční obor funkce $f(x) = \frac{1}{1+\sin x}$ je
   (a) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2} \cdot \pi + 2k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\right\}$
   (b) $\left\{\frac{3}{2} \cdot \pi + 2k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\right\}$
   (c) $\left\{\frac{1}{2} \cdot \pi + 2k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\right\}$
   (d) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2} \cdot \pi + k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\right\}$
2. Definiční obor funkce $f(x) = \sqrt{2 - \sin x}$ je
   (a) $\langle 0, 2 \rangle$
   (b) $\emptyset$
   (c) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\right\}$
   (d) $\mathbb{R}$
3. Definiční obor funkce $f(x) = \frac{1}{1-\mathrm{tg} x}$ je
   (a) $\emptyset$
   (b) $\left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\right\}$
   (c) $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\right\}$
   (d) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\right\}$
4. Definiční obor funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin x}}$ je
   (a) $\emptyset$
   (b) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\right\}$
   (c) $\mathbb{R}$
   (d) $\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\right\}$
5. Řešením rovnice $\sin(2x) = 2$ je
   (a) $\mathbb{R}$
   (b) $\emptyset$
   (c) $\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\right\}$
   (d) $\left\{\frac{\pi}{2} - k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\right\}$
6. Řešením rovnice $1 - \sin(x) = 2$ je
   (a) $\left\{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\right\}$
   (b) $\left\{\frac{3}{2}\pi + k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\right\}$

(c) $\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\right\}$

(d) $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\right\}$

7. Řešením rovnice $\sin^2 x - \sin x - 2 = 0$ je

(a) $\left\{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\right\}$

(b) $\left\{\frac{3}{2}\pi + k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\right\}$

(c) $\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\right\}$

(d) $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\right\}$

8. Řešením nerovnice $\cos x \leq \frac{1}{2}$ je

(a) $x = \frac{\pi}{3}$

(b) $\left\{\left\langle\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right\rangle : k \in \mathbb{Z}\right\}$

(c) $\mathbb{R}$

(d) $x = \frac{\pi}{6}$

9. Řešením nerovnice $\frac{\sin x - 1}{1 - \cos x} \geq 0$ je

(a) $\mathbb{R}$

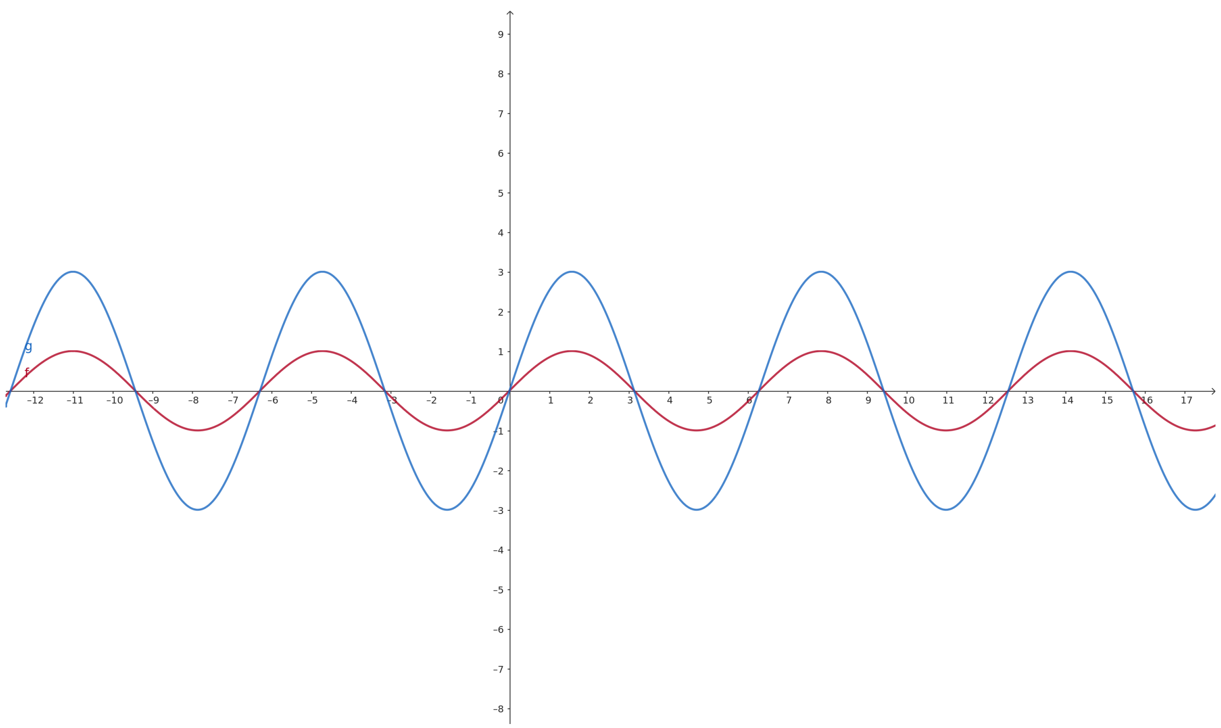
(b) $\{2kp \colon k \in \mathbb{Z}\}$

(c) $\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{2kp \colon k \in \mathbb{Z}\}$

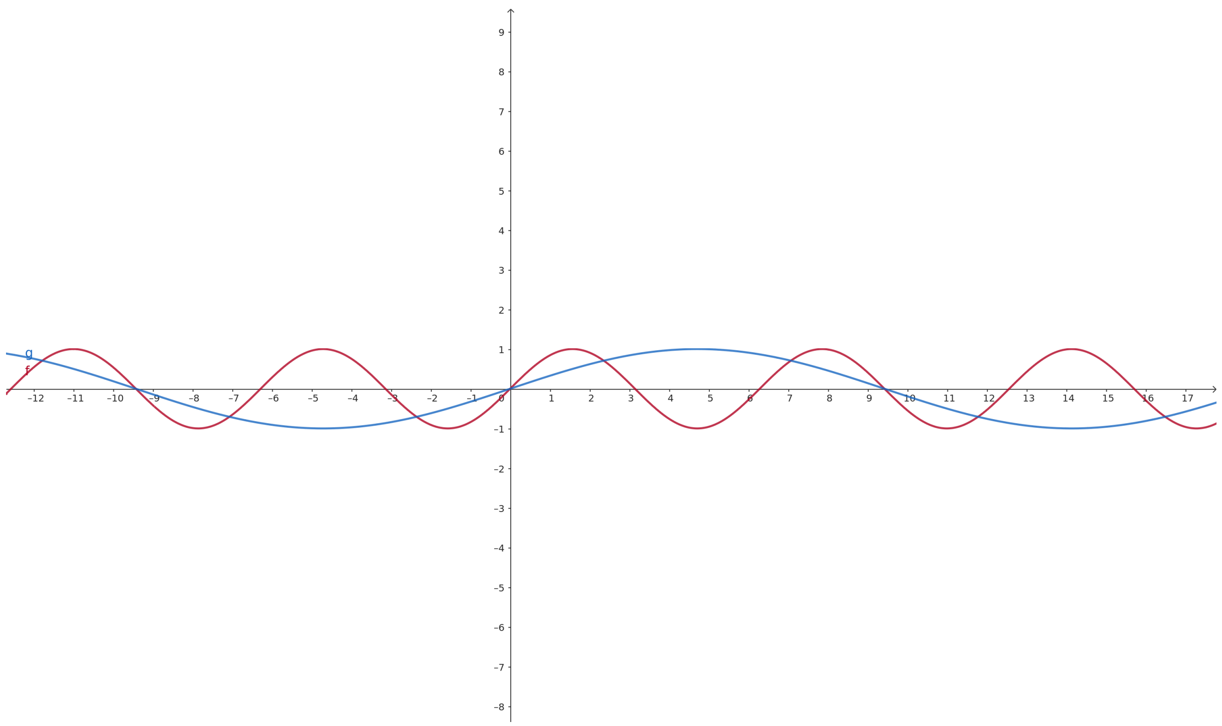
(d) $\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\right\}$

10. Načrtněte grafy funkcí $f(x) = \sin 3x, g(x) = \sin x$, (funkce $f$ je vykreslena červenou barvou, funkce $g$ modrou).

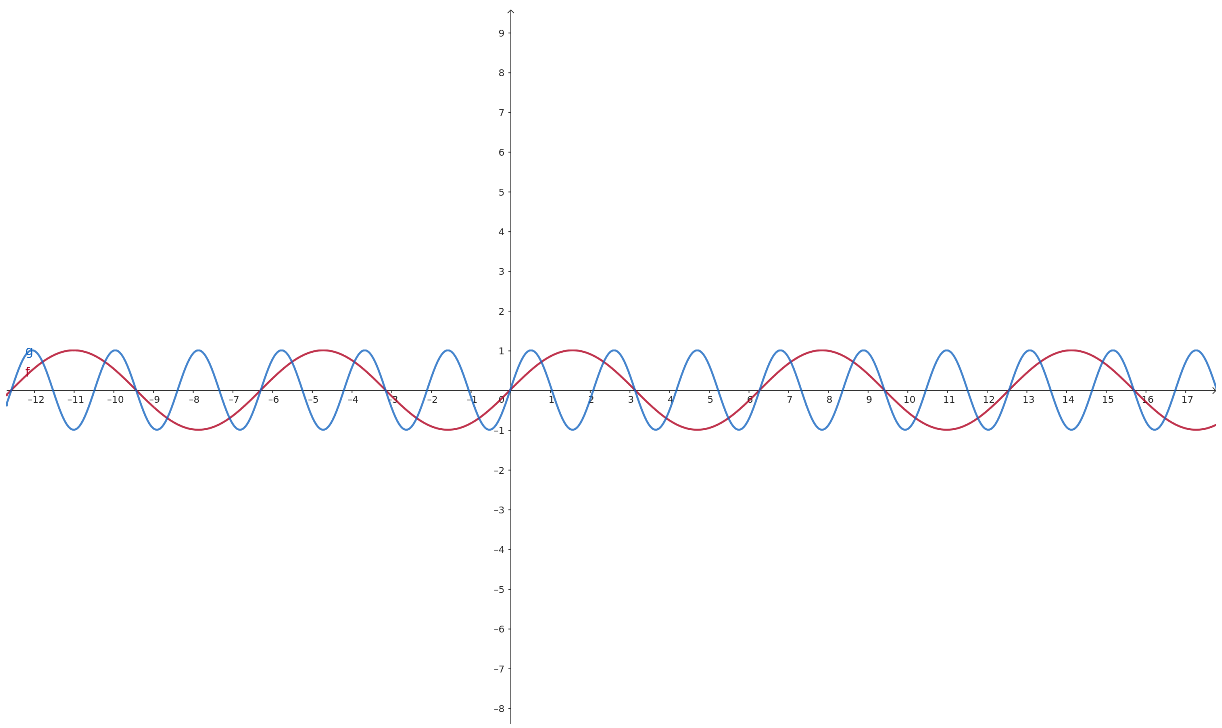
(a)



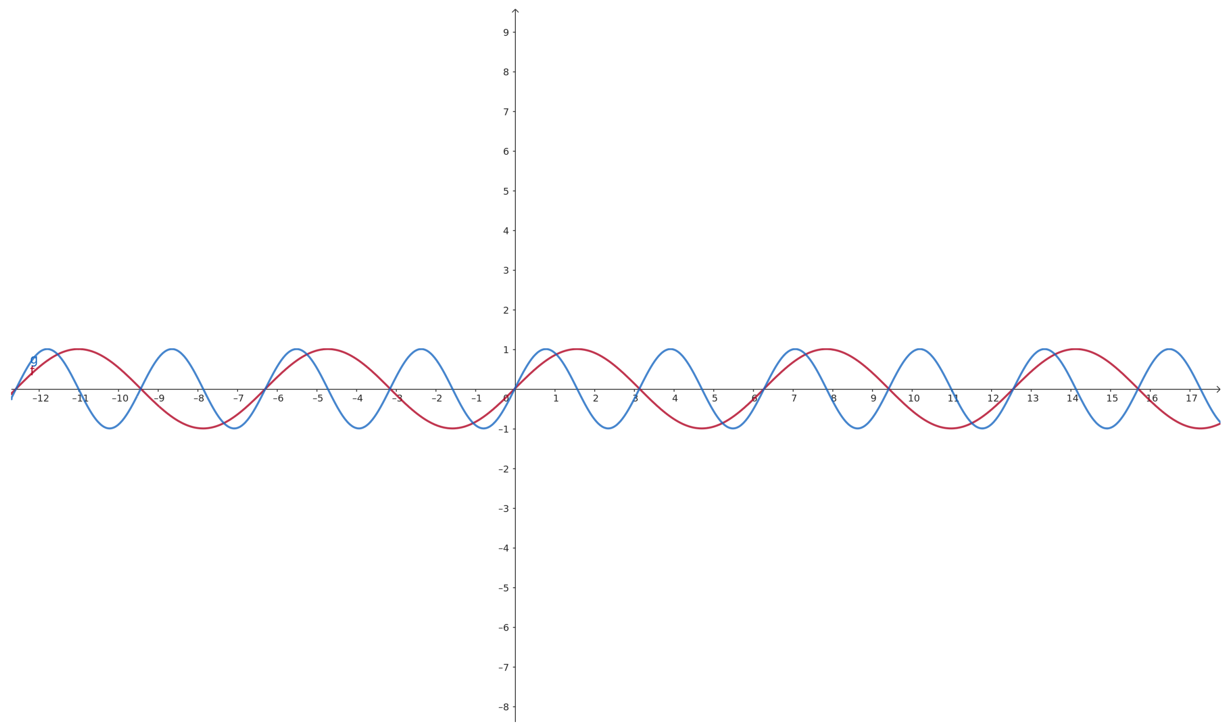
(b)




(c)



(d)



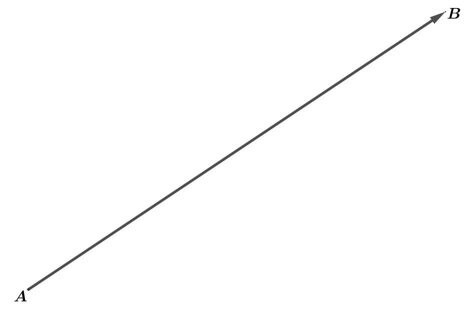
# 8. Vektory, přímky, roviny

**Analytická geometrie**

Za zakladatele analytické geometrie je považován francouzský filosof a matematik René Descartes, který zavedl souřadnicovou soustavu do geometrie, což umožnilo algebraický popis geometrických útvarů a možnost řešit geometrické problémy pomocí algebraických a analytických metod.
My se budeme věnovat nejjednodušším objektům popsatelným analyticky. Těmi jsou body, vektory, přímky a roviny.

## Orientované úsečky

Když máme v rovině dva různé body $A, B$, můžeme mezi těmito body vést úsečku. Takovou úsečku obvykle zapisujeme jako $AB$, přitom nezáleží na pořadí bodů. Úsečka $AB$ je stejná úsečka jako úsečka $BA$.
Ve fyzice při znázornění sil potřebujeme znázornit nejen velikost, ale také směr síly. Proto zavádíme pojem orientovaná úsečka, u které rozlišujeme počáteční bod a koncový bod. Orientovaná úsečka $AB$ má počáteční bod $A$ a koncový bod $B$. Jednu takovou orientovanou úsečku vidíme na obrázku:



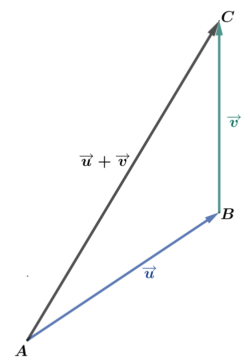
## Vektory

Orientované úsečky využijeme pro zavedení vektorů. Nenulový vektor je množina všech orientovaných úseček, které mají stejnou nenulovou velikost a stejný směr. Úsečky s nulovou délkou, tedy takové, které jsou tvořeeny dvojicí totožných bodů, jsou nulové vektory.

