



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

VYTVOŘENÍ VÝPOČTOVÉHO NÁSTROJE PRO DEFORMAČNĚ-NAPĚŤOVOU ANALÝZU MECHANICKY ZATÍŽENÉ VÁLCOVÉ MOMENTOVÉ SKOŘEPINY

COMPUTATIONAL TOOL FOR A STRESS-STRAIN ANALYSIS OF THE MECHANICALLY LOADED
CYLINDRICAL MOMENT SHELL

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Matej Tichý

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Oldřich Ševeček, Ph.D.

BRNO 2023

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	Matej Tichý
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Mechatronika
Vedoucí práce:	Ing. Oldřich Ševeček, Ph.D.
Akademický rok:	2022/23

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Vytvoření výpočtového nástroje pro deformačně–napěťovou analýzu mechanicky zatížené válcové momentové skořepiny

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Hlavní náplní práce je vytvoření analyticko–numerického nástroje pro výpočet deformačně napěťových charakteristik mechanicky zatížené válcové momentové skořepiny, řešené v rámci předmětu Pružnost a pevnost II (při uvažování různých okrajových podmínek). Nástroj bude vytvořen v některém z dostupných matematických SW, aby jej bylo možné zpřístupnit i pro studenty bakalářského studia jako výukovou pomůcku v uvedeném předmětu. Vytvořený program by měl mít alespoň nějaké základní grafické rozhraní pro jednodušší zadávání vstupních parametrů řešené úlohy. V práci bude rovněž provedeno porovnání výstupů vytvořeného analytického modelu s numerickým řešením využívajícím metodu konečných prvků a definovány případná omezení analytického modelu.

Cíle bakalářské práce:

- 1) Provést rešerši z oblasti analytického řešení deformačně napěťové odezvy momentových skořepin.
- 2) Ve zvoleném matematickém SW naprogramovat výpočet deformačně–napěťové odezvy momentové válcové skořepiny na různé mechanické zatížení (okrajové podmínky) a vytvořit základní uživatelské rozhraní pro zadávání vstupních parametrů úlohy a grafické vykreslování výstupních veličin.
- 3) Vytvořit parametrický model válcové momentové skořepiny v SW Ansys a provést deformačně napěťovou analýzu se stejnými okrajovými podmínkami jako v analytickém modelu.
- 4) Na několika modelových příkladech porovnat výstupy analytického a numerického modelu a analyzovat rozdíly v řešení mezi oběma přístupy (jak z pohledu deformací skořepiny, tak z pohledu vypočtených napětí na jejím povrchu).
- 5) Definovat oblast praktické použitelnosti analytického řešení teorie momentových válcových skořepin.

Seznam doporučené literatury:

ONDRÁČEK, E., VRBKA, J., JANÍČEK, P., Mechanika těles - Pružnost a Pevnost II, skripta, Nakladatelství VUT Brno, 1991.

TIMOSHENKO, S. Theory of Plates and Shells. 2nd ed. New York: McGraw-Hill book company, 1970.

VENTSEL, E. and KRAUTHAMMER, T. Thin Plates and Shells - Theory, Analysis and Applications. New York: Marcel Dekker AG, 2001.

MATLAB – The Language of Technical Computing, MathWorks, Inc., 2000

ANSYS Inc. ANSYS Release 2021 User's Manual. Pennsylvania: Swanson Analysis Sys. Inc, 2021, www.ansys.com.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2022/23

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jiří Hlinka, Ph.D.
děkan fakulty

ABSTRAKT

Cieľom bakalárskej práce je vytvorenie výpočtového nástroja pre analýzu deformačno-napät'ovej odozvy mechanicky zaťaženej valcovej momentovej škrupiny. K tomuto účelu bol využitý program MATLAB R2021b a jeho virtuálny nástroj App Designer. Vytvorený nástroj bude obsahovať základné grafické rozhranie pre jednoduchšie zadávanie vstupných parametrov riešenej úlohy. V práci budú tiež porovnané výstupy analytického modelu s numerickým riešením používajúcim metódu konečných prvkov a budú definované prípadné obmedzenia analytického modelu.

Kľúčové slova

Momentová teória škrupín, valcová momentová škrupina, deformačno-napät'ová analýza, MATLAB R2021b, ANSYS Mechanical

ABSTRACT

The aim of the bachelor's thesis is to create a computational tool for a stress-strain analysis of the mechanically loaded cylindrical moment shell. MATLAB R2021b and its virtual tool App Designer were used for this purpose. The created tool will contain a basic graphical interface for easier entry of the input parameters of the solved task. The thesis will also compare the outputs of the analytical model with the numerical solution using the finite element method and will define possible limitations of the analytical model.

Keywords

The moment theory of shells, cylindrical moment shell, stress-strain analysis, MATLAB R2021b, ANSYS Mechanical

BIBLIOGRAFICKÁ CITÁCIA

TICHÝ, Matej. *Vytvoření výpočtového nástroje pro deformačně-napěťovou analýzu mechanicky zatížené válcové momentové skořepiny*. Brno, 2023. Dostupné také z: <https://www.vut.cz/studenti/zav-prace/detail/149713>. Bakalárska práce. Vysoké učení technické v Brne, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedúci práce Oldřich Ševeček.

PREHLÁSENIE

Prehlasujem, že som bakalársku prácu na tému **Vytvorenie výpočtového nástroja pre deformačno-napät'ovú analýzu mechanicky zaťaženej valcovej momentovej škrupiny** vypracoval samostatne s použitím odbornej literatúry a prameňov, uvedených v zozname, ktorý tvorí prílohu tejto práce.

Dátum

Matej Tichý

POĎAKOVANIE

Týmto by som chcel vyjadriť vďaku Ing. Oldřichu Ševečkovi, Ph.D za odborné vedenie, trpezlivosť, ochotu a komunikáciu pri tvorbe bakalárskej práce.

OBSAH

1	Úvod	11
2	Škrupiny, súčasný stav poznania	12
2.1	Všeobecná teória tenkých škrupín	13
2.2	Typy povrchov škrupín	14
2.3	Základná formulácia.....	16
2.3.1	Napätosť.....	16
2.3.2	Rovnice rovnováhy	17
2.3.3	Geometrické vzťahy.....	18
2.3.4	Konštitutívne vzťahy	21
3	Momentová teória škrupín	24
3.1	Valcová momentová škrupina.....	24
3.1.1	Elementárny prvok momentovej škrupiny.....	25
3.1.2	Deformácia elementárneho prvku.....	25
3.1.3	Uvoľnenie elementárneho prvku	27
3.2	Väzby a charakteristika zaťaženia momentovej škrupiny.....	28
4	Riešenie deformačne napät'ovej odozvy momentovej škrupiny	30
4.1	Analytické riešenie priamej úlohy	30
4.1.1	Valcová momentová škrupina	30
4.1.2	Guľová momentová škrupina:	36
4.2	Metóda konečných prvkov (MKP).....	37
5	Výpočtový nástroj pre deformačno-napät'ovú analýzu mechanicky zaťaženej valcovej momentovej škrupiny	42
5.1	Štruktúra výpočtového nástroja.....	44
5.1.1	Príkladné riešenie úlohy typu A:	48
5.2	Ansysis (batch mód)	50
5.2.1	APDL kód pre deformačno-napät'ovú analýzu valcovej škrupiny	51
6	Porovnanie analytického a numerického modelu	53
6.1	Analýza úlohy typu B zaťaženej radiálnym tlakom.....	53
6.2	Analýza úlohy typu D zaťaženej líniovým momentom a radiálnou silou.....	60
7	Záver	66
8	Citácie	67

9	Zoznam použitých veličín.....	69
---	--------------------------------------	-----------

1 Úvod

Hlavným cieľom bakalárskej práce je navrhnuť a vytvoriť výpočtový nástroj (aplikáciu) pre riešenie deformačno-napät'ovej analýzy mechanicky zaťaženej momentovej valcovej škrupiny. Nástroj využíva analytický prístup, ktorý sa následne porovnáva s numerickým riešením založeným na metóde konečných prvkov.

Na vytvorenie aplikácie je použitý program MATLAB R2021b a na jeho interaktívne grafické užívateľské rozhranie je využitý vizuálny nástroj App Designer. Numerické riešenie je realizované pomocou programu ANSYS Mechanical a slúži na získanie prípadných obmedzení analytického modelu. Výpočtový nástroj pre vytvorenie analytického modelu vychádza zo znalostí pružnosti a pevnosti.

V prvej časti sa práca venuje oboznámeniu sa so škrupinou ako telesom a definuje základné znalosti nutné pre porozumenie správaniu sa takéhoto telesa pod mechanickým zaťažením. K tomuto účelu sú odvodené základné rovnice popisujúce napätosť a deformáciu. Následne sa rozoberie momentová teória škrupín, ktorá bude vysvetlená na valcovej škrupine. Analytické riešenie bude obohatené aj o guľovú škrupinu. Práca bude slúžiť ako výuková pomôcka pre študentov bakalárskeho štúdia v predmete Pružnosť a Pevnosť II, vyučovaného na Fakulte strojného inžinierstva v Brne.

V závere práci je vysvetlený princíp výpočtového nástroja ako aj porovnanie výstupov analytického a numerického modelu.

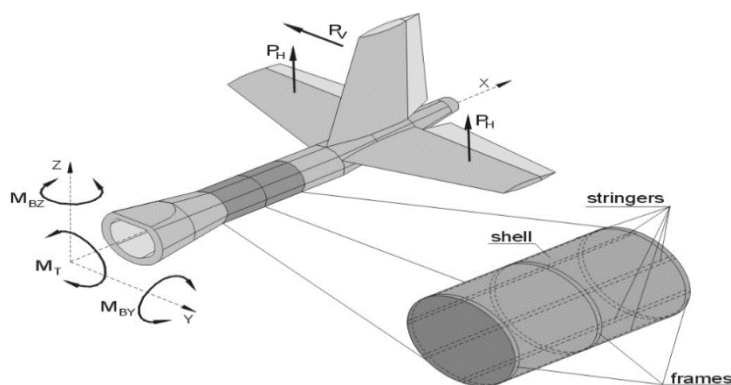
2 Škrupiny, súčasný stav poznania

Ak sa pozrieme na mnoho inžinierskych konštrukcií, zistíme, že v nich často nájdeme škrupiny. Tieto konštrukčné prvky majú dva veľké rozmery v porovnaní s tretím a sú schopné niesť zaťaženie najmä prostredníctvom ohybových a membránových napätí v rovine. [2]

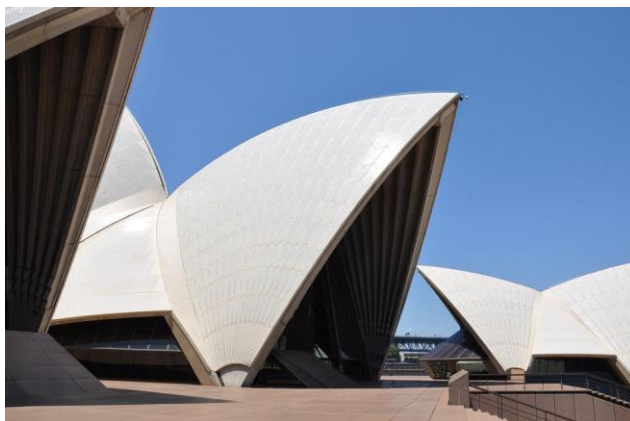
V stavebníctve a architektúre sa často vyskytujú škrupinové konštrukcie, ako napríklad strechy s veľkým rozpätím, konštrukcie zadržiavajúce kvapaliny a vodné nádrže, ochranné plášte jadrových elektrární a betónové oblúkové kupoly. [1]

V oblasti strojárstva nachádzajú škrupinové formy uplatnenie v potrubných systémoch, turbínových diskoch a pri výrobe tlakových nádob.

Analýza škrupín je oveľa náročnejšia ako analýza tenkých dosiek, pretože škrupiny sa musia vyrovnávať s ďalšími deformačnými režimami. Okrem ohybovej deformácie musia riešiť aj membránovú a šmykovú deformáciu. Navyše, škrupiny často čelia zložitým podmienkam zaťaženia, ako je nerovnomerné rozloženie tlaku alebo teploty, ktoré môžu viesť k ešte zložitejším deformáciám. Aj napriek týmto ťažkostiam sú škrupiny nevyhnutné v mnohých inžinierskych aplikáciách vďaka svojej vysokorýchlostnej pevnosti a schopnosti odolávať zaťaženiu s relatívne malým množstvom použitého materiálu. Preto je dôležité porozumieť správaniu sa škrupín, aby sme mohli navrhnúť a analyzovať mnohé konštrukčné prvky. Výskum škrupín je preto stále veľmi aktívny a zaujímavý v oblasti inžinierskej mechaniky. [2, 3]



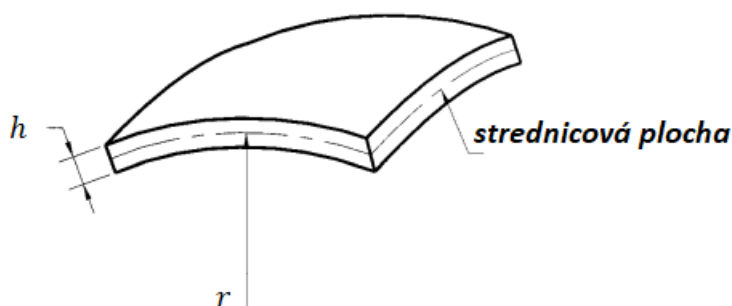
Obrázok 1: Škrupiny v leteckých štruktúrach. Prevzaté z [19]



Obrázok 2: Škrupiny v architektúre. Prevzaté z [20]

2.1 Všeobecná teória tenkých škrupín

Škrupina predstavuje teleso, ktoré je vymedzené dvomi zakrivenými plochami, kde vzdialenosť medzi jednotlivými povrchmi je omnoho menšia, ako ostatné rozmery v telese. Body, ktoré ležia v rovnakej vzdialenosti od týchto dvoch zakrivených plôch určujú takzvanú strednicovú plochu škrupiny a dĺžka úsečky medzi strednicovou plochou a zakrivenou plochou sa nazýva hrúbka škrupiny h (Obrázok 3.) Hlavným parametrom škrupiny je zakrivenie, pretože sa ním riadi správanie škrupiny pri pôsobení vonkajšieho mechanického zaťaženia. [2, 4]



Obrázok 3: Škrupina. Prevzaté z [2]

Existujú dve kategórie škrupín: hrubé a tenké. Toto rozdelenie je zavedené na základe požadovanej úrovne rozlíšiteľnosti pri analytickom riešení, to znamená, aké hodnoty líniových zaťažení a deformačných charakteristík ide považovať za nepodstatné. [2]

S ohľadom na inžiniersku presnosť môže byť škrupina považovaná za tenkú, ak je splnená podmienka:

$$\max\left(\frac{h}{r}\right) \leq \frac{1}{20} \quad (2.1)$$

Škrupiny, pre ktoré je táto nerovnosť porušená, sa označujú ako hrubé. Pre veľký počet praktických aplikácií sa hrúbka škrupiny nachádza práve v rozsahu tenkých škrupín :

$$\frac{1}{1000} \leq \frac{h}{r} \leq \frac{1}{20} \quad (2.2)$$

Uvedený rozsah (2.2) je len približný a závisí aj od ďalších parametrov škrupín, ako napríklad od charakteru okrajových podmienok alebo plynulosti zmeny vonkajšieho zaťaženia na povrchu škrupiny a podobne. [2]

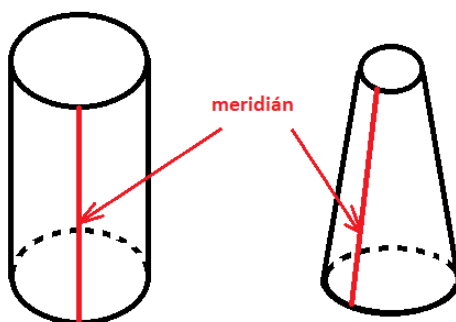
2.2 Typy povrchov škrupín

Klasifikácia povrchov škrupín z hľadiska mechaniky telies zahrňuje triedenie škrupinových povrchov na základe ich geometrie a schopnosti rozvinutia do roviny bez deformácie.

Klasifikácia založená na geometrickom tvare povrchu škrupín:

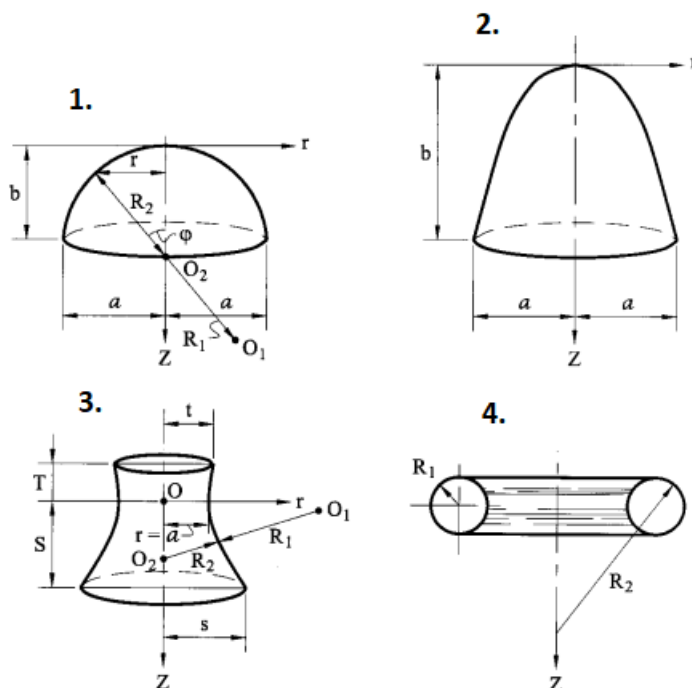
Rotačný povrch:

Povrchy rotačnej symetrie sú vytvorené rotáciou rovinných kriviek, ktoré sa nazývajú meridiány, okolo osy rotácie (osa rotácie môže ale aj nemusí meridián pretínať), (Obrázok 4.). Príkladmi takto vzniknutej rotačnej symetrie sú valce, sférické alebo eliptické kupoly, kužele, hyperboloidy a toroidy. [2, 3, 5]



Obrázok 4: Válec a kužel

Pre okrúhly valec a kužeľovú plochu (Obrázok 4.) môžeme vidieť, že meridián je priamka. Tieto tvary predstavujú škrupiny s nulovým Gaussovým zakrivením. Pre elipsoidy a paraboloidy sú krivosti meridiánu a druhej krivosti v rovnakých smeroch, to znamená, že sú s kladným Gaussovým zakrivením (Obrázok 5. 1;2.). Pre hyperboloid sú tieto krivosti v opačných smeroch, jedná sa o plochu so záporným Gaussovým zakrivením (Obrázok 5. 3.). Pre toroid sa Gaussove zakrivenie mení z kladného na záporné, ako sa pohybujeme po povrchu (Obrázok 5 4.). [2, 6]



Obrázok 5: 1. elipsoid, 2. paraboloid, 3. hyperboloid, 4. toroid.
Prevzaté z [2]

Plochy translácie:

Plocha translácie sa vytvára pohybom roviny krivky pozdĺž inej roviny krivky, kde obe roviny sú na seba kolmé. Tento pohyb vytvára novú plochu, ktorá sa nazýva plocha translácie. V prípade eliptického paraboloidu sa parabola prekladá na inú parabolu, pričom obidve majú rovnakú orientáciu krivosti. Výsledná plocha má kladné Gaussove zakrivenie. [2, 6]

Klasifikácia založená na zakrivení škrupiny:

Jednoducho zakrivené škrupiny:

Tieto škrupiny majú nulové Gaussovo zakrivenie, čo znamená, že ich zakrivenie je jednorozmerné. Medzi príklady týchto škrupín patria niektoré škrupiny rotácie ako valce a kužeľe, škrupiny translácie a tiež rovinné plochy s riadiacimi priamkami, ako

například valce a kužele s kruhovým alebo nekruhovým prierezom. Tieto jednoducho zakrivené škrupiny majú aplikácie v mnohých oblastiach vrátane architektúry, inžinierstva a prírodných vied. [7]

Dvojito zakrivené škrupiny s kladným a záporným Gaussovým zakrivením:

Sú plošné prvky, ktoré sa vyznačujú zakrivením v dvoch dimenziách kolmých na seba. Ak je ich Gaussovo zakrivenie kladné, matematicky ich to približuje ku guľovému tvaru. Medzi zástupcov tohto typu škrupín patrí viacero foriem škrupín rotácie, ako sú kruhové kupoly, elipsoidy či paraboloidy. [2, 5]

Klasifikácia založená na geometrickej rozvinuteľnosti škrupín:

Rozvinuteľné plochy škrupín sú definované tak, že sa dajú rozvinúť do rovinného tvaru bez toho, aby sa ich strednicová plocha prerušila alebo natiahla. Všetky jednoducho zakrivené plochy spadajú do tejto kategórie.

Nerovzvinuteľné plochy škrupín sa nedajú rozvinúť do rovinného tvaru bez toho, aby sa deformovala alebo prerušila ich strednicová plocha. Do tejto skupiny sa radia dvojito zakrivené plochy.

