



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STAVEBNÍ

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

ÚSTAV ŽELEZNIČNÍCH KONSTRUKCÍ A STAVEB

INSTITUTE OF RAILWAY STRUCTURES AND CONSTRUCTIONS

DYNAMICKÁ ANALÝZA KOLEJE

DYNAMIC ANALYSIS OF TRACK

DIPLOMOVÁ PRÁCE

DIPLOMA THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Pavel Kulich

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. OTTO PLÁŠEK, Ph.D.

BRNO 2017



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA STAVEBNÍ

STUDIJNÍ PROGRAM	N3607 Stavební inženýrství
TYP STUDIJNÍHO PROGRAMU	Navazující magisterský studijní program s prezenční formou studia
STUDIJNÍ OBOR	3607T009 Konstrukce a dopravní stavby
PRACOVÍŠTĚ	Ústav železničních konstrukcí a staveb

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

DIPLOMANT	Bc. Pavel Kulich
NÁZEV	Dynamická analýza koleje
VEDOUCÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE	doc. Ing. Otto Plášek, Ph.D.
DATUM ZADÁNÍ	31. 3. 2015
DATUM ODEVZDÁNÍ	15. 1. 2016

V Brně dne 31. 3. 2015

.....
doc. Ing. Otto Plášek, Ph.D.
Vedoucí ústavu

.....
prof. Ing. Rostislav Drochytka, CSc., MBA
Děkan Fakulty stavební VUT

PODKLADY A LITERATURA

ESVELD, C., Modern Railway Track. Second Edition. Delft, MRT – Production, 2001, 2nd ed. 654 p. ISBN 90-800324-3-3

LICHTBERGER, B., Handbuch Gleis. Unterbau, Oberbau, Instandhaltung, Wirtschaftlichkeit. Tetzlaff Verlag Hamburg 2003, 562 p. ISBN 3-87814-803-8

PLÁŠEK, O., ZVĚŘINA, P., SVOBODA, R., MOCKOVČIAK, M.: Železniční stavby. Železniční spodek a svršek. 1. vyd., Brno: CERM, 2004. 291 str. ISBN 80-214-2621-7

POPP, K., SCHIEHLEN, W. (eds.): System Dynamics and Long-Term Behaviour of Railway Vehicles, Track and Subgrade. Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 488 p. ISBN 3-540-43892-0

ZÁSADY PRO VYPRACOVÁNÍ (ZADÁNÍ, CÍLE PRÁCE, POŽADOVANÉ VÝSTUPY)

Diplomová práce bude zaměřena na popis dynamické soustavy vozidlo - kolej. Diplomová práce bude zahrnovat souhrn současných poznatků a analytický popis dynamické soustavy vozidlo - kolej. Popsány budou hlavní i vedlejší parametry soustavy, ovlivňující dynamickou odezvu. Sestaven bude analytický model koleje a model koleje metodou konečných prvků. Výsledky výpočtových analýz budou porovnány s výsledky měření průhybů, příp. dalších parametrů kmitání kolejového roštu (výsledky měření v laboratoři a v koleji budou převzaty).

STRUKTURA BAKALÁŘSKÉ/DIPLOMOVÉ PRÁCE

VŠKP vypracujte a rozčleňte podle dále uvedené struktury:

1. Textová část VŠKP zpracovaná podle Směrnice rektora "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchování vysokoškolských kvalifikačních prací" a Směrnice děkana "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchování vysokoškolských kvalifikačních prací na FAST VUT" (povinná součást VŠKP).
2. Přílohy textové části VŠKP zpracované podle Směrnice rektora "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchování vysokoškolských kvalifikačních prací" a Směrnice děkana "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchování vysokoškolských kvalifikačních prací na FAST VUT" (nepovinná součást VŠKP v případě, že přílohy nejsou součástí textové části VŠKP, ale textovou část doplňují).

.....

doc. Ing. Otto Plášek, Ph.D.

Vedoucí diplomové práce

POPISNÝ SOUBOR ZÁVĚREČNÉ PRÁCE

Vedoucí práce	doc. Ing. Otto Plášek, Ph.D.
Autor práce	Bc. Pavel Kulich
Škola	Vysoké učení technické v Brně
Fakulta	Stavební
Ústav	Ústav železničních konstrukcí a staveb
Studijní obor	3607T009 Konstrukce a dopravní stavby
Studijní program	N3607 Stavební inženýrství
Název práce	Dynamická analýza koleje
Název práce v anglickém jazyce	Dynamic Analysis of Track
Typ práce	Diplomová práce
Přidělovaný titul	Ing.
Jazyk práce	Čeština
Datový formát elektronické verze	PDF
Abstrakt práce	Diplomová práce se zabývá analytickým popisem dynamické soustavy vozidlo - kolej. Jsou popsány základní analytické modely koleje, které jsou následně rozšířeny za účelem přesnějšího popisu dynamických jevů při průjezdu vozidla. Cílem práce je sestavení modelu, který co nejdůvěrněji popisuje dynamické jevy v koleji. Sestavené modely jsou kvalitativně porovnány s daty naměřenými v terénu.
Abstrakt práce v anglickém jazyce	The diploma thesis deals with analytical description of vehicle - track dynamic interface. There are described basic analytical models which are subsequently extended in order to get a more precise description of dynamic phenomena. The aim is to compile a model that faithfully describes the dynamic phenomena in the track. These new compiled models are qualitatively compared with data obtained by measuring in the track.
Klíčová slova	Konstrukce koleje, průhyb koleje, tuhost koleje, tlumení v koleji, kritická rychlost vlaku, analytický model, Winklerův model, Pasternakův model, diferenciální rovnice, ohybová tuhost, smyková tuhost, rychlost vozidla, hmotnost.
Klíčová slova v anglickém jazyce	Permanent way, rail deflection, track stiffness, track damping ratio, train critical velocity, analytical model, Winkler model, Pasternak model, differential equation, bending stiffness, shear stiffness, vehicle velocity, weight.

ABSTRAKT

Diplomová práce se zabývá analytickým popisem dynamické soustavy vozidlo - kolej. Jsou popsány základní analytické modely koleje, které jsou následně rozšířeny za účelem přesnějšího popisu dynamických jevů při průjezdu vozidla. Cílem práce je sestavení modelu, který co nejdříve popisuje dynamické jevy v koleji. Sestavené modely jsou kvalitativně porovnány s daty naměřenými v terénu.

KLÍČOVÁ SLOVA

Konstrukce koleje, průhyb koleje, tuhost koleje, tlumení v koleji, kritická rychlost vlaku, analytický model, Winklerův model, Pasternakův model, diferenciální rovnice, ohybová tuhost, smyková tuhost, rychlost vozidla, hmotnost.

ABSTRACT

The diploma thesis deals with analytical description of vehicle - track dynamic interface. There are described basic analytical models which are subsequently extended in order to get a more precise description of dynamic phenomena. The aim is to compile a model that faithfully describes the dynamic phenomena in the track. These new compiled models are qualitatively compared with data obtained by measuring in the track.

KEYWORDS

Permanent way, rail deflection, track stiffness, track damping ratio, train critical velocity, analytical model, Winkler model, Pasternak model, differential equation, bending stiffness, shear stiffness, vehicle velocity, weight.

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE VŠKP

Bc. Pavel Kulich *Dynamická analýza koleje*. Brno, 2017. 46 s., 22 s. příl. Diplomová práce.
Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav železničních konstrukcí a staveb.
Vedoucí práce doc. Ing. Otto Plášek, Ph.D.

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité informační zdroje.

V Brně dne 3. 1. 2017

Bc. Pavel Kulich
autor práce

PROHLÁŠENÍ O SHODĚ LISTINNÉ A ELEKTRONICKÉ FORMY VŠKP

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že elektronická forma odevzdané diplomové práce je shodná s odevzdanou listinnou formou.

V Brně dne 3. 1. 2017

Bc. Pavel Kulich
autor práce

PODĚKOVÁNÍ

Tímto bych rád poděkoval doc. Ing. Ottu Pláškoví, Ph.D. za jeho cenné rady a trpělivost, kterou projevil při vedení této diplomové práce. Díky patří také mé rodině, která mě podporovala a vytvářela mi v průběhu celého studia ideální prostředí.

OBSAH

1	ÚVOD	10
2	SOUČASNÉ POZNATKY	11
2.1	Winklerův model - statická soustava	11
2.2	Pasternakův model - statická soustava	16
2.3	Winklerův model - dynamická soustava	23
2.4	Dvouvrstvý systém - statická soustava	28
3	CÍLE PRÁCE	32
4	ROZŠÍŘENÍ DOSUD POUŽÍVANÝCH MODELŮ	33
4.1	Pasternakův model - dynamická soustava	33
4.2	Dvouvrstvý systém - dynamická soustava I	37
4.3	Dvouvrstvý systém - dynamická soustava II	43
4.4	Kvalitativní hodnocení modelů	47
4.4.1	Vzájemné porovnání analytických modelů	47
4.4.2	Porovnání analytických modelů s naměřenými daty	49
5	ZÁVĚR	51
	Literatura	52
	Seznam symbolů, veličin a zkratk	54
	Seznam příloh	55
A	Výčet konstant P	56
B	Vybrané skripty programu Matlab	57
B.1	Winklerův model - dynamická soustava	57
B.2	Dvouvrstvý systém - statická soustava	60
B.3	Pasternakův model - dynamická soustava	65
B.4	Dvouvrstvý systém - dynamická soustava I	68
B.5	Dvouvrstvý systém - dynamická soustava II	73
C	Obsah přiloženého CD	77

SEZNAM OBRÁZKŮ

2.1	Schéma Zimmermannova modelu	11
2.2	Relativní posunutí a relativní moment pro 1 nápravu	15
2.3	Relativní posunutí a relativní moment pro 2 nápravy	15
2.4	Schéma Pasternakova modelu	16
2.5	Relativní posunutí pro 1 nápravu	22
2.6	Relativní ohybový moment pro 1 nápravu	22
2.7	Schéma modelu	23
2.8	Porovnání relativního svislého posunutí pro různé hodnoty α a β . . .	26
2.9	Porovnání relativního svislého posunutí pro různé hodnoty α a β . . .	27
2.10	Schéma dvouvrstvého systému	28
2.11	Svislé posunutí nosníku v závislosti na k_1 a k_2	30
2.12	Svislé posunutí nosníku pro 1 nápravu	31
4.1	Schéma modelu	33
4.2	Porovnání relativního průhybu pro Pasternakův a Winklerův model .	36
4.3	Schéma modelu	37
4.4	Svislé posunutí v závislosti na relativní souřadnici s	42
4.5	Schéma modelu	43
4.6	Svislé posunutí v závislosti na relativní souřadnici s	46
4.7	Porovnání modelů z kap. 2.1, 2.3, 4.1 a 4.3	47
4.8	Porovnání modelů z kap. 4.1, 4.2 a 4.3	48
4.9	Porovnání Pasternakova modelu zatíženého pohyblivou silou a naměřených dat	49
4.10	Porovnání dvouvrstvého modelu z kap. 4.2 zatíženého pohyblivou silou a naměřených dat	49
4.11	Porovnání dvouvrstvého modelu z kap. 4.3 zatíženého pohyblivou silou a naměřených dat	50

1 ÚVOD

V posledních dvaceti letech prošla konstrukce železničního spodku a svršku rozsáhlým vývojem, který byl zaměřen na zvýšení kvality drážní cesty a také na zvýšení její spolehlivosti a životnosti. Mimo posunu v kvalitě konstrukčních prvků železničního svršku byl zaznamenán posun i v projektování a realizaci železničních staveb. Tento vývoj mimo jiné přispěl k modernizaci koridorů na území České republiky. [11]

S různými vadami a poruchami nových konstrukcí, objevujícími se ve spojitosti se zvyšováním traťové rychlosti, se potýká většina provozovatelů drážních cest po celém světě. Vzhledem k relativně nízké maximální rychlosti (160 km/h) se tyto vady a poruchy na území České republiky objevují pouze v omezené míře. Většina vad a poruch vzniká v průběhu záruční lhůty, která pro koridorové tratě na území České republiky činí pět let po dokončení výstavby. Navzdory ojedinělému výskytu těchto vad a poruch na našem území je nutné tyto jevy studovat, a to mimo jiné i z důvodu výstavby vysokorychlostních tratí v budoucnu. [10]

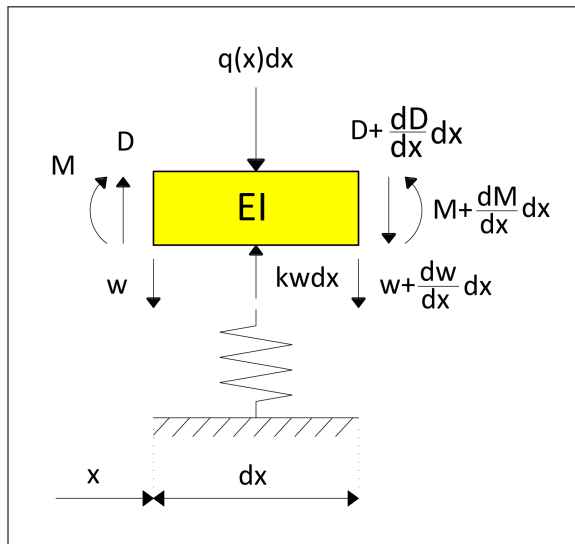
Ústav železničních konstrukcí a staveb Fakulty stavební VUT v Brně se významnou měrou podílel na zjišťování mechanismů vzniku vad a poruch pro významné společnosti železničního průmyslu a zhotovitele, podílejících se na modernizaci železničních koridorů. Předmětem analýz, laboratorních měření a měření v koleji byly např. vady polohy dlouhých betonových výhybkových pražců v koleji, vznik příčných trhlin pro příčné betonové pražce, vytrhávání plastových hmoždinek, opotřebení a lomy srdcovek atd. Mimo to byla také ověřována nová konstrukční řešení a chování součástí konstrukce koleje při zavádění vyšších rychlostí nebo při zkušebních rychlostních jízdách[9].

Tato diplomová práce je věnována především zkoumání vlastností analytických modelů a jejich návaznosti na měření ve zkušebním úseku v Plané nad Lužnicí. V práci jsou představeny modely běžně používané a také modely rozšířené. Rozšířené modely jsou následně podrobeny kvalitativnímu hodnocení.

2 SOUČASNÉ POZNATKY

2.1 Winklerův model - statická soustava

Tento model popisuje situaci, kdy je nekonečně dlouhý nosník, ležící na pružném podkladu (Winklerově poloprostoru), namáhán nepohyblivou silou. Samotný nosník lze v železničním stavitelství interpretovat jako nekonečně dlouhou kolejnici (bezstyková kolej)[1]. Model jako první popsal Zimmermann, proto je známý též jako Zimmermannův model. Vliv vodorovných reakcí působících na kolejnici je v tomto modelu zanedbán.



Obr. 2.1: Schéma Zimmermannova modelu

Diferenciální rovnice vychází z podmínky rovnováhy ve svislém směru:

$$D - (D + dD) + kwdx - qdx = 0, \quad (2.1)$$

odkud

$$\frac{dD}{dx} = kw - q. \quad (2.2)$$

Užitím vztahu $D = dM/dx$ můžeme zapsat:

$$\frac{dD}{dx} = \frac{d^2 M}{dx^2} = kw - q. \quad (2.3)$$

Použitím diferenciální rovnice $EI(d^2w/dx^2) = -M$ pro ohybem namáhaný prvek a její dvojitou derivací získáme:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = -\frac{d^2 M}{dx^2}. \quad (2.4)$$

Vložením rovnice 2.3 do rovnice 2.4 získáme:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = -kw + q. \quad (2.5)$$

Rovnice 2.5 je diferenciální rovnicí pro ohybovou křivku nosníku na pružném podkladu. V tomto modelu uvažujeme zatížení bodovým břemenem (kolo nápravy). Výpočet rovnice můžeme zjednodušit tak, že položíme $q = 0$. Vliv zatížení bude do rovnice vnesen v podobě okrajových podmínek. Aplikací výše uvedeného získáme rovnici:

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + kw(x) = 0. \quad (2.6)$$

Okrajové podmínky pro $x > 0$ jsou:

$$w(\infty) = 0; w'(0) = 0; w'''(0) = \frac{Q}{2EI}. \quad (2.7)$$

Hledá se řešení ve tvaru $w = e^{\gamma x}$:

$$EI\gamma^4 + k = 0. \quad (2.8)$$

Řešení rovnice:

$$\gamma^4 + 4\lambda^4 = 0, \quad (2.9)$$

kde

$$\lambda^4 = \frac{k}{4EI}, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \gamma^4 + (2\lambda^2)^2 &= \gamma^4 - i^2(2\lambda^2)^2 = [\gamma^2 - i2\lambda^2][\gamma^2 + i2\lambda^2] = [\gamma^2 + \lambda^2 - i2\lambda^2 + \\ &- \lambda^2][\gamma^2 + \lambda^2 + i2\lambda^2 - \lambda^2] = [\gamma^2 + (\lambda - i\lambda)^2][\gamma^2 + (\lambda + i\lambda)^2] = [\gamma^2 + \\ &- i^2(\lambda - i\lambda)^2][\gamma^2 - i^2(\lambda + i\lambda)^2] = [\gamma - i(\lambda - i\lambda)][\gamma + i(\lambda - i\lambda)][\gamma + \\ &- i(\lambda + i\lambda)][\gamma + i(\lambda + i\lambda)]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Kořeny charakteristické rovnice tedy jsou:

$$\gamma_1 = \lambda + i\lambda; \quad \gamma_2 = \lambda - i\lambda; \quad \gamma_3 = -\lambda + i\lambda; \quad \gamma_4 = -\lambda - i\lambda. \quad (2.12)$$

Obecné řešení diferenciální rovnice lze zapsat jako:

$$\begin{aligned} w(x) &= A_1 e^{\gamma_1 x} + A_2 e^{\gamma_2 x} + A_3 e^{\gamma_3 x} + A_4 e^{\gamma_4 x} = \\ &= A_1 e^{(\lambda+i\lambda)x} + A_2 e^{(\lambda-i\lambda)x} + A_3 e^{(-\lambda+i\lambda)x} + A_4 e^{(-\lambda-i\lambda)x} = \\ &= A_1 e^{\lambda x} e^{i\lambda x} + A_2 e^{\lambda x} e^{-i\lambda x} + A_3 e^{-\lambda x} e^{i\lambda x} + A_4 e^{-\lambda x} e^{-i\lambda x} = \\ &= A_1 e^{\lambda x} [\cos(\lambda x) + i \sin(\lambda x)] + A_2 e^{\lambda x} [\cos(\lambda x) - i \sin(\lambda x)] + \\ &+ A_3 e^{-\lambda x} [\cos(\lambda x) + i \sin(\lambda x)] + A_4 e^{-\lambda x} [\cos(\lambda x) - i \sin(\lambda x)] = \\ &= e^{\lambda x} [A_1 \cos(\lambda x) + A_1 i \sin(\lambda x) + A_2 \cos(\lambda x) - A_2 i \sin(\lambda x)] + \\ &+ e^{-\lambda x} [A_3 \cos(\lambda x) + A_3 i \sin(\lambda x) + A_4 \cos(\lambda x) - A_4 i \sin(\lambda x)] = \\ &= e^{\lambda x} [B_1 \cos(\lambda x) + B_2 \sin(\lambda x)] + e^{-\lambda x} [B_3 \cos(\lambda x) + B_4 \sin(\lambda x)], \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$w(x) = e^{\lambda x} [B_1 \cos(\lambda x) + B_2 \sin(\lambda x)] + e^{-\lambda x} [B_3 \cos(\lambda x) + B_4 \sin(\lambda x)]. \quad (2.14)$$

Derivace obecného řešení a dosazení okrajových podmínek:

$$\begin{aligned} w(\infty) &= e^{\lambda x} [B_1 \cos(\lambda x) + B_2 \sin(\lambda x)] + e^{-\lambda x} [B_3 \cos(\lambda x) + B_4 \sin(\lambda x)] = 0 \\ &\Rightarrow B_1 = B_2 = 0, \\ w'(0) &= B_1 \lambda + B_2 \lambda - B_3 \lambda + B_4 \lambda = 0 \\ &\Rightarrow B_3 = B_4, \\ w'''(0) &= -2B_1 \lambda^3 + 2B_2 \lambda^3 + 2B_3 \lambda^3 + 2B_4 \lambda^3 = \frac{Q}{2EI} \\ &\Rightarrow 4B_3 = \frac{Q}{2EI \lambda^3}, \\ &\Rightarrow B_3 = \frac{Q}{8EI \lambda^3} = B_4. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dosazením integračních konstant do rovnice 2.14 získáme rovnici:

$$w(x) = \frac{Q}{8EI \lambda^3} e^{-\lambda x} [(\cos(\lambda x) + \sin(\lambda x))], \quad (2.16)$$

kde

$$\lambda = \frac{1}{L} \Rightarrow L = \sqrt[4]{\frac{4EI}{k}}. \quad (2.17)$$

Průhyb nosníku v bodě x lze vyjádřit jako:

$$w(x) = \frac{QL^3}{8EI} e^{-x/L} \left[\cos\left(\frac{x}{L}\right) + \sin\left(\frac{x}{L}\right) \right], \quad (2.18)$$

kde

$$e^{-x/L} \left[\cos\left(\frac{x}{L}\right) + \sin\left(\frac{x}{L}\right) \right] = \eta(x). \quad (2.19)$$

Po úpravě získáme rovnici průhybu ve tvaru:

$$w(x) = \frac{QL^3}{8EI} \eta(x). \quad (2.20)$$

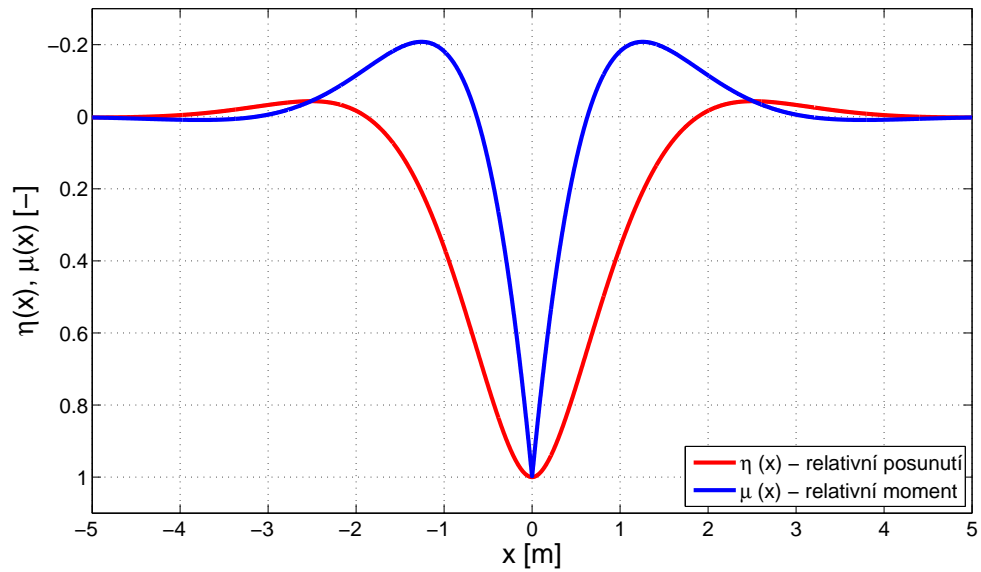
Dvojitou derivací rovnice 2.20 získáme rovnici pro ohybový moment v bodě x ve tvaru:

$$M(x) = \frac{QL}{4} \mu(x), \quad (2.21)$$

kde

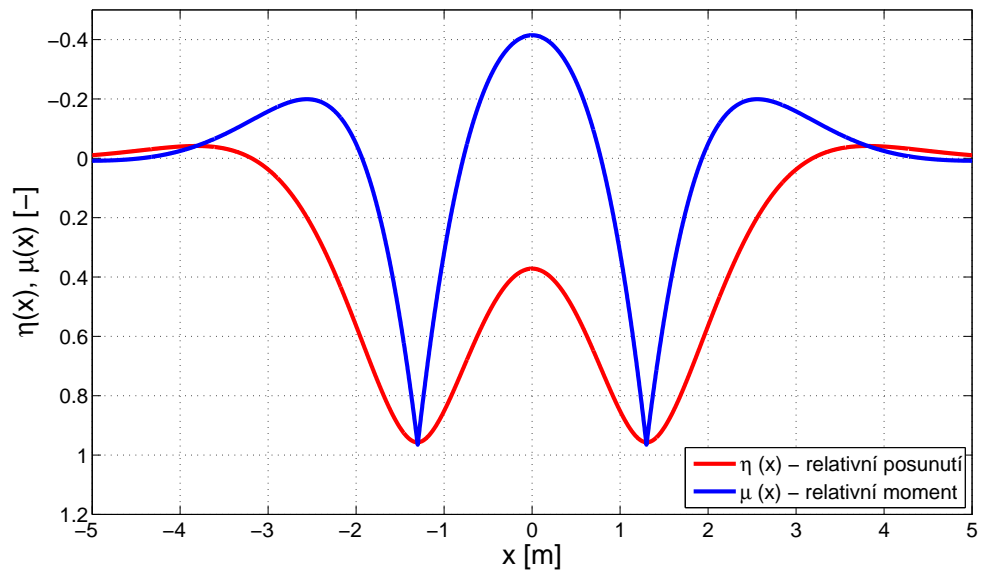
$$\mu(x) = e^{-x/L} \left[\cos\left(\frac{x}{L}\right) - \sin\left(\frac{x}{L}\right) \right]. \quad (2.22)$$

Funkce η a μ vyjadřují tvary průhybové a momentové křivky pro $x \geq 0$. Levá část grafu ($x < 0$) vychází z předpokladu symetričnosti úlohy. Grafická interpretace křivek η a μ je zobrazena na obrázku 2.2.



Obr. 2.2: Relativní posunutí a relativní moment pro 1 nápravu

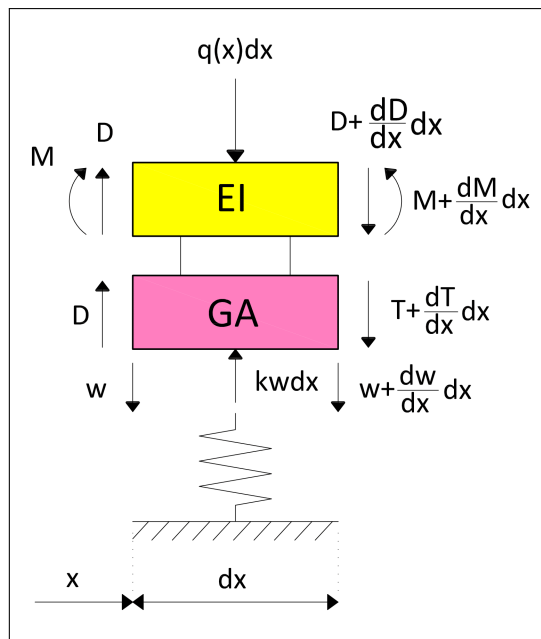
Aplikací principu superpozice lze získat průhybovou a momentovou křivku pro dvě a více náprav. Průhybová a momentová křivka pro dvě nápravy s rozvorem 2,6 m je zobrazena na obrázku 2.3.



Obr. 2.3: Relativní posunutí a relativní moment pro 2 nápravy

2.2 Pasternakův model - statická soustava

Pasternakův model rozšiřuje elementární model popsaný v kapitole 2.1 o prvek přenášející smykové zatížení. Tento prvek se deformuje pouze pod účinkem příčných smykových sil. Schéma modelu je zobrazeno na obrázku 2.4. Z obrázku je patrné dokonale tuhé propojení smykového prvku a kolejnice. Smykový prvek je dále propojen pružinou s podloží. Tento model je namáhan stacionární silou, lze na něj tedy uplatnit předpoklad symetričnosti průhybové a momentové křivky.



Obr. 2.4: Schéma Pasternakova modelu

Diferenciální rovnice vychází z podmínky rovnováhy ve svislém směru:

$$D - (D + dD) + T - (T + dT) + kwdx - qdx = 0, \quad (2.23)$$

odkud

$$\frac{dD}{dx} + \frac{dT}{dx} = kw - q. \quad (2.24)$$

Užitím vztahu $D = dM/dx$ a $T = GA dw/dx$ můžeme zapsat:

$$\frac{dD}{dx} + \frac{dT}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} + GA \frac{d^2w}{dx^2} = kw - q. \quad (2.25)$$

Použitím diferenciální rovnice $EI(d^2w/dx^2) = -M$ pro ohybem namáhaný prvek a její dvojitou derivací získáme:

$$EI \frac{d^4w}{dx^4} = -\frac{d^2M}{dx^2}. \quad (2.26)$$

Vložení rovnice 2.26 do rovnice 2.25 získáme:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} - GA \frac{d^2 w}{dx^2} = -kw + q. \quad (2.27)$$

Rovnice 2.27 je diferenciální rovnicí pro ohybovou křivku nosníku pro Pasternakův model. V tomto modelu uvažujeme zatížení nepohyblivým bodovým břemenem (kolo nápravy). Výpočet rovnice můžeme zjednodušit tak, že položíme $q = 0$. Vliv zatížení bude do rovnice vnesen v podobě okrajových podmínek. Provedením výše uvedeného získáme rovnici:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} - GA \frac{d^2 w}{dx^2} + kw = 0. \quad (2.28)$$

Okrajové podmínky pro $x > 0$ jsou:

$$w(\infty) = 0; w'(0) = 0; w'''(0) = \frac{Q}{2EI}. \quad (2.29)$$

Hledá se řešení ve tvaru $w = e^{\gamma x}$:

$$EI\gamma^4 - GA\gamma^2 + k = 0. \quad (2.30)$$

Rovnici lze řešit následovně:

$$\gamma^4 - \delta\gamma^2 + 4\lambda^4 = 0, \quad (2.31)$$

kde

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}, \quad \delta = \frac{GA}{EI}. \quad (2.32)$$

Substitucí $\epsilon = \gamma^2$ získáme kvadratickou rovnici:

$$\epsilon^2 - \delta\epsilon + 4\lambda^4 = 0, \quad (2.33)$$

kterou dále řešíme následovně:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{1,2} &= \frac{\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 16\lambda^4}}{2} = \frac{\delta \pm \sqrt{(\delta - 4\lambda^2)(\delta + 4\lambda^2)}}{2} = \\
 &= \frac{\delta \pm \sqrt{i^2(4\delta^2 - \lambda)(4\delta^2 + \lambda)}}{2} = \frac{\delta \pm i\sqrt{(4\lambda^2 - \delta)(4\lambda^2 + \delta)}}{2} = \\
 &= \frac{\frac{1}{4}\delta \pm i\frac{1}{4}\sqrt{(4\lambda^2 - \delta)(4\lambda^2 + \delta)}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}\delta \pm iab}{\frac{1}{2}} = \frac{\delta}{2} \pm 2iab,
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

kde

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{4\lambda^2 - \delta}, \quad b = \frac{1}{2}\sqrt{4\lambda^2 + \delta}, \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}
 \epsilon_1 = \frac{\delta}{2} + 2iab &\Rightarrow \gamma_1 = \sqrt{\frac{\delta}{2} + 2iab}, & \gamma_2 = -\sqrt{\frac{\delta}{2} + 2iab}, \\
 \epsilon_2 = \frac{\delta}{2} - 2iab &\Rightarrow \gamma_3 = \sqrt{\frac{\delta}{2} - 2iab}, & \gamma_4 = -\sqrt{\frac{\delta}{2} - 2iab}.
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Úprava tvaru kořenů:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\frac{\delta}{2} + 2iab} &= \sqrt{c + di}, \quad \text{kde } c = \frac{\delta}{2}, \quad d = 2ab, \\
 \sqrt{c + di} &= e + fi, \\
 c + di &= e^2 + 2ief - f^2, \\
 c &= e^2 - f^2, \\
 d = 2ef &\Rightarrow e = \frac{d}{2f} \Rightarrow c = \frac{d^2}{4f^2} - f^2 \quad /4f^2, \\
 4f^4 + 4cf^2 - d^2 &= 0, \\
 f_{1,2}^2 &= \frac{-4c \pm \sqrt{16c^2 + 16d^2}}{8} = \frac{-4c \pm 5\sqrt{c^2 + d^2}}{8} = -\frac{c}{2} \pm \frac{\sqrt{c^2 + d^2}}{2}, \\
 f_1^2 &= -\frac{c}{2} - \frac{\sqrt{c^2 + d^2}}{2}; & f_2^2 &= -\frac{c}{2} + \frac{\sqrt{c^2 + d^2}}{2}, \\
 f_{1,2} &= \pm \sqrt{-\frac{c}{2} + \frac{\sqrt{c^2 + d^2}}{2}}.
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Pro další výpočet byl zvolen kořen f_2^2 . Ke stejnému výsledku lze však dojít i užitím kořene f_1^2 .

$$\begin{aligned}
 e_{1,2} &= \frac{d}{2f} = \frac{d}{\pm 2\sqrt{-\frac{c}{2} + \frac{\sqrt{c^2+d^2}}{2}}} = \frac{d}{\pm\sqrt{-2c + 2\sqrt{c^2 + d^2}}}, \\
 \sqrt{c + di} = e + if &= \frac{d}{\pm\sqrt{-2c + 2\sqrt{c^2 + d^2}}} \pm i\sqrt{-\frac{c}{2} + \frac{\sqrt{c^2 + d^2}}{2}} = \\
 &= \frac{2ab}{\pm\sqrt{-2\frac{\delta}{2} + 2\sqrt{(\frac{\delta}{2})^2 + (2ab)^2}}} \pm i\sqrt{-\frac{\delta}{4} + \frac{\sqrt{(\frac{\delta}{2})^2 + (2ab)^2}}{2}} = \\
 &= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda^2 - \delta}\sqrt{4\lambda^2 + \delta}}{\pm\sqrt{-\delta + 2\sqrt{\frac{\delta^2}{4} + 4[\frac{1}{4}(4\lambda^2 - \delta)][\frac{1}{4}(4\lambda^2 + \delta)]}}} + \\
 &\pm i\sqrt{-\frac{\delta}{4} + \frac{\sqrt{\frac{\delta^2}{4} + 4[\frac{1}{4}(4\lambda^2 - \delta)][\frac{1}{4}(4\lambda^2 + \delta)]}}{2}} = \\
 &= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda^2 - \delta}\sqrt{4\lambda^2 + \delta}}{\pm\sqrt{-\delta + 2\sqrt{4\lambda^4}}} \pm i\sqrt{-\frac{\delta}{4} + \frac{\sqrt{4\lambda^2}}{2}} = \\
 &= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda^2 - \delta}\sqrt{4\lambda^2 + \delta}}{\pm\sqrt{4\lambda^2 - \delta}} + \\
 &\pm i\sqrt{-\frac{\delta}{4} + \lambda^2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda^2 + \delta} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda^2 - \delta} = \pm b \pm ia.
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Kořeny charakteristické rovnice jsou:

$$\gamma_1 = b + ia; \gamma_2 = -b - ia; \gamma_3 = b - ia; \gamma_4 = -b + ia. \tag{2.39}$$

S použitím získaných kořenů dále upravíme obecné řešení diferenciální rovnice následovně:

$$\begin{aligned}
 w(x) &= A_1 e^{\gamma_1} + A_2 e^{\gamma_2} + A_3 e^{\gamma_3} + A_4 e^{\gamma_4} = A_1 e^{(b+ia)x} + A_2 e^{(-b-ia)x} + \\
 &+ A_3 e^{(b-ia)x} + A_4 e^{(-b+ia)x} = A_1 e^{bx} e^{iax} + A_2 e^{-bx} e^{-iax} + \\
 &+ A_3 e^{bx} e^{-iax} + A_4 e^{-bx} e^{iax} = A_1 e^{bx} [\cos(ax) + i \sin(ax)] + \\
 &+ A_2 e^{-bx} [\cos(ax) - i \sin(ax)] + A_3 e^{bx} [\cos(ax) - i \sin(ax)] + \\
 &+ A_4 e^{-bx} [\cos(ax) + i \sin(ax)] = e^{bx} [(A_1 + A_3) \cos(ax) + \\
 &+ (iA_1 - iA_3) \sin(ax)] + e^{-bx} [(A_2 + A_4) \cos(ax) + \\
 &+ (iA_4 - iA_2) \sin(ax)] = e^{bx} [B_1 \cos(ax) + B_2 \sin(ax)] + \\
 &+ e^{-bx} [B_3 \cos(ax) + B_4 \sin(ax)], \tag{2.40}
 \end{aligned}$$

$$w(x) = e^{bx} [B_1 \cos(ax) + B_2 \sin(ax)] + e^{-bx} [B_3 \cos(ax) + B_4 \sin(ax)]. \tag{2.41}$$

Derivace obecného řešení a dosazení okrajových podmínek:

$$\begin{aligned}
 w(\infty) &= e^{bx} [B_1 \cos(ax) + B_2 \sin(ax)] + e^{-bx} [B_3 \cos(ax) + \\
 &+ B_4 \sin(ax)] = 0 \\
 \Rightarrow B_1 &= B_2 = 0, \\
 w'(0) &= B_2 a + B_4 a + B_1 b + B_3 b = 0 \\
 \Rightarrow B_3 &= B_4 \frac{a}{b}, \tag{2.42} \\
 w'''(0) &= B_1 b^3 - B_4 a^3 - B_2 a^3 - B_3 b^3 - 3B_1 a^2 b + \\
 &+ 3B_2 ab^2 + 3B_3 a^2 b + 3B_4 ab^2 \\
 \Rightarrow B_4 &= \frac{Q}{4EI} \frac{1}{a^3 + ab^2}, \\
 \Rightarrow B_3 &= \frac{Q}{4EI} \frac{a}{a^3 b + ab^3}.
 \end{aligned}$$

Dosazení integračních konstant do rovnice 2.41 vede k získání vztahu pro průhyb nosníku.

$$\begin{aligned}w(x) &= e^{-bx} \left[\frac{Q}{4EI} \frac{a}{a^3b + ab^3} \cos(ax) + \frac{Q}{4EI} \frac{1}{a^3 + ab^2} \sin(ax) \right] = \\&= \frac{Q}{4EI} \frac{1}{a^3b + ab^3} e^{-bx} \left[a \cos(ax) + b \sin(ax) \right] = \\&= \frac{Q}{4EIab} \frac{1}{a^2 + b^2} e^{-bx} \left[a \cos(ax) + b \sin(ax) \right] = \tag{2.43} \\&= \frac{Q}{4EIab} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda^2 - \delta}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda^2 + \delta}\right)^2} e^{-bx} \left[a \cos(ax) + b \sin(ax) \right] = \\&= \frac{Q}{8EIab\lambda^2} e^{-bx} \left[a \cos(ax) + b \sin(ax) \right].\end{aligned}$$

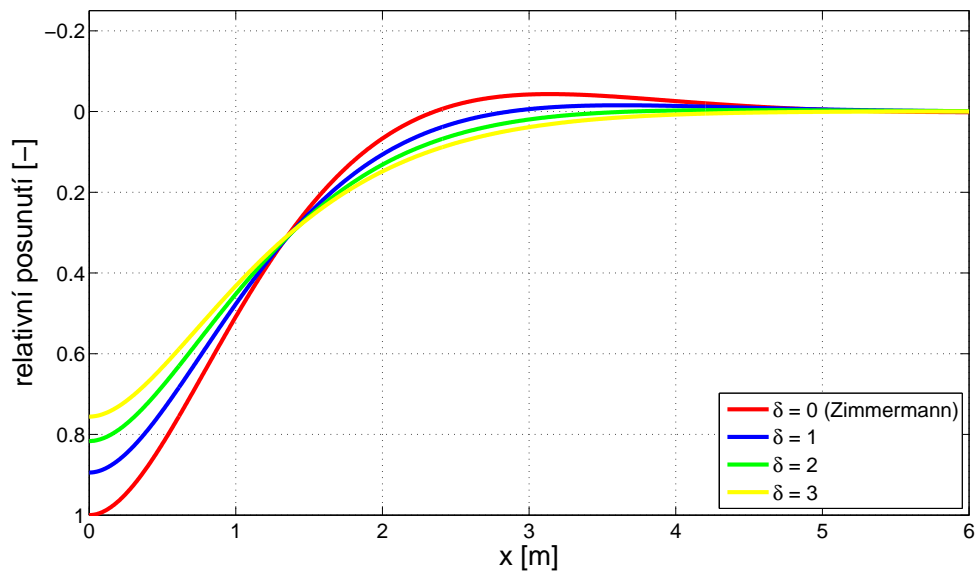
Průhyb nosníku v bodě x lze zapsat jako:

$$w(x) = \frac{Q}{8EIab\lambda^2} e^{-bx} \left[a \cos(ax) + b \sin(ax) \right]. \tag{2.44}$$

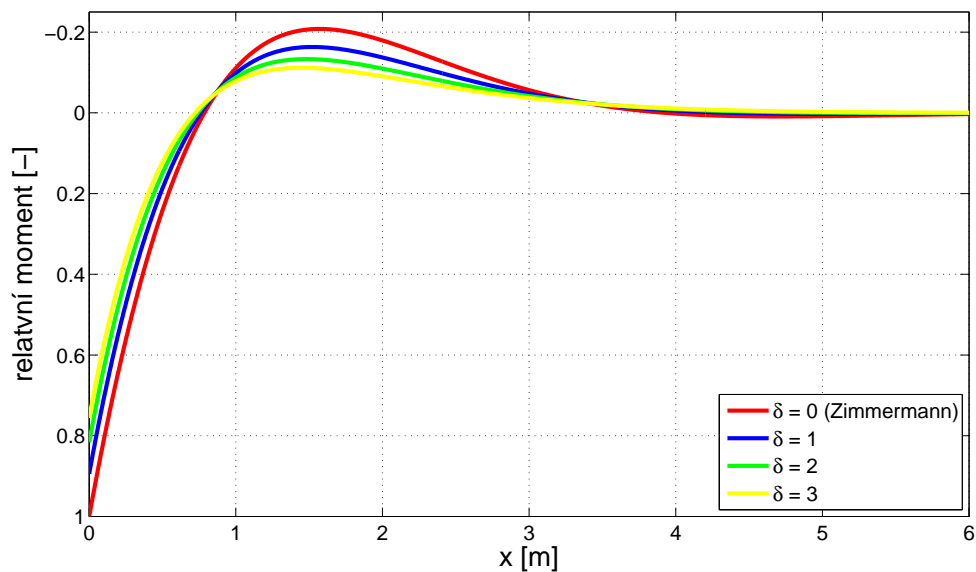
Dvojitou derivací rovnice průhybu podle x získáváme rovnici pro ohybový moment v bodě x ve tvaru:

$$M(x) = \frac{Q}{4EIab} e^{-bx} \left[b \sin(ax) - a \cos(ax) \right]. \tag{2.45}$$

Na obrázku 2.5 a obrázku 2.6 je zobrazena relativní průhybová křivka a relativní momentová křivka pro různé parametry δ , zatímco parametr λ má konstantní hodnotu. Z průběhů křivek je zřejmý nepřímo úměrný vliv parametru δ na hodnotu relativního průhybu a relativního momentu. Při hodnotě parametru $\delta = 0$ je průběh křivek shodný s průběhem křivek Zimmermannova modelu (kapitola 2.1).



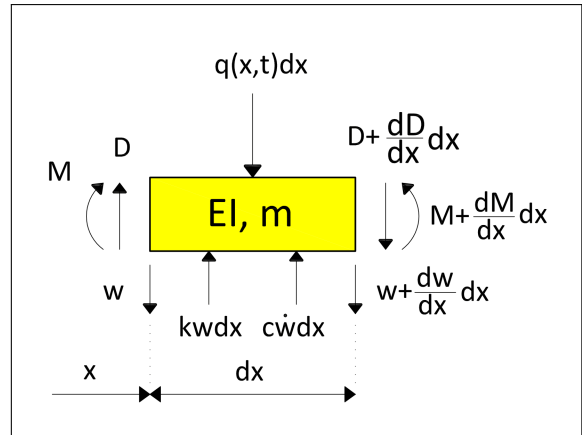
Obr. 2.5: Relativní posunutí pro 1 nápravu



Obr. 2.6: Relativní ohybový moment pro 1 nápravu

2.3 Winklerův model - dynamická soustava

Tento model vychází z Winklerova modelu podloží a je, na rozdíl od modelů diskutovaných v předšlých kapitolách, zatížen pohyblivou silou, která má jistý vliv na dynamickou interakci mezi vozidlem a kolejí. Jako první tento model popsal Timoshenko [3], později Frýba [4] přidal do modelu vliv tlumení. Schéma modelu dle Frýby je zobrazeno na obrázku 2.7.



Obr. 2.7: Schéma modelu

Podmínka rovnováhy pro element prutu:

$$\frac{dD}{dx} dx = \left(m \frac{d^2 w}{dt^2} + c \frac{dw}{dt} + kw \right) dx, \quad (2.46)$$

$$D dx = \frac{dM}{dx} dx. \quad (2.47)$$

Dosažením konstitutivní rovnice:

$$M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (2.48)$$

do rovnice 2.47 a následně do rovnice 2.46 získáme základní diferenciální rovnici ve tvaru:

$$EI \frac{d^4 w(x,t)}{dx^4} + m \frac{d^2 w(x,t)}{dt^2} + c \frac{dw(x,t)}{dt} + kw(x,t) = 0. \quad (2.49)$$

K řešení této úlohy je nutné zavést relativní souřadnici s :

$$s = \lambda(x - vt), \quad kde \quad \lambda = \left(\frac{k}{4EI} \right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{L}. \quad (2.50)$$

Po substituci:

$$\frac{dw}{dx} = \lambda \frac{dw}{ds}; \frac{dw}{dt} = -\lambda v \frac{dw}{ds}, \quad (2.51)$$

získáme diferenciální rovnici ve tvaru:

$$EI\lambda^4 \frac{d^4 w(s)}{ds^4} + m\lambda^2 v^2 \frac{d^2 w(s)}{ds^2} - c\lambda v \frac{dw(s)}{ds} + kw(s) = 0. \quad (2.52)$$

Následuje úprava rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w(s)}{ds^4} + \frac{m\lambda^2 v^2}{EI\lambda^4} \frac{d^2 w(s)}{ds^2} - \frac{c\lambda v}{EI\lambda^4} \frac{dw(s)}{ds} + 4 \frac{k}{4EI\lambda^4} w(s) &= 0, \\ \frac{d^4 w(s)}{ds^4} + 4\alpha^2 \frac{d^2 w(s)}{ds^2} - 8\alpha\beta \frac{dw(s)}{ds} + 4w(s) &= 0, \end{aligned} \quad (2.53)$$

kde

$$\alpha = \frac{v}{2\lambda} \left(\frac{m}{EI} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.54)$$

$$\beta = \frac{c}{2m} \left(\frac{m}{k} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.55)$$

α = poměr mezi aktuální a kritickou rychlostí,

β = poměr mezi aktuálním a kritickým tlumením.

Hledá se řešení ve tvaru $w = e^{\gamma s}$:

$$\gamma^4 + 4\alpha^2 \gamma^2 - 8\alpha\beta \gamma + 4 = 0. \quad (2.56)$$

S užitím komplexních kořenů $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ dále řešíme obecný tvar diferenciální rovnice, který lze zapsat jako:

$$w(s) = A_1 e^{\gamma_1 s} + A_2 e^{\gamma_2 s} + A_3 e^{\gamma_3 s} + A_4 e^{\gamma_4 s}. \quad (2.57)$$

Vzhledem k nesymetričnosti této úlohy je nutné řešit rovnici na dvou samostatných intervalech, a to $s \in (-\infty; 0)$ a $s \in [0; \infty)$. Aplikací podmínky $w(\pm\infty) = 0$ získáme následující tvary obecné rovnice pro oba intervaly:

$$s \geq 0 \quad w = A_1 e^{\gamma_1 s} + A_2 e^{\gamma_2 s} \quad (\gamma_1, \gamma_2 \text{ jsou kořeny se zápornou reálnou částí}), \quad (2.58)$$

$$s < 0 \quad w = A_3 e^{\gamma_3 s} + A_4 e^{\gamma_4 s} \quad (\gamma_3, \gamma_4 \text{ jsou kořeny s kladnou reálnou částí}). \quad (2.59)$$

Okrajové podmínky v bodě $s = 0$ vychází ze spojitosti funkce průhybu. Tyto podmínky lze zapsat následovně:

$$\begin{aligned} w_l = w_r &\Rightarrow A_3 + A_4 = A_1 + A_2, \\ \frac{dw_l}{ds} = \frac{dw_r}{ds} &\Rightarrow A_3 \gamma_3 + A_4 \gamma_4 = A_1 \gamma_1 + A_2 \gamma_2, \\ M_l = M_r &\Rightarrow A_3 \gamma_3^2 + A_4 \gamma_4^2 = A_1 \gamma_1^2 + A_2 \gamma_2^2, \\ D_l = D_r + Q &\Rightarrow A_3 \gamma_3^3 + A_4 \gamma_4^3 = A_1 \gamma_1^3 + A_2 \gamma_2^3 + \frac{Q}{EI\lambda^3}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

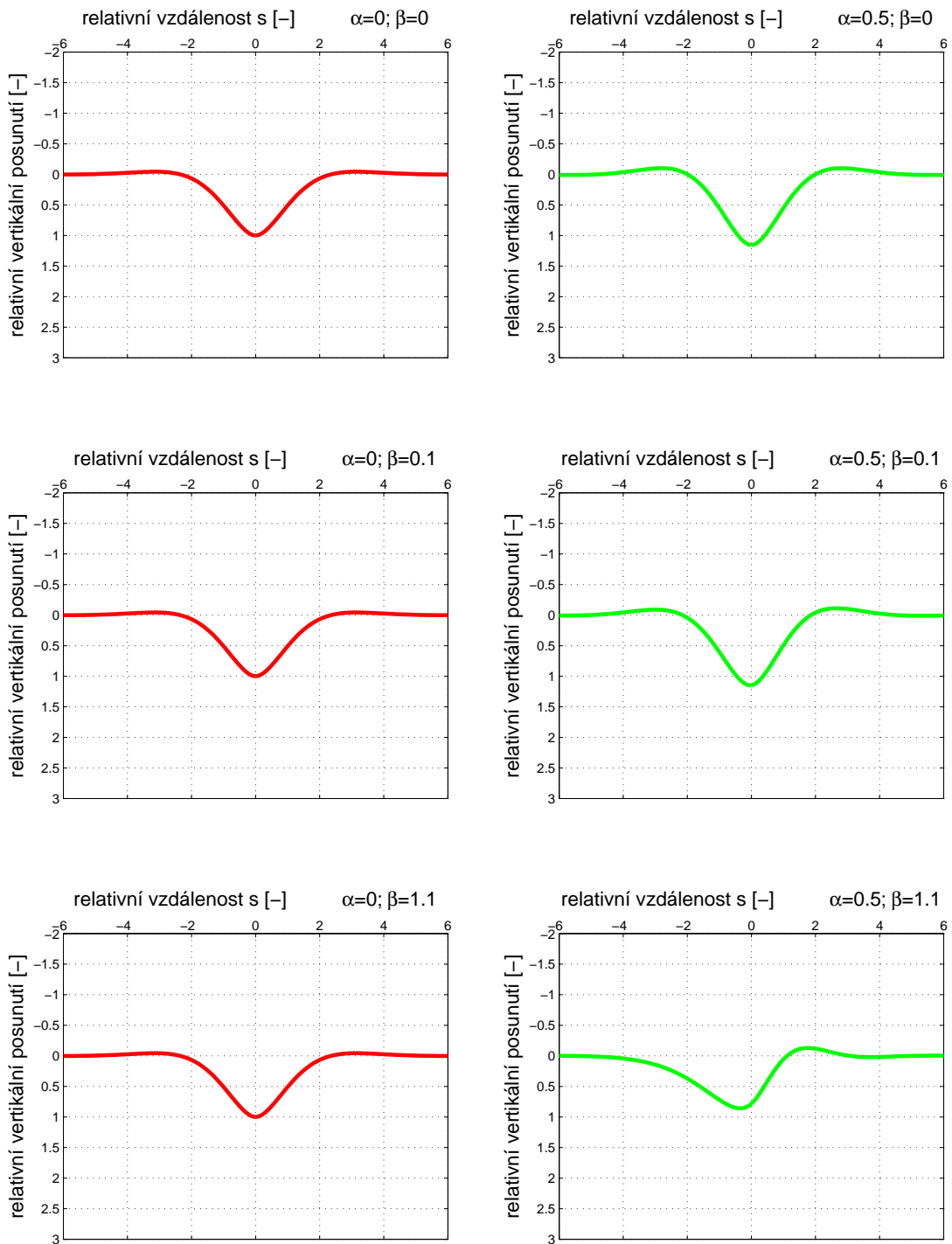
Maticový zápis okrajových podmínek:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & -\gamma_3 & -\gamma_4 \\ \gamma_1^2 & \gamma_2^2 & -\gamma_3^2 & -\gamma_4^2 \\ \gamma_1^3 & \gamma_2^3 & -\gamma_3^3 & -\gamma_4^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = w_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad (2.61)$$

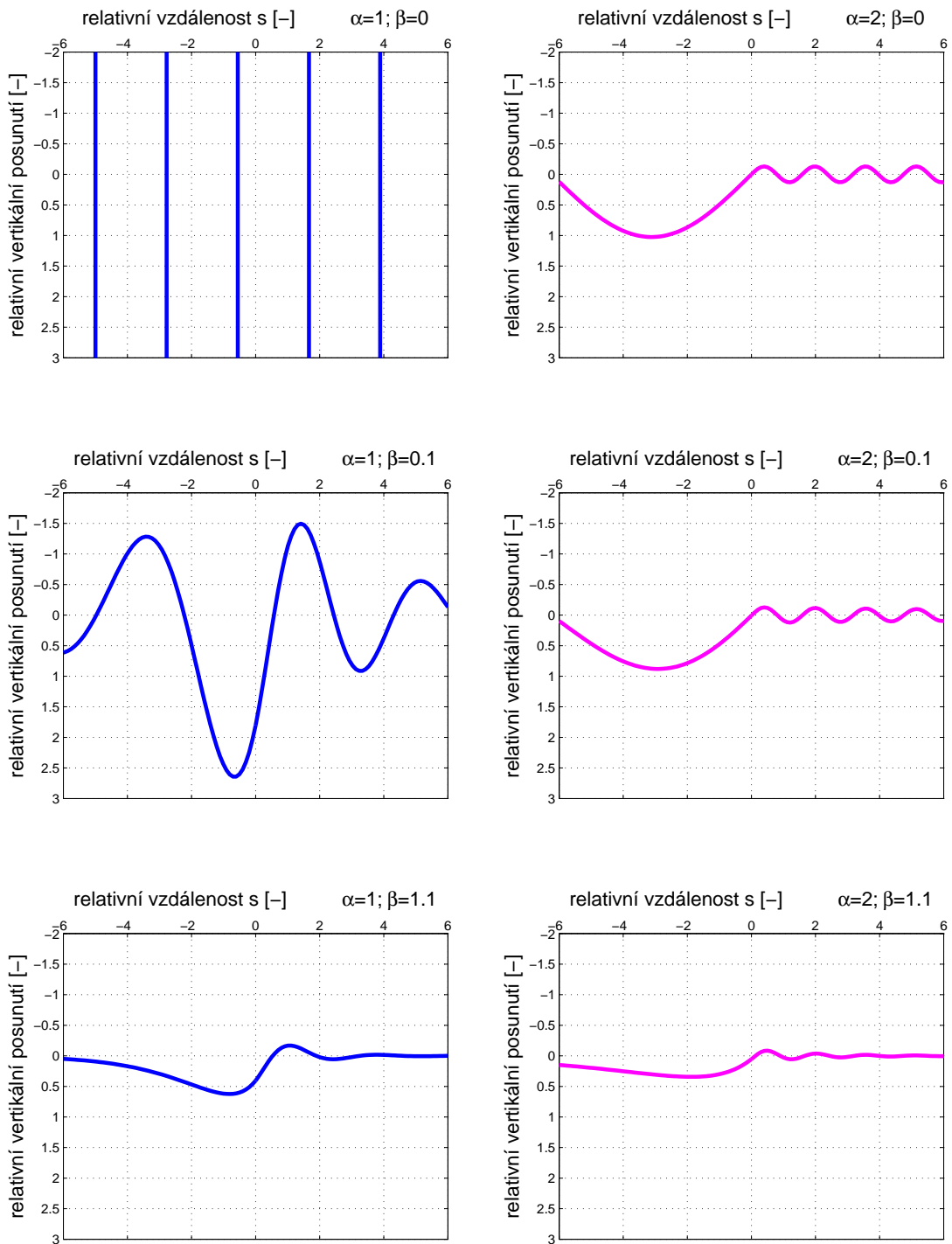
kde

$$w_0 = \frac{Q}{8EI\lambda^3}. \quad (2.62)$$

Výpočet úlohy byl zautomatizován skriptem vytvořeným ve výpočetním programu Matlab. Skript v celé své délce je uveden v příloze B.1. Grafické znázornění řešení pro různé parametry α a β je na obrázku 2.8 a obrázku 2.9.



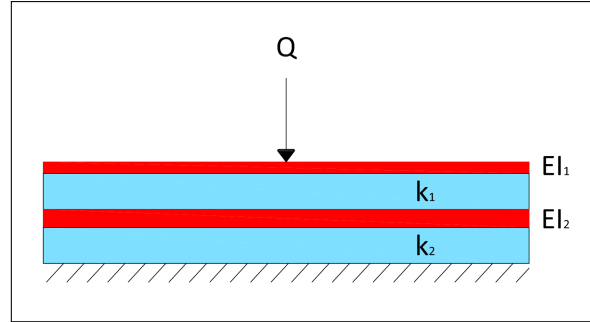
Obr. 2.8: Porovnání relativního svislého posunutí pro různé hodnoty α a β



Obr. 2.9: Porovnání relativního svislého posunutí pro různé hodnoty α a β

2.4 Dvouvrstvý systém - statická soustava

Model dvouvrstvého systému přináší zpřesnění Zimmermannova modelu tím, že jej rozšiřuje o druhou vrstvu. To s sebou přináší možnost vyšetřování chování podložek pod kolejnicí nebo posouzení podloží. První vrstvu modelu lze interpretovat, stejně jako v předešlých modelech, jako nekonečně dlouhou kolejnici. Vrstva druhá reprezentuje kolejnicové podpory, které mohou být tvořeny například příčnými pražci nebo pevnou jízdni dráhou[1].



Obr. 2.10: Schéma dvouvrstvého systému

Diferenciální rovnice modelu lze zapsat následovně:

$$EI_1 \frac{d^4 w_1(x)}{dx^4} + k_1 [w_1(x) - w_2(x)] = 0, \quad (2.63)$$

$$EI_2 \frac{d^4 w_2(x)}{dx^4} + (k_1 + k_2) w_2(x) - k_1 w_1(x) = 0. \quad (2.64)$$

Okrajové podmínky pro $x > 0$ jsou:

$$\begin{aligned} w_1(\infty) = 0; w_1'(0) = 0; w_1'''(0) = \frac{Q}{2EI_1}; \\ w_2'(0) = 0; w_2'''(0) = 0. \end{aligned} \quad (2.65)$$

K řešení této soustavy diferenciálních rovnic je nutné nejprve vyjádřit proměnnou w_2 z rovnice 2.63 a následně ji dosadit do rovnice 2.64.

$$\begin{aligned} w_2 &= \frac{EI_1}{k_1} \frac{d^4 w_1(x)}{dx^4} + w_1(x), \\ \frac{d^4 w_2(x)}{dx^4} &= \frac{EI_1}{k_1} \frac{d^8 w_1(x)}{dx^8} + \frac{d^4 w_1(x)}{dx^4}, \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$EI_2 \left[\frac{EI_1}{k_1} \frac{d^8 w_1(x)}{dx^8} + \frac{d^4 w_1(x)}{dx^4} \right] + (k_1 + k_2) \left[\frac{EI_1}{k_1} \frac{d^4 w_1(x)}{dx^4} + w_1(x) \right] - k_1 w_1(x) = 0, \quad (2.67)$$

$$\frac{d^8 w_1(x)}{dx^8} + \frac{k_1 EI_2 + k_1 EI_1 + k_2 EI_1}{EI_1 EI_2} \frac{d^4 w_1(x)}{dx^4} + \frac{k_1 k_2}{EI_1 EI_2} = 0. \quad (2.68)$$

Hledá se řešení ve tvaru $w_1 = e^{\gamma x}$:

$$\gamma^8 + \frac{k_1 EI_2 + k_1 EI_1 + k_2 EI_1}{EI_1 EI_2} \gamma^4 + \frac{k_1 k_2}{EI_1 EI_2} = 0. \quad (2.69)$$

Substitucí $\epsilon = \gamma^4$ získáme rovnici:

$$\epsilon^2 + \frac{k_1 EI_2 + k_1 EI_1 + k_2 EI_1}{EI_1 EI_2} \epsilon + \frac{k_1 k_2}{EI_1 EI_2} = 0. \quad (2.70)$$

Obecné řešení soustavy diferenciálních rovnic lze zapsat:

$$w_1(x) = A_1 e^{\gamma_1 x} + A_2 e^{\gamma_2 x} + \dots + A_7 e^{\gamma_7 x} + A_8 e^{\gamma_8 x}, \quad (2.71)$$

$$w_2(x) = \frac{EI_1}{k_1} \gamma_1^4 A_1 e^{\gamma_1 x} + A_1 e^{\gamma_1 x} + \dots + \frac{EI_1}{k_1} \gamma_8^4 A_8 e^{\gamma_8 x} + A_8 e^{\gamma_8 x}. \quad (2.72)$$

Jelikož se jedná o statickou úlohu, lze obecnou rovnici zjednodušit zavedením podmínky $w_1(\infty) = 0$, která vede k redukci členů rovnice na polovinu:

$$w_1(x) = A_1 e^{\gamma_1 x} + A_2 e^{\gamma_2 x} + A_3 e^{\gamma_3 x} + A_4 e^{\gamma_4 x}, \quad (2.73)$$

$$w_2(x) = \frac{EI_1}{k_1} \gamma_1^4 A_1 e^{\gamma_1 x} + A_1 e^{\gamma_1 x} + \dots + \frac{EI_1}{k_1} \gamma_4^4 A_4 e^{\gamma_4 x} + A_4 e^{\gamma_4 x}, \quad (2.74)$$

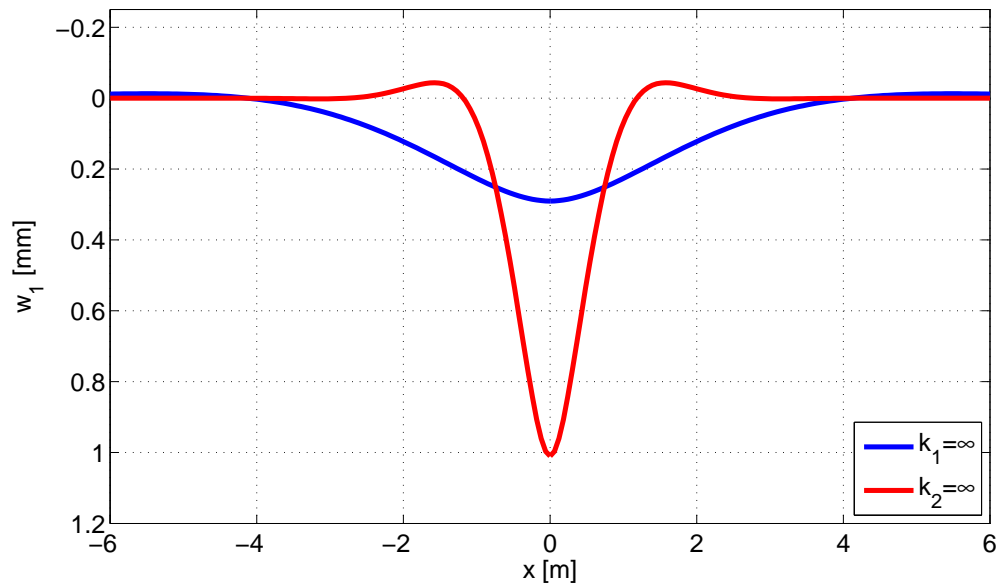
($\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ a γ_4 jsou kořeny se zápornou reálnou částí).

Okrajové podmínky v bodě $x = 0$ jsou v maticovém zápisu řešení zohledněny následovně:

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \frac{EI_1}{k_1} \gamma_1^5 + \gamma_1 & \frac{EI_1}{k_1} \gamma_2^5 + \gamma_2 & \frac{EI_1}{k_1} \gamma_3^5 + \gamma_3 & \frac{EI_1}{k_1} \gamma_4^5 + \gamma_4 \\ \frac{EI_1}{k_1} \gamma_1^7 + \gamma_1^3 & \frac{EI_1}{k_1} \gamma_2^7 + \gamma_2^3 & \frac{EI_1}{k_1} \gamma_3^7 + \gamma_3^3 & \frac{EI_1}{k_1} \gamma_4^7 + \gamma_4^3 \\ \gamma_1^3 & \gamma_2^3 & \gamma_3^3 & \gamma_4^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{Q}{2EI_1} \end{bmatrix}. \quad (2.75)$$

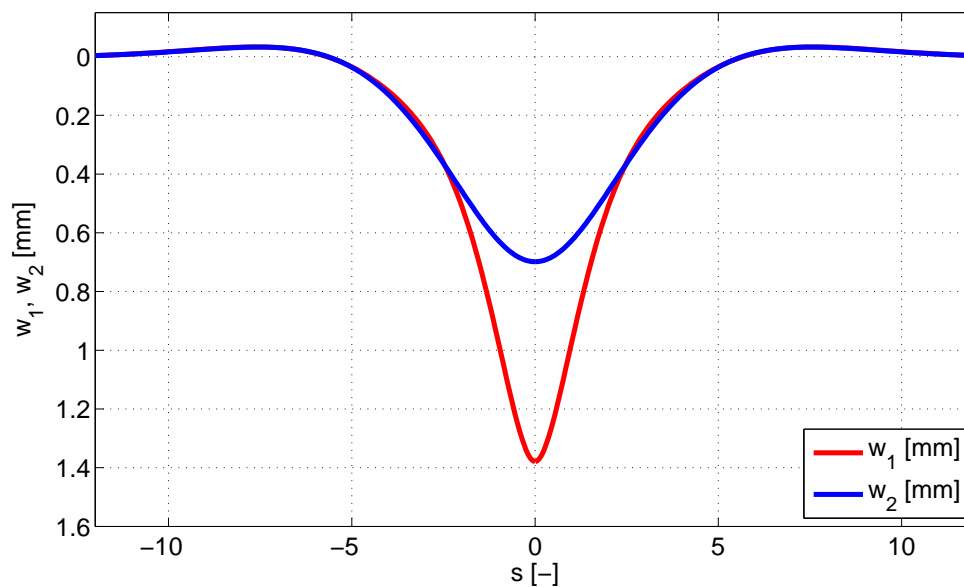
Výpočet úlohy byl zautomatizován skriptem vytvořeným ve výpočetním programu Matlab. Skript v celé své délce je uveden v příloze B.2. Grafické řešení úlohy je znázorněno na následujícím grafu. Pro vykreslení grafu byly použity parametry $EI_1 = 549 \text{ kNm}^2$, $EI_2 = 80000 \text{ kNm}^2$, $k_{eq} = 34483 \text{ kNm}^{-2}$ a $Q = 35 \text{ kN}$. Hodnoty byly převzaty z knihy *Modern Railway Track* [1].

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (2.76)$$



Obr. 2.11: Svislé posunutí nosníku v závislosti na k_1 a k_2

Obrázek 2.11 popisuje situaci, kdy tuhosti pružin k_1 a k_2 nabývají hodnot blízkých se nekonečnu. Pro popis reálné situace však tyto hodnoty uvažovat nelze. Na obrázku 2.12 jsou zobrazeny průhybové křivky w_1 a w_2 pro tuhosti nabývající hodnot $k_1 = 25000 \text{ kNm}^{-2}$ a $k_2 = 400000 \text{ kNm}^{-2}$.



Obr. 2.12: Svislé posunutí nosníku pro 1 nápravu

3 CÍLE PRÁCE

Hlavním cílem diplomové práce je sestavení analytického nástroje pro hodnocení průhybu koleje pod jedoucím zatížením. Tohoto cíle bude dosaženo splněním dílčích cílů:

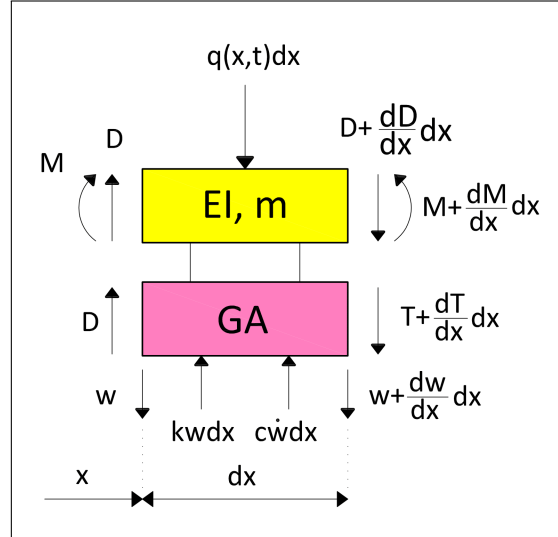
- Představení běžně používaných analytických modelů – Winklerův model zatížený nepohyblivým zatížením (kap. 2.1), Pasternakův model zatížený nepohyblivým zatížením (kap. 2.2), Winklerův model zatížený pohyblivým zatížením (kap. 2.3), dvouvrstvý systém zatížený nepohyblivým zatížením (kap. 2.4).
- Rozšíření běžně používaných analytických modelů – Pasternakův model zatížený pohyblivým zatížením (kap. 4.1), dvouvrstvý systém zatížený pohyblivým zatížením (kap. 4.2), dvouvrstvý Pasternakův systém zatížený pohyblivým zatížením (kap. 4.3).
- Podrobení rozšířených analytických modelů kvalitativnímu hodnocení. Rozšířené analytické modely budou porovnány s průhyby naměřenými v Plané nad Lužnicí (kap. 4.4).
- Výběr nejvhodnějšího analytického modelu na základě kvalitativního hodnocení a popis jeho chování.

Na základě domluvy s vedoucím diplomové práce bylo upuštěno od numerického modelování metodou konečných prvků konstrukce koleje pod jedoucím zatížením.

4 ROZŠÍŘENÍ DOSUD POUŽÍVANÝCH MODELŮ

4.1 Pasternakův model - dynamická soustava

Tento model byl sestaven za účelem rozšíření výpočtu dle Frýby, který řeší dynamickou soustavu pro Winklerovo podloží. Model je doplněn prvkem přenášejícím smykové zatížení. Jedná se tedy o Pasternakův model namáhaný pohyblivou silou. Přidaný smykový prvek se, jak bude doloženo na konci kapitoly, významně podílí na odezvě celé soustavy. Odvození diferenciální rovnice vychází ze stejných principů jako rovnice předešlé. Rovnice je tedy složena z rovnic 2.23, 2.26 a 2.46.



Obr. 4.1: Schéma modelu

Diferenciální rovnici lze tedy zapsat jako:

$$EI \frac{d^4 w(x,t)}{dx^4} + m \frac{d^2 w(x,t)}{dt^2} - GA \frac{d^2 w(x,t)}{dx^2} + c \frac{dw(x,t)}{dt} + kw(x,t) = 0. \quad (4.1)$$

K řešení úlohy je nutné zavedení relativní souřadnice s :

$$s = \lambda(x - vt), \quad \text{kde } \lambda = \left(\frac{k}{4EI} \right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{L}. \quad (4.2)$$

Po substituci:

$$\frac{dw}{dx} = \lambda \frac{dw}{ds}; \quad \frac{dw}{dt} = -\lambda v \frac{dw}{ds}, \quad (4.3)$$

získáme diferenciální rovnici ve tvaru:

$$EI\lambda^4 \frac{d^4 w(s)}{ds^4} + m\lambda^2 v^2 \frac{d^2 w(s)}{ds^2} - GA\lambda^2 \frac{d^2 w(s)}{ds^2} - c\lambda v \frac{dw(s)}{ds} + kw(s) = 0. \quad (4.4)$$

Následuje úprava rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w(s)}{ds^4} + \frac{m\lambda^2 v^2}{EI\lambda^4} \frac{d^2 w(s)}{ds^2} - \frac{GA\lambda^2}{EI\lambda^4} \frac{d^2 w(s)}{ds^2} - \frac{c\lambda v}{EI\lambda^4} \frac{dw(s)}{ds} + 4 \frac{k}{4EI\lambda^4} w(s) &= 0, \\ \frac{d^4 w(s)}{ds^4} + 4\alpha^2 \frac{d^2 w(s)}{ds^2} - 4\delta^2 \frac{d^2 w(s)}{ds^2} - 8\alpha\beta \frac{dw(s)}{ds} + 4w(s) &= 0, \\ \frac{d^4 w(s)}{ds^4} + 4(\alpha^2 - \delta^2) \frac{d^2 w(s)}{ds^2} - 8\alpha\beta \frac{dw(s)}{ds} + 4w(s) &= 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

kde

$$\alpha = \frac{v}{2\lambda} \left(\frac{m}{EI} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.6)$$

$$\beta = \frac{c}{2m} \left(\frac{m}{k} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.7)$$

$$\delta = \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{GA}{EI} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.8)$$

α = poměr mezi aktuální a kritickou rychlostí,

β = poměr mezi aktuálním a kritickým tlumením,

δ = poměr smykové a ohybové tuhosti.

Hledá se řešení ve tvaru $w = e^{\gamma s}$:

$$\gamma^4 + 4(\alpha^2 - \delta^2)\gamma^2 - 8\alpha\beta\gamma + 4 = 0. \quad (4.9)$$

S použitím komplexních kořenů $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ dále řešíme obecný tvar diferenciální rovnice, který lze zapsat jako:

$$w(s) = A_1 e^{\gamma_1 s} + A_2 e^{\gamma_2 s} + A_3 e^{\gamma_3 s} + A_4 e^{\gamma_4 s}. \quad (4.10)$$

Vzhledem k nesymetričnosti této úlohy je nutné řešit rovnici na dvou samostatných intervalech, a to $s \in (-\infty; 0)$ a $s \in [0; \infty)$. Aplikací podmínky $w(\pm\infty) = 0$ získáme následující tvary obecné rovnice pro oba intervaly:

$$s \geq 0 \quad w = A_1 e^{\gamma_1 s} + A_2 e^{\gamma_2 s} \quad (\gamma_1, \gamma_2 \text{ jsou kořeny se zápornou reálnou částí}), \quad (4.11)$$

$$s < 0 \quad w = A_3 e^{\gamma_3 s} + A_4 e^{\gamma_4 s} \quad (\gamma_3, \gamma_4 \text{ jsou kořeny s kladnou reálnou částí}). \quad (4.12)$$

Okrajové podmínky v bodě $s = 0$ vychází ze spojitosti funkce průhybu. Tyto podmínky lze zapsat následovně:

$$\begin{aligned} w_l = w_r &\Rightarrow A_3 + A_4 = A_1 + A_2, \\ \frac{dw_l}{ds} = \frac{dw_r}{ds} &\Rightarrow A_3 \gamma_3 + A_4 \gamma_4 = A_1 \gamma_1 + A_2 \gamma_2, \\ M_l = M_r &\Rightarrow A_3 \gamma_3^2 + A_4 \gamma_4^2 = A_1 \gamma_1^2 + A_2 \gamma_2^2, \\ D_l = D_r + Q &\Rightarrow A_3 \gamma_3^3 + A_4 \gamma_4^3 = A_1 \gamma_1^3 + A_2 \gamma_2^3 + \frac{Q}{EI\lambda^3}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

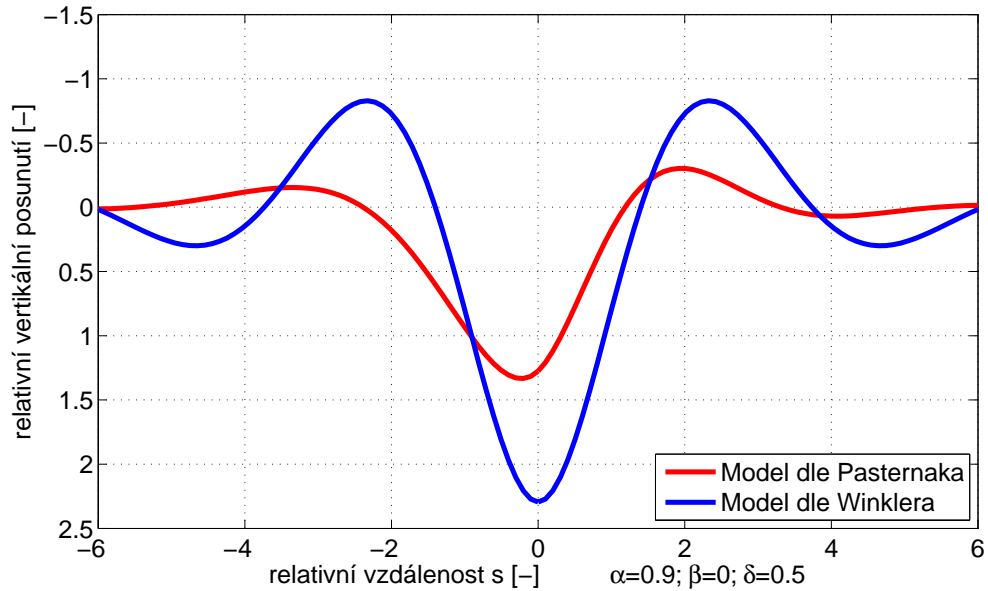
Maticový zápis okrajových podmínek:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & -\gamma_3 & -\gamma_4 \\ \gamma_1^2 & \gamma_2^2 & -\gamma_3^2 & -\gamma_4^2 \\ \gamma_1^3 & \gamma_2^3 & -\gamma_3^3 & -\gamma_4^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = w_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

kde

$$w_0 = \frac{Q}{8EI\lambda^3}. \quad (4.15)$$

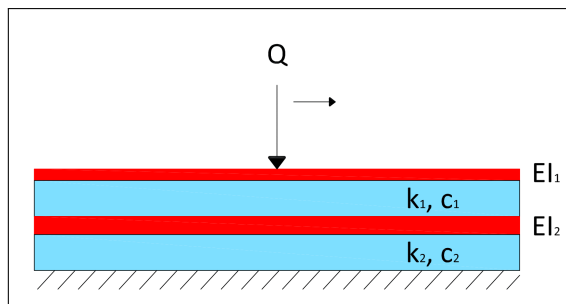
Výpočet úlohy byl zautomatizován skriptem vytvořeným ve výpočetním programu Matlab. Celý skript je uveden v příloze B.3. Z obrázku 4.2 je jasně patrný vliv smykového prvku na celkovou odezvu soustavy. Celkový relativní průhyb je nepřímo úměrný součiniteli δ , který vyjadřuje poměr mezi smykovou a ohybovou tuhostí.



Obr. 4.2: Porovnání relativního průhybu pro Pasternakův a Winklerův model

4.2 Dvouvrstvý systém - dynamická soustava I

Tento model je tvořen dvěma nekonečně dlouhými, nad sebou uspořádanými nosníky. Oba nosníky jsou charakterizovány ohybovou tuhostí (EI_1 a EI_2) a jsou propojeny pružinou s tuhostí k_1 . Druhý nosník je propojen s podkladem pružinou s tuhostí k_2 . Tento model je možné interpretovat jako vestavěnou kolejnici, která je spojitě podepřena po celé své délce. Model je zatížen pohyblivou svislou silou Q .



Obr. 4.3: Schéma modelu

Diferenciální rovnice:

$$EI_1 \frac{d^4 w_1(x, t)}{dx^4} + m_1 \frac{d^2 w_1(x, t)}{dt^2} + c_1 \frac{dw_1(x, t)}{dt} + k_1 [w_1(x, t) - w_2(x, t)] = 0, \quad (4.16)$$

$$EI_2 \frac{d^4 w_2(x, t)}{dx^4} + m_2 \frac{d^2 w_2(x, t)}{dt^2} + c_2 \frac{dw_2(x, t)}{dt} + (k_1 + k_2) w_2(x, t) - k_1 w_1(x, t) = 0. \quad (4.17)$$

Stejně jako v kapitolách 2.3 a 4.1 je i při řešení této úlohy zavedena relativní souřadnice ve tvaru:

$$s = \lambda(x - vt), \quad kde \quad \lambda = \left(\frac{k_1}{4EI_1} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (4.18)$$

Po substituci:

$$\frac{dw}{dx} = \lambda \frac{dw}{ds}; \quad \frac{dw}{dt} = -\lambda v \frac{dw}{ds}, \quad (4.19)$$

do rovnic 4.16 a 4.17 získáme diferenciální rovnice ve tvaru:

$$EI_1 \lambda^4 \frac{d^4 w_1(s)}{ds^4} + m_1 v^2 \lambda^2 \frac{d^2 w_1(s)}{ds^2} - c_1 v \lambda \frac{dw_1(s)}{ds} + k_1 [w_1(s) - w_2(s)] = 0, \quad (4.20)$$

$$EI_2\lambda^4 \frac{d^4 w_2(s)}{ds^4} + m_2 v^2 \lambda^2 \frac{d^2 w_2(s)}{ds^2} - c_2 v \lambda \frac{dw_2(s)}{ds} + (k_1 + k_2)w_2(s) - k_1 w_1(s) = 0. \quad (4.21)$$

K řešení této soustavy diferenciálních rovnic je nutné nejprve vyjádřit proměnnou w_2 z rovnice 4.20, získat první, druhou a čtvrtou derivaci a následně ji dosadit do rovnice 4.21.

$$\begin{aligned} w_2(s) &= \frac{EI_1\lambda^4}{k_1} \frac{d^4 w_1(s)}{ds^4} + \frac{m_1 v^2 \lambda^2}{k_1} \frac{d^2 w_1(s)}{ds^2} - \frac{c_1 v \lambda}{k_1} \frac{dw_1(s)}{ds} + w_1(s), \\ \frac{dw_2(s)}{ds} &= \frac{EI_1\lambda^4}{k_1} \frac{d^5 w_1(s)}{ds^5} + \frac{m_1 v^2 \lambda^2}{k_1} \frac{d^3 w_1(s)}{ds^3} - \frac{c_1 v \lambda}{k_1} \frac{d^2 w_1(s)}{ds^2} + \frac{dw_1(s)}{ds}, \\ \frac{d^2 w_2(s)}{ds^2} &= \frac{EI_1\lambda^4}{k_1} \frac{d^6 w_1(s)}{ds^6} + \frac{m_1 v^2 \lambda^2}{k_1} \frac{d^4 w_1(s)}{ds^4} - \frac{c_1 v \lambda}{k_1} \frac{d^3 w_1(s)}{ds^3} + \frac{d^2 w_1(s)}{ds^2}, \\ \frac{d^4 w_2(s)}{ds^4} &= \frac{EI_1\lambda^4}{k_1} \frac{d^8 w_1(s)}{ds^8} + \frac{m_1 v^2 \lambda^2}{k_1} \frac{d^6 w_1(s)}{ds^6} - \frac{c_1 v \lambda}{k_1} \frac{d^5 w_1(s)}{ds^5} + \frac{d^4 w_1(s)}{ds^4}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} EI_2\lambda^4 &\left[\frac{EI_1\lambda^4}{k_1} \frac{d^8 w_1(s)}{ds^8} + \frac{m_1 v^2 \lambda^2}{k_1} \frac{d^6 w_1(s)}{ds^6} - \frac{c_1 v \lambda}{k_1} \frac{d^5 w_1(s)}{ds^5} + \frac{d^4 w_1(s)}{ds^4} \right] + \\ &+ m_2 v^2 \lambda^2 \left[\frac{EI_1\lambda^4}{k_1} \frac{d^6 w_1(s)}{ds^6} + \frac{m_1 v^2 \lambda^2}{k_1} \frac{d^4 w_1(s)}{ds^4} - \frac{c_1 v \lambda}{k_1} \frac{d^3 w_1(s)}{ds^3} + \frac{d^2 w_1(s)}{ds^2} \right] + \\ &- c_2 v \lambda \left[\frac{EI_1\lambda^4}{k_1} \frac{d^5 w_1(s)}{ds^5} + \frac{m_1 v^2 \lambda^2}{k_1} \frac{d^3 w_1(s)}{ds^3} - \frac{c_1 v \lambda}{k_1} \frac{d^2 w_1(s)}{ds^2} + \frac{dw_1(s)}{ds} \right] + \\ &+ (k_1 + k_2) \left[\frac{EI_1\lambda^4}{k_1} \frac{d^4 w_1(s)}{ds^4} + \frac{m_1 v^2 \lambda^2}{k_1} \frac{d^2 w_1(s)}{ds^2} - \frac{c_1 v \lambda}{k_1} \frac{dw_1(s)}{ds} + w_1(s) \right] + \\ &- k_1 w_1(s) = 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Úpravou rovnice 4.23 dojdeme k následujícímu tvaru rovnice:

$$\begin{aligned} K_1 \frac{d^8 w_1(s)}{ds^8} + K_2 \frac{d^6 w_1(s)}{ds^6} + K_3 \frac{d^5 w_1(s)}{ds^5} + K_4 \frac{d^4 w_1(s)}{ds^4} + K_5 \frac{d^3 w_1(s)}{ds^3} + \\ + K_6 \frac{d^2 w_1(s)}{ds^2} + K_7 \frac{dw_1(s)}{ds} + K_8 w_1(s) = 0, \end{aligned} \quad (4.24)$$

kde

$$\begin{aligned}
 K_1 &= 1, \\
 K_2 &= \frac{v^2(EI_1m_2 + EI_2m_1)}{EI_1EI_2\lambda^2}, \\
 K_3 &= -\frac{v(EI_1c_2 + EI_2c_1)}{EI_1EI_2\lambda^3}, \\
 K_4 &= \frac{4(EI_1k_1 + EI_1k_2 + EI_2k_1 + m_1m_2v^4)}{EI_2k_1}, \\
 K_5 &= -\frac{4v^3(c_1m_2 + c_2m_1)}{EI_2k_1\lambda}, \\
 K_6 &= \frac{4v^2(m_1k_1 + m_1k_2 + m_2k_1 + c_1c_2)}{EI_2k_1\lambda^2}, \\
 K_7 &= -\frac{4wv(c_1k_1 + c_1k_2 + c_2k_1)}{EI_2k_1\lambda^3}, \\
 K_8 &= \frac{16EI_1k_2}{EI_2k_1}.
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Hledá se řešení ve tvaru $w_1 = e^{\gamma x}$:

$$K_1\gamma^8 + K_2\gamma^6 + K_3\gamma^5 + K_4\gamma^4 + K_5\gamma^3 + K_6\gamma^2 + K_7\gamma + K_8 = 0. \tag{4.26}$$

Obecné řešení soustavy diferenciálních rovnic a jeho derivace lze zapsat:

$$\begin{aligned}
 w_1(s) &= A_1e^{\gamma_1s} + A_2e^{\gamma_2s} + A_3e^{\gamma_3s} + A_4e^{\gamma_4s} + A_5e^{\gamma_5s} + A_6e^{\gamma_6s} + \\
 &\quad + A_7e^{\gamma_7s} + A_8e^{\gamma_8s}, \\
 w_1'(s) &= \gamma_1A_1e^{\gamma_1s} + \gamma_2A_2e^{\gamma_2s} + \gamma_3A_3e^{\gamma_3s} + \gamma_4A_4e^{\gamma_4s} + \gamma_5A_5e^{\gamma_5s} + \\
 &\quad + \gamma_6A_6e^{\gamma_6s} + \gamma_7A_7e^{\gamma_7s} + \gamma_8A_8e^{\gamma_8s}, \\
 w_1''(s) &= \gamma_1^2A_1e^{\gamma_1s} + \gamma_2^2A_2e^{\gamma_2s} + \gamma_3^2A_3e^{\gamma_3s} + \gamma_4^2A_4e^{\gamma_4s} + \gamma_5^2A_5e^{\gamma_5s} + \\
 &\quad + \gamma_6^2A_6e^{\gamma_6s} + \gamma_7^2A_7e^{\gamma_7s} + \gamma_8^2A_8e^{\gamma_8s}, \\
 w_1'''(s) &= \gamma_1^3A_1e^{\gamma_1s} + \gamma_2^3A_2e^{\gamma_2s} + \gamma_3^3A_3e^{\gamma_3s} + \gamma_4^3A_4e^{\gamma_4s} + \gamma_5^3A_5e^{\gamma_5s} + \\
 &\quad + \gamma_6^3A_6e^{\gamma_6s} + \gamma_7^3A_7e^{\gamma_7s} + \gamma_8^3A_8e^{\gamma_8s},
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
 w_2(s) &= \frac{1}{4}\gamma_1^4 A_1 e^{\gamma_1 s} + \frac{m_1 v^2 \lambda^2}{k_1} \gamma_1^2 A_1 e^{\gamma_1 s} - \frac{c_1 v \lambda}{k_1} \gamma_1 A_1 e^{\gamma_1 s} + A_1 e^{\gamma_1 s} + \\
 &\quad + \dots + \frac{1}{4}\gamma_8^4 A_8 e^{\gamma_8 s} + \frac{m_1 v^2 \lambda^2}{k_1} \gamma_8^2 A_8 e^{\gamma_8 s} - \frac{c_1 v \lambda}{k_1} \gamma_8 A_8 e^{\gamma_8 s} + A_8 e^{\gamma_8 s}, \\
 w_2'(s) &= \frac{1}{4}\gamma_1^5 A_1 e^{\gamma_1 s} + \frac{m_1 v^2 \lambda^2}{k_1} \gamma_1^3 A_1 e^{\gamma_1 s} - \frac{c_1 v \lambda}{k_1} \gamma_1^2 A_1 e^{\gamma_1 s} + \gamma_1 A_1 e^{\gamma_1 s} + \\
 &\quad + \dots + \frac{1}{4}\gamma_8^5 A_8 e^{\gamma_8 s} + \frac{m_1 v^2 \lambda^2}{k_1} \gamma_8^3 A_8 e^{\gamma_8 s} - \frac{c_1 v \lambda}{k_1} \gamma_8^2 A_8 e^{\gamma_8 s} + \gamma_8 A_8 e^{\gamma_8 s}, \\
 w_2''(s) &= \frac{1}{4}\gamma_1^6 A_1 e^{\gamma_1 s} + \frac{m_1 v^2 \lambda^2}{k_1} \gamma_1^4 A_1 e^{\gamma_1 s} - \frac{c_1 v \lambda}{k_1} \gamma_1^3 A_1 e^{\gamma_1 s} + \gamma_1^2 A_1 e^{\gamma_1 s} + \\
 &\quad + \dots + \frac{1}{4}\gamma_8^6 A_8 e^{\gamma_8 s} + \frac{m_1 v^2 \lambda^2}{k_1} \gamma_8^4 A_8 e^{\gamma_8 s} - \frac{c_1 v \lambda}{k_1} \gamma_8^3 A_8 e^{\gamma_8 s} + \gamma_8^2 A_8 e^{\gamma_8 s}, \\
 w_2'''(s) &= \frac{1}{4}\gamma_1^7 A_1 e^{\gamma_1 s} + \frac{m_1 v^2 \lambda^2}{k_1} \gamma_1^5 A_1 e^{\gamma_1 s} - \frac{c_1 v \lambda}{k_1} \gamma_1^4 A_1 e^{\gamma_1 s} + \gamma_1^3 A_1 e^{\gamma_1 s} + \\
 &\quad + \dots + \frac{1}{4}\gamma_8^7 A_8 e^{\gamma_8 s} + \frac{m_1 v^2 \lambda^2}{k_1} \gamma_8^5 A_8 e^{\gamma_8 s} - \frac{c_1 v \lambda}{k_1} \gamma_8^4 A_8 e^{\gamma_8 s} + \gamma_8^3 A_8 e^{\gamma_8 s}.
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Vzhledem k nesymetričnosti úlohy je nutné řešit rovnici na dvou samostatných intervalech pro každou vrstvu, a to $s \in (-\infty; 0)$ a $s \in [0; \infty)$. Aplikací podmínky $w(\pm\infty) = 0$ získáme následující tvary obecné rovnice pro oba intervaly:

$$\begin{aligned}
 s \geq 0 \quad w_{1r} &= A_1 e^{\gamma_1 s} + A_2 e^{\gamma_2 s} + A_3 e^{\gamma_3 s} + A_4 e^{\gamma_4 s}, \\
 w_{2r}(s) &= \frac{1}{4}\gamma_1^4 A_1 e^{\gamma_1 s} + \frac{m_1 v^2 \lambda^2}{k_1} \gamma_1^2 A_1 e^{\gamma_1 s} - \frac{c_1 v \lambda}{k_1} \gamma_1 A_1 e^{\gamma_1 s} + A_1 e^{\gamma_1 s} + \\
 &\quad + \dots + \frac{1}{4}\gamma_4^4 A_4 e^{\gamma_4 s} + \frac{m_1 v^2 \lambda^2}{k_1} \gamma_4^2 A_4 e^{\gamma_4 s} - \frac{c_1 v \lambda}{k_1} \gamma_4 A_4 e^{\gamma_4 s} + A_4 e^{\gamma_4 s},
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

($\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ a γ_4 jsou kořeny se zápornou reálnou částí).

$$\begin{aligned}
 s < 0 \quad w_{1l} &= A_5 e^{\gamma_5 s} + A_6 e^{\gamma_6 s} + A_7 e^{\gamma_7 s} + A_8 e^{\gamma_8 s}, \\
 w_{2l}(s) &= \frac{1}{4}\gamma_5^4 A_5 e^{\gamma_5 s} + \frac{m_1 v^2 \lambda^2}{k_1} \gamma_5^2 A_5 e^{\gamma_5 s} - \frac{c_1 v \lambda}{k_1} \gamma_5 A_5 e^{\gamma_5 s} + A_5 e^{\gamma_5 s} + \\
 &\quad + \dots + \frac{1}{4}\gamma_8^4 A_8 e^{\gamma_8 s} + \frac{m_1 v^2 \lambda^2}{k_1} \gamma_8^2 A_8 e^{\gamma_8 s} - \frac{c_1 v \lambda}{k_1} \gamma_8 A_8 e^{\gamma_8 s} + A_8 e^{\gamma_8 s},
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

($\gamma_5, \gamma_6, \gamma_7$ a γ_8 jsou kořeny s kladnou reálnou částí).

Okrajové podmínky v bodě $s = 0$ vychází ze spojitosti průhybové křivky a lze je zapsat takto:

$$\begin{aligned}
 w_{1,l} = w_{1,r} &\Rightarrow A_5 + A_6 + A_7 + A_8 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4, \\
 \frac{dw_{1,l}}{ds} = \frac{dw_{1,r}}{ds} &\Rightarrow A_5\gamma_5 + A_6\gamma_6 + A_7\gamma_7 + A_8\gamma_8 = A_1\gamma_1 + A_2\gamma_2 + \\
 &\quad + A_3\gamma_3 + A_4\gamma_4, \\
 M_{1,l} = M_{1,r} &\Rightarrow A_5\gamma_5^2 + A_6\gamma_6^2 + A_7\gamma_7^2 + A_8\gamma_8^2 = A_1\gamma_1^2 + A_2\gamma_2^2 + \\
 &\quad + A_3\gamma_3^2 + A_4\gamma_4^2, \\
 D_{1,l} = D_{1,r} + Q &\Rightarrow A_5\gamma_5^3 + A_6\gamma_6^3 + A_7\gamma_7^3 + A_8\gamma_8^3 = A_1\gamma_1^3 + A_2\gamma_2^3 + \\
 &\quad + A_3\gamma_3^3 + A_4\gamma_4^3 + \frac{Q}{EI_1\lambda^3}.
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

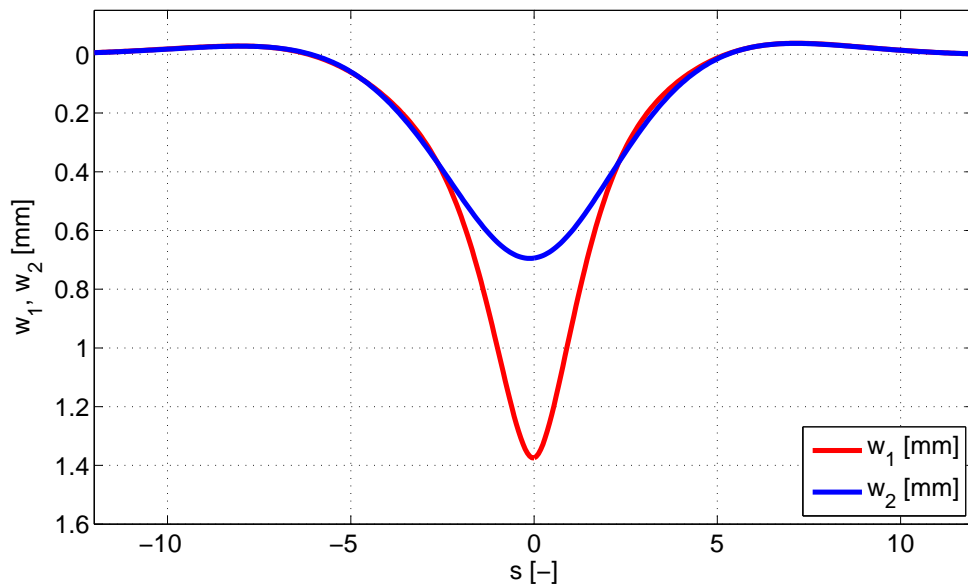
S ohledem na komplikovanost vztahů jsou koeficienty označeny jako $P_{5-8,1-8}$. Jejich hodnoty jsou uvedeny v příloze A.

$$\begin{aligned}
 w_{2,l} = w_{2,r} &\Rightarrow -P_{5,5} - P_{5,6} - P_{5,7} - P_{5,8} = P_{5,1} + P_{5,2} + P_{5,3} + P_{5,4}, \\
 \frac{dw_{2,l}}{ds} = \frac{dw_{2,r}}{ds} &\Rightarrow -P_{6,5} - P_{6,6} - P_{6,7} - P_{6,8} = P_{6,1} + P_{6,2} + P_{6,3} + P_{6,4}, \\
 M_{2,l} = M_{2,r} &\Rightarrow -P_{7,5} - P_{7,6} - P_{7,7} - P_{7,8} = P_{7,1} + P_{7,2} + P_{7,3} + P_{7,4}, \\
 D_{2,l} = D_{2,r} &\Rightarrow -P_{8,5} - P_{8,6} - P_{8,7} - P_{8,8} = P_{8,1} + P_{8,2} + P_{8,3} + P_{8,4}.
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Okrajové podmínky v bodě $s = 0$ jsou v maticovém zápisu řešení zohledněny následovně:

$$\begin{bmatrix}
 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
 \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & -\gamma_5 & -\gamma_6 & -\gamma_7 & -\gamma_8 \\
 \gamma_1^2 & \gamma_2^2 & \gamma_3^2 & \gamma_4^2 & -\gamma_5^2 & -\gamma_6^2 & -\gamma_7^2 & -\gamma_8^2 \\
 \gamma_1^3 & \gamma_2^3 & \gamma_3^3 & \gamma_4^3 & -\gamma_5^3 & -\gamma_6^3 & -\gamma_7^3 & -\gamma_8^3 \\
 P_{5,1} & P_{5,2} & P_{5,3} & P_{5,4} & P_{5,5} & P_{5,6} & P_{5,7} & P_{5,8} \\
 P_{6,1} & P_{6,2} & P_{6,3} & P_{6,4} & P_{6,5} & P_{6,6} & P_{6,7} & P_{6,8} \\
 P_{7,1} & P_{7,2} & P_{7,3} & P_{7,4} & P_{7,5} & P_{7,6} & P_{7,7} & P_{7,8} \\
 P_{8,1} & P_{8,2} & P_{8,3} & P_{8,4} & P_{8,5} & P_{8,6} & P_{8,7} & P_{8,8}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 A_1 \\
 A_2 \\
 A_3 \\
 A_4 \\
 A_5 \\
 A_6 \\
 A_7 \\
 A_8
 \end{bmatrix}
 = \frac{Q}{EI_1\lambda^3}
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}. \tag{4.33}$$

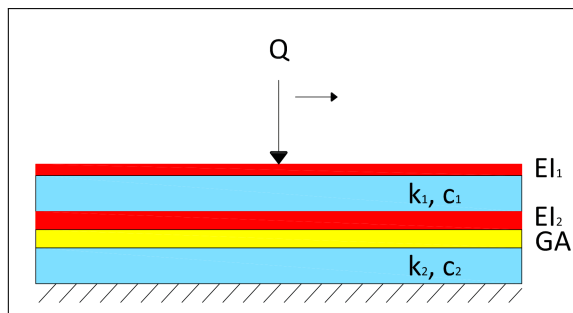
Výpočet úlohy byl zautomatizován skriptem vytvořeným ve výpočetním programu Matlab. Skript v celé své délce je uveden v příloze B.4. Grafické řešení úlohy je znázorněno na obrázku 4.4. Pro vykreslení grafu byly použity parametry $EI_1 = 6500 \text{ kNm}^2$, $EI_2 = 80000 \text{ kNm}^2$, $k_1 = 100000 \text{ kNm}^{-2}$, $k_2 = 40000 \text{ kNm}^{-2}$, $v = 30 \text{ ms}^{-1}$, $c_1 = 90 \text{ kNsm}^{-2}$, $c_2 = 120 \text{ kNsm}^{-2}$, $m_1 = 60 \text{ kg}$, $m_2 = 300 \text{ kg}$ a $Q = 100 \text{ kN}$. Většina parametrů byla převzata z knihy *Modern Railway Track*[1]. Průhybová křivka w_2 byla odvozena z rovnice 4.22.



Obr. 4.4: Svislé posunutí v závislosti na relativní souřadnici s

4.3 Dvouvrstvý systém - dynamická soustava II

Model vychází z modelu představeného v kapitole 4.2 s tím rozdílem, že je druhý nosník schopen odolávat i smykovému zatížení. Ohybová tuhost EI_2 v tomto modelu nabývá zanedbatelné hodnoty (z důvodu spolupůsobení prážců se nerovná 0). Toto zjednodušení vychází z faktu, že příčné prážce a kolejové lože nejsou schopny přenášet ohybová zatížení. Model lze interpretovat jako nekonečně dlouhou kolej se svařenými kolejnicemi diskrétně podepřenými kolejnicovými podporami (příčné prážce).



Obr. 4.5: Schéma modelu

Diferenciální rovnice:

$$EI_1 \frac{d^4 w_1(x, t)}{dx^4} + m_1 \frac{d^2 w_1(x, t)}{dt^2} + c_1 \frac{dw_1(x, t)}{dt} + k_1 [w_1(x, t) - w_2(x, t)] = 0, \quad (4.34)$$

$$EI_2 \frac{d^4 w_2(x, t)}{dx^4} - GA \frac{dw_2(x, t)^2}{dx^2} + m_2 \frac{d^2 w_2(x, t)}{dt^2} + c_2 \frac{dw_2(x, t)}{dt} + (k_1 + k_2) w_2(x, t) - k_1 w_1(x, t) = 0. \quad (4.35)$$

Stejně jako v kapitolách 2.3 a 4.1 je i při řešení této úlohy zavedena relativní souřadnice dle rovnice 4.18. Následnou substitucí rovnice 4.19 do rovnic 4.34 a 4.35 získáme diferenciální rovnice ve tvaru:

$$EI_1 \lambda^4 \frac{d^4 w_1(s)}{ds^4} + m_1 v^2 \lambda^2 \frac{d^2 w_1(s)}{ds^2} - c_1 v \lambda \frac{dw_1(s)}{ds} + k_1 [w_1(s) - w_2(s)] = 0, \quad (4.36)$$

$$EI_2 \lambda^4 \frac{d^4 w_2(s)}{ds^4} - GA \lambda^2 \frac{d^2 w_2(s)}{ds^2} + m_2 v^2 \lambda^2 \frac{d^2 w_2(s)}{ds^2} - c_2 v \lambda \frac{dw_2(s)}{ds} + (k_1 + k_2) w_2(s) - k_1 w_1(s) = 0. \quad (4.37)$$

K řešení této soustavy diferenciálních rovnic je nutné nejprve vyjádřit proměnnou w_2 z rovnice 4.34, získat první, druhou a čtvrtou derivaci a následně ji dosadit do rovnice 4.35.

$$\begin{aligned}
 w_2(s) &= \frac{EI_1\lambda^4}{k_1} \frac{d^4 w_1(s)}{ds^4} + \frac{m_1 v^2 \lambda^2}{k_1} \frac{d^2 w_1(s)}{ds^2} - \frac{c_1 v \lambda}{k_1} \frac{dw_1(s)}{ds} + w_1(s), \\
 \frac{dw_2(s)}{ds} &= \frac{EI_1\lambda^4}{k_1} \frac{d^5 w_1(s)}{ds^5} + \frac{m_1 v^2 \lambda^2}{k_1} \frac{d^3 w_1(s)}{ds^3} - \frac{c_1 v \lambda}{k_1} \frac{d^2 w_1(s)}{ds^2} + \frac{dw_1(s)}{ds}, \\
 \frac{d^2 w_2(s)}{ds^2} &= \frac{EI_1\lambda^4}{k_1} \frac{d^6 w_1(s)}{ds^6} + \frac{m_1 v^2 \lambda^2}{k_1} \frac{d^4 w_1(s)}{ds^4} - \frac{c_1 v \lambda}{k_1} \frac{d^3 w_1(s)}{ds^3} + \frac{d^2 w_1(s)}{ds^2}, \\
 \frac{d^4 w_2(s)}{ds^4} &= \frac{EI_1\lambda^4}{k_1} \frac{d^8 w_1(s)}{ds^8} + \frac{m_1 v^2 \lambda^2}{k_1} \frac{d^6 w_1(s)}{ds^6} - \frac{c_1 v \lambda}{k_1} \frac{d^5 w_1(s)}{ds^5} + \frac{d^4 w_1(s)}{ds^4},
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned}
 &EI_2\lambda^4 \left[\frac{EI_1\lambda^4}{k_1} \frac{d^8 w_1(s)}{ds^8} + \frac{m_1 v^2 \lambda^2}{k_1} \frac{d^6 w_1(s)}{ds^6} - \frac{c_1 v \lambda}{k_1} \frac{d^5 w_1(s)}{ds^5} + \frac{d^4 w_1(s)}{ds^4} \right] + \\
 &- GA \frac{dw_2^2}{dx^2} \left[\frac{EI_1\lambda^4}{k_1} \frac{d^6 w_1(s)}{ds^6} + \frac{m_1 v^2 \lambda^2}{k_1} \frac{d^4 w_1(s)}{ds^4} - \frac{c_1 v \lambda}{k_1} \frac{d^3 w_1(s)}{ds^3} + \frac{d^2 w_1(s)}{ds^2} \right] + \\
 &+ m_2 v^2 \lambda^2 \left[\frac{EI_1\lambda^4}{k_1} \frac{d^6 w_1(s)}{ds^6} + \frac{m_1 v^2 \lambda^2}{k_1} \frac{d^4 w_1(s)}{ds^4} - \frac{c_1 v \lambda}{k_1} \frac{d^3 w_1(s)}{ds^3} + \frac{d^2 w_1(s)}{ds^2} \right] + \\
 &- c_2 v \lambda \left[\frac{EI_1\lambda^4}{k_1} \frac{d^5 w_1(s)}{ds^5} + \frac{m_1 v^2 \lambda^2}{k_1} \frac{d^3 w_1(s)}{ds^3} - \frac{c_1 v \lambda}{k_1} \frac{d^2 w_1(s)}{ds^2} + \frac{dw_1(s)}{ds} \right] + \\
 &+ (k_1 + k_2) \left[\frac{EI_1\lambda^4}{k_1} \frac{d^4 w_1(s)}{ds^4} + \frac{m_1 v^2 \lambda^2}{k_1} \frac{d^2 w_1(s)}{ds^2} - \frac{c_1 v \lambda}{k_1} \frac{dw_1(s)}{ds} + w_1(s) \right] + \\
 &- k_1 w_1(s) = 0.
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

Úpravou rovnice 4.39 dojdeme k následujícímu tvaru rovnice:

$$K_1 \frac{d^8 w_1(s)}{ds^8} + K_2 \frac{d^6 w_1(s)}{ds^6} + K_3 \frac{d^5 w_1(s)}{ds^5} + K_4 \frac{d^4 w_1(s)}{ds^4} + K_5 \frac{d^3 w_1(s)}{ds^3} + K_6 \frac{d^2 w_1(s)}{ds^2} + K_7 \frac{dw_1(s)}{ds} + K_8 w_1(s) = 0, \quad (4.40)$$

kde

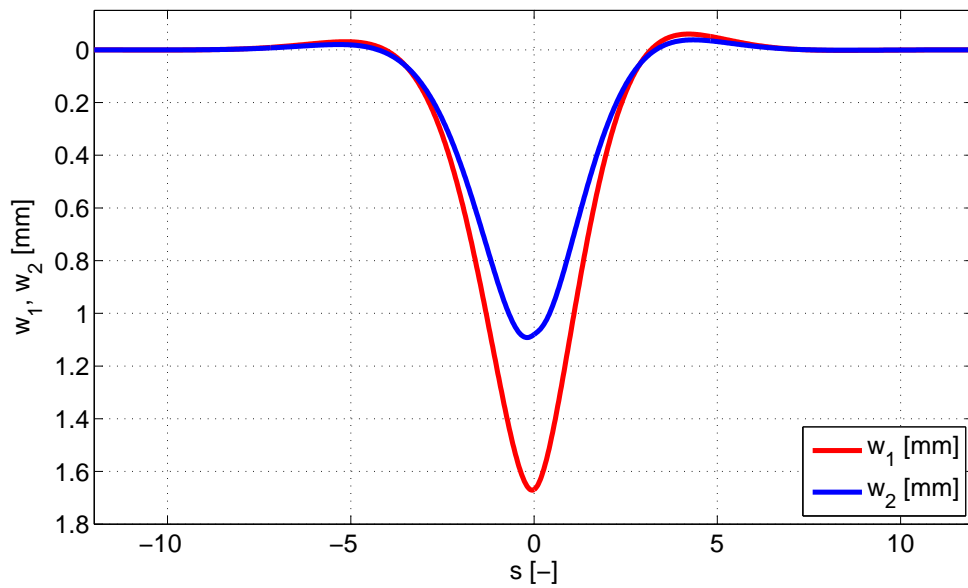
$$\begin{aligned} K_1 &= EI_2, \\ K_2 &= \frac{EI_1 m_2 v^2 + EI_2 m_1 v^2 - GAEI_2 v^2 \lambda^2}{EI_1 \lambda^2}, \\ K_3 &= -\frac{v(EI_1 c_2 + EI_2 c_1)}{EI_1 \lambda^3}, \\ K_4 &= \frac{4(EI_1 k_1 + EI_1 k_2 + EI_2 k_1 + m_1 m_2 v^4 - GAm_1 v^2)}{k_1}, \\ K_5 &= -\frac{4v(c_1 m_2 v^2 + c_2 m_1 v^2 - GAc_1)}{k_1 \lambda}, \\ K_6 &= \frac{4(m_1 k_1 v^2 + m_1 k_2 v^2 + m_2 k_1 v^2 + c_1 c_2 v^2 - GAk_1)}{k_1 \lambda^2}, \\ K_7 &= -\frac{4v(c_1 k_1 + c_1 k_2 + c_2 k_1)}{k_1 \lambda^3}, \\ K_8 &= \frac{16EI_1 k_2}{k_1}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Hledá se řešení ve tvaru $w_1 = e^{\gamma x}$:

$$K_1 \gamma^8 + K_2 \gamma^6 + K_3 \gamma^5 + K_4 \gamma^4 + K_5 \gamma^3 + K_6 \gamma^2 + K_7 \gamma + K_8 = 0. \quad (4.42)$$

Zbývající část výpočtu, včetně okrajových podmínek, je totožná s řešením uvedeným v kapitole 4.2. Nebude tedy dále rozepsána.

Výpočet byl zautomatizován skriptem vytvořeným ve výpočetním programu Matlab. Skript v celé své délce je uveden v příloze B.5. Grafické řešení úlohy je znázorněno na obrázku 4.6. Pro vykreslení grafu byly použity parametry $EI_1 = 6500 \text{ kNm}^2$, $EI_2 = 1 \text{ kNm}^2$, $GA = 6000 \text{ kN}$, $k_1 = 100000 \text{ kNm}^{-2}$, $k_2 = 40000 \text{ kNm}^{-2}$, $v = 30 \text{ ms}^{-1}$, $c_1 = 90 \text{ kNsm}^{-2}$, $c_2 = 120 \text{ kNsm}^{-2}$, $m_1 = 60 \text{ kg}$, $m_2 = 300 \text{ kg}$ a $Q = 100 \text{ kN}$. Většina parametrů byla převzata z knihy *Modern Railway Track*[1]. Průhybová křivka w_2 byla odvozena z rovnice 4.38.



Obr. 4.6: Svislé posunutí v závislosti na relativní souřadnici s

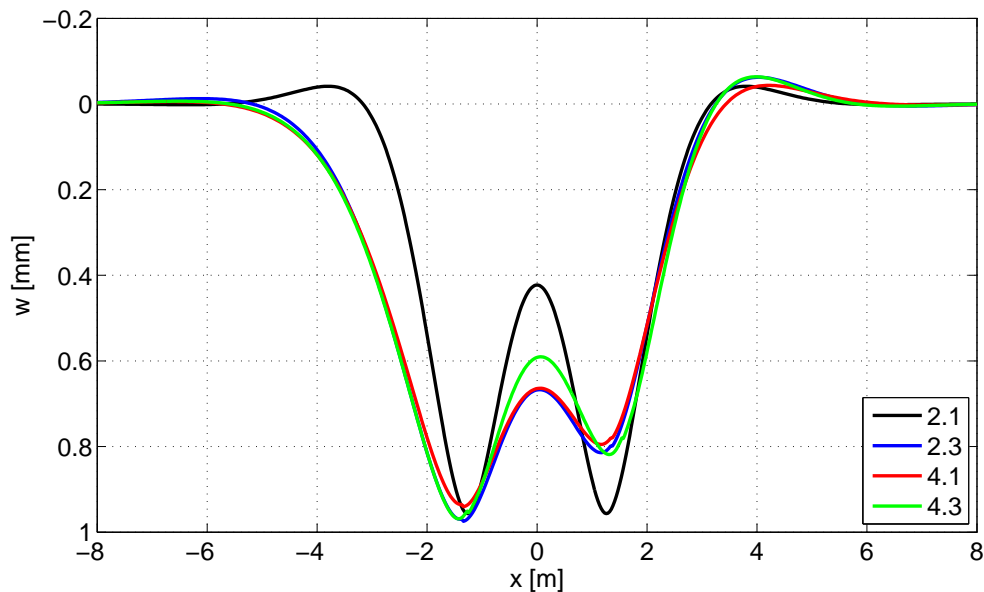
4.4 Kvalitativní hodnocení modelů

Kvalitativní hodnocení záznamu svislých pohybů pražců vychází z vizuálního porovnání záznamu s očekávanými výsledky podle předchozí teoretické analýzy. Je zřejmé, že průběh svislého zatlačení pražce do kolejového lože silně souvisí s poměrem hodnoty rozvoru podvozku d a charakteristickou délkou kolejového roštu L . Charakteristická délka kolejového roštu souvisí se spojitou svislou tuhostí kolejové jízdní dráhy k a ohybovou tuhostí namáhané vrstvy EI .

V této kapitole je prezentováno kvalitativní hodnocení modelů představených v kapitolách 2.1, 2.3, 4.1, 4.2 a 4.3. Modely jsou porovnány jak mezi sebou, tak s daty naměřenými v Plané nad Lužnicí. Železniční svršek je tvořen kolejnicí 60 E1, svěrkami W14 a pražci B 91S/1. Z naměřených dat je patrný podvozek složený ze dvou náprav. Z toho důvodu musí být průhybové křivky jednotlivých modelů superponovány s odsazením rovnajícím se rozvoru podvozku. S přihlédnutím k faktu, že všechny úlohy jsou zadány lineárními diferenciálními rovnicemi, lze princip lineární superpozice použít.

4.4.1 Vzájemné porovnání analytických modelů

Na obr. 4.7 jsou porovnány modely představené v kapitolách 2.1, 2.3, 4.1 a 4.3.

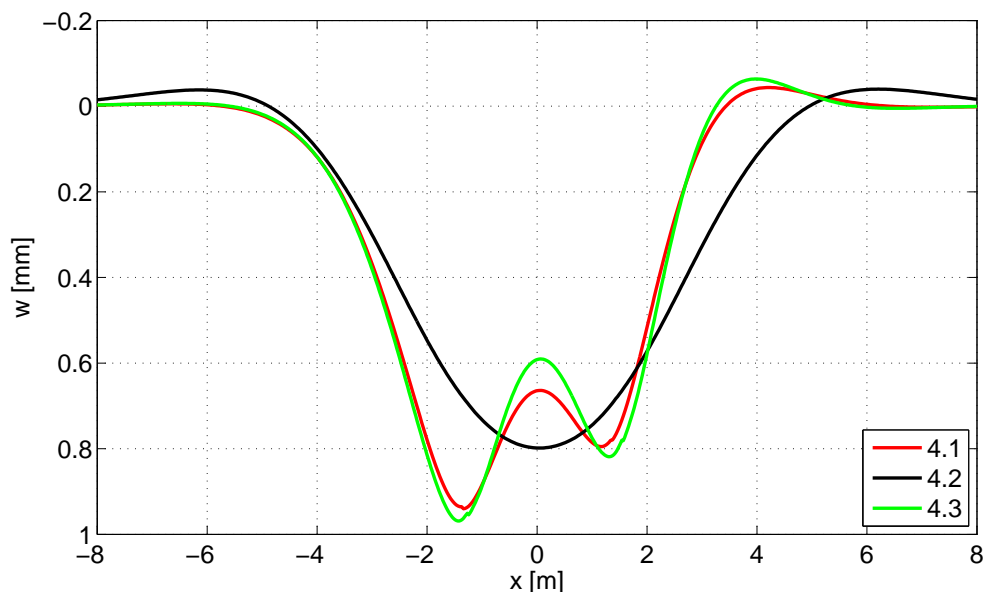


Obr. 4.7: Porovnání modelů z kap. 2.1, 2.3, 4.1 a 4.3

Průhybová křivka pro model namáhaný statickou silou (2.1) se značně liší od průhybových křivek modelů zatížených pohyblivou silou, a to především z důvodu zanedbání veličin závislých na čase. Zajímavým faktem je, že v oblasti druhé nápravy se průhyby pro model zatížený statickou silou a modely zatížené pohyblivou silou téměř neliší. To však nelze říci o oblasti kolem nápravy první, kde jsou rozdíly průhybů nezanedbatelné. Z obrázku je tedy zřejmý vliv pohyblivého břemena na celkový tvar průhybové křivky.

Při porovnání modelů zatížených pohyblivou silou lze pozorovat pouze mírné rozdíly ve tvaru ohybových křivek, viz obr. 4.7. Největší rozdíly ve tvarech těchto křivek lze zaznamenat v jejich střední části (mezi nápravami) a v části pravé (místo vzniku zdvihové vlny).

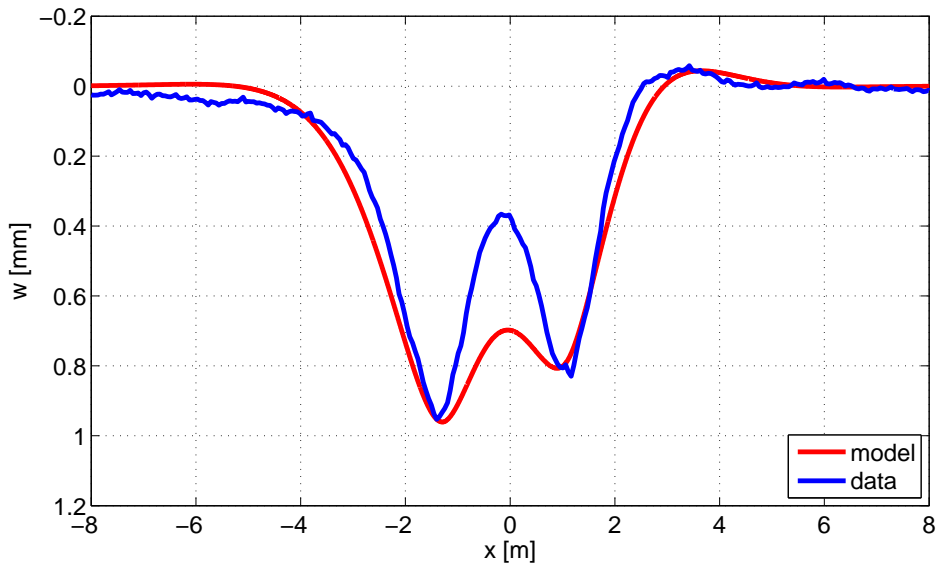
Výjimkou je model dvouvrstvého systému, jehož druhá vrstva je schopna přenášet ohybové zatížení. Průhybová křivka tohoto modelu je na obr. 4.8 porovnána s ostatními modely z kap. 4. Z křivky není zřejmé, že se jedná o kolejový rošt zatížený dvěma nápravami. To je mimo jiné způsobeno právě ohybovou tuhostí druhé vrstvy EI_2 , která má na chování modelu značný vliv. Při snižování ohybové tuhosti EI_2 lze pozorovat, jak se průhybová křivka svým tvarem přibližuje průhybovým křivkám modelů, s nimiž je porovnána.



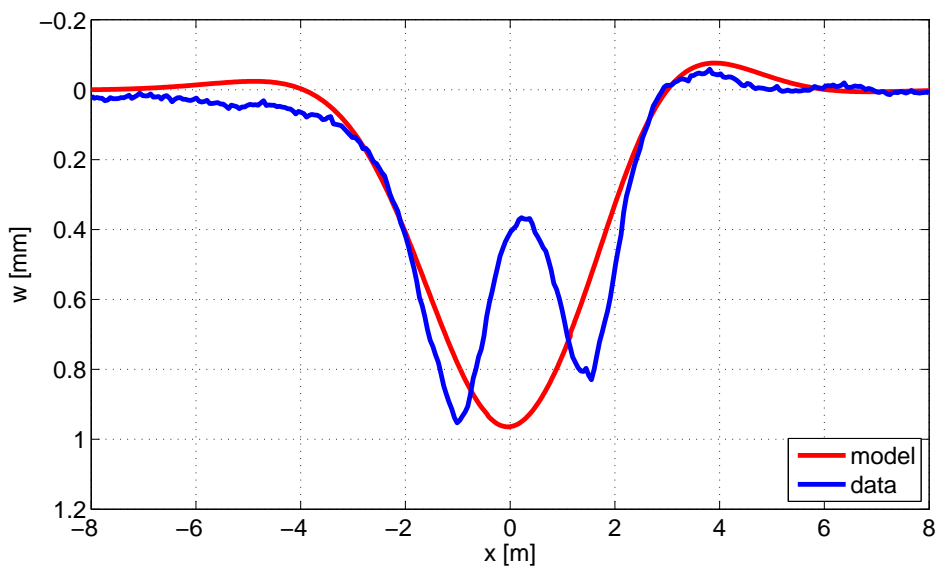
Obr. 4.8: Porovnání modelů z kap. 4.1, 4.2 a 4.3

4.4.2 Porovnání analytických modelů s naměřenými daty

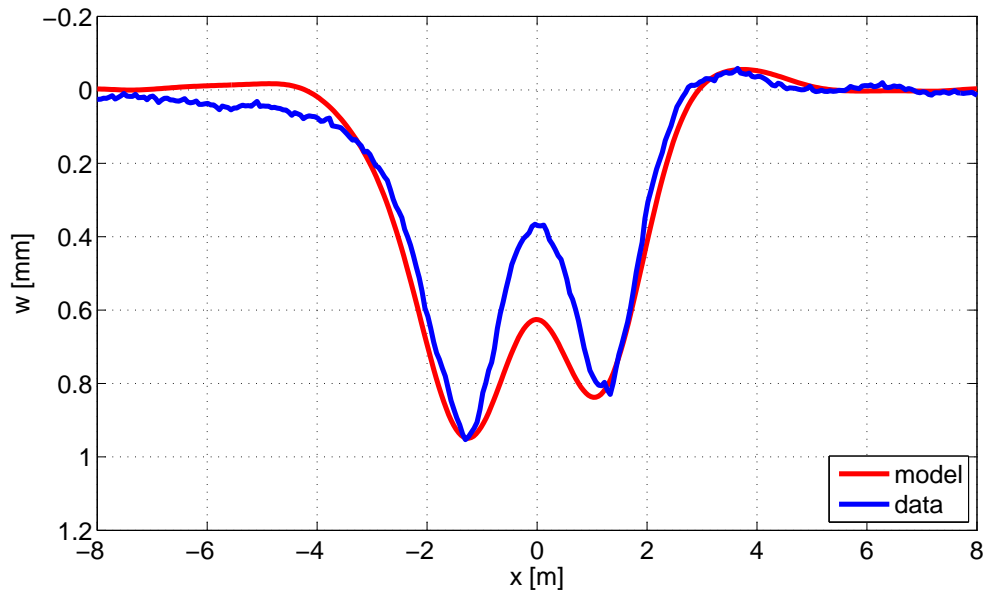
Obrázky 4.9, 4.10 a 4.11 reprezentují jednotlivé modely porovnané s daty naměřenými v Plané nad Lužnicí. Naměřená data zaznamenávají průhyb kolejového roštu při průjezdu prvního podvozku hnacího vozidla rychlostí 77 km/h .



Obr. 4.9: Porovnání Pasternakova modelu zatíženého pohyblivou silou a naměřených dat



Obr. 4.10: Porovnání dvouvrstvého modelu z kap. 4.2 zatíženého pohyblivou silou a naměřených dat



Obr. 4.11: Porovnání dvouvrstvého modelu z kap. 4.3 zatíženého pohyblivou silou a naměřených dat

Z porovnaných modelů se jako uspokojivý jeví Pasternakův model namáhaný pohyblivou silou a model dvouvrstvého systému přenášejíci smykové zatížení. Průběh průhybových křivek těchto dvou modelů poměrně věrně kopíruje naměřená data.

Průhybová křivka modelu dvouvrstvého systému, jehož obě vrstvy přenáší ohybové zatížení se od naměřených dat značně liší, a proto není tento model pro popis chování koleje tvořené kolejovým roštem vhodný. Vhodnější využití lze najít při popisu chování koleje tvořené kontinuálně podepřenými kolejnicemi.

5 ZÁVĚR

V této diplomové práci jsou kvalitativně zhodnoceny rozšířené modely sestavené v kapitolách 4.1, 4.2 a 4.3. Z hlediska tvarové podobnosti se jako nejpřesnější jeví model představený v kapitole 4.3. Jedná se o dvouvrstvý systém přenášející ohybové i smykové zatížení. Vzhledem ke svému uspořádání umožňuje model vyšetřování jednotlivých konstrukčních prvků, jako jsou například podložky pod kolejnici. To lze považovat za výhodu.

Zmíněný model věrně vystihuje zdvihovou vlnu tvořící se před jedoucím kolem. Při zkoumání okolí střední části grafu lze pozorovat oproti naměřeným datům zvýšený průhyb koleje v prostoru mezi nápravami. V levé části grafu vykazuje model zdvihovou vlnu, která dle naměřených dat v konstrukci nevzniká.

Nutno konstatovat, že analytické modely nemusí vystihovat reálné chování konstrukce dostatečně přesně. Důvodem může být například zanedbání prostorového uspořádání při sestavování modelu nebo zanedbání imperfekcí. Mezi tyto imperfekce může patřit například vlnkovitost hlav kolejnic, nedokonalé podepření pražců, chybějící konstrukční části (například svěrky) a nedotažené šrouby svěrek. Všechny tyto nedokonalosti mohou mít značný vliv na celkovou odezvu.

Avšak ani data získaná v terénu nevystihují dokonale chování kolejového roštu. A to především z toho důvodu, že měření absolutních posunů kolejové jízdní dráhy je obtížné. Přímé metody měření při použití snímačů posunutí není možné použít, protože nelze nalézt v bezprostředním okolí dráhy pevný bod, vůči kterému by bylo možné měření vztáhnout. Nepřímé metody měření posunů jsou založeny na výpočtu posunutí ze záznamu zrychlení vibrací dvojí integrací (jak hardwarovou tak softwarovou), příp. jednoduchou integrací ze záznamu rychlosti vibrací. Tato metoda měření je použitelná jen pro krátké oblasti signálu vzhledem k tomu, že při integraci snímaných vzorků zrychlení vibrací dojde ke dvojitmu sčítání chyb měření. [9]

Nevýhody analytických modelů lze částečně odstranit sestavením modelů numerických, které jsou schopny brát v potaz více parametrů určujících chování kolejového roštu. Problematika numerických modelů bude blíže zkoumána v rámci doktorského studia studenta.

LITERATURA

- [1] ESVELD, Coenraad. *Modern railway track*. 2nd ed. Zaltbommel: MRT-Productions, c2001. ISBN 90-800-3243-3.
- [2] HETENYI, M. *Beams on elastic foundation: theory with applications in the fields of civil and mechanical engineering*. 2nd ed. London: G. Cumberlege, Oxford university press, 1946. ISBN 90-800-3243-3.
- [3] TIMOSHENKO, S. *Method of analysis of statical and dynamical stresses in rail*. Proc. Second Int. Congress of Appl. Mech., Zurich, Switzerland, pp. 12-17, 1926
- [4] FRÝBA, Ladislav. *Vibration of solids and structures under moving loads*. Prague: Academia, 1972.
- [5] KOLOUŠEK, Vladimír. *Dynamika stavebních konstrukcí: celostátní učebnice pro vysoké školy. 2., zcela přeprac. vyd.* Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1967.
- [6] KOLOUŠEK, Vladimír. *Dynamika stavebních konstrukcí II. 2., doplněné vydání knihy „Stavebná dynamika spojitých nosníků a rámových soustav“*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1956.
- [7] LICHTBERGER, Bernhard. *Handbuch Gleis: Unterbau, Oberbau, Instandhaltung, Wirtschaftlichkeit. 3., komplett überarb. Neuaufl.* Hamburg,: Eurailpress, 2010. ISBN 978-3-7771-0400-3.
- [8] POPP, Karl. a W. O. SCHIEHLEN. *System dynamics and long-term behaviour of railway vehicles, track and subgrade*. New York: Springer, 2003. ISBN 35-404-3892-0.
- [9] PLÁŠEK, Otto, Jaroslav SMUTNÝ, Richard SVOBODA a Miroslava HRUZÍKOVÁ. Měření parametrů vibrací betonových pražců v kolejovém loži jako nástroj analýzy chování konstrukce koleje při dynamickém zatížení. *Česko - Slovenská konference Experiment '07*. 2007, **2007**, 8.
- [10] PLÁŠEK, Otto, Jaroslav SMUTNÝ, Richard SVOBODA a Miroslava HRUZÍKOVÁ. *Analysis of Railway Track Dynamic Parameters*. 2009, **2009**, 9.
- [11] PLÁŠEK, Otto, Jaroslav SMUTNÝ, Richard SVOBODA, Miroslava HRUZÍKOVÁ a Vlastislav SALAJKA. *Assessment of railway track dynamic parameters*. 2007, **2007**, 7.

-
- [12] PLÁŠEK, Otto. *Železniční stavby: železniční spodek a svršek*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2004. ISBN 80-214-2621-7.
- [13] PARVANOV, S. *Beams on elastic foundation*. Sofia, 2011. Lecture notes. University of Architecture, Civil Engineering and Geodesy.
- [14] SHI-PEING, Chang. *Infinite beams on an elastic foundation*. Rolla, Missouri, 1965. University of Missouri at Rolla.
- [15] KONVALINKA, Petr. *Analýza stavebních konstrukcí*. Praha, 2009. České vysoké učení technické v Praze.
- [16] Complex Roots Finder - File Exchange - MATLAB Central. *MathWorks* [online]. Natick: Marco Cococcioni, 2006 [cit. 2016-12-21]. Dostupné z: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/10357-complex-roots-finder>

SEZNAM SYMBOLŮ, VELIČIN A ZKRATEK

w	svislé posunutí ... [m]
w ₀	statický průhyb ... [m]
Q	svislá nápravová síla ... [N]
d	rozvor podvozku ... [m]
q	svislé spojité zatížení ... [Nm ⁻¹]
E	modul pružnosti ... [Nm ⁻²]
I	moment setrvačnosti ... [m ⁴]
G	modul pružnosti ve smyku ... [Nm ⁻²]
A	plocha průřezu ... [m ²]
EI	ohybová tuhost průřezu ... [Nm ²]
GA	smyková tuhost průřezu ... [N]
k	tuhost pružiny ... [Nm ⁻²]
c	tlumení ... [Nsm ⁻²]
m	hmotnost ... [kg]
v	rychlost ... [ms ⁻¹]
L	charakteristická délka kolejového roštu ... [m]
M	ohybový moment ... [Nm]
D	posouvající síla ... [N]
t	čas ... [s]
x	horizontální souřadnice ... [m]
s	relativní souřadnice ... [–]

SEZNAM PŘÍLOH

A	Výčet konstant P	56
B	Vybrané skripty programu Matlab	57
B.1	Winklerův model - dynamická soustava	57
B.2	Dvouvrstvý systém - statická soustava	60
B.3	Pasternakův model - dynamická soustava	65
B.4	Dvouvrstvý systém - dynamická soustava I	68
B.5	Dvouvrstvý systém - dynamická soustava II	73
C	Obsah přiloženého CD	77