



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY
INSTITUTE OF MATHEMATICS

**STOCHASTICKÉ A OPTIMALIZAČNÍ MODELY A
METODY LOKALIZACE ZDROJŮ SIGNÁLU**
STOCHASTIC AND OPTIMIZATION MODELS AND METHODS FOR LOCALIZATION OF SIGNAL
EMITTERS

TEZE DIZERTAČNÍ PRÁCE
SHORT VERSION OF DOCTORAL THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

Ing. Jerguš Suja

ŠKOLITEL
SUPERVISOR

doc. RNDr. Libor Žák, Ph.D.

BRNO 2025

ABSTRAKT

Táto Ph.D. práca sa zaoberá matematickým modelovaním a optimalizáciou pasívnych sledovacích systémov - ťažko odhaliteľných systémov, ktoré sa pri monitorovaní prostredia spoliehajú na signály z okolia. Tieto systémy predstavujú jedinečné výzvy vzhľadom na ich závislosť od stochastických vstupov, nelineárnych účelových funkcií a diskrétnych rozhodovacích premenných. Práca začína stanovením motivácie výskumu v tejto málo preskúmanej oblasti, pričom poukazuje na medzeru v súčasnej literatúre týkajúcej sa optimalizácie pasívnych sledovacích systémov. Na modelovanie riadenia pasívnych systémov je použitá teória viacstupňovej stochastickej optimalizácie. Výskum pokračuje transformáciou problému na zjednodušený monostatický systém, ktorý pomocou optimalizačných metód rolling horizon a ϵ -constraint modeluje ako celočíselnú nelineárnu optimalizáciu. Výsledky simulácií ukazujú konfliktnosť navrhnutých účelových funkcií, Pareto optimálnu množinu riešení a vplyv parametru ϵ na riešiteľnosť úlohy. Posledná časť dizertačnej práce zovšeobecňuje pôvodný prístup pre multistatické systémy, pričom pre riešenie multikriteriálnej úlohy využíva goal programming. Prípadová štúdia dokazuje, že preformulovaním stochastického modelu na multikriteriálnu úlohu, odvodená metóda dokáže efektívne pracovať s neistotami sledovaného prostredia a zvyšuje výkonnosť riadeného systému.

KLÚČOVÉ SLOVÁ

Viacstupňová stochastická optimalizácia, multikriteriálna optimalizácia, pasívny sledovací systém, ovládanie systému

ABSTRACT

This Ph.D. thesis addresses the mathematical modeling and optimization of passive surveillance systems - covert systems that rely on emitted signals for environmental monitoring. These systems pose unique challenges due to their reliance on stochastic inputs, nonlinear objectives, and discrete decision variables. The thesis begins by establishing the motivation for research in this underexplored area, highlighting the gap in current literature regarding the optimization of passive tracking systems. A multi-stage stochastic optimization framework is introduced to model the control of passive systems. The research proceeds with a transformation of the problem into a simplified monostatic system, where an integer nonlinear optimization model is developed using rolling horizon technique and ϵ -constraint method. Simulation results reveal the interplay between conflicting objectives, Pareto optimal set of solutions and the impact of constraint parameter on model solvability. The final part of the dissertation generalizes the approach to multistatic systems, employing goal programming to address multiple objectives. The case study demonstrates that reformulating the stochastic model into a multicriteria framework effectively manages environmental uncertainty and enhances system performance.

KEYWORDS

Multi-stage stochastic optimization, multicriteria optimization, passive surveillance system, control system

CITACE

SUJA, Jerguš. *Stochastické a optimalizační modely a metody lokalizace zdrojů signálu*. Teze dizertační práce. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky, 2025. Vedúci práce: doc. RNDr. Libor Žák, Ph.D.

POĎAKOVANIE

Na tomto mieste by som rád vyjadril úprimné poďakovanie svojmu školiteľovi, doc. RNDr. Liborovi Žákovi, Ph.D., za jeho odborné vedenie počas celého môjho štúdia a práce na dizertačnej práci. Ďalej by som chcel poďakovať svojmu kolegovi Ing. Pavlovi Kulmonovi, Ph.D., za jeho spoluprácu, konštruktívne diskusie a technickú pomoc, ktoré významne prispeli k výsledkom tejto práce. Táto spolupráca prebiehala pod záštitou nášho zamestnávateľa, spoločnosti ERA a.s., ktorej ďakujem za vytvorenie priaznivých podmienok na výskum a odborný rast. Špeciálne poďakovanie patrí mojej manželke a dcére za ich lásku, trpezlivosť a podporu, ktoré mi boli oporou počas celého štúdia. Bez ich porozumenia a povzbudenia by táto práca nevznikla.

Obsah

1	Úvod	6
1.1	Pasívne sledovacie zariadenia	6
1.2	Ciele práce	7
2	Plánovanie multifunkčného monostatického senzoru	8
2.1	Multikriteriálna celočíselná nelineárna optimalizácia	8
2.2	Rolling horizon a škálovanie hyperparametru	12
2.3	Analýza konfliktnosti účelových funkcií a nastavenia ϵ	14
3	Plánovanie multifunkčného multistatického senzoru	20
3.1	Multistatický optimalizačný model	20
3.2	Prehľadovacia multistatická účelová funkcia	21
3.3	Trackovacia multistatická účelová funkcia	22
3.4	Goal programming model	24
3.5	Prípadová štúdia	28
4	Záver	34
	Literatúra	37

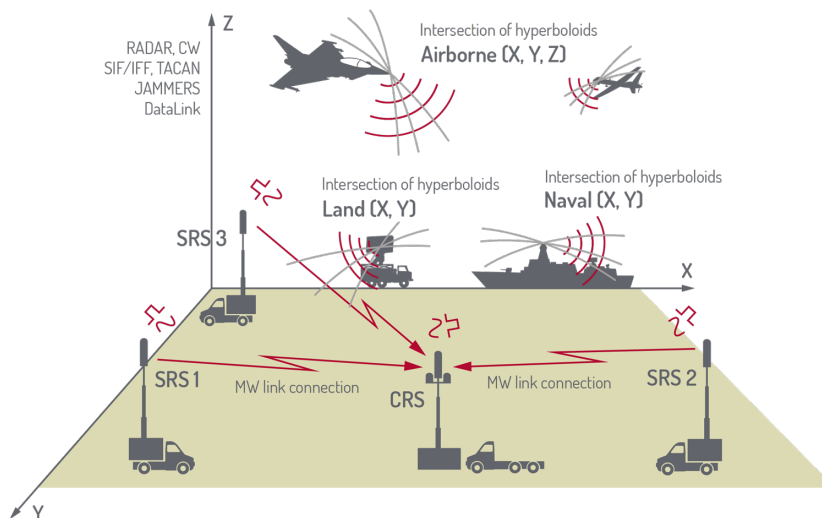
1 Úvod

V posledných desaťročiach sa teória optimalizácie stala základným kameňom aplikovanej matematiky a ponúka výkonné nástroje na modelovanie a riešenie zložitých problémov reálneho sveta. S rýchlym rozvojom výpočtových technológií sa dnes dajú efektívne riešiť optimalizačné modely, ktoré sa kedysi považovali za neriešiteľné kvôli ich veľkosti alebo zložitosti - dokonca v reálnom čase. Tento pokrok podnietil prudký nárast záujmu o vývoj presnejších, robustnejších a vysokodimenzionálnych optimalizačných metód, ktoré sú schopné riešiť neistotu, nelinearitu a dynamické prostredia.

Táto dizertačná práca sa zameriava na matematické modelovanie a optimalizáciu pasívnych sledovacích systémov - triedy systémov, ktoré monitorujú prostredie využívaním okolitých signálov namiesto vysielania vlastných. Tieto systémy sú vo svojej podstate skryté a energeticky úsporné, kde ich účinnosť závisí od inteligentného riadenia hardvérových zdrojov, stratégií spracovania signálov a mechanizmov fúzie dát. Problém riadenia systému je prirodzene formulovaný ako optimalizačná úloha, ktorá zahŕňa nekonvexné účelové funkcie, diskkrétne rozhodovacie premenné a stochastické prvky [1].

1.1 Pasívne sledovacie zariadenia

VERA-NG [2] je pasívny sledovací systém fungujúci na princípe multilaterácie [3] (MLAT). Jedná sa o rozdiel času príchodu signálu na niekoľko rozmiestnených prijímačov v priestore. Bežná konfigurácia systému obsahuje štyri prijímače. Ak sledovaný prostriedok vyžiari radiolokačný pulz a zachytia ho všetky štyri prijímače, tzn. odmerajú jeho čas príchodu (time of arrival - TOA) a parametre (frekvencia a šírka pulzu), je možné na základe troch rozdielov času (time difference of arrival - TDOA) určiť systém hyperboloidov v priestore. Priesečník týchto kvadrík určí 3D polohu sledovaného cieľa. Pre ilustráciu je konfigurácia systému naznačená v Obr. 1.1. Okamžitá pracovná šírka jedného prijímaču systému VERA pre sledovanie frekvenčného spektra sa pohybuje len v rozmedzí 0.001 - 0.25 GHz. Aby systém pokryl všetky frekvenčné pásma musí v určitých časových okamihoch preladiť svoje prijímače. Preladenie znamená zmenu aktuálne sledovaného frekvenčného pásma, napr. sledujeme pásmo 3.0 - 3.1 GHz a preladiť prijímač na pásmo 9.1 - 9.35 GHz. V súčasnosti je ovládanie, teda preladovanie frekvenčných pásiem, závislé od odborných znalostí a efektívnosti operátorov. Vzhľadom na obmedzené zdroje je nevyhnutné, aby bol systém riadený čo najoptimálnejším spôsobom s náležitým zohľadnením požiadaviek systému. Zjednodušene je úlohou plánovania ladenia rozhodnúť, aké frekvenčné pásmo, kedy, ako dlho, a ktorým prijímačom má byť sledované.



Obr. 1.1: Konfigurácia VERA-NG

1.2 Ciele práce

Hlavným cieľom tejto práce je prispieť k matematickému modelovaniu a optimalizácii pasívnych sledovacích systémov so zameraním na efektívne využitie hardvérových zdrojov a praktickú použiteľnosť. Konkrétne ciele práce sú nasledovné:

1. Modelovanie pasívneho sledovacieho systému
2. Optimalizácia alokácie hardvérových zdrojov
3. Transformácia modelu do riešiteľnej formy
4. Overenie navrhovanej metodiky
5. Interpretácia výsledkov a použiteľnosť v reálnom svete

Je potrebné zdôrazniť, že téme tvorby ladiaceho plánu pre **pasívne senzory**, ako je napríklad VERA-NG sa podľa realizovanej rešerše venuje pomerne málo výskumu. Doplňme, že okrem rozdielu v princípe fungovania pasívnych a aktívnych sledovacích zariadení (klasické radary, ktorým sa venuje značná časť výskumu) sa tieto systémy líšia v pravdepodobnosti detekcie (PoD) sledovaných cieľov. V prípade pasívnych snímačov je pravdepodobnosť detekcie do značnej miery podmienená pravdepodobnosťou zachytenia (PoI) [4]. To znamená, že účinnosť pasívneho snímača významne závisí od jeho schopnosti zachytiť signály vysielané inými zdrojmi. Naopak pravdepodobnosť detekcie v aktívnych radarových systémoch je určená prevažne výkonom vysielaného signálu, radarovou odrazivosťou cieľa (radar cross-section - RCS) a podmienkami prostredia [5]. V kontexte radaru sa pojem zachytenia neuplatňuje, keďže radar sám generuje signál. To ešte viac podtrhuje význam autorovho výskumu.

2 Plánovanie multifunkčného monostatického senzoru

2.1 Multikriteriálna celočíselná nelineárna optimalizácia

V prvom kroku riešime zjednodušený model pasívneho sledovacieho systému. Odvodenie monostatického modelu a výsledky prezentované v kapitole 2.3 boli publikované v článku [6]. Uvažujme konečnú časovú osu ekvidištantne diskretizovanú na intervaly s konštantným časovým krokom τ , ktoré tvoria množinu $T = \{t \in \mathbb{N} | 0 \leq t \leq T_{max}\}$. Model systému bude mať k dispozícii len **jeden prijímač** (monostatický senzor), ktorý môžeme naladiť na jedno z frekvenčných pásiem množiny $M = \{m \in \mathbb{N} | 0 \leq m \leq M_{max}\}$. V každom pásme sa môže nachádzať ľubovoľný počet cieľov J_m . Optimalizovanou premennou je vektor, kde jednotlivé prvky predstavujú konkrétny merací interval $\mathbf{x} = [x_0, \dots, x_{T_{max}}]$ a ich hodnota odpovedá indexu frekvenčného bandu, ktorý chceme ladiť v danom meracom intervale $x_t \in M$.

