



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

**VZÁJEMNÁ INTERAKCE TLAKOVÝCH PULSACÍ A
KMITÁNÍ TRUBICE**

MUTUAL INTERACTION OF PRESSURE PULSATIONS AND PIPE VIBRATION

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Zdeněk Hrazdíra

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Vladimír Habán, Ph.D.

BRNO 2016

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav matematiky
Student:	Zdeněk Hrazdíra
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	doc. Ing. Vladimír Habán, Ph.D.
Akademický rok:	2015/16

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Vzájemná interakce tlakových pulsací a kmitání trubice

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Tlakové pulsace úzce souvisí s kmitáním trubice. V technické praxi jsou tyto dva jevy většinou řešený samostatně, přitom silové působení od tlakových pulsací budí vibrace potrubí a naopak vibrace potrubí budí tlakové pulsace. Úkolem diplomanta bude řešit na jednoduchém příkladě tlakové pulsace a vibrace společně.

Cíle bakalářské práce:

Literární rešerše problematiky.

Na jednoduchém příkladě řešet vzájemnou interakci tlakových pulsací a vibrací potrubí.

Seznam literatury:

Bude úkolem diplomanta provést literární rešerši.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2015/16

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

ABSTRAKT

Cílem této práce je zjištění vlivu kmitání trubice na tlakové pulsace v kapalině. Matematický popis soustavy trubice-kapalina je složen z patřičných okrajových podmínek a z vlnových rovnic odvozených ze základních fyzikálních vztahů. V práci je nejprve řešen zjednodušený model kmitání kapaliny bez uvažování trubice, který je následně porovnán s výsledky analýzy vzájemné interakce.

KLÍČOVÁ SLOVA

Tlakové pulsace, rezonance, kmitání trubice, vlastní frekvence

ABSTRACT

The aim of this thesis is to find out the effects of pipe vibrations on pressure pulsations in liquids. The pipe-liquid system is mathematically described by proper boundary conditions and wave equations, which are derived from basic physical laws. Firstly, simplified model of only liquid is considered, which is then compared to the results obtained from analysis of pipe-liquid mutual interaction.

KEYWORDS

Pressure pulsations, resonation, pipe vibration, eigenfrequency

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Vzájemná interakce tlakových pulsací a kmitání trubice* vypracoval samostatně pod vedením pana doc. Ing. Vladimíra Habána, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu použitých zdrojů.

V Brně dne 26.05.2016

.....
Zdeněk Hrazdíra

Tímto děkuji panu doc. Ing. Vladimíru Habánovi, Ph.D. za odborné vedení mé práce, vstřícnost a trpělivost.

Zdeněk Hrazdírka

OBSAH

Úvod	1
1 Fyzikální rovnice	3
1.1 Rovnice pro kapalinu	3
1.1.1 Rovnice kontinuity	3
1.1.2 Eulerova rovnice hydrodynamiky	4
1.2 Rovnice pro trubici	4
1.2.1 Hookův zákon	4
1.2.2 Pohybová rovnice	5
2 Matematický model	7
2.1 Soustava rovnic a její obecné řešení	7
2.2 Okrajové podmínky	9
2.2.1 Rovnováha sil	9
2.2.2 Kinematická podmínka soustavy	11
2.3 Vyjádření zbylých proměnných	11
2.3.1 Vyjádření tlaku	11
2.3.2 Vyjádření síly	12
3 Kmitání kapaliny bez interakce s trubicí	13
3.1 Zjednodušený matematický model	13
3.1.1 Vlnová rovnice kapaliny a okrajové podmínky	13
3.1.2 Splnění okrajových podmínek	13
3.2 Tvary tlaku a rychlosti kapaliny - vzorový příklad	14
4 Vzájemná interakce kmitání trubice a tlakových pulsací	19
4.1 Matematický model vzájemné interakce	19
4.1.1 Vlnové rovnice a okrajové podmínky	19
4.1.2 Splnění okrajových podmínek	20
4.2 Průběhy proměnných - vzorový příklad	22
5 Vynucené kmitání	31
5.1 Matematický model	31
5.2 Tvary tlaku a rychlosti kapaliny - vzorový příklad	32
6 Porovnání modelů	37
6.1 Porovnání průběhů proměnných v kapalině	37
6.2 Porovnání rezonančních frekvencí	40

7 Závěr	43
Seznam použitých zdrojů	47

ÚVOD

V této práci se věnujeme vzájemné interakci tlakových pulsací kapaliny a kmitání trubice. Motivací pro řešení této problematiky je fakt, že tyto dva jevy spolu úzce souvisí, avšak v technické praxi se řeší odděleně. V práci nejprve odvodíme fyzikální rovnice zvlášť pro trubici a kapalinu, pomocí kterých sestavíme matematický model soustavy trubice-kapalina, který následně propojíme pomocí okrajových podmínek na koncích trubice. Tento model se běžně vytváří pomocí přenosových matic, nebo se úloha řeší numericky pomocí metody konečných prvků či kontrolních objemů. V této práci je však použit jiný, poněkud ryze matematický analytický pohled ve formě vlnových rovnic. Tyto rovnice jsou odvozeny právě ze zmiňovaných základních fyzikálních rovnic. Vlnové rovnice jsou pak řešeny pomocí separace proměnných, z čehož dostáváme obecná řešení všech proměnných soustavy - tlak v kapalině, rychlost kapaliny, síla v trubici (napětí) a posunutí trubice.

Řešení jsou závislá na tzv. vlastní frekvenci. Tyto frekvence nejprve odvodíme pro jednoduchý model, ve kterém nebudeme uvažovat vliv vzájemné interakce. Poté zjistíme tyto vlastní (rezonanční) frekvence pro plnohodnotný model vzájemné interakce a výsledky v závěru porovnáme. Práce se zabývá také problematikou vynuceného kmitání, na které jsou ilustrovány jednotlivé rezonanční frekvence. Text je doprovázen mnoha grafy znázorňujícími tvary průběhů jednotlivých proměnných v závislosti na poloze v trubici, frekvenci či čase.

1 FYZIKÁLNÍ ROVNICE

Abychom se mohli zabývat tlakovými pulsacemi či kmitáním trubice, musíme nejdřív definovat rovnice, podle kterých se trubice a kapalina chovají. Jsou to základní fyzikální rovnice popisující danou část soustavy pevné látky a kapaliny. Nejprve tyto rovnice odvodíme odděleně.

1.1 Rovnice pro kapalinu

1.1.1 Rovnice kontinuity

Rovnice kontinuity vychází ze zákona zachování hmoty v daném objemu ΔV , tedy

$$\frac{dm}{dt} = 0. \quad (1.1)$$

Jelikož $dm = \rho\Delta V$, můžeme psát

$$(\rho\Delta V)\frac{d}{dt} = 0, \quad (1.2)$$

derivujeme součin

$$\frac{d\rho}{dt}\Delta V + \rho\frac{d}{dt}\Delta V = 0, \quad (1.3)$$

použijeme Gauss-Ostrogradského větu ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} dV = \frac{d}{dt}V(t) = \int_{V(t)} \text{div}v_i dV = \int_S v_i n_i dS = Q, \quad (1.4)$$

kterou aplikujeme na rovnici (1.3), čímž dostaneme

$$\frac{d\rho}{dt}\Delta V + \rho \int_S v_i n_i dS = 0, \quad (1.5)$$

kde S je povrch elementu trubice vymežující objem ΔV . Pokud nyní uvažujeme, že

$$\Delta V = S(x)dx, \quad (1.6)$$

rovnice přejde do tvaru

$$\frac{d\rho}{dt}\Delta V + \rho \int_{\Delta V} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dV = 0. \quad (1.7)$$

Pokud uvažujeme pohyb kapaliny jen v jedné ose a tuto rovnici zintegrujeme a vykrátíme ΔV , dostaneme

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = 0. \quad (1.8)$$

Člen $\frac{d\rho}{dt}$ vyjádříme z praktických důvodů z lokální rovnováhy mezi tlakem a hustotou

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{c_K^2} \frac{\partial p(x, t)}{\partial t}. \quad (1.9)$$

Po zpětném dosazení do rovnice (1.8) dostáváme rovnici kontinuity pro kapalinu v trubici

$$\frac{1}{c_K^2} \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + \rho \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = 0. \quad (1.10)$$

1.1.2 Eulerova rovnice hydrodynamiky

Eulerova rovnice hydrodynamiky (v dalším jen ERHD) vyjadřuje rovnováhu mezi silami setrvačnými od vlastního pohybu částic ideální kapaliny, silami tlakovými a silami objemovými. Můžeme tedy napsat rovnováhu sil ve tvaru

$$F_s + F_o + F_p = 0. \quad (1.11)$$

Objemové síly jsou např. tíha kapaliny a odstředivá síla. V dalším tyto síly nebudeme uvažovat, tedy pro $F_o = 0$ rovnice (1.11) přejde do tvaru

$$F_s + F_p = 0. \quad (1.12)$$

Setrvačnou sílu hmotnostního elementu uvažujeme jako

$$F_s = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}, \quad (1.13)$$

tlakovou sílu hmotnostního elementu uvažujeme jako

$$F_p = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p(x, t)}{\partial x}. \quad (1.14)$$

Po dosazení (1.14) a (1.13) do (1.12) a upravení dostáváme ERHD ve tvaru

$$\rho \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} = 0. \quad (1.15)$$

1.2 Rovnice pro trubici

1.2.1 Hookův zákon

Hookův zákon popisuje deformaci v závislosti na tahovém či tlakovém zatížení. Uvažujme nyní, že je relativní prodloužení ϵ přímo úměrné normálovému napětí σ , tedy

$$\sigma = E\epsilon, \quad (1.16)$$

kde E je konstanta úměrnosti - Youngův model pružnosti v tahu/tlaku. Pro napětí v trubici s obsahem průřezu S_T platí

$$\sigma = \frac{F(x, t)}{S_T}. \quad (1.17)$$

Relativní prodloužení ϵ můžeme vyjádřit z posunutí trubice

$$\epsilon = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}. \quad (1.18)$$

Po dosazení (1.18) a (1.17) do (1.16) a následovném upravení dostáváme Hookův zákon pro trubici ve tvaru

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{F(x, t)}{ES_T}. \quad (1.19)$$

1.2.2 Pohybová rovnice

Mějme nyní pružnou tyč, jejíž délka je mnohokrát větší, než její průměr. Tyč má konstantní průřez a napětí na ni působící je rovnoměrně rozloženo po průřezu - tyč uvažujeme bez koncentrátorů napětí. Pro element této tyče platí v mechanice kontinua pohybová rovnice ve tvaru

$$S_T \rho_T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx = S_T \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x} dx. \quad (1.20)$$

Vykrácením S_T a dx dostáváme upravenou rovnici

$$\rho_T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x}. \quad (1.21)$$

Napětí σ je však ve tvaru

$$\sigma = \frac{F(x, t)}{S_T}. \quad (1.22)$$

Jelikož se v rovnici (1.21) vyskytuje člen $\frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x}$, derivujeme (1.22) a dosadíme (1.18), čímž získáváme

$$\frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x} = E \frac{\partial \epsilon(x, t)}{\partial x} = E \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}. \quad (1.23)$$

Pokud se nyní vrátíme k rovnici (1.21) a dosadíme do ní (1.23), rovnice přejde na tvar

$$\frac{\rho_T}{E} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}. \quad (1.24)$$

Člen $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$ vyjádříme z rovnice (1.19) tímto způsobem

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}}{\partial x} = \frac{\partial \frac{F(x, t)}{ES_T}}{\partial x}. \quad (1.25)$$

Pokud dosadíme zpět do rovnice (1.24), dostáváme

$$\frac{\rho_T}{E} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial \frac{F(x, t)}{ES_T}}{\partial x}. \quad (1.26)$$

Rychlost zvuku v trubici je definována vztahem

$$c_T = \sqrt{\frac{E}{\rho_T}}, \quad (1.27)$$

což pokud dosadíme do (1.26), získáme finální rovnici pro podélné kmity trubice

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{c_T^2}{ES_T} \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} = 0. \quad (1.28)$$

2 MATEMATICKÝ MODEL

Z podrobně odvozených fyzikálních rovnic pro kapalinu a trubici v kapitole 1 nyní sestavíme matematický model soustavy tvořené těmito dvěma složkami. Tyto čtyři rovnice (dvě pro pevnou a dvě pro kapalnou část soustavy) vhodně transformujeme na dvě parciálně diferenciální rovnice popisující trubici a kapalinu odděleně. Následně rovnice provázeme a vyjádříme zbylé proměnné.

2.1 Soustava rovnic a její obecné řešení

Připomeňme si nyní soustavu fyzikálních rovnic z kapitoly 1:

$$\frac{1}{c_K^2} \cdot \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + \rho \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \frac{F(x, t)}{ES_T} = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{c_T^2}{ES_T} \cdot \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (2.4)$$

Pokud zderivujeme rovnici (2.3) podle proměnné x a upravíme, dostaneme

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{E \cdot S_T} \cdot \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} = 0. \quad (2.5)$$

Všimněme si, že člen

$$- \frac{1}{E \cdot S_T} \cdot \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} \quad (2.6)$$

se vyskytuje v rovnici (2.3) i (2.4). Pokud členy z obou rovnic vyjádříme a porovnáme, dostaneme rovnici

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c_T^2 \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad (2.7)$$

což je vlnová rovnice pro trubici. Podobně, pokud zderivujeme rovnici (2.1) podle proměnné x a rovnici (2.2) podle proměnné t , dostaneme rovnice

$$\frac{1}{c_K^2} \cdot \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t \partial x} + \rho \cdot \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (2.8)$$

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x \partial t} = 0. \quad (2.9)$$

Opět si můžeme všimnout, že člen

$$\frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t \partial x} \quad (2.10)$$

se vyskytuje v (2.8) i (2.9), vyjádříme ho tedy a upravíme. Dostaneme

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = c_K^2 \cdot \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}, \quad (2.11)$$

což je vlnová rovnice pro kapalinu. Získali jsme tedy dvě vlnové rovnice popisující zvlášť pevnou a kapalnou složku. Matematický model soustavy se tedy zjednodušil na dvě parciálně diferenciální rovnice

$$u_{tt} = c_T^2 \cdot u_{xx}, \quad (2.12)$$

$$v_{tt} = c_K^2 \cdot v_{xx}. \quad (2.13)$$

Tyto lineární parciálně diferenciální rovnice řešíme metodou separace proměnných, hledáme tedy řešení ve tvaru

$$u(x, t) = X_u(x)T_u(t), \quad (2.14)$$

$$v(x, t) = X_v(x)T_v(t). \quad (2.15)$$

Tato řešení musí splňovat danou vlnovou rovnici, dosadíme je tedy a derivujeme

$$X_u(x)T_u''(t) = c_T^2 X_u''(x)T_u(t), \quad (2.16)$$

$$X_v(x)T_v''(t) = c_K^2 X_v''(x)T_v(t). \quad (2.17)$$

Po vhodné úpravě dostáváme

$$\frac{T_u''(t)}{T_u(t)} = c_T^2 \frac{X_u''(x)}{X_u(x)} = \lambda, \quad (2.18)$$

$$\frac{T_v''(t)}{T_v(t)} = c_K^2 \frac{X_v''(x)}{X_v(x)} = \lambda. \quad (2.19)$$

