



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY  
INSTITUTE OF MATHEMATICS

## ANALÝZA RÖSSLEROVA DYNAMICKÉHO SYSTÉMU

ANALYSIS OF THE RÖSSLER DYNAMICAL SYSTEM

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE  
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

Vendula Nechutová

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

doc. RNDr. Jan Čermák, CSc.

BRNO 2017



# Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav matematiky
Studentka:	<b>Vendula Nechutová</b>
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	<b>doc. RNDr. Jan Čermák, CSc.</b>
Akademický rok:	2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## **Analýza Rösslerova dynamického systému**

### **Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

Rösslerův systém je považován ze formálně nejjednodušší typ dynamického systému, který při jisté volbě vstupních parametrů vykazuje chaotické chování. Jeho analýza byla předmětem mnoha vědeckých prací, a přes formální jednoduchost systému není dosud ukončena. Kromě významného teoretického přínosu se Rösslerův systém ukázal být užitečný také v aplikační oblasti, např. v chemické kinetice.

### **Cíle bakalářské práce:**

1. Popis Rösslerova dynamického systému.
2. Analýza jeho kvalitativních vlastností, zejména stabilního a chaotického chování, popis Rösslerova atraktoru.
3. Testování teoretických výsledků, grafické interpretace.

### **Seznam doporučené literatury:**

HIRSCH, Morris W., Stephen SMALE and Robert L. DEVANEY. Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos. Third edition. Amsterdam: Elsevier, 2013. ISBN 978-0--2-382010-5.

STROGATZ, Steven H. Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering. Reading: Perseus Books, 1994. ISBN 0-201-54344-3.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17

V Brně, dne

L. S.

---

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## **Abstrakt**

Tato práce se zabývá analýzou Rösslerova dynamického systému, speciálně diskuzí stability a typu singulárních bodů. Teoretické výpočty doprovází i vizualizační část ilustrující pojmy bifurkace a chaotické chování. Poslední část této práce je věnována stabilizaci chaotického Rösslerova dynamického systému pomocí zpětně-vazebního řízení.

## **Summary**

In this bachelor thesis, there is analysed Rössler dynamical system, especially stability and type of its fixed points. Theoretical calculations are supported with visualizations illustrating notions of bifurcation and chaotic behaviour. In the last part, stabilization of chaotic Rössler dynamic system by delayed feedback control is discussed.

## **Klíčová slova**

Rösslerův dynamický systém, chaotické chování, stabilita singulárních bodů, stabilizace, zpětně-vazební řízení se zpožděným členem

## **Key words**

Rössler dynamical system, chaotic behaviour, fixed points stability, stabilization, delayed feedback control



## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Analýza Rösslerova dynamického systému jsem vypracovala samostatně s použitím odborné literatury a pramenů, které jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

V Brně dne 26.5.2016

.....

Vendula Nechutová

## **Poděkování**

Chtěla bych poděkovat vedoucímu mé práce Janu Čermákovi za odborné vedení. Dále bych ráda poděkovala mé rodině a přátelům za podporu.

# Obsah

1	Úvod .....	9
2	Přípravná část .....	10
2.1	Dynamický systém .....	10
2.2	Autonomní systém .....	10
2.3	Singulární body .....	10
2.4	Jacobiho matice .....	10
2.5	Typy singulárních bodů .....	11
2.6	Stabilita .....	12
2.7	Routh-Hurwitzovo kritérium .....	12
2.8	Chaos a bifurkace .....	13
2.9	Diferenciální rovnice se zpožděním .....	13
2.10	Eulerova metoda .....	14
3	Analýza Rösslerova dynamického systému .....	15
3.1	Singulární body .....	15
3.2	Typ a stabilita singulárních bodů .....	15
3.2.1	Případ jednoho singulárního bodu .....	16
3.2.2	Routh-Hurwitzovo kritérium .....	16
3.2.3	Bod $S_2$ .....	17
3.2.4	Bod $S_1$ .....	17
4	Vizualizace Rösslerova dynamického systému .....	19
5	Zpětně-vazební řízení .....	21
6	Závěr .....	29
7	Literatura .....	30



# 1 Úvod

Rösslerův dynamický systém je tvořen soustavou tří obyčejných diferenciálních rovnic, z nichž jedna je nelineární. Tento systém byl představen roku 1976 Ottou Rösslerem, čímž navázal na předchozí studie chaosu (např. známý Lorenzův model).