Cieľom plánovania ladenia z pohľadu vedenia cieľov je regulovať premenné systému (nájsť optimálne nastavenie) tak, aby umožnili čo najlepšie meranie sledovaných cieľov. V [1] kvantifikovali informačný prínos pomocou Rényiovej informačnej divergencie pre spojité náhodné veličiny

$$D_\alpha(p||q) = \frac{1}{\alpha - 1} \log \int_{-\infty}^{\infty} p^\alpha(x)q^{1-\alpha}(x)dx. \quad (2.1)$$

Ak má nové meranie $\mathbf{z}_t \in \mathcal{Z}_t$ veľký informačný prínos, kde \mathcal{Z}_t je množina meraní $\{\mathbf{z}_i\}_{i=0}^t$ do času t a platí $\mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^m$, potom aposteriórna hustota pravdepodobnosti odhadu stavu cieľa $h(\mathbf{x}_t|\mathcal{Z}_t)$ je výrazne odlišná od apriórnej hustoty pravdepodobnosti $h(\mathbf{x}_t|\mathcal{Z}_{t-1})$, a tým pádom je aj divergencia vysoká. Ak na druhej strane nové meranie poskytne slabú informáciu o stave cieľa, tak aposteriórna a apriórna hustota bude veľmi podobná a informačná divergencia bude mať nízku hodnotu. Keďže aposteriórna hustota je v momente plánovania akcií senzoru pre obdržanie meraní neznáma, autori odvodili vzťah pre výpočet očakávanej hodnoty informačnej divergencie

$$\begin{aligned} E[D_\alpha(h(\mathbf{x}_t|\mathcal{Z}_t)||h(\mathbf{x}_t|\mathcal{Z}_{t-1}))] = \\ \frac{1}{2(1-\alpha)} \log \left(\frac{\det(\alpha\Psi_t + \mathbf{I})}{\det(\alpha\Psi_t + \mathbf{I})^\alpha} \right) + \frac{1}{2} tr(\mathbf{I} - (\alpha\Psi_t + \mathbf{I})^{-1}), \\ \Psi_t = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{P}_{t|t-1}\mathbf{H}^\top. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Kde \mathbf{R} je kovariančná matica šumu meraní, \mathbf{H} je model meraní, ktorý mapuje stavový priestor na priestor meraní a $\mathbf{P}_{t|t-1}$ je kovariančná matica apriórneho odhadu stavu cieľa.

Ladiaci plán \mathbf{x} a jeho prvky x_t ovplyvnia aproximáciu odhadu Rényiovej informačnej divergencie (2.2) v čase $t + 1$ nasledovne:

- Ak $x_t = m$, tak predpokladáme, že medzi časom t a $t + 1$ dôjde k aktualizácii Bayesovského odhadu stavu sledovaných cieľov vyžarujúcich v pásme m . Pre aktualizáciu použijeme apriórny odhad stavu.
- Ak však v čase t sledujeme iné pásmo, než v ktorom sa nachádza sledovaný cieľ, k aktualizácii nedôjde a za aposteriórny odhad stavu vezmeme apriórny odhad.

K celkovému problému budeme navyše pristupovať pomocou *minmax* metódy. Cieľom je aby sa algoritmus nezamerlal na optimalizovanie len jedného pásma emitte-rov, z ktorého má najväčší informačný prínos na základe očakávanej hodnoty Rényiovej divergencie, ale optimalizoval účelovú funkciu vzhľadom k aktuálne najhoršiemu pásmu. Účelová funkcia tracku $f_{track}(\mathbf{x})$ má tento tvar:

$$f_{track}(\mathbf{x}) = \sum_{t \in T} \max_{m \in M} e_t(\mathbf{x}, m), \quad (2.3)$$

$$e_t(\mathbf{x}, m) = \begin{cases} \frac{\sum_{j \in J_m} \mathbb{E}[D_\alpha(h_j(\mathbf{x}_t|Z_t)||h_j(\mathbf{x}_t|Z_{t-1}(\mathbf{x})))]}{|J_m|} & \text{if } |J_m| \neq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad \forall t \in T. \quad (2.4)$$

Výsledná účelová funkcia (2.3) je suma maximálnych hodnôt funkcií $e_t(\mathbf{x}, m)$ časových intervalov množiny T , ktorých hodnota je priemer z aproximácii očakávaných hodnot informačných divergencií cieľov nachádzajúcich sa v pásme m .

Druhým aspektom je schopnosť systému vyhľadať zdroje signálu v elektromagnetickom spektre. I. V. L. Clarkson sa problematike prehľadávania bez apriórnej informácie a pomocou monostatického prijímaču venoval v nadväzujúcej sérii článkov [4, 7, 8, 9]. Stratégiu ladenia postavil na náhodnom prehľadávaní frekvenčného spektra pomocou Markovského reťazca so spojitým časom. Tento prístup nám dáva možnosť generovať optimálne ladiace plány, sekvencie frekvenčných pásiem na základe optimálnej prechodovej matice \mathbf{P}^* , kde jednotlivé stavy DTMC odpovedajú jednotlivým frekvenčným pásmam M . Avšak optimalizačný model pracuje na opačnom princípe. Cieľom je z množiny prípustných riešení $M^{T_{max}}$ vybrať také \mathbf{x}^* , pre ktoré platí $f_{survey}(\mathbf{x}^*) \leq f_{survey}(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in M^{T_{max}}$. Funkcia $f_{survey} : M^{T_{max}} \rightarrow \mathbb{R}$ by mala byť zobrazením vyjadrujúcim určitú vzdialenosť pozorovanej sekvencie \mathbf{x} , alebo jej vhodnej transformácie od optimálnej prechodovej matice \mathbf{P}^* . Na prvý pohľad sa

zdá nejasné akým spôsobom ide porovnať postupnosť celých čísel a prechodovú maticu náhodného Markovského procesu. Predpokladajme, že pozorovaná postupnosť \mathbf{x} ,

- bola vygenerovaná pomocou DTMC so stacionárnym rozdelením $\boldsymbol{\pi}'$ a nachádza sa v dostatočne pozdnej fáze behu DTMC, aby mohlo dôjsť ku konvergencii k tomuto stacionárnemu rozdeleniu,
- bola vygenerovaná ako množina vzoriek pomocou pravdepodobnostnej funkcie $\boldsymbol{\pi}'$, pričom poradie je dané jedine poradím volaní generátora týchto vzoriek.

Poznamenajme, že optimálna prechodová matica \mathbf{P}^* je odvodená od požadovaného stacionárneho rozdelenia $\boldsymbol{\pi}$. Vzhľadom k predpokladom, ktoré sme uviedli je postačujúce použiť vhodný odhad stacionárneho rozdelenia $\boldsymbol{\pi}'(\mathbf{x})$. K tomu posluží Bayesovský model [10] s konjugovaným apriórnym Dirichletovým rozdelením $\text{Dir}(M_{max}, \boldsymbol{\alpha})$ a kategorickým rozdelením $\text{Cat}(M_{max}, \boldsymbol{\pi}')$ ako vierohodnosťou [11]. Dimenzia oboch rozdelení je rovná M_{max} .

Model pracuje s dátami, ktoré pochádzajú z kategorického rozdelenia s neznámym vektorom parametrov $\boldsymbol{\pi}'$ a hodnoty týchto parametrov sú vzhľadom k modelu náhodné premenné. Ako sme zmienili, týmto náhodným parametrom priradíme apriórne Dirichletovo rozdelenie. Keďže Dirichletovo rozdelenie je konjugované apriórne rozdelenie kategorického rozdelenia, tak aposteriórne rozdelenie je taktiež Dirichletovo rozdelenie. Model zapíšeme nasledovne:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &= [\alpha_0, \dots, \alpha_{M_{max}}] - \text{hyperparameter rozdelenia parametru } \boldsymbol{\pi}', \\ \boldsymbol{\pi}' \mid \boldsymbol{\alpha} &= [\pi'_0, \dots, \pi'_{M_{max}}] \sim \text{Dir}(M_{max}, \boldsymbol{\alpha}) - \text{apriórne rozdelenie}, \\ \mathbf{x} \mid \boldsymbol{\pi}' &= [x_0, \dots, x_{T_{max}}] \sim \text{Cat}(M_{max}, \boldsymbol{\pi}') - \text{vierohodnostná funkcia}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Označme $\mathbf{n} = [n_0, \dots, n_{M_{max}}]$ počty výskytov jednotlivých stavov v pozorovanej postupnosti \mathbf{x} . Výsledný Bayesovský model a aposteriórne rozdelenie stacionárneho rozdelenia má nasledujúci tvar

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{\pi}' \mid \mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) &= \frac{p(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\pi}', \boldsymbol{\alpha})p(\boldsymbol{\pi}' \mid \boldsymbol{\alpha})}{p(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\alpha})}, \\ p(\boldsymbol{\pi}' \mid \mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) &\propto p(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\pi}', \boldsymbol{\alpha})p(\boldsymbol{\pi}' \mid \boldsymbol{\alpha}) = \\ &= \left(\prod_{i=0}^{M_{max}} \pi_i^{n_i} \right) \left(\prod_{i=0}^{M_{max}} \pi_i^{\alpha_i - 1} \right) = \\ &= \left(\prod_{i=0}^{M_{max}} \pi_i^{n_i + \alpha_i - 1} \right), \\ \boldsymbol{\pi}' \mid \mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha} &\sim \text{Dir}(M_{max}, \mathbf{n} + \boldsymbol{\alpha}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Odhad stacionárneho rozdelenia získame zo strednej hodnoty výsledného konjugovaného aposteriórneho Dirichletovho rozdelenia,

$$\boldsymbol{\pi}'(\mathbf{x}) = E[\boldsymbol{\pi}'|\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}] = \left[\frac{n_0 + \alpha_0}{T_{max} + \tilde{\alpha}}, \dots, \frac{n_{M_{max}} + \alpha_{M_{max}}}{T_{max} + \tilde{\alpha}} \right], \quad (2.7)$$

$$\tilde{\alpha} = \sum_{i=0}^{M_{max}} \alpha_i. \quad (2.8)$$

Hodnotu účelovej funkcie f_{survey} vyjadríme pomocou Kullback-Leiblerovej divergencie požadovaného stacionárneho rozdelenia $\boldsymbol{\pi}$ DTMC a odhadnutého stacionárneho rozdelenia $\boldsymbol{\pi}'(\mathbf{x})$ pozorovanej postupnosti \mathbf{x} nasledovne

$$f_{survey}(\mathbf{x}) = D_{KL}(\boldsymbol{\pi}'(\mathbf{x})||\boldsymbol{\pi}) = \sum_{i=0}^{M_{max}} \pi'_i(\mathbf{x}) \log \frac{\pi'_i(\mathbf{x})}{\pi_i}. \quad (2.9)$$

Model **multikriteriálnej celočíselnej nelineárnej optimalizácie** je nasledovný:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad [f_{track}(\mathbf{x}), f_{survey}(\mathbf{x})] \\ & \text{subject to} \quad \mathbf{x} \in M^{T_{max}}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

V kapitole 2.3 ukážeme, že kriteriálne funkcie (2.3) a (2.9) sú vzájomne konfliktné. Teda neexistuje jedno riešenie, ktoré súčasne optimalizuje všetky účelové funkcie. Riešením tohto problému je Pareto optimálna množina riešení. Vzhľadom k tomu, že systém pracuje v real-time, tak nie je možné nechať na užívateľovi rozhodovanie/vyberanie riešenia, ktoré bude uplatnené z Pareto množiny riešení. Jedným z možných prístupov je skalarizačná technika ϵ -constraint metóda. Prevedením jednej z účelových funkcií multikriteriálneho problému (2.10) na obmedzenie tak, že požadujeme aby hodnota bola vždy menšia rovná než zvolené ϵ . Aby sme pracovali so zrozumiteľnejšou hodnotou ϵ , upravíme f_{track} takým spôsobom, že miesto sumy maximálnych hodnôt cez všetky bandy budeme pracovať jedine s maximálnou hodnotou pre všetky časové intervaly a frekvenčné bandy.

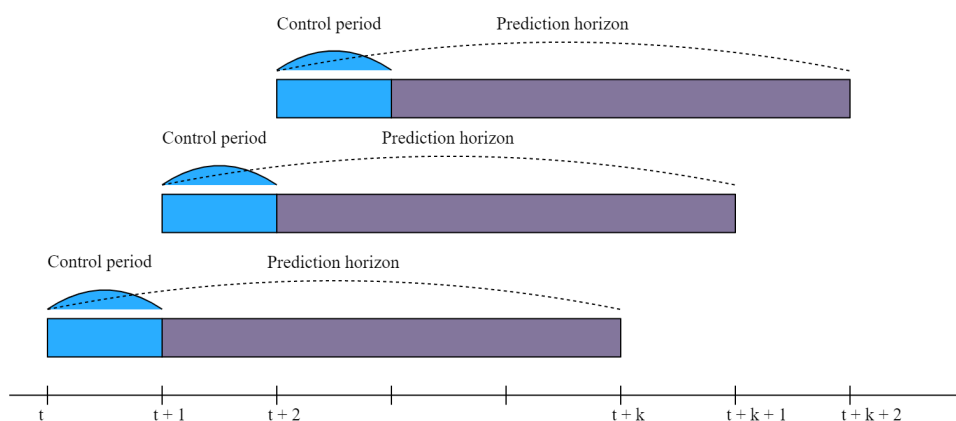
$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad f_{survey}(\mathbf{x}) \\ & \text{subject to} \quad \max_{\substack{t \in T_{max} \\ m \in M}} e_t(\mathbf{x}, m) \leq \epsilon, \\ & \quad \quad \quad \mathbf{x} \in M^{T_{max}}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Z uvedeného modelu je viditeľné, že komplexita optimalizačného problému priamo úmerne rastie s počtom frekvenčných pásiem M a veľkosťou časovej osi T . Zatiaľ čo v reále je počet frekvenčných pásiem obmedzený HW zdrojmi, tak proti tomu je teoreticky možné pracovať s nekonečnou časovou osou. Navyše ak pracujeme s τ rádovo v desiatkách milisekúnd, tak získanie ladiaceho plánu na jednu minútu predstavuje stovky premenných x_t . S tým rastie aj výpočtová náročnosť úlohy.