Jelikož je levá strana rovnice závislá jen na proměnné t a pravá jen na proměnné x a navzájem se rovnají, výrazy na levé i pravé části rovnice se musí rovnat nějaké konstantě - označme λ . Každá z těchto dvou rovnic nám vlastně dává další dvě rovnice vzhledem k λ , jednu obsahující $\frac{T_i''(t)}{T_i(t)}$ a jednu obsahující $c_i^2 \frac{X_i''(x)}{X_i(x)}$. Dostaneme tedy čtyři rovnice ve tvarech

$$T_u''(t) = \lambda T_u(t), \quad (2.20)$$

$$X_u''(x) = \frac{\lambda}{c_T^2} X_u(x), \quad (2.21)$$

$$T_v''(t) = \lambda T_v(t), \quad (2.22)$$

$$X_v''(x) = \frac{\lambda}{c_K^2} X_v(x). \quad (2.23)$$

Problém najít řešení parciálně diferenciálních rovnic jsme tedy převedli na problém řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic. Tyto rovnice jsou typu LODR 2

- lineární obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu, pokud nyní vhodně zvolíme separační konstantu $\lambda = (i\omega)^2$, jejich obecné řešení je ve tvaru

$$X_u(x) = a_1 e^{\pm i \frac{\omega}{c_T} x}, \quad (2.24)$$

$$T_u(t) = a_2 e^{\pm i\omega t}, \quad (2.25)$$

$$X_v(x) = b_1 e^{\pm i \frac{\omega}{c_K} x}, \quad (2.26)$$

$$T_v(t) = b_2 e^{\pm i\omega t}. \quad (2.27)$$

Obecné řešení vlnových rovnic $X_i(x)T_i(t)$ je tedy tvaru

$$u(x, t) = c_1 e^{i\omega t} e^{i \frac{\omega}{c_T} x} + c_2 e^{i\omega t} e^{-i \frac{\omega}{c_T} x} + c_3 e^{-i\omega t} e^{i \frac{\omega}{c_T} x} + c_4 e^{-i\omega t} e^{-i \frac{\omega}{c_T} x}, \quad (2.28)$$

$$v(x, t) = k_1 e^{i\omega t} e^{i \frac{\omega}{c_K} x} + k_2 e^{i\omega t} e^{-i \frac{\omega}{c_K} x} + k_3 e^{-i\omega t} e^{i \frac{\omega}{c_K} x} + k_4 e^{-i\omega t} e^{-i \frac{\omega}{c_K} x}. \quad (2.29)$$

Členy obsahující $e^{-i\omega t}$ nyní vynecháme, protože řešení daných vlnových rovnic lze rozdělit na dvě řešení zvlášť se členy $e^{i\omega t}$ a $e^{-i\omega t}$, která jsou identická, konstanty c_3, c_4, k_3, k_4 tedy uvažujeme nulové. Výsledné obecné řešení vlnových rovnic je tedy ve tvaru

$$u(x, t) = c_1 e^{i\omega t} e^{i \frac{\omega}{c_T} x} + c_2 e^{i\omega t} e^{-i \frac{\omega}{c_T} x}, \quad (2.30)$$

$$v(x, t) = k_1 e^{i\omega t} e^{i \frac{\omega}{c_K} x} + k_2 e^{i\omega t} e^{-i \frac{\omega}{c_K} x}, \quad (2.31)$$

kde ω jsou vlastní frekvence soustavy trubice-kapalina. Nyní vzniká několik problémů. Zatím neznáme obecná řešení zbylých proměnných - tlaku a síly. Abychom mohli určovat tvary řešení těchto vlnových rovnic, potřebujeme znát ω a okrajové podmínky. Navíc jsou rovnice zatím pořád nezávislé - řešení $u(x, t)$ nijak nezávisí na řešení $v(x, t)$ a naopak. V dalším zjistíme vztahy mezi zbylými proměnnými a proměnnými vyjádřenými vlnovými rovnicemi, odvodíme okrajové podmínky a zaručíme provázanost $u(x, t)$ a $v(x, t)$ právě pomocí nich.

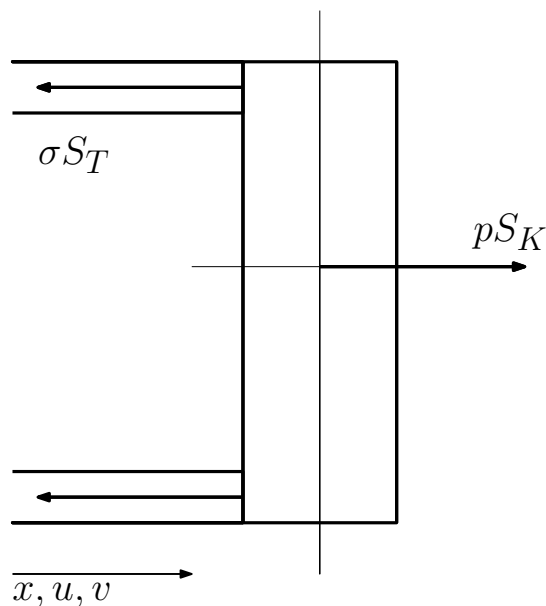
2.2 Okrajové podmínky

Soustava kapaliny a trubice musí jako každá jiná fyzikální soustava splňovat rovnováhu sil a kinematické podmínky. V dalším se na tyto podmínky podíváme podrobněji a odvodíme z nich nutné okrajové podmínky pro náš matematický model.

2.2.1 Rovnováha sil

Jelikož posuvy a rychlosti uvažujeme jenom v jedné ose (osa x), můžeme tedy psát rovnováhu sil ve tvaru

$$\sum F_x = 0. \quad (2.32)$$



Obr. 2.1: Znáornění orientace proměnných na konci trubice $x = L$.

V ose x působí dvě síly - síla od kapaliny a síla od trubice. Síla od kapaliny je ve tvaru

$$F_K = p(x, t)S_K, \quad (2.33)$$

síla od trubice je ve tvaru

$$F_T = \sigma(x, t)S_T. \quad (2.34)$$

Napišeme tedy rovnováhu sil (s orientací podle Obr. 2.1) na koncích trubice

$$S_K p(x, t) - S_T \sigma(x, t) = 0, \quad (2.35)$$

kde S_K a S_T jsou obsahy průřezů kapaliny a trubice. Výraz $\sigma(x, t)$ vyjádříme z Hookova zákona, dosadíme a upravíme, tedy

$$S_K p(x, t) = ES_T \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}. \quad (2.36)$$

Vzhledem k vlnovým rovnicím v matematickém modelu je vhodné vyjádřit $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$, tedy

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{S_K}{ES_T} p(x, t), \quad (2.37)$$

což bude první okrajová podmínka pro vlnové rovnice. Okraje uvažujeme pro $x = 0$ a $x = L$, dostáváme podmínky

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{S_K}{ES_T} p(0, t), \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = \frac{S_K}{ES_T} p(L, t). \quad (2.39)$$

Můžeme si všimnout, že tyto Neumannovy okrajové podmínky dávají do spojitosti tlak kapaliny a posuv trubice na koncích $x = 0$ a $x = L$, z čehož plyne, že jsou vlnové rovnice (2.12) a (2.13) přes tyto okrajové podmínky provázány.

2.2.2 Kinematická podmínka soustavy

Kinematická podmínka nám udává rovnost rychlostí na koncích soustavy - rychlost posuvu trubice musí být stejná, jako rychlost kapaliny. Tento fakt matematicky zapíšeme pro konce $x = 0$ a $x = L$ ve tvaru

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial t} = v(0, t), \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial u(L, t)}{\partial t} = v(L, t). \quad (2.41)$$

Tyto Neumannovy okrajové podmínky dávají přímo do spojitosti posuv trubice a rychlost kapaliny, vlnové rovnice jsou jimi tedy také provázány.

2.3 Vyjádření zbylých proměnných

V odstavci 2.1 jsme odvodili vlnové rovnice pro $u(x, t)$, $v(x, t)$ a tvrdili jsme, že zbylé dvě proměnné ($F(x, t)$ a $p(x, t)$) jsme schopni dopočítat. Ukažme si nyní, jak.

2.3.1 Vyjádření tlaku

V okrajové podmínce (2.37) je derivace posuvu trubice $u(x, t)$ vyjádřena pomocí tlaku $p(x, t)$. Vlnové rovnice však máme odvozeny pro rychlost kapaliny $v(x, t)$. Abychom mohli okrajovou podmínku (2.37) použít, musíme najít vztah mezi tlakem $p(x, t)$ a rychlostí $v(x, t)$. Tento vztah odvodíme pomocí dosazení získaného obecného řešení vlnových rovnic do rovnice kontinuity. Připomeňme si její finální tvar

$$\frac{1}{c_K^2} \cdot \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + \rho \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = 0. \quad (2.42)$$

Vyjádříme nyní tlak $p(x, t)$ pomocí integrace podle času

$$p(x, t) = \int -c_K^2 \rho \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} dt. \quad (2.43)$$

Rychlost $v(x, t)$ je však dána obecným řešením ve tvaru

$$v(x, t) = k_1 e^{i\omega t} e^{i\frac{\omega}{c_K} x} + k_2 e^{i\omega t} e^{-i\frac{\omega}{c_K} x}, \quad (2.44)$$

keré když dosadíme do (2.43) a konstanty vytkneme před integrál, dostaneme

$$p(x, t) = -c_K^2 \rho \int \frac{\partial(k_1 e^{i\omega t} e^{i\frac{\omega}{c_K} x} + k_2 e^{i\omega t} e^{-i\frac{\omega}{c_K} x})}{\partial x} dt, \quad (2.45)$$

tedy po derivaci

$$p(x, t) = -c_K^2 \rho \int (k_1 e^{i\omega t} e^{i\frac{\omega}{c_K} x} \frac{i\omega}{c_K} - k_2 e^{i\omega t} e^{-i\frac{\omega}{c_K} x} \frac{i\omega}{c_K}) dt. \quad (2.46)$$

Po integraci a upravení dostaneme rovnici

$$p(x, t) = -c_K \rho e^{\frac{i\omega(c_K t - x)}{c_K}} (-k_2 + k_1 e^{\frac{2i\omega x}{c_K}}). \quad (2.47)$$

Integrační konstantu p_0 můžeme zanedbat, protože nemá vliv na tvar kmitů. Víme-li tedy konstanty k_1 , k_2 a vlastní frekvenci ω v obecném řešení rychlosti kapaliny, dokážeme dopočítat řešení tlaku. Toto vyjádření tlaku nám také již umožňuje dosadit do okrajové podmínky (2.37).

2.3.2 Vyjádření síly

Sílu lze vyjádřit z Hookova zákona (rovnice (1.19)), po vyjádření dostáváme

$$F(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} E S_T. \quad (2.48)$$

Obecné řešení $u(x, t)$ je však ve tvaru

$$u(x, t) = c_1 e^{i\omega t} e^{i\frac{\omega}{c_T} x} + c_2 e^{i\omega t} e^{-i\frac{\omega}{c_T} x}. \quad (2.49)$$

Dosadíme tedy toto obecné řešení do (2.48) a dostaneme

$$F(x, t) = \frac{\partial (c_1 e^{i\omega t} e^{i\frac{\omega}{c_T} x} + c_2 e^{i\omega t} e^{-i\frac{\omega}{c_T} x})}{\partial x} E S_T. \quad (2.50)$$

Derivujeme a dostaneme výsledný tvar síly

$$F(x, t) = (c_1 e^{i\omega t} e^{i\frac{\omega}{c_T} x} - c_2 e^{i\omega t} e^{-i\frac{\omega}{c_T} x}) E S_T \frac{i\omega}{c_T}. \quad (2.51)$$

Vlnové rovnice pro posuv trubice a rychlost kapaliny tedy plně popisují systém trubice-kapalina, jelikož ostatní proměnné (tlak, síla) podle nich můžeme vyjádřit.

3 KMITÁNÍ KAPALINY BEZ INTERAKCE S TRUBICÍ

V kapitole 2 jsme odvodili matematický model pro soustavu trubice-kapalina, který se skládá z vlnových rovnic a vhodně vyjádřených okrajových podmínek. V této kapitole se omezíme pouze na kmitání kapaliny. Výsledky z analýzy tohoto problému v závěru porovnáme s kmitáním celé soustavy.

3.1 Zjednodušený matematický model

3.1.1 Vlnová rovnice kapaliny a okrajové podmínky

Jelikož se v této kapitole omezujeme jen na kmitání kapaliny, tak se model bude skládat z jedné vlnové rovnice (pro rychlost kapaliny) a jednoduchých okrajových podmínek. Vlnová rovnice je ve tvaru

$$v_{tt} = c_K^2 \cdot v_{xx}. \quad (3.1)$$

Pro tuto vlnovou rovnici jsme odvodili obecné řešení ve tvaru

$$v(x, t) = k_1 e^{i\omega t} e^{i\frac{\omega}{c_K} x} + k_2 e^{i\omega t} e^{-i\frac{\omega}{c_K} x}. \quad (3.2)$$

Okrajové podmínky na koncích jsou nulové, jelikož trubici v této kapitole uvažujeme absolutně tuhou. Pro konce $x = 0$ a $x = L$ tedy můžeme napsat

$$v(0, t) = 0, \quad (3.3)$$

$$v(L, t) = 0. \quad (3.4)$$

3.1.2 Splnění okrajových podmínek

Pokud do těchto okrajových podmínek dosadíme obecné řešení, dostaneme rovnice

$$v(0, t) = k_1 e^{i\omega t} + k_2 e^{i\omega t} = 0, \quad (3.5)$$

$$v(L, t) = k_1 e^{i\omega t} e^{i\frac{\omega}{c_K} L} + k_2 e^{i\omega t} e^{-i\frac{\omega}{c_K} L} = 0. \quad (3.6)$$

Vytknutím členu $e^{i\omega t}$ dostáváme vztahy pro koeficienty k_1 a k_2

$$k_1 + k_2 = 0, \quad (3.7)$$

$$k_1 e^{i\frac{\omega}{c_K} L} + k_2 e^{-i\frac{\omega}{c_K} L} = 0. \quad (3.8)$$

Koeficient k_2 tedy vyjádříme pomocí k_1 z rovnice (3.7) a dosadíme do (3.8), čímž dostaneme

$$k_1 e^{i\frac{\omega}{c_K}L} - k_1 e^{-i\frac{\omega}{c_K}L} = 0. \quad (3.9)$$

Koeficienty k_1 můžeme vynechat a dostáváme rovnici

$$e^{i\frac{\omega}{c_K}L} = e^{-i\frac{\omega}{c_K}L}, \quad (3.10)$$

která je ekvivalentní rovnici

$$e^{\frac{2iL\omega}{c_K}} = 1. \quad (3.11)$$

Z Eulerovy identity víme, že:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \quad (3.12)$$

Pokud se vrátíme zpět k (3.11), tak hledáme takové ω , pro které platí

$$\cos \frac{2L\omega}{c_K} = 1. \quad (3.13)$$

Jelikož funkce $\cos x$ je periodická, řešení je nekonečně mnoho, napíšeme je ve tvaru

$$\omega_n = \frac{\pi c_K n}{L}, n \in \mathbb{Z}. \quad (3.14)$$

Známe tedy vztah mezi koeficienty k_1 a k_2 a hodnoty vlastní frekvence ω . Pro zvolené k_2 tedy dopočítáme k_1 , dosadíme danou ω_n i s těmito koeficienty a konstantami charakterizujícími soustavu $(E, L, c_K, c_T, S_K, S_T, \rho,)$ do obecného řešení, čímž získáme průběhy $v(x)$ a $p(x)$ ve zvoleném čase t .