Z fyzikálneho hľadiska vyžadujú nerovzvinuteľné povrchy viac vonkajšej energie na deformáciu než rozvinuteľné, teda energiu potrebnú pre prechod do rovinného tvaru. To znamená, že škrupiny, ktoré sa nedajú rozvinúť, sú všeobecne pevnejšie a stabilnejšie, ako príslušné rozvinuteľné škrupiny s rovnakými rozmermi. Na druhej strane rozvinuteľné škrupiny majú svoje výhody, keďže sú technologicky efektívnejšie. [2, 5]

2.3 Základná formulácia

Riešenie základnej úlohy pružnosti je určiť deformáciu a napätosť telesa, ktoré je definované geometriou, materiálom a mechanickým zaťažením, prípadne väzbami. To znamená, prísť na riešenie 15 neznámych parametrov (3 zložky vektoru posuvu, 6 zložiek tenzoru pretvorenia, 6 zložiek tenzoru napätia). [8]

K tomu, však potrebujeme znalosť základných pojmov a vzťahov, ktorým sa táto podkapitola venuje.

2.3.1 Napätosť

V elementárnom okolí bodu A, ktorý je bodom telesa, pôsobí vektor obecného napätia \vec{f} na ploche dS s normálou \vec{e}_n . Obecné napätie v ľubovoľnom reze vedenom bodom

A môžeme určiť na základe znalosti hodnôt obecných napätí v troch vzájomne na seba kolmých rezoch (vedením bodom A). Zavedieme, že osy kartézského súradnicového systému x , y a z sú priesečnice týchto rezov. [8–10]

Následne môžeme obecné napätie \vec{f} rozložiť do jednotlivých osí pomocou normálového napätia σ a šmykového napätia označovaného τ :

$$\vec{f}_x = \sigma_x \vec{i} + \tau_{xy} \vec{j} + \tau_{xz} \vec{k} \quad (2.3)$$

$$\vec{f}_y = \tau_{yx} \vec{i} + \sigma_y \vec{j} + \tau_{yz} \vec{k} \quad (2.4)$$

$$\vec{f}_z = \tau_{zx} \vec{i} + \tau_{zy} \vec{j} + \sigma_z \vec{k} \quad (2.5)$$

Napätosť v bode A je množina obecných napätí f , ktoré pôsobia vo všetkých rezoch, ktoré bodom A prechádzajú. [8]

Veta o združených šmykových napätiach:

Šmykové napätia sú rovnako veľké, pokiaľ pôsobia v rovinách (rezoch), ktoré sú na seba vzájomne kolmé. Ich orientácia je smerom ku priesečníku týchto rovín alebo od neho. [8]

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (2.6)$$

Napätosť v bode A je úplne určená tenzorom napätia:

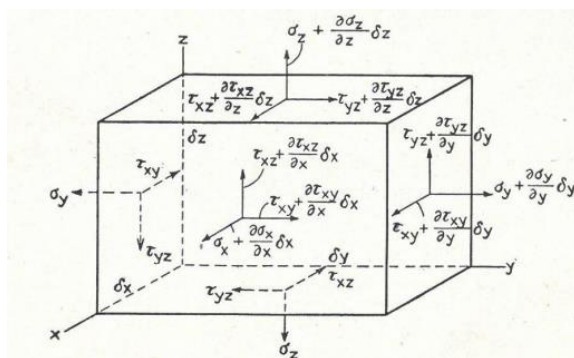
$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (2.7)$$

Tenzor (2.7) je symetrický, druhého rádu so šiestimi nezávislými zložkami.

Napätosť telesa je množina napätostí vo všetkých jeho bodoch. Pokiaľ je tenzor napätostí vo všetkých bodoch rovnaký, hovoríme o homogénnej napätosti telesa. Ak sa tenzory napätostí v rôznych bodoch líšia, napätosť je nehomogénna (môže byť po častiach homogénna). [8, 9]

2.3.2 Rovnice rovnováhy

Sústava rovníc rovnováhy popisuje podmienky na dosiahnutie statickej rovnováhy v každej elementárnej časti telesa v konkrétnom bode. Na takýto bod môže pôsobiť povrchové zaťaženie (Obrázok 6. reprezentujúce σ a τ) a objemové zaťaženie pôsobiace v ťažisku (ťažové, elektromagnetické) značené O . [8, 9]



Obrázok 6: Elementárna časť telesa pod zaťaženie. Prevzaté z [11]

Odvodenie rovnice rovnováhy v osy x :

$$\begin{aligned}
 & -\sigma_x dydz + \left(\sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} dx\right) dydz - \tau_{xy} dx dz + \\
 & \left(\tau_{xy} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} dy\right) dx dz - \tau_{xz} dx dy + \left(\tau_{xz} + \right. \\
 & \left. \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} dz\right) dx dy + O_x dx dy dz = 0
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Následne po matematickej úprave dostaneme rovnicu rovnováhy v smere osy x :

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} + O_x = 0 \tag{2.9}$$

Rovnakým spôsobom sa vyjadria rovnice aj v ostatných osiach:

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} + O_y = 0 \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + O_z = 0 \tag{2.11}$$

2.3.3 Geometrické vzťahy

Geometrické rovnice vyjadrujú vzťah medzi deformačnými posuvmi a pretvoreniami. Teda popisujú väzbu medzi vektorovými zložkami deformačného posuvu a zložkami tenzoru pretvorenia telesa. [8, 11]

Keď na teleso pôsobíme mechanickým zaťažením a celé teleso sa nepohybuje, takmer všetky jeho body sa posúvajú. Niektoré body môžu ostať v pokoji kvôli pôsobeniu vonkajších väzieb, alebo môžu byť súčasťou osy symetrie. Premiestnenie jedného

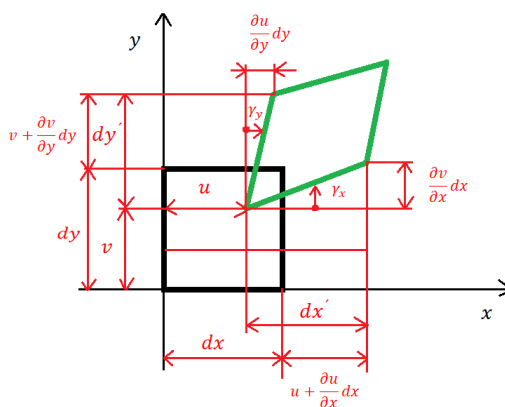
takého bodu je definované ako deformačný posuv a množina všetkých deformačných posuvov bodov sa nazýva deformácia telesa ako celku. [8, 10]

$$u = (u, v, w) \tag{2.12}$$

V rovnici (2.12) u , v a w predstavujú súradnice deformačného posuvu (vektor deformačného posuvu).

V prípade bez porušenia súdržnosti telesa ako celku, deformačné posuvy sú spojité. To znamená, že všetky body v telese sa premiestňujú plynulo a bez prerušenia, a tým sa vytvára spojitý proces deformačných posuvov. [8]

Na Obrázku 7. môžeme vidieť deformáciu elementárneho prvku, pre názorné zobrazenie problematiky uvažujme elementárny prvok ako štvorec.



Obrázok 7: Deformácia názorného elementárneho prvku. Námet z prednášok Pružnosť a Pevnosť II (Fakulta strojného inžinierstva v Brne)

Pomerné dĺžkové pretvorenia sú jednou z foriem pretvorenia, ktoré sa používajú na vyjadrenie zmeny dĺžky materiálu vzhľadom na jeho pôvodnú dĺžku. Sú definované ako rozdiel konečného a počiatočného pretvorenia, podelený počiatočným pretvorením. Odvodenie dĺžkové pretvorenia v smere osy x (Obrázok 7.). [8, 10]:

$$\varepsilon_x = \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.13}$$

Podobným spôsobom vyjadríme dĺžkové pretvorenia aj v ostatných osiach:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.14}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{2.15}$$

Uhlové pretvorenie je v tenzoru kladné, keď sa mení pravý uhol na ostrý a záporné, keď sa mení na tupý. Odvodenie uhlového pretvorenia γ_{xy} :

$$\tan \gamma_x = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} \partial x}{dx'} \approx \gamma_x \quad (2.16)$$

V rovnici (2.16) využívame znalosť, že sa jedná o malé deformácie (malá hodnota uhlu γ_x).

$$\gamma_x = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} \partial x}{dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{(1 + \frac{\partial u}{\partial x}) dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} \quad (2.17)$$

Člen $\frac{\partial u}{\partial x}$ je omnoho menší ako 1, preto ho zanedbávame.

$$\gamma_x = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.18)$$

Podobným spôsobom vyjadríme aj uhol γ_y :

$$\gamma_y = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.19)$$

Výsledný skos γ_{xy} je potom definovaný ako:

$$\gamma_{xy} = \gamma_x + \gamma_y = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.20)$$

Vzťahy pre zvyšné uhlové pretvorenia:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.21)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.22)$$

Vyššie uvedené pretvorenia tvoria výsledný tenzor pretvorenia:

$$T_\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{vmatrix} \quad (2.23)$$

2.3.4 Konstitutívne vzťahy

Konstitutívne vzťahy sú matematické rovnice alebo vzťahy, ktoré opisujú vzťah medzi tenzorom pretvorenia (2.23) a tenzorom napätosti (2.7) v materiáli alebo štruktúre, a tým určujú jej mechanické vlastnosti. Tento vzťah medzi pretvorením a napätím je určený pre každý materiál experimentálne. [8]

Hookov zákon pre jednoosovú napätosť:

Hookov zákon môže byť použitý na opis lineárne elastického správania materiálov, čo znamená, že materiál sa deformuje lineárne vzhľadom na napätie a to až do určitého limitu, ktorý sa nazýva limit elastickej deformácie. Tento limit je charakteristický pre každý materiál a je dôležitým parametrom pri analýze pevnosti a deformácií materiálov. [10]

Pre jednoosovú napätosť si ho môžeme definovať na skúške materiálu ťahom, resp. tlakom. Na materiál pôsobí napätie len v jednej osi, napríklad v osi x , ostatné zložky tenzoru napätosti sú nulové.

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \quad (2.24)$$

V prípade jednoosovej napätosti, však nedochádza ku jednoosovému stavu deformácie. Pri skúške ťahom v ostatných osiach síce nepôsobia napätia, ale pretvorenia tam budú, tieto pretvorenia získame pomocou Poissonovho zákona:

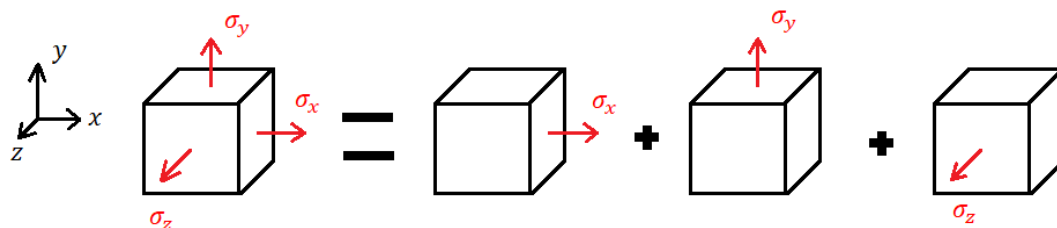
$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu\varepsilon_x = -\mu \frac{\sigma_x}{E} \quad (2.25)$$

Kde μ je Poissonova konštanta, ktorá popisuje vlastnosti deformácie materiálu v mechanike pevných látok. Ide o pomer relatívnych zmien rozmerov materiálu v dôsledku napätia vo smeroch kolmých na pôsobiace napätie, určuje sa experimentálne. [8–10]

Obecný Hookov zákon pre trojosovú napätosť:

Obecný Hookov zákon ide odvodiť na základe superpozície troch jednoosových napätostí. Pre toto odvodenie materiál musí byť homogénny, izotropný a lineárne elastický. Princíp superpozície je znázornený pomocou elementárnej kocky (Obrázok 8.), kde výsledné pretvorenie je dané súčtom jednoosových pretvorení [8, 9]:

$$e = e_1 + e_2 + e_3 \quad (2.26)$$



Obrázok 8: Princíp superpozície pre trojosovú napätosť. Námet z prednášok Pružnosť a Pevnosť II (Fakulta strojného inžinierstva v Brně)

Vzťah pre celkové pretvorenie v ose x bude daný ako súčet jednoosových pretvorení v ose x podľa vzťahov (2.24;2.25):

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E} \quad (2.27)$$

Jedná sa o hlavný súradnicový systém, napätia σ_x , σ_y a σ_z sú hlavné napätia. Pretvorenie ε_x bude po úprave:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (2.28)$$

Rovnakým spôsobom vyjadríme pretvorenia v ostatných osiach:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (2.29)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (2.30)$$

Pre obecný súradnicový systém sa doplnia vzťahy pre uhlové pretvorenia, kde platí:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (2.31)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (2.32)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad (2.33)$$

Kde G je modul pružnosti v šmyku, ktorý vyjadruje závislosť medzi materiálovými parametrami obecného Hookovho zákona:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (2.34)$$

Pomocou Laméovej konštanty a prvého invariantu tenzoru pretvorenia môžeme obecný Hookov zákon v inverznej podobe vyjadriť ako:

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda e \quad (2.35)$$

$$\sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda e \quad (2.36)$$

$$\sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda e \quad (2.37)$$

Kde λ predstavuje Laméovú konštantu:

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1 - 2\mu)(1 + \mu)} \quad (2.38)$$

3 Momentová teória škrupín

Momentová teória škrupín je jednou z teórií, ktoré sa zaoberajú správaním škrupiny pod vplyvom vonkajšieho mechanického zaťaženia. Táto teória vznikla ako vylepšenie a rozšírenie klasickej teórie membránových škrupín.

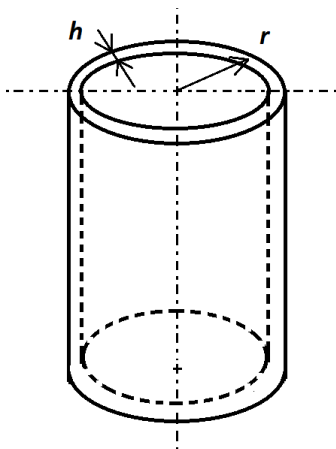
Membránová teória poskytuje vysokú presnosť analýzy pre bežne sa vyskytujúce zaťažovacie podmienky. Avšak v oblastiach, kde sú deflexie, vychýlenie materiálu z jeho pôvodnej polohy pod vplyvom vonkajších zaťažovacích síl, obmedzené alebo kde dochádza ku zmene geometrie, napríklad pri spojení valcovej a guľovej škrupiny, membránová teória nestačí na zabezpečenie zachovania deflexie a kompatibility rotácie škrupín. V týchto miestach vznikajú nespojité sily a momenty, ktoré vyvolávajú ohybové a šmykové napätia v škrupine. V dôsledku malých hrúbok škrupiny môžu aj malé ohybové momenty spôsobiť vysoké napätia v škrupine. [2, 3]

Momentová teória umožňuje riešiť vyššie uvedené problémy, ale jej matematický model je veľmi zložitý a umožňuje analytické riešenie len pre niektoré konkrétne prípady. Pri analýze tenkých škrupín sa najčastejšie používajú numerické metódy, kde sa uplatňuje najmä metóda konečných prvkov. Tieto metódy umožňujú riešiť zložité geometrie a zaťažovacie podmienky, ktoré by bolo ťažké alebo nemožné analyticky riešiť. [2]

Z tohto dôvodu táto teória bude vysvetlená na geometricky rotačnom valci.

3.1 Valcová momentová škrupina

Takáto momentová škrupina je tenkostenné teleso, ktorého strednicová plocha je rotačne symetrický valec. Pod tenkostenným telesom rozumieme, že hrúbka tohto telesa je omnoho menšia, ako jeho veľkosť (polomer). Škrupina musí byť podľa všetkých svojich osí rotačne symetrická, v každom smere rotačnej symetrie má rovnaké vlastnosti.[8]



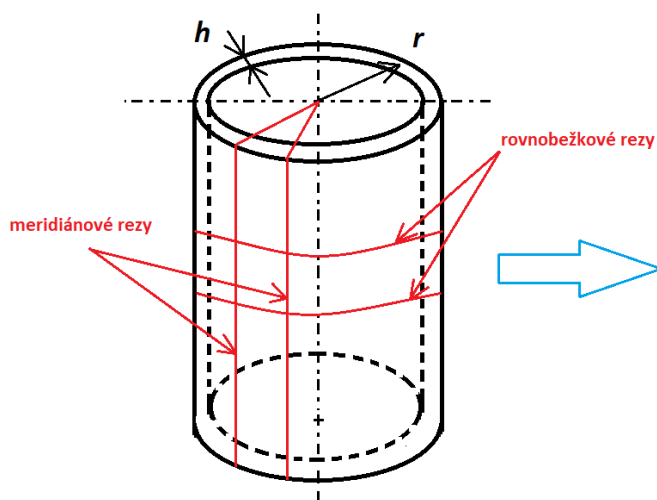
Obrázok 9: Geometricky rotačná momentová škrupina

Pre tenkostennú momentovú škrupinu (Obrázku 9.) platí nerovnosť (2.2).

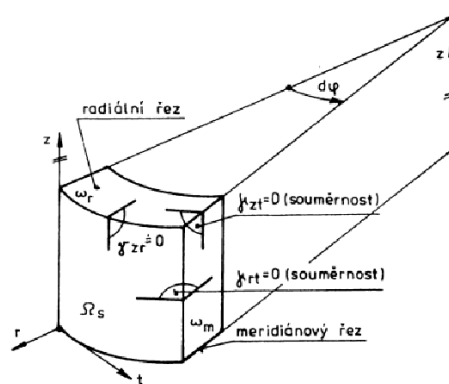
Typickým súradnicovým systémom, ktorý sa používa u geometricky valcovej momentovej škrupiny, je valcový súradnicový systém (z, r, φ) . Osa z je stotožnená s osou rotácie telesa. [2, 3, 8]

3.1.1 Elementárny prvok momentovej škrupiny

Typický elementárny prvok je výsek z valcovej medzikruhovej oblasti. Vznikne dvomi meridiánovými a dvomi rovnobežkovými rezmi (Obrázok 10;11.). Obidva tieto rezy sú na seba vzájomne kolmé. Polomer r sa viaže k strednicovej ploche. [8]



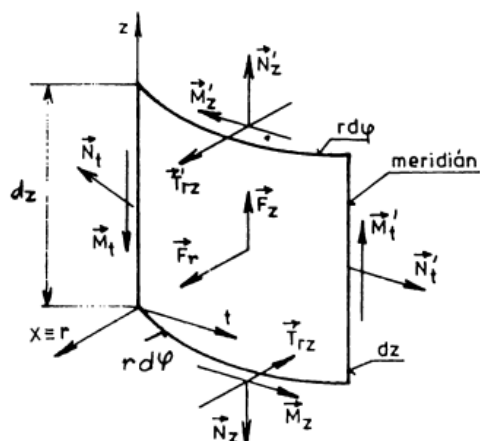
Obrázok 10: Rezy vedené cez škrupinu



Obrázok 11: Elementárny prvok. Prevzaté z [8]

3.1.2 Deformácia elementárneho prvku

K deformácií elementárneho prvku momentovej škrupiny (Obrázok 13.) dochádza po mechanickom zaťažení (Obrázok 12.). Pri mechanickom zaťažení platí Kirchhoffova teória, ktorá predpokladá malé deformácie v porovnaní ku hrúbke škrupiny. [8]



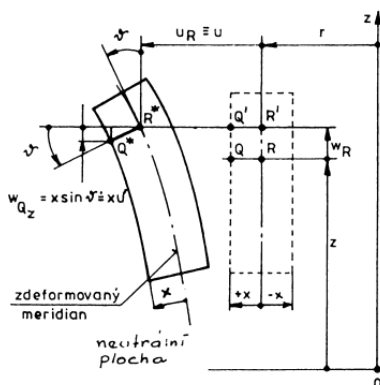
Obrázok 12: Mechanické zaťaženie elementárneho prvku. Prevzaté z [8]

Pôsobením líniovej sily v smere osy z sa elementárny prvok natiahne, bod R , ležiaci na strednicovej ploche, sa posunie do novej hodnoty R' . V dôsledku pôsobenia radiálneho tlaku na vnútornú hranu škrupiny, dochádza k posuvu bodu R' v smere osy r do bodu R'' . Zaťaženie momentovej škrupiny momentom \vec{m}_z spôsobí vyhnutie škrupiny, bod Q'' sa presunie do polohy Q''' . Bod na strednicovej ploche sa posúva na jednej línii (Obrázok 13.).