Podľa teórie stochastického programovania môžeme tento spôsob riešenia klasifikovať ako *here and now* prístup. Riešenie získané týmto prístupom je často len suboptimálne. V prípade uvedeného modelu sledovacieho systému pracujeme s niekoľkými náhodnými parametrami. Keďže aposteriórna hustota pravdepodobnosti stavu každého aktuálne sledovaného cieľa sa v čase vyvíja, vplyvom náhodnosti meraní je aj funkcia (2.4) náhodným parametrom. Taktiež aktuálny počet vedených cieľov v každom frekvenčnom pásme J_m je v tomto modeli náhodným parametrom. Cieľe môžu odletieť (odísť, odplávať) zo záujmového priestoru alebo naopak priletieť (prísť, priplávať).

2.2 Rolling horizon a škálovanie hyperparametru

Odpoveďou na zmienené problémy je regulácia pomocou *rolling horizon* (pohyblivý horizont). Je to optimalizačná technika v reálnom čase (online), ktorá opakovane počíta riešenie optimalizačných problémov s obmedzeniami, pričom berie do úvahy súčasný stav, aproximácie očakávaných hodnôt účelovej funkcie, chýb predikcií a obmedzenia v kľzavom časovom horizonte s cieľom nájsť optimálne riadenie pre aktuálne obdobie. Metóda je názorne opísaná na Obr. 2.1. Počet časových intervalov, pre ktoré budeme predikovať náhodné premenné označíme k . Ďalej pomenujme $T_{rt} = \{t, t+1, t+2, \dots, t+k\}$ množinu časových intervalov s aktuálnym stavom v čase t a aproximujeme očakávané hodnoty obmedzení pre $t+1, t+2, \dots, t+k$.



Obr. 2.1: Rolling horizon.

Účelová funkcia f_{survey} pôvodnej úlohy odhadovala stacionárne rozdelenie pozorovanej sekvencie stavov (ladiaci plán frekvenčných bandov) z premennej \mathbf{x} pre množinu časových intervalov $T = \{t \in \mathbb{N} | 0 \leq t \leq T_{max}\}$. Keďže *rolling horizon* prístup má iteratívny charakter s redukovanou časovou osou na množinu T_{rl} , pôvodný prístup by znamenal pre každú epochu nezávislý Bayesovský odhad stacionárneho rozdelenia nad veľmi krátkymi sekvenciami s apriórnym Dirichletovým rozdelením $\text{Dir}(\boldsymbol{\alpha})$. Vektor parametrov $\boldsymbol{\alpha}$ v tomto prípade interpretujeme ako vektor pseudo-pozorovaní jednotlivých stavov. Označme $l = 0, 1, 2, \dots$ iterácie (epochy) metódy *rolling horizon*. Okrem epochy 0 odhadujeme stacionárne rozdelenie z pozorovanej sekvencie \mathbf{x} . Pre epochu $l = 0$ je odhad stacionárneho rozdelenia

$$\boldsymbol{\pi}'_0(\mathbf{x}) = E[\mathbf{X}], \quad \mathbf{X} \sim \text{Dir}(\boldsymbol{\alpha}). \quad (2.12)$$

Ak by sme robili nezávislé odhady pre každú epochu pomocou apriórneho rozdelenia $\boldsymbol{\pi}'_0(\mathbf{x})$, potom pre tieto odhady platí

$$\boldsymbol{\pi}'_l(\mathbf{x}) = E[\mathbf{X}_l], \quad \mathbf{X}_l \sim \text{Dir}(\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{n}^l), \quad (2.13)$$

kde $\mathbf{n}^l = [n_0^l, \dots, n_{M_{max}}^l]$ je vektor počtu výskytov jednotlivých stavov v pozorovanej postupnosti \mathbf{x} . Podobne by sme mohli pristupovať aj k sekvenčnému odhadu, kde pre každú epochu $l = 1, 2, \dots$ ako apriórne stacionárne rozdelenie použijeme aposteriórne rozdelenie z predchádzajúcej epochy. Potom pre odhad stacionárneho rozdelenia v epoche l platí

$$\boldsymbol{\pi}'_l(\mathbf{x}) = E[\mathbf{X}_l], \quad \mathbf{X}_l \sim \text{Dir}(\boldsymbol{\alpha} + \sum_{i=1}^l \mathbf{n}^i). \quad (2.14)$$

Zásadným problémom tohto prístupu je, že ak pozorujeme krátke sekvencie dĺžky k , ktoré sú približne rovné počtu stavov odhadovaného rozdelenia, tak po niekoľkých epochách informačný obsah apriórneho rozdelenia prevažuje nad informáciou obsiahnutou v pozorovaných dátach. Ak by sa jednalo o prípad, kedy vieme, že všetky pozorované sekvencie pochádzajú zo spoločného stacionárneho rozdelenia a úlohou je čo najlepšie odhadnúť toto rozdelenie, tak tento prístup je ideálny. Avšak toto nie je náš prípad. Predpoklad, že pozorované sekvencie pochádzajú zo spoločného rozdelenia nie je splnený, a preto potrebujeme spôsob akým zohľadníme fakt, že pozorovaná sekvencia \mathbf{x} nepochádza z odhadovaného stacionárneho rozdelenia.

Označme konstantu c , ktorou vynásobíme vektor parametrov Dirichletovho rozdelenia $\boldsymbol{\alpha}$ a získame $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = c\boldsymbol{\alpha}$. Stredná hodnota, rozptyl a kovarianca prenášobného Dirichletova rozdelenia konštantou jednotlivých zložiek vyzerá nasledovne

$$\begin{aligned}
E[\hat{X}_i] &= \frac{\hat{\alpha}_i}{\hat{\alpha}_0} = \frac{c\alpha_i}{c\alpha_0} = E[X_i], \\
\text{Var}[\hat{X}_i] &= \frac{\hat{\alpha}_i(\hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_i)}{\hat{\alpha}_0^2(\hat{\alpha}_0 + 1)} = \frac{c^2\alpha_i(\alpha_0 - \alpha_i)}{c^2\alpha_0^2(c\alpha_0 + 1)} = \frac{\alpha_i(\alpha_0 - \alpha_i)}{\alpha_0^2(c\alpha_0 + 1)}, \\
\text{Cov}[\hat{X}_i, \hat{X}_j] &= \frac{\delta_{ij}\alpha_0\alpha_i - \alpha_i\alpha_j}{\alpha_0^2(c\alpha_0 + 1)}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Pri veľmi hrubej aproximácii môžeme zapísať

$$\begin{aligned}
\text{Var}[\hat{X}_i] &\approx \frac{\text{Var}[X_i]}{c}, \\
\text{Cov}[\hat{X}_i, \hat{X}_j] &\approx \frac{\text{Cov}[X_i, X_j]}{c}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Touto **zmenou merítka** vektoru parametrov Dirichletovho rozdelenia dôjde k zvýšeniu (pre $c < 1$) resp. zníženiu (pre $c > 1$) rozptylu jednotlivých zložiek náhodného vektoru, a tým aj menšiemu resp. väčšiemu ukotveniu prioru okolo strednej hodnoty, ktorá samotná ostáva bez zmeny. Dosadením do vhodnej miery informácie napr. do diferenciálnej entropie pravdepodobnostného rozdelenia môžeme jednoducho dokázať, že informačný prínos sa zníži so zvyšujúcim sa rozptylom resp. zvýši so znižujúcim sa rozptylom.

Vhodnou voľbou konštanty $c < 1$ dosiahneme zníženie informačného obsahu apriórneho rozdelenia, čím zabezpečíme balans medzi informačným prínosom nového merania \mathbf{x} a prioru. Takýmto spôsobom sme schopní odhaliť pozorované sekvencie, ktoré nepochádzajú z odhadovaného stacionárneho rozdelenia. Zákonite, odhady rozdelenia týchto sekvencií budú v KL divergencii vzdialené od požadovaného stacionárneho rozdelenia $\boldsymbol{\pi}$, a teda budú považované za neoptimálne z pohľadu problému (2.11).

2.3 Analýza konfliktности účelových funkcií a nastavenia ϵ

Predtým než daný model aplikujeme v reálnom prostredí, budeme študovať jeho vlastnosti a efektivitu na simulovaných dátach. Nastavíme diskretizačný časový krok $\tau = 0.03$ s, počet frekvenčných bandov $M_{max} = 9$, požadované stacionárne rozdelenie $\boldsymbol{\pi} = [0.1, 0.1, \dots, 0.1]$, hyperparameter Dirichletovho rozdelenia $\boldsymbol{\alpha}$ pre nultú epochu na jednotkový vektor a počet časových intervalov, pre ktoré budeme predikovať náhodné premenné $T_{max} = 20$. Simulácia obsahuje dva vedené ciele, jeden v pásme $m = 1$ a druhý v $m = 3$. U prvého cieľa uvažujeme rádovo vyššiu nepresnosť meraní **R**.

V prvom kroku nás zaujíma riešenie multikriteriálneho celočíselného problému (2.10) v časovom intervale $t = 100$ s horizontom $T_{max} = 20$. Tento problém riešime pomocou nedominovaného triediaceho genetického algoritmu (*NSGA-II*) od Deb a spol. [12] s hyperparametrami uvedenými v Tab. 2.1.

Hyperparameter	Hodnoty a metódy
Veľkosť populácie	40 jedincov
Ukončovacia podmienka	100 generácií
Inicializačné samplovanie	Náhodné celočíselné
Prežitie jedincov	Triedenie podľa hodnoty kritérií a skupinovej vzdialenosti
Selekcia rodičov	Turnajový výber ([13])
Kríženie	Simulované binárne kríženie so zaokrúhlením na celé čísla a parametrami $p = 1, \eta = 3$ ([14])
Mutácia	Polynomiálna mutácia so zaokrúhlením na celé čísla a parametrami $p = 1, \eta = 3$

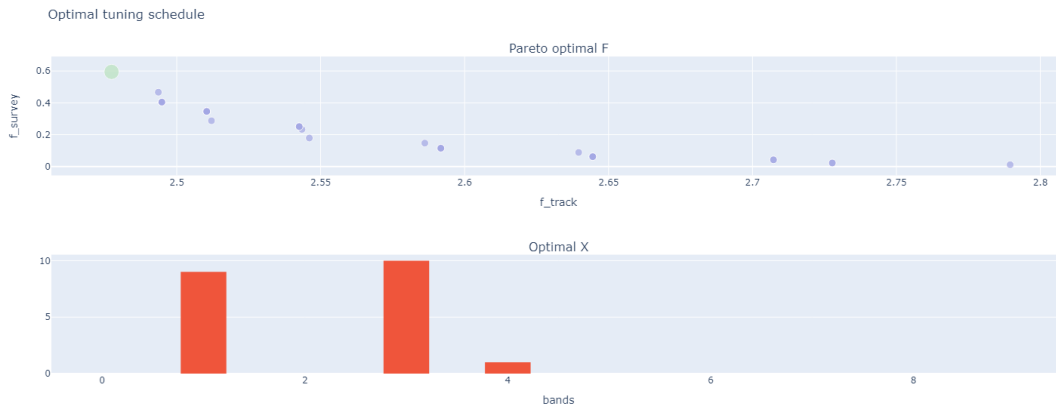
Tab. 2.1: Hyperparametre NSGA-II

Algoritmus replikuje všeobecný predpis genetických algoritmov až na upravené fázy prežitia, selekcie a mutácie, implementované v pymoo [15]. Obr. (2.2) zobrazuje Pareto optimálnu množinu riešení. Z grafov môžeme pozorovať tieto vlastnosti problému:

- kritériálne funkcie sú konfliktné, tzn. neexistuje riešenie, ktoré by súčasne optimalizovalo obe účelové funkcie,
- účelová funkcia f_{track} má logicky tendenciu prioritizovať frekvenčné bandy, v ktorých sú aktuálne vedené ciele (Obr. 2.2a),
- naopak účelová funkcia f_{survey} sa snaží ladiaci plán priblížiť k požadovanému stacionárnemu rozdeleniu π (Obr. 2.2c).

Po druhé analyzujeme modifikovanú pôvodnú úlohu (2.10) metódou ϵ -constraint. Riešime celočíselný nelineárny optimalizačný problém s obmedzeniami (2.11). Pre získanie výsledkov použijeme genetický algoritmus (*GA*).

Konkrétne nás zaujíma vplyv zvolenej hodnoty ϵ na množinu prípustných riešení, resp. riešiteľnosť úlohy (2.11). Obr. 2.3 zobrazuje závislosť hodnoty účelovej funkcie f_{survey} na hodnote ϵ . Pre veľmi prísne požiadavky na kvalitu vedených cieľov, teda nízke hodnoty ϵ , vidíme, že v stave $t = 100$ simulovaného prostredia neexistuje riešenie (ladiaci plán), ktorým sme schopný splniť tieto požiadavky - červené body grafu. Od určitej hodnoty ϵ dosiahneme prvé prípustné riešenia. Toto ešte stále relatívne prísne nastavenie uprednostňuje frekvenčné bandy s vedenými cieľmi, Obr.



(a) Pareto optimálne riešenie $f^* = [2.45, 0.6]$.

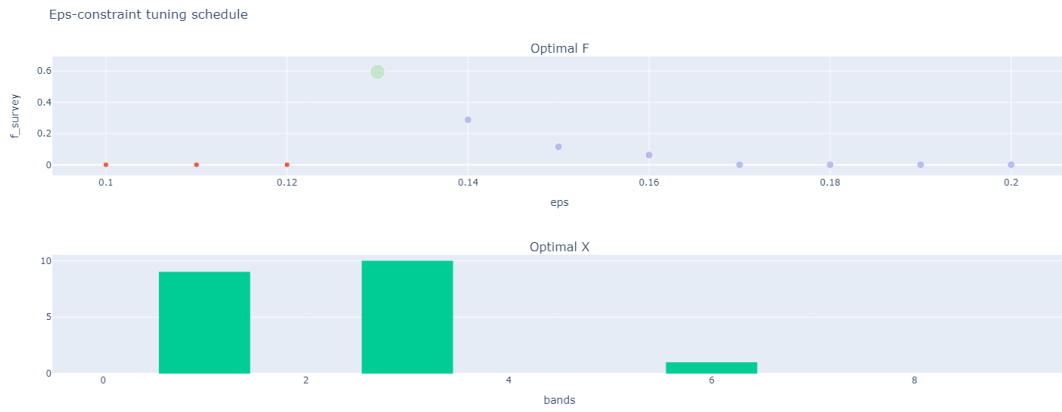


(b) Pareto optimálne riešenie $f^* = [2.59, 0.13]$.



(c) Pareto optimálne riešenie $f^* = [2.79, 0.01]$.

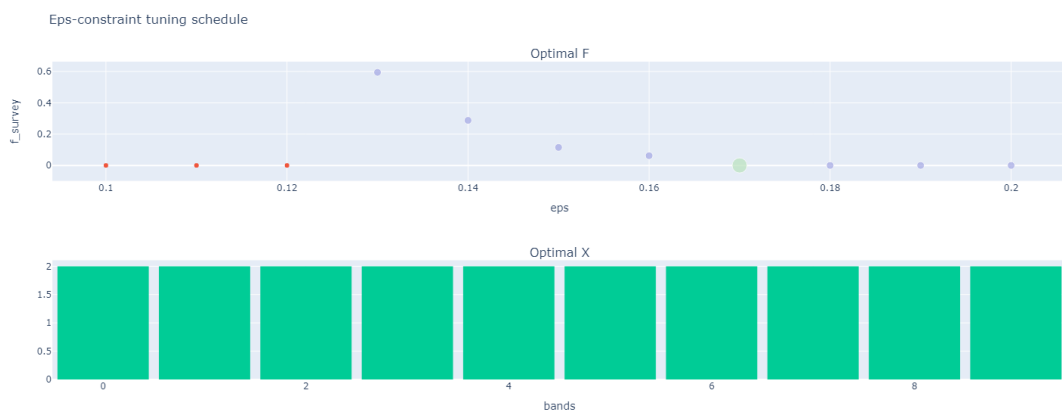
Obr. 2.2: Pareto optimálna množina riešení.



(a) Prísne nastavenie ϵ .



(b) Kompromisný ladiaci plán.

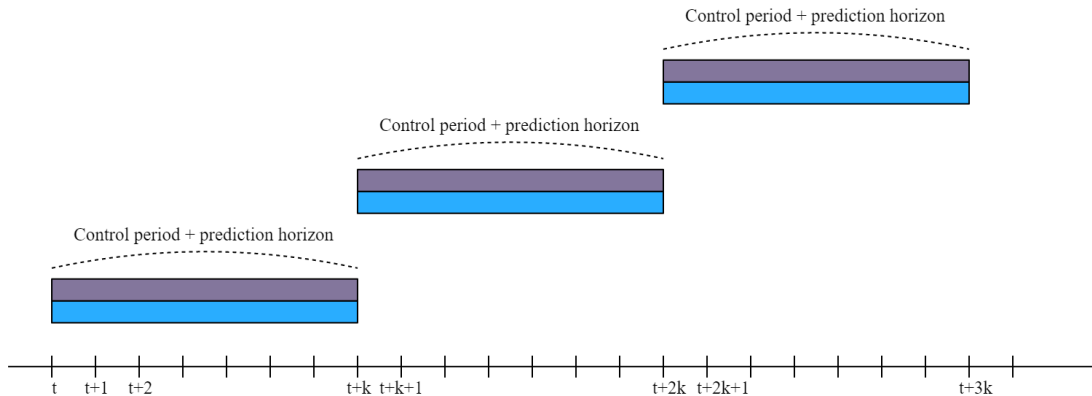


(c) Benevolentné nastavenie ϵ .

Obr. 2.3: Závislosť riešiteľnosti úlohy na hodnote ϵ .

2.3a. Hodnota účelovej funkcie sa zlepšuje (klesá) v závislosti na benevolentnejšom nastavení ϵ . Na Obr. 2.3b sme dosiahli kompromisný ladiaci plán medzi prehľadávaním frekvenčného spektra a aktualizovaním vedených cieľov meraniami pre kvalitné trackovanie definované práve hodnotou ϵ . Pre dostatočne vysoké nastavenie Obr. 2.3c, ladiaci plán odpovedá požadovanému stacionárnemu rozdeleniu π .

Doteraz sme sa zaoberali riešením problémov (2.10) a (2.11) v jednom konkrétnom časovom intervale $t = 100$ a s horizontom $T_{max} = 20$. V kapitole 2.2 sme však uviedli online optimalizačnú metódu *rolling horizon*, pomocou ktorej sme schopní zostavovať optimálny ladiaci plán aj pre nekonečnú časovú osu. V ďalšom texte sa zameriame na porovnanie *rolling horizon* s prepočtom po každom intervale (Obr. 2.1) a s realizovaním celého plánu (Obr. 2.4). Vzhľadom k predchádzajúcej analýze zvolíme $\epsilon = 0.2$.



Obr. 2.4: Rolling horizon s realizáciou celého plánu.

Výsledky na Obr. 2.5 ukazujú, že prepočet po každom časovom intervale je stabilnejší z pohľadu riešiteľnosti optimalizačnej úlohy, než prístup s realizáciou celého plánu. Na Obr. 2.5c od $t = 140$ už úloha nie je riešiteľná týmto prístupom. Prepočet po každom intervale je naopak schopný včas vynucovať ladenie frekvenčných bandov s vedenými cieľmi v prípade potreby. Je to viditeľné na Obr. 2.5b, kde v časovom intervale $t = 128$ sa oba ciele priblížia k hranici $\epsilon = 0.2$, na čo algoritmus reaguje zvýšeným presadzovaním frekvenčných bandov $m = \{1, 3\}$ v subgrafe *Optimal X sequence*. Ak však sú ciele dostatočne kvalitne vedené, algoritmus využije dostupné zdroje k maximálnemu prehľadávaniu frekvenčného spektra. Potvrďuje to aj Obr. 2.5a, ktorý detailne opisuje časový interval $t = 114$.



(a) Časový interval $t = 114$.

(b) Časový interval $t = 128$.



(c) Realizácia celého plánu.

Obr. 2.5: Rolling horizon prístup.

3 Plánovanie multifunkčného multistatického senzoru

V predchádzajúcej kapitole sme sa venovali zjednodušenému modelu VERA-NG, ktorý uvažoval len jeden prijímač. Dôležitým poznatkom, ktorý sme podložili výsledkami simulácie elektromagnetického prostredia s dvomi sledovanými cieľmi, je že definované kritéria sú konfliktné. Dôkazom toho je tvar množiny Paretovských riešení v rovine použitých kritérií. Naším cieľom v tejto kapitole bude rozšíriť model na N prijímačov. Metodológia minimalizácie vzdialenosti od ideálneho vektoru (goal programming) a výsledky multistatického modelu boli zverejnené v [16, 17].

3.1 Multistatický optimalizačný model

Hlavným cieľom je rozšíriť zjednodušený model pasívneho sledovacieho systému tak, aby sa čo najviac priblížil reálnemu systému. Významným parametrom systému je počet prijímačov N_{max} , ktoré sú priestorovo rozprestrené. Zatiaľ čo zjednodušený model uvažoval len jeden prijímač, tak teraz budeme pracovať s niekoľkými prijímačmi $N = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid 0 \leq n < N_{max}\}$. Každému môžeme nastaviť pre jeden časový okamih jedno sledované frekvenčné pásmo z množiny $M = \{m \in \mathbb{N}_0 \mid 0 \leq m < M_{max}\}$. Tzn. uvažujeme konečný časový horizont rozdelený na intervaly s konštantným časovým krokom Δt , ktorý definujeme ako množinu $T = \{t \in \mathbb{N}_0 \mid 0 \leq t < T_{max}\}$. Každé frekvenčné pásmo môže obsahovať ľubovoľný počet cieľov J_m .

Optimalizovanou premennou $\mathbf{X} \in M^{N_{max}T_{max}}$ je matica, kde jednotlivé elementy reprezentujú špecifický prijímač a špecifický časový krok. Premennú \mathbf{X} budeme tiež nazývať ladiaci plán. Jednotlivé hodnoty matice značia index frekvenčného pásma, ktoré chceme ladiť $x_{n,t} \in M$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{0,0} & \cdots & x_{0,T_{max}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N_{max},0} & \cdots & x_{N_{max},T_{max}} \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Aby sme zabezpečili všetky požadované funkcionality systému, v nasledujúcich kapitolách detailne rozoberieme dve účelové funkcie. Tieto funkcie matematicky vyjadrujú dve hlavné systémové požiadavky:

1. aktívne vyhľadávanie signálov (survey) - cieľom je maximalizovať pravdepodobnosť zachytenia pre všetky emittersy a ich jednotlivé módy vysielania vo frekvenčnom spektre,

2. vedenie cieľov (track) - požaduje sa maximálne efektívne plánovanie ladenia pre podporu MLAT trackovania nekooperujúcich cieľov (prostriedky, ktoré nevyužívajú štandardné typy kódovaných správ pre oznámenie svojej prítomnosti a polohy, napr. IFF).

3.2 Prehľadovacia multistatická účelová funkcia

Prehľadávanie signálového spektra monostatickým systémom sme modelovali pomocou účelovej funkcie, ktorá bola založená na odhade stacionárneho rozdelenia CTMC $\boldsymbol{\pi}'(\mathbf{x})$ jednej náhodnej stratégie bežiacей na jednom prijímači. Odhad sme získali z optimalizovanej premennej \mathbf{x} , ktorá v podstate tvorila postupnosť indexov frekvenčných pásiem, ktoré mal prijímač ladiť. Keďže optimalizovaná premenná multistatického modelu je matica \mathbf{X} , musíme tiež upraviť pôvodnú účelovú funkciu pre signálové prehľadávanie.

Najskôr rozšírime Bayesovský model. Výsledky z Monte Carlo simulácie času prvého prechodu stavom Markovského reťazca (viz. dizertačná práca) nám ukázali dva dôležité poznatky:

- FPT môžeme aproximovať pomocou exponenciálneho rozdelenia,
- so zvyšujúcim počtom paralelne bežiacich, nezávislých prehľadovacích stratégií **znižujeme priemerný čas prvého prechodu** daným stavom Markovského reťazca, čiže MEIT.

Hlavne druhé zistenie nám dáva možnosť modelovať účelovú funkciu pre prehľad po častiach. Pre každý prijímač zvlášť, indexovaný pomocou n , budeme odhadovať stacionárne rozdelenie CTMC $\boldsymbol{\Pi}'(\mathbf{X})$. Každý ladiaci plán jednotlivých prijímačov $x_{n,\cdot}$ uvažujme ako realizáciu náhodnej premennej s kategorickým rozdelením a jeho neznámym vektorom parametrov $\pi'_{n,\cdot}$, potom môžeme definovať Bayesovský model nasledovne

- konjugované apriórne Dirichletovo rozdelenie $\text{Dir}(\alpha_{n,\cdot})$,

$$\boldsymbol{\Pi}' \mid \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \pi'_{0,0} & \cdots & \pi'_{0,M_{max}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi'_{N_{max},0} & \cdots & \pi'_{N_{max},M_{max}} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \text{Dir}(\alpha_{0,\cdot}) \\ \vdots \\ \text{Dir}(\alpha_{N_{max},\cdot}) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

- vierohodnosť dát s kategorickým rozdelením $\text{Cat}(\pi'_{n,\cdot})$,

$$\mathbf{X} \mid \boldsymbol{\Pi}' = \begin{bmatrix} x_{0,0} & \cdots & x_{0,T_{max}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N_{max},0} & \cdots & x_{N_{max},T_{max}} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \text{Cat}(\pi'_{0,\cdot}) \\ \vdots \\ \text{Cat}(\pi'_{N_{max},\cdot}) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