3.2 Tvary tlaku a rychlosti kapaliny - vzorový příklad

Výsledky analýzy kmitání samotné kapaliny určíme pro první tři vlastní frekvence $\omega_1 = \frac{\pi c_K}{L}$, $\omega_2 = \frac{2\pi c_K}{L}$, $\omega_3 = \frac{3\pi c_K}{L}$ v závislosti na proměnné x , kde $x \in [0, L]$. Hodnoty těchto vlastních frekvencí vycházejí:

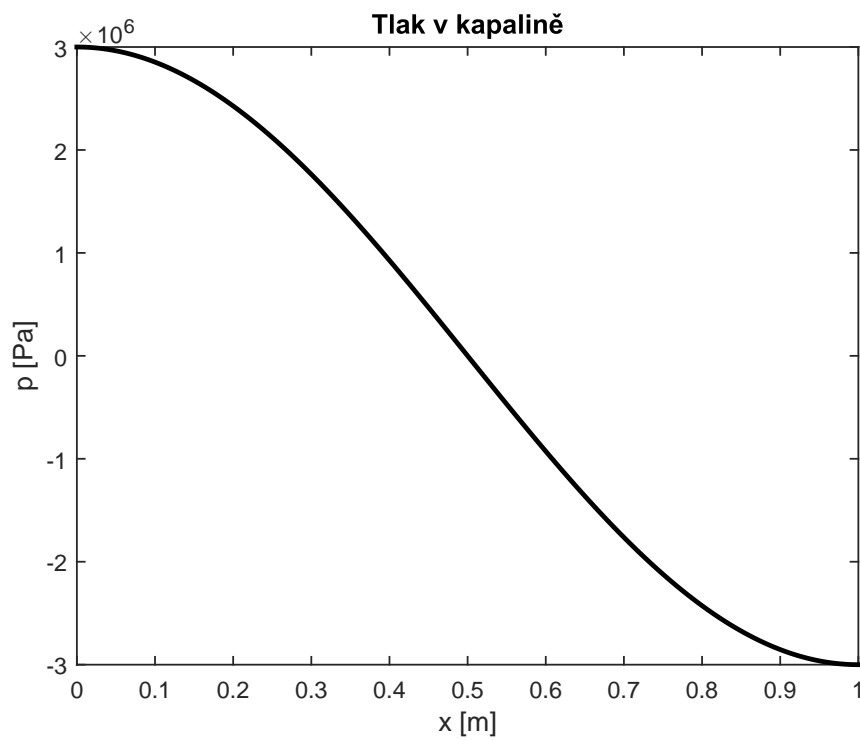
n	1	2	3
ω_n	4712, 389	9424, 778	14137, 167

(3.15)

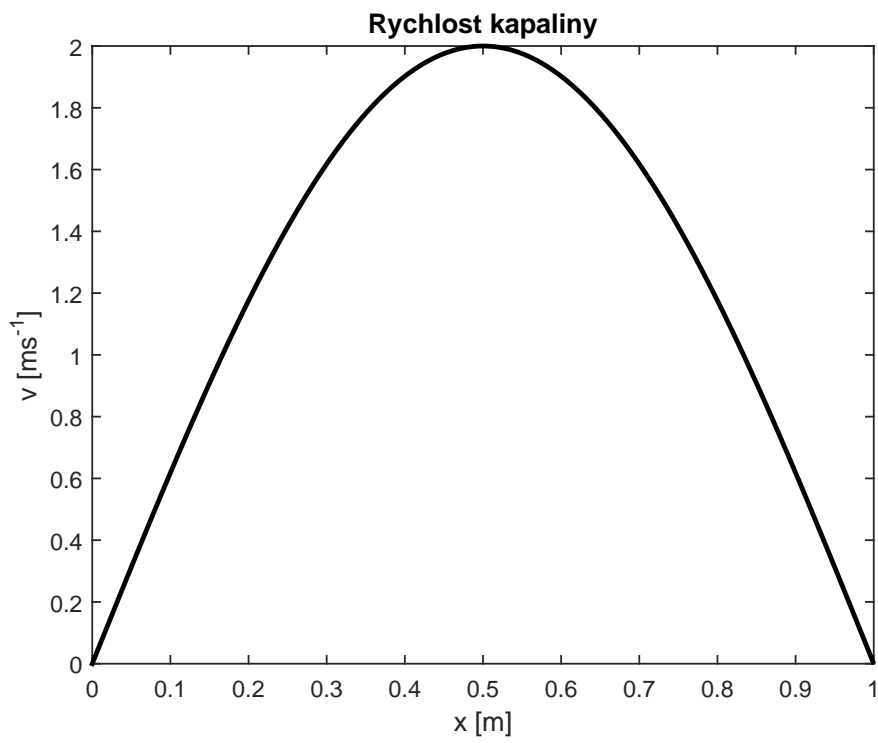
Pokud chceme tlak či rychlost kapaliny vykreslovat, potřebujeme znát konkrétní hodnoty konstant popisujících soustavu. Následující hodnoty konstant použijeme i v nadcházející kapitole při vzájemné interakci trubice a kapaliny, abychom mohli výsledky porovnat.

Konstanta	Hodnota
E	$2,1 \cdot 10^{11}$
S_T	0,00596903
S_K	0,0254469
c_K	1500
c_T	5188
ρ	1000
L	1

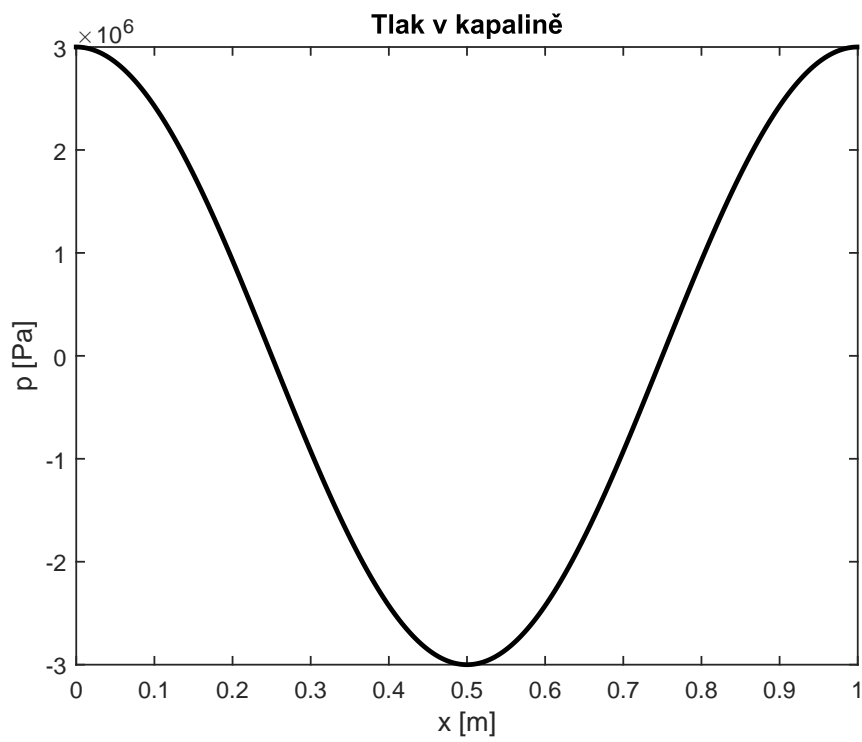
Obsahy průřezů S_T a S_K zhruba odpovídají trubici o vnějším průměru 20 cm, která je 1 cm tlustá. Zvolme nyní ještě například $k_2 = 1 + i$ a pro daný čas, např. $t = 0$ a určité ω_n máme dány průběhy tlaku a rychlosti, ze kterých vykreslíme reálnou část v závislosti na x .



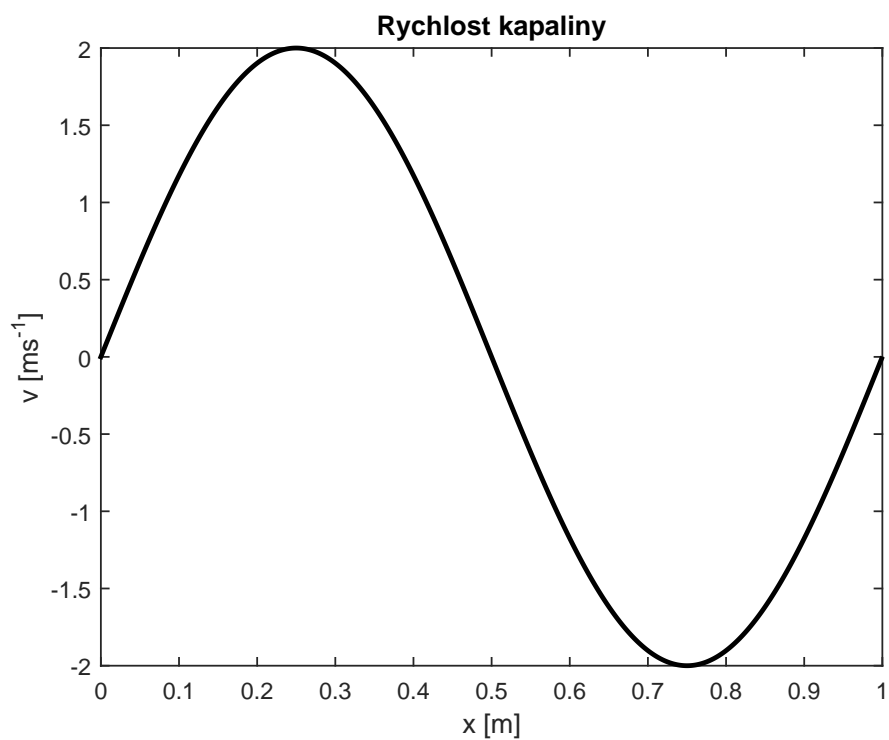
Obr. 3.1: Průběh tlaku v kapalině pro ω_1



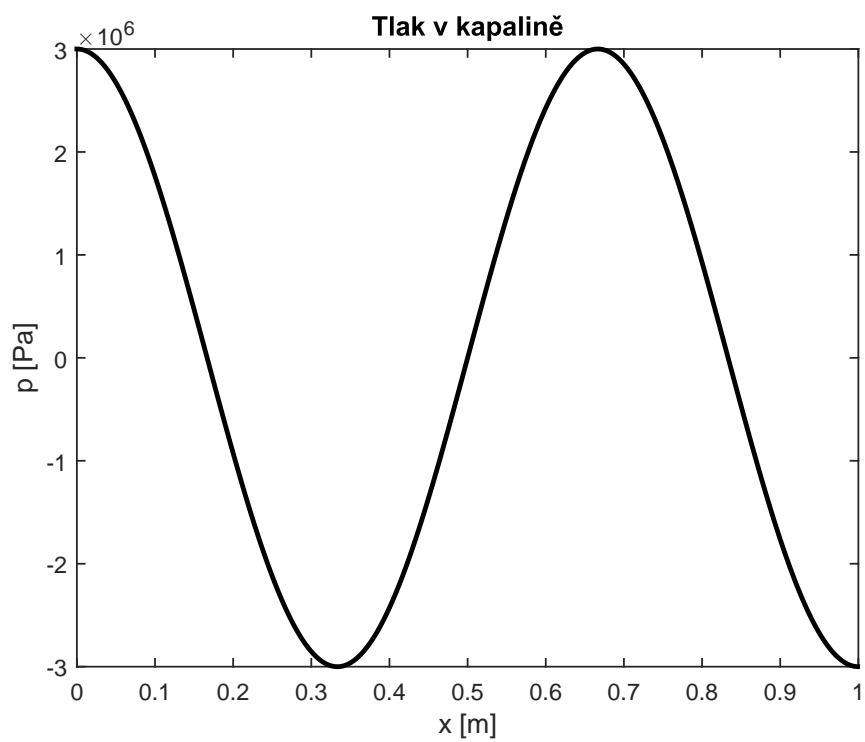
Obr. 3.2: Průběh rychlosti kapaliny pro ω_1



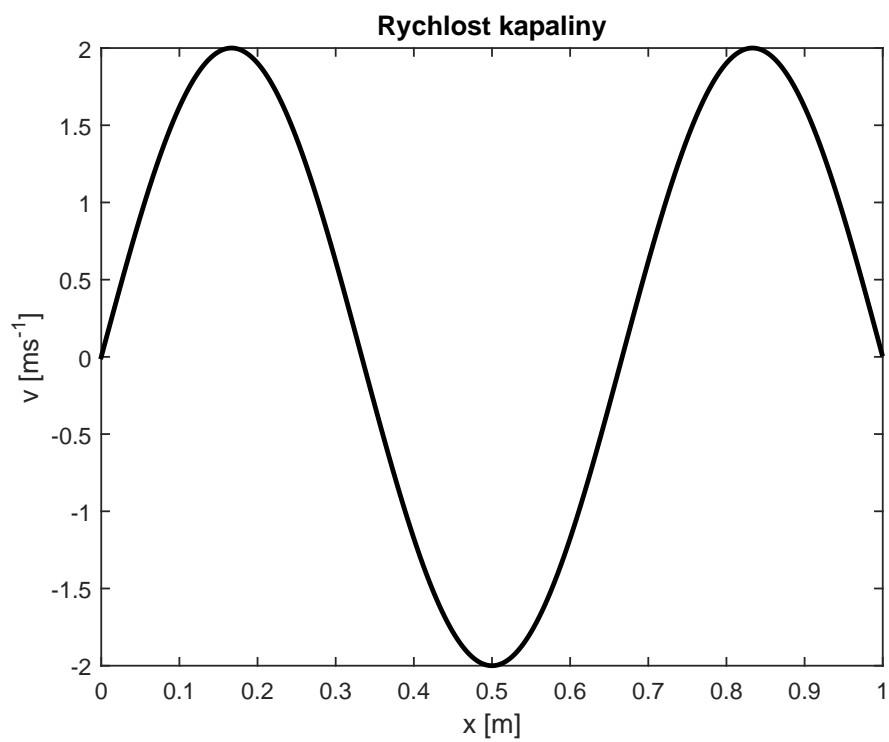
Obr. 3.3: Průběh tlaku v kapalině pro ω_2



Obr. 3.4: Průběh rychlosti kapaliny pro ω_2



Obr. 3.5: Průběh tlaku v kapalině pro ω_3



Obr. 3.6: Průběh rychlosti kapaliny pro ω_3

4 VZÁJEMNÁ INTERAKCE KMITÁNÍ TRUBICE A TLAKOVÝCH PULSACÍ

V této kapitole budeme uvažovat vzájemnou interakci trubice a kapaliny - zjednodušený matematický model jen pro kapalinu z kapitoly 3.1 doplníme o vlnovou rovnici pro trubici a také budeme brát v úvahu provázanost vlnových rovnic zajištěnou okrajovými podmínkami.

4.1 Matematický model vzájemné interakce

4.1.1 Vlnové rovnice a okrajové podmínky

Soustava trubice-kapalina je popsána vlnovými rovnicemi z kapitoly 2, tedy rovnicemi

$$u_{tt} = c_T^2 \cdot u_{xx}, \quad (4.1)$$

$$v_{tt} = c_K^2 \cdot v_{xx}, \quad (4.2)$$

ke kterým přidáme okrajové podmínky odvozené v odstavci 2.2, tedy

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial t} = v(0, t), \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial u(L, t)}{\partial t} = v(L, t). \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{p(0, t)S_K}{ES_T}, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = \frac{p(L, t)S_K}{ES_T}, \quad (4.6)$$

Připomeňme si obecná řešení vlnových rovnic (4.1) a (4.2), které jsou tvaru

$$u(x, t) = c_1 e^{i\omega t} e^{i\frac{\omega}{c_T}x} + c_2 e^{i\omega t} e^{-i\frac{\omega}{c_T}x}, \quad (4.7)$$

$$v(x, t) = k_1 e^{i\omega t} e^{i\frac{\omega}{c_K}x} + k_2 e^{i\omega t} e^{-i\frac{\omega}{c_K}x}. \quad (4.8)$$

V okrajových podmínkách (4.5) a (4.6) se vyskytuje tlak $p(x, t)$, který není součástí vlnových rovnic. To však nevytváří žádný problém, jelikož jsme dříve tlak vyjádřili právě pomocí obecného řešení. Vyjádřený tlak je tvaru

$$p(x, t) = -c_K \rho e^{\frac{i\omega(c_K t - x)}{c_K}} (-k_2 + k_1 e^{\frac{2i\omega x}{c_K}}). \quad (4.9)$$

4.1.2 Splnění okrajových podmínek

Vlnové rovnice musí splňovat okrajové podmínky, dosadíme do nich tedy obecná řešení příslušných proměnných a dostaneme čtyři rovnice ve tvaru

$$k_1 e^{i\omega t} + k_2 e^{i\omega t} = c_1 e^{i\omega t}(i\omega) + c_2 e^{i\omega t}(i\omega), \quad (4.10)$$

$$k_1 e^{i\omega t} e^{i\frac{\omega}{c_K}L} + k_2 e^{i\omega t} e^{-i\frac{\omega}{c_K}L} = c_1 e^{i\omega t} e^{i\frac{\omega}{c_T}L}(i\omega) + c_2 e^{i\omega t} e^{-i\frac{\omega}{c_T}L}(i\omega), \quad (4.11)$$

$$c_1 e^{i\omega t} \left(i\frac{\omega}{c_T} \right) - c_2 e^{i\omega t} \left(i\frac{\omega}{c_T} \right) = \frac{-S_K}{ES_T} (c_K \rho e^{i\omega t} (-k_2 + k_1)), \quad (4.12)$$

$$c_1 e^{i\omega t} e^{i\frac{\omega}{c_T}L} \left(i\frac{\omega}{c_T} \right) + c_2 e^{i\omega t} e^{-i\frac{\omega}{c_T}L} \left(-i\frac{\omega}{c_T} \right) = \frac{-S_K}{ES_T} \left(-c_K \rho e^{\frac{i\omega(c_K t - L)}{c_K}} \left(-k_2 + k_1 e^{\frac{2i\omega L}{c_K}} \right) \right). \quad (4.13)$$

Ze všech těchto rovnic lze vytknout člen $e^{i\omega t}$, to provedeme a dále zjednodušíme na tvary

$$k_1 + k_2 = c_1 i\omega + c_2 i\omega, \quad (4.14)$$

$$k_1 e^{i\frac{\omega}{c_K}L} + k_2 e^{-i\frac{\omega}{c_K}L} = c_1 e^{i\frac{\omega}{c_T}L}(i\omega) + c_2 e^{-i\frac{\omega}{c_T}L}(i\omega), \quad (4.15)$$

$$c_1 \left(i\frac{\omega}{c_T} \right) - c_2 \left(i\frac{\omega}{c_T} \right) = k_2 \frac{S_K}{ES_T} c_K \rho - k_1 \frac{S_K}{ES_T} c_K \rho, \quad (4.16)$$

$$c_1 e^{i\frac{\omega}{c_T}L} \left(i\frac{\omega}{c_T} \right) - c_2 e^{-i\frac{\omega}{c_T}L} \left(i\frac{\omega}{c_T} \right) = k_2 \frac{S_K}{ES_T} c_K \rho e^{\frac{-iL\omega}{c_K}} - k_1 \frac{S_K}{ES_T} c_K \rho e^{\frac{iL\omega}{c_K}}, \quad (4.17)$$

což jsou rovnice pro koeficienty c_1 , c_2 , k_1 a k_2 . Napišme nyní tyto rovnice maticově ve tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{c}_i = \mathbf{0}$.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

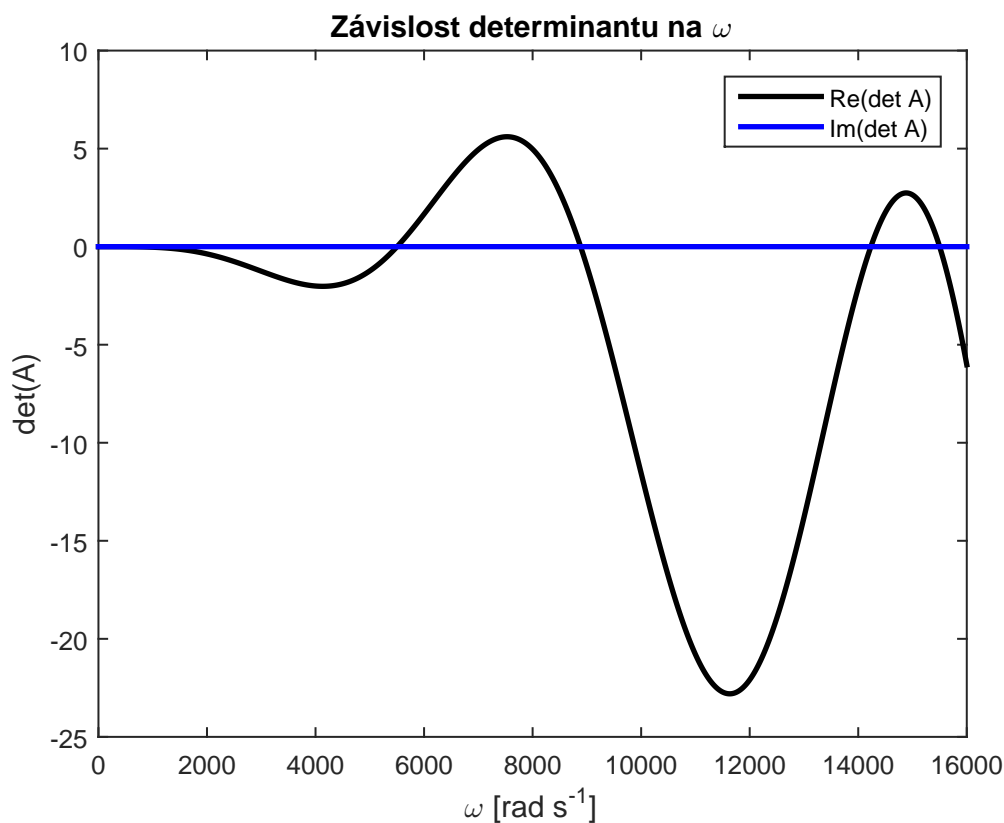
Po dosazení z (4.14), (4.15), (4.16) a (4.17) tedy dostaneme rovnici

$$\begin{pmatrix} i\omega & i\omega & -1 & -1 \\ i\omega e^{i\frac{\omega}{c_T}L} & i\omega e^{-i\frac{\omega}{c_T}L} & -e^{i\frac{\omega}{c_K}L} & -e^{-i\frac{\omega}{c_K}L} \\ i\frac{\omega}{c_T} & -i\frac{\omega}{c_T} & \frac{S_K}{ES_T} c_K \rho & -\frac{S_K}{ES_T} c_K \rho \\ i\frac{\omega}{c_T} e^{i\frac{\omega}{c_T}L} & -i\frac{\omega}{c_T} e^{-i\frac{\omega}{c_T}L} & \frac{S_K}{ES_T} c_K \rho e^{\frac{iL\omega}{c_K}} & -\frac{S_K}{ES_T} c_K \rho e^{\frac{-iL\omega}{c_K}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Pro netriviální řešení c_1 , c_2 , k_1 , k_2 musí platit

$$\det \begin{pmatrix} i\omega & i\omega & -1 & -1 \\ i\omega e^{i\frac{\omega}{c_T}L} & i\omega e^{-i\frac{\omega}{c_T}L} & -e^{i\frac{\omega}{c_K}L} & -e^{-i\frac{\omega}{c_K}L} \\ i\frac{\omega}{c_T} & -i\frac{\omega}{c_T} & \frac{S_K}{ES_T} c_K \rho & -\frac{S_K}{ES_T} c_K \rho \\ i\frac{\omega}{c_T} e^{i\frac{\omega}{c_T}L} & -i\frac{\omega}{c_T} e^{-i\frac{\omega}{c_T}L} & \frac{S_K}{ES_T} c_K \rho e^{\frac{iL\omega}{c_K}} & -\frac{S_K}{ES_T} c_K \rho e^{\frac{-iL\omega}{c_K}} \end{pmatrix} = 0. \quad (4.20)$$

Vypočítat determinant z takovéto matice obecně znamená řešit komplexní nelineární rovnici. Musíme tedy použít software - například v matematickém softwaru MATLAB lze vykreslit reálná a komplexní část determinantu v závislosti na ω .



Obr. 4.1: Závislost $\det(\mathbf{A})$ na ω

Z grafu lze vidět, že má determinant stále nulovou komplexní složku, stačí tedy řešit rovnici

$$\text{Re}(\det(\mathbf{A})) = 0. \quad (4.21)$$

Pro dané konstanty charakterizující soustavu z předchozí kapitoly ($E, L, c_K, c_T, S_K, S_T, \rho$) numericky zjistíme první tři vlastní frekvence ω_{INTn} :

n	1	2	3	(4.22)
ω_{INTn}	5502, 023	8884, 358	14233, 536	

Pokud jakoukoliv z těchto vlastních frekvencí ω_{INTn} dosadíme zpět do matice \mathbf{A} , matice se stane singulární (z definice singulární matice $\det(\mathbf{A}) = 0$), její hodnota je tedy menší, než její rozměr. Pokud na matici použijeme Gaussovu eliminaci, jeden její řádek se vynuluje a získáme tři rovnice pro čtyři koeficienty. Například pro první

vlastní frekvenci $\omega_{INT1} = 5502,023$ přejde matice \mathbf{A} eliminací na tvar

$$\mathbf{A}_{red(\omega_{INT1})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3,844 \cdot 10^{-5} + 3,907 \cdot 10^{-5}i \\ 0 & 1 & 0 & -5,287 \cdot 10^{-5} - 1,446 \cdot 10^{-5}i \\ 0 & 0 & 1 & 0,864 - 0,502i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Pokud známe koeficient k_2 , můžeme podle rovnic z eliminované singulární matice dopočítat zbylé koeficienty k_1 , c_2 a c_1 . Jelikož jsou v eliminované matici \mathbf{A}_{red} nenulové kromě prvků na diagonále jen prvky ve čtvrtém sloupci, jsme schopni explicitně vyjádřit koeficienty k_1 , c_2 a c_1 pro všechny ω_{INTn} ve tvaru

$$c_1 = -k_2 \cdot a_{red(1,4)}, \quad (4.24)$$

$$c_2 = -k_2 \cdot a_{red(2,4)}, \quad (4.25)$$

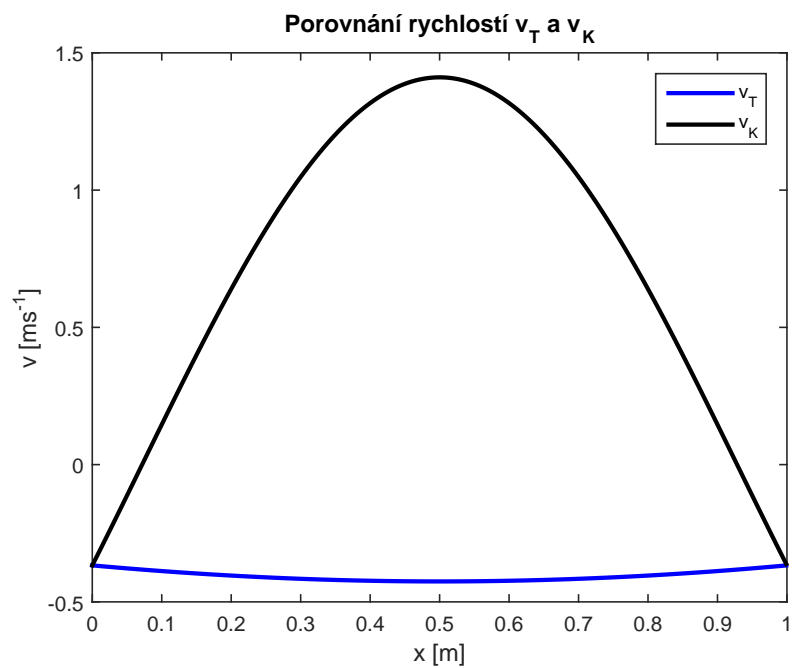
$$k_1 = -k_2 \cdot a_{red(3,4)}. \quad (4.26)$$

4.2 Průběhy proměnných - vzorový příklad

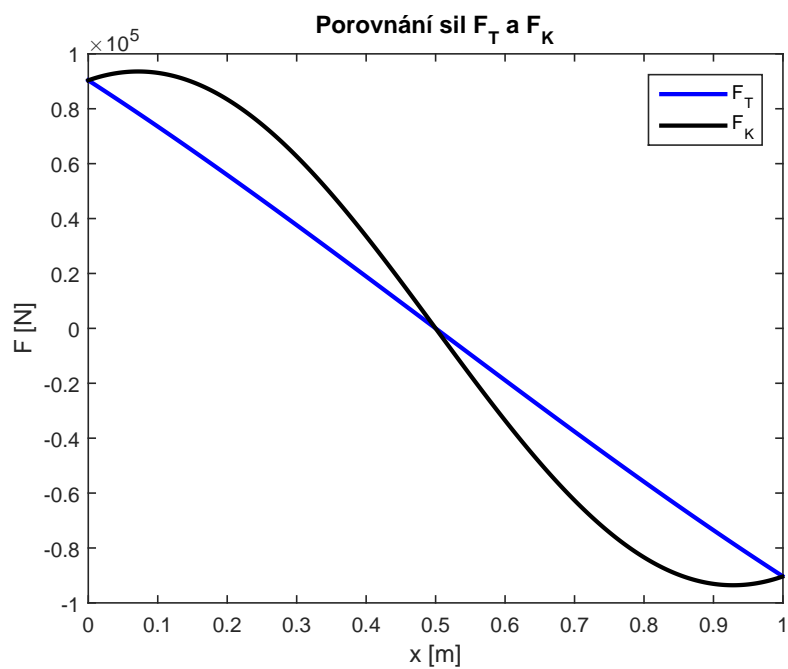
Pokud například zvolíme $k_2 = 1 + i$, dopočítáme koeficienty k_1 , c_2 a c_1 , které dosadíme do obecného řešení a pro dané ω_{INTn} , t a konstanty charakterizující soustavu $(E, L, c_K, c_T, S_K, S_T, \rho)$, které uvažujeme stejné, jako v kapitole 3, zjistíme průběhy všech proměnných (u, F, v, p) . Pro názornost nyní vykreslíme jen průběh rychlostí kapaliny a trubice (v_K, v_T) a průběh sil od kapaliny a tlakových sil v trubici (F_K, F_T) jako reálnou část komplexních funkcí podobně jako v kapitole 3. Tvar průběhu síly od kapaliny je stejný, jako tvar průběhu tlaku v kapalině - podle vzorce $F_K(x, t) = p(x, t)S_K$ vidíme, že sílu dostaneme pouze vynásobením průběhu $p(x, t)$ konstantou S_K . Jelikož grafy vykreslujeme pro síly a rychlosti, můžeme si všimnout, že na okrajích musí podle okrajových podmínek platit rovnováha sil a rovnost rychlostí, tedy $F_K(x, t) = F_T(x, t)$ a $v_K(x, t) = v_T(x, t)$ pro $x = 0$ a $x = L$. Průběhy sil a rychlostí se tedy musí na krajích setkat ve stejném bodě. Rychlost posunutí trubice $v_T(x, t)$ lze jednoduše vyjádřit jako derivaci posunutí $u(x, t)$ podle času, tedy

$$v_T(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}. \quad (4.27)$$

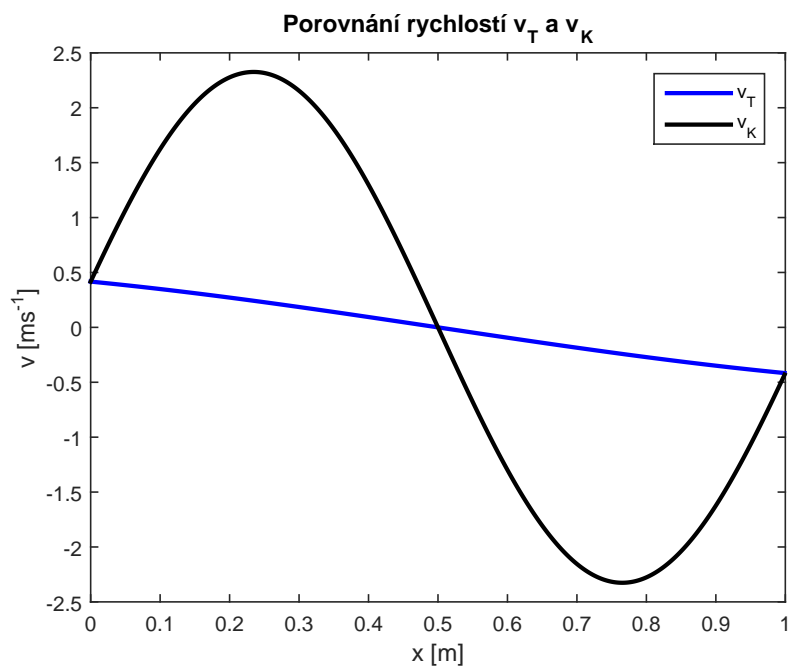
Vykreslíme dva grafy (pro síly a rychlosti) pro každou z prvních tří vlastních frekvencí z tabulky (4.22).



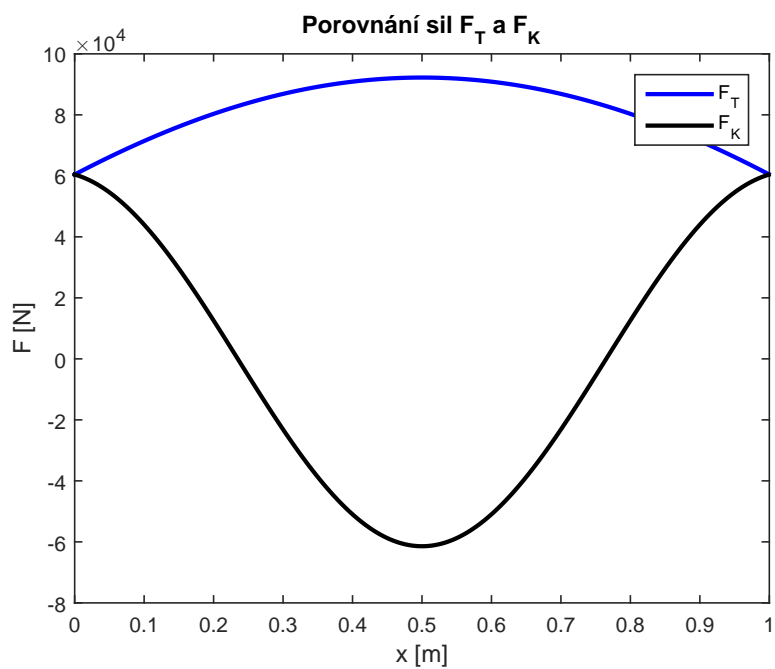
Obr. 4.2: Průběh v_K, v_T v závislosti na x pro ω_{INT1} .



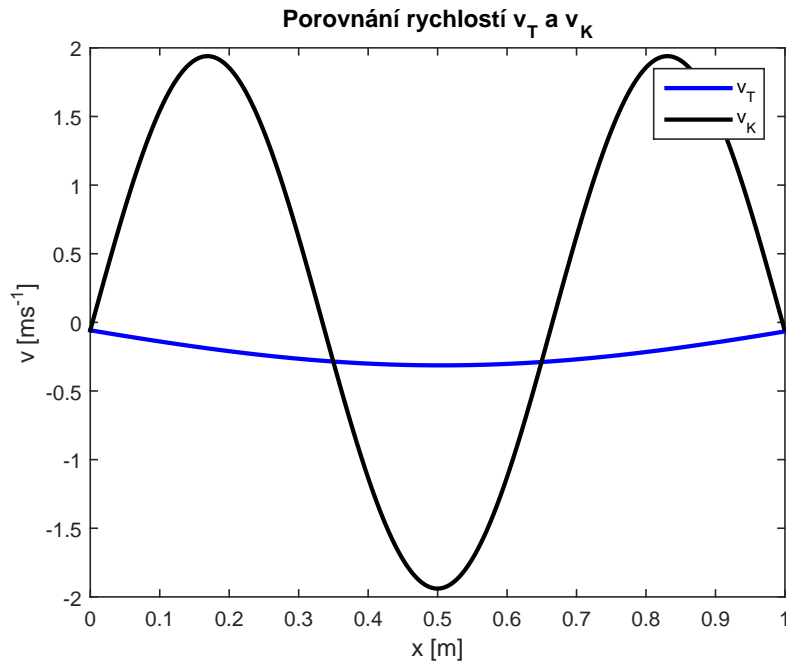
Obr. 4.3: Průběh F_K, F_T v závislosti na x pro ω_{INT1} .



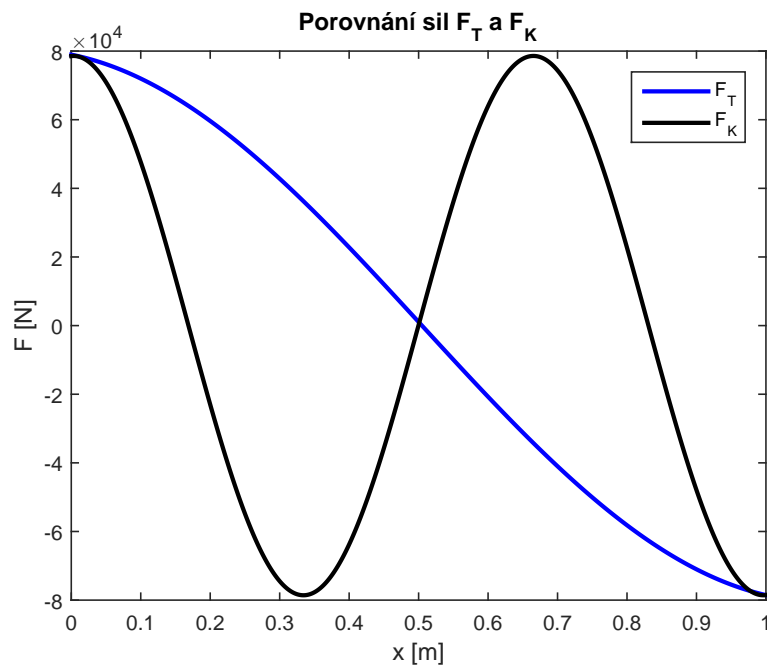
Obr. 4.4: Průběh v_K, v_T v závislosti na x pro ω_{INT2} .



Obr. 4.5: Průběh F_K, F_T v závislosti na x pro ω_{INT2} .



Obr. 4.6: Průběh v_K, v_T v závislosti na x pro ω_{INT3} .



Obr. 4.7: Průběh F_K, F_T v závislosti na x pro ω_{INT3} .

Dále se věnujeme průběhu rychlosti v kapalině. Tvary kmitů jsou pro dané ω_{INTn} v čase neměnné, tedy uzly a kmitny se v čase nepohybují (stojaté vlnění). S časem se v daném bodě mění pouze fáze vlny, uvažujme tedy amplitudu rychlosti kapaliny

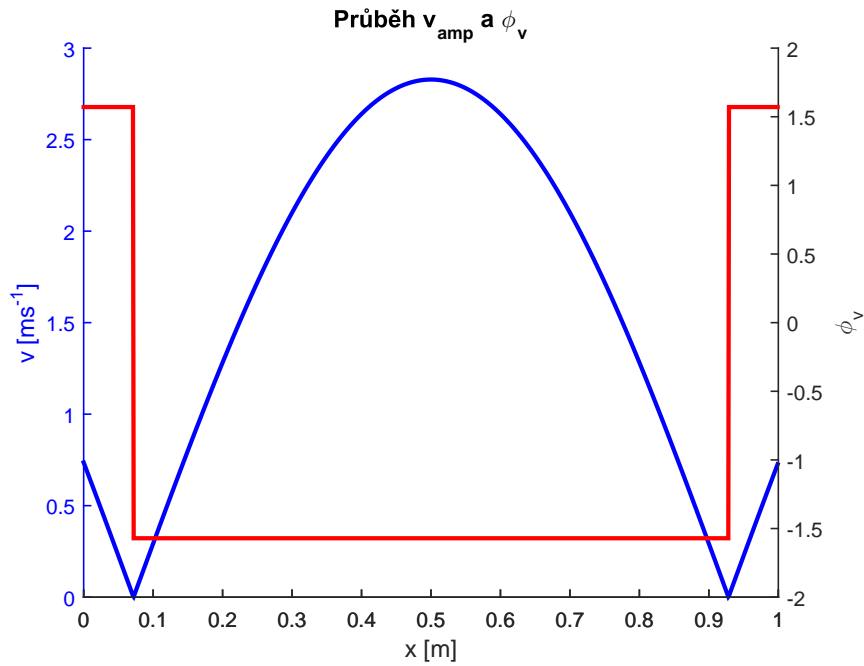
ve tvaru

$$v_{amp}(x) = |v(x)|e^{i\varphi_v}, \quad (4.28)$$

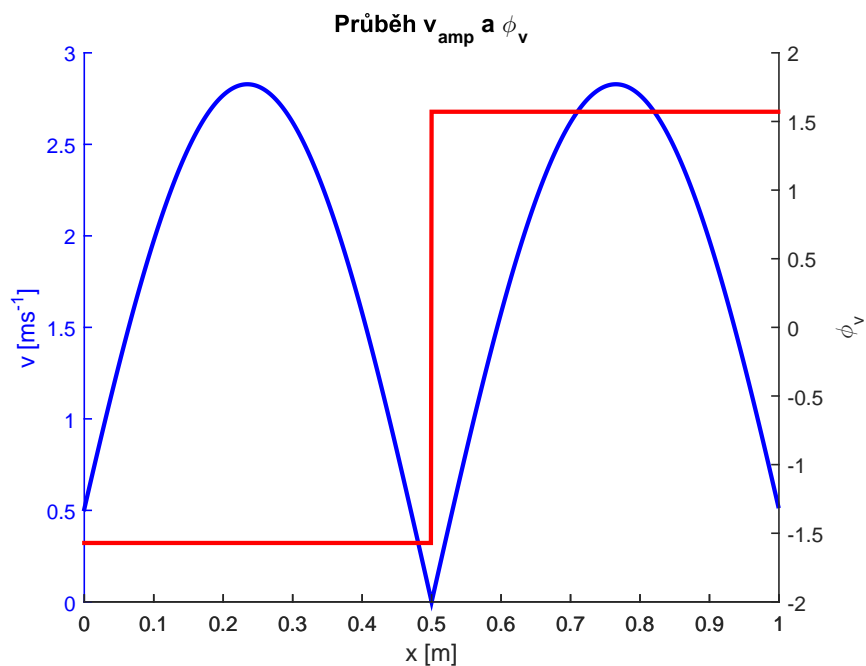
kde $|v(x)|$ je absolutní hodnota z komplexního čísla a pro fázi φ_v platí

$$\varphi_v = \begin{cases} \varphi_0 & \text{pro } \operatorname{Re}(v(x, t)) \geq 0 \\ \varphi_0 + \pi & \text{pro } \operatorname{Re}(v(x, t)) < 0. \end{cases} \quad (4.29)$$

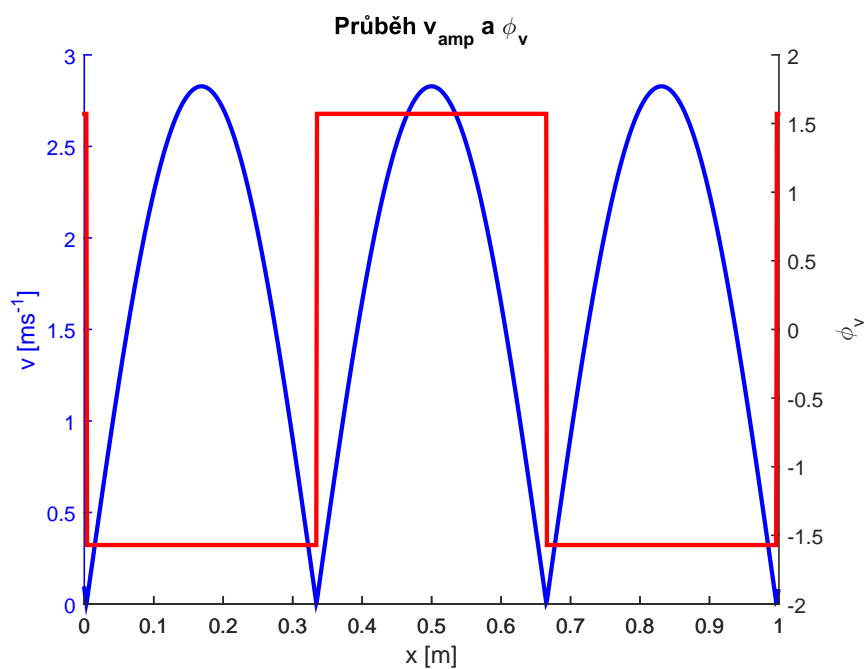
Vykresleme tedy amplitudu rychlosti dohromady s její fází φ_v pro první tři ω_{INTn} v závislosti na x například pro $t = 0$.



Obr. 4.8: Průběh v_{amp} , φ_v v závislosti na x pro ω_{INT1} .



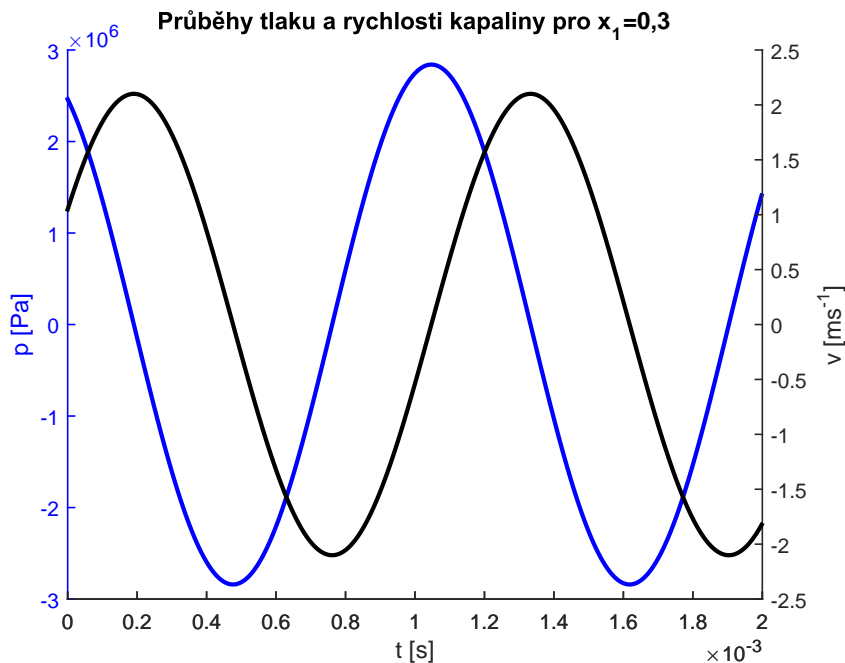
Obr. 4.9: Průběh v_{amp} , φ_v v závislosti na x pro ω_{INT2} .



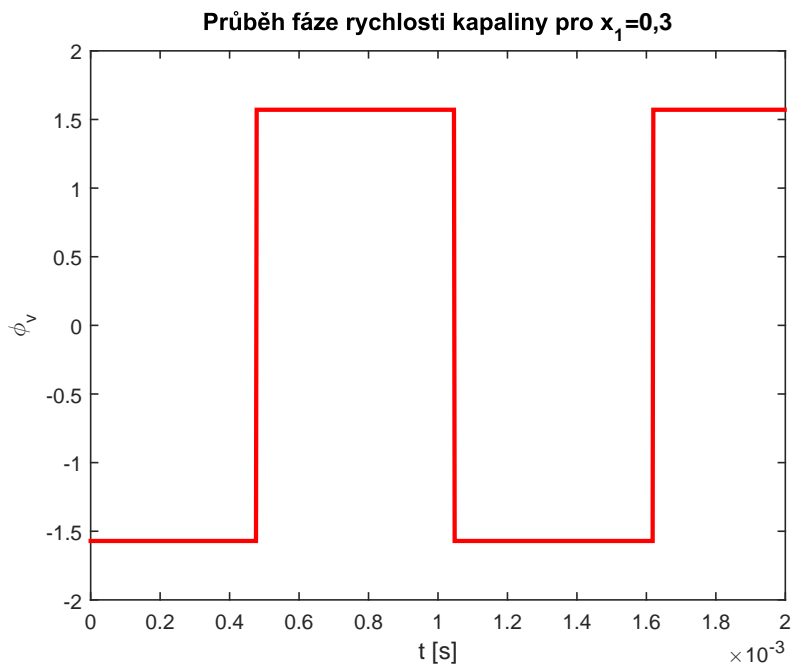
Obr. 4.10: Průběh v_{amp} , φ_v v závislosti na x pro ω_{INT3} .

Nyní zvolme konkrétní bod, například $x_1 = 0,3$ a vykresleme průběhy všech proměnných, tedy p, v, F, u a φ_v , tentokrát však v závislosti na t pro nějaký malý

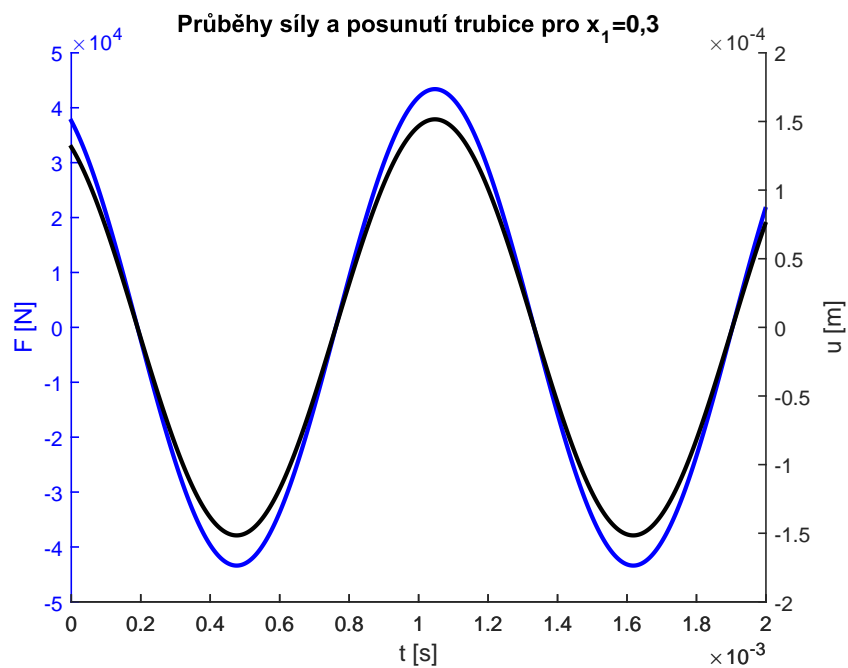
časový interval, například $t \in [0, 2 \cdot 10^{-3}]$. Pro názornost vykreslíme veličiny charakterizující chování kapaliny ($p(x_1, t), v(x_1, t)$) a veličiny charakterizující chování trubice ($F(x_1, t), u(x_1, t)$) po dvou zvlášť do grafu pro ω_{INT1} .



Obr. 4.11: Průběh v, p v závislosti na t pro $x_1 = 0, 3, \omega_{INT1}$.



Obr. 4.12: Průběh ϕ_v v závislosti na t pro $x_1 = 0, 3, \omega_{INT1}$.



Obr. 4.13: Průběh F , u v závislosti na t pro $x_1 = 0,3$, ω_{INT1} .

Můžeme si všimnout, že rychlost kapaliny je zpožděna za tlakem o $\frac{\pi}{2}$ (čtvrtperiodu), zatímco síla v trubici a její prodloužení jsou vždy ve fázi. Tyto výsledky zpoždění platí pro jakoukoliv volbu x .

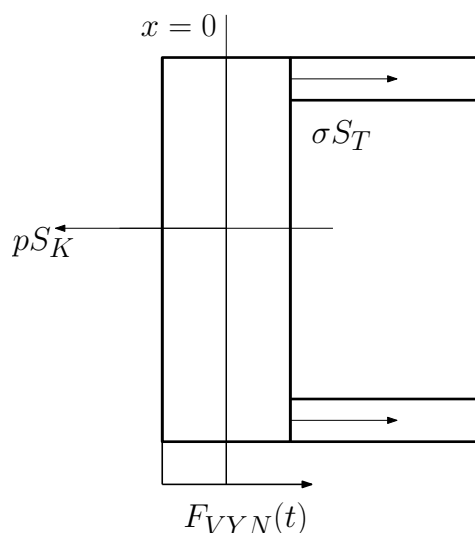
5 VYNUCENÉ KMITÁNÍ

5.1 Matematický model

V předešlých kapitolách jsme uvažovali jen „přirozené“ kmitání trubice a kapaliny, tedy kmitání soustavy s danými spočtenými vlastními frekvencemi ω_{INTn} . Uvažujme nyní kmitání vynucené s obecnou frekvencí ω_{VYN} . Soustava takto „uměle“ kmitá, například pokud na jednom kraji trubice působí časově proměnlivá externí síla s frekvencí ω_{VYN} . Tuto sílu tedy můžeme uvažovat například pro konec $x = 0$ ve tvaru

$$F_{VYN}(t) = |F_0|e^{it\omega_{VYN}},$$

kde $|F_0|$ je konstanta udávající velikost síly.



Obr. 5.1: Zavedení síly $F_{VYN}(t)$ na konci $x = 0$.

Tato síla působí na konci $x = 0$, upravme tedy příslušné okrajové podmínky. Na každém konci je předepsána podmínka rovnosti rychlostí a rovnováhy sil. Z těchto dvou podmínek upravíme podmínku rovnováhy sil. Podmínka, kterou jsme odvodili ze silové rovnováhy pro $x = 0$ je tvaru

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{p(0, t)S_K}{ES_T}.$$

Abychom mohli přidat externí sílu, převedeme rovnici do silového tvaru, tedy

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} ES_T = p(0, t)S_K.$$

Do rovnice přidáme externí sílu, čímž rovnice přejde do tvaru

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} ES_T - p(0, t)S_K = -F_{VYN}(t).$$

Do této rovnice dosadíme obecná řešení posunutí u a tlaku p , vykrátíme člen $e^{it\omega}$ a dostáváme

$$c_1 \left(\frac{iES_T\omega}{c_T} \right) - c_2 \left(\frac{iES_T\omega}{c_T} \right) - k_2 S_K c_K \rho + k_1 S_K c_K \rho = -F_0.$$

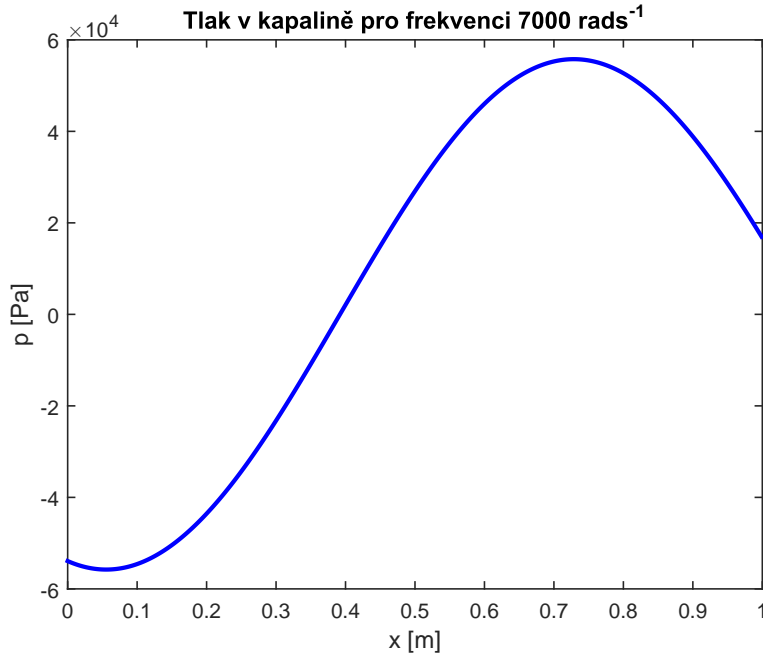
Tuto rovnici zařadíme mezi ostatní nezměněné rovnice a po přepsání do maticového tvaru dostáváme

$$\begin{pmatrix} i\omega & i\omega & -1 & -1 \\ i\omega e^{i\frac{\omega}{c_T}L} & i\omega e^{-i\frac{\omega}{c_T}L} & -e^{i\frac{\omega}{c_K}L} & -e^{-i\frac{\omega}{c_K}L} \\ \frac{i\omega ES_T}{c_T} & -\frac{i\omega ES_T}{c_T} & S_K c_K \rho & -S_K c_K \rho \\ i\frac{\omega}{c_T} e^{i\frac{\omega}{c_T}L} & -i\frac{\omega}{c_T} e^{-i\frac{\omega}{c_T}L} & \frac{S_K}{ES_T} c_K \rho e^{i\frac{L\omega}{c_K}} & \frac{-S_K}{ES_T} c_K \rho e^{-i\frac{L\omega}{c_K}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

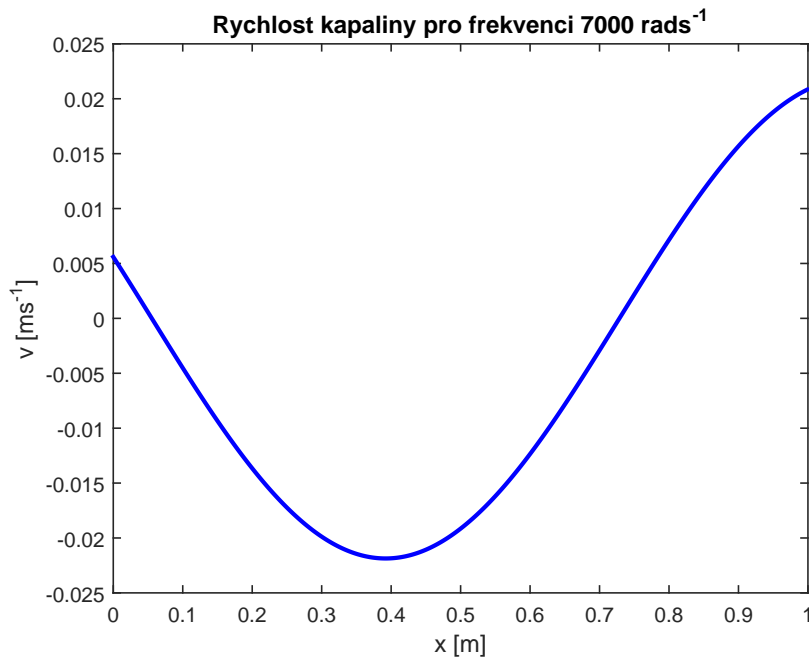
Tato matice obecně není singulární, můžeme tedy snadno dostat Gaussovou eliminací řešení c_1 , c_2 , k_1 a k_2 .

5.2 Tvary tlaku a rychlosti kapaliny - vzorový příklad

Pro danou vynucenou frekvenci ω_{VYN} , externí sílu F_0 a dané konstanty charakterizující soustavu, které zvolíme stejné, jako v předchozích příkladech, vykreslíme průběh tlaku a rychlosti kapaliny. Zvolme např. $\omega_{VYN} = 7000$ a $F_0 = 8000$. V grafech vykreslíme reálnou složku p a v pro čas např. $t = 1$.

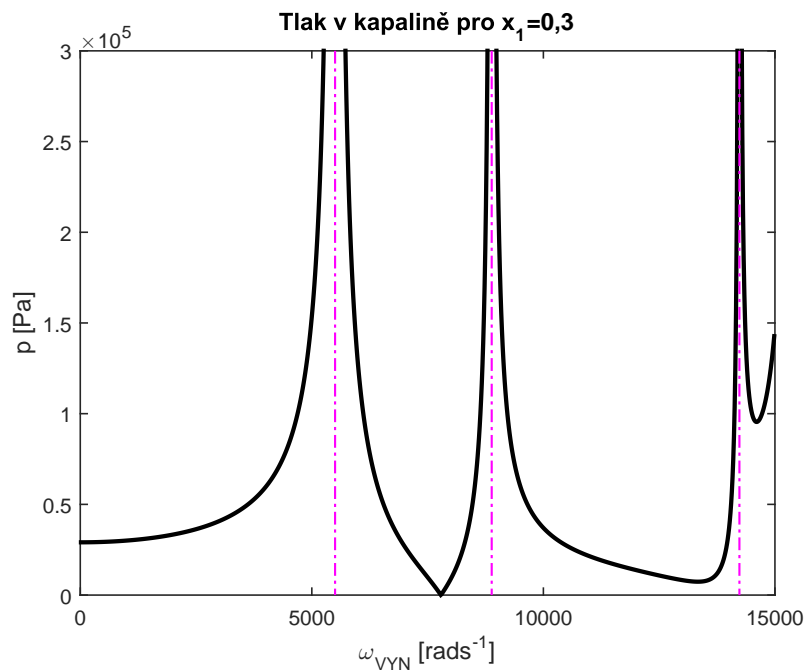


Obr. 5.2: Průběh tlaku v kapalině pro $\omega_{VYN} = 7000$, $F_0 = 8000$, $t = 1$.

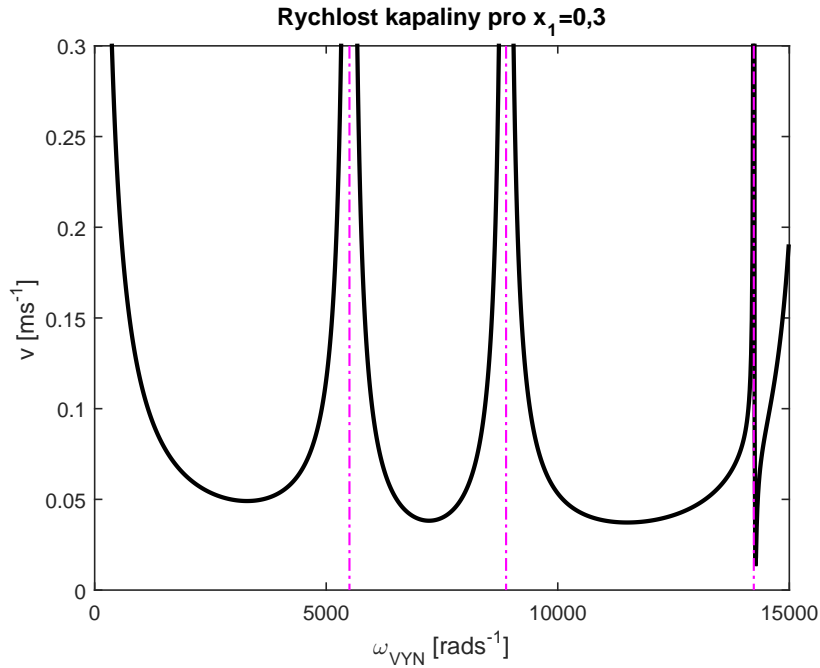


Obr. 5.3: Průběh rychlosti kapaliny pro $\omega_{VYN} = 7000$, $F_0 = 8000$, $t = 1$.

Zvolme nyní opět konkrétní bod, např. $x_1 = 0,3$ a vykresleme závislosti absolutních hodnot v a p na frekvenci vynuceného kmitání ω_{VYN} .

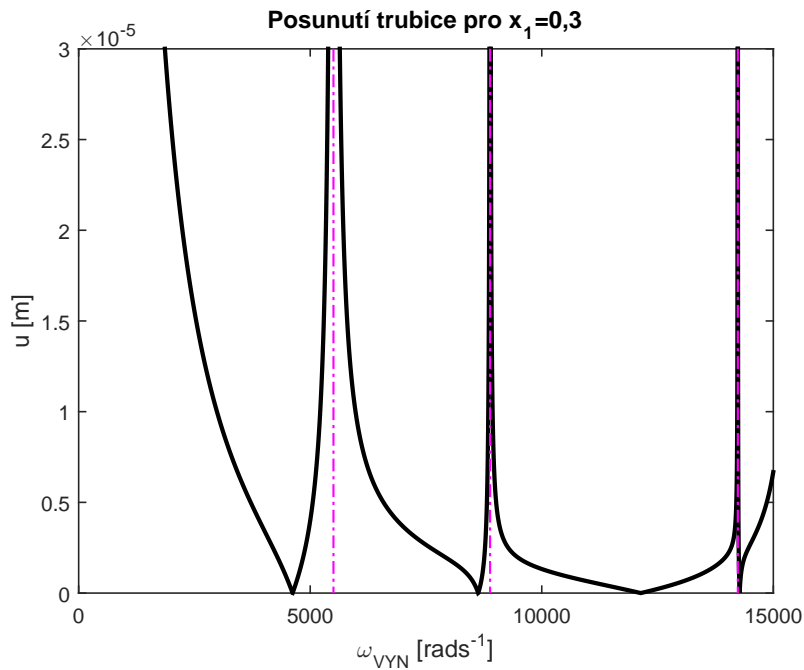


Obr. 5.4: Závislost tlaku v kapalině na ω_{VYN} pro $x_1 = 0,3$, $F_0 = 8000$.

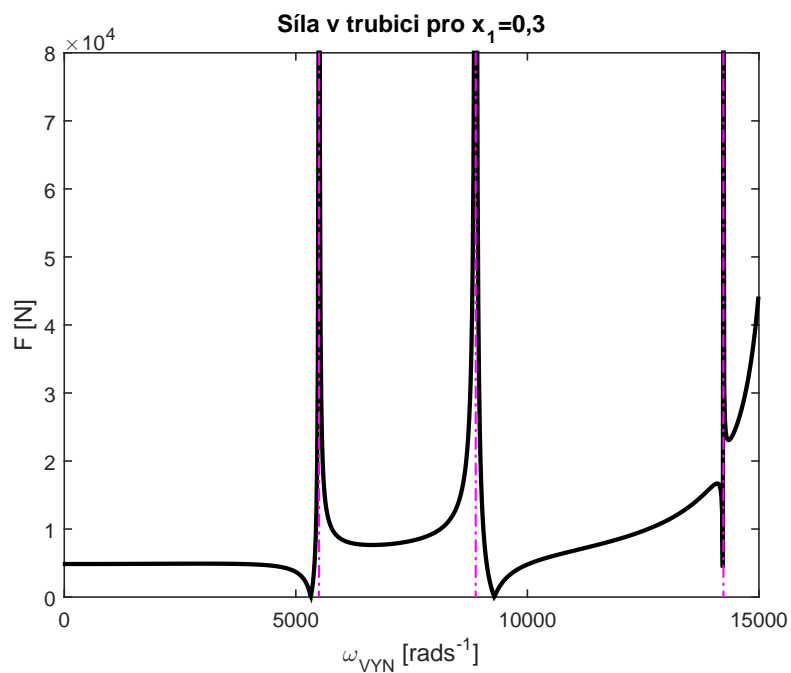


Obr. 5.5: Závislost rychlosti kapaliny na ω_{VYN} pro $x_1 = 0,3$, $F_0 = 8000$.

Z grafů jde jasně vidět, že pokud externí proměnná síla působí na trubici s frekvencí blízkou vlastní frekvenci, tedy pokud $\omega_{VYN} \approx \omega_{INTn}$, tak dojde k mnohonásobnému zesílení, takzvané „rezonanci.“ Tento jev nastává také u proměnných charakterizujících chování trubice (u, F).



Obr. 5.6: Závislost posunutí trubice na ω_{VYN} pro $x_1 = 0,3$, $F_0 = 8000$.



Obr. 5.7: Závislost síly v trubici na ω_{VYN} pro $x_1 = 0,3$, $F_0 = 8000$.

Tyto grafy průběhů posunutí a síly potvrzují, že jev rezonance nastává také pro trubici. Při vynuceném kmitání o rezonančních frekvencích je tedy kmitání trubice několikanásobně intenzivnější, což je doprovázeno velkým napětím σ v materiálu.

6 POROVNÁNÍ MODELŮ

Porovnejme nyní výsledky kmitání samotné kapaliny s výsledky kmitání soustavy při vzájemné interakci trubice-kapalina. Pro dané konstanty charakterizující soustavu $(E, L, c_K, c_T, S_K, S_T, \rho)$, které jsme zvolili v kapitole 3, zapíšeme první tři vlastní frekvence zaokrouhleny na jednotky pro přehlednost do tabulky.

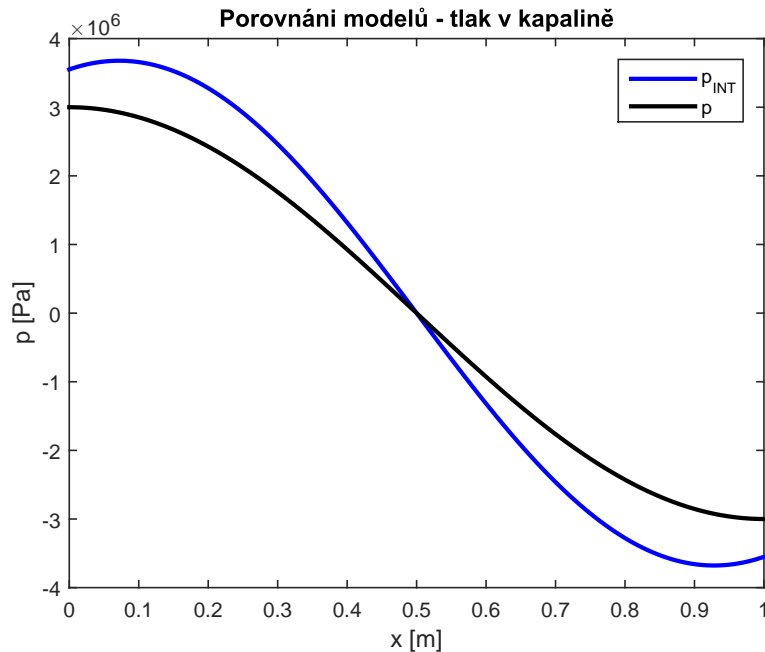
n	1	2	3
ω_n	4712	9425	14137
ω_{INTn}	5502	8884	14234

(6.1)

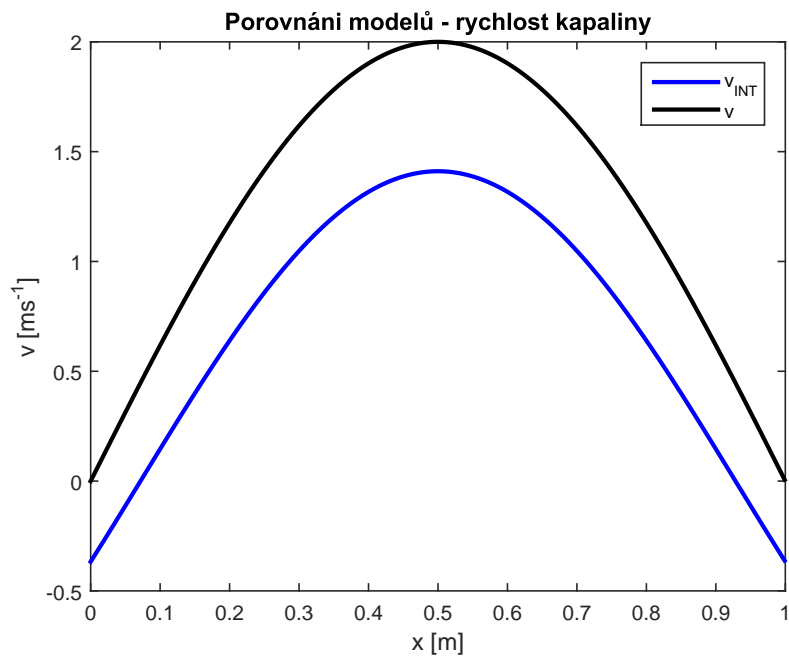
Z tabulky můžeme vidět, že s uvažováním vzájemné interakce trubice a kapaliny se výrazněji změní jen první a druhá vlastní frekvence, třetí vlastní frekvence jsou v obou modelech téměř totožné. Relativní rozdíl těchto frekvencí vyjádřený v procentech pro $n = 1, 2, 3$ činí 17%, -6% a 0,7%.

6.1 Porovnání průběhů proměnných v kapalině

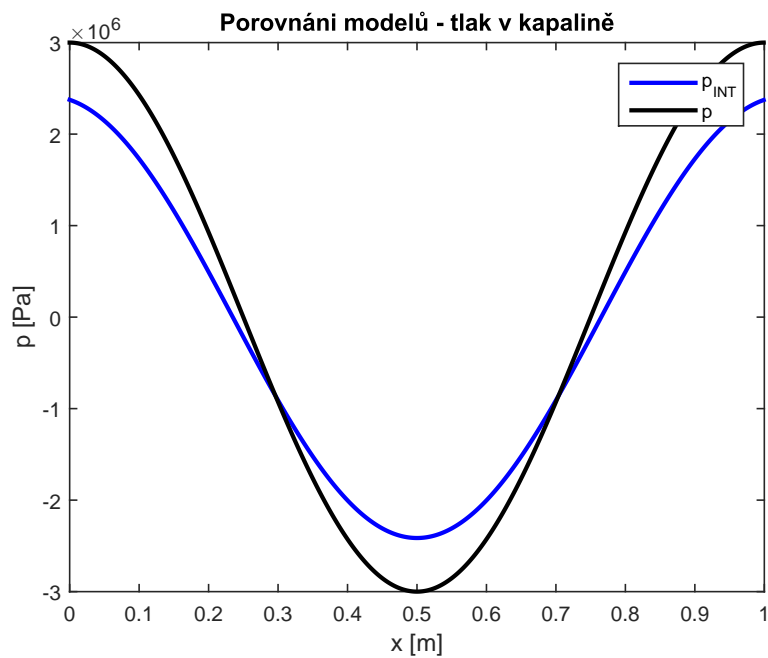
Rozdílné výsledky průběhu rychlosti a tlaku v kapalině nyní pro jednotlivé modely vykresleme za uvažování stejných konstant charakterizujících soustavu ve stejném čase $t = 0$ pro $x \in [0, L]$.



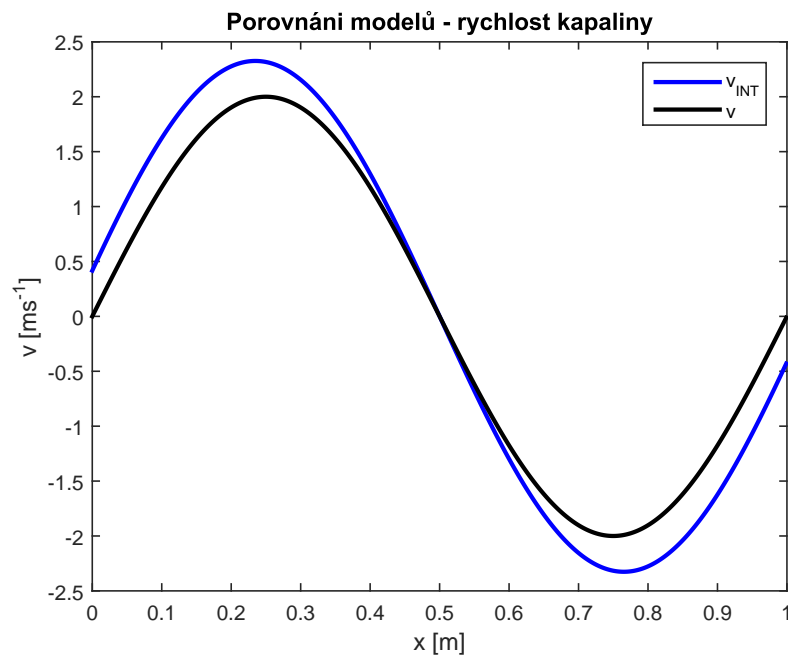
Obr. 6.1: Porovnání průběhu tlaků v kapalině se vzájemnou interakcí trubice-kapalina a bez jejího uvažování pro $n = 1$.



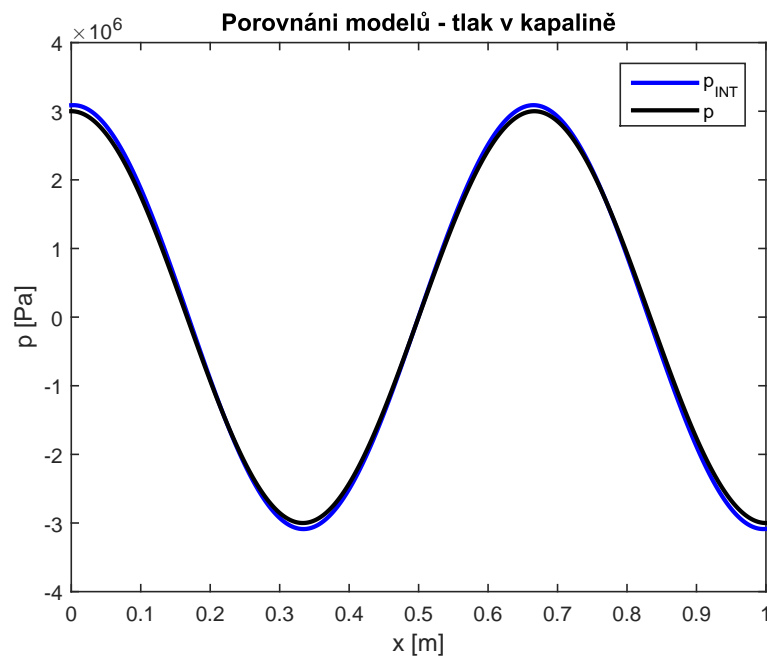
Obr. 6.2: Porovnání průběhu rychlostí v kapalině se vzájemnou interakcí trubice-kapalina a bez jejího uvažování pro $n = 1$.



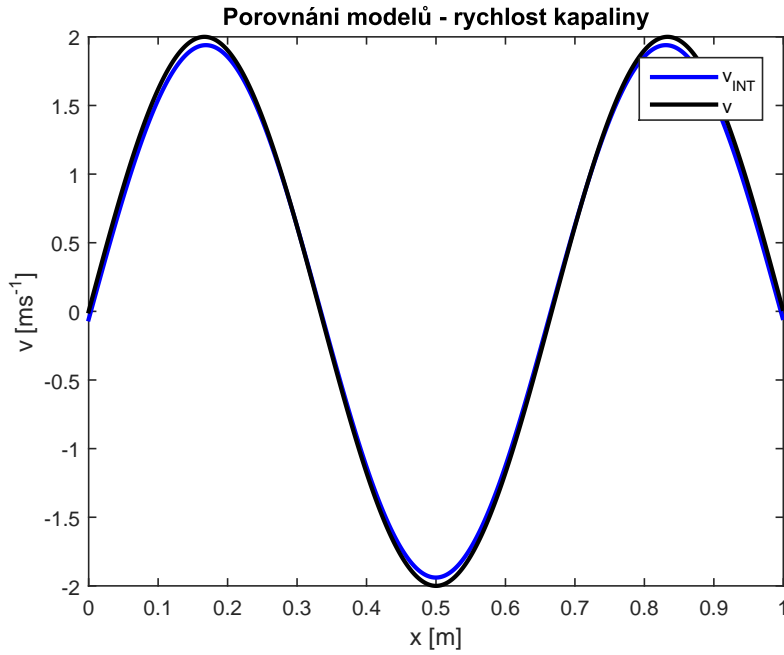
Obr. 6.3: Porovnání průběhu tlaků v kapalině se vzájemnou interakcí trubice-kapalina a bez jejího uvažování pro $n = 2$.



Obr. 6.4: Porovnání průběhu rychlostí v kapalině se vzájemnou interakcí trubice-kapalina a bez jejího uvažování pro $n = 2$.



Obr. 6.5: Porovnání průběhu tlaků v kapalině se vzájemnou interakcí trubice-kapalina a bez jejího uvažování pro $n = 3$.

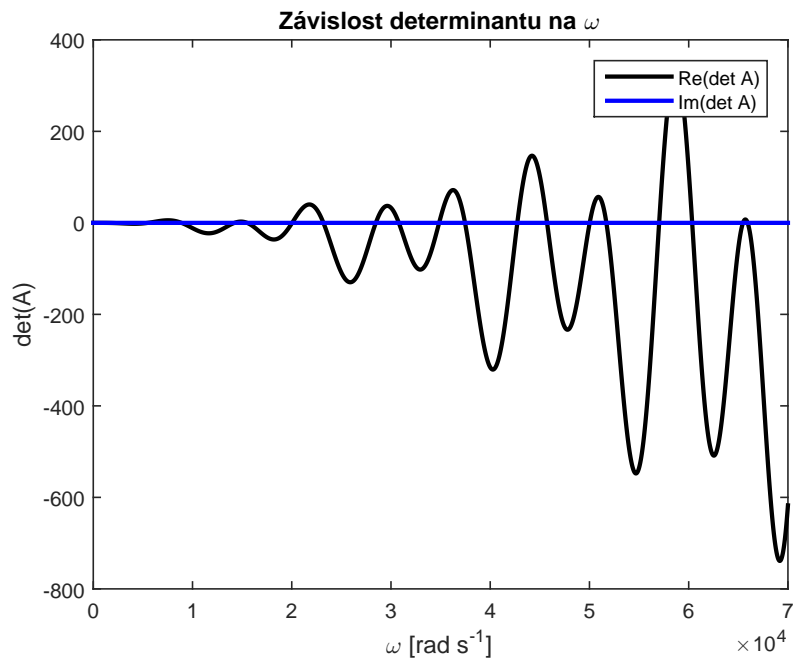


Obr. 6.6: Porovnání průběhu rychlostí v kapalině se vzájemnou interakcí trubice-kapalina a bez jejího uvažování pro $n = 3$.

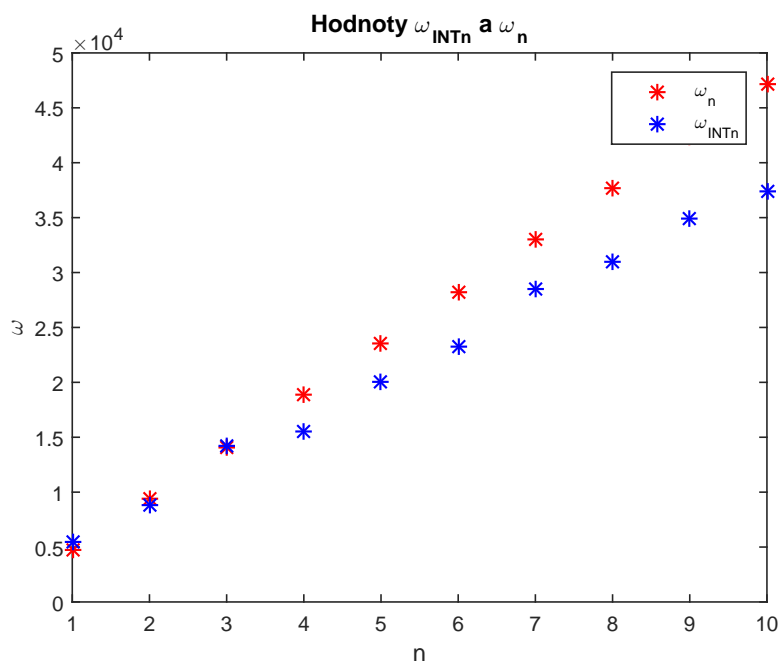
Pro $n = 1$ můžeme z tabulky vlastních frekvencí (5.1) vidět, že $\omega_{INT1} > \omega_1$, což souhlasí s Obr. 5.1 - pozorujeme, že tlak p_{INT} při vzájemné interakci trubice a kapaliny u okrajů překmitne, jinými slovy se do intervalu $x \in [0, L]$ vejde více, než jedna půlvlna, jak tomu je u průběhu tlaku p uvažovaného bez interakce. Naopak pro $n = 2$ je $\omega_{INT2} < \omega_2$, což ilustruje Obr. 5.3 - zatímco tlak bez uvažování interakce vykoná v intervalu $[0, L]$ přesně jednu celou vlnu, tlak při interakci ji v tomto intervalu celou vykonat „nestihne.“ V Obr. 5.5 vidíme, že pro $n = 3$ mají p_{INT} a p uzly a kmitny skoro na stejných místech, z čehož vyplývá $\omega_{INT3} \approx \omega_3$, což odpovídá tab. (5.1). Nemůžeme však říct, že pro $n > 3$ je rozdíl $\omega_{INTn} - \omega_n$ zanedbatelný. Pro první tři vlastní frekvence se sice relativní i absolutní chyba pro rostoucí n blíží k 0, hned pro čtvrtou frekvenci je to však jinak. Skoro identická hodnota $\omega_{INT3} \approx \omega_3$ je tedy náhodou - tvrzení, že $\lim_{n \rightarrow \infty} (\omega_{INTn} - \omega_n) = 0$ je nepravdivé.

6.2 Porovnání rezonančních frekvencí

Pokud ještě jednou vykreslíme graf závislosti $\det(\mathbf{A})$ na ω pro větší interval ω , zjistíme, že rozdíl mezi sousedními vlastními frekvencemi ω_{INTn} se výrazně mění.

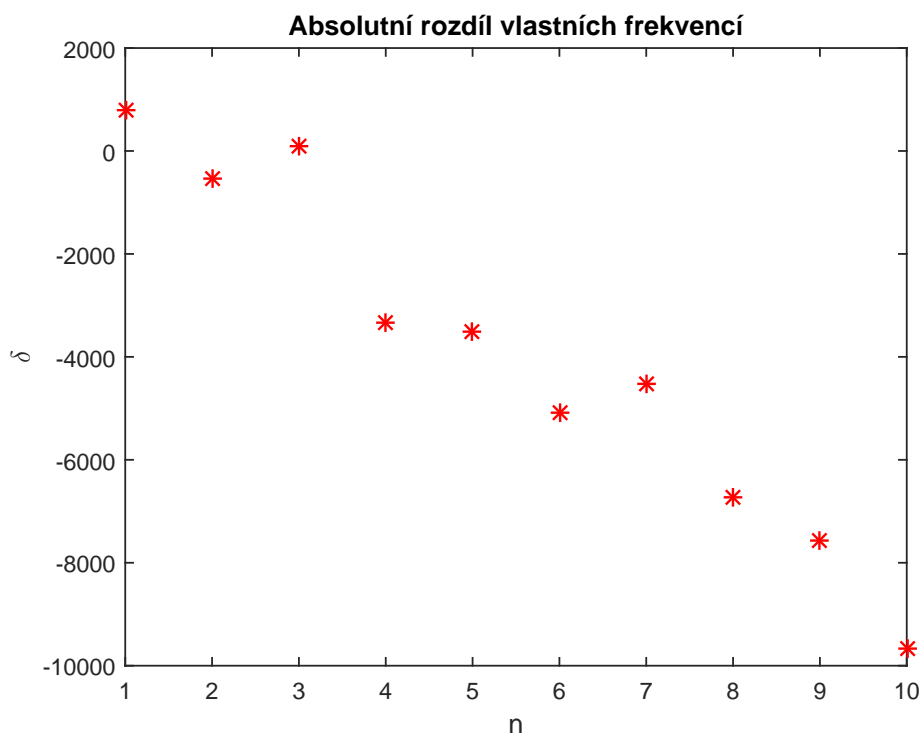


Obr. 6.7: Závislost $\det(\mathbf{A})$ na ω .

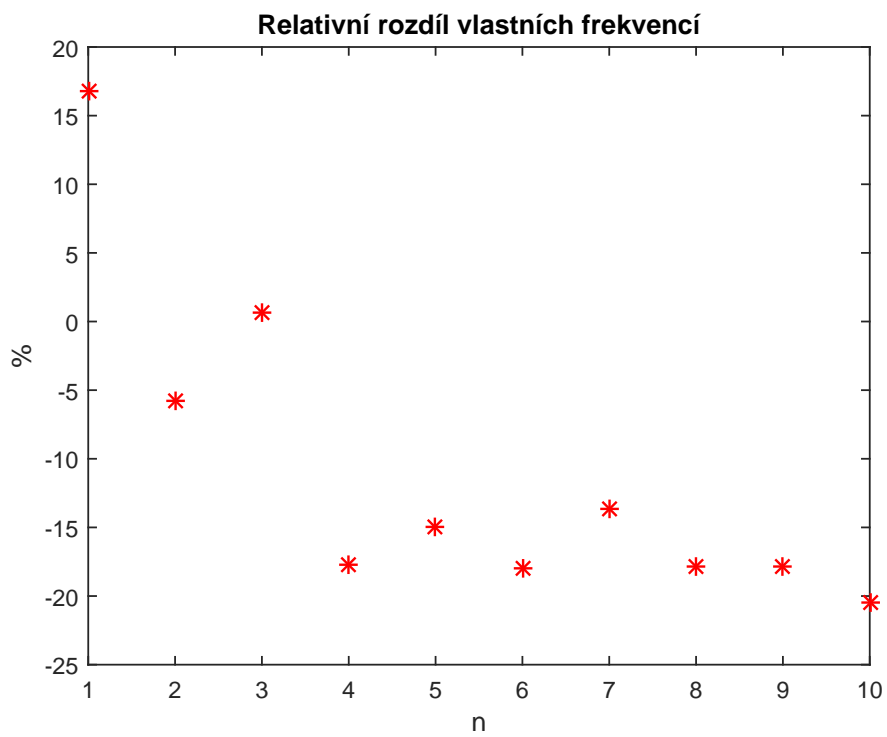


Obr. 6.8: Porovnání vlastních frekvencí ω_n a ω_{INTn} .

Pro prvních deset vlastních frekvencí ilustrujme také absolutní a relativní odchylku n-té frekvence v procentech.



Obr. 6.9: Absolutní odchylka ω_{INTn} a ω_n .



Obr. 6.10: Relativní odchylka ω_{INTn} a ω_n .

7 ZÁVĚR

V práci jsme řešili problematiku vzájemné interakce tlakových pulsací a kmitání trubice. Zjistili jsme, že vzdálenosti mezi sousedními ω_{INTn} se při vzájemné interakci trubice a kapaliny výrazně mění s rostoucím ω , na rozdíl od konstantních vzdáleností sousedních ω_n při kmitání bez vzájemné interakce. Jelikož jsou průběhy tlaku a rychlosti kapaliny přímo spojeny s hodnotami vlastních frekvencí, tak můžeme konstatovat, že je vliv trubice na chování kapaliny významný.

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

symbol	význam	jednotka
ω_n	vlastní frekvence	$[rad \cdot s^{-1}]$
ω_{INTn}	vlastní frekvence při vzájemné interakci	$[rad \cdot s^{-1}]$
ω_{VYN}	frekvence vynuceného kmitání	$[rad \cdot s^{-1}]$
c_K	rychlost zvuku v kapalině	$[m \cdot s^{-1}]$
c_T	rychlost zvuku v trubici	$[m \cdot s^{-1}]$
E	modul pružnosti v tahu	$[Pa]$
S_K	průřez kapaliny	$[m^2]$
S_T	průřez trubice	$[m^2]$
φ_v	fáze amplitudy rychlosti kapaliny	$[rad]$
φ_0	počáteční fáze	$[rad]$
v_{amp}	amplituda rychlosti kapaliny	$[m \cdot s^{-1}]$
V	objem kapaliny	$[m^3]$
x	x-ová souřadnice	$[m]$
n	index vlastní frekvence	$[-]$
m	hmotnost	$[kg]$
v	rychlost kapaliny	$[m \cdot s^{-1}]$
p	tlak v kapalině	$[Pa]$
v_{INT}	rychlost v kapalině při interakci trubice a kapaliny	$[m \cdot s^{-1}]$
p_{INT}	tlak kapaliny při interakci trubice a kapaliny	$[Pa]$
F	síla v trubici	$[N]$
λ	separační konstanta	$[-]$
u	posunutí trubice	$[m]$
F_K	síla od kapaliny	$[N]$
F_T	síla od trubice	$[N]$
L	délka trubice	$[m]$
ϵ	poměrné prodloužení trubice	$[-]$
ρ	hustota kapaliny	$[kg \cdot m^{-3}]$
ρ_T	hustota materiálu trubice	$[kg \cdot m^{-3}]$
v_K	rychlost kapaliny	$[m \cdot s^{-1}]$
v_T	rychlost posunutí trubice	$[m \cdot s^{-1}]$
σ	napětí v trubici	$[Pa]$
F_s	setrvačná síla	$[N]$
F_p	tlaková síla	$[N]$
F_{VYN}	externí síla pro vynucení kmitání	$[N]$
F_0	velikost externí síly	$[N]$

SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] BRDIČKA, Miroslav, Ladislav SAMEK a Bruno SOPKO. *Mechanika kontinua*. Vyd. 4., rev. a upr. Praha: Academia, 2011, 878 s. : il. ; 24 cm. ISBN 978-80-200-2039-0.
- [2] FRANČŮ, Jan. *Parciální diferenciální rovnice: přednáška*. Brno: VUT, Fakulta strojního inženýrství, zimní semestr 2015.
- [3] FIALOVÁ, Simona. *Hydromechanika: přednáška*. Brno: VUT, Fakulta strojního inženýrství, zimní semestr 2015.
- [4] ČERNÝ, Ondřej. *Stanovení druhé viskozity kapaliny z měřených tlakových pulsací: diplomová práce*. Brno: VUT, Fakulta strojního inženýrství, 2010. 62 s. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Vladimír Habán, Ph.D.