Systém byl prezentován jako nejjednodušší chaotický systém a tím dodnes je. Splňuje totiž minimalisticky podmínky pro vznik chaotického chování. První podmínka je, že rovnice popisující systém musí být minimálně tři, protože nedokážeme vytvořit chaos ve dvourozměrném prostoru. Druhá podmínka je, že systém musí obsahovat aspoň jeden nelineární člen a náš systém obsahuje právě jeden. Pak pro určité volby vstupních parametrů skutečně vzniká chaotické chování.

Chaos lze popsat tak, že při malé změně parametrů může vzniknout nepředvídatelná změna v trajektorii systému, tedy nedokážeme ani přibližně odhadnout, jak bude systém reagovat. Toto téma se v průběhu let pokoušeli odborníci popularizovat a uvedli jednoduché příklady vysvětlující, co chaos znamená. Známý je například efekt motýlích křídel, kdy jen prosté mávnutí křídly motýla (vstupní parametr) může vychýlit systém natolik, že na druhé straně světa způsobí hurikán. Další populární příklad se týká cestování časem, kdy malá změna, kterou v minulosti uděláme, může vyvolat velké změny v současnosti. V dnešní době nachází chaos široké uplatnění ve fyzice, chemii, teorii šifrování apod.

V první kapitole se zabýváme zavedením pojmů a vztahů, které využijeme v průběhu práce. Další část této práce se zabývá singulárními body, jejich stabilitou a typem. V následující kapitole je Rösslerův systém graficky interpretován a jsou zde názorně ilustrovány pojmy bifurkace a chaosu. Obsahem další kapitoly je problém stabilizace nestabilních singulárních bodů v chaotickém systému pomocí zpětně-vazebního řízení. V poslední části krátce shrneme výsledky práce.

## 2 Přípravná část

### 2.1 Dynamický systém

Pro pochopení významu dynamického systému nejdříve vysvětlíme pojem stavový prostor, což je prostor, jehož souřadnice reprezentují jednotlivé fyzikální veličiny např. polohu, rychlost, teplotu, tlak a podobně.

Dynamický systém popisuje dynamické chování soustavy probíhající v čase pomocí matematického modelu, který vytváří pravidla pro pohyb trajektorií ve stavovém prostoru v závislosti na dané veličině. Nejčastěji se jako tato veličina využívá čas a tak tomu bude i v tomto případě, z toho důvodu budu tuto veličinu v následujících textech označovat již pouze jako čas.

Z hlediska matematického popisu jsou dynamické systémy reprezentovány soustavou diferenciálních nebo diferenčních rovnic 1. řádu, neobsahující explicitní závislost na časové proměnné. Tím je vyjádřena skutečnost, že podmínky děje se v čase nemění.

### 2.2 Autonomní systém

Autonomní diferenciální systémy jsou nejvýznamnějším případem dynamických systémů. Lze je zachytit ve tvaru:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}),$$

kde  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  je stavový vektor a  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  je vektor pravých stran, kde  $f_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \Omega \subset \mathbb{R}^n$ .

### 2.3 Singulární body

Singulární bod je konstantním řešením soustavy diferenciálních rovnic  $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ . Toto řešení získáme řešením soustavy rovnic  $\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ , kde  $\mathbf{0}$  je nulový vektor.

### 2.4 Jacobiho matice

Pro určení chování trajektorií v okolí singulárních bodů použijeme *Jacobiho matici*:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix},$$

kteřou vyčíslíme v jednotlivých singulárních bodech. Z vlastních čísel této matice můžeme zjistit typ či stabilitu příslušných singulárních bodů. Vlastní čísla vypočteme jako kořeny  $\lambda$  charakteristické rovnice matice  $\mathbf{J}$ , tedy

$$\det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}) = 0,$$

kde matice  $\mathbf{I}$  je jednotková matice.