- hyperparameter $\mathbf{\Pi}'$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{0,0} & \cdots & \alpha_{0,M_{max}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{N_{max},0} & \cdots & \alpha_{N_{max},M_{max}} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Vďaka nezávislosti náhodných stratégií ladenia jednotlivých prijímačov, môžeme aposteriórne rozdelenie hyperparametru multistatického modelu prepísať ako

$$\pi'_{n,\cdot} \mid x_{n,\cdot}, \alpha_{n,\cdot} \sim \text{Dir}(o_{n,\cdot} + \alpha_{n,\cdot}), \quad (3.5)$$

kde $o_{n,\cdot}$ reprezentuje počet výskytov jednotlivých indexov frekvenčných pásiem (čiže stavov Markovského reťazca) v pozorovanej sekvencii $x_{n,\cdot}$. Odhad stacionárneho rozdelenia pre jednotlivé kanály $\pi'_{n,\cdot}$ získame zo strednej hodnoty výsledného, konjugovaného, aposteriórneho Dirichletovho rozdelenia,

$$\pi'_{n,\cdot}(x_{n,\cdot}) = \mathbb{E}[\pi'_{n,\cdot} \mid x_{n,\cdot}, \alpha_{n,\cdot}] = \left[\frac{o_{n,0} + \alpha_{n,0}}{T_{max} + \tilde{\alpha}_n}, \dots, \frac{o_{n,M_{max}-1} + \alpha_{n,M_{max}-1}}{T_{max} + \tilde{\alpha}_n} \right], \quad (3.6)$$

$$\tilde{\alpha}_n = \sum_{m \in M} \alpha_{n,m}. \quad (3.7)$$

Následne spočítame Kullback-Leiblerovu divergenciu medzi odhadnutým stacionárnym rozdelením $\pi'_{n,\cdot}(x_{n,\cdot})$ pozorovanej sekvencie $x_{n,\cdot}$ a požadovaným stacionárnym rozdelením $\boldsymbol{\pi}_n$ DTMC prehľadovacej stratégie pre každý prijímač oddelene. Výsledná účelová funkcia pre signálový prehľad f_{survey} potom agreguje KL divergencie jednotlivých prijímačov do jednej hodnoty

$$f_{survey}(\mathbf{X}) = \sum_{n \in N} D_{KL}(\pi'_{n,\cdot}(x_{n,\cdot}) \parallel \boldsymbol{\pi}_n), \quad (3.8)$$

kde

$$D_{KL}(\pi'_{n,\cdot}(x_{n,\cdot}) \parallel \boldsymbol{\pi}_n) = \sum_{m \in M} \pi'_{n,m}(x_{n,\cdot}) \log \frac{\pi'_{n,m}(x_{n,\cdot})}{\pi_{n,m}}. \quad (3.9)$$

3.3 Trackovacia multistatická účelová funkcia

Vzhľadom k rozšíreniu modelu na multistatický, je nutné taktiež rozšíriť účelovú funkciu pre trackovanie. Zatiaľ čo pre zjednodušený model sme použili informačný zisk odvodený z Rényiovej divergencie, tak pre multistatický model použijeme informačný zisk, založený na Kullback-Leiblerovej divergencii medzi apriórnym a aposteriórny odhadom stavu vedeného cieľa pomocou KF, za predpokladu, že dôjde k zachyteniu jeho emitteru a získaniu polohového merania. Je všeobecne známe, že

zväčšovaním parametru $\alpha > 1$, Rényiova divergencia uprednostňuje regióny s vysokou pravdepodobnosťou. Naopak znižovaním $\alpha < 1$, rozdiely medzi porovnávanými pravdepodobnosťami zjemňuje. Pre $\alpha = 1$ je rovnica (2.2) nedefinovaná. Takže pre štandardnú a neutrálnu voľbu $\alpha \rightarrow 1$, sme museli očakávaný informačný zisk odvodiť a má tvar

$$\begin{aligned} E[D_{\text{KL}}(h(\mathbf{x}_t|\mathcal{Z}_t)||h(\mathbf{x}_t|\mathcal{Z}_{t-1}))] \\ = \frac{1}{2} \left(\text{tr}(\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t) - n - \ln(\det(\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t)) + \text{tr} \mathbf{B}_t \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

kde \mathbf{K}_t je Kálmanov zisk, n je dimenzia stavového vektoru a \mathbf{B}_t je

$$\mathbf{B}_t = \mathbf{L}_t^{-1}\mathbf{H}_t\mathbf{P}_{t|t-1}\mathbf{H}_t^\top\mathbf{L}_t^{-1\top}. \quad (3.11)$$

Náš model multistatickej účelovej funkcie pre track predpokladá, že polohové meranie sledovaného cieľa môžeme získať jedine vtedy, keď všetky prijímače sú naložené na rovnaké frekvenčné pásmo m , v ktorom pracuje jeho emitter. Z pohľadu MLAT ide o zjednodušujúci predpoklad [3], keďže čiastočné merania je možné získať už pri ladení dvoch prijímačov. Problematika neúplného merania (meranie, z ktorého nie je možné získať 3D polohu) však presahuje doménu plánovania ladenia a je aktuálnym predmetom výskumu aj v oblasti Target Tracking [18]. Preto ostane u zjednodušujúceho predpokladu a odvodíme premennú $y_{0\dots t}$ z optimalizovanej premennej \mathbf{X} nasledovne:

$$y_t = \begin{cases} 1 & \text{if } x_{m,t} = x_{l,t} \text{ for } \forall m, l \in N \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}. \quad (3.12)$$

Zatiaľ čo člen $h(\mathbf{x}_t|\mathcal{Z}_t)$ v rovnici (3.10) vždy predpokladá, že meranie nastane, čiže platí $y_t = 1$, tak člen $h(\mathbf{x}_t|\mathcal{Z}_{t-1})$ je závislý na konkrétnej podobe ladiaceho plánu \mathbf{X} , respektíve premennej $y_{0\dots t-1}$. Aby sme toto tvrdenie podložili, začneme s rozkladom kumulatívnych meraní $\mathcal{Z}_{t-1} = \mathbf{z}_{0:t-1} = \{\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{t-1}\}$. Na základe toho, pre konkrétne meranie a vedený cieľ j , v závislosti na ladiacom pláne, platí

$$\mathbf{z}_i = \begin{cases} \{\mathbf{r}_i^j, \mathbf{R}_i^j\} & \text{if } y_i = 1 \\ \emptyset & \text{if } y_i = 0 \end{cases}, \quad (3.13)$$

kde \mathbf{r}_i^j je vektor meraní a \mathbf{R}_i^j je kovariančná matica chyby meraní. Závislosť kumulatívnych meraní $\mathcal{Z}_{t-1}(y_{t-1})$ na optimalizovanej premennej sa taktiež prejaví v apriórnej hustote pravdepodobnosti stavu tracku

$$h_j(\mathbf{x}_t|\mathcal{Z}_{t-1}(y_{t-1})) = \int h_j(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}) h_j(\mathbf{x}_{t-1}|\mathcal{Z}_{t-1}(y_{t-1})) d\mathbf{x}_{t-1}, \quad (3.14)$$

ktorá vzhľadom k hodnotám ladiaceho plánu môže byť predikcia z aktualizovanej hustoty alebo čiste predikovaná hustota pravdepodobnosti

$$h_j(\mathbf{x}_{t-1} | \mathcal{Z}_{t-1}(y_{t-1})) = \begin{cases} h_j(\mathbf{x}_{t-1} | \mathcal{Z}_{t-2}) & \\ \text{if } y_{t-1} = 0 \implies \mathbf{z}_{t-1} = \emptyset & \\ h_j(\mathbf{x}_{t-1} | \mathcal{Z}_{t-1}) & \\ \text{if } y_{t-1} = 1 \implies \mathbf{z}_{t-1} = \{\mathbf{r}_{t-1}^j, \mathbf{R}_{t-1}^j\} & \end{cases} \quad (3.15)$$

a analogicky môžeme rozvinúť celý predikčný horizont pre $y_{0\dots t-2}$. Označme $\mathbb{E}[D_{KL}^{j,t}]$ ako očakávaný informačný zisk pre konkrétny vedený cieľ j a časový krok t

$$\mathbb{E}[D_{KL}^{j,t}] = \mathbb{E}[D_{KL}(h_j(\mathbf{x}_t | \mathcal{Z}_t) || h_j(\mathbf{x}_t | \mathcal{Z}_{t-1}(y_{t-1})))]. \quad (3.16)$$

Potom môžeme definovať priemerný informačný zisk $e_t(\mathbf{X}, m)$ v čase t pre všetky ciele $j \in J_m$, ktorých emittery vysielajú vo frekvenčnom pásme m ako:

$$e_t(\mathbf{X}, m) = \begin{cases} \frac{\sum_{j \in J_m} \mathbb{E}[D_{KL}^{j,t}]}{|J_m|} & \text{if } |J_m| \neq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}. \quad (3.17)$$

Ak ladiaci plán \mathbf{X} požaduje ladenie pásma m pre všetky prijímače v časovom intervale t , potom odpovedajúcim Kálmanovým filtrom emitterov j daného frekvenčného pásma aktualizujeme a dopočítame aposteriórne odhady kovariančných matíc stavu ako $\mathbf{P}_{t|t}^j = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t^j \mathbf{H}_t) \mathbf{P}_{t|t-1}^j$. V opačnom prípade, ak čo i len jeden prijímač nie je naladený v pásme m , aj napriek tomu, že všetky zvyšné áno, ciele daného frekvenčného pásma budú jedine predikované a ich aposteriórne odhady kovariančnej matici stavu pre nasledujúci časový krok budú odpovedať apriórnemu odhadu kovariančnej matici spočítanej ako $\mathbf{P}_{t|t-1}^j = \mathbf{F}_t \mathbf{P}_{t-1|t-1}^j \mathbf{F}_t^\top + \mathbf{Q}_{t-1}^j$.

Cieľom trackovacej účelovej funkcie je v každom časovom kroku t časového horizontu T nájsť frekvenčné pásmo m s najvyšším priemerným informačným ziskom. Výsledné kritérium f_{track} je suma týchto maxim pre každý časový krok z množiny T

$$f_{track}(\mathbf{X}) = \sum_{t \in T} \max_{m \in M} e_t(\mathbf{X}, m). \quad (3.18)$$

3.4 Goal programming model

V dizertačnej práci sme odvodili model ladenia pomocou viacstupňovej úlohy stochastického programovania, ukázali jeho riešiteľnosť za predpokladu známeho rozdelenia pravdepodobnosti náhodného prvku zachytenie emitteru, rozšírili teóriu minimalizácie MEIT pomocou náhodnej prehľadávacej stratégie o multistatický systém

a transformovali pôvodný viacstupňový stochastický model na multikriteriálnu optimalizačnú úlohu. Pomocou tejto transformácie sme boli schopní eliminovať problematické náhodné prvky, ktoré v praxi (hlavne v oblasti elektronického boja) nie je možné pravdepodobnostne ani štatisticky opísať.

Tvorbu multikriteriálneho modelu sme odstupňovali na monostatický a multistatický. Pre multistatickú variantu sme doteraz odvodili účelové funkcie f_{survey} a f_{track} , ostáva nám preto definovať výsledný multikriteriálny multistatický optimalizačný model ako

$$\begin{aligned} & \text{minimize } [f_{survey}(\mathbf{X}), f_{track}(\mathbf{X})], \\ & \text{subject to } \mathbf{X} \in M^{N_{max}T_{max}}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Na zjednodušenom modeli s jedným prijímačom sme demonštrovali, že uvažované účelové funkcie sú v rozpore. To znamená, že neexistuje prípustné riešenie, ktoré by súčasne optimalizovalo obe účelové funkcie. Z toho dôvodu sme v kapitole 2.3 skúmali Pareto optimálne riešenia, tzn. množinu riešení, ktoré nie je možné vylepšiť v jednej vybranej účelovej funkcii bez toho, aby nedošlo k degradácii ktorejkoľvek z ostatných účelových funkcií. Keďže každé jedno riešenie z Paretovskej množiny reprezentuje ladiaci plán a v daný moment môžeme na systém aplikovať len jeden ladiaci plán, otvára sa ďalšia otázka, ako vybrať ten vhodný ladiaci plán? Existuje niekoľko prístupov z oblasti multikriteriálneho rozhodovania (angl. multiple-criteria decision-making - MCDM). Okrem analýzy konfliktnosti účelových funkcií sme pre monostatický systém využili aj ϵ -constraint metódu. Vďaka tomu sme boli schopný transformovať multikriteriálny problém na optimalizáciu len s jednou účelovou funkciou a navyše vybrať jedno konkrétne riešenie z Paretovskej množiny riešení. Nevýhodou tohto prístupu je pridanie ďalšieho design parametru ϵ . Pri aplikácii rolling horizonu s celým plánom sa ukázalo, že zlou voľbou tohto parametru môže byť model neriešiteľný (množina prípustných riešení je prázdna). Preto sme sa rozhodli pre **goal programming** metódu z MCDM [19].

Pripomeňme, že goal programming je definovaný ako minimalizácia vzdialenosti $d(\hat{\mathbf{f}}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$ medzi vektorom ideálnych hodnôt $\hat{\mathbf{f}}$ a hodnotami účelových funkcií $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ pre dané prípustné riešenie \mathbf{x} nasledovne

$$\begin{aligned} & \text{minimize } d(\hat{\mathbf{f}}, \mathbf{f}(\mathbf{x})), \\ & \text{subject to } \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq 0. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Na základe predpisu (3.20) môžeme prepísať náš multikriteriálny problém (3.19) na goal programming

$$\begin{aligned}
\min d(\overbrace{[\hat{f}_{survey}^{norm}, \hat{f}_{track}^{norm}]}^{\text{goals}}, \\
\overbrace{[\text{norm}(f_{survey}(\mathbf{X}), \underbrace{f_{survey}^{min}, f_{survey}^{max}}_{\substack{\text{analyticky získané} \\ \text{limity } survey \\ \text{účelovej funkcie}}}, \text{norm}(f_{track}(\mathbf{X}), \underbrace{f_{track}^{min}, f_{track}^{max}}_{\substack{\text{optimalizované} \\ \text{limity } track \\ \text{účelovej funkcie}}})]}^{\text{normalizované účelové funkcie}})], \tag{3.21}
\end{aligned}$$

subject to $\mathbf{X} \in M^{N_{max}T_{max}}$,

kde $d(p, q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}$ je Euklidovská vzdialenosť,

a $\text{norm}(p, min, max) = \frac{p - min}{max - min}$.

Výsledný model je **problémom celočíselnej nelineárnej optimalizácie**. Keďže obor hodnôt oboch účelových funkcií sa môže líšiť (a väčšinou líši), je dôležité namapovať oba obory hodnôt na rovnakú množinu. K tomu použijeme normalizačnú funkciu $\text{norm}(p, min, max)$, ktorá namapuje hodnoty p na interval $[0, 1]$. Ďalej označme ideálnu hodnotu účelovej funkcie *survey* ako \hat{f}_{survey}^{norm} , resp. \hat{f}_{track}^{norm} pre *track*. Vhodnými goal hodnotami sa zdajú minimálne hodnoty normalizovaných účelových funkcií, takže $[\hat{f}_{survey}^{norm}, \hat{f}_{track}^{norm}] = [0, 0]$. Naším cieľom je minimalizovať Euklidovskú vzdialenosť $d(p, q)$ medzi vektorom ideálnych hodnôt a vektorom normalizovaných hodnôt účelových funkcií, kde optimalizovaná premenná \mathbf{X} je z množiny všetkých možných kombinácií $M^{N_{max}T_{max}}$ indexov frekvenčných pásiem $m \in M$ nad množinou prijímačov N a meracích intervalov T .

Najskôr odvodíme algoritmus pre výpočet limít prehľadu. Predpokladajme, vzhľadom k definícii škálovania hyperparametru Dirichletovho rozdelenia riešenej v kapitole 2.2, že sekvenčne realizujeme škálovanie odhadnutého aposteriórneho rozdelenia Bayesovského modelu po každom časovom horizonte. Toto škálovanie vykonávame kvôli tomu, aby sme zabezpečili rovnaké množstvo informácie medzi apriórnym odhadom hyperparametru a novým ladiacim plánom (z pohľadu Bayesovského modelu sekvencia pozorovaní $x_{n,\cdot}$). Pripomeňme, že pre jednotlivé prvky odhadnutého stationárneho rozdelenia $\pi'_{n,m}(x_{n,\cdot})$ z pozorovanej sekvencie $x_{n,\cdot}$ platí nasledujúce

$$\pi'_{n,m}(x_{n,\cdot}) = \frac{o_{n,m} + \alpha_{n,m}}{T_{max} + \sum_m \alpha_{n,m}}. \tag{3.22}$$

Ak vhodne zvolíme hodnotu škálovacej konštanty c hyperparametru $\alpha_{n,\cdot}$, tak, aby platilo $\sum_m \alpha_{n,m} = T_{max}$, zachováme rovnaké množstvo informácie medzi priorom a ladiacim plánom. Navyše môžeme rovnicu (3.22) zjednodušiť nasledovne

$$\pi'_{n,m}(x_{n,\cdot}) = \frac{o_{n,m} + \alpha_{n,m}}{2T_{max}}. \tag{3.23}$$

Dosaďme zjednodušenú pravdepodobnostnú funkciu odhadu stacionárneho rozdelenia (3.23) do diskkrétnej podoby Kullback–Leiblerovej divergencie (3.24) a získame vzťah

$$D_{KL}(P \parallel Q) = \sum_i p_i \log \left(\frac{p_i}{q_i} \right), \quad (3.24)$$

$$D_{KL}(\pi'_{n,\cdot}(x_{n,\cdot}) \parallel \pi_n) = \sum_{m \in M} \frac{o_{n,m} + \alpha_{n,m}}{2T_{max}} \log \left(\frac{o_{n,m} + \alpha_{n,m}}{2T_{max}\pi_{n,m}} \right). \quad (3.25)$$

Zmena počtu výskytu v jednom konkrétnom frekvenčnom pásme o $\Delta o_{n,m} \in \mathbb{Z}$ ovplyvní jedine m -tú položku sumy v (3.25). To znamená, že môžeme odvodiť zmenu KL divergencie vzhľadom k jednotlivým sumandom, ak budeme uvažovať špecifickú delta zmenu v počte vzoriek $\Delta o_{n,m}$, ako

$$\begin{aligned} \Delta_{D_{KL_{n,m}}} &= \frac{o_{n,m} + \alpha_{n,m}}{2T_{max}} \log \left(1 + \frac{\Delta o_{n,m}}{o_{n,m} + \alpha_{n,m}} \right) \\ &\quad + \frac{\Delta o_{n,m}}{2T_{max}} \log \left(\frac{\Delta o_{n,m} + o_{n,m} + \alpha_{n,m}}{2T_{max}\pi_{n,m}} \right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Aby sme získali minimálnu hodnotu účelovej funkcie *survey*, iterujeme cez plánovací horizont dĺžky T_{max} a v každom časovom kroku t spočítame zmeny KL divergencie $\Delta_{D_{KL}}$ pre každé pásmo podľa (3.26). Keďže prijímač v každom časovom okamihu môže ladiť len jedno frekvenčné pásmo, tak platí $\Delta o_{n,m} = 1$. Pomocou funkcie *argmin* získame pásmo s minimálnou zmenou KL divergencie. Až preiterujeme celý časový horizont zo získaného vektoru počtu výskytu jednotlivých frekvenčných pásiem \mathbf{o} , odhadneme stacionárne rozdelenie $\pi'(\mathbf{o})$. Na záver určíme f_{survey}^{min} ako KL divergenciu medzi požadovaným π a odhadnutým stacionárnym rozdelením $\pi'(\mathbf{o})$. Popísané kroky sú názorne zachytené pomocou Algoritmu 1.

Algorithm 1 Výpočet f_{survey}^{min} pre jeden prijímač

```

o = 0
for  $t = 0$  to  $T_{max}$  do
     $\Delta_{D_{KL}} = \frac{\mathbf{o} + \boldsymbol{\alpha}}{2T_{max}} \log \left( 1 + \frac{1}{\mathbf{o} + \boldsymbol{\alpha}} \right) + \frac{1}{2T_{max}} \log \left( \frac{1 + \mathbf{o} + \boldsymbol{\alpha}}{2T_{max}\boldsymbol{\pi}} \right)$ 
     $i = \text{argmin } \Delta_{D_{KL}}$ 
     $o_i += 1$ 
end for
 $\pi'(\mathbf{o}) = \text{E}[\boldsymbol{\Sigma}], \quad \boldsymbol{\Sigma} \sim \text{Dir}(\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{o})$ 
return  $D_{KL}(\pi \parallel \pi'(\mathbf{o}))$ 

```

Maximálny limit f_{survey}^{max} získame nahradením *argmin* za *argmax* v Algoritme 1.

Za druhé, potrebujeme taktiež dopočítať limitné hodnoty pre *trackovaciú* účelovú funkciu. V porovnaní s *prehľadom*, kde sme limity odvodili algoritmicke, tak pre *trackovanie* sformulujeme optimalizačný problém na základe f_{track} , kde minimalizáciou dostaneme f_{track}^{min} a maximalizáciou získame f_{track}^{max} . V kapitole **Trackovacia multistatická účelová funkcia** 3.3 sme uviedli očakávaný informačný zisk (3.16) pre N prijímačov.

Lemma 3.4.1 Napriek rozšíreniu, ktoré zväčšilo definičný obor funkcie informačného zisku $E[D_{KL}^{j,t}]$ daného cieľa j , a taktiež najvyšší priemerný informačný zisk (3.17), resp. trackovaciú účelovú funkciu (3.18), ich charakter nebol nijako významne ovplyvnený.

Dôkaz. Keďže obor hodnôt očakávaného informačného zisku D_{KL} je definovaný na $\mathbb{R}_{\geq 0}$, pre aritmetický priemer platí $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ a $\max(0, \mathbb{R}_{\geq 0}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, potom rozšírenie na nulu pre všetky nové hodnoty z definičného oboru (ladiace kombinácie viacerých prijímačov) nezmení výslednú hodnotu funkcie f_{track} . \square

Dôsledok 3.4.2 Navyše platí, že optimálne riešenie rozšíreného problému $f_{track}^*(\mathbf{X})$ je ekvivalentné optimálnemu riešeniu problému plánovania ladenia pre jeden prijímač $f_{track}^*(\mathbf{x})$

$$\min\{f_{track}(\mathbf{X}) \mid \mathbf{X} \in M^{N_{max}T_{max}}\} \sim \min\{f_{track}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in M^{T_{max}}\}. \quad (3.27)$$

Na základe toho, pre získanie limitných hodnôt *trackovacej* účelovej funkcie, môžeme riešiť optimalizačný problém s významne menšou množinou prípustných riešení, a teda za výrazne nižšie výpočetné náklady

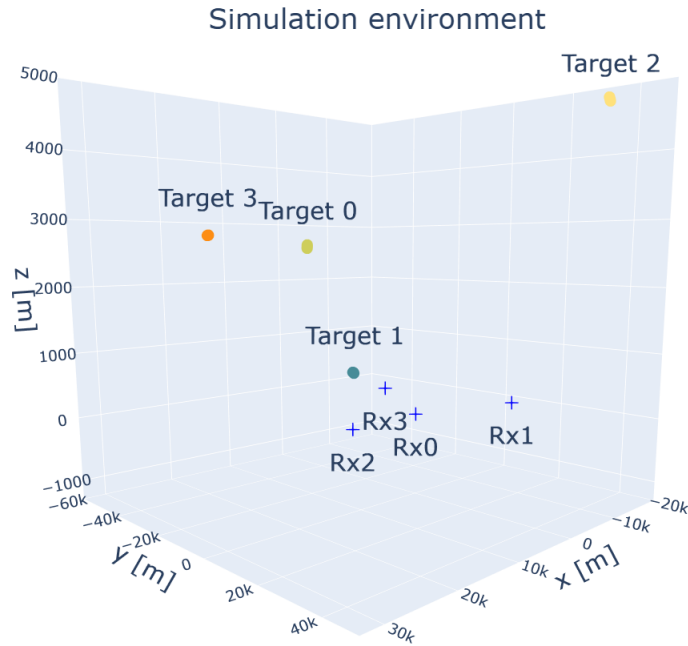
$$\begin{aligned} & \text{minimize } f_{track}(\mathbf{x}), \\ & \text{subject to } \mathbf{x} \in M^{T_{max}}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Optimálna hodnota účelovej funkcie minimalizačného problému (3.28) nám dá minimálnu hodnotu *trackovacej* účelovej funkcie $f_{track}^{min} = f_{track_{min}}^*$. To isté platí pre maximálnu hodnotu, ktorú získame maximalizáciou problému (3.28), platí $f_{track}^{max} = f_{track_{max}}^*$.

3.5 Prípadová štúdia

Je nutné poznamenať, že doteraz prezentované analýzy a simulácie jednoznačne nepreukázali schopnosť multikriteriálneho modelu poradiť si s problematickými náhodnými prvkami, ktoré sme vyeliminovali z viacstupňového stochastického modelu jeho

transformáciou na multikriteriálny. Analýza konfliktnosti účelových funkcií demonštrovala riešiteľnosť optimalizačného problému a podobu Paretovskej množiny, avšak využívala len *statické*, z pohľadu dynamiky náhodnej veličiny zachytenie emitteru, simulované prostredie. Počas celej simulácie sa počet cieľov v záujmovom priestore nemenil, od začiatku model pracoval s rozbehnutými KF, ktoré reprezentovali dané ciele. V tejto štúdii sa zameriame hlavne na tento aspekt problému. Do simulácie pridáme dynamický prvok priletu, alebo presnejšie začiatok využívania frekvenčného spektra neznámym cieľom. Ukážeme, že navrhnutý model je schopný bez akejkoľvek externej informácie o danom ciele/cieľoch, tieto nové a doteraz neznáme emitters nájsť v spektre a vhodne zareagovať úpravou svojej ladiacej stratégie.



Obr. 3.1: Simulované prostredie s rozostavením prijímačov a trajektóriami cieľov.

Budeme uvažovať počet frekvenčných pásiem rovný $M_{max} = 10$, počet prijímačov $N_{max} = 4$, konštantný časový krok $\Delta t = 0.03$ [s], počet časových krokov v horizonte jedného ladiaceho plánu $T_{max} = 20$ a počet epôch rovný 6. Požadované stacionárne rozdelenie je určené náhodne a prior hyperparametru je daný vzťahom $\alpha_{n,m} = \frac{T_{max}}{M_{max}}$. Simulované prostredie pre špecifikovaný počet cieľov $\sum_{m \in M} |J_m|$ náhodne vygeneruje trajektórie a zároveň aj polohy prijímačov. Polohy prijímačov (modré krížiky) a trajektórie cieľov (farebné krivky) sú zobrazené na Obr. 3.1. Obsadenie frekvenčného spektra emittermi simulovaných cieľov, hodnoty požadovaného stacionárneho rozdelenia π_n , a prior hyperparametru \mathbf{A} sú k dispozícii v Tab. 3.1. Pre trackovanie simulovaných cieľov používame Kálmanov filter s dynamickým modelom odvodeným od pohybu s konštantnou rýchlosťou v 3D. Priestor meraní je definovaný polohovými

meraniami $[\hat{x}_t, \hat{y}_t, \hat{z}_t]^\top$ a odhadovaný stav cieľa reprezentujeme vektorom polohy a rýchlosti $[x_t, y_t, z_t, \dot{x}_t, \dot{y}_t, \dot{z}_t]^\top$.