Uhol ϑ predstavuje natočenie strednicovej plochy, w_R vyjadruje posuv bodu na strednicovej ploche R v ose z , w_{Qz} je posuv bodu Q ležiaceho na hrane škrupiny v ose z a jeho hodnotu získame po dosadení do vzorca:

$$w_{Qz} = -x \cdot \vartheta \tag{3.1}$$

$$\vartheta = \frac{du}{dz} \tag{3.2}$$



Obrázok 13: Deformácia elementárneho prvku. Prevzaté z [8]

Uhlové pretvorenia γ_{zt} , γ_{rt} sú nulové v dôsledku rotačnej symetrie, uhlové pretvorenie γ_{zr} je taktiež nulové, pretože u tenkostenných telies zanedbávame boreníe radiálnych rezov. Jedinými nenulovými pretvoreniami sú ε_t , ε_r a ε_z , čím sa stávajú hlavnými pretvoreniami. Deformácia v bode momentovej škrupiny je teda trojosá. [3, 8]

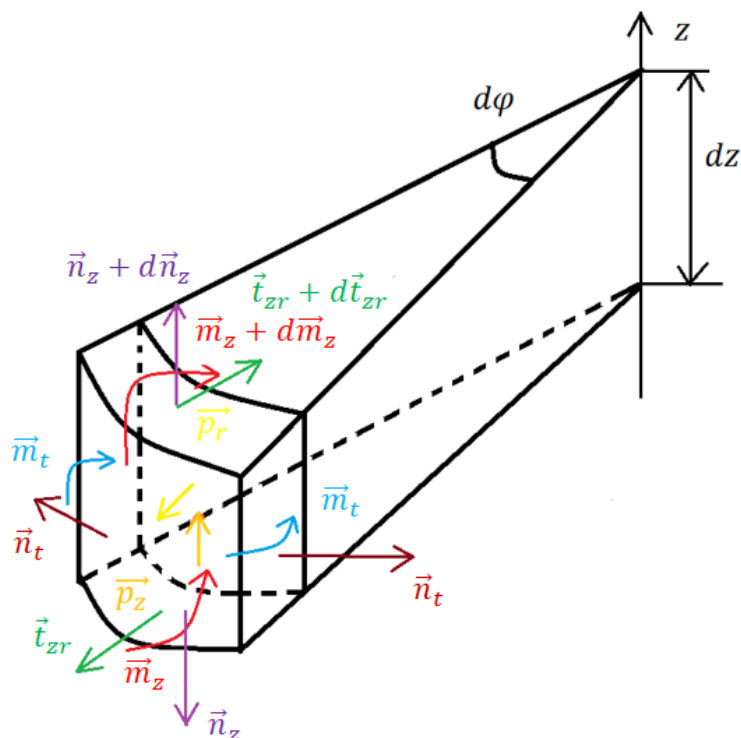
Tensor pretvorenia momentovej škrupiny:

$$T_\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_r & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_t \end{vmatrix} \quad (3.3)$$

U geometricky valcovej momentovej škrupiny sú dva nezávislé posuvy. Radiálny posuv u , predstavujúci rozťahnutie škrupiny a z – osový posuv w . Škrupina sa dá riešiť pre obidva druhy posuvov. Jedinou nezávislou premenou je z (vyjadruje dĺžku momentovej škrupiny), polomerom r je určená strednicová plocha. [8]

3.1.3 Uvoľnenie elementárneho prvku

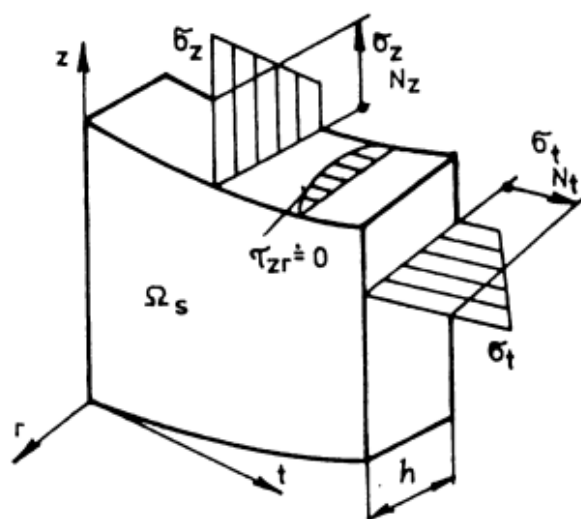
Uvoľnenie je myšlienkový proces, kedy nahrádzame silové pôsobenie, poprípade pôsobenie mechanických väzieb silami a momentmi, aby bola zachovaná mechanika prvku ako celku. [12]



Obrázok 14: Uvoľnenie elementárneho prvku momentovej škrupiny. Námet z prednášok Pružnosť a Pevnosť II (Fakulta strojného inžinierstva v Brne)

Na Obrázku 14. je naznačené uvoľnenie elementárneho prvku pomocou 3D modelu. Všetky sily a momenty vyskytujúce sa na Obrázku 14. sú líniové a sú vzťahnuté na jednotku dĺžky strednice z , osový tlak \vec{p}_z predstavuje silu, ktorá vzniká napríklad pôsobením prúdenia veľmi hustej kvapaliny vnútri momentovej škrupiny, v praxi sa moc často nevyskytuje.

Takýto elementárny prvok musí byť v statickej rovnováhe, na základe čoho dostaneme rovnice rovnováhy. Obrázok 15. znázorňuje napätovú odozvu na vyššie uvedené uvoľnený elementárny prvok.



Obrázok 15: Napätová odozva pôsobiacich síl a momentov. Prevzaté [8]

σ_z , σ_t predstavujú hlavné napätia a po celej výške rezu sú rozložené lineárne. Radiálne napätie σ_r je veľmi malé, preto sa zanedbáva. Napätosť momentovej škrupiny je dvojosová. [8]

Tenzor napätosti momentovej škrupiny:

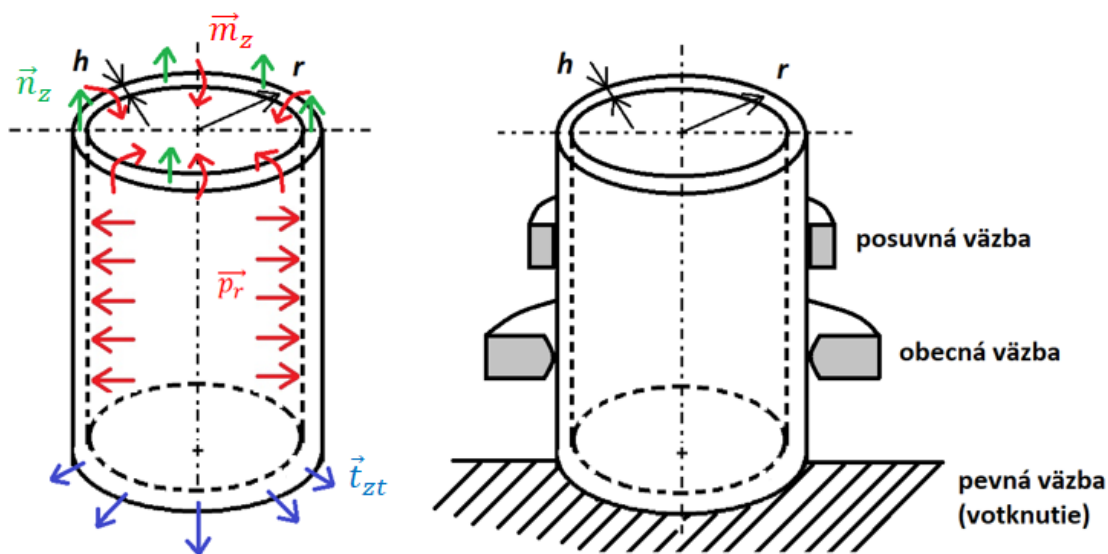
$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_t & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.4)$$

3.2 Vázby a charakteristika zaťaženia momentovej škrupiny

Základnou charakteristikou momentovej škrupiny je rotačná symetria, ako bolo uvedené v kapitole 2.2. To znamená, že ak na škrupinu pôsobí radiálny tlak, tak potom pôsobí na celom vnútornom povrchu tejto škrupiny.

Radiální tlak patří mezi charakteristické silové zatážení, jedná sa teda o plošné zatážení pôsobiacie na strednicovú plochu, vrátane z – osového tlaku, ten sa však zanedbáva, ako bolo uvedené vyššie v kapitole 3.1.3. Ďalším charakteristickým silovým zatážením je radiálna líniová sila \vec{t}_{zt} , líniový moment \vec{m}_z a líniová osová sila \vec{n}_z pôsobiacie na strednicovú plochu (Obrázok 16.). [8]

Medzi deformačné zatáženia momentovej škrupiny chápeme predpísané (dané) osovú alebo radiálne posuvy, poprípade uhly natočenia strednicovej plochy. Je nutné tieto deformačné zatáženia zohľadniť pri návrhu a následnej analýze škrupiny. [2, 3]



Obrázok 16: Zatáženie momentovej škrupiny a väzby. Námet z prednášok Pružnosť a Pevnosť II (Fakulta strojného inžinierstva v Brne)

Ak je použitá väzba, musí byť aplikovaná po celom obvode danej momentovej škrupiny v dôsledku rotačnej symetrie (Obrázok 16.). Možné typy väzieb, ktoré sa používajú sú:

- Obecná väzba – môžeme si ju predstaviť ako 2D podporu, ktorú rotujeme okolo škrupiny. Je typická malým stykovým miestom so škrupinou (bodom). Obmedzuje pohyb škrupiny v smere normály v mieste styku. [12]
- Pevná väzba – votknutie, je charakterizovaná vysokou pevnosťou a minimálnou flexibilitou, žiadnou pohyblivosťou medzi škrupinou a spojeným prvkom. [12]
- Posuvná väzba – umožňuje relatívny pohyb medzi spojenými prvkami v jednom smere, zatiaľ čo zabraňuje pohybu v iných smeroch. [12]

4 Riešenie deformačne napät'ovej odozvy momentovej škrupiny

V tejto kapitole si rozoberieme analýzu deformačne napät'ovej odozvy na mechanické zaťaženie momentovej škrupiny. Táto analýza sa označuje ako priama úloha pružnosti a predstavuje určenie deformácie a napätosti momentovej škrupiny so známou geometriou, materiálom, zaťažením a väzbami ku okoliu.

Na základe matematickej formulácie sú dva prístupy k riešeniu priamej úlohy, a to diferenciálny a variačný. Diferenciálny prístup, tiež nazývaný aj analytický, spočíva v zostrojení a riešení diferenciálnej rovnice popisujúcej chovanie momentovej škrupiny pod zaťažením. Variačný prístup riešenia problému je hľadanie stavu, v ktorom dosahuje energia analyzovaného telesa extrémne alebo stacionárne hodnoty. [2–4]

4.1 Analytické riešenie priamej úlohy

4.1.1 Valcová momentová škrupina

Existuje možnosť analytického riešenia v uzavretom tvare v závislosti od typu plošného zaťaženia. Tento prístup sa považuje za najjednoduchší prípad momentovej teórie, ktorý nám poskytuje základnú predstavu o riešení problémov týkajúcich sa momentovej teórie škrupín. Táto podkapitola využíva znalosti zo skrípt Pružnosť a Pevnosť II. [8]

Aby úloha pružnosti momentovej škrupiny bola riešiteľná, musí platiť, že použitý materiál je Hookovský. Takýto materiál musí byť:

- Homogénny – je materiál, v ktorom sú vlastnosti a zloženie rovnaké vo všetkých jeho častiach. To znamená, že vlastnosti ako hustota, pevnosť, pružnosť, tepelná vodivosť, elektrická vodivosť a podobne, sú konzistentné a nemenné v celej štruktúre materiálu. [10]
- Izotropný – je materiál, ktorý má rovnaké fyzikálne vlastnosti vo všetkých smeroch. Jeho mechanické, tepelné, elektrické, optické a ďalšie vlastnosti sú konzistentné a nemenné vo všetkých smeroch. [10]
- Elastický (lineárne pružný) – deformácia lineárne pružného materiálu je priamo úmerná aplikovanej sile, pričom táto úmernosť je nazývaná pružnosť materiálu. Po odstránení sily sa tento materiál vráti do svojej pôvodnej tvarovej a rozmerovej podoby bez trvalých zmien. Inými slovami, lineárne pružný materiál sa správa predvídateľne a konzistentne v rámci svojej elastickej oblasti. [10]

Rovnice rovnováhy:

Na základe uvoľneného elementárneho prvku v kapitole 3.1.3 (Obrázok 14.), sme schopní zostrojiť rovnice rovnováhy. Rovnica rovnováhy znamená súčet všetkých síl pôsobiacich v jednej ose rovný nule.

Prvú rovnicu rovnováhy zostrojíme pomocou osy z . Sily pôsobiace v tejto ose sú líniové a kvôli transformáciám na obecné sily ich musíme vynásobiť dĺžkou línie, na ktorej pôsobia $r d\varphi$. V ose z pôsobí aj tlak \vec{p}_z , ktorý musíme previesť na silu vynásobením plochy, na ktorej pôsobí, $r d\varphi dz$.

$$-n_z(r d\varphi) + (n_z + dn_z)(r d\varphi) + p_z(r d\varphi dz) = 0 \quad (4.1)$$

Následne po matematickej úprave dostaneme prvú výslednú rovnicu rovnováhy:

$$\frac{dn_z}{dz} + p_z = 0 \quad (4.2)$$

Druhá rovnica rovnováhy je v smere radiálnej osy r . Posúvacie sily \vec{t}_{zr} opäť vynásobíme dĺžkou línie, $r d\varphi$. Radiálny tlak \vec{p}_r prevedieme na silu rovnako ako aj v prvej rovnici rovnováhy tlak \vec{p}_z . Líniovú silu \vec{n}_t rozdelíme do dvoch os a vynásobíme dĺžkou línie dz .

$$\begin{aligned} -t_{zr}(r d\varphi) + (t_{zr} + dt_{zr})(r d\varphi) + p_r(r d\varphi dz) \\ - 2n_t \frac{d\varphi}{2} dz = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Druhá rovnica rovnováhy po úpravách má finálny tvar:

$$\frac{dt_{zr}}{dz} - \frac{n_t}{r} + p_r = 0 \quad (4.4)$$

Tretiu rovnicu rovnováhy získame ako súčet jednotlivých momentov v tangenciálnom smere. Moment \vec{m}_z je líniový, preto ho vynásobíme dĺžkou línie $r d\varphi$. Posúvajúca sila \vec{t}_{zr} vytvorí tiež moment pôsobiaci v tangenciálnom smere, preto ju vynásobíme ramenom dz a dĺžkou línie $r d\varphi$.

$$m_z(r d\varphi) - (m_z + dm_z)(r d\varphi) + t_{zr} dz(r d\varphi) = 0 \quad (4.5)$$

Po matematickej úprave má tretia rovnica rovnováhy tvar:

$$\frac{dm_z}{dz} - t_{zr} = 0 \quad (4.6)$$

Geometrické rovnice:

U momentovej škrupiny uvažujeme malé deformácie (pretvorenia sú do 1%).

U všetkých rotačne symetrických telies, vrátane momentovej škrupiny, platia tri geometrické vzťahy z dôvodu rotačnej symetrie, ako bolo uvedené v kapitole 3.1.2:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (4.7)$$

$$\varepsilon_t = \frac{u}{r} \quad (4.8)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.9)$$

Dĺžkové pretvorenie v ose z následne upravíme pre konkrétnu momentovú škrupinu na základe poznatkov z kapitoly 3.1.2. Posuv w sa skladá z posuvu pre bod ležiaci na strednicovej ploche w_R a bodu ležiaceho na hrane škrupiny w_{Qz} :

$$w = w_R + w_{Qz} \quad (4.10)$$

Prepojením rovníc (4.9; 4.10; 3.1; 3.2) dostaneme výsledný tvar pre pretvorenie v ose z, upraveného špeciálne pre momentovú škrupinu.

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial(w_R - x\vartheta)}{\partial z} = \frac{\partial(w_R - x \frac{du}{dz})}{\partial z} = \frac{dw_R}{dz} - x \frac{d^2u}{dz^2} \quad (4.11)$$

Konštitutívne vzťahy:

Ako bolo uvedené v kapitole 3.1.3 jedná sa o dvojsovú rovinnú napätosť, pre ktorú platí:

$$\sigma_t = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_t + \mu \varepsilon_z) \quad (4.12)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_z + \mu \varepsilon_t) \quad (4.13)$$

Po dosadení geometrických rovníc (4.2; 4.4; 4.6) do konštitutívnych vzťahov (4.12; 4.13) dostaneme vzťahy pre napätia:

$$\sigma_t = \frac{E}{1 - \mu^2} \left(\frac{u}{r} + \mu \left(-x \cdot \frac{d^2u}{dz^2} + \frac{dw_R}{dz} \right) \right) \quad (4.14)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1 - \mu^2} \left(\frac{dw_R}{dz} - x \cdot \frac{d^2u}{dz^2} + \mu \frac{u}{r} \right) \quad (4.15)$$

Pre ďalšie odvedenie zavedieme potrebnú statickú ekvivalenciu pre nahradenie líniových zaťažení:

$$n_z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_z dx \quad (4.16)$$

$$n_t = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_t dx \quad (4.17)$$

$$m_z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x \sigma_z dx \quad (4.18)$$

$$m_t = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x \sigma_t dx \quad (4.19)$$

$$T_{rz} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T_{rz} dx \quad (4.20)$$

Vzťahy pre líniové zaťaženia získame integrovaním statickej ekvivalencie (4.16; 4.17; 4.18; 4.19; 4.20) po dosadení vzťahov pre napätia (4.14; 4.15).

$$\begin{aligned} n_z &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_z dx = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{dw_R}{dz} - x \cdot \frac{d^2u}{dz^2} + \mu \frac{u}{r} \right) dx \\ &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{dw_R}{dz} + \mu \frac{u}{r} \right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$n_t = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{u}{r} + \mu \frac{dw_R}{dz} \right) \quad (4.22)$$

$$m_z = -B \frac{d^2u}{dz^2} \quad (4.23)$$

$$m_t = -\mu B \frac{d^2u}{dz^2} = -\mu m_z \quad (4.24)$$

$$T_{rz} = -B \frac{d^3u}{dz^3} \quad (4.25)$$

Kde B je ohybová tuhosť škrupiny:

$$B = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \quad (4.26)$$

Dosadením tretej rovnice rovnováhy (4.6) do druhej (4.4) obdržíme vzťah:

$$\frac{d^2 m_z}{dz^2} - \frac{n_t}{r} + p_r = 0 \quad (4.27)$$

Ako ďalší krok dosadíme rovnicu (4.21) do rovnice (4.22):

$$n_t = \mu n_z + Eh \frac{u}{r} \quad (4.28)$$

Následne po dosadení vzťahov (4.23; 4.28) do rovnice (4.27) a matematickej úprave obdržíme diferenciálnu rovnicu škrupiny pre radiálny posuv u :

$$-B \frac{d^4 u}{dz^4} - \left(\frac{\mu}{r} n_z + Eh \frac{u}{r^2} \right) + p_r = 0 / (-B) \quad (4.29)$$

$$\frac{d^4 u}{dz^4} + 4\beta^4 u = \frac{1}{B} \left(p_r + \frac{\mu}{r} n_z \right) \quad (4.30)$$

Kde pre zjednodušenie zavádzame konštantu β :

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1 - \mu^2)}{r^2 h^2}} \quad (4.31)$$

Riešenie diferenciálnej rovnice (4.30) na základe znalosti o diferenciálnom počte sa skladá z homogénnej u_h a partikulárnej časti u_p :

$$u = u_h + u_p \quad (4.32)$$

Keďže sa jedná o rovnicu štvrtého rádu, po štvornásobnej integrácii obdržíme homogénne riešenie so štyrmi integračnými konštantami C_1, C_2, C_3 a C_4 :

$$u_h = e^{-\beta z} (C_1 \sin \beta z + C_2 \cos \beta z) + e^{\beta z} (C_3 \sin \beta z + C_4 \cos \beta z) \quad (4.33)$$

Po dosadení prvej rovnice rovnováhy (4.2) do partikulárneho riešenia získame:

$$u_p = \frac{r^2}{Eh} \left[p_r - \frac{\mu}{r} n_z \right] = \frac{r^2}{Eh} \left[p_r - \frac{\mu}{r} \left(C_0 - \int p_z dz \right) \right] \quad (4.34)$$

Partikulárne riešenie popisuje, čo sa deje s posuvom u v časti škrupiny, kde nepôsobia momenty. Natočenie škrupiny ϑ odpovedá druhej derivácii posuvu u :

$$\vartheta = \frac{du}{dz} \quad (4.35)$$

Vzťahy pre tangenciálne a z-osové napätia (Obrázok 17.):

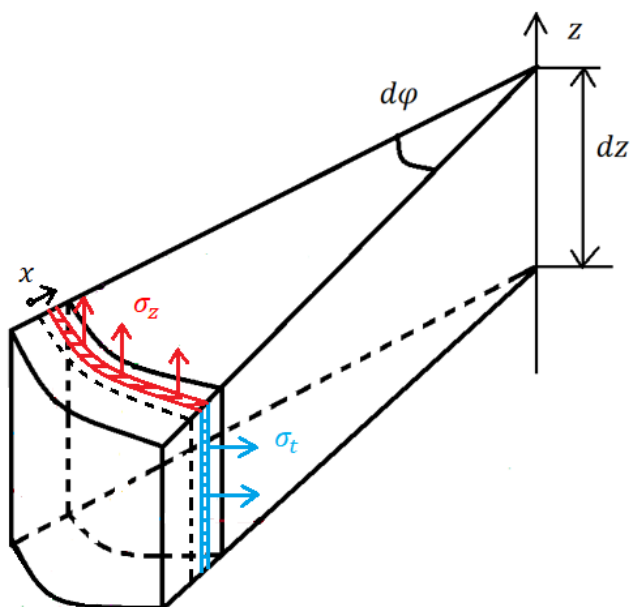
$$\sigma_t = \frac{n_t}{h} + \frac{12m_t}{h^3}x \quad (4.36)$$

$$\sigma_z = \frac{n_z}{h} + \frac{12m_z}{h^3}x \quad (4.37)$$

Napätia sú na hrúbke škrupiny rozložené lineárne a maximálnu hodnotu nadobúdajú na vonkajšom a vnútornom povrchu ($x = \pm \frac{h}{2}$):

$$\sigma_{t,max} = \frac{n_t}{h} \pm \frac{6m_t}{h^2} \quad (4.38)$$

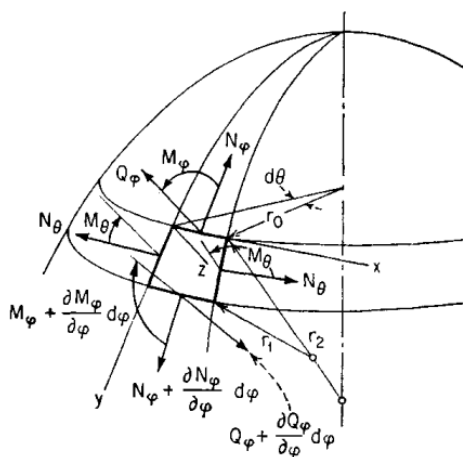
$$\sigma_{z,max} = \frac{n_z}{h} \pm \frac{6m_z}{h^2} \quad (4.39)$$