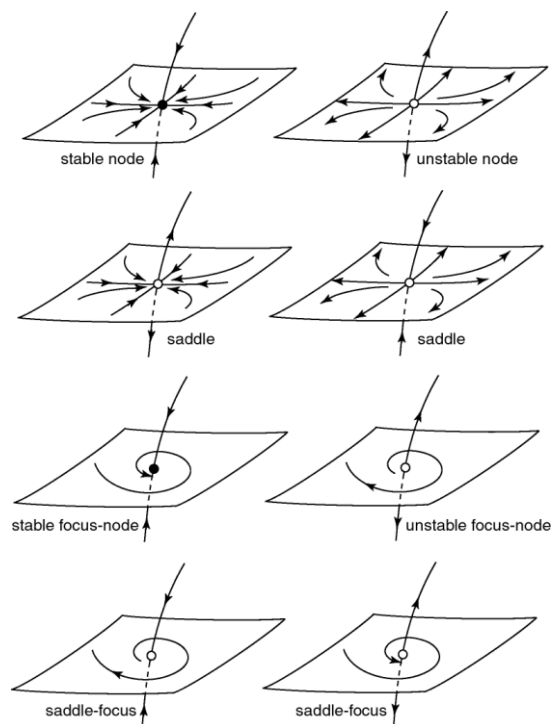
## 2.5 Typy singulárních bodů

Singulární body dělíme na hyperbolické a nehyperbolické, což jednoduše určíme pomocí vlastních čísel Jacobiho matice.

Pokud jsou všechny reálné části vlastních čísel Jacobiho matice nenulové, jedná se o singulární bod hyperbolický, v opačné případě (pokud aspoň jedno vlastní číslo Jacobiho matice má nulovou reálnou část) mluvíme o nehyperbolickém singulárním bodu.

Dále můžeme hyperbolické singulární body rozdělit na typy podle chování trajektorií v okolí těchto bodů, a to opět s využitím vlastních čísel Jacobiho matice. Zaměříme se zde na body v třírozměrném prostoru, protože i Rösslerův systém je vyjádřen třemi diferenciálními rovnicemi.

- V první části uvedeme typy singulárních bodů, pro které jsou vlastní čísla Jacobiho matice reálná
  - Pro první typ jsou všechna vlastní čísla záporná, nebo všechna kladná, tento typ se nazývá **uzel**.
  - U dalšího typu existuje aspoň jedno kladné a aspoň jedno záporné vlastní číslo, tento typ se nazývá **sedlo**.
- V druhé části se budeme věnovat typu singulárních bodů, které nemají všechna vlastní čísla Jacobiho matice reálná, tedy mluvíme o případě, kdy je jedno vlastní číslo reálné a zbývající dvě reálná čísla jsou imaginárně sdružená.
  - Typ, pro který má reálnou část imaginárních čísel stejné znaménko jako reálné vlastní číslo, se nazývá **ohnisko**.
  - Poslední typ, který se pro hyperbolické body ve třech rozměrech klasifikuje, má u reálné části imaginárních čísel opačné znaménko než reálné vlastní číslo, tento typ se nazývá **sedlo-ohnisko**.



Obrázek 2-1 Typy singulárních bodů v třírozměrném prostoru

## 2.6 Stabilita

**Definice** Necht'  $\mathbf{y}^* \in \mathbb{R}^n$  je singulární bod soustavy diferenciálních rovnic  $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ . Singulární bod  $\mathbf{y}^*$  nazveme stabilní, jestliže ke každému okolí  $\sigma$  bodu  $\mathbf{y}^*$  existuje okolí  $\sigma_1 \subseteq \sigma$  bodu  $\mathbf{y}^*$  takové, že každé řešení  $\mathbf{y}(t)$  této rovnice, pro které platí  $\mathbf{y}(0) \in \sigma_1$ , existuje pro všechna  $t > 0$  a splňuje  $\mathbf{y}(t) \in \sigma$  pro všechna  $t > 0$ .

Pokud navíc platí, že

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}^*,$$

nazýváme singulární bod  $\mathbf{y}^*$  asymptoticky stabilním. Není-li  $\mathbf{y}^*$  stabilní, nazýváme ho nestabilní.

Určování stability singulárních bodů u nelineárních systémů by bylo velmi náročné nebýt linearizační věty, kterou lze volně interpretovat takto:

Pokud máme hyperbolický singulární bod, fázový portrét daného systému v okolí tohoto bodu je kvalitativně ekvivalentní s jeho linearizovaným portrétem. Linearizace v nehyperbolických bodech nedává žádnou informaci o chování nelineárních systémů v okolí singulárních bodů, pouze v případě, kdy existuje aspoň jeden kořen charakteristické rovnice příslušné Jacobiho matice s kladnou reálnou částí, můžeme říct, že je bod nestabilní.