Je-li vektor u v rovině určen orientovanou úsečkou $AB$, kde $A = [a_1, a_2], B = [b_1, b_2]$, nazývají se čísla $u_1 = b_1 - a_1, u_2 = b_2 - a_2$, souřadnice vektoru $\overrightarrow{u}$ a zapisujeme $\overrightarrow{u} = [u_1, u_2]$. Je-li vektor u v prostoru určen orientovanou úsečkou $AB$, kde $A = [a_1, a_2, a_3], B = [b_1, b_2, b_3]$, nazývají se čísla $u_1 = b_1 - a_1], u_2 = b_2 - a_2, u_3 = b_3 - a_3$, souřadnice vektoru $\overrightarrow{u}$ a zapisujeme $\overrightarrow{u} = [u_1, u_2, u_3]$. Způsob výpočtu souřadnic vektoru $\overrightarrow{u} = AB$ symbolicky zapisujeme $\overrightarrow{u} = B - A$. Na obrázku vidíme dvě různá umístění vektoru $\overrightarrow{u} = [2, 2]$.

## Sčítání vektorů

Součet vektorů $\overrightarrow{u} = B - A$, $\overrightarrow{v} = C - B$ je vektor $C - A$. Zapisujeme $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = C - A$. Konstrukci součtu vidíme na obrázku:




Pro sčítání libovolných vektorů platí komutativní a asociativní zákon:

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u},$$

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w})\,.$$

## Násobení vektoru reálným číslem

Vektory můžeme násobit reálným číslem. Výsledkem takového násobení je opět vektor. Geometricky tuto operaci lze reprezentovat prodloužením nebo zkrácením, popřípadě změnou orientace na opačnou (při násobení záporným číslem) původního vektoru.
Násobek nulového vektoru reálným číslem $k$ je vždy nulový vektor. Násobek nenulového vektoru $\overrightarrow{u} = B - A$ reálným číslem $k$ je vektor $\overrightarrow{v} = C - A$, přičemž $C$ je bod, pro který platí

$$|AC| = |k| \cdot |AB|$$

Je-li $k \geq 0$, leží bod $C$ na polopřímce $AB$, je-li $k < 0$, leží bod $C$ na polopřímce opačné k polopřímce $AB$. Násobení vektoru $\overrightarrow{u}$ číslem $k$ zapisujeme $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.
Pro každý vektor $\overrightarrow{u} = [u_1, u_2]$ v rovině a každé reálné číslo $k$ platí $k\overrightarrow{u} = [ku_1, ku_2]$. Pro každý vektor $\overrightarrow{u} = [u_1, u_2, u_3]$ v prostoru a každé reálné číslo $k$ platí $k\overrightarrow{u} = [ku_1, ku_2, ku_3]$.

Mějme vektory $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$, které jsou všechny v rovině. Vektor $\overrightarrow{z} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w}$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, se nazývá lineární kombinace vektorů $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$. Analogicky definujeme lineární kombinace vektorů v prostoru.

## Skalární součin vektorů

Při řešení úloh budeme potřebovat zjistit velikost vektoru. Ta je zavedená přirozeným způsobem, a sice jako délka příslušné orientované úsečky. Velikost vektoru $\overrightarrow{u}$ označujeme symbolem $|\overrightarrow{u}|$. Jestliže $|\overrightarrow{u}| = 1$, nazývá se vektor $\overrightarrow{u}$ jednotkový vektor. Aplikovaním Pythagorovy věty dostaneme pro velikost vektoru $\overrightarrow{u} = [u_1, u_2]$ v rovině

$$|\overrightarrow{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$

Pro velikost vektoru $\overrightarrow{u} = [u_1, u_2, u_3]$ v prostoru platí

$$|\overrightarrow{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Pro nulový vektor $\overrightarrow{o}$ platí, že $|\overrightarrow{o}| = 0$.

Už umíme vektory sčítat, odečítat, násobit je reálným číslem a také vypočítat jejich velikost. Zavedeme si další operaci, která se nazývá skalární součin.
Skalární součin dvou vektorů $\overrightarrow{u} = [u_1, u_2]$, $\overrightarrow{v} = [v_1, v_2]$ v rovině je reálné číslo $u_1v_1 + u_2v_2$.
Skalární součin dvou vektorů $\overrightarrow{u} = [u_1, u_2, u_3]$, $\overrightarrow{v} = [v_1, v_2, v_3]$ v prostoru je reálné číslo $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$. Skalární součin dvou vektorů $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ zapisujeme jako $\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}$ nebo $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$. Místo $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}$ budeme psát $\overrightarrow{u}^2$. V rovině platí

$$\overrightarrow{u}^2 = u_1u_1 + u_2u_2 = u_1^2 + u_2^2$$

a podobně v prostoru je

$$\overrightarrow{u}^2 = u_1u_1 + u_2u_2 + u_3u_3 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2.$$

Platí tedy

$$\overrightarrow{u}^2 = |\overrightarrow{u}|^2.$$

Na závěr uvedeme jednu z nejdůležitějších aplikací skalárního součinu. Pro dva nenulové vektory $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$, v umístění $AB, AC$, se velikost konvexního úhlu $\sphericalangle BAC$ nazývá odchylka vektorů $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$. V případě, že přímky $AB, AC$ jsou navzájem kolmé, říkáme, že i vektory $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ jsou navzájem kolmé. V případě, že je alespoň jeden z vektorů nulový, odchylku nedefinujeme. Potom pro dva nenulové vektory $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ v rovině nebo v prostoru a jejich odchylku $\varphi$ platí:

$$\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \cos\varphi \colon \varphi \in \langle 0, \pi \rangle.$$

Tedy pro výpočet odchylky dvou nenulových vektorů $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ dostaneme

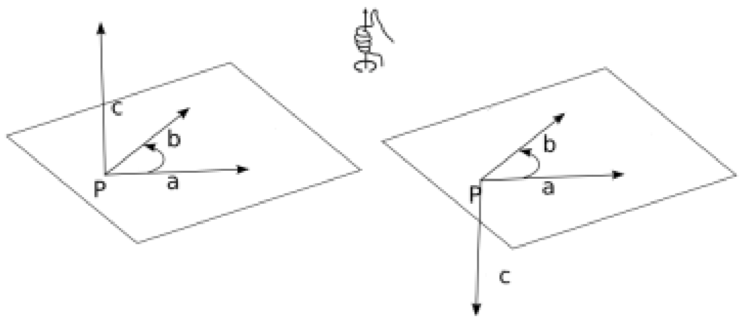
$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|} \colon \varphi \in \langle 0, \pi \rangle.$$

Tento vztah využijeme například při určování odchylek dvou přímek.

Pro libovolné dva vektory $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ v rovině nebo v prostoru platí, že $\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} = 0$ právě, když je alespoň jeden z nich nulový, nebo když jsou oba dva vektory nenulové a navzájem kolmé.

## Vektorový a smíšený součin vektorů

Další operací s vektory je vektorový součin. Víme, že výsledkem skalárního součinu dvou vektorů je reálné číslo, výsledkem vektorového součinu je vektor. Vektorový součin je definován pouze pro vektory v prostoru. Před jeho zavedením je potřeba vysvětlit dva nové pojmy.
Mějme tři libovolné vektory $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ v prostoru, které umístníme tak, aby jejich počáteční body byly totožné. Každá trojice vektorů v prostoru, jejichž umístění neleží v jedné rovině, je bází prostoru. Bázi prostoru určenou vektory $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ budeme označovat $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]$. Z uvedeného plyne, že ani jeden z vektorů báze nemůže být nulový.




Dalším pojmem, který si vysvětlíme, je pravotočivá nebo levotočivá báze. Když zvolíme takové umístění vektorů $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$, aby jejich počáteční bod byl stejný a položíme pravou ruku na pomyslnou rovinu určenou vektory $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ tak, aby pokrčené prsty ruky udávaly směr od vektoru $\overrightarrow{a}$ k vektoru $\overrightarrow{b}$, tak se zaměříme na palec. Když vztyčený palec směruje do stejného poloprostoru jako vektor $\overrightarrow{c}$, říkáme, že báze je pravotočivá. Pokud vztyčený palec ukazuje do opačného poloprostoru, nazveme bázi levotočivou. Situaci vidíme na obrázku.

Vektorový součin dvou vektorů, které leží na jedné přímce, je nulový vektor. Vektorový součin dvou vektorů $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$, které neleží na jedné přímce, je vektor $\overrightarrow{w}$, který má tyto vlastnosti:

- vektor $\overrightarrow{w}$ je kolmý na oba vektory $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$,
- vektory $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ tvoří pravotočivou bázi;
- $|\overrightarrow{w}| = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}| \cdot \sin\alpha$, kde $\alpha$ je odchylka vektorů $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$.

Vektorový součin $\overrightarrow{w}$ vektorů $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ značíme takto $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$. Poslední vlastnost má názornou geometrickou interpretaci. Obsah rovnoběžníka, který je určen vektory $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ se číselně rovná velikosti vektoru $\overrightarrow{w}$.
Pro souřadnice vektorového součinu $\overrightarrow{w}$ vektorů $\overrightarrow{u} = [u_1, u_2, u_3]$ a $\overrightarrow{v} = [v_1, v_2, v_3]$ platí:

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = [u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1].$$

Spojením vektorového a skaárního součinu dostaneme smíšený součin. Podobně jako vektorový součin je také smíšený součin definován pouze v prostoru. Smíšený součin vektorů $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ je číslo $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c}$.
Smíšený součin vektorů je reálné číslo, jehož absolutní hodnota je rovna objemu rovnoběžnostěnu, který vektory $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ určují, a to v případě, že je jejich umístění zvoleno tak, že mají společný počáteční bod.

### Parametrické vyjádření přímky v rovině

Víme, že každé dva různé body $A, B$ určují nějakou přímku. Když takovou přímku označíme jako $AB$, tak vektor $\overrightarrow{u} = B - A$ nazýváme směrový vektor přímky $AB$. Vzhledem k tomu, že na přímce $AB$ leží nekonečně mnoho bodů a kaž dý nenulový násobek směrového vektoru $\overrightarrow{u}$ je jejím směrovým vektorem, můžeme libovolný bod $X$ přímky $AB$ zapsat ve tvaru $X = A + t\overrightarrow{u} : t \in \mathbb{R}$. Rovnice

$$X = A + t\overrightarrow{u} : t \in \mathbb{R}$$

se nazývá parametrická rovnice, nebo také parametrické vyjádření přímky, která prochází bodem $A$ a vektor $\overrightarrow{u}$ je její směrový vektor. Proměnná $t$ se nazývá parametr.
Když máme zjistit, zda například bod $P = [1, 2]$ leží na přímce $X = [2, 3] + t[-1, 2] : t \in \mathbb{R}$, vyjádříme si rovnici přímky pomocí souřadnic:

$$\begin{aligned} x &= 2 - t, \\ y &= 3 + 2t, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

a dosadíme souřadnice bodu $P$ za $x$ a $y$. Dostaneme

$$\begin{aligned} 1 &= 2 - t, \\ 2 &= 3 + 2t, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Z první rovnice dostaneme pro parametr $t$, že $t = 1$ a ze druhé rovnice dostaneme, že $t = -\frac{1}{2}$. Vzhledem k tomu, že hodnota parametru $t$ vyšla různá, bod $P$ na dané přímce neleží.
Když v parametrickém vyjádření přímky

$$X = A + t\overrightarrow{u} : t \in \mathbb{R} \text{ a } \overrightarrow{u} = A - B$$

platí, že $t \in \langle 0, \infty)$, probíhá bod $X$ polopřímku $AB$. Pokud je $t \in \langle 0, 1\rangle$ probíhá bod $X$ úsečku $AB$. A pokud je $t \in (-\infty, 0\rangle$, probíhá bod $X$ polopřímku $BA$.
Pokud jsou dvě přímky zadané rovnicemi

$$X = P + t\overrightarrow{u} : t \in \mathbb{R} \text{ a } X = Q + s\overrightarrow{v} : s \in \mathbb{R},$$

tak jsou rovnoběžné právě tehdy, když vektor $\overrightarrow{u}$ je násobkem vektoru $\overrightarrow{v}$.

**Obecná rovnice přímky v rovině**

Přímka v rovině může být jednoznačně dána také jedním bodem a nenulovým vektorem, který je kolmý na směrový vektor přímky. Vektor kolmý na směrový vektor přímky se nazývá normálový vektor této přímky. Označíme ho $\overrightarrow{n_p}$.
Když má normálový vektor přímky $p$ souřadnice $\overrightarrow{n_p} = [a, b]$ a bod $P = [p_1, p_2]$ leží na přímce $p$, pak pro libovolný bod $X$ ležící na přímce $p$ platí

$$\overrightarrow{n_p} \cdot (X - P) = 0,$$

tedy skalární součin normálového vektoru $\overrightarrow{n_p}$ a libovolného směrového vektoru přímky $p$ je roven 0. Když do této rovnosti dosadíme souřadnice, dostaneme

$$[a, b] \cdot [x - p_1, y - p_2] = 0 \Rightarrow ax - ap_1 + by - bp_2 = 0 \Rightarrow ax + by - (ap_1 + bp_2) = 0.$$

Označíme-li $c = -(ap_1 + bp_2)$ dostaneme vztah

$$ax + by + c = 0.$$

To znamená, že ke každé přímce $p$ můžeme najít čísla $a, b, c$ tak, že bod $X = [x, y]$ leží na této přímce, je-li

$$ax + by + c = 0.$$

Z předchozího víme, že čísla $a, b$ jsou souřadnice normálového vektoru přímky a číslo $c$ je určeno vztahem $c = -(ap_1 + bp_2)$, kde $p_1$ a $p_2$ jsou souřadnice libovolného bodu přímky.
Dvě rovnice určují stejnou přímku, právě když je jedna z rovnic násobkem té druhé. Dvě přímky jsou rovnoběžné právě tehdy, je-li normálový vektor jedné z nich násobkem normálového vektoru té druhé.

## Směrnicový tvar rovnice přímky v rovině

Pokud je v obecné rovnici přímky $b \neq 0$, můžeme z této rovnice vyjádřit $y$. Například, když je obecná rovnice přímky $p$ následovní:

$$2x - 3y + 7 = 0$$

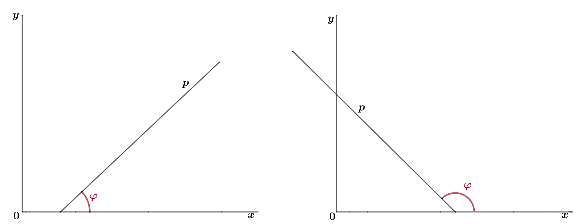
dostaneme

$$-3y = -2x - 7 \Rightarrow 3y = 2x + 7 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}.$$

Naopak, když v obecné rovnici přímky $p$ je $b = 0$, tak $y$ v obecné rovnici nevystupuje. Normálový vektor přímky $p$ má $y-$vou souřadnici nulovou, což znamená, že je rovnoběžný s osou $x$ a proto směrový vektor přímky $p$ je rovnoběžný s osou $y$.
Proto množina bodů $X = [x, y]$, jejichž souřadnice vyhovují rovnici

$$y = kx + q,$$

leží na přímce, která je různoběžná s osou $y$. Uvedená rovnice se nazývá směrnicový tvar rovnice přímky, číslo $k$ se nazývá směrnice přímky. Směrnice určuje sklon přímky a pro její přesný geometrický význam je klíčový úhel, který svírá přímka s kladnou poloosou $x$, vidíme to na obrázku:




Směrnice přímky je rovna tg$\varphi$, kde $\varphi$ je odchylka přímky od kladné poloosy $x$. Připomeňme, že odchylku $\varphi$ jsme definovali jako číslo z intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.
Dvě rovnoběžné přímky svírají stejný úhel s s kladnou poloosou $x$, proto mají stejnou směrnici. Přímka kolmá k přimce se směrnicí $k \neq 0$ má směrnici rovnou $k' = -\frac{1}{k}$.

## Přímky v prostoru

V této části se budeme věnovat přímkám v prostoru. Začneme jejich vyjádřením. Důležitá informace je, že obecná rovnice přímky v prostoru neexistuje. Parametrické vyjádření přímky v prostoru je zavedeno podobným způsobem jako v rovině.

Rovnice

$$X = A + t\overrightarrow{u} : t \in \mathbb{R}$$

se nazývá parametrická rovnice, nebo také parametrické vyjádření přímky, která prochází bodem $A$ a vektor $\overrightarrow{u}$ je její směrový vektor. Proměnná $t$ se nazývá parametr.

Vzhledem k tomu, že bodů a směrových vektorů pro vyjádření jedné přímky můžeme zvolit nekonečně mnoho, můžeme každou přímku vyjádřit nekonečně mnoha parametrickými rovnicemi.

Například, přímka $p$ s parametrickým vyjádřením $x = 2+t, y = 3-t, z = 1+2t \colon t \in \mathbb{R}$, prochází bodem $A = [2, 3, 1]$ a její směrový vektor je $\overrightarrow{u} = [1, -1, 2]$. Jejím směrovým vektorem je každý nenulový násobek vektoru $\overrightarrow{u}$, tedy její parametrické vyjádření může být také $x = 2 + 2s, y = 3 - 2s, z = 1 + 4s \colon s \in \mathbb{R}$.

Z parametrického vyjádření umíme určit další body, kterými přímka $p$ prochází. Například pro $t = 1$ dostaneme bod $B = [3, 2, 3]$, a proto další možné parametrické vyjádření je $x = 3 + r, y = 2 - r, z = 2 + 2r \colon r \in \mathbb{R}$.

**Roviny**

Rovina je jednoznačně dána dvěma různoběžnými přímkami. Přímky jsou v prostoru dány parametricky, tudíž svým směrovým vektorem a jedním ze svých bodů. Pro odvození parametrické rovnice roviny použijeme body $A, B, C$, které neleží na stejné přímce. Když si označíme $\overrightarrow{u} = B - A, \overrightarrow{v} = C - A$, tak rovnice

$$X = Y + s\overrightarrow{v} : s \in \mathbb{R} \text{ a } Y = A + t\overrightarrow{u} : t \in \mathbb{R},$$

popisují postupně přímky se směrovými vektory $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}$. Pokud každým bodem $Y$ přímky $AB$ budeme vést přímku rovnoběžnou s přímkou $AC$ vyplníme rovinu danou přímkami $AB$ a $AC$. Dosadíme-li z druhé rovnice předpis pro $Y$ do první rovnice, dostaneme

$$X = A + t\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v} : s, t \in \mathbb{R}.$$

Tuto rovnici nazýváme parametrické vyjádření roviny v prostoru. Vektory $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ jsou směrové vektory roviny.

Pokud pracujeme s rovinou (označme si ji $\rho$), tak častěji ji vyjadřujeme pomocí obecné rovnice. Podobně jako v případě přímky v rovině, také rovina je jednoznačně dána nějakým svým bodem a normálovým vektorem. Normálový vektor roviny $\rho$ je kolmý na všechny vektory ležící v této rovině.
Potom rovnice

$$ax + by + cz + d = 0$$

se nazývá obecná rovnice roviny.
Odvození této rovnice je podobné, jako odvození obecné rovnice přímky v rovině, a proto asi nikoho nepřekvapí, že normálový vektor má souřadnice $[a, b, c]$ a pro souřadnice libovolného bodu $P = [p_1, p_2, p_3]$ této roviny platí

$$d = -ap_1 - bp_2 = cp_3.$$

Příklad

**Příklad 1.**

*Napište rovnici přímky $p$, která prochází bodem $A = [2, 3]$ a je rovnoběžná s přímkou*

1. $y = 2$,
2. $x = 4$,
3. $2x + 3y = 4$,
4. $y = 3x + 2$.
5. $x = 2 - t, y = 1 + 2t, t \in \mathbb{R}$

**Řešení.** *Úlohu vyřešíme postupne:*

1. *Pro body, které leží na přímce $y = 2$ platí, že jejich $x-$ová souřadnice nabývá libovolné hodnoty z množiny $\mathbb{R}$, přičemž $y-$ová souřadnice svou hodnotu nemění a je pořád rovna 2. Body ležící na přímce rovnobežné s danou přímkou a procházející bodem $A = [2, 3]$ budou mít $y-$ovou souřadnici stejnou jako bod $A$ a $x-$ová souřadnice bude nabývat libovolné hodnoty z množiny $\mathbb{R}$. Proto hledaná přímka má rovnici $y = 3$.*
2. *Pro body, které leží na přímce $x = 4$ platí, že jejich $y-$ová souřadnice nabývá libovolné hodnoty z množiny $\mathbb{R}$, přičemž $x-$ová souřadnice svou hodnotu nemění a je pořád rovna 4. Body ležící na přímce rovnobežné s danou přímkou a procházející bodem $A = [2, 3]$ budou mít $x-$ovou souřadnici stejnou jako bod $A$ a $y-$ová souřadnice bude nabývat libovolné hodnoty z množiny $\mathbb{R}$. Proto hledaná přímka má rovnici $x = 2$.*
3. *Z obecné rovnice přímky $2x + 3y = 4$ umíme určit normálový vektor této přímky $\overrightarrow{n} = [2, 3]$. Dvě rovnoběžné přímky mají stejné normálové vektory, proto obecná rovnice hledané přímky má tvar:*
$$2x + 3y + c = 0,$$
*kde parametr $c$ určíme dosazením bodu $A$, protože na hledané přímce leží:*
$$2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + c = 0 \iff 13 + c = 0 \iff c = -13.$$
*Potom rovnice hledané přímky má tvar:*
$$2x + 3y - 13 = 0.$$
4. *Ze směrnicového tvaru rovnice $y = 3x + 2$ umíme určit směrnici $k = 3$. Dvě rovnoběžné přímky mají stejnou směrnici, proto směrnicový tvar rovnice hledané přímky je:*
$$y = 3x + q,$$
*kde parametr $q$ určíme dosazením bodu $A$, protože na hledané přímce leží:*
$$3 = 3 \cdot 2 + q \iff q = -3.$$
*Potom rovnice hledané přímky má tvar:*
$$y = 3x - 3.$$
5. *Z parametrického vyjádření přímky $x = 2 - t, y = 1 + 2t, t \in \mathbb{R}$ vidíme, že přímka prochází bodem $B = [2, 1]$ a její směrový vektor je $\overrightarrow{s} = [-1, 2]$. Dvě rovnoběžné přímky mají stejný směrový vektor a hledaná přímka prochází bodem $A$. Potom její parametrické vyjádření je*
$$x = 2 - t, y = 3 + 2t, t \in \mathbb{R}.$$

Příklad

**Příklad 2.** *Napište rovnici přímky $p$, která prochází bodem $A = [2,3]$ a je kolmá na přímku*

1. $y = 2$,
2. $x = 4$,
3. $2x + 3y = 4$,
4. $y = 3x + 2$.
5. $x = 2 - t, y = 1 + 2t, t \in \mathbb{R}$

**Řešení.** *Úlohu vyřešíme postupne:*

1. *Pro body, které leží na přímce $y = 2$ platí, že jejich $x-$ová souřadnice nabývá libovolné hodnoty z množiny $\mathbb{R}$, přičemž $y-$ová souřadnice svou hodnotu nemění a je pořád rovna 2. Body ležící na přímce kolmé na danou přímku a procházející bodem $A = [2,3]$ budou mít naopak $x-$ovou souřadnici stejnou jako bod $A$ a $y-$ová souřadnice bude nabývat libovolné hodnoty z množiny $\mathbb{R}$. Proto hledaná přímka má rovnici $x = 2$.*

2. *Pro body, které leží na přímce $x = 4$ platí, že jejich $y-$ová souřadnice nabývá libovolné hodnoty z množiny $\mathbb{R}$, přičemž $x-$ová souřadnice svou hodnotu nemění a je pořád rovna 4. Body ležící na přímce kolmé na danou přímku a procházející bodem $A = [2,3]$ budou mít naopak $y-$ovou souřadnici stejnou jako bod $A$ a $x-$ová souřadnice bude nabývat libovolné hodnoty z množiny $\mathbb{R}$. Proto hledaná přímka má rovnici $y = 3$.*

3. *Z obecné rovnice přímky $2x + 3y = 4$ umíme určit normálový vektor této přímky $\overrightarrow{n} = [2,3]$. Hledaná přímka je kolmá na danou přímku, proto normálový vektor dané přímky je jejím směrovým vektorem. Její normálový vektor je kupříkladu $[3,-2]$, proto obecná rovnice hledané přímky má tvar:*

$$3x - 2y + c = 0,$$

   *kde parametr $c$ určíme dosazením bodu $A$, protože na hledané přímce leží:*

$$3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + c = 0 \iff c = 0.$$

   *Potom rovnice hledané přímky má tvar:*

$$3x - 2y = 0.$$

4. *Ze směrnicového tvaru rovnice $y = 3x + 2$ umíme určit směrnici $k = 3$. Pro směrnici $k'$ kolmé přímky platí $k' = -\frac{1}{k}$. Proto směrnicový tvar rovnice hledané přímky je:*

$$y = -\frac{1}{3}x + q,$$

   *kde parametr $q$ určíme dosazením bodu $A$, protože na hledané přímce leží:*

$$3 = -\frac{1}{3} \cdot 2 + q \iff q = \frac{11}{3}.$$

   *Potom rovnice hledané přímky má tvar:*

$$y = 3x + \frac{11}{3}.$$

5. *Z parametrického vyjádření přímky $x = 2 - t, y = 1 + 2t, t \in \mathbb{R}$ vidíme, že přímka prochází bodem $B = [2,1]$ a její směrový vektor je $\overrightarrow{s} = [-1,2]$. Dvě kolmé přímky mají kolmé směrové vektory a hledaná přímka prochází bodem $A$. Kolmý vektor k vektoru $\overrightarrow{s} = [-1,2]$ je kupříkladu vektor $\overrightarrow{n} = [2,1]$. Potom parametrické vyjádření hledané přímky je*

$$x = 2 + 2t, y = 3 + t, t \in \mathbb{R}.$$

**Příklad**

**Příklad 3.** *Určete vzájemnou polohu přímek $p, q$, když $p$ je dána obecní rovnicí $3x - 3y = 9$ a $g$ je dána parametrickým vyjádřením $x = 2 + t, y = 1 + 2t, t \in \mathbb{R}$.*

**Řešení.** *Dvě přímky v rovině mohou být rovnoběžné totožné, rovnoběžné různé, nebo různoběžné. V prvním případu mají nekonečně mnoho společných bodů, ve druhém případu žádný společný bod a ve třetím případu jeden společný bod. Společné body obou přímek musí vyhovovat oběma rovnicím, proto jich nalezneme, když do obecné rovnice první přímky dosadíme postupně za $x$ a $y$ předpisy z parametrického vyjádření druhé rovnice:*

$$3(2 + t) - 3(1 + 2t) = 9,$$

*po úpravě*

$$6 + 3t - 3 - 6t = 9 \iff 3 - 3t = 9 \iff t = -2.$$

*Výsledek $t = -2$ znamená, že přímky mají jeden společný bod a jeho souřadnice jsou postupně:*

$$x = 2 + (-2) = 0, y = 1 + 2 \cdot (-2) = -3 \Rightarrow A = [0, 3].$$

*Pro kontrolu dosadíme souřadnice bodu $A$ také do rovnice přímky $p$:*

$$3 \cdot (0) - 3 \cdot (-3) = 9.$$

*Vzhledem k tomu, že přímky mají společný jeden bod, jsou různoběžné.*

Příklad

**Příklad 4.** *Určete vzájemnou polohu přímky $p$ a roviny $\rho$, když $p$ je dána parametrickým vyjádřením $x = 2+t, y = 1+2t, z = 2-t\colon t \in \mathbb{R}$ a $\rho$ má rovnici $2x-3y+z-1=0$.*

**Řešení.** *Přímka může v rovině ležet, přímka a rovina mohou být rovnoběžné, nebo různoběžné. V prvním případu nemají žádný společný bod, ve druhém případu mají nekonečně mnoho společných bodů, a ve třetím případu jeden společný bod. Společné body přímky a roviny musí vyhovovat oběma rovnicím, proto jich nalezneme, když do obecné rovnice roviny dosadíme postupně za $x, y$ a $z$ předpisy z parametrického vyjádření přímky:*

$$2(2+t) - 3(1+2t) + 1\cdot(2-t) - 1 = 0,$$

*po úpravě*

$$4 + 2t - 3 - 6t + 2 - t - 1 = 0 \iff 2 - 5t = 0 \iff t = \frac{2}{5}.$$

*Výsledek $t = \frac{2}{5}$ znamená, že přímka a rovina mají jeden společný bod a jeho souřadnice jsou postupně:*

$$x = 2 + \frac{2}{5} = \frac{12}{5}, y = 1 + 2\cdot\frac{2}{5} = \frac{9}{5}, z = 2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5} \Rightarrow A = \left[\frac{12}{5}, \frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right].$$

*Pro kontrolu dosadíme souřadnice bodu $A$ také do rovnice roviny:*

$$2\cdot\frac{12}{5} - 3\cdot\frac{9}{5} + \frac{8}{5} - 1 = 0.$$

*Vzhledem k tomu, že přímka a rovina mají společný jeden bod, jsou různoběžné.*

Příklad

**Příklad 5.** *Na přímce* $p: x = 5 + 2t, y = -4 - t, z = 3 + t, t \in \mathbb{R}$, *najděte bod* $A$, *který je nejblíže k bodu* $B = [3, 1, 0]$. *Určete vzdálenost těchto bodů.*

**Řešení.** *Směrový vektor přímky* $p$ *je* $[2, -1, 1]$. *Hledaný bod* $A$ *na přímce leží, proto* $A = [5 + 2t, -4 - t, 3 + t]$ *pro nějaké* $t \in \mathbb{R}$. *Bod* $B$ *na přímce* $p$ *neleží, protože neexistuje* $t \in \mathbb{R}$ *pro které by současně platilo:*

$$(3 = 5 + 2t) \quad \wedge \quad (1 = -4 - t) \quad \wedge \quad (0 = 3 + t).$$

*Vzhledem k tomu, že bod* $A$ *má být nejblíže k bodu* $B$, *musí být přímka* $AB$ *kolmá na přímku* $p$. *Proto skalární součin jejich směrových vektorů musí být roven nule. Směrový vektor přímky* $AB$ *je* $[-2 - 2t, 5 + t, -3 - t]$. *Proto*

$$[-2 - 2t, 5 + t, -3 - t] \cdot [2, -1, 1] = 0,$$

*potom*

$$2 \cdot (-2 - 2t) + (-1) \cdot (5 + t) + 1 \cdot (-3 - t) = 0 \iff t = -2.$$

*Pro souřadnice bodu* $A$ *platí* $A = [5 + (-2) \cdot 2, -4 - (-2), 3 + (-2)] = [1, -2, 1]$. *Vzdálenost bodu* $A$ *od bodu* $B$ *je*

$$|AB| = \sqrt{(3 - 1)^2 + (1 - (-1))^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3.$$

Příklad

**Příklad 6.** *Určete odchylku přímek* $p, q$*, kde* $p: x = 1 + t, y = 1 + t, z = 1; t \in \mathbb{R}$ *a* $q: x = 2s, y = 3 + 9s, z = -1 + 6s; s \in \mathbb{R}$.

**Řešení.** *Pro určení úhlu přímek zjistíme jejich směrové vektory a následně jejich úhel. Zřejmě směrové vektory jsou* $\overrightarrow{s_p} = [1, 1, 0]$ *a* $\overrightarrow{s_q} = [2, 9, 6]$. *Pro jejich odchylku platí*

$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{s_p} \cdot \overrightarrow{s_q}}{|\overrightarrow{s_p}| \cdot |\overrightarrow{s_q}|}.$$

*Po dosazení*

$$\cos \varphi = \frac{[1, 1, 0] \cdot [2, 9, 6]}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{2^2 + 9^2 + 6^2}} = \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot 9 + 0 \cdot 6}{11 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

*Odchylka přímek je* $\frac{\pi}{4}$*, což je* $45°$.

Příklad

**Příklad 7.** *Určete vzájomnou polohu rovin $\alpha, \beta$, když $\alpha\colon x - 2y + 4z = 3, \beta\colon 3x - y + 3z = 1$.*

**Řešení.** *Roviny mohou být rovnoběžné různé, rovneběžné totožné, nebo různoběžné. Koeficienty obecné rovnice roviny jsou postupně souřadnice vektoru kolmého na danou rovinu. Kolmé vektory $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ na rovnobežné roviny jsou rovnoběžné, proto existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $\overrightarrow{v_1} = c \cdot \overrightarrow{v_2}$. V našem případě je $\overrightarrow{v_\alpha} = [1, -2, 4], \overrightarrow{v_\beta} = [3, -1, 3]$. Evidentně tyto dva vektory nejsou rovnoběžné, proto ani roviny $\alpha, \beta$ nejsou rovnoběžné. Jsou tedy různoběžné a jejich společné body jsou řešením soustavy rovnic:*

$$x - 2y + 4z = 3$$
$$3x - y + 3z = 1.$$

*Eliminujeme jednu neznámou, např. $y$. Proto druhou rovnici vynásobíme číslem $-2$, přičteme k první rovnici a dostaneme:*

$$-2x - 2z = 1.$$

*Naše soustava má jenom dvě rovnice a tři neznámé, proto řešení bude parametrické. Zvolíme za parametr proměnnou $z$. Potom $z = t$ a $x = -t - \frac{1}{2}$. Dosadíme do první rovnice a vyjádříme neznámou $y$. Potom*

$$\left(-t - \frac{1}{2}\right) - 2y + 4t = 3 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}t + \frac{7}{4}.$$

*Řešením je množina $\left\{\left[-t - \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}t + \frac{7}{4}, t\right] : t \in \mathbb{R}\right\}$, co je parametrické vyjádření přímky.*

Příklad

**Příklad 8.** *Napište rovnici osy úsečky $AB$, kde $A = [2, 1]$, $B = [4, 7]$.*

**Řešení.** *Osa úsečky je na danou úsečku kolmá a prochází jejim středem. Nejprve najdeme střed úsečky $AB$, což je bod $S = \left[\frac{2+4}{2}, \frac{1+7}{2}\right] = [3, 4]$. Určíme souřadnice vektoru $AB = B - A = [2, 6]$. Vektor kolmý na vektor $AB$ má souřadnice $[6, -2]$. Proto např. parametrické vyjádření osy úsečky je $x = 3 + 6t, y = 4 - 2t\colon t \in \mathbb{R}$. Obecná rovnice má tvar $2x + 6y + c = 0$, protože vektor $AB$ je kolmý na tuto osu. Po dosazení středu dostaneme $2.3 + 6.4 + c = 0$, z čeho je $c = -30$, potom obecná rovnice je $2x + 6y - 30 = 0$, resp. $x + 3y - 15 = 0$.*

Příklad

**Příklad 9.** *Určete parametr* $c \in \mathbb{R}$ *tak, aby vektory* $\overrightarrow{a} = [-2, 3, c]$, $\overrightarrow{b} = [5, c, -8]$ *byly na sebe kolmé.*

**Řešení.** *Vektory jsou kolmé, když je jejich skalární součin roven nule. Proto*

$$[-2, 3, c].[5, c, -8] = 0 \iff (-2) \cdot 5 + 3c - 8c = 0 \iff -10 - 5c = 0 \iff c = -1.$$

*Vektory* $\overrightarrow{a} = [-2, 3, c]$, $\overrightarrow{b} = [5, c, -8]$ *jsou na sebe kolmé pro* $c = -1$.

# 1 Test

1. Přímka procházející bodem $A = [1, 1]$ a bodem $B = [2, 4]$ má rovnici
   (a) $3x + y - 2 = 0$
   (b) $3x - y - 2 = 0$
   (c) $3x - y + 2 = 0$
   (d) $-3x - y - 2 = 0$
2. Rovnice přímky $p$, která prochází bodem $A = [2, 3]$ a je rovnoběžná s přímkou $p : y = 7$, má tvar
   (a) $x = 3$
   (b) $y = 2$
   (c) $x = 2$
   (d) $y = 3$
3. Rovnice přímky $p$, která prochází bodem $A = [2, 3]$ a je rovnoběžná s přímkou $p : 2x + 3y = 6$, má tvar
   (a) $2x + 3y - 13 = 0$
   (b) $2x - 3y - 13 = 0$
   (c) $2x + 3y + 13 = 0$
   (d) $-2x + 3y + 13 = 0$
4. Rovnice přímky $p$, která prochází bodem $A = [2, 3]$ a je kolmá na přímku $p : y = 2x - 7$, má tvar
   (a) $y = \frac{1}{2}x + 4$
   (b) $y = -\frac{1}{2}x + 4$
   (c) $y = \frac{1}{2}x - 4$
   (d) $y = 2x - 4$
5. Přímky $p : x - 2y = 7, q : 2x + y = 5$ jsou
   (a) totožné
   (b) rovnoběžné
   (c) mimoběžné
   (d) kolmé
6. Přímky $p : x - 2y = 7, q : 2x - y = 5$ mají společné
   (a) body $A = \left[\frac{17}{5}, -\frac{9}{5}\right], B = [0, 0]$
   (b) bod $A = \left[\frac{17}{5}, -\frac{9}{5}\right]$
   (c) žádné body
   (d) body $A = \left[-\frac{17}{5}, -\frac{9}{5}\right], B = [0, 1]$

7. Odchylka přímek $p, q$, kde $p : x = 1 + t, y = 1 - t, z = 2; t \in \mathbb{R}$ a $q : x = 5, y = 3 - s, z = 6 + s; s \in \mathbb{R}$ je

   (a) $45°$
   (b) $90°$
   (c) $60°$
   (d) $15°$

8. Na přímce $p : x = 5 - 2t, y = -4 - 2t, z = 3 - t, t \in \mathbb{R}$, najděte bod $A$, který je nejblíže k bodu $B = [3, 2, 4]$.

   (a) $A = [7, -2, 4]$
   (b) $A = [1, 2, 4]$
   (c) $A = [3, -6, 2]$
   (d) $A = [-7, 2, -4]$

9. Rovnice těžnice vedené z bodu $A$ v trojúhelníku $ABC$, kde $A = [0, 3], B = [3, 1], C = [1, 0]$, má tvar:

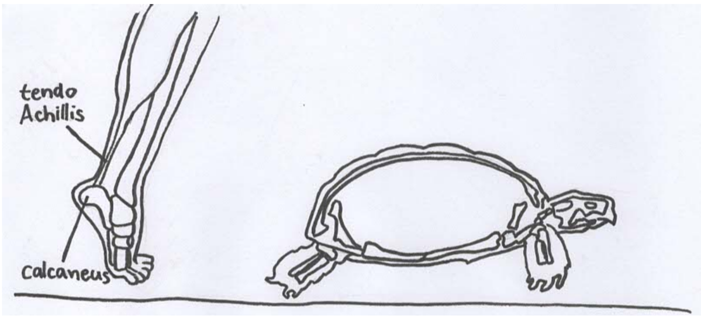
   (a) $5x - 4y - 9 = 0$
   (b) $5x + 4y - 12 = 0$
   (c) $5x + 4y + 12 = 0$
   (d) $4x + 5y - 12 = 0$

10. Vektory $\overrightarrow{a} = [-1, 4, c]$, $\overrightarrow{b} = [2, c, -1]$ jsou na sebe kolmé pro parametr $c \in \mathbb{R}$, který je

   (a) $c = \frac{2}{3}$
   (b) $c = \frac{3}{2}$
   (c) $c = -\frac{2}{3}$
   (d) takové $c \in \mathbb{R}$ neexistuje

# 9. Posloupnosti a řady

**Posloupnosti a řady**



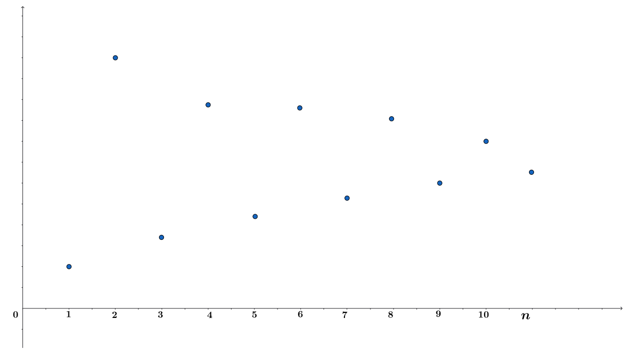

Achilles a želva je známý paradox, který, pokud přistoupíme na jistý způsob uvažování, demonstruje, že Achilles nikdy nemůže dohonit želvu, protože pokaždé, když doběhne na místo, kde želva byla, ona je už o kus dál. Tento problém lze popsat nekonečnou řadou stále kratších vzdáleností, např.

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots + .$$

Součet této řady je ale konečný, což bylo v rozporu s dobovým přesvědčením, že součet nekonečné řady je vždy nekonečný. V této části se budeme věnovat nekonečným posloupnostem a řadám.

**Posloupnosti**

Posloupnost je zobrazení, jehož definičním oborem $D$ je buď množina všech přirozených čísel, nebo nějaká její neprázdná podmnožina. Pokud je definiční obor posloupnosti konečná množina, pak se posloupnost nazývá konečná. Pokud je definiční obor posloupnosti nekonečná množina, pak se posloupnost nazývá nekonečná. Obvykle prvky z definičního oboru posloupnosti označujeme $n$ (případně $k, l, i, \cdots$). Funkční hodnoty posloupnosti označujeme $a_n$ (případně $b_n, a_k, \cdots$) a nazýváme je členy posloupnosti.
Nekonečné posloupnosti můžeme zadat vztahem pro výpočet $n-$tého členu posloupnosti, což zapisujeme ve tvaru $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, přičemž místo $a_n$ píšeme vzťah, např. $(2n-6)_{n=1}^{\infty}$. Toto chápeme tak, že $a_1 = 2\cdot 1 - 6 = -4, a_2 = 2\cdot 2 - 6 = -2, \ldots, a_n = 2\cdot n - 6, \ldots$. Posloupnosti mohou být zadány také rekurentním vzťahem, což znamená, že známe hodnoty pro prvních $k$ členů a vztah pro $(k+1)-$vní člen posloupnosti pomocí předchozích $k$ členů. Např. je známa Fibonacciho posloupnost, kde $a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$.
Posloupnost může být zadána také grafem:



Příklad

**Příklad 1.** *Určete prvních pět členů posloupnosti* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, *kde* $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n^2}{n+1}$.

**Řešení.** *Jednotlivé členy posloupnosti určíme tak, že postupně dosadíme do předpisu* $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n^2}{n+1}$ *za* $n$ *přirozené čísla* $1, 2, 3, 4, 5$. *Je-li* $n = 1$, *pak*

$$a_1 = (-1)^1 \cdot \frac{1^2}{1+1} = -\frac{1}{2}.$$

*Analogicky určíme zbylé členy:*

$$\begin{aligned} a_2 &= (-1)^2 \cdot \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}, \\ a_3 &= (-1)^3 \cdot \frac{3^2}{3+1} = -\frac{9}{4}, \\ a_4 &= (-1)^4 \cdot \frac{4^2}{4+1} = \frac{16}{5}, \\ a_5 &= (-1)^5 \cdot \frac{5^2}{5+1} = -\frac{25}{6}. \end{aligned}$$

## Vlastnosti posloupností

Vzhledem k tomu, že posloupnosti jsou speciální typ funkce, jsou vlastnosti posloupností podobné jako u funkcí. Totéž platí pro jejich definice. Zejména nás bude zajímat monotónnost dané posloupnosti:

Posloupnost $(a_n)$ se nazývá rostoucí, když
$$\forall n, m \in D\colon n < m \Rightarrow a_n < a_m.$$

Posloupnost $(a_n)$ se nazývá klesající, když
$$\forall n, m \in D\colon n < m \Rightarrow a_n > a_m.$$

Posloupnost $(a_n)$ se nazývá nerostoucí, když
$$\forall n, m \in D\colon n < m \Rightarrow a_n \geq a_m.$$

Posloupnost $(a_n)$ se nazývá neklesající, když
$$\forall n, m \in D\colon n < m \Rightarrow a_n \leq a_m.$$

**Poznámka 2.** *Pro zjišťování, zda je posloupnost rostoucí, je vhodnější následující tvrzení, které sice vyslovíme pro nekonečné posloupnosti, ale které lze jemnou modifikací upravit také pro posloupnosti konečné:*

*Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí, když*
$$\forall n \in \mathbb{N}\colon a_n < a_{n+1}.$$

*Podobné tvrzení platí i pro zbylé typy monotónnosti:*

*Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je klesající, když*
$$\forall n \in \mathbb{N}\colon a_n > a_{n+1}.$$

*Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí, když*
$$\forall n \in \mathbb{N}\colon a_n \geq a_{n+1}.$$

*Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je neklesající, když*
$$\forall n \in \mathbb{N}\colon a_n \leq a_{n+1}.$$

Ohraničenost u posloupností je také podobná ohraničenosti u funkcí.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se je shora ohraničená, když
$$\exists h \in \mathbb{R} \forall n \in D\colon a_n \leq h.$$

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se je zdola ohraničená, když
$$\exists d \in \mathbb{R} \forall n \in D\colon a_n \geq h.$$

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se je ohraničená, když
$$\exists h, d \in \mathbb{R} \forall n \in D\colon d \leq a_n \leq h.$$

Příklad

**Příklad 3.** *Určete prvních pět členů posloupnosti* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, *kde* $a_n = \frac{n-2}{n+1}$ *a zjistěte zda je posloupnost rostoucí, nebo klesající a zda je ohraničená.*

**Řešení.** *Prvních pět členů určíme podobně jako v předchozím příkladu:*

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1-2}{1+1} = -\frac{1}{2}, \\ a_2 &= \frac{2-2}{2+1} = 0, \\ a_3 &= \frac{3-2}{3+1} = \frac{1}{4}, \\ a_4 &= \frac{4-2}{4+1} = \frac{2}{5}, \\ a_5 &= \frac{5-2}{5+1} = \frac{3}{6}. \end{aligned}$$

*Těchto pět členů nám pomůže zorientovat se a vybrat se správným směrem. V předpisu posloupnosti vidíme, že kromě prvních dvou členů budou členy posloupnosti nezáporné. Vzhledem k prvním dvěma členům můžeme psát, že* $a_n \geq -\frac{1}{2}$ *pro libovolné* $n \in \mathbb{N}$. *To znamená, že posloupnost je zdola ohraničená číslem* $-\frac{1}{2}$. *Předpis pro* $n-$*tý člen můžeme upravit následovně:*

$$a_n = \frac{n-2}{n+1} = \frac{n+1-3}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} - \frac{3}{n+1} = 1 - \frac{3}{n+1}.$$

*Evidentně platí, že* $a_n < 1$ *pro libovolné* $n \in \mathbb{N}$. *To znamená, že posloupnost je shora ohraničená íslem* 1. *Proto je posloupnost ohraničená.*
*Dále pro prvních pět členů platí:*

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5.$$

*Z toho plyne, že posloupnost nemůže být klesající. Pomocí poznámky* **??** *ověříme zda je posloupnost rostoucí. To znamená, že zjistíme zda pro libovolné* $n \in \mathbb{N}$ *je* $a_n < a_{n+1}:$

$$a_n < a_{n+1} \iff \frac{n-2}{n+1} < \frac{(n+1)-2}{(n+1)+1} \iff \frac{n-2}{n+1} < \frac{n-1}{n+2}.$$

*Poslední nerovnost anulujeme a upravíme:*

$$\begin{aligned} \frac{n-2}{n+1} &< \frac{n-1}{n+2}, \\ \frac{n-2}{n+1} - \frac{n-1}{n+2} &< 0, \\ \frac{(n+2)\cdot(n-2)-(n+1)\cdot(n-1)}{(n+1)\cdot(n+2)} &< 0, \\ \frac{n^2-4-n^2+1}{(n+1)\cdot(n+2)} &< 0, \\ \frac{-3}{(n+1)\cdot(n+2)} &< 0. \end{aligned}$$

*Poslední nerovnost je pravdivá, protože výraz na levé straně je pro každé přirozené číslo n záporný. Jeho čitatel je záporný a ve jmenovateli je součin přirozených čísel. Z uvedeného plyne, že posloupnost je rostoucí.*

## Aritmetická posloupnost

Nejprve se budeme věnovat speciálnímu typu posloupnosti, kde rozdíl dvou po sobě jdoucích členů je konstantní. Taková posloupnost se nazývá aritmetická, přičemž rozdíl po sobě jdoucích členů se nazývá diference. Tedy posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá aritmetická právě tehdy, když

$$\exists d \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} \colon a_{n+1} = a_n + d.$$

Díky konstantnímu rozdílu, můžeme $n-$tý člen aritmetické posloupnosti zapsat pomocí prvního členu a diference takto:

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

Vzhledem k hezkým vlastnostem aritmetické posloupnosti můžeme vyjádřit součet prvních $n$ členů takto:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)\,.$$

Příklad

**Příklad 4.** *O aritmetické posloupnosti víme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n-1} = 35, a_{n+1} = 43$. Určete $a_n$ a diferenci $d$.*

**Řešení.** *Víme, že pro členy a diferenci aritmetické posloupnosti platí:*

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d,$$
$$a_n - a_{n-1} = d.$$

*Potom*

$$a_{n-1} = a_1 + (n-2) \cdot d,$$
$$a_{n+1} = a_1 + n \cdot d.$$

*Když sečteme členy $a_{n-1}, a_{n+1}$ dostaneme:*

$$a_{n-1} + a_{n+1} = a_1 + (n-2) \cdot d + a_1 + n \cdot d = 2a_1 + 2nd - 2d = 2 \cdot (a_1 + (n-1) \cdot d) = 2a_n.$$

*Tedy*

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2},$$

*což znamená, že v každé aritmetické posloupnosti je člen $a_n$ aritmetickým průměrem jeho předchozího a následujícího členu. Proto, když je $a_{n-1} = 35, a_{n+1} = 43$, tak $a_n = 39$ a diference je $d = 4$.*

## Geometrická posloupnost

Daším speciálním typem posloupností je geometrická posloupnost, u které je podíl dvou po sobě jdoucích členů konstantní. Tedy platí

$$\exists q \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} \colon a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Číslo $q$ se nazývá kvocient geometrické posloupnosti.
Díky konstantnímu podílu, můžeme $n-$tý člen geometrické posloupnosti zapsat pomocí prvního členu a kvocientu takto:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Vzhledem k hezkým vlastnostem geometrické posloupnosti můžeme vyjádřit součet prvních $n$ členů jako:

$$s_n = n \cdot a_1, \text{ pro } q = 1,$$
$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \text{ pro } q \neq 1.$$

Příklad

**Příklad 5.** *O geometrické posloupnosti víme, že* $a_1 = 3, q = -\frac{1}{2}$. *Vypište prvních pět členů této posloupnosti a určete součet jejich prvních* 10 *členů.*

**Řešení.** *Víme, že pro členy geometrické posloupnosti platí:*

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

*Potom*

$$a_2 = a_1 \cdot q = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2},$$

$$a_3 = a_1 \cdot q^2 = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4},$$

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{3}{8},$$

$$a_5 = a_1 \cdot q^4 = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{16}.$$

*Vzhledem k tomu, že* $q \neq 1$, *pro výpočet součtu prvních* 10 *čenů využijeme vztah:*

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

*proto*

$$s_{10} = 3 \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{10} - 1}{-\frac{1}{2} - 1} = 3 \cdot \frac{\frac{1}{1024} - 1}{-\frac{3}{2}} = 3 \cdot \frac{-\frac{1023}{1024}}{-\frac{3}{2}} = \frac{1023}{512}.$$

## Vlastní limita

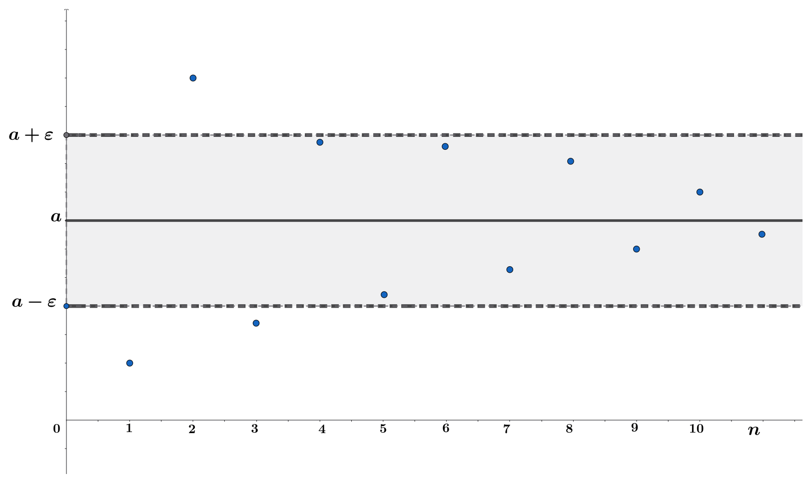
Reálné číslo $a$ nazýváme vlastní limita posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0; \quad n > n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon.$$

Tento fakt zapisujeme následovně

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a.$$

Když má posloupnost vlastní limitu, nazýváme ji konvergentní. V opačném případě se posloupnost nazývá divergentní.
*Jak tuto definici správně pochopit? S odpovědí nám pomůže následující obrázek.*




Na obrázku vidíme jenom malou část posloupnosti, je potřeba si představit, že všechny další členy posloupnosti, ležící vpravo, jsou v nekonečném $\varepsilon-$vyšrafovaném pásu. Vidíme, že všechny členy posloupnosti napravo od $a_3$ mají hodnotu, která se od čísla $a$ liší o méně než $\varepsilon$ (leží uvnitř pásu). Vzdálenost obvykle vyjádřujeme pomocí absolutní hodnoty. Tedy ke kladnému $\varepsilon$ umíme najít $n_0 = 3$ tak, aby pro všechna $n > 3$ bylo $|a - a_n| < \varepsilon$. Jestliže $\varepsilon$ zmenšíme, posune se $n_0$ doprava. Pokud při libovolném zmenšení $\varepsilon$ umíme najít $n_0$ tak, aby všechny následující členy měly od $a$ menší vzdálenost jako $\varepsilon$, tedy budou v příslušném $\varepsilon-$pásu, posloupnost bude konvergovat k číslu $a$.

Z uvedeného plyne, že každá posloupnost má nejvýše jednu limitu. Pojem limity úzce souvisí s ohraničeností a to takto:
Každá konvergentní posloupnost je ohraničená. A pokud je ohraničená posloupnost monotónní, tak je konvergentní.

**Nevlastní limita**

Nechť ke každému reálnému číslu $K$ existuje $n_0$ tak, že pro každé $n > n_0$ je $a_n > K$. Potom říkáme, že posloupnost má nevlastní limitu $+\infty$. Tuto skutečnost zapisujeme to následovně:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

Tuto definici chápeme tak, že pro libovolně velké reálné číslo $K$ umíme najít $n_0$ tak, že všechny členy posloupnosti, které jsou od $a_{n_0}$ napravo, jsou větší než číslo $K$.
Analogicky to funguje v případu, když je limita posloupnosti rovna $-\infty$:
Nechť ke každému reálnému číslu $L$ existuje $n_0$ tak, že pro každé $n > n_0$ je $a_n < L$. Potom říkáme, že posloupnost má nevlastní limitu $-\infty$, což zapisujeme následovně:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Závěrem ůžeme říci, že když posloupnost limitu nemá, nebo má limitu nevlastní, nekonverguje, ale diverguje.

Příklad

**Příklad 6.** *Dokažte, že posloupnost* $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ *konverguje k číslu* 1.

**Řešení.** *Potřebujeme dokázat, že pro libovolné kladné reálné číslo* $\varepsilon$ *jsme schopni najít takové přirozené číslo* $n_0$*, aby pro každé přirozené číslo* $n > n_0$ *platila nerovnost:*

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon.$$

*Po úpravách (úprava na společného jmenovatele a odstranění absolutní hodnoty) dostaneme*

$$\left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

*Vzhledem k tomu, že* $\varepsilon$*, a také* $n+1$ *jsou kladná čísla, můžeme předchozí nerovnost upravit takto:*

$$\frac{1}{\varepsilon} < n+1,$$

*tedy*

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

*Jestliže* $\frac{1}{\varepsilon} - 1 \geq 1$*, pak za* $n_0$ *stačí vzít nejbližší menší nebo rovné přirozené číslo. Jestliže je* $\frac{1}{\varepsilon} - 1 < 1$*, pak* $n_0 = 1$*. Tedy, když je např.* $\varepsilon = \frac{1}{100}$*, pak* $\frac{1}{\varepsilon} - 1 = 99 \in \mathbb{N}$*. Proto* $n_0 = 99$.
*Možná si kladete otázku, jak jsme zjistili, že tato posloupnost konverguje právě k číslu* 1*. Vypište si několik členů této posloupnosti a zjistíte, že s rostoucím* $n$ *se hodnoty blíží k číslu* 1 *stále více.*

## Vlastnosti limit

Zřejmě by bylo náročné každou limitu určovat tak, jako v předchozím příkladu. Proto si uvedeme vlastnosti limit, které nám jejich počítání usnadní:

Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b$. Potom

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.
2. $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$.
3. Jestliže $b \neq 0$, tak $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.
4. $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.
5. Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, a $(b_n)$ je ohraničená posloupnost. Potom $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

Pro nevlastní limity máme následující vlastnosti:

1. Když $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty \quad \wedge \quad a_n \neq 0 \;\; \forall n \in N$, potom $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.
2. Když $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$ a téměř všechna* $a_n$ jsou kladná, potom $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.
3. Když $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$ a téměř všechna* $a_n$ jsou záporná, potom $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

* Když se uvádí, že nějaké tvrzení platí pro téměř všechna $a_n$, znamená to, že platnost tvrzení je porušena jen pro konečný počet členů posloupnosti.

Na závěr uvádíme ještě limity dvou často se vyskytujících posloupností:

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0$.
2. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Posloupnost $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ je významná, neboť vystupuje při tzv. složeném úrokování.

Příklad

**Příklad 7.** *Vypočítejte:* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3-5n^2-2n^4}{3-2n^5}$.

**Řešení.** *V čitateli a také ve jmenovateli máme polynom. V takových případech je postup jednoduchý. Nejdřve v čitateli a také ve jmenovateli vytkneme před závorku* $n^k$, *kde* $k$ *je nejvyšší exponent, který se v daném výraze nachází. V našem případě je to* $n^5$ :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3-5n^2-2n^4}{3-2n^5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5\left(\frac{3}{n^5}-\frac{5}{n^3}-\frac{2}{n}\right)}{n^5\left(\frac{3}{n^5}-2\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n^5}-\frac{5}{n^3}-\frac{2}{n}}{\frac{3}{n^5}-2}.$$

*Víme, že posloupnosti typu* $\left(\frac{1}{n^r}\right)_{n=1}^{\infty} : r > 0$, *konvergují k číslu* $0$ *a z vlastností limit víme, že když mají posloupnosti vlastní limity, tak jejich součet (rozdíl, podíl) konverguje k součtu (rozdílu, podílu) těchto limit a proto je*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n^5}-\frac{5}{n^3}-\frac{2}{n}}{\frac{3}{n^5}-2} = \frac{0-0-0}{0-2} = \frac{0}{2} = 0.$$

Příklad

**Příklad 8.** *Vypočítejte:* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n-1}{3n^2-2n+1}$.

**Řešení.** *Postupujeme podobně jako v předchozí úloze:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n-1}{3n^2-2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{2+0-0}{3-0+0} = \frac{2}{3}.$$

Příklad

**Příklad 9.** *Vypočítejte:* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3+1}{3n^2+n}$.

**Řešení.** *Také v tomto případě postupujeme podobně jako v předchozích úlohách:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+1}{3n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(2+\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n^3}}{\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}.$$

*Všimneme si převrácené hodnoty posledního výrazu. Zřejmě*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{2+\frac{1}{n^3}}{\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{0+0}{2+0} = 0.$$

*Vzhledem k tomu, že všechny členy posloupnosti jsou kladné, z vlastností limit plyne, že původní posloupnost diverguje do* $+\infty$. *Proto*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n^3}}{\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}} = +\infty.$$

Příklad

**Příklad 10.** *Vypočítejte:* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^5$.

**Řešení.** *Výraz v závorce upravíme a následně pečlivě umocníme:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^5=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\cdot 1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^5=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^5=(1)^5\cdot\left(\frac{1}{1+0}\right)^5=1.$$

Příklad

**Příklad 11.** *Vypočítejte:* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}$.

**Řešení.** *Tato úloha je komplikovanější než předchozí, protože v exponentu máme výraz* $(n+5)$*. Předpis posloupnosti sa budeme snažit upravit tak, abychom mohli využit toho, že* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5}=e.(1+0)^5=e.$$

*Porovnejte si tento postup s postupem v předchozím příkladu.*

Příklad

**Příklad 12.** *Vypočítejte:* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$.

**Řešení.** *V této úloze budeme postupovat podobně, jako v předchozí úloze, jenom je důležité správně umocnit.*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{3}.$$

*Vzhledem k tomu, že* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$, *dostaneme:*

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{3}=e^{3}.$$

Příklad

**Příklad 13.** *Vypočítejte:* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{5n}\right)^n$.

**Řešení.** *Předpis posloupnosti budeme upravovat stejně jako v předchozích úlohách. Využijeme toho, že* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{5n}\right)^{5n} = e$. *Proto*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{5n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{5n}\right]^{\frac{1}{5}} = e^{\frac{1}{5}}.$$

Příklad

**Příklad 14.** *Vypočítejte:* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

**Řešení.** *Také v této úloze využijeme, že* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. *Předpis posloupnosti upravíme náasledovně:*

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n}} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}.$$

*Tuto úpravu využijeme a dostaneme:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

## Nekonečné řady

S pojmem posloupnost je spojen pojem řada. Řadu dostaneme sečtením prvků posloupnosti. Pokud je posloupnost konečná, vznikne konečná řada, pokud je posloupnost nekonečná, vznikne sečtením jejích členů nekonečná řada. Tedy, když je dána posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{k}$, výraz tvaru

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$$

se nazývá konečná řada.
Pokud je dána posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, výraz tvaru

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

se nazývá nekonečná řada. Členy posloupnosti, které sčítáme, se nazývají členy řady.
Vzhledem k tomu, že řada je definovaná jako součet, bude nás zajímat zejmnéna to, zda danou řadu lze nebo nelze sečíst, a pokud ano, jaký je její součet.
Pokud existuje reálné číslo, které je součtem řady, tuto řadu nazýváme konvergentní. V opačném případě se řada nazývá divergentní.
Pojem konvergence a divergence známe již z limit a zde se vyskytuje zcela oprávněně, protože součet řady souvisí s posloupností tzv. částečných součtů. Máme-li posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, vytvoříme posloupnost částečných součtů, kde $s_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k$. Tedy

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1,\\
s_2 &= a_1 + a_2,\\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3,\\
&\ldots\\
s_k &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k,\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Řada je tedy konvergentní právě tehdy, když je konvergentní posloupnost částečných součtů. V této situaci je limita posloupnosti částečných součtů rovna součtu řady. Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Speciálním případem nekonečné řady je nekonečná geometrická řada. Tuto řadu dostaneme sečtením členů geometrické posloupnosti. Pro geometrickou řadu existuje jednoduché kritérium konvergence. Pokud je tato řada konvergentní, lze ji sečíst pomocí vzorce.
Nechť $a_1$ je první člen a $q$ je kvocient nekonečné geometrické řady. Jestliže platí $|q| < 1$, řada konverguje a pro její součet platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Pokud je $|q| \geq 1$, řada diverguje.

Příklad

**Příklad 15.** *Ukažte, že nekonečná řada* $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n}$ *je konvergentní a určete její součet.*

**Řešení.** *Řadu* $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n}$ *si rozepíšeme*

$$10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + \cdots + 10^{-n} + \cdots .$$

*Je to nekonečná geometrická řada s kvocientem* $q = 10^{-1}$ *a prvním členem* $a_1 = 10^{-1}$*. Vzhledem k tomu, že* $-1 < 10^{-1} < 1$*, je tato řada konvergentní a pro její součet platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n} = \frac{10^{-1}}{1 - 10^{-1}} = \frac{0,1}{0,9} = \frac{1}{9}.$$

**Příklad**

**Příklad 16.** *Ukažte, že nekonečná řada* $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\cdots$ *je konvergentní a určete její součet.*

**Řešení.** *Nejprve si musíme uvědomit, že uvedené členy můžeme zapsat jako* $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\cdots$, *a proto se jedná o řadu:*

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\cdots\frac{1}{2^{2n+1}}+\cdots\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}}.$$

*Je to nekonečná geometrická řada s kvocientem* $q=\frac{1}{4}$ *a prvním členem* $a_1=\frac{1}{2}$. *Vzhledem k tomu, že* $-1<\frac{1}{4}<1$, *je tato řada konvergentní a pro její součet platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}.$$

Příklad

**Příklad 17.** *Napište ve tvaru zlomku s celočíselným čitatelem a jmenovatelem číslo* $0,1\overline{45}$

**Řešení.** *Číslo* $0,1\overline{45}$ *můžeme zapsat takto:*

$$0,1\overline{45} = \frac{1}{10} + \frac{45}{10^3} + \frac{45}{10^5} + \frac{45}{10^7} + \cdots + \frac{45}{10^{2n-1}} + \cdots = 1 \cdot 10^{-1} + 45 \cdot 10^{-3} + 45 \cdot 10^{-5} + 45 \cdot 10^{-7} + \cdots + 45 \cdot 10^{-2n-1} + \cdots .$$

*Součet*

$$45 \cdot 10^{-3} + 45 \cdot 10^{-5} + 45 \cdot 10^{-7} + \cdots + 45 \cdot 10^{-2n-1} + \cdots$$

*je nekonečná geometrická řada s kvocientem* $q = 10^{-2}$ *a prvním členem* $a_1 = 45 \cdot 10^{-3}$. *Vzhledem k tomu, že* $-1 < 10^{-2} < 1$ *je tato řada konvergentní a pro její součet platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 45 \cdot 10^{-2n-1} = \frac{45 \cdot 10^{-3}}{1 - 10^{-2}}.$$

*Po úpravách dostaneme, že*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 45 \cdot 10^{-2n-1} = \frac{0,045}{0,99} = \frac{45}{990} = \frac{9}{198} = \frac{1}{22}.$$

*Potom*

$$0,1\overline{45} = 1 \cdot 10^{-1} + \frac{1}{22} = \frac{1}{10} + \frac{1}{22} = \frac{16}{110} = \frac{8}{55}.$$

*Je tedy* $0,1\overline{45} = \frac{8}{55}$.

**Příklad**

**Příklad 18.** *Ukažte, že nekonečná řada* $1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n+1}$ *je divergentní.*

**Řešení.** *Řadu* $1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n+1}$ *si můžeme zapsat jako*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.$$

*Je to nekonečná geometrická řada s kvocientem* $q=-1$ *a prvním členem* $a_1=1$*. Vzhledem k tomu, že* $|q|\geq 1$ *tato řada diverguje.*
*Tuto úlohu můžeme vyřešit také pomocí posloupnosti částečných součtů.*

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1,\\
s_2 &= 1-1=0,\\
s_3 &= 1-1+1=1,\\
s_4 &= 1-1+1-1=0,\\
&\dots\\
s_{2k} &= 1-1+1-1+1-1+\cdots-1=0,\\
s_{2k+1} &= 1-1+1-1+1-1+\cdots-1+1=1,\\
&\dots
\end{aligned}$$

*Evidentne platí, že* $s_{2k}=0$ *a* $s_{2k+1}=1$*, tedy posloupnost částečných součtů je*

$$1,0,1,0,\cdots$$

*Tato posloupnost na první pohled limitu nemá, proto příslušná řada diverguje.*

# 1 Test

1. Prvních pět členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{n+2}$ je:

   (a) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{5}, \frac{2}{3}, -\frac{5}{7}$.
   (b) $\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{7}$.
   (c) $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}$.
   (d) $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{6}$.

2. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = (-1)^{n+1} \cdot n$ je:

   (a) je rostoucí,
   (b) klesající,
   (c) ani rostoucí, ani klesající,
   (d) ohraničená.

3. Vyberte posloupnost, která je klesající:

   (a) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = (-1)^{n+1}$,
   (b) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$,
   (c) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = \frac{1}{n}$,
   (d) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = \frac{2^n}{3}$.

4. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = 2n - 3$ je

   (a) aritmetická a rostoucí,
   (b) geometrická a rostoucí,
   (c) ani aritmetická, ani geometrická,
   (d) aritmetická a klesající.

5. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = \frac{2n^3-5n^2-1}{3n^3-4n+38}$ konverguje k číslu:

   (a) 0,
   (b) 1,
   (c) $\frac{2}{3}$,
   (d) $\frac{3}{2}$.

6. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{7n}$ konverguje k číslu:

   (a) $7e$,
   (b) $e^7$,
   (c) $\frac{7}{e}$,
   (d) $e$.

7. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = (-1)^n \cdot 3 \cdot \frac{1}{2^n}$ je

(a) artimetická a $d = -3$,

(b) geometrická a $q = \frac{1}{2}$,

(c) geometrická a $q = \frac{3}{2}$,

(d) geometrická a $q = -\frac{1}{2}$.

8. Napište ve tvaru zlomku s celočíselným čitatelem a jmenovatelem číslo $0,\overline{4}$

(a) $\frac{4}{9}$,

(b) $\frac{3}{7}$,

(c) $\frac{5}{11}$,

(d) $\frac{9}{4}$.

9. Nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n . b^n$ je konvergentní pro $b \in \mathbb{R}$ :

(a) $b = 1$,

(b) $b = -1$,

(c) $b = \frac{2}{5}$,

(d) $b = \frac{5}{2}$.

10. Součet nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n$ je:

(a) $b = 1$,

(b) $b = -1$,

(c) $b = -\frac{1}{6}$,

(d) $b = \frac{1}{6}$.

# 10. Komplexní čísla

**Komplexní čísla**

Historie komplexních čísel má začátek v 15. století a je spjata s matematiky bolongské univerzity. V tom období se evropští matematici poprvé setkali s odmocninanmi ze záporných čísel při hledání kořenů rovnice třetího stupně. Její obecné řešení je spojeno se jmény Scipion del Ferro, Niccolo Tartaglia a Gerolamo Cardano. K hlubšímu pochopení problematiky komplexních čísel přispěl ve druhé polovině 16. století opět bolongský matematik Rafaello Bombelli, který se věnoval mimo jiné i řešení kvadratických rovnic se záporným diskriminantem. Dalším je Abraham de Moivre, který dal do souvislosti komplexní čísla a trigonometrii. V 18. století se jednalo o dva důležité matematiky, kteří se významně podíleli na dnešní podobě komplexních čísel. Leonhard Euler zavedl označení i pro imaginární jednotku a Karl Friedrich Gauss vytvořil geometrické znázornění komplexního čísla. Matematiků, kteří se věnovali komplexním číslům, bylo daleko více, ale zde uvedeny jsou ti, kteří mezi k existenci komplexních čísel přispěli a také zavedli jejich dnešní podobu.

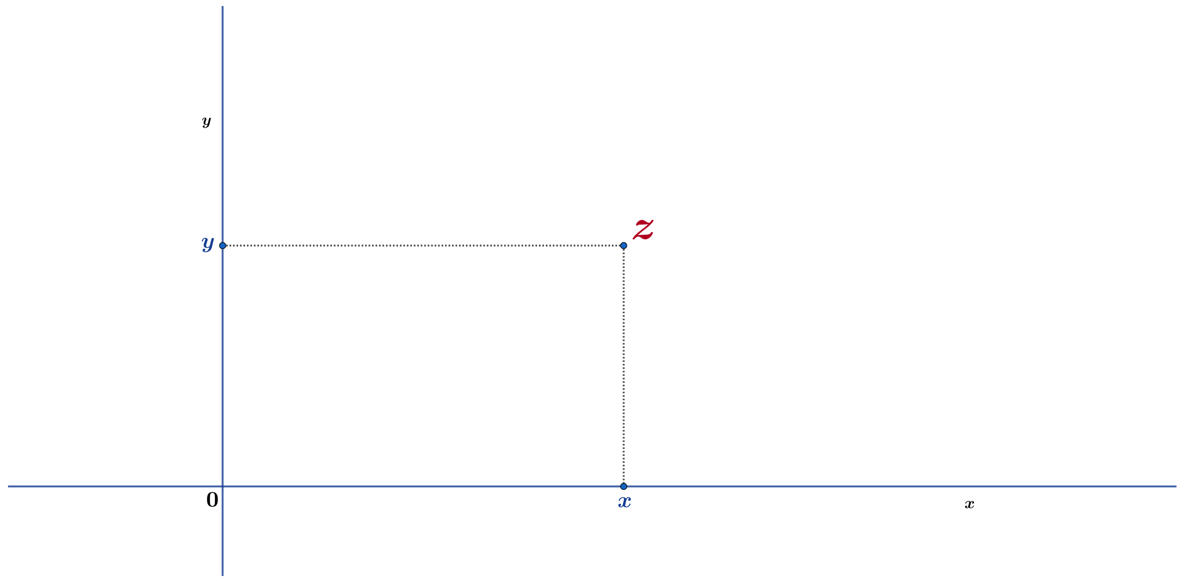
**Komplexní čísla**

Máme-li za úkol vyřešit rovnici $x^2 + 3x + 3 = 0$, začínáme výpočtem diskriminantu:

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -3.$$

Vzhledem k tomu, že v tomto případě je $D < 0$, nemá rovnice reálné řešení. Abychom mohli vyřešit kvadratické rovnice, pro které je $D < 0$, budeme muset nejprve zavést nový číselný obor, tzv. obor komplexních čísel.

Komplexní číslo $z$ definujeme jako uspořádanou dvojici $[x, y]$, kde $x, y \in \mathbb{R}$, Číslo $x$ nazýváme reálnou složkou a $y$ imaginární složkou komplexního čísla $z$. Množinu komplexních čísel značíme $\mathbb{C}$. Komplexní čísla zobrazujeme jako body roviny se zvolenou kartézskou soustavou souřadnic. Tato rovina se nazývá komplexní, nebo také Gaussova. Osa $x$ se nazývá reálná osa $y$ imaginární osa. Reálná část komplexního čísla odpovídá $x-$ové a imaginární $y-$ové souřadnici daného bodu.




Zápisem Re $z$ označujeme reálnou část a zápisem Im $z$ imaginární část komplexního čísla $z$. Je-li komplexní číslo dáno jako $z = [x, y]$, je Re $zx = x$ a Im $z = y$.
Dvě komplexní čísla $z_1 = [x_1, y_1]$ a $z_2 = [x_2, y_2]$ jsou si rovna právě, když jsou si rovny jejich reálné i imaginární části, tedy když se rovnají uspořádané dvojice $[x_1, y_1], [x_2, y_2]$:

$$z_1 = z_2 \iff (\text{Re } z_1 = \text{Re } z_2 \wedge \text{Im } z_1 = \text{Im } z_2) \iff (x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2).$$

Graficky se dvě komplexní čísla rovnají, když jejich obrazy v rovině splývají.

## Algebraický tvar komplexních čísel

Komplexní číslo $z = [x, y]$ zpravidla zapisujeme v tzv. algebraickém tvaru $z = x + iy$ , kde $i$ je imaginární jednotka, pro kterou platí

$$i^2 = -1.$$

Potom pro druhou mocninu $-i$ dostaneme:

$$(-i)^2 = (-i) \cdot (-i) = (-1)^2 \cdot i^2 = -1.$$

Tedy také druhá mocnina $-i$ je rovna $-1$.

Absolutní hodnota komplexního čísla $z$ je vzdálenost jeho obrazu od počátku Gaussovy roviny, t.j. od obrazu čísla $0+0i$. Značíme ji $|z|$. Absolutní hodnotu můžeme vypočítat pomocí Pythagorovy věty:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Komplexní číslo, které má absolutní hodnotu rovnu jedné, nazýváme komplexní jednotkou.

Pro komplexní čísla $z_1 = x_1 + iy_2$ a $z_2 = x_2 + iy_2$ platí:

- Součet komplexních čísel $z_1$ a $z_2$ je komplexní číslo:
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$
- Rozdíl komplexních čísel $z_1$ a $z_2$ je komplexní číslo:
$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$
- Součin komplexních čísel $z_1$ a $z_2$ je komplexní číslo:
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2).$$

Násobení komplexních čísel v algebraickém tvaru odpovídá násobení dvojčlenů.
Pro určení podílu potřebujeme zavést nový pojem. Říkáme, že čísla $z$ a $\overline{z}$ jsou navzájem komplexně sdružená, když $z = x + yi$ a $\overline{z} = x - yi$, t.j. když jejich reálné složky jsou stejné, ale jejich imaginární složky mají stejnou velikost a opačná znaménka. V Gaussově rovině jsou komplexně sdružená čísla symetrická podle osy $x$. Pro součin komplexně sdružených čísel platí:

$$z \cdot \overline{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2.$$

Podíl komplexních čísel $z_1 = x_1 + iy_1$ a $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$ je komplexní číslo

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2}{y_1^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{y_1^2 + y_2^2}.$$

Odvození tohoto vztahu budeme později ilustrovat na příkladu.

Na závěr ještě zavedeme $n-$tou mocninu komplexního čísla. Nechť $z = x + iy$ je komplexní číslo a $n \in \mathbb{N}$. Potom $n-$tá mocnina komplexního čísla $z$ je komplexní číslo:

$$z^n = (x + iy)^n = \underbrace{(x + iy) \cdot (x + iy) \cdots (x + iy)}_{n}.$$

**Poznámka 1.** *Vzhledem k tomu, že okamžitou hodnotu elektrického proudu značíme $i$, bývá v elektrotechnických aplikacích zvykem značit imagináni jednotku písmenem $j$. V této kapitole budeme používat obvyklý matematický symbol $i$.*

Příklad

**Příklad 2.** *Určete absolutní hodnotu komplexního čísla* $z = \sqrt{3} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**Řešení.** *Aplikujeme vztah pro určení absolutní hodnoty a dostaneme*

$$|z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{3 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{7}{2}}.$$

Příklad

**Příklad 3.** *Pro komplexní čísla* $z_1 = \frac{1}{3} - \frac{3}{4}i, z_2 = -\frac{5}{3} + \frac{5}{2}i$ *určete jejich součet, rozdíl a součin.*

**Řešení.** *Postupně určíme výsledky jednotlivých operací:*

- *Začneme součtem, kde je potřeba sečíst reálné složky a imaginární složky čísel* $z_1, z_2$*:*

$$z_1 + z_2 = \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4}i\right) + \left(-\frac{5}{3} + \frac{5}{2}i\right) = \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{3}\right) + i\left(-\frac{3}{4} + \frac{5}{2}\right) = -\frac{4}{3} + \frac{7}{4}i.$$

- *Podobně u rozdílu reálné, resp. imaginární složky odečteme:*

$$z_1 - z_2 = \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4}i\right) - \left(-\frac{5}{3} + \frac{5}{2}i\right) = \left(\frac{1}{3} - \left(-\frac{5}{3}\right)\right) + i\left(-\frac{3}{4} - \frac{5}{2}\right) = 2 - \frac{13}{4}i.$$

- *Pro určení součinu pracujeme s komplexními čísly jako s dvojčleny, a tedy je klasickým způsobem roznásobíme:*

$$z_1 \cdot z_2 = \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4}i\right) \cdot \left(-\frac{5}{3} + \frac{5}{2}i\right) = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{5}{2}i\right) + \left(-\frac{3}{4}i\right) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) + \left(-\frac{3}{4}i\right) \cdot \left(\frac{5}{2}i\right),$$

  *po úpravě*

$$\left(-\frac{5}{9}\right) + \left(\frac{5}{6}i\right) + \left(\frac{5}{4}i\right) + (-i) \cdot i \cdot \left(\frac{15}{8}\right) = \left(-\frac{5}{9}\right) + \left(\frac{15}{8}\right) + i \cdot \left(\frac{5}{6} + \frac{5}{4}\right) = \frac{95}{72} + \frac{25}{12}i.$$

**Příklad**

**Příklad 4.** *Ke komplexnímu číslu* $z = 2 - 3i$ *určete komplexně sdružené číslo* $\overline{z}$ *a potom vypočítejte součet, rozdíl a součin komplexních čísel* $z$ *a* $\overline{z}$.

**Řešení.** *Komplexně sdružené číslo k číslu* $z = 2 - 3i$ *je komplexní číslo* $\overline{z} = 2 - (-3i) = 2 + 3i$.

*Potom součet komplexních čísel* $z$ *a* $\overline{z}$ *je*

$$z + \overline{z} = 2 - 3i + 2 + 3i = 2 + 2 = 4.$$

*Podobně vypočítáme jejich rozdíl:*

$$z - \overline{z} = (2 - 3i) - (2 + 3i) = 2 - 3i - 2 - 3i = -6i.$$

*Výpočet součinu spočívá v roznásobení dvojčlenů:*

$$z \cdot \overline{z} = (2 - 3i) \cdot (2 + 3i) = 2 \cdot 2 + 2 \cdot i \cdot 3 + (-i) \cdot 3 \cdot 2 + (-i) \cdot 3 \cdot i \cdot 3 = 4 + 6i - 6i + 9 = 13.$$

Příklad

**Příklad 5.** *Určete podíl komplexních čísel* $z_1 = 3 - 2i$ *a* $z_2 = 1 + 2i$.

**Řešení.** *Hledáme podíl:*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3-2i}{1+2i}.$$

*Pro určení podílu potřebujeme předchozí tvar upravit tak, abychom ve jmenovateli dostali reálné číslo. K tomu využijeme skušenost z předchozího příkladu, kde jsme videli, že součin komplexního čísla s jeho komplexně sdruženým číslem je číslo reálné. Proto zlomek rozšíříme komplexně sdruženým číslem ke komplexnímu číslu, které je ve jmenovateli, což je v našem případě číslo* $z_2$. *Komplexně sdružené číslo ke komplexnímu číslu* $z_2 = 1 + 2i$ *je* $\overline{z_2} = 1 - 2i$. *Budeme pokračovat s výpočtem:*

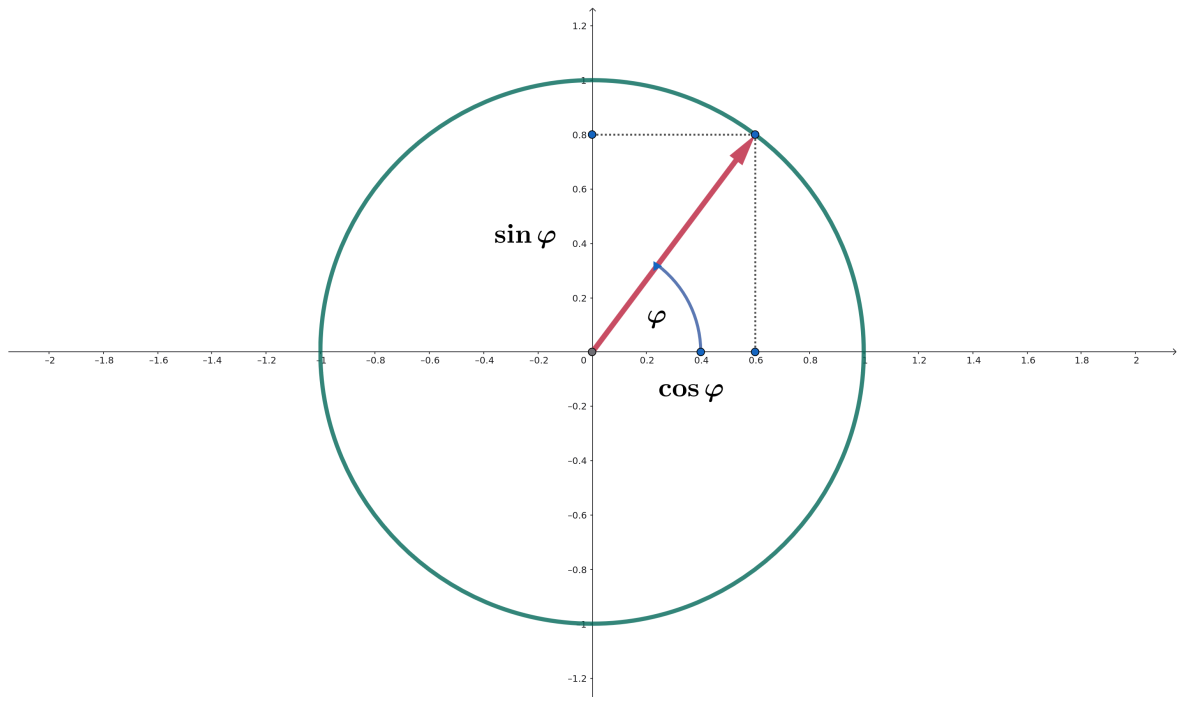
$$\frac{3-2i}{1+2i} = \frac{3-2i}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{(3-2i)\cdot(1-2i)}{1+4} = \frac{3-8i+i^2\cdot 4}{5} = \frac{-1-8i}{5} = -\frac{1}{5} - \frac{8}{5}i.$$

## Goniometrický tvar komplexních jednotek

Obraz nenulového komplexního čísla v komplexní rovině můžeme určit také pomocí jeho vzdálenosti od počátku Gaussovy roviny a velikosti orientovaného úhlu $\varphi$ mezi kladnou poloosou $x$ a polopřímkou, která začíná v počátku a prochází obrazem komplexního čísla.
Nejdřve se budeme věnovat komplexním číslům, jejichž obrazy leží na jednotkové kružnici se středem v počátku souřadnicové soustavy. Tyto body jsou obrazy komplexních jednotek. Jejich $x-$ové souřadnice jsou rovny $\cos\varphi$ a $y-$ové souřadnice rovny $\sin\varphi$. Potom komplexní jednotku, t.j. číslo $z \in \mathbb{C}$, pro které platí, že $|z| = 1$, umíme vyjadřit takto:

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Uvedený tvar zápisu nazýváme goniometrický tvar komplexní jednotky. Situaci vidíme na obrázku.

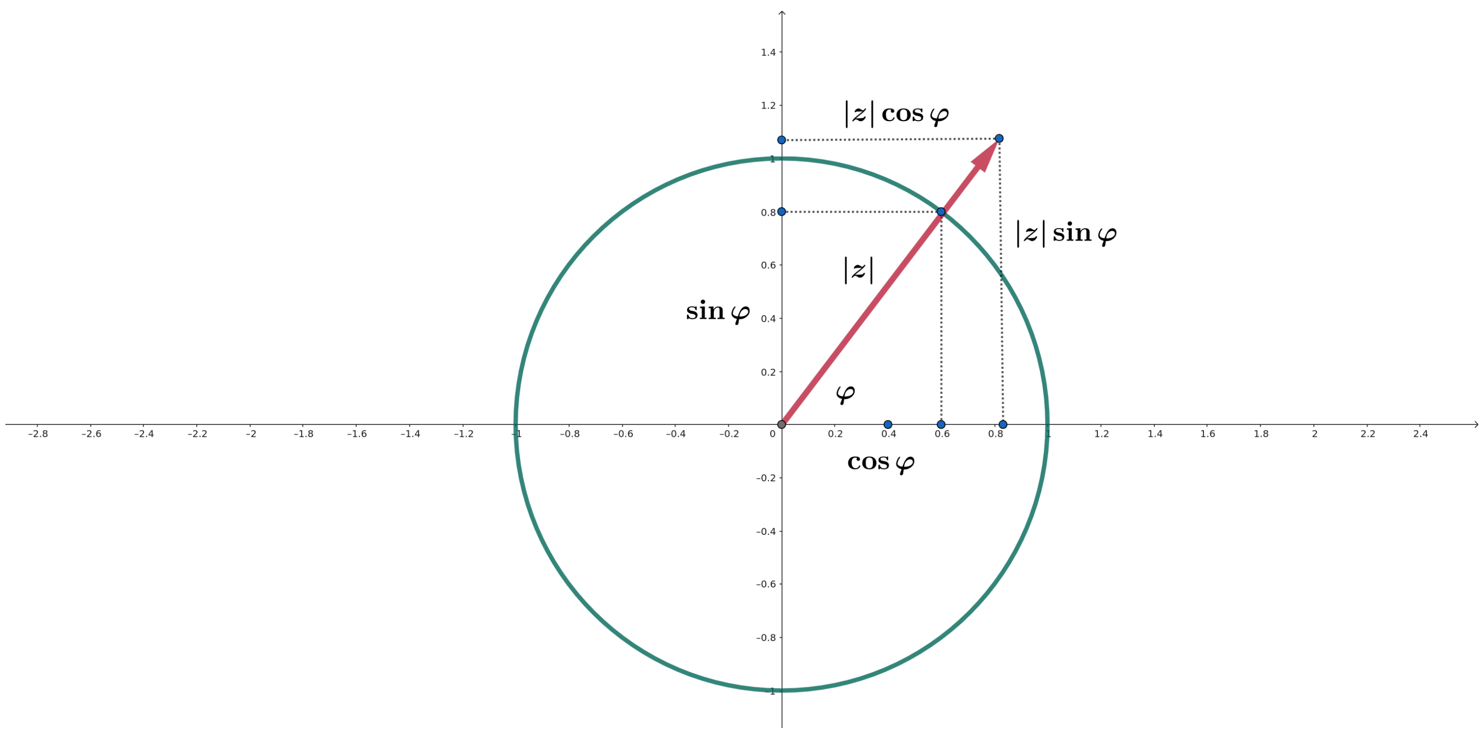


## Goniometrický tvar komplexních čísel

Goniometrický tvar libovolného nenulového komplexního čísla $z$ je výraz

$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)\,.$$

Situaci vidíme na obrázku:




Vzhledem k tomu, že goniometrické funkce jsou periodické, není argument $\varphi$ komplexního čísla určen jednoznačně. Když má komplexní číslo argument $\varphi$, má také argument $\varphi + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Obvykle ale používáme argument $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$.
Dvě nenulová komplexní čísla $a = |a|\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ a $b = |b|\,(\cos\beta + i\sin\beta)$ jsou si rovna, když se rovnají jejich absolutní hodnoty a jejich argumenty se liší o $2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
Pro převod nenulového komplexního čísla $z = a + bi$ v algebraickém tvaru na tvar goniometrický potřebujeme vypočítat absolutní hodnotu čísla $|z|$ a najít jeho argument $\varphi$. Pro určení argumentu využijeme předchozí obrázek a dostaneme vztahy:

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{|z|}.$$

Základní argument $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ je těmito vztahy jednoznačně určen.

Naopak, pro převod komplexního čísla v goniometrickém tvaru na tvar algebraický stačí určit hodnoty $\sin\varphi$ a $\cos\varphi$.

**Příklad**

**Příklad 6.** *Vyjádřete v goniometrickém tvaru se základním argumentem číslo* $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

**Řešení.** *Číslo $z$ je zapsáno v algebraickém tvaru. Nejprve určíme jeho absolutní hodnotu:*

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 1.$$

*Pro argument čísla $z$ platí*

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ \wedge \ \alpha \in \langle 0, 2\pi) \Rightarrow \alpha \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\},$$

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2} \ \wedge \ \alpha \in \langle 0, 2\pi) \Rightarrow \alpha \in \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}.$$

*Potom argument tohoto čísla je $\alpha = \frac{11\pi}{6}$. Jeho goniometrické vyjádření je*

$$z = |z| \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha) = 1 \cdot \left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}.$$

Příklad

**Příklad 7.** *Vyjádřete v algebraickém tvaru komplexní číslo* $z = 2 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$.

**Řešení.** *Nejprve určíme hodnoty sinu a kosinu pro úhel* $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ :

$$\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

*Hodnoty dosadíme do goniometrického tvaru a nakonec zjednodušíme výraz:*

$$z = 2 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} = -\sqrt{2} \cdot (1 - i)\,.$$

### Operace s komplexnými čísly v goniometrickém tvaru

Goniometrický tvar komplexních čísel je výhodný pro operace násobení a dělení. Pomocí vztahů pro goniometrické funkce se dá odvodit, že součin nenulových komplexních čísel v goniometrickém tvaru $a = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ a $b = |b|(\cos\beta + i\sin\beta)$ je

$$a \cdot b = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha) \cdot |b|(\cos\beta + i\sin\beta) = |a| \cdot |b| \cdot (\cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta))$$

a podíl těchto čísel je

$$\frac{a}{b} = \frac{|a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{|b|(\cos\beta + i\sin\beta)} = \frac{|a|}{|b|} \cdot (\cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta)).$$

Pomocí násobení můžeme definovat $n-$tou mocninu nenulového komplexního čísla v goniometrickém tvaru, kde $n \in \mathbb{N}$:

$$a^n = (|a|(\cos\alpha + i\sin\alpha))^n = \underbrace{(|a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)) \cdot (|a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)) \cdots (|a|(\cos\alpha + i\sin\alpha))}_{n} =$$

$$= |a|^n \cdot \left(\cos\underbrace{(\alpha + \alpha + \cdots + \alpha)}_{n} + i\sin\underbrace{(\alpha + \alpha + \cdots + \alpha)}_{n}\right) = |a|^n \cdot (\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)).$$

**Poznámka 8.** *Při všech operacích s komplexnými čísly v goniometrickém tvaru platí, že argument, tedy také $\alpha + \beta, \alpha - \beta$, resp. $n\alpha$ je úhel z intervalu $\langle 0, 2\pi)$.*

Příklad

**Příklad 9.** *Určete součin a podíl komplexních čísel* $a = 7 \cdot \left(\cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5}\right)$ *a* $b = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$.

**Řešení.** *Využijeme postupně vztahy pro výpočet součinu a podílu:*

$$a \cdot b = 7 \cdot \left(\cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5}\right) \cdot 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) = 14 \cdot \left(\cos \left(\frac{4\pi}{5} + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin \left(\frac{4\pi}{5} + \frac{\pi}{3}\right)\right) = 14 \cdot \left(\cos \frac{17\pi}{15} + i \sin \frac{17\pi}{15}\right),$$

$$\frac{a}{b} = \frac{7 \cdot \left(\cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5}\right)}{2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2}{7} \cdot \left(\cos \left(\frac{4\pi}{5} - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin \left(\frac{4\pi}{5} - \frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{2}{7} \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{15} + i \sin \frac{7\pi}{15}\right).$$

**Příklad**

**Příklad 10.** *Určete součin a podíl komplexních čísel* $a = 2 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)$ *a* $b = \frac{1}{3} \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)$.

**Řešení.** *Postupovat budeme stejně jako v předchozí úloze:*

$$a \cdot b = 2 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{2}{3} \cdot \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{5\pi}{6}\right)\right) = \frac{3}{2} \cdot \left(\cos \frac{14\pi}{6} + i \sin \frac{14\pi}{6}\right) = \frac{3}{2} \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{3} + i \sin \frac{7\pi}{3}\right).$$

*Evidentně* $\frac{7\pi}{3} \notin \langle 0, 2\pi)$, *proto musíme najít odpovídající úhel z intervalu* $\langle 0, 2\pi)$, *zapíšeme úhel* $\frac{7\pi}{3}$ *jako součet* $\alpha + 2k\pi$, *kde* $k \in \mathbb{Z}$*:*

$$\frac{7\pi}{3} = \frac{(6+1)\,\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi.$$

*Potom*

$$a \cdot b = \frac{3}{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right).$$

*Pro podíl* $\frac{a}{b}$ *dostáváme:*

$$\frac{a}{b} = \frac{2 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)}{\frac{1}{3} \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)} = 6 \cdot \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{5\pi}{6}\right)\right) = 6 \cdot \left(\cos \frac{4\pi}{6} + i \sin \frac{4\pi}{6}\right) = 6 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right).$$

*Kdybychom měli vypočítat také podíl* $\frac{b}{a}$, *budeme postupovat stejně:*

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)}{2 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{1}{6} \cdot \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{3\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{6} \cdot \left(\cos\left(-\frac{4\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{4\pi}{6}\right)\right) = \frac{1}{6} \cdot \left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

*Podobně jako při součinu, ani úhel* $-\frac{2\pi}{3}$ *není z intervalu* $\langle 0, 2\pi)$, *proto musíme najít odpovídající úhel z intervalu* $\langle 0, 2\pi)$. *V tomto případě zapíšeme úhel* $-\frac{2\pi}{3}$ *jako součet* $\alpha + 2k\pi$, *kde* $k \in \mathbb{Z}$. *Vzhledem k tomu, že* $-\frac{2\pi}{3} \in (-2\pi, 0)$, *stačí když k němu přičteme* $2\pi$ *a výsledný úhel bude z intervalu* $\langle 0, 2\pi)$, *proto*

$$\alpha = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi,$$

*tedy* $\alpha = \frac{4\pi}{3}$. *Potom*

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{6} \cdot \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right).$$

## Exponenciální tvar komplexních čísel

Na závěr ještě uvedeme vyjádření komplexního čísla v exponenciálním tvaru.
Označíme-li $\mathrm{e}^{i\alpha} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)$, pak můžeme vyjádřit komplexní číslo $a = |a|\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ takto:

$$a = |a| \cdot \mathrm{e}^{i\alpha},$$

kde $|a|$ je absolutní hodnota a $\alpha$ argument komplexního čísla.

Při převodu komplexního čísla v exponenciálním tvaru na tvar algebraický stačí vypočítat hodnoty sinu a kosinu pro argument $\alpha$.
Převod nenulového komplexního čísla v algebraickém tvaru na tvar exponenciální je stejný jako převod na tvar goniometrický. Opět musíme určit absolutní hodnotu a argument daného komplexního čísla.

Exponenciální tvar komplexních čísel je, podobně jako goniometrický tvar, výhodný pro operace násobení a dělení.
Součin nenulových goniometrických čísel $a = |a| \cdot \mathrm{e}^{i\alpha}$ a $b = |b| \cdot \mathrm{e}^{i\beta}$ je

$$a \cdot b = |a| \cdot \mathrm{e}^{i\alpha} \cdot |b| \cdot \mathrm{e}^{i\beta} = |a| \cdot |b| \cdot \mathrm{e}^{i(\alpha+\beta)},$$

a podíl těchto čísel je

$$\frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|} \cdot \mathrm{e}^{i(\alpha-\beta)}.$$

Příklad

**Příklad 11.** *Vyjádřete v exponenciálním tvaru následující komplexní čísla:*

1. $z_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$,
2. $z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**Řešení.** *Postupně vyjádříme obě komplexní čísla:*

1. *Číslo $z_1$ je zapsáno v goniometrickém tvaru. Proto $|z_1| = 2$ a argument je $\frac{5\pi}{6}$, proto vyjádření čísla $z_1$ v exponenciálním tvaru je*

$$z_1 = 2 \cdot \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

2. *Číslo $z_2$ je zapsáno v algebraickém tvaru. Nejprve určíme jeho absolutní hodnotu:*

$$|z_2| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1.$$

*Pro argument čísla $z_2$ platí*

$$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\},$$

$$\sin\alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}.$$

*Potom argument tohoto čísla je $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Jeho exponenciální tvar je*

$$z_1 = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}.$$

**Příklad**

**Příklad 12.** *Komplexní číslo* $z = 3 \cdot \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}$ *zapište v algebraickém tvaru.*

**Řešení.** *Pro převod tohoto čísla si musíme uvědomit, že* $z = a + ib$*, kde* $a = |z| \cdot \cos\frac{3\pi}{4}$ *a* $b = |z| \cdot \sin\frac{3\pi}{4}$*. Evidentně je* $|z| = 3$*. Potom*

$$a = 3 \cdot \cos\frac{3\pi}{4} = 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

*a*

$$b = 3 \cdot \sin\frac{3\pi}{4} = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

*Proto* $z = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + i\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Příklad

**Příklad 13.** *Určete součin a podíl komplexních čísel* $a = 7 \cdot \mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{5}}$ *a* $b = 2 \cdot \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$.

**Řešení.** *Využijeme postupně vztahy pro výpočet součinu a podílu:*

$$a \cdot b = 7 \cdot \mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{5}} \cdot 2 \cdot \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} = 7 \cdot 2 \cdot \mathrm{e}^{i\left(\frac{4\pi}{5}+\frac{\pi}{3}\right)} = 14 \cdot \mathrm{e}^{i\frac{17\pi}{15}}.$$

$$\frac{a}{b} = \frac{7 \cdot \mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{5}}}{2 \cdot \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{7}{2} \cdot \mathrm{e}^{i\left(\frac{4\pi}{5}-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2}{7} \cdot \mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{15}}.$$

**Příklad**

**Příklad 14.** *Nechť* $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$. *Určete* $z^6$.

**Řešení.** *Číslo* $z$ *je zapsáno v algebraickém tvaru. Pro určení jeho mocniny je výhodné jej vyjádřit v goniometrickém nebo exponenciálním tvaru. Nejprve určíme jeho absolutní hodnotu:*

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1.$$

*Pro argument čísla* $z$ *platí*

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ \wedge \ \alpha \in \langle 0, 2\pi) \Rightarrow \alpha \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$$

*a současně je*

$$\sin\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \ \wedge \ \alpha \in \langle 0, 2\pi) \Rightarrow \alpha \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\},$$

*t.j. argument čísla* $z$ *je* $\alpha = \frac{\pi}{6}$. *Jeho goniometrický tvar je*

$$z = |z| \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha) = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}.$$

*Pro* $n-$ *mocninu našeho komplexního čísla* $z$ *v goniometrickém tvaru platí*

$$z^n = 1^n \cdot \left(\cos\left(n \cdot \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(n \cdot \frac{\pi}{6}\right)\right).$$

*Když* $n = 6$ *dostaneme:*

$$z^6 = 1^6 \cdot \left(\cos\left(6 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(6 \cdot \frac{\pi}{6}\right)\right) = (\cos\pi + i\sin\pi) = -1 + i0 = -1.$$

*Pro exponenciální tvar čísla* $z$ *platí:*

$$z = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}.$$

*Potom jeho šestá mocnina je:*

$$z^6 = \left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}\right)^6 = \mathrm{e}^{i\pi}.$$

Příklad

**Příklad 15.** *Najděte řešení rovnice* $x^2 + 3x + 3 = 0$.

**Řešení.** *Zadaná rovnice je kvadratická s reálnými koeficienty, avšak po dosazení do vzorce pro výpočet diskriminantu*

$$D = b^2 - 4ac$$

*dostaneme:*

$$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 9 - 12 = -3 < 0.$$

*Když použijeme vztah pro výpočet kořenů kvadratické rovnice, který známe z reálného oboru:*

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

*dostáváme:*

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-3}}{2},$$

*po úpravě*

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}.$$

*A teď využijeme to, že* $\sqrt{-1} = i$ *a pro jednotlivá řešení rovnice dostaneme:*

$$x_1 = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2},$$

*a*

$$x_2 = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}.$$

*Můžeme tedy psát, že*

$$x^2 + 3x + 3 = \left(x - \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}\right),$$

*což po roznásobení je*

$$x^2 - x \cdot \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2} - x \cdot \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2} + \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2} = x^2 + \frac{3x + ix\sqrt{3} + 3x - ix\sqrt{3}}{2} + \frac{9 + i3\sqrt{3} - i3\sqrt{3} + 3}{4} = x^2 + 3x + 3.$$

*Všimněte si, že čísla* $x_1$ *a* $x_2$ *jsou navzájem komplexně sdružená. Takto to funguje vždy, pokud má kvadratická rovnice reálné koeficienty a záporný diskriminant.*

**Příklad**

I když máme známý vzorec pro výpočet řešení kvadratické rovnice spojen s reálným oborem, tento vzorec funguje také obecně v komplexním oboru, což si ukážeme na příkladu.

**Příklad 16.** *Najděte řešení rovnice* $x^2 - 3ix - 2 = 0$.

**Řešení.** *Zadaná rovnice je kvadratická, avšak neplatí, že všechny její koeficienty jsou reálné. To znamená, že její komplexní řešení nebudou komplexně sdružená čísla. Plně ve shodě s tím, co známe z reálného oboru, si označíme koeficienty rovnice, a to takto:* $a = 1$, $b = -3i$, $c = -2$.
*Podle vzorce*

$$D = b^2 - 4ac$$

*vypočteme diskriminant:*

$$D = (-3i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 \cdot i^2 + 8 = -9 + 8 = -1$$

*a dosadíme do vzorce, který známe z reálného oboru, a sice:*

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

*Po dosazení dostáváme, že řešení rovnice jsou:*

$$x_{1,2} = \frac{3i \pm \sqrt{-1}}{2},$$

*tj.*

$$x_1 = \frac{3i + i}{2} = \frac{4i}{2} = 2i$$

*a*

$$x_2 = \frac{3i - i}{2} = \frac{2i}{2} = i.$$

*Můžeme tedy psát, že*

$$x^2 - 3ix - 2 = (x - 2i)(x - i),$$

*což roznásobením závorek snadno ověříme.*

# 1 Test

1. Absolutní hodnota komplexního čísla $x = 3 - 4i$ je:
   (a) $5$,
   (b) $25$,
   (c) $\sqrt{7}$,
   (d) $-5$.
2. Pro imaginární jednotku platí, že $(-i)^3$ je:
   (a) $1$,
   (b) $-1$,
   (c) $i$,
   (d) $-i$.
3. Pro imaginární jednotku platí, že $(-i)^{39}$ je:
   (a) $1$,
   (b) $-1$,
   (c) $i$,
   (d) $-i$.
4. Součet komplexních čísel $x = 3 - 2i$ a $y = 2 + 3i$ je
   (a) $0$,
   (b) $5 + i$,
   (c) $1 - 5i$,
   (d) $12 - 5i$.
5. Komplexní číslo $x = 1 + i$ má goniometrické vyjádření:
   (a) $\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$,
   (b) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$,
   (c) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$,
   (d) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.
6. Komplexní číslo $x = -1 + i\sqrt{3}$ má exponenciální vyjádření:
   (a) $\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$,
   (b) $2\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$,
   (c) $2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$,
   (d) $2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$.

7. Nechť $x = 1 - 2i, y = 3 + 7i$. Potom $\frac{x}{y}$ je:

   (a) $\frac{11}{58} + i\frac{13}{58}$,
   (b) $-\frac{11}{58} - i\frac{13}{58}$,
   (c) $-\frac{11}{58} + i\frac{13}{58}$,
   (d) $\frac{11}{58} - i\frac{13}{58}$.

8. Vyberte všechna komplexní čísla, jejichž absolutní hodnota je rovna 2:

   (a) $2\sqrt{2} - i\sqrt{2}$,
   (b) $-\sqrt{3} - i$,
   (c) $2i$,
   (d) $\sqrt{2}$.

9. Nechť $x = 5\mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}}, y = 3\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{2}}$. Potom $x \cdot y$ je:

   (a) $15 \cdot \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{6}}$,
   (b) $15 \cdot \mathrm{e}^{i2\pi}$,
   (c) $15 \cdot \mathrm{e}^{i\frac{11\pi}{6}}$,
   (d) $15$.

10. Nechť $x = 1, y = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$. Potom $\frac{x}{y}$ je:

   (a) $\mathrm{e}^{i}$,
   (b) $4$,
   (c) $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$,
   (d) $\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{2}}$.