Obrázok 17: Rozloženie napätia na hrúbke škrupiny. Námet z prednášok Pružnosť a Pevnosť II (Fakulta strojného inžinierstva v Brne)

4.1.2 Guľová momentová škrupina:

Postup ku odvodeniu diferenciálnej rovnici popisujúcej chovanie guľovej škrupiny je podobný, ako u valcovej škrupiny. Po uvoľnení elementárneho prvku sme schopní zostrojiť rovnice rovnováhy. Podkapitola vychádza z knihy Theory of Plates and Shells. [3]



Obrázok 18: Uvoľnenie elementárneho prvku guľovej škrupiny. Prevzaté z [3]

Rovnice rovnováhy:

$$\frac{d}{d\varphi}(N_\varphi r_0) - N_\theta r_1 \cos \varphi - r_0 Q_\varphi + r_0 r_1 Y = 0 \quad (4.40)$$

$$N_\varphi r_0 + N_\theta r_1 \sin \varphi + \frac{d}{d\varphi}(r_0 Q_\varphi) + Z r_0 r_1 = 0 \quad (4.41)$$

$$\frac{d}{d\varphi}(M_\varphi r_0) - M_\theta r_1 \cos \varphi - Q_\varphi r_0 r_1 = 0 \quad (4.42)$$

Geometrické vzťahy:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{r_1} \frac{du}{d\varphi} - \frac{w}{r_1} \quad (4.43)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r_2} \cot \varphi - \frac{w}{r_2} \quad (4.44)$$

Po aplikácii Hookovho zákona obdržíme vzťahy pre líiové sily a momenty:

$$N_\varphi = \frac{E}{1 - \mu^2} \left[\frac{1}{r_1} \left(\frac{du}{d\varphi} - w \right) + \frac{\mu}{r_2} (u \cot \varphi - w) \right] \quad (4.45)$$

$$N_{\theta} = \frac{E}{1 - \mu^2} \left[\frac{1}{r_2} (u \cot \varphi - w) + \frac{\mu}{r_1} \left(\frac{du}{d\varphi} - w \right) \right] \quad (4.46)$$

$$M_{\varphi} = - \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} \left[\frac{1}{r_1} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{u}{r_1} + \frac{dw}{r_1 \varphi} \right) + \frac{\mu}{r_2} \left(\frac{u}{r_1} + \frac{dw}{r_1 \varphi} \right) \cot \varphi \right] \quad (4.47)$$

$$M_{\theta} = - \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} \left[\left(\frac{u}{r_1} + \frac{dw}{r_1 \varphi} \right) \frac{\cot \varphi}{r_2} + \frac{\mu}{r_1} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{u}{r_1} + \frac{dw}{r_1 \varphi} \right) \right] \quad (4.48)$$

Po dosadení rovníc pre zaťaženie (4.45; 4.46; 4.47; 4.48) do rovníc rovnováhy (4.40; 4.41; 4.42), obdržíme tri rovnice o troch neznámych veličinách u , w , Q_{φ} . Následne po matematickej úprave a dosadení obdržíme diferenciálnu rovnicu pre guľovú škrupinu:

$$\frac{d^4 Q_{\varphi}}{d\varphi^2} + 4\beta^4 Q_{\varphi} = 0 \quad (4.49)$$

Riešenie diferenciálnej rovnice (4.49) po integrácií so štyrmi integračnými konštantami nadobúda tvar:

$$Q_{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}} \left[e^{\beta\varphi} (C_1 \cos \beta\varphi + C_2 \sin \beta\varphi) + e^{-\beta\varphi} (C_3 \cos \beta\varphi + C_4 \sin \beta\varphi) \right] \quad (4.50)$$

4.2 Metóda konečných prvkov (MKP)

Metóda konečných prvkov patrí medzi numerické metódy riešenia priamej úlohy a je možné ňou riešiť každú matematicky opísateľnú úlohu, bez ohľadu na komplikovanosť geometrie a mechanického zaťaženia. MKP využíva variačný prístup riešenia, ktorého základom je Lagrangeov variačný princíp, ktorý hovorí o tom, že existujú funkcie posunov, ktoré sú spojité a spĺňajú geometrické okrajové podmienky a zároveň minimalizujú celkovú potenciálnu energiu Π telesa. [13]

Potenciálnu energiu Π vyjadríme ako:

$$\Pi = W - P \quad (4.51)$$

W predstavuje energiu napätosti telesa Ω :

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}^T dV \quad (4.52)$$

P je potenciál vonkajšieho zaťaženia telesa Ω :

$$P = \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{o}^T dV + \int_{\Gamma^p} \mathbf{u}^T \mathbf{p}^T dS \quad (4.53)$$

Kde vo vzťahoch (4.52; 4.53) vystupujú štvorcové matice napätia $\boldsymbol{\sigma}^T$, pretvorenie $\boldsymbol{\varepsilon}^T$, posuvu \mathbf{u}^T , objemového zaťaženia \mathbf{o}^T a plošného zaťaženia \mathbf{p}^T telesa:

$$\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}] \quad (4.54)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}] \quad (4.55)$$

$$\mathbf{u}^T = [u, v, w] \quad (4.56)$$

$$\mathbf{o}^T = [o_x, o_y, o_z] \quad (4.57)$$

$$\mathbf{p}^T = [p_x, p_y, p_z] \quad (4.58)$$

Potencionálna energia Π je teda závislá na spojitých funkciách posuvu u , v a w . Každá z týchto funkcií, však predstavuje nekonečné množstvo hodnôt, ktoré sú definované v nekonečnom množstve bodov telesa v skúmanej časti. Aby bola úloha riešiteľná, funkcie sa vyjadria v závislosti na konečnom počte parametrov ako aproximačné funkcie, ktoré sú dané súčtom známych, bazových funkcií $N_i(x, y, z)$, $N_j(x, y, z)$ a $N_k(x, y, z)$. Tým sa vytvorí sieť. Bázové funkcie sú následne násobené zložkami posuvov v uzlových bodoch siete.

$$u(x, y, z) = \sum_{i=1}^l N_i(x, y, z) u_i \quad (4.59)$$

$$v(x, y, z) = \sum_{j=1}^m N_j(x, y, z) v_j \quad (4.60)$$

$$w(x, y, z) = \sum_{k=1}^n N_k(x, y, z) w_k \quad (4.61)$$

Po dosadení vzťahov (4.59; 4.60; 4.61) do rovnice pre potencionálnu energiu (4.51) obdržime vzťahy pre potencionálne energie Π závislé na neznámych posuvoch. Po zavedení podmienky stacionárnej hodnoty potencionálnej funkcie získame vzťahy pre dopočítanie neznámych posuvov:

$$u_1, \dots, w_n \begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \Pi}{\partial w_n} = 0 \end{cases} \quad (4.62)$$

Aproximačné funkcie posuvov obdržíme po opätovnom dosadení vyriešených posuvov do rovníc (4.59; 4.60; 4.61).

Získanie celkovej potencionálnej energie Π zahŕňa súčet príspevkov od jednotlivých prvkov:

$$\Pi = \sum_{i=1}^x \Pi_i \quad (4.63)$$

Kde x predstavuje počet prvkov siete. Pre jeden prvok potom rovnica (4.52) má tvar:

$$W_1 = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \sigma \varepsilon S dx \quad (4.64)$$

Pretvorenie ε a napätie σ sú vyjadrené cez posuvy pomocou aproximácie:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{dN\boldsymbol{\delta}}{dx} = \mathbf{B}\boldsymbol{\delta} \quad (4.65)$$

$$\sigma = E\mathbf{B}\boldsymbol{\delta} = E\mathbf{B}^T \boldsymbol{\delta}^T \quad (4.66)$$

$$\mathbf{B} = \frac{dN}{dx} \quad (4.67)$$

Matica $\boldsymbol{\delta}$ je matica neznámych posuvov a \mathbf{N} je matica známych bázových funkcií a po dosadení rovníc (4.65; 1; 4.67) do vzťahu pre energiu napätosti (4.64):

$$W_1 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^T \left(ES \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx \right) \boldsymbol{\delta} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{k} \boldsymbol{\delta} \quad (4.68)$$

Kde \mathbf{k} predstavuje prvkovú maticu tuhosti a jej prvky predstavujú fyzikálny rozmer tuhosti.

Vzt'ah pre potenciál vonkajšieho zaťaženia na telese pre jeden prvok siete je:

$$P_1 = \int_{x_1}^{x_2} u \rho g S dx \quad (4.69)$$

$$P_1 = \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{f} \quad (4.70)$$

Kde \mathbf{f} predstavuje prvkovú maticu vonkajšieho zaťaženia. Prvky matice vonkajšieho zaťaženia predstavujú celkovú objemovú silu, pôsobiacu na prvkoch, rozdelenú na polovicu a sústredenú do krajných uzlov v podobe uzlových síl. Matica \mathbf{f} teda zabezpečuje diskretizáciu spojitého zaťaženia. Pre ostatné prvky odvodenie matíc prebieha analogicky.

Následne sa všetky neznáme deformačné parametre úlohy združia do jednej globálnej matice neznámych parametrov $\mathbf{U}^T = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$, matice tuhosti a vonkajšieho zaťaženia sa tiež rozšíria o príslušný počet rád a stĺpcov.

Celková energia napätosti telesa W je určená súčtom prvkových príspevkov:

$$W = \sum_{i=1}^n W_n = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T (\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \dots, \mathbf{K}_n) \mathbf{U} = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (4.71)$$

Obdobne je určená aj celková potencionálna energia vonkajšieho zaťaženia telesa P :

$$P = \sum_{i=1}^n P_n = \mathbf{U}^T (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n) = \mathbf{U}^T \mathbf{F} \quad (4.72)$$

Globálne matice tuhosti \mathbf{K} a vonkajšieho zaťaženia \mathbf{F} sú bez okrajových podmienok. Po dosadení rovníc (4.71; 4.72) do vzt'ahu (4.63) pre celkovú potencionálnu energiu telesa Π potom platí:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \mathbf{F} \quad (4.73)$$

Po zavedení Lagrangeovej variačnej podmienky (4.62):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{U}} = 0 \quad (4.74)$$

z parciálnych derivácií podľa u_1, u_2, \dots, u_n obdržíme sústavu lineárnych algebrických rovníc:

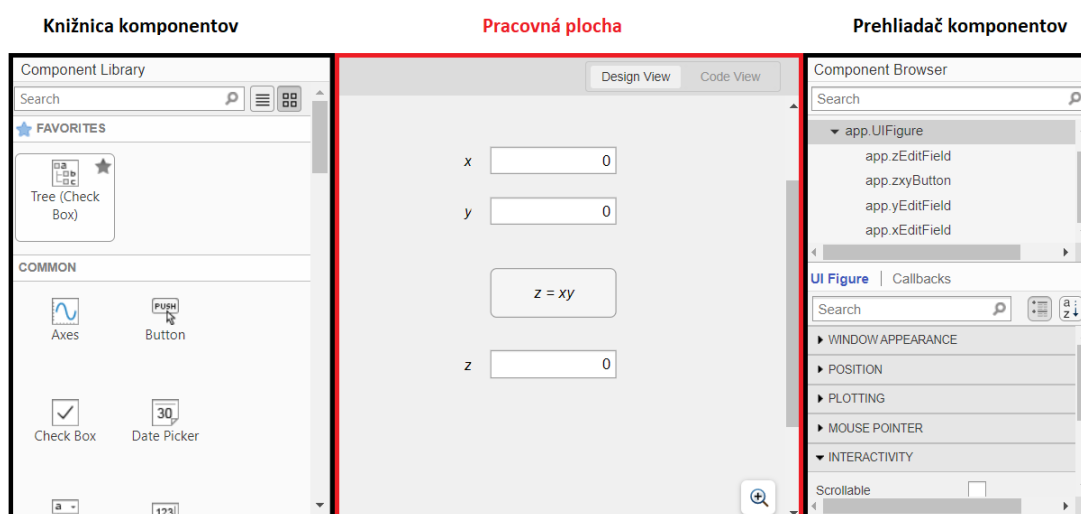
$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (4.75)$$

Následne musíme určit minimálne také okrajové podmienky, ktoré zabránia pohybu celého telesa vo všetkých jeho možných smeroch, ktoré sú relevantné pre daný typ a rozmer problému, aby matica \mathbf{K} nebola singulárna, inak by došlo ku numerickému zrúteniu výpočtu. Po vyriešení všetkých neznámych deformačných parametrov sa výpočet opäť vráti na prvkovú úroveň a dopočítajú sa posuvy, pretvorenia a napätia vo všetkých bodoch telesa.

5 Výpočtový nástroj pre deformačno-napät'ovú analýzu mechanicky zaťaženej valcovej momentovej škrupiny

Pre výpočtový nástroj deformačno-napät'ovej analýzy som zvolil matematický softvér MATLAB R2021b, čo je interaktívne programovacie prostredie a jazyk vyvinutý spoločnosťou MathWorks. Základné užívateľské rozhranie výpočtového nástroja GUI, z anglického prekladu Graphical User Interface, bolo vytvorené v aplikácii App Designer, ktorou disponuje prostredie MATLAB-u. App Designer ponúka dva režimy slúžiace k tvorbe aplikácie, „Design View“ a „Code view“.

Režim „Design View“ (Obrázok 19.) umožňuje tvorbu užívateľského rozhrania prostredníctvom vlastného umiestňovania grafických komponentov z knižnice komponentov na pracovnú plochu. Knižnica komponentov obsahuje množstvo prvkov, umožňujúce rôzne funkcie na základe potreby, ktoré sa triedia na skupiny. Po umiestnení prvku na pracovnú plochu, môžeme následne upravovať jeho nastavenie, teda veľkosť prvku, názov, umiestnenie a font, farbu písma. App Designer obsahuje aj prehliadač použitých komponentov pre lepšiu orientáciu. Užívateľské rozhranie výpočtového nástroja pre deformačno-napät'ovú analýzu mechanicky zaťaženej valcovej momentovej škrupiny využíva kombináciu tlačidiel, textových polí, polí slúžiacich na vkladanie číselných hodnôt, obrázkových polí a panelov. [14]



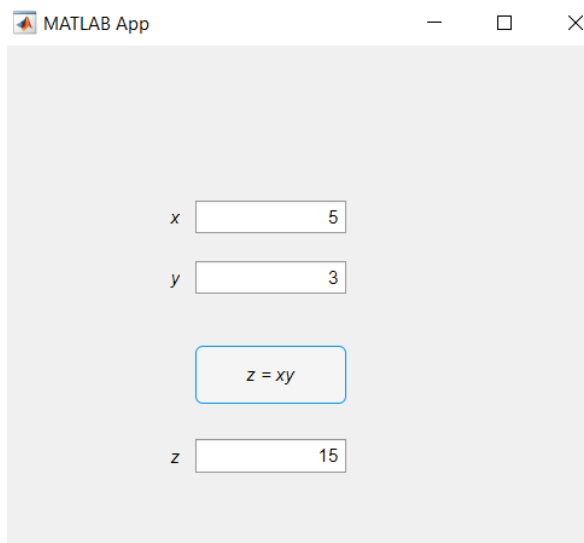
Obrázok 19: APP DESIGNER v režime „Design View“

Po grafickej tvorbe aplikácie App Designer následne vygeneruje kód, ktorý vytvorí základné zložky používateľského rozhrania vo funkcii nastavenia v režime „Code View“ (Obrázok 20.). Tento režim slúži na písanie samotného programu, teda ku prideleniu funkcií grafickým prvkom. [14]



Obrázok 20: APP DESIGNER v režime „Code View“

Príklad použitia: užívateľ zadá hodnoty premenným x a y a aplikácia po interakcii s tlačidlom vypočíta matematickú rovnicu $z = xy$ (Obrázok 21.)

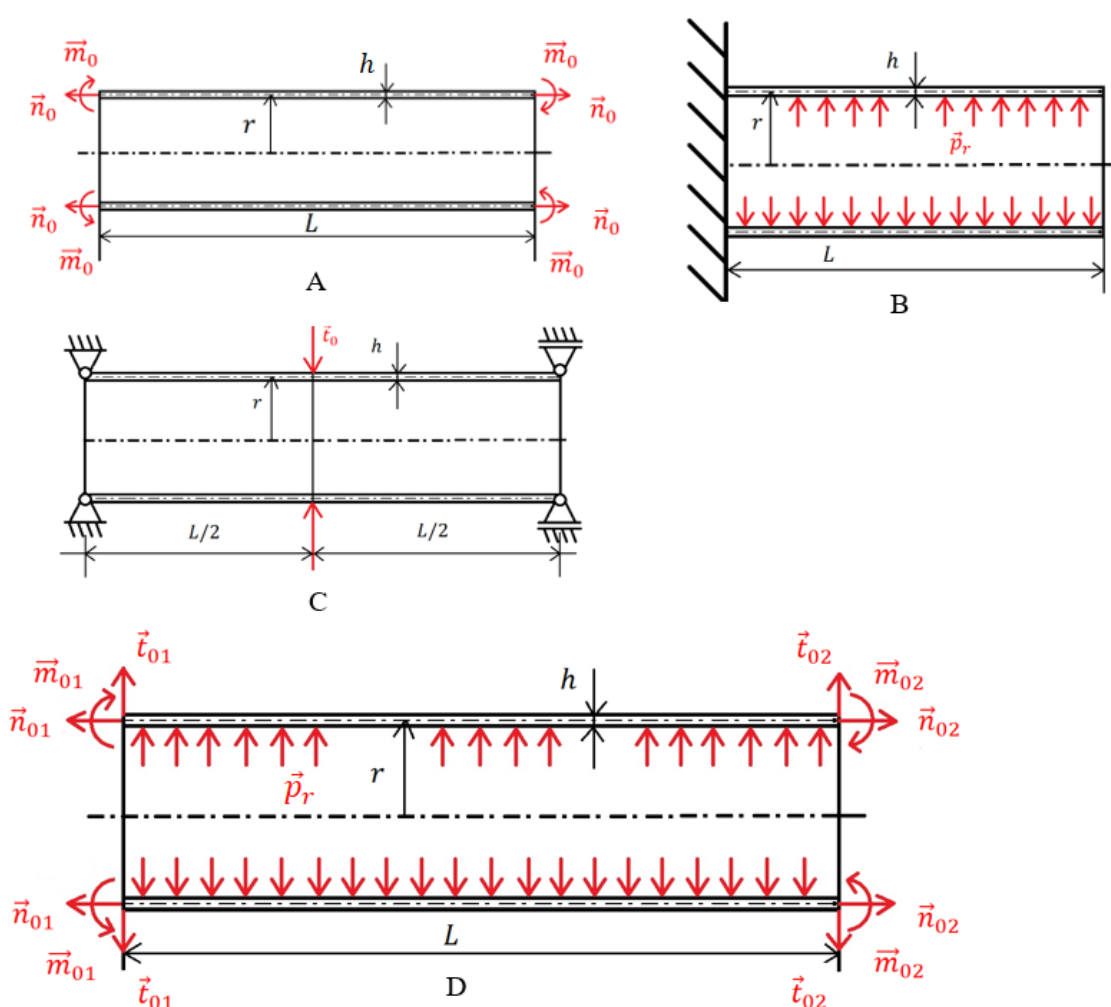


Obrázok 21: Príkladné spustenie aplikácie

5.1 Štruktúra výpočtového nástroja

1. Voľba typu úlohy

Po spustení programu má užívateľ na výber zo štyroch typov úloh valcových momentových škrupín. Typy A,B a C majú predom definované okrajové podmienky, druh mechanického zaťaženia a väzby na koncoch škrupiny. Typ D umožňuje užívateľovi určiť vlastné okrajové podmienky (Obrázok 22.).



Obrázok 22: Typy úloh riešených aplikáciou

2. Vstupné parametre

Následne po výbere typu úlohy sa zadajú vstupné parametre:

- Geometria – škrupina je vymedzená polomerom r , hrúbkou h a dĺžkou L .
- Materiál – je definovaný pomocou Youngovho modulu pružnosti E , Poissonovej konštanty μ a medze klzu σ_K .
- Zaťaženie – určuje radiálny tlak, líniové sily a momenty pôsobiace na škrupinu v závislosti od typu úlohy.
- Väzby – pri úlohe typu D môže užívateľ určiť, či konce škrupiny budú voľné, votknuté alebo pod pôsobením obecnej podpory (poprípade kombinácia).

Znamienková konvencia zaťaženia:

- Líniová osová sila \vec{n}_z :

Smerujúca od škrupiny:

$$n_z = +n_1 \quad (5.1)$$

Smerujúca do škrupiny:

$$n_z = -n_1 \quad (5.2)$$

- Líniová sila \vec{t}_{zt} :

Smerujúca od škrupiny:

$$t_{zt} = +t_1 \quad (5.3)$$

Smerujúca do škrupiny:

$$t_{zt} = -t_1 \quad (5.4)$$

- Líniový moment \vec{m}_z :

Smerujúci dovnútra škrupiny:

$$m_z = +m_1 \quad (5.5)$$

Smerujúci od škrupiny:

$$m_z = -m_1 \quad (5.6)$$

Tabuľka 1: Okrajové podmienky pre zvolené zaťaženie a väzby.

Ľavá strana škrupiny		Pravá strana škrupiny	
Typ väzby:	Okrajové podmienky:	Typ väzby:	Okrajové podmienky
Votknutie	$z = 0$ $u(z) = 0$ $\vartheta(z) = 0$	Votknutie	$z = L$ $u(z) = 0$ $\vartheta(z) = 0$
Obecná väzba	$z = 0$ $m_z(z) = 0$ $u(z) = 0$	Obecná väzba	$z = L$ $m_z(z) = 0$ $u(z) = 0$
Voľný koniec	$z = 0$ $m_z(z) = m_{01}$ $T_{rz}(z) = t_{01}$	Voľný koniec	$z = L$ $m_z(z) = m_{02}$ $T_{rz}(z) = t_{02}$

3. Zobrazenie výsledkov

Po zadaní vstupných parametrov vybranej úlohy a po interakcií s tlačidlom „Použiť“ sa zobrazia nasledujúce veličiny v paneli „Výsledky“:

- Dĺžka škrupiny (krátka/dlhá).
- Maximálna hodnota posuvu u [mm].
- Maximálna hodnota natočenia ϑ [rad].
- Maximálna hodnota osového momentu M_z [Nmm/mm].
- Maximálna hodnota momentu M_t [Nmm/mm].
- Maximálna hodnota napätia na vonkajšej hrane škrupiny $\sigma_{z,out}$ [Mpa].
- Maximálna hodnota napätia na vnútornej hrane škrupiny $\sigma_{z,in}$ [Mpa].
- Maximálna hodnota napätia na vonkajšej hrane škrupiny $\sigma_{t,out}$ [Mpa].
- Maximálna hodnota napätia na vnútornej hrane škrupiny $\sigma_{t,in}$ [Mpa].
- Bezpečnosť vzhľadom k MSP v rizikovom mieste K_k [-].

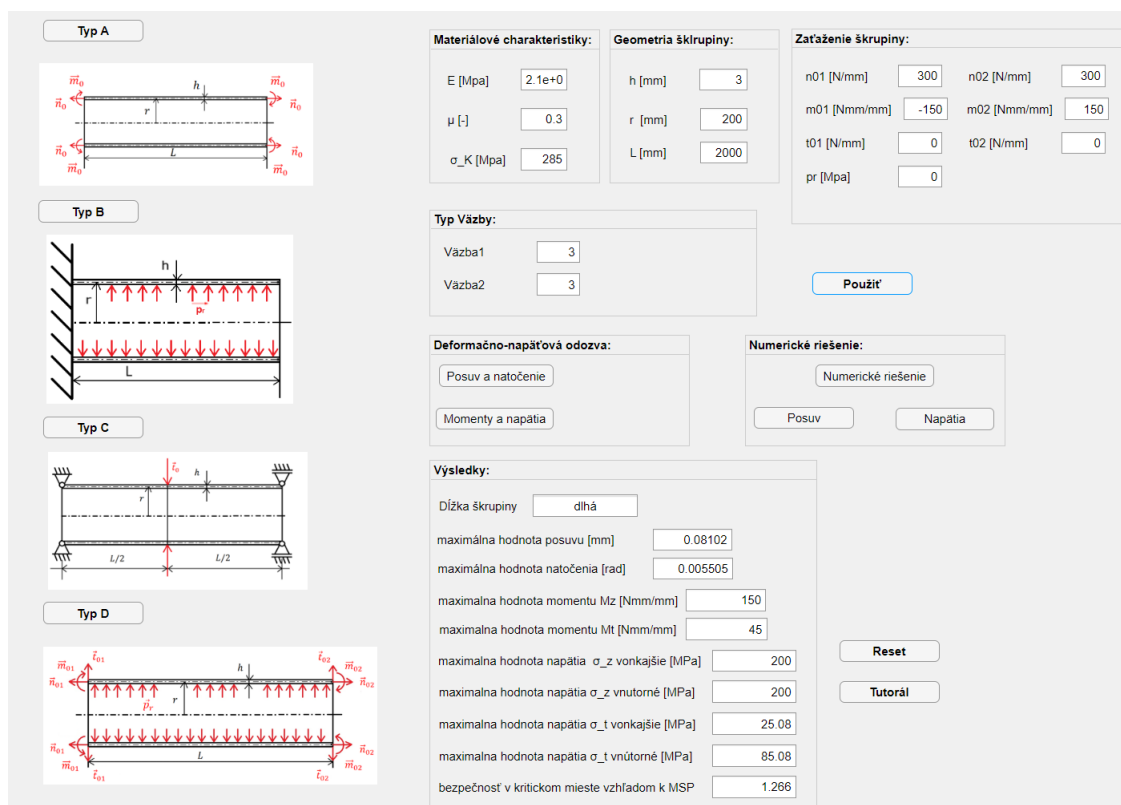
Grafické zobrazenie deformačnej odozvy pre zvolené zaťaženie škrupiny je možné získať po interakcií s tlačidlom „Posuv a natočenie“ v paneli „Deformačno-napät'ová odozva“ rovnako ako aj zobrazenie napät'ovej odozvy po interakcií s tlačidlom „Momenty a napätia“.

Vygenerované grafy deformačnej odozvy zobrazujú:

- Radiálny posuv u v závislosti na dĺžke z .
- Natočenie škrupiny ϑ v závislosti na dĺžke z .

Vygenerované grafy napět'ovej odozvy zobrazujú:

- Moment M_z v závislosti na dĺžke z .
- Moment M_t v závislosti na dĺžke z .
- Napätie σ_z na vonkajšej a vnútornej hrane škrupiny v závislosti na dĺžke z .
- Napätie σ_t na vonkajšej a vnútornej hrane škrupiny v závislosti na dĺžke z .



Obrázok 23: Grafické užívateľské rozhranie výpočtového nástroja

Na Obrázku 23. je zobrazené grafické rozhranie výpočtového nástroja. V ľavej časti je možné vidieť typy úloh. Zadávanie vstupných parametrov je prostredníctvom panelov „Materiálové charakteristiky“, „Geometria škrupiny“, „Zaťaženie škrupiny“. Jednotlivé uvedené zaťaženia v paneli „Zaťaženie škrupiny“ odpovedajú obrázku umiestnenom pod typom úlohy. Panel „Typ Vázby“ umožňuje užívateľovi zadefinovať väzby pre oba konce škrupiny, „Väzba1“ odpovedá ľavej strane a „Väzba2“ pravej strane škrupiny (1-votknutie, 2-obecná väzba, 3- voľný koniec). Grafické zobrazenie deformačno-napät'ovej odozvy je v paneli „Deformačno-napät'ová odozva“. Tlačidlo „Reset“ slúži pre výber nového typu úlohy. Panel „Numerické riešenie“ umožňuje užívateľovi porovnať analytické riešenie posuvu u a napätí $\sigma_{z,t}$ s numerickým riešením.

5.1.1 Příkladné riešenie úlohy typu A:

U každej úlohy aplikácia určí pomocou vstupných parametrov, či sa jedná o dlhú alebo krátku škrupinu, na základe čoho sa bude odvíjať riešenie úlohy. Určenie prebieha porovnaním dĺžky škrupiny L s dĺžkou časti škrupiny, na ktorej sa prejavuje homogénne riešenie posuvu škrupiny L_0 . [8]

Krátka škrupina:

$$L < 2L_0 \tag{5.7}$$

Dlhá škrupina:

$$L \geq 2L_0 \tag{5.8}$$

Vzťah pre výpočet dĺžky časti škrupiny, na ktorej sa prejavuje homogénne riešenie posuvu:

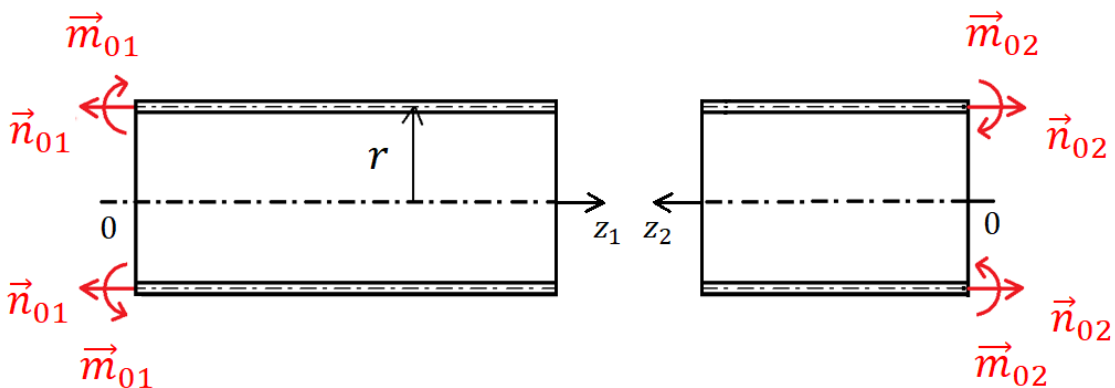
$$L_0 = 3\sqrt{rh} \tag{5.9}$$

Riešenie dlhej škrupiny:

Riešenie dlhej škrupiny spočíva v tom, že sa nerieši ako jeden celok, ale je rozdelená na dve škrupiny. Pre každú z nich vyzerá riešenie posuvov nasledovne:

$$u_1 = e^{-\beta z_1} (C_{1,1} \sin \beta z_1 + C_{2,1} \cos \beta z_1) + u_p \tag{5.10}$$

$$u_2 = e^{-\beta z_2} (C_{1,2} \sin \beta z_2 + C_{2,2} \cos \beta z_2) + u_p \tag{5.11}$$



Obrázok 24: Rozdelenie dlhej škrupiny úlohy typu A

Integračné konštanty $C_{1,1}$ a $C_{2,1}$ sú určené z okrajových podmienok 1. (ľavého) konca škrupiny $z_1 = 0$:

$$m_z = -m_{01} = -B \frac{d^2 u_1}{dz_1^2} \quad (5.12)$$

$$t_{zt} = 0 = -B \frac{d^3 u_1}{dz_1^3} \quad (5.13)$$

Integračné konštanty $C_{1,2}$ a $C_{2,2}$ sú určené z okrajových podmienok 2. (pravého) konca škrupiny $z_2 = 0$:

$$m_z = +m_{02} = -B \frac{d^2 u_2}{dz_2^2} \quad (5.14)$$

$$t_{zt} = 0 = -B \frac{d^3 u_2}{dz_2^3} \quad (5.15)$$

Po dosadení posuvov (5.10; 5.11) do okrajových podmienok (5.12; 5.13; 5.14; 5.15) obdržíme 2x2 rovníc o 2x2 neznámych, riešenie je realizované pomocou príkazu *Solve*. Po vypočítaní posuvov pre obidva konce sa následne dopočítajú natočenia ϑ_1 a ϑ_2 podľa vzťahu pre natočenie (4.35) a momenty m_{z1} , m_{z2} a m_{t1} , m_{t2} podľa vzťahov (4.36; 4.37), kapitola 4.1.1.

Vzťahy pre výpočet líniovej sily n_{t1} a n_{t2} :

$$n_{t1} = \mu n_{01} + Eh \frac{u_1}{r} \quad (5.16)$$

$$n_{t2} = \mu n_{02} + Eh \frac{u_2}{r} \quad (5.17)$$

Napätia nadobúdajú svoje maximálne hodnoty na vnútornej (in) a vonkajšej (out) hrane škrupiny, kapitola 3.1.1. a pre obidva konce škrupiny (1,2) ich vyjadríme nasledovne:

$$\sigma_{t(1,2),in} = \frac{n_{t(1,2)}}{h} - \frac{6m_{t(1,2)}}{h^2} \quad (5.18)$$

$$\sigma_{t(1,2),out} = \frac{n_{t(1,2)}}{h} + \frac{6m_{t(1,2)}}{h^2} \quad (5.19)$$

$$\sigma_{z(1,2),in} = \frac{n_{z(1,2)}}{h} - \frac{6m_{z(1,2)}}{h^2} \quad (5.20)$$

$$\sigma_{z(1,2),out} = \frac{n_{z(1,2)}}{h} + \frac{6m_{z(1,2)}}{h^2} \quad (5.21)$$

Riešenie krátkej škrupiny:

Konce škrupiny sa navzájom ovplyvňujú, rieši sa podľa kapitoly 4.1.1. ako jeden celok.

$$u = e^{-\beta z}(C_1 \sin \beta z + C_2 \cos \beta z) + e^{\beta z}(C_3 \sin \beta z + C_4 \cos \beta z) + u_p \quad (5.22)$$

Určenie integračných konštánt C_1 , C_2 , C_3 a C_4 vychádza z okrajových podmienok:

$z = 0$:

$$m_z = -m_{01} = -B \frac{d^2 u}{dz^2} \quad (5.23)$$

$$t_{zt} = 0 = -B \frac{d^3 u}{dz^3} \quad (5.24)$$

$z = L$:

$$m_z = +m_{02} = -B \frac{d^2 u}{dz^2} \quad (5.25)$$

$$t_{zt} = 0 = -B \frac{d^3 u}{dz^3} \quad (5.26)$$

Po dosadení posuvu (5.22) do okrajových podmienok (5.23; 5.24; 5.25; 5.26) obdržime 4 rovnice o 4 neznámých, riešenie je opäť realizované pomocou príkazu *Solve*. Po získaní integračných konštánt je následne možné dopočítať natočenie ϑ , momenty m_z , m_t a napätí na vonkajšej $\sigma_{(z,t),out}$ a vnútornej $\sigma_{(z,t),in}$ hrane škrupiny podľa vzťahov uvedených v kapitole 4.1.1.

Analytické riešenie jednotlivých typov úloh bolo realizované pomocou MATLAB Help Center [15] a príručky [16].

5.2 Ansys (batch mód)

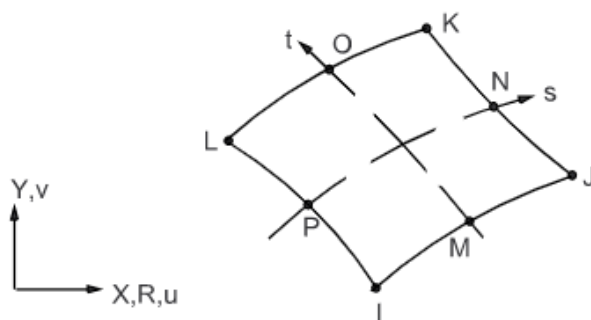
Okrem analytického riešenia deformačno-napät'ovej odozvy mechanicky zaťaženej škrupiny aplikácia umožňuje aj numerické riešenie pomocou metódy konečných prvkov. K tomuto riešeniu je využitý program ANSYS MECHANICAL 2023 R1. Po interakcií s tlačidlom „Numerické riešenie“ sa prevedú funkcie, bez potreby zásahu užívateľa, ktoré realizujú výpočet pre dané parametre úlohy.

Výpočtový nástroj zadané vstupné parametre zapíše do textového súboru *Input_parameters.inp*, ktorý slúži ako zdroj vstupných parametrov pre APDL kód (programový jazyk softvéru ANSYS). Následne sa spustí dávkový súbor *BATCH_skorepina.bat*, obsahujúci príkaz, ktorý na pozadí spustí program ANSYS MECHANICAL pre spracovanie APDL kódu. Výstupom tohto kódu je textový súbor

obsahujúci vypočítané deformácie a napätie, ktorý sa importuje do výpočtového nástroja. Spolu s textovým súborom je vygenerovaný aj dokument *cylindshell.out*, v ktorom je uvedený použitý APDL kód, vrátane vstupných parametrov, ako aj chýb a upozornení v priebehu procesu.

5.2.1 APDL kód pre deformačno-napät'ovú analýzu valcovej škrupiny

Po importovaní vstupných parametrov *Input_parameters.inp* je následne definovaný element, prvok tvoriaci sieť pre diskretizáciu systému pre numerické riešenie. Pretože sa jedná o rotačne symetrickú úlohu, teleso je modelované rezom od osy rotácie ku vonkajšej hrane škrupiny, čo zjednodušuje úlohu na rovinný problém. Z tohto dôvodu je použitý kvadratický štvorcový prvok PLANE183 (Obrázok 23.). Takýto prvok má osem uzlov umiestnených vo svojich rohoch a obsahuje deväť stupňov voľnosti, čo znamená, že pre každý uzol sú definované dva deformačné parametre. Veľkosť elementu je definovaná ako $\frac{h}{6}$. [17]



Obrázok 25: Element PLANE183. Prevzaté z [17]

Tvorba geometrie je realizovaná pomocou príkazu `RECT`, ktorý vytvorí obdĺžnikovú oblasť (rez škrupinou) o dĺžke L a šírke $r \pm \frac{h}{2}$.

Okrajové podmienky boli definované pomocou podmienok `*IF` pre oba konce škrupiny. V programe ANSYS Mechanical sa väzba (zvolená v užívateľskom rozhraní) nahradí obmedzením deformácií (posuvov) v daných lokalitách väzby.

Mechanické zaťaženie je realizované prostredníctvom aplikácie líniových síl a momentov v APDL kóde. Pre aplikáciu líniového momentu m_z bol vytvorený pomocný element MC184 po hrúbke škrupiny.

Pre zobrazenie deformačného a napät'ového výstupu riešenia boli vytvorené cesty príkazom `PATH` na vonkajšej, vnútornej hrane škrupiny a na strednici po celej dĺžke

škrupiny. Vypočítané posuvy u a napätia σ na týchto cestách sa vypíšu do textového súboru, ktorý sa následne importuje do výpočtového nástroja, kde sa porovná numerické riešenie s analytickým. APDL kód bol písaný pomocou ANSYS HELP [18]

```

!-- Vstupné parametre --
/INPUT,'Input_parameters.inp'

-- Definícia elementu --
ET,1,PLANE183 !vyber typu elementu
KEYOPT,1,3,1
ET,2,MPC184 ! Pomocný element
KEYOPT,2,1,1
KEYOPT,2,2,0

!-- Definícia materiálu --
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,E1 !Youngov modul
MPDATA,PRXY,1,,nu1 !Poissonova konštanta

!-- Tvorba geometrie --
RECT,r-t1/2,r+t1/2,0,L
ALLS

!-- Liniový moment z = 0--
N1=NODE(r-t1/2,0,0)
N2=NODE(r,0,0)
N3=NODE(r+t1/2,0,0)
E,N1,N2
E,N2,N3
F,N2,MZ,Mo1 !aplikacia Mz

!-- Radiálna sila z = 0--
NSEL,S,LOC,Y,0
NSEL,R,LOC,X,r
F,ALL,FX,-T01
ALLSEL,ALL

!-- Definície okrajových podmienek ---
*IF,vezba1,EQ,1,then !Votknutie
NSEL,S,LOC,Y,0
D,ALL,ALL,0
ALLSEL,ALL

*ELSEIF,vezba1,EQ,2 !Obecná väzba
NSEL,S,LOC,Y,0 $ NSEL,R,LOC,X,r+t1/2
D,ALL,UX,0
ALLSEL,ALL
*ENDIF

```

A.)

B.)

Obrázok 26: Časť APDL kódu **A.)** import vstupných parametrov, definícia elementu, materiálu, tvorba geometrie **B.)** ukážka realizácie zaťaženia a definície okrajových podmienok

6 Porovnanie analytického a numerického modelu

Nasledujúca kapitola uvedie porovnanie medzi analytickým a numerickým modelom pre danú úlohu. Vstupné parametre a okrajové podmienky sú pre obidva druhy modelov rovnaké.

Analytické riešenie predpokladá malé deformácie, aby platila Kirchhoffova teória, numerický model, však zohľadňuje geometrickú nelinearitu, deformáciu strednicovej plochy. Aby bola vymedzená praktická oblasť použiteľnosti výpočtového nástroja, bude skúmaný rozdiel medzi výstupom analytického a numerického modelu v závislosti od veľkosti daného zaťaženia.

Predpoklad veľkých deformácií v numerickom riešení v programe ANSYS Mechanical je zapnutý pomocou príkazu *NLGEOM,ON*.

Analýza bola realizovaná pomocou priemernej absolútnej percentuálnej odchýlky analytického od numerického riešenia:

$$MAPE = \frac{1}{n} 100\% \sum_{n=1}^1 \left| \frac{X_n - X_a}{X_n} \right| \quad (6.1)$$

Kde X_n predstavuje numerické (skutočné) riešenie a X_a analytické (predpokladané) riešenie posuvu u a napätí $\sigma_{red,out}$, $\sigma_{red,in}$. Veľičina n je počet hodnôt v porovnávanom súbore údajov.

6.1 Analýza úlohy typu B zaťaženej radiálnym tlakom

Pri type úlohy B som pozoroval rozdiel medzi numerickým a analytickým riešením pomocou troch rozdielnych hodnôt radionálneho tlaku.

Materiál škrupiny:

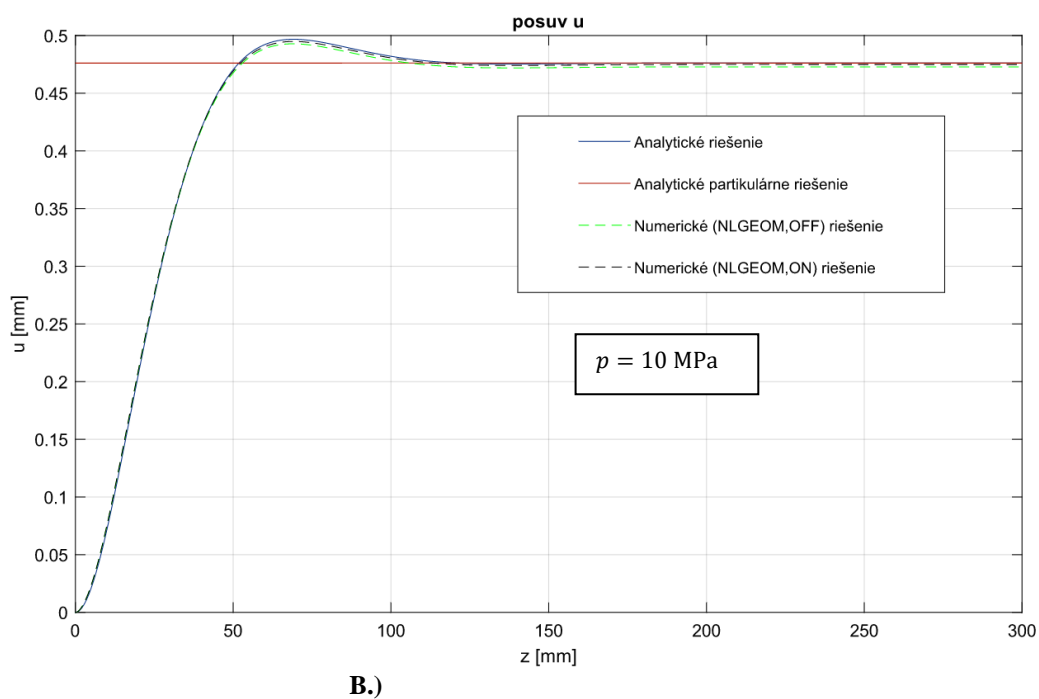
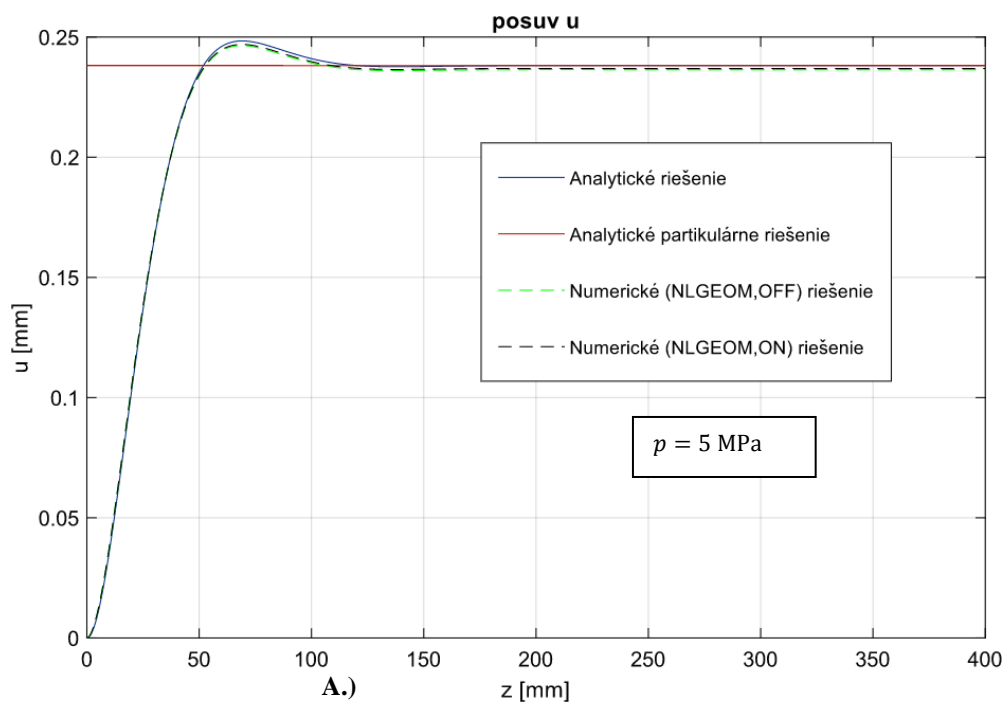
- $E = 210 \text{ GPa}$
- $\mu = 0.3$

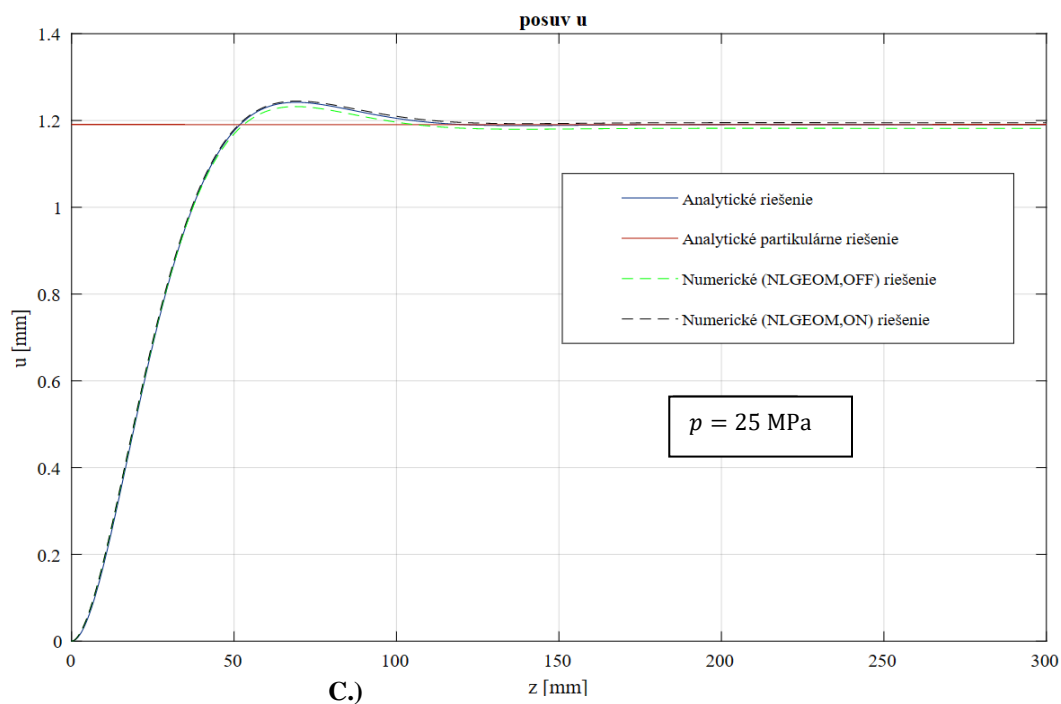
Geometria škrupiny:

- $r = 200 \text{ mm}$
- $h = 4 \text{ mm}$
- $L = 1000 \text{ mm}$

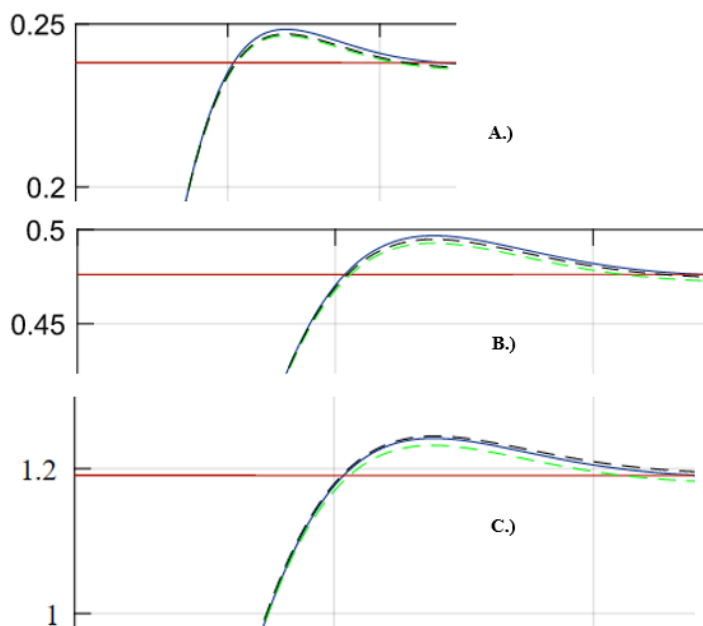
Následne uvedené závislosti zobrazujú analytické riešenie posuvu. V závislostiach sú uvedené aj numerické riešenia, ktoré predpokladajú malú deformáciu (príkaz *NLGEOM,OFF*) súčasne s predpokladom veľkých deformácií (príkaz *NLGEOM,ON*).

Uvedené charakteristiky nie sú zobrazené na celej dĺžke škrupiny z dôvodu nemennej ustálenej hodnoty.



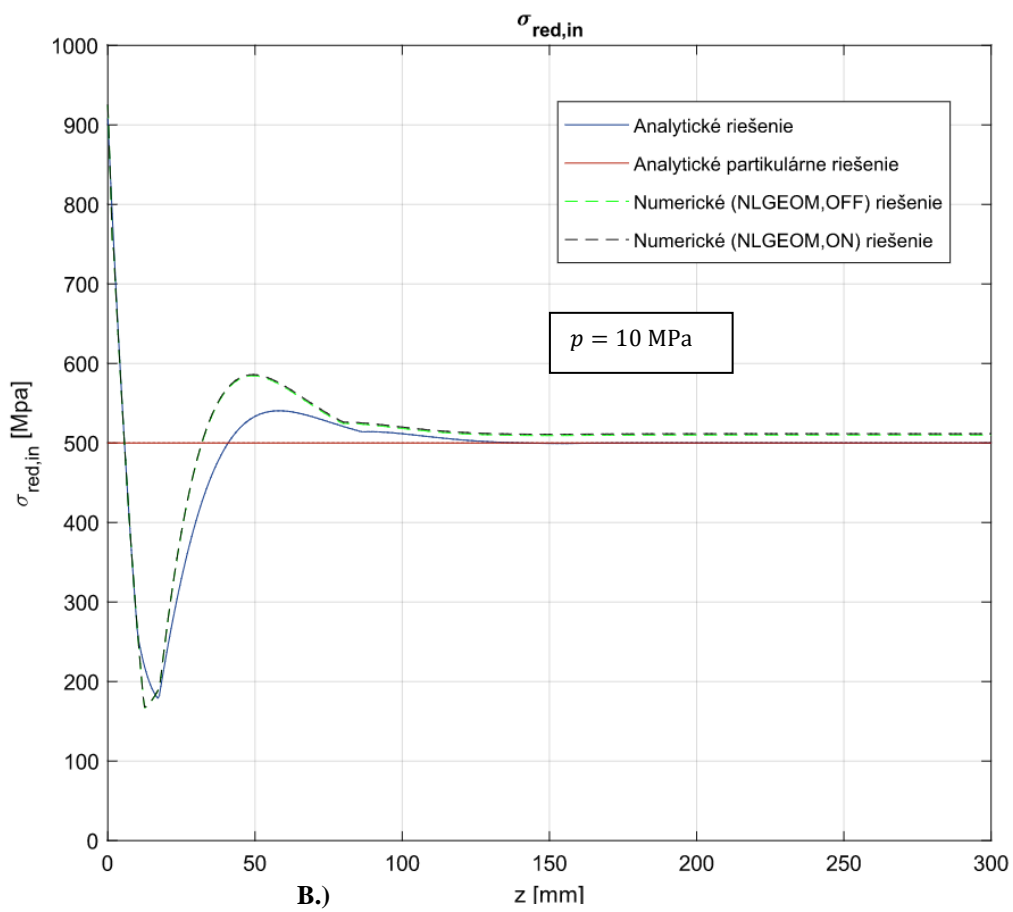
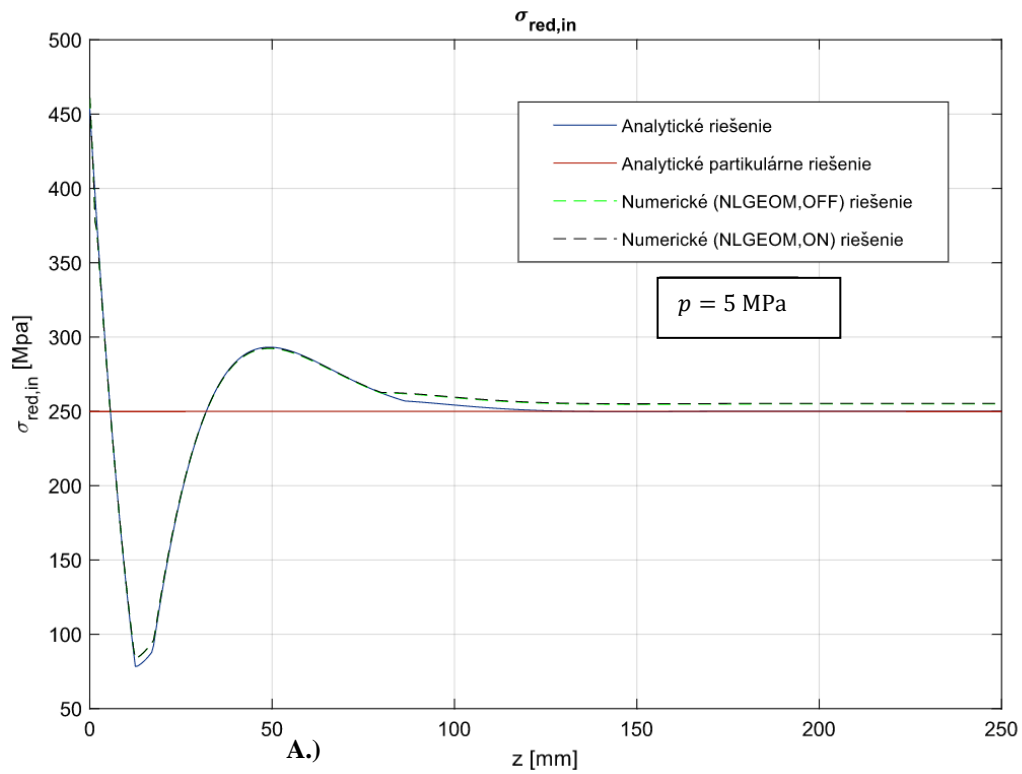


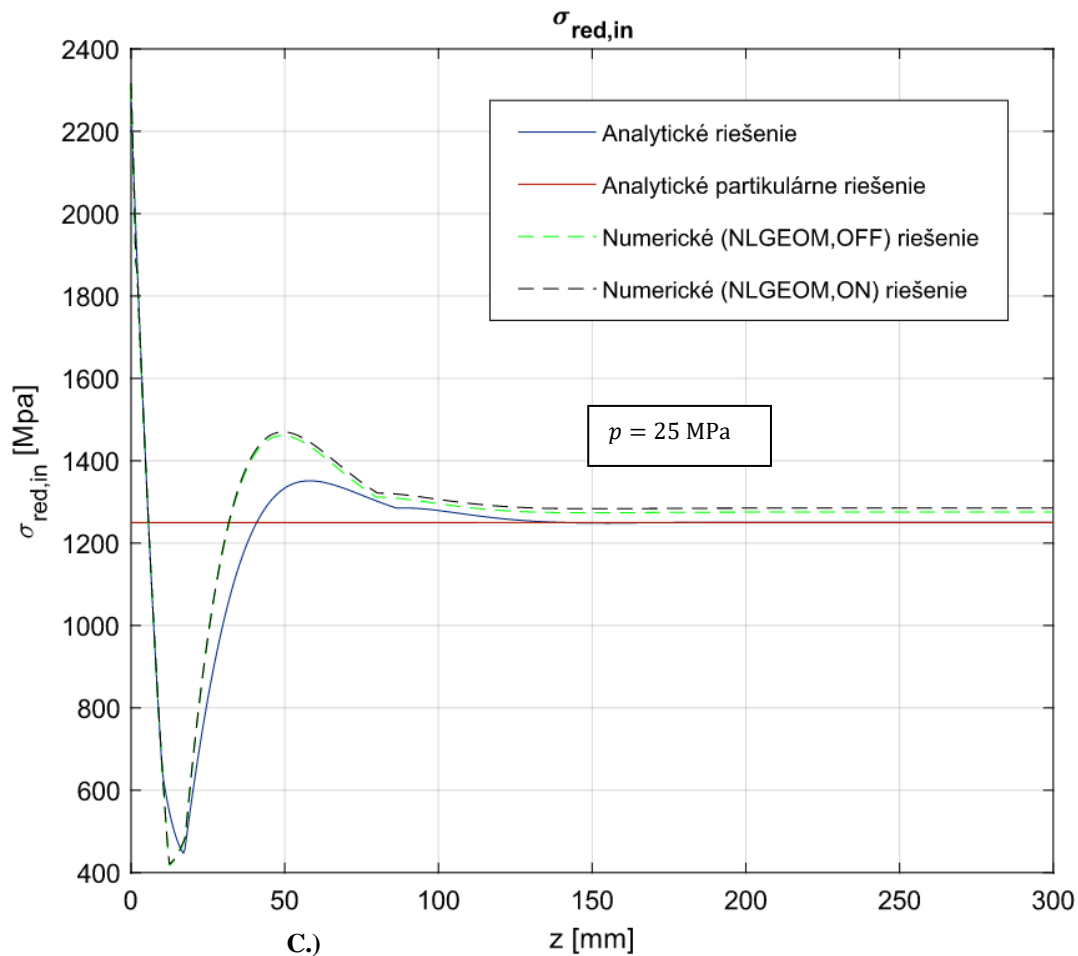
Obrázok 27: Graf závislosti posuvu na strednicovej ploche u na vzdialenosti z pre analytické a numerické riešenia, pre radiálny tlak **A.)** 5 MPa **B.)** 10 MPa **C.)** 25MPa



Obrázok 28: Detaily riešených posuvov, pre radiálny tlak **A.)** 5 MPa **B.)** 10 MPa **C.)** 25MPa

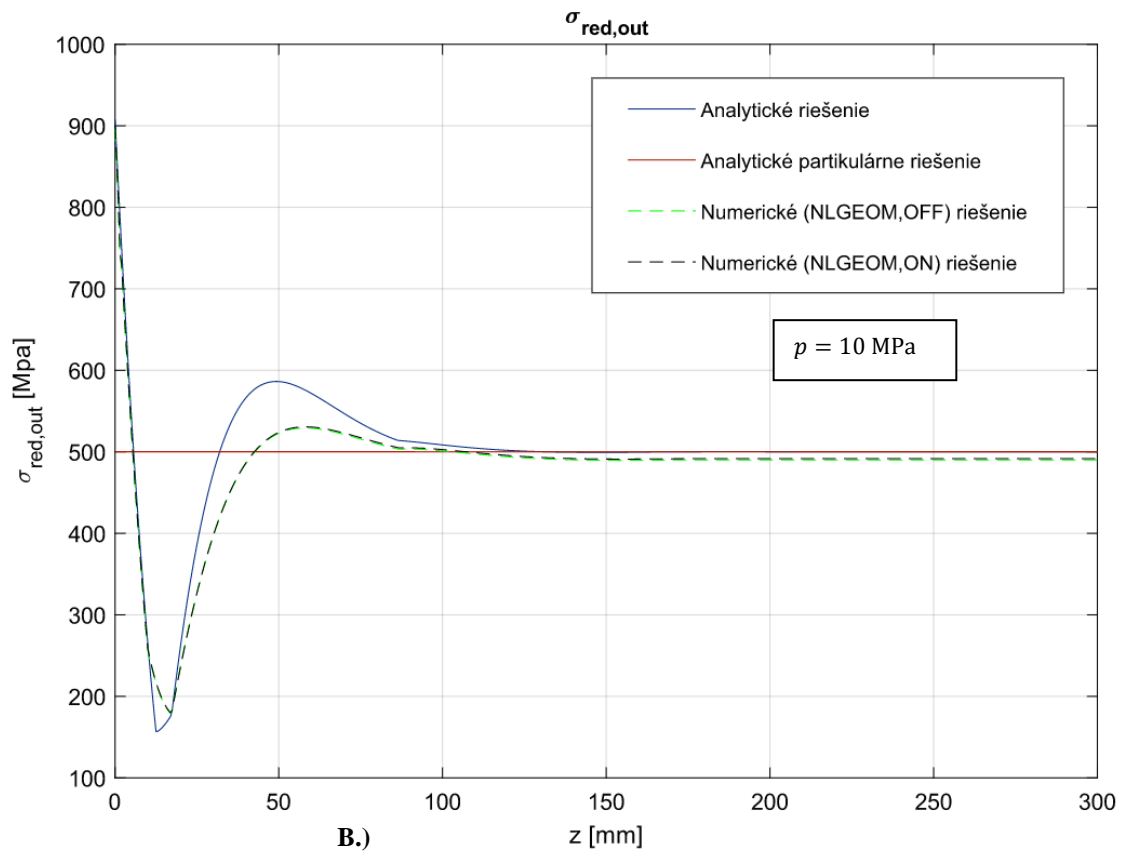
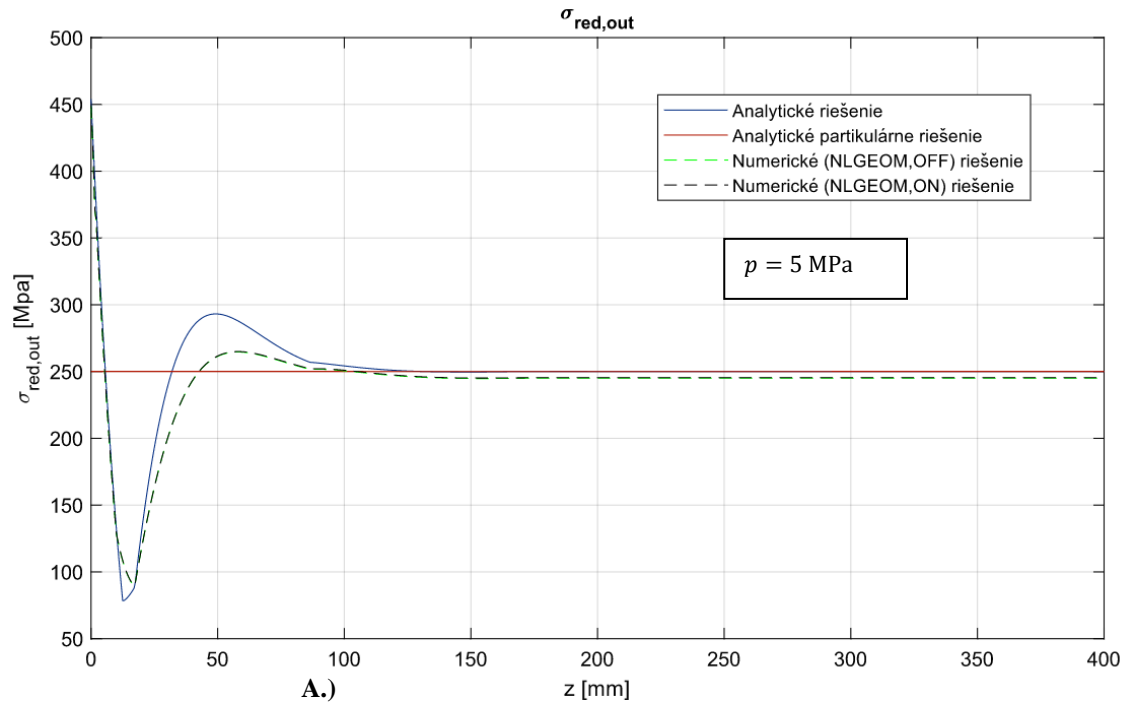
Závislosti posuvov na strednicovej ploche (Obrázok 27.) ukazujú, že so vzrastajúcim zaťažovacím radiálnym tlakom je numerický výsledok v porovnaní s analytickým menší a zároveň sa zvyšuje priemerná percentuálna odchýlka numerického riešenia od analytického.

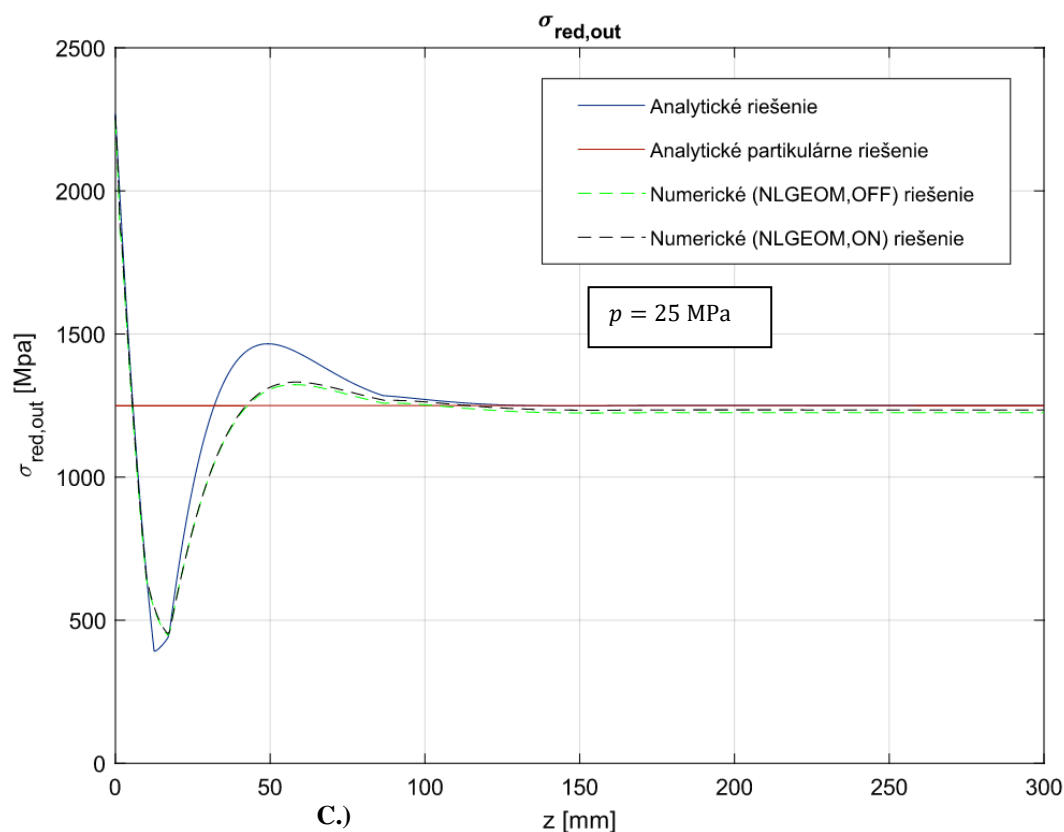




Obrázok 29: Graf závislosti redukovaného napätia na vnútornej hrane škrupiny σ_{red} na vzdialenosti z pre analytické a numerické riešenia, pre radiálny tlak **A.)** 5 MPa **B.)** 10 MPa **C.)** 25MPa

Závislosti redukovaného napätia na vnútornej hrane škrupiny σ_{red} na vzdialenosti z (Obrázok 29.). Pre radiálny tlak $p_r = 5$ MPa je numerické riešenie takmer identické s analytickým, priemerná percentuálna odchýlka je 0.89 %, k najväčšiemu rozdielu dochádza pri približovaní sa výsledkov k ustálenej hodnote. So vzrastajúcim tlakom sa výrazne zvyšuje priemerná percentuálna odchýlka a pre zaťaženie tlakom $p_r = 25$ MPa sa analytické riešenie príliš odlišuje od numerického a prestáva platiť Kirchhoffova teória (väčšie deformácie).

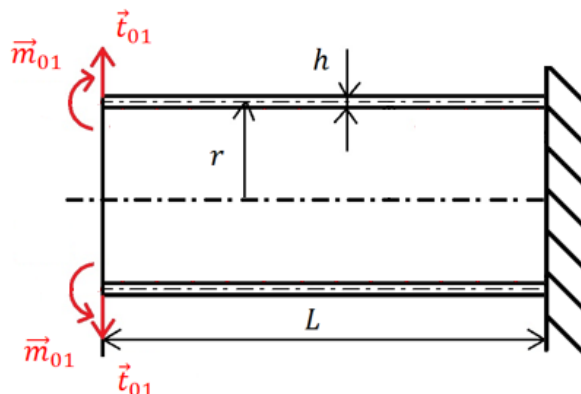




Obrázok 30: Graf závislosti redukovaného napätia na vonkajšej hrane škrupiny σ_{red} na vzdialenosti z pre analytické a numerické riešenia, pre radiálny tlak **A.)** 5 MPa **B.)** 10 MPa **C.)** 25MPa

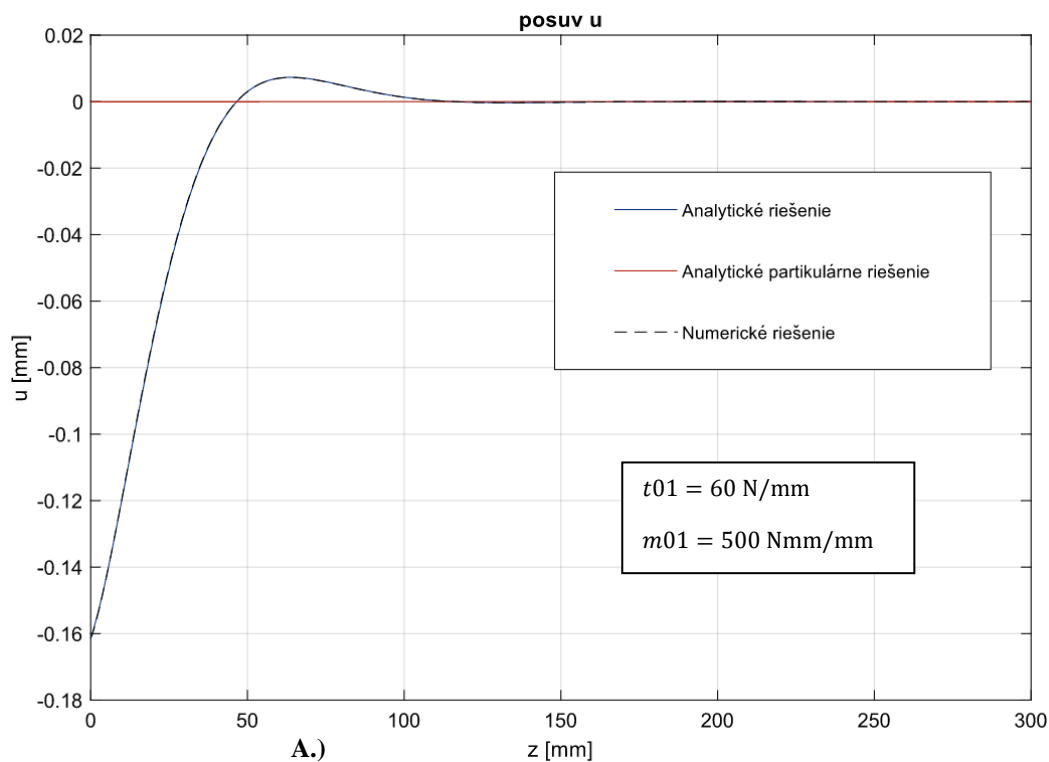
Závislosti redukovaného napätia na vonkajšej hrane škrupiny σ_{red} na vzdialenosti z (Obrázok 30.). Numerické riešenie je pre hodnoty radiálneho tlaku vždy menšie ako analytické, na rozdiel od redukovaného napätia na vnútornej hrane škrupiny, rovnako dochádza k výraznejším percentuálnym odchýlkam.

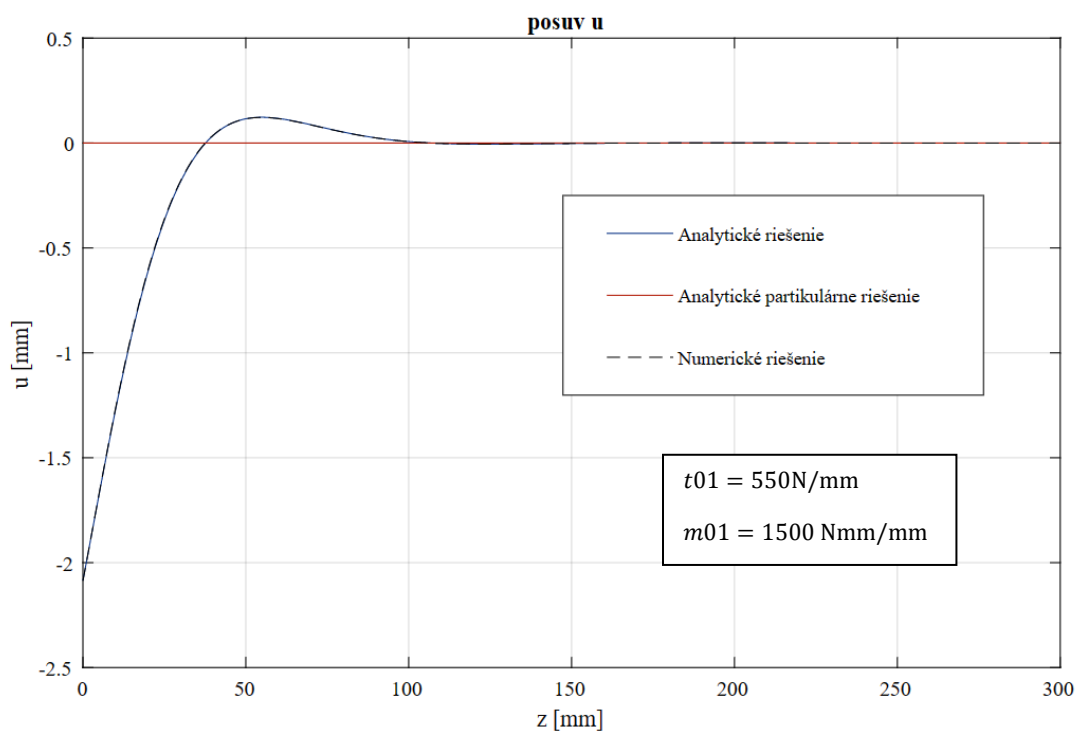
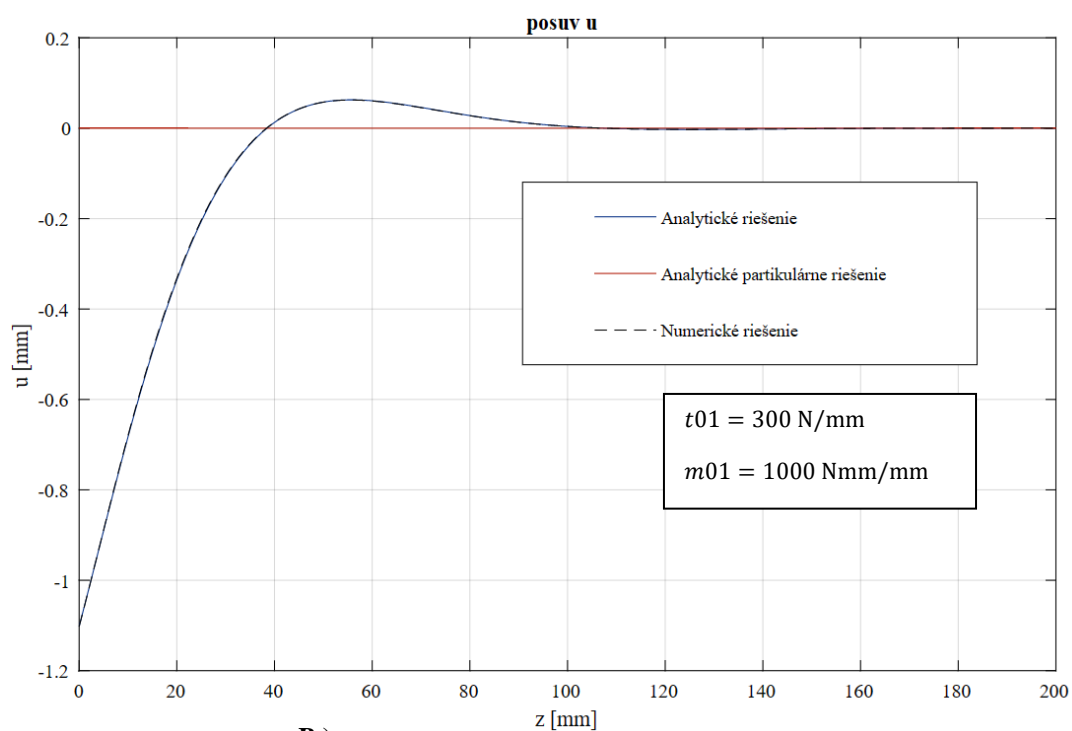
6.2 Analýza úlohy typu D zat'aženej líniovým momentom a radiálnou silou



Obrázok 31: Úloha typu D zat'ažená líniovým momentom a radiálnou silou

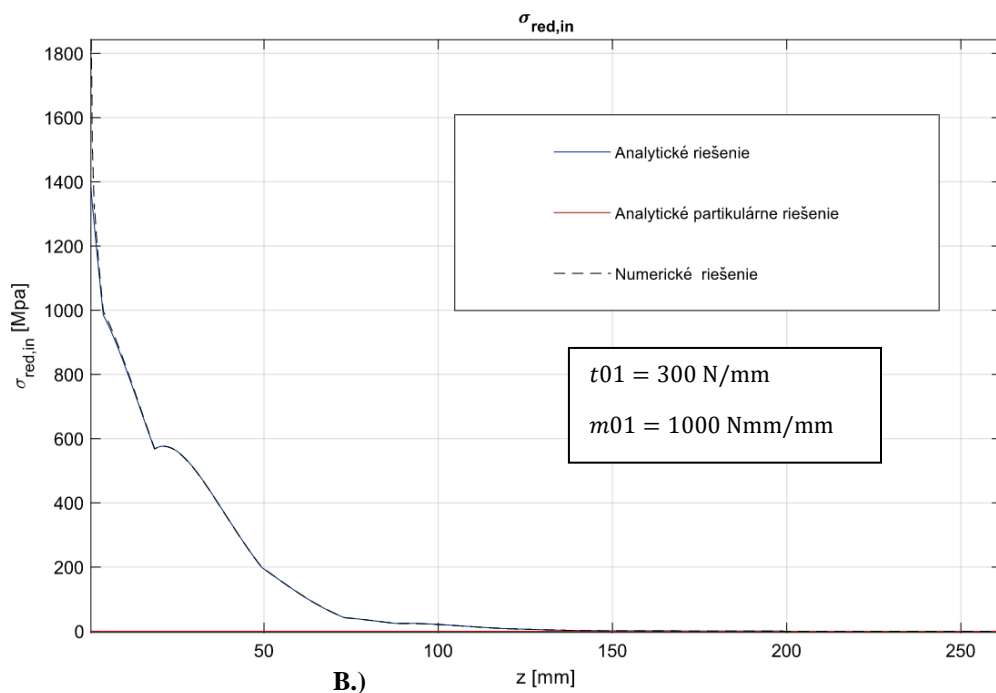
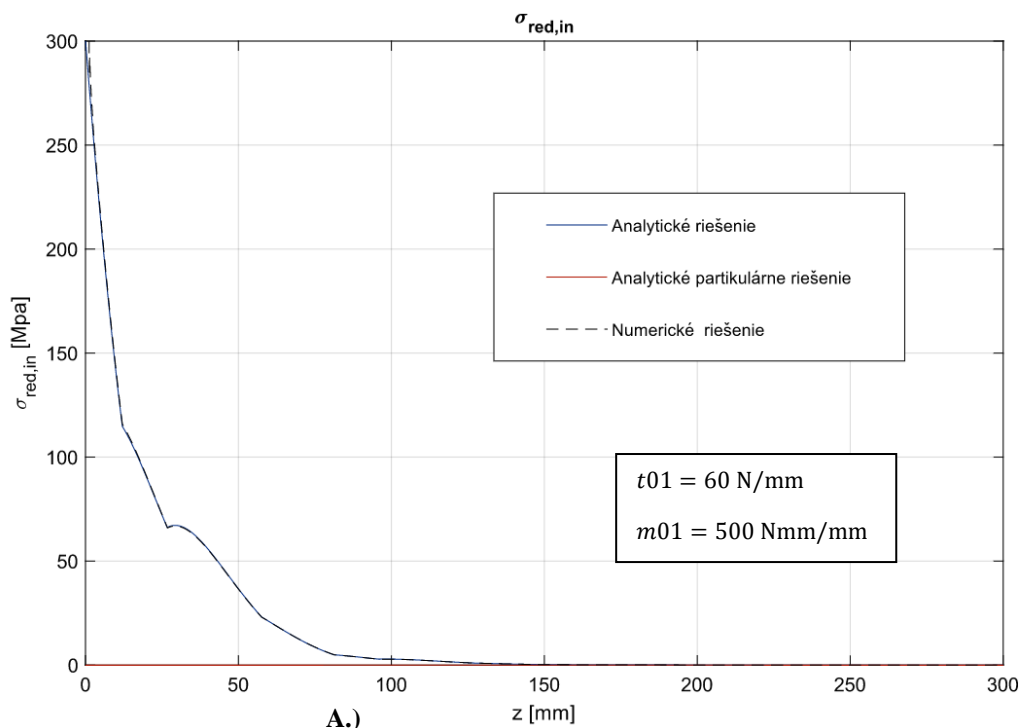
Škrupina je na pravom konci votknutá, na ľavom zat'ažená radiálnou silou \vec{t}_{01} a líniovým momentom \vec{m}_{01} . Vstupné parametre (materiál a geometria škrupiny) sú rovnaké ako v kapitole 6.1. Opäť som pozoroval rozdiel medzi analytickým a numerickým riešením pre tri hodnoty radiálnej sily a líniového momentu.

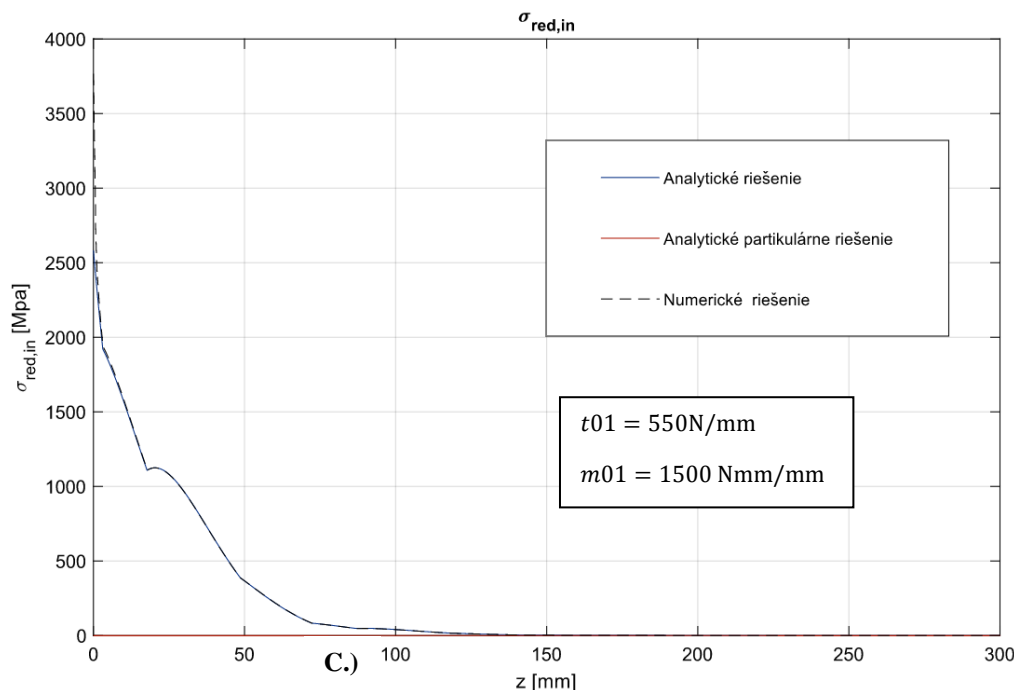




Obrázok 32: Graf závislosti posuvu na strednicovej u na vzdialenosti z pre analytické a numerické riešenia, pre radiálnu silu a líniový moment **A.)** $m_{01} = 500 \text{ Nmm/mm}$ $t_{01} = 60 \text{ N/mm}$ **B.)** $m_{01} = 1000 \text{ Nmm/mm}$ $t_{01} = 300 \text{ N/mm}$ **C.)** $m_{01} = 1500 \text{ Nmm/mm}$ $t_{01} = 550 \text{ N/mm}$

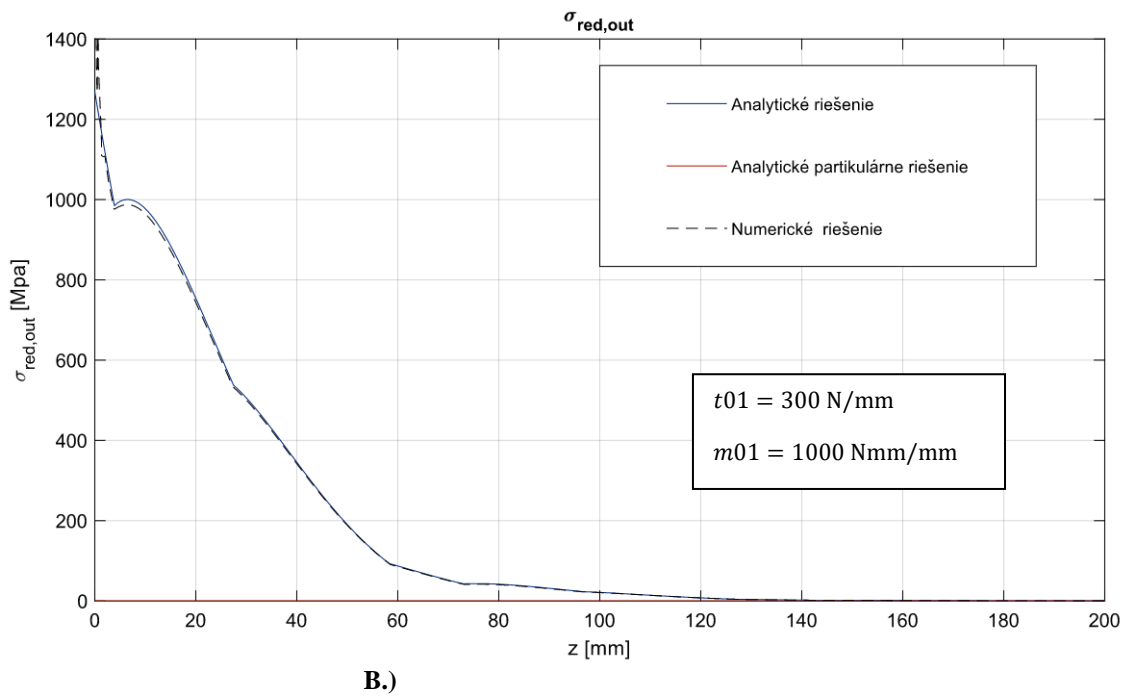
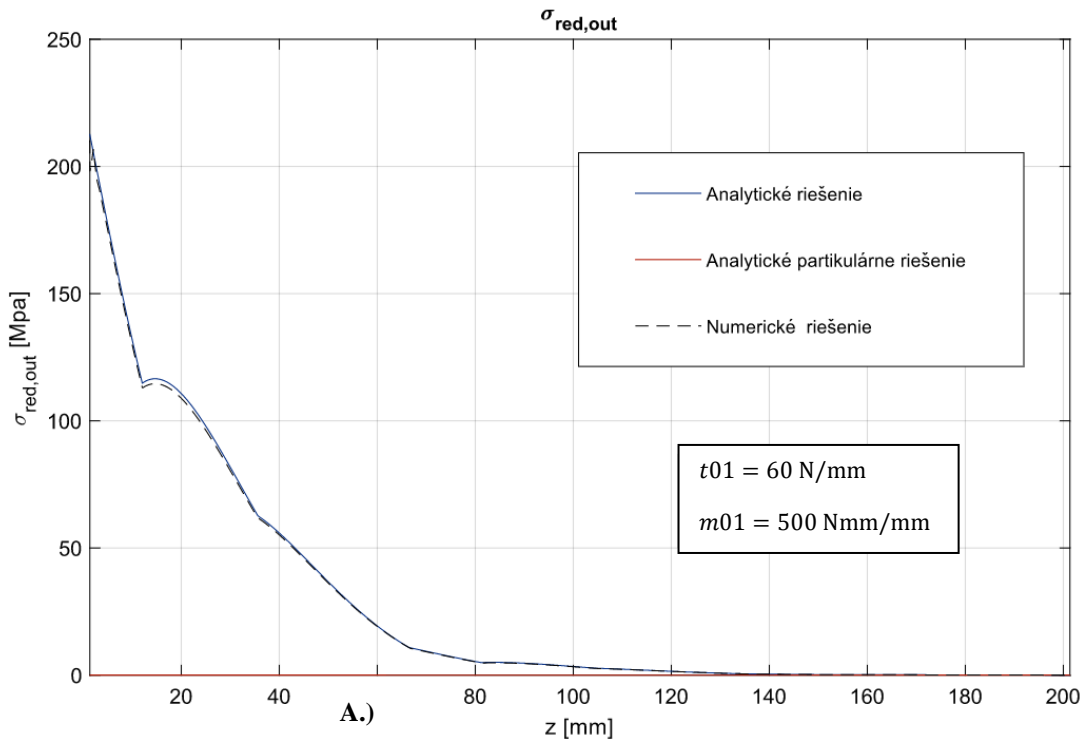
Zo závislosti posuvu na strednicovej ploche u na vzdialenosti z (Obrázok 32.) je rozdiel medzi numerickým a analytickým riešením minimálny pre všetky hodnoty mechanického zaťaženia, priemerná odchýlka je do 0,5 %. Zo zaťaženia sa na posuv prejavuje hlavne radiálna líniová sila t_{01} , pôsobiaca na celom obvode škrupiny. K výrazným rozdielom medzi numerickým a analytickým riešením dochádza pri porovnaní redukovaného napätia σ_{red} .

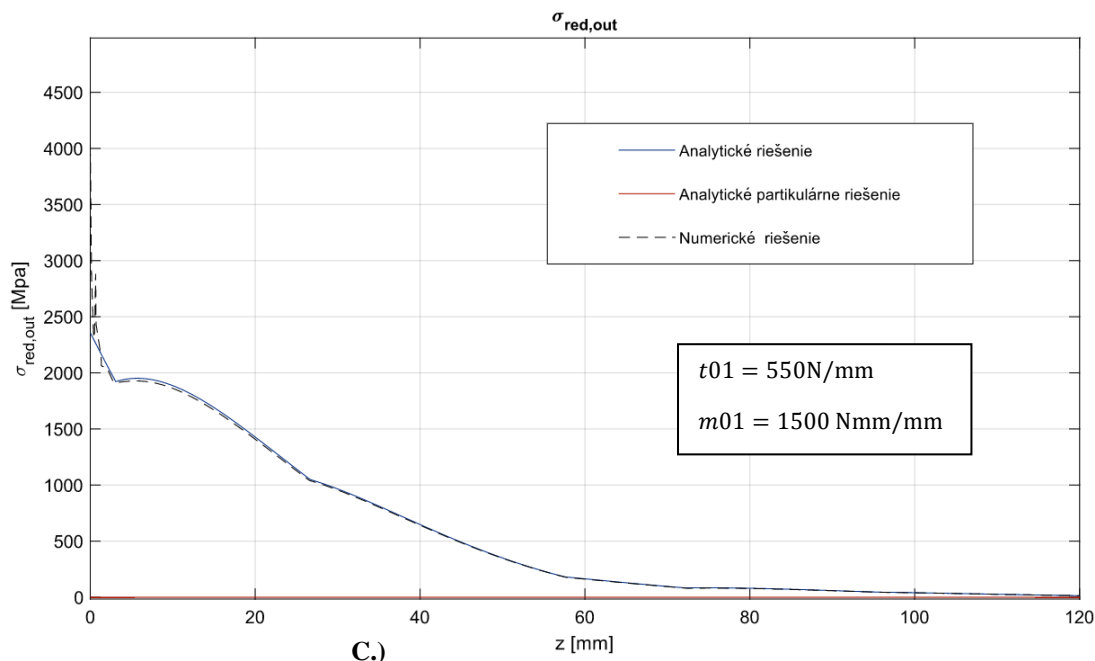




Obrázok 33: Graf závislosti redukovaného napätia na vnútornej hrane škrupiny σ_{red} na vzdialenosti z pre analytické a numerické riešenia, pre radiálnu silu a líniový moment **A.)** $m_{01} = 500 \text{ Nmm/mm}$ $t_{01} = 60 \text{ N/mm}$ **B.)** $m_{01} = 1000 \text{ Nmm/mm}$ $t_{01} = 300 \text{ N/mm}$ **C.)** $m_{01} = 1500 \text{ Nmm/mm}$ $t_{01} = 550 \text{ N/mm}$

Pri zvyšovaní radiálnej sily a líniového momentu dochádza ku skokovej zmene medzi analytickým a numerickým riešením redukovaného napätia na vnútornom povrchu škrupiny (Obrázok 33. B.). Táto skoková zmena v mieste zaťaženia je spôsobená dvojicou síl, vytvorenou líniovým momentom, ktoré pôsobia v jednom uzle. K tomuto silovému pôsobeniu však v realite nedochádza, čím dochádza k numerickej chybe. Ďalším dôvodom je zvolená diskretizácia v APDL kóde. Pre zaťaženie $m_{01} = 500 \text{ Nmm/mm}$ a $t_{01} = 60 \text{ N/mm}$ (Obrázok 33. A.) je skoková zmena zanedbateľná a numerické riešenie odpovedá analytickému. Pri väčších zaťaženiach (Obrázok 33. B; C.) je rozdiel medzi numerickým a analytickým riešením výrazný.





C.)

Obrázok 34: Graf závislosti redukovaného napätia na vonkajšej hrane škrupiny σ_{red} na vzdialenosti z pre analytické a numerické riešenia, pre radiálnu silu a líniový moment **A.)** $m_{01} = 1500 \text{ Nmm/mm}$ $t_{01} = 550 \text{ N/mm}$ **B.)** $m_{01} = 1500 \text{ Nmm/mm}$ $t_{01} = 550 \text{ N/mm}$ **C.)** $m_{01} = 1500 \text{ Nmm/mm}$ $t_{01} = 550 \text{ N/mm}$

Pri zväčšovaní mechanického zaťaženia dochádza v mieste jeho pôsobenia k rozkmitu numerického riešenia redukovaného napätia na vonkajšej hrane škrupiny σ_{red} (Obrázok 34.). Tento jav je spôsobený radiálnou silou t_{01} , ktorá je aplikovaná na samostatný uzol. Pre zaťaženia $m_{01} = 500 \text{ Nmm/mm}$ a $t_{01} = 60 \text{ N/mm}$ (Obrázok 34. A.) je uvedený rozkmit zanedbateľne malý, numerické riešenie odpovedá analytickému. Pri väčších zaťaženiach sa pôsobenie radiálnej sily prejavuje výraznejšie a pre $m_{01} = 1500 \text{ Nmm/mm}$ a $t_{01} = 550 \text{ N/mm}$ (Obrázok 34. C.) je rozdiel medzi numerickým a analytickým riešením natoľko veľký, že prestáva platiť Kirchhoffova teória. Priemerná odchýlka medzi analytickým a numerickým výsledkom je väčšia ako u redukovaného napätia na vnútornej hrane škrupiny, čo je spôsobené aplikáciou zaťaženia na vonkajší povrch škrupiny.

7 Závěr

Hlavným cílem bakalářské práce bylo vytvořit výpočtový nástroj (program) pro řešení deformačno-napětových charakteristik mechanicky zatížené valcové momentové škrupiny. Nástroj byl vytvořen v matematickém softwaru MATLAB R2021b. Součástí výpočtového nástroje je grafické rozhraní realizované pomocí softwaru APP Designer, který je součástí SW MATLAB. Uživatel výpočtového nástroje má na výběr ze čtyř typů úloh. Úlohy A, B a C mají předem dané okrajové podmínky s možností změny velikosti mechanického zatížení. Typ úlohy D nabízí možnost vlastního zadávání okrajových podmínek (definování väzieb, zatížení). Pro každý typ úlohy se následně definuje materiál a geometrie škrupiny. Analytické řešení deformačno-napětové odozvy vychází z predmetu Pružnosť a Pevnosť II vyučovaného na fakulte strojného inžinierstva v Brne.

Výpočtový nástroj umožňuje porovnanie analytického riešenia s numerickým riešením, založeným na metóde konečných prvkov. Numerické riešenie je realizované pomocou softwaru ANSYS Mechanical, ktorý sa spustí po interakcii s tlačidlom „Numerické riešenie“. Prepojenie medzi výpočtovým nástrojom a SW ANSYS je pomocou dávkového súboru a nie je nutná ďalšia účasť používateľa.

Výsledky analytického a numerického riešenia pre daný typ úlohy si užívateľ môže pozrieť prostredníctvom grafických zobrazení deformácií (posuvy, natočenia), napätosti (radiálne, tangenciálne napätia) a momentov (radiálne, tangenciálne) po celej dĺžke škrupiny. Maximálne hodnoty jednotlivých závislostí ako aj bezpečnosť v kritickom mieste, je možné si pozrieť v paneli „Výsledky“.

Bakalárska práca obsahuje aj teoretický úvod ku škrupinám a základné formulácie pre pochopenie ich správania pod mechanickým zaťažením. Je vysvetlená momentová teória škrupín a jej prístup k riešeniu deformačno-napätovej analýze.

Následne bolo porovnané numerické a analytické riešenie na dvoch konkrétnych typoch úloh. V prvom type úlohy bolo porovnanie realizované pre tri hodnoty radiálneho tlaku pri rovnakých vstupných parametroch škrupiny, hrúbka škrupiny $h = 4$ mm, dĺžka škrupiny $L = 1000$ mm. Pri prekročení hodnoty radiálneho tlaku 25 MPa dochádza k porušeniu Kirchhoffovej teórie a analytické riešenie už nie je použiteľné. V druhom type úlohy bola škrupina vystavená pôsobeniu radiálnej sily a líniového momentu, kde pre vyššie hodnoty zaťaženia dochádza k výrazným rozdielom medzi numerickým a analytickým riešením v mieste zaťaženia. Nad hodnotu líniového momentu $m_{01} = 1500$ Nmm/mm a radiálnej sily $t_{01} = 550$ N/mm analytické riešenie nie je presné, dochádza k skokovej zmene a rozkmitu redukovaného napätia pri numerickom riešení. K výrazným rozdielom medzi analytickým modelom a numerickým dochádza pri riešení krátkej škrupiny.

Z porovnaní uvedených vyššie, nejdú definovať prípadné obmedzenia analytického modelu, ale užívateľ si môže pomocou výpočtového nástroja overiť či je Kirchhoffova teória použiteľná pre jeho typ úlohy a vstupné parametre.

8 Citácie

- [1] *What Is Shell Structure | Types of Shell Structure | Applications of Shell Structure | Advantages & Disadvantages of Shell Structures - Civil Scoops* [online]. [vid. 2023-05-21]. Dostupné z: https://civilscoops.com/shell-structure/#1_Cylindrical_Shell
- [2] EDUARD VENTSEL a THEODOR KRAUTHAMMER. *Thin Plates and Shells - Theory, Analysis and Applications*. 1st Edition. New York: Marcel Dekker AG, 2001. ISBN 9780429221316.
- [3] S. TIMOSHENKO. *Theory of Plates and Shells*. New York: McGraw-Hill book company, 1970. ISBN 0-07-064779-8.
- [4] HARRY KRAUS. *Thin Elastic Shells : An Introduction to the Theoretical Foundations and the Analysis of Their Static and Dynamic Behavior*. 1st edition. New York: John Wiley and Sons, 1967. ISBN 9780471507208.
- [5] MEHDI FARSHAD. *Design and Analysis of Shell Structures (Solid Mechanics and Its Applications)*. B.m.: Springer, 1992. ISBN 9789401712279.
- [6] STOKER, J. J. *Differential Geometry* [online]. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc., 1988. ISBN 9781118165461. Dostupné z: doi:10.1002/9781118165461
- [7] *Curved surfaces, shell structures and discrete element assemblies – Studio 9: Architectural Notations* [online]. [vid. 2023-04-28]. Dostupné z: <https://www.studio9.arch.kth.se/2019/03/16/master-thesis-mid-review/>
- [8] EMANUEL ONDRÁČEK, JAN VRBKA, PŘEMYSL JANÍČEK a JIŘÍ BURŠA. *Mechanika těles - Pružnost a pevnost II*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006. ISBN 80-214-3260-8.
- [9] RADIM HALAMA. *Pružnost a pevnost - interaktivní studijní materiál*. B.m.: Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, Západočeská univerzita v Plzni, 2012.
- [10] PŘEMYSL JANÍČEK a ZDENĚK FLORIAN. *Mechanika těles: úlohy z pružnosti a pevnosti I*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2004. ISBN 80-214-2655-1.
- [11] *PRUŽNOST A PEVNOST II*. Podklady k přednáškám, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství.
- [12] ZDENĚK FLORIAN, EMANUEL ONDRÁČEK a KAREL PŘIKRYL. *MECHANIKA TĚLES - STATIKA*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2000. ISBN 9788021424913.

- [13] JINDŘICH PETRUŠKA. *MKP v inženýrských výpočtech*. Brno: Vysoké učení technické v Brně Fakulta strojího inženýrství Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, nedatováno.
- [14] *MATLAB App Designer - MATLAB & Simulink* [online]. [vid. 2023-05-21]. Dostupné z: <https://www.mathworks.com/products/matlab/app-designer.html>
- [15] *MATLAB Documentation* [online]. [vid. 2023-05-25]. Dostupné z: https://www.mathworks.com/help/matlab/index.html?s_tid=hc_panel
- [16] THE MATHWORKS, Inc. *Matlab : the language of technical computing*. Massachusetts : The MathWorks, Inc., 1999.
- [17] *13.183. PLANE183 - 2-D 8-Node Structural Solid* [online]. [vid. 2023-05-18]. Dostupné z: https://www.mm.bme.hu/~gyebro/files/ans_help_v182/ans_thry/thy_el183.html
- [18] ANSYS Help Center. ANSYS [online]. ANSYS, 2020 [cit. 2020-06-19]. Dostupné z: https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/main_page.html
- [19] KOPECKI, Tomasz a Tomasz KOPECKI. Numerical Simulations of Post-Critical Behaviour of Thin-Walled Load-Bearing Structures Applied in Aviation. *Computational and Numerical Simulations* [online]. 2014 [vid. 2023-04-27]. Dostupné z: doi:10.5772/57218
- [20] *What Is a Shell Roof? (with pictures)* [online]. [vid. 2023-04-27]. Dostupné z: <https://www.aboutmechanics.com/what-is-a-shell-roof.htm>

9 Zoznam použitých veličín

Veličina	Symbol	Jednotka
Hrúbka škrupiny	h	[mm]
Polomer škrupiny	r	[mm]
Dĺžka škrupiny	L	[mm]
Vektor obecného napätia	\vec{f}	
Normálové napätie	σ	[MPa]
Šmykové napätie	τ	[MPa]
Tenzor napätia	T_σ	
Deformačný posuv	u	[mm]
Homogénne riešenie posuvu	u_h	[mm]
Partikulárne riešenie posuvu	u_p	[mm]
Dĺžkové pretvorenie	ε	[–]
Uhlové pretvorenie	γ	[–]
Tenzor pretvorenia	T_ε	
Youngov modul pružnosti	E	[MPa]
Poissonova konšanta	μ	[–]
Modul pružnosti v šmyku	G	[MPa]
Laméová konšanta	λ	[MPa]
Natočenie škrupiny	ϑ	[rad]
Líniová posúvajúca sila	\vec{t}_{zt}	[N/mm]
Líniová osová sila	\vec{n}_z	[N/mm]
Tangenciálna líniová sila	\vec{n}_t	[N/mm]
Líniový moment	\vec{m}_z	[Nmm/mm]
Tang. líniový moment	\vec{m}_t	[Nmm/mm]
Z-osový tlak	\vec{p}_z	[MPa]
Radiálny tlak	\vec{p}_r	[MPa]
Osový posuv	w	[mm]
Posúvajúca sila	T_{rz}	[N]
Ohybová tuhosť škrupiny	B	[MPamm ³]

Veličina	Symbol	Jednotka
Pomocná veličina	β	$[\text{mm}^{-1}]$
Tangenciálne napätie	σ_t	[MPa]
Z-osové napätie	σ_z	[MPa]
Integračná konštanta	C	[–]
Potenciálna energia	Π	
Energia napätosti	W	
Značenie objemu telesa	Ω	
Potenciál vonkajšieho zaťaženia	P	
Bazová funkcia	N	[mm]
Matica posuvov	δ	
Globálna matica posuvov	U	
Prvková matica zaťaženia	f	
Globálna matica zaťaženia	F	
Prvková matica tuhosti	k	
Globálna matica tuhosti	K	