Z linearizační věty nám vyplývá, že pokud všechna čísla Jacobiho matice mají zápornou reálnou část, jedná se o asymptoticky stabilní singulární bod. Pokud existuje aspoň jedno vlastní číslo s kladnou reálnou částí, jedná se o nestabilní singulární bod.

U konkrétních typů bodů v třírozměrném prostoru posuzujeme stabilitu následovně.

- Uzel
  - Začněme s variantou, kdy jsou tato vlastní čísla kladná, v tomto případě je *uzel nestabilní*.
  - Druhá možnost je, že jsou všechna vlastní čísla záporná, potom hovoříme o *uzlu stabilním*.
- Sedlo
  - Typ singulárního bodu *sedlo* je vždy *nestabilní*.
- Ohnisko
  - Pokud jsou všechny reálné části vlastních čísel kladné, můžeme hovořit o *ohnisku nestabilním*.
  - V případě, že jsou všechny reálné části vlastních čísel naopak záporné, *ohnisko* je *stabilní*.
- Sedlo-ohnisko
  - Typ singulárního bodu sedlo-ohnisko je vždy nestabilní.

Někdy se body dělí na *propad* a *zdroj*, kdy *zdrojem* můžeme označit *nestabilní uzel* nebo *nestabilní ohnisko* a *propadem* pak nazýváme *stabilní uzel* nebo *stabilní ohnisko*.

## 2.7 Routh-Hurwitzovo kritérium

K určení stability singulárních bodů nám pomůže i Routh-Hurwitzovo kritérium, podle kterého dokážeme posoudit, zda všechny kořeny daného polynomu mají záporné reálné části. Pravidla

aplikujeme na charakteristickou rovnici Jacobiho matice, abychom zjistili povahu vlastních čísel této matice.

Prošetřujeme polynom s konstantními koeficienty

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n.$$

Nyní vytvoříme Hurwitzovy matice, které vypadají následovně:

$$\begin{aligned} H_1 &= (a_1), \\ H_2 &= \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}, \\ H_3 &= \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}, \\ H_l &= \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2l-1} & a_{2l-2} & a_{2l-3} & \dots & a_l \end{pmatrix} \quad \text{pro } l = 4, 5, \dots, n. \end{aligned}$$

V maticích platí, že  $a_k = 0$ , jestliže  $k > l$ , kde  $l$  značí počet řádků matice. Vypočteme determinanty všech těchto matic. Pokud platí

$$\det H_l > 0 \quad \text{pro } l = 1, 2, \dots, n,$$

jsou všechny kořeny polynomu záporné nebo mají záporné reálné části.

## 2.8 Chaos a bifurkace

Chaos je všeobecně vnímán jako zmatek, projev neuspořádanosti či absolutní náhody. My ovšem díky fyzikálním vědám víme, že náhody se v přírodě téměř nevyskytují, protože téměř vše dnes dokážeme popsat matematickými rovnicemi, jejichž vlastnosti je však třeba analyzovat.

V matematicky popsaných systémech lze chaos zavést korektně, jedná se však o matematicky náročnou záležitost, kterou uvádět nebudeme. Bližší informace lze získat například v [11].

Z výpočetního hlediska chaos nastává tehdy, když sledovaný parametr daného systému (tzv. bifurkační parametr) dosáhne určité kritické hodnoty. V obecném smyslu pojmem bifurkace rozumíme ty speciální hodnoty sledovaného parametru, při jejichž dosazení dochází ke kvalitativním změnám fázového portréty.

## 2.9 Diferenciální rovnice se zpožděním

Objevují se při modelování nejrůznějších jevů, kde záleží na hodnotě stavové proměnné nejen v současném, ale i předcházejícím čase. V této práci se tyto rovnice objevují v problému stabilizace Rösslerova systému pomocí zpětně-vazebního řízení. Z matematického hlediska lze popsat příslušný autonomní systém se zpožděním popsat ve tvaru

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}(t - \tau)),$$

kde  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  je stavový vektor,  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  je vektor pravých stran, kde  $f_i: \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \Omega \subset \mathbb{R}^n$  a  $\tau$  je kladná reálná konstanta.