Tab. 3.1: Parametre simulovaného prostredia

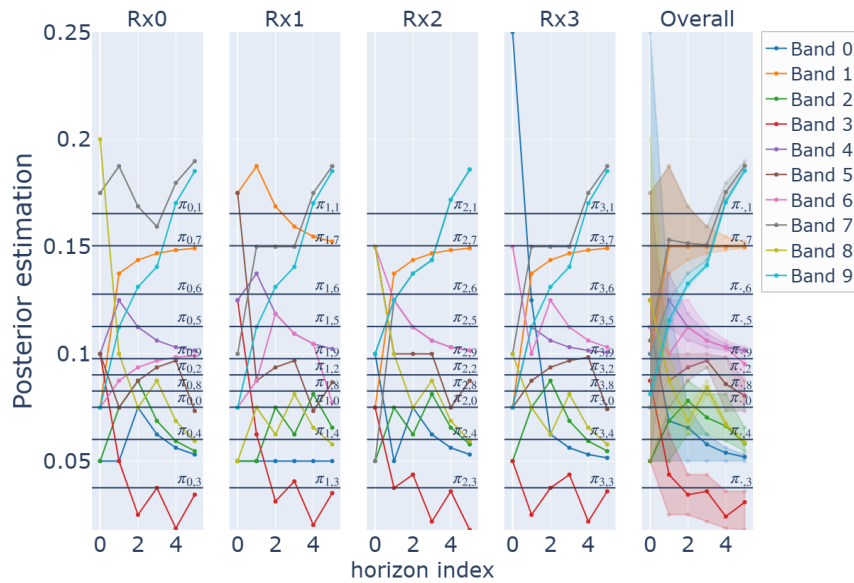
Band ID	Track IDs	$\pi_{.,m}$	$\alpha_{.,m}$
0	-	0.0752	2
1	[0]	0.1654	2
2	-	0.0902	2
3	-	0.0376	2
4	[1]	0.0602	2
5	-	0.1128	2
6	-	0.1278	2
7	[2]	0.1504	2
8	-	0.0827	2
9	[3]	0.0977	2

Na začiatku simulácie inicializujeme prostredie. Na základe zadaných vstupných parametrov (definované vyššie) simulácia vygeneruje cieľe, ich trajektórie, obsadenie frekvenčného spektra emittermi a polohy prijímačov systému. Potom, pomocou náhodnej ladiacej stratégie odvodennej od Markovského reťazca s diskretným časom [4], vygenerujeme inicializačný ladiaci plán. Pre zadaný počet epôch opakujeme nasledujúce fázy simulácie:

1. **Tracks maintenance (Správa trackov)** aplikuje ladiaci plán pre vedené cieľe, tzn. inicializuje a aktualizuje KF tých cieľov, ktorých emitter vysiela vo frekvenčnom pásme zhodnom s pásmom, na ktoré sú naladené všetky prijímače.
2. **Simulation of detections (Simulácia detekcií)** implementuje pravdepodobnostný model zachytenia emitteru pomocou Bernoulliho procesu. Realizácie náhodnej premennej sú získané pomocou binomického náhodného generátoru [20]. Detekciou rozumieme zachytenie signálu s frekvenciou, nie polohové meranie.
3. **Virtual track initiation (Inicializácia virtuálnych trackov)** nadväzuje na predchádzajúci krok. Ak sa nám podarilo zachytiť a detekovať emitter, založíme tzv. virtuálny track a určíme mu počiatočný očakávaný informačný zisk. Tento virtuálny track obsahuje jednoduchý model informačného zisku závislý na ladiacom pláne, ktorým napodobňuje správanie reálneho informačného zisku (viz. intervaly 20-40 a Track 0-3 na Obr. 3.3). Prvým polohovým meraním asociovaným na základe parametrov signálu (frekvencia), virtuálny

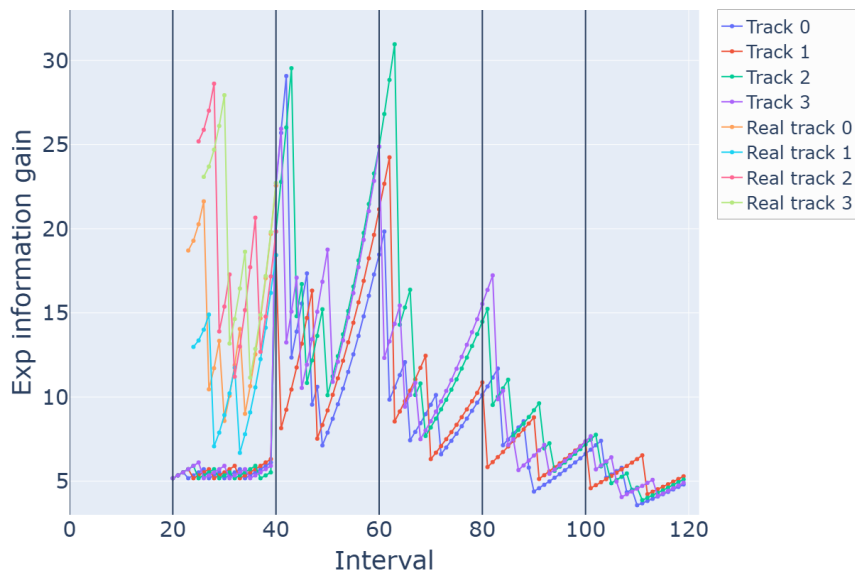
track nahradíme KF (v kroku Tracks maintenance). Takto zabezpečíme aby v prechodovej fáze optimalizačný model zaladil pásmo s detekciou všetkými prijímačmi a mohol získať prvé polohové meranie.

4. **Posterior estimation and scaling (Aposteriórny odhad a škálovanie)** realizuje aposteriórny odhad hyperparametru $\Pi' | \mathbf{X}, \mathbf{A}$ a jeho škálovanie.
5. **The tune plan computing (Výpočet ladiaceho plánu)** je fáza, v ktorej získame ladiaci plán pre nasledujúcu epochu ako riešenie optimalizačného problému (3.21). Problém riešime pomocou genetického algoritmu (GA) implementovaného python knižnicou pymoo [15].



Obr. 3.2: Aposteriórny odhad stacionárneho rozdelenia v čase.

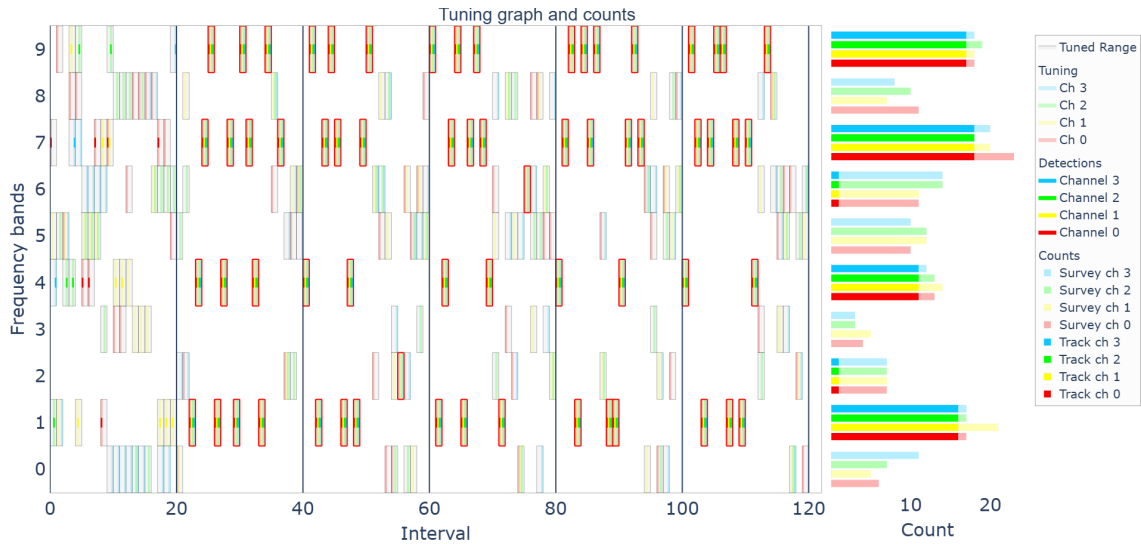
Pre lepšie pochopenie rozhodovacieho procesu popísaného algoritmu a podloženie výsledných ladiacich plánov sme najskôr vykreslili dva grafy. Každý z nich sa zameriava na jednotlivé modelované funkčnosti systému, prehľadovanie a trackovanie. Obr. 3.2 zobrazuje vývoj aposteriórneho odhadu stacionárneho rozdelenia DTMC $\pi'_{n, \cdot}(x_{n, \cdot})$ vzhľadom k časovým epochám (x-ová osa), kde máme pre každý prijímač zvlášť grafy Rx0 až Rx3. Krivky grafov reprezentujú odhadnuté pravdepodobnosti diskretnej hustoty pravdepodobnosti DTMC stacionárneho rozdelenia z optimálneho ladiaceho plánu \mathbf{X}^* , kde indexy frekvenčných pásiem tvoria stavový priestor Markovského reťazca. Z grafov je viditeľné, že hlavne pásma s vedenými cieľmi (4 a 9) presiahli požadované hodnoty stacionárneho rozdelenia (čierne, horizontálne priamky). Tým pádom, keďže niektoré pásma prekročili požadované úrovne, iné nutne museli zlyhať. Najviac viditeľné je to pre pásmo 2.



Obr. 3.3: Očakávané informačné zisky.

Obr. 3.3 sa zase zameriava na trackováciu účelovú funkciu a zobrazuje očakávaný informačný zisk jednotlivých trackov. Prvý časový horizont bez kriviek dokazuje, že na začiatku simulácie nevedieme žiadne ciele a teda algoritmus nemá žiadne apriórne informácie. V druhej epoche (interval 20-40) môžeme vidieť dva typy informačných ziskov. Prvý typ, označený Track 0 až 3, odpovedá virtuálnym informačným ziskom. Druhý typ, označený ako Real track 0-3 je spočítaný podľa vzťahu (3.10) a odpovedá Káľmanovým filtrom jednotlivých trackov. Číslo sedí voči ID cieľa, tj. Real track 0 je očakávaný informačný zisk cieľa s ID 0 (viz. Tab. 3.1). Začiatky týchto kriviek určujú interval inicializácie tracku prvým polohovým meraním. Keďže sa v druhej epoche podarilo inicializovať všetky ciele, nasledujúce epochy obsahujú jedine informačné zisky spočítané z KF vedených cieľov. Klesajúce hodnoty informačných ziskov všetkých vedených cieľov ukazujú zlepšujúcu sa presnosť trackovacieho subsystému v čase.

Hlavným výstupom uvedenej simulácie je ladiaci plán prijímačov zobrazený na Obr. 3.4. Ten je reprezentovaný časovým rozvrhom, kde pre každý časový interval t , x-ová osa, a pre každý prijímač n , označené ako Ch 0-3 (sekcia Tuning v legende) a odlíšené slabšími odtieňami farieb, je pomocou obdĺžnikov vyznačené ktoré frekvenčné pásmo m , y-ová osa, bolo ladené. Okrem toho graf obsahuje vizualizáciu detekcií emitterov, ktoré sú vykreslené menšími obdĺžnikmi a sýtymi farbami prijímačov, podľa toho, ktorý prijímač detekoval emitter. Červeným obrysom sú zvýraznené ladenia, kde všetky prijímače sledovali to isté frekvenčné pásmo v jednom časovom intervale. Tento špeciálny prípad ladenia budeme tiež označovať ako mul-



Obr. 3.4: Ladiaci plán.

tikanálové ladenie. V pravej časti obrázku sa nachádza stĺpcový graf, ktorý ukazuje frekvenciu ladenia pásiem jednotlivými prijímačmi pre všetky frekvenčné pásma. Počet multikanálového ladenia je zvýraznený sýtejšími farbami a označený ako Track ch 0-3 (sekcia Counts v legende). Dôvod zvýraznenia multikanálového ladenia v oboch častiach grafu je, že väčšinou to znamená snahu algoritmu získať polohové meranie vedených cieľov. Všimnime si, že v prvom časovom horizonte (intervaly 0-20) nie je žiadne multikanálové ladenie. To odpovedá našemu cieľu simulácie, ukázať správanie algoritmu bez akejkoľvek externej, apriórnej informácii o stave elektromagnetického spektra a sledovaného okolného priestoru systému. Ladiaci plán prvého horizontu je získaný pomocou DTMC náhodnej stratégie ladenia. Systém aktívne vyhľadáva nové ciele, pričom obdrží detekcie v pásmach 1, 4, 7 a 9 (menšie, sýte obdĺžniky). Na základe detekcií, inicializovaných virtuálnych trackov a vyriešením multikriteriálnej optimalizácie získame ladiaci plán pre nasledujúcu epochu (intervaly 20-40). Vidíme, že významná časť zdrojov je venovaná sledovaniu pásiem s cieľmi a takmer vôbec sa neprehľadávajú zvyšné pásma. Keďže sa jedná o nové ciele, o ktorých systém doteraz nevedel, ich informačný prínos bude natoľko dôležitý (viz. interval 20-60 na Obr. 3.3), že si môžeme na chvíľu dovoliť zanedbať prehľadávanie spektra. Súvisí to tiež s priaznivým aposteriorným odhadom stacionárneho rozdelenia hyperparametru $\Pi' | \mathbf{X}, \mathbf{A}$, ktorý po prvej epoche relatívne kopíruje hodnoty požadovaného stacionárneho rozdelenia (viz. Rx0-3 multý index v Obr. 3.2). Od intervalu 60 je pozorovateľné postupné balancovanie zdrojov medzi vylepšovaním informácie o sledovaných cieľoch, multikanálové ladenie za účelom získania polohových meraní a prehľadávanie frekvenčných pásiem vzhľadom k požadovanému stacionárnemu rozdeleniu π_n .

4 Záver

Obsahom dizertačnej práce je formulovanie matematického modelu plánovania ladenia pasívneho sledovacieho systému pomocou aplikácie optimalizačných metód (stochastických, multikriteriálnych, celočíselných, nelineárnych). V jej úvode sme vďaka štrukturovanému prehľadu literatúry a aktuálnych výskumných trendov v oblasti plánovania využitia hardvérových zdrojov lokalizačných prostriedkov, podporili motiváciu a prínos realizovaného výskumu. Okrem toho sme si stanovili niekoľko cieľov, ktoré chceme dosiahnuť. Pre úspešné zostavenie modelu bolo potrebné využiť široké medzidisciplinárne znalosti. To preukazuje rozsah teoretickej časti práce, ktorá začína Bayesovskou filtráciou pre problém target trackingu, konkrétne Káľmanovým filtrom, pokračuje teóriou informácie a viacstupňovou stochastickou optimalizáciou. Teoretická časť končí Markovskými reťazcami, časom prvého prechodu ich stavmi a multikriteriálnou optimalizáciou. Práve transformácia riešeného problému na multikriteriálnu optimalizáciu nám umožní riešiť túto úlohu numericky. Požiadavka na riešiteľnosť modelu zohľadňuje budúce nasadenie v reálnom prostredí prostredníctvom systému VERA-NG. Na druhú stranu si tým zväčšíme dimenzionalitu problému. Nasledujúci výskum bol preto odstupňovaný do dvoch postupne zložitejších optimalizačných modelov.

V prvom kroku formulujeme úlohu pre multifunkčný monostatický senzor, tj. uvažujeme len jednu prijímaciu stanicu. Vzhľadom k vhodným vlastnostiam, ktoré poskytuje ladiaci plán modelovaný ako Markovský reťazec voči nechcenej synchronizácii emitteru a prijímača, využívame Bayesovský model s konjugovaným apriórnym Dirichletovým rozdelením k sekvenčnému odhadu stacionárneho rozdelenia DTMC. Keďže uvažujeme o nasadení v reálnom prostredí, kde systém musí nezávisle a v každom časovom kroku zvoliť pásmo, ktoré bude ladené, multikriteriálny monostatický problém bol transformovaný ϵ -constraint metódou a pomocou techniky rolling horizon. Tejto úprave sme taktiež museli prispôbiť odhad stacionárneho rozdelenia, konkrétne po každej epoche plánovania ladenia upravíme aposteriórne rozdelenie pomocou škálovacej konštanty tak, aby sa informačný obsah prioru v nasledujúcej epoche rovnal informačnému prínosu nového ladiaceho plánu (meranie Bayesovského modelu). Následne sme analyzovali konfliktnosť účelových funkcií multikriteriálneho modelu na simulovanom prostredí s dvomi cieľmi, ktorých emitteri vysielali v rôznych frekvenčných pásmach. Pomocou NSGA-II sme spočítali Paretoovskú množinu optimálnych riešení. Na základe výsledkov môžeme tvrdiť, že formulované kriteriálne funkcie sú konfliktné. Zatiaľ čo účelová funkcia pre trackovanie v ladiacom pláne prioritizuje frekvenčné pásma s vedenými cieľmi, tak prehľadovacia účelová funkcia sa snaží ladiaci plán priblížiť k požadovanému stacionárnemu rozdeleniu. Okrem toho sme overovali schopnosti ϵ -constraint formulácie monostatického modelu. Zaujímala

nás riešiteľnosť problému v závislosti na zvolenej hodnote ϵ a výkonnosť modelu v dlhšom časovom horizonte. Použili sme rovnakú simuláciu ako pri analýze konfliktnosti účelových funkcií. Výsledky ukazujú, že vplyv zvolenej ϵ hodnoty na získané riešenie a aj samotnú riešiteľnosť problému, je značný.

V druhom kroku sme rozšírili model pasívneho sledovacieho systému na multistatickú konfiguráciu. Na základe realizovanej štúdie o Markovských reťazcoch sme rozdelenie FPT aproximovali exponenciálnym rozdelením. Tento prístup preukázal, že maximálny očakávaný čas zachytenia emitteru sa znižuje s rastúcim počtom nezávislých paralelných náhodných stratégií ladenia. To nám umožnilo rozšíriť účelovú funkciu pre prehľad po častiach. Tzn. pre každý prijímač zvlášť odhadneme stacionárne rozdelenie a spočítame KL divergenciu medzi požadovaným a odhadnutým stacionárnym rozdelením. Výsledná účelová funkcia prehľadu agreguje KL divergencie jednotlivých prijímačov. Taktiež sme museli rozšíriť trackovaciu účelovú funkciu. Dôležitým prijatým obmedzením modelu je podmienenie získania polohového merania cieľa ladením všetkých prijímačov do pásma jeho emitteru. Navyše kým u monostatického modelu sme použili zovšeobecnenú verziu očakávaného informačného zisku odvodenú od Rényiho divergencie v [5], tak pre multistatický model sme si odvodili očakávaný informačný zisk z KL divergencie. Z predchádzajúcej analýzy tiež vyplynulo, že ϵ -constraint metóda multikriteriálnej optimalizácie zavádza do modelu významný vstupný parameter, ktorý ovplyvňuje riešiteľnosť optimalizačného problému. Preto pre numerické riešenie multistatického modelu používame metódu minimalizácie vzdialenosti od ideálneho vektoru (goal programming). Aby výsledné riešenie bolo rovnomerne vybalancované medzi kritériom prehľadovania a trackovania, tak jednotlivé kritéria normalizujeme. Pre získanie extrémnych hodnôt prehľadovacej účelovej funkcie sme odvodili analytický algoritmus, pre trackovacie kritérium používame zjednodušený optimalizačný problém. Dôležitým krokom a jedným z cieľov práce je overenie navrhutej metodiky. K tomu sme opäť použili simulované prostredie, v ktorom aby sme boli schopní overiť schopnosť adaptácie modelu na premenlivé prostredie, simulujeme detekcie emitterov, inicializáciu trackov a ich udržiavanie. Na začiatku simulácie nami navrhnutý algoritmus nepracuje so žiadnymi apriórными informáciami, ako napr. počet, poloha a vyžarovacia charakteristika simulovaných cieľov. Až v prvom časovom horizonte, na základe zhotoveného ladiaceho plánu, získava prvé informácie v podobe detekcií. Následným multikanálovým ladením sa algoritmu podarilo inicializovať a viesť všetky simulované ciele. Konvergencia informačných ziskov, relatívne nízke hodnoty RMSE a paralelné prehľadávanie spektra podčiarkujú efektivitu ladenia a vhodnosť použitého modelu.

Z teoretického hľadiska, zostavený viacstupňový stochastický model bol niekoľkými transformáciami upravený tak, aby z pohľadu riešiteľnosti bol výsledný algoritmus ladenia nasaditeľný v reálnom pasívnom sledovacom systéme, akým je napríklad

VERA-NG. To bolo preukázané podrobnou analýzou výkonnosti algoritmu v simulovanom prostredí. Dôležitým poznatkom je schopnosť algoritmu adaptovať sa na náhodnú dynamiku sledovaného prostredia. V celej práci sme pre riešenie optimalizačných úloh používali genetické algoritmy. Navyše formulované účelové funkcie sú nelineárne. Z princípu iteratívneho fungovania GA a zložitých nelineárnych výpočtov je však strojový čas potrebný pre získanie riešenia úlohy nelineárnej celočíselnej optimalizácie **neúnosný pre použitie v real-time** systéme. Dovolím si stáť za týmto tvrdením, aj v prípade prepisu algoritmu do nízkoúrovňového programovacieho jazyka, ako napr. C/C++. Pre urýchlenie hľadania riešenia optimalizačného problému, autor pracuje s dvomi možnosťami:

- Pokúsiť sa navrhnutý model ešte viac zjednodušiť. Napríklad pomocou aproximácie očakávaného informačného zisku eliminovať zložité nelineárne výpočty. Následne do hľadania optimálneho riešenia zapojiť nejakú heuristiku, alebo celý model ďalej transformovať, ideálne na úlohu lineárnej optimalizácie nad spojitým priestorom prípustných riešení.
- Zamerať sa vyslovene na prehľadávanie obrovského priestoru riešení optimalizačnej úlohy. Inšpiráciou je práca [21], kde pomocou strojového učenia a MCTS riešia pevne daný zmiešaný celočíselný optimalizačný model RRM. Hodnotou účelovej funkcie sa vyrovnávajú BnB metóde, avšak s omnoho nižším výpočtovým časom. Dokonca sú schopní riešiť problémy s väčšou dimenziou, kde nimi používaná metóda BnB nie je schopná nájsť riešenie v konečnom čase.

Oba navrhované prístupy sú predmetom budúceho výskumu.

Literatúra

- [1] T. Hanselmann, M. Morelande, B. Moran, and P. Sarunic, “Sensor scheduling for multiple target tracking and detection using passive measurements,” in *2008 11th International Conference on Information Fusion*, June 2008, pp. 1–8.
- [2] ERA a.s. (2023) VERA-NG sees without being seen. [Online]. Available: <https://www.era.aero/en/military-security/vera-ng>
- [3] R. Plšek, V. Stejskal, M. Pelant, and M. Vojáček, “Passive coherent location and passive esm tracker systems synergy,” in *2013 14th International Radar Symposium (IRS)*, vol. 1, 2013, pp. 149–154.
- [4] E. El-Mahassni, S. Howard, and I. Clarkson, “A markov-chain model for sensor scheduling in electronic support,” in *Conference Record of the Thirty-Eighth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, 2004.*, vol. 2, 2004, pp. 2183–2187 Vol.2.
- [5] C. Kreucher, A. Hero, K. Kastella, and D. Chang, “Efficient methods of non-myopic sensor management for multitarget tracking,” in *2004 43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC) (IEEE Cat. No.04CH37601)*, vol. 1, Dec 2004, pp. 722–727 Vol.1.
- [6] P. Kulmon, J. Suja, and M. Benko, “Scheduling of multi-function sensor,” *IEEE Transactions on Radar Systems*, vol. 1, pp. 729–739, 2023.
- [7] I. Clarkson, E. El-Mahassni, and S. Howard, “Sensor scheduling in electronic support using markov chains,” *Radar, Sonar and Navigation, IEE Proceedings -*, vol. 153, pp. 325–332, 09 2006.
- [8] I. V. L. Clarkson and A. D. Pollington, “Performance limits of sensor-scheduling strategies in electronic support,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 43, no. 2, pp. 645–650, 2007.
- [9] I. V. L. Clarkson, “Sensor scheduling for electronic support to intercept beam-agile radar,” *IET Radar, Sonar & Navigation*, vol. 13, no. 9, pp. 1556–1567, 2019. [Online]. Available: <https://ietresearch.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1049/iet-rsn.2018.5668>
- [10] A. Gelman, J. B. Carlin, H. S. Stern, D. B. Dunson, A. Vehtari, and D. B. Rubin, *Bayesian Data Analysis*, 3rd ed. New York: Chapman and Hall/CRC, 2013.

- [11] B. A. Frigyik, A. Kapila, and M. R. Gupta, “Introduction to the dirichlet distribution and related processes,” Tech. Rep., 2010.
- [12] K. Deb, A. Pratap, S. Agarwal, and T. Meyarivan, “A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: Nsga-ii,” *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 6, no. 2, pp. 182–197, April 2002.
- [13] B. L. Miller and D. E. Goldberg, “Genetic algorithms, tournament selection, and the effects of noise,” *Complex Syst.*, vol. 9, 1995.
- [14] K. Deb, K. Sindhya, and T. Okabe, “Self-adaptive simulated binary crossover for real-parameter optimization,” in *Proceedings of the 9th Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation*, ser. GECCO '07. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 2007, p. 1187–1194. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1145/1276958.1277190>
- [15] J. Blank and K. Deb, “pymoo: Multi-objective optimization in python,” *IEEE Access*, vol. 8, pp. 89 497–89 509, 2020.
- [16] J. Suja and P. Kulmon, “Scalarization of multi-function sensor scheduling problem,” in *2024 New Trends in Signal Processing (NTSP)*, 2024, pp. 1–5.
- [17] J. Suja, P. Kulmon, and M. Benko, “Scheduling of multi-function multistatic sensor,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, pp. 1–15, 2025.
- [18] T. Cipra and R. Romera, “Kalman filter with outliers and missing observations,” *Test*, vol. 6, no. 2, pp. 379–395, 1997. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/BF02564705>
- [19] S. man Lee, “Goal programming for decision analysis,” 1972. [Online]. Available: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:61005861>
- [20] V. Kachitvichyanukul and B. W. Schmeiser, “Binomial random variate generation,” *Commun. ACM*, vol. 31, no. 2, p. 216–222, feb 1988. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1145/42372.42381>
- [21] S. Akbar, R. S. Adve, Z. Ding, and P. W. Moo, “Model-based drl for task scheduling in dynamic environments for cognitive multifunction radar,” in *2024 IEEE Radar Conference (RadarConf24)*, 2024, pp. 1–6.