Pojem singulárního bodu pro tento systém zavádíme analogicky jako v případě příslušného systému bez zpoždění. Na podobném principu funguje i linearizační věta. (Princip užití bude vysvětlen v kapitole 5.)

## 2.10 Eulerova metoda

Z důvodu jednoduchosti pro vykreslení Rösslerova dynamického systému použijeme dopřednou Eulerovu metodu. Metodu aplikujeme na soustavu diferenciálních rovnic

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$$

s počátečními podmínkami, které si označíme jako  $\mathbf{x}_0$ . Příslušná formule je tvaru:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h\mathbf{f}(\mathbf{x}_n), n = 0, 1, \dots,$$

kde  $\mathbf{x}_n$  je přibližná hodnota řešení  $\mathbf{y}$  v čase  $t = nh$ . Symbolem  $h$  značíme délku kroku metody.

Na podobném principu funguje Eulerova metoda i pro zpožděné autonomní systémy. Jistým omezením je, že volená délka kroku  $h$  musí respektovat velikost časového zpoždění  $\tau$  (volíme  $h = \frac{\tau}{m}$ , kde  $m$  je počet dílků intervalu délky  $\tau$ ). V opačném případě bychom museli užít interpolace. Podrobněji viz [1].

### 3 Analýza Rösslerova dynamického systému

V této kapitole se budeme zabývat analýzou Rösslerova dynamického systému, který je popsán soustavou následujících diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned}x' &= -y - z, \\y' &= x + ay, \\z' &= b + z(x - c).\end{aligned}\tag{1}$$

#### 3.1 Singulární body

Pro analýzu dynamického systému je důležité nejprve určit singulární body. Ty zjistíme položením derivací rovno nule:

$$\begin{aligned}0 &= -y - z, \\0 &= x + ay, \\0 &= b + z(x - c).\end{aligned}$$

Z první rovnice soustavy dokážeme určit

$$z = -y,$$

z druhé rovnice zjistíme, že

$$x = -ay$$

a dosazením  $x$  do rovnice třetí získáme kvadratickou rovnici

$$0 = ay^2 + cy + b.$$

Díky povaze kvadratické rovnice víme, že dostaneme dva singulární body, které jsou

$$S_1 = \left( \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}, \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \right),\tag{2}$$

$$S_2 = \left( \frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}, \frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \right).\tag{3}$$

Existence těchto dvou bodů je ovšem podmíněná vztahy mezi parametry a to následovně:

- Pro  $c^2 < 4ab$  neexistují singulární body.
- Pro  $c^2 = 4ab$  body  $S_1$  a  $S_2$  splývají, tedy máme právě jeden singulární bod.
- Pro  $c^2 > 4ab$  existují dva singulární body.

#### 3.2 Typ a stabilita singulárních bodů

Pro určení toku v okolí singulárních bodů (2), (3) daný systém linearizujeme, což znamená, že potřebujeme určit Jacobiho matici. Tu získáme výpočtem parciálních derivací jednotlivých funkcí z původního systému rovnic (1). Za proměnné  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (které se v Jacobiho matici objeví

právě kvůli nelinearitě v systému) dosadíme souřadnice toho singulárního bodu, jehož stabilitu prošetřujeme. Obecně tyto souřadnice označíme jako  $x^*$ ,  $y^*$ ,  $z^*$ . Jacobiho matice má tedy tvar:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ z^* & 0 & x^* - c \end{pmatrix}.$$

Pro zjištění stability singulárních bodů určíme vlastní čísla této matice, čehož dosáhneme sestavením charakteristické rovnice  $\det(J - \lambda I) = 0$ , tedy:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ 1 & a - \lambda & 0 \\ z^* & 0 & x^* - c - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Tuto charakteristickou rovnici můžeme upravit:

$$\lambda^3 + (c - x^* - a) \lambda^2 + (ax^* - ac + z^* + 1) \lambda + (c - x^* - az^*) = 0. \quad (4)$$

Nyní za  $x^*$  a  $z^*$  dosadíme souřadnice bodů  $S_1$  nebo  $S_2$  a vyřešíme tuto rovnici. Přímé zjišťování kořenů této rovnice při nevyčíslení konstant je velmi složité (lze využít např. Cardanovy vzorce) a komplikovanost výsledku znemožňuje další analýzu. Stabilitu proto budeme řešit pomocí Routh-Hurwitzova kritéria.

Nejdříve upozorníme na specifický příklad  $c^2 = 4ab$ , o kterém již z výpočtů výše víme, že u takového systému vzniká pouze jeden singulární bod  $S$  a u kterého je určování kořenů jednodušší.

### 3.2.1 Případ jednoho singulárního bodu

Do rovnice (4) dosadíme souřadnice bodu  $S$ :

$$S = \left( \frac{c}{2}, \frac{-c}{2a}, \frac{c}{2a} \right).$$

Poté dostaneme následující rovnici:

$$\lambda^3 + \left( c - \frac{c}{2} - a \right) \lambda^2 + \left( \frac{ac}{2} - ac + \frac{c}{2a} + 1 \right) \lambda + \left( c - \frac{c}{2} - \frac{c}{2} \right) = 0.$$

Po upravení na tvar

$$\lambda^3 + \left( \frac{c}{2} - a \right) \lambda^2 + \left( -\frac{ac}{2} + \frac{c}{2a} + 1 \right) \lambda = 0$$

vidíme, že jedním z kořenů rovnice bude  $\lambda = 0$ , tedy se vždy jedná o nehyperbolický singulární bod. Pokud platí podmínka

$$a - \frac{c}{2} + \sqrt{\left( \frac{c}{2} + a \right)^2 - \frac{2c}{a} - 4} > 0,$$

je bod nestabilní, jinak stabilitu bodu nedokážeme posoudit dle linearizační věty.

### 3.2.2 Routh-Hurwitzovo kritérium

Nyní se vrátíme k určování stability Routh-Hurwitzovým kritériem, nejdříve si vypíšeme Hurwitzovy matice pro náš případ:

$$\mathbf{H}_1 = (a_1) \quad \mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}.$$

Před dosažením našich hodnot nejdříve upravíme příslušné podmínky na determinanty do tvaru nerovností:

$$\begin{aligned} a_1 &> 0, \\ a_1 a_2 - a_3 &> 0, \\ a_1 a_2 a_3 - a_3^2 &> 0. \end{aligned}$$

Třetí nerovnost můžeme upravit:

$$\begin{aligned} a_1 a_2 - a_3 > 0 & \quad \text{pro } a_3 > 0, \\ a_1 a_2 - a_3 < 0 & \quad \text{pro } a_3 < 0. \end{aligned}$$

První nerovnost odpovídá podmínkám uvedeným výše a druhá si s nimi odporuje, z čehož získáme podmínku  $a_3 > 0$ .

Nyní tedy máme následující podmínky:  $a_1, a_3$  jsou kladná reálná čísla a zároveň musí platit

$$a_1 a_2 - a_3 > 0.$$

Po dosažení našich hodnot do těchto podmínek získáme následující vztahy:

$$c - x^* - a > 0, \tag{5}$$

$$c - x^* - az^* > 0, \tag{6}$$

$$(c - x^* - a)(ax^* - ac + z^* + 1) - (c - x^* - az^*) > 0. \tag{7}$$

### 3.2.3 Bod $S_2$

Nejdříve se zaměříme na nerovnici (6), do které dosadíme bod  $S_2$ :

$$c - \frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2} - a \frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} > 0.$$

Po úpravě získáme nerovnici:

$$\sqrt{c^2 - 4ab} < 0.$$

Tato podmínka je nesplněna v případě, kdy existují singulární body, což znamená, že bod  $S_2$  je nestabilní (kdykoliv existuje).

### 3.2.4 Bod $S_I$

Nyní dosadíme do (6) bod  $S_I$ :

$$c - \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2} - a \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} > 0.$$

Po úpravě získáme nerovnost:

$$\sqrt{c^2 - 4ab} > 0.$$

Tato podmínka platí vždy, pokud máme 2 singulární body a neplatí při jednom singulárním bodu.

Nyní bod  $S_I$  dosadíme do zbývajících dvou podmínek (5), (7). Po úpravách dostaneme podmínky stability ve tvaru:

$$c + \sqrt{c^2 - 4ab} - 2a > 0, \quad (8)$$

$$ac(a - c) + 2(a^2b - a + b) + a\sqrt{c^2 - 4ab} \left(a - \frac{c}{2}\right) > 0. \quad (9)$$

Stabilitu v případě dvou nesplývajících singulárních bodů posoudíme pro případ, kdy  $a = b = 0,2$ , což jsou originální hodnoty uvažované v článku [10]. Po dosazení a upravení získáme následující podmínky:

$$c - 0,4 + \sqrt{(c - 0,4)(c + 0,4)} > 0,$$

$$-50c^2 + 10c + 4 + (10 - 25c)\sqrt{(c - 0,4)(c + 0,4)} > 0.$$

První nerovnici dokážeme splnit pro  $c > 0,4$ , ale druhá nemá žádné reálné řešení.

Můžeme tedy říct, že Rösslerův systém při volbě parametrů kdy  $a = b = 0,2$  nemá žádný stabilní singulární bod při libovolném  $c \in (-\infty; -0,4) \cup (0,4; \infty)$ .

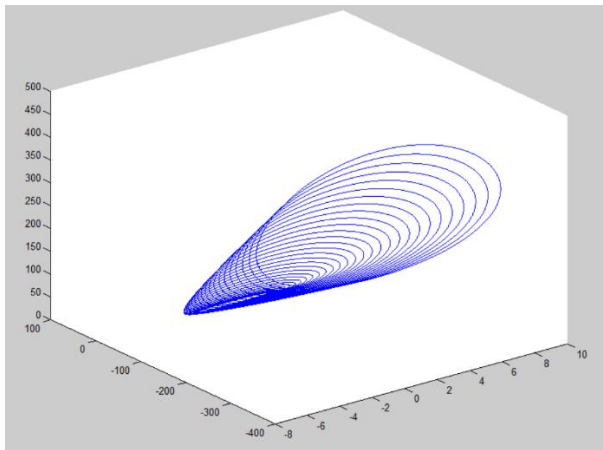
## 4 Vizualizace Rösslerova dynamického systému

Součástí této bakalářské práce je rovněž grafická interpretace výsledků. Ve chvíli, kdy jde o vykreslení řešení, se nemůžeme spoléhat pouze na obecné hodnoty  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , proto zvolíme stálé hodnoty za  $a$  a  $b$  a budeme měnit  $c$ . Pevné hodnoty zvolíme  $a = 0,2$  a  $b = 0,2$ . Podle podmínky pro  $c$  musíme začít u hodnoty  $0,4$  a dále pak budeme parametr zvyšovat.

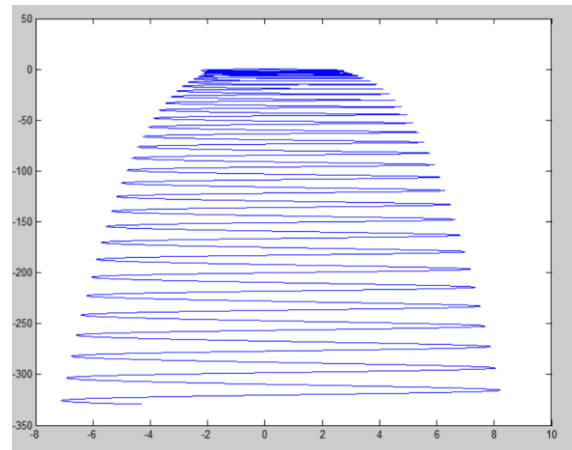
K vykreslení grafů byla zvolena Eulerova metoda, která se snadno aplikuje a zároveň vyhovuje naší problematice. Z možných počátečních podmínek byl vybrán bod  $P_0 = (x_0; y_0; z_0) = (0,5; -2,93; 0,101)$ , protože tento trajektorie vycházející z tohoto bodu vcelku rychle „konvergují“ k výslednému grafu a grafické výsledky jsou tak dobře čitelné.

Pro vykreslování grafů jsem zvolila jak 3D model, tak i dvourozměrný pohled  $xy$ , který nám může často pomoci s představou, v jaké chvíli vzniká v našem modelu bifurkace.

Začneme tedy s nejnižší hodnotou  $c = 0,4$ . V tuto chvíli máme pouze jeden nehyperbolický bod. Můžeme všimnout, že trajektorie se vzdaluje od našeho singulárního bodu ve spirále, která tvoří útvar podobný paraboloidu.

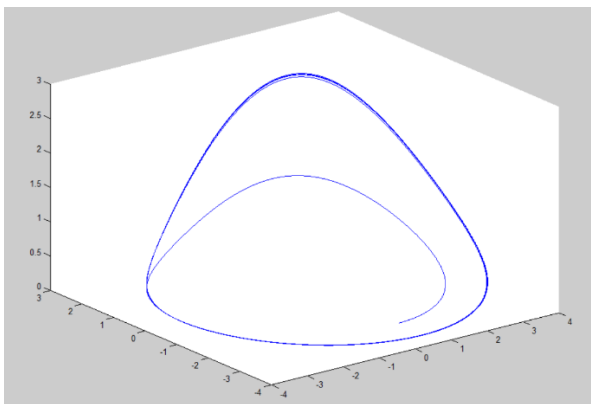


Obrázek 4-1 Graf Rösslerova systému  $c=0,4$  3D

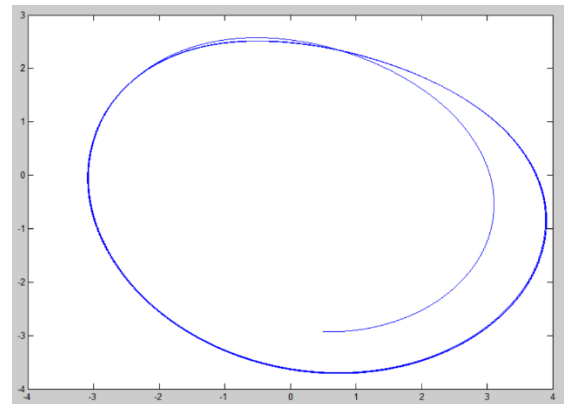


Obrázek 4-2 Graf Rösslerova systému  $c=0,4$  2D

Upozorníme však spíše na grafy „klasičtějšího vzezření“, tedy se dvěma singulárními body. Zvolíme  $c = 2$ . Zde již můžeme vidět, že příslušné trajektorie Rösslerova systému mají tvar uzavřené smyčky. Trajektorie obíhá pravidelně po smyčce.



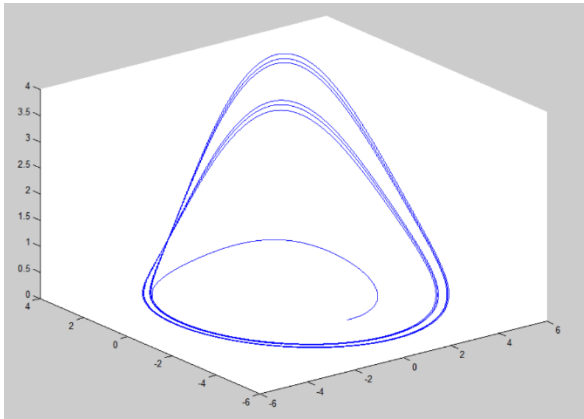
Obrázek 4-3 Graf Rösslerova systému  $c=2$  3D



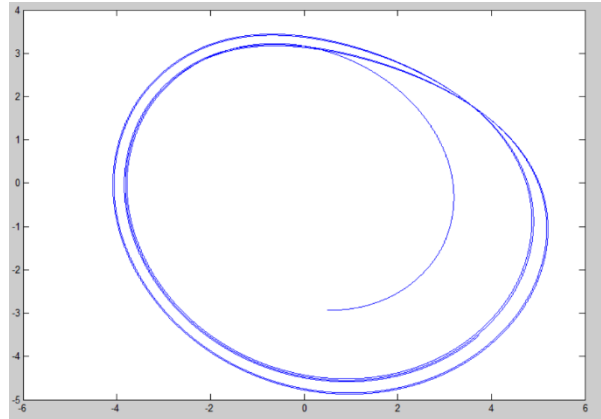
Obrázek 4-4 Graf Rösslerova systému  $c=2$  2D

Při zvyšování parametru  $c$  se dostaneme k hodnotě  $2,7$ , kdy se nám ze smyčky stane dvojitá smyčka, tento stav nazýváme, že nastala první bifurkace. Náš graf je vykreslený pro  $c = 2,8$ ,

kdy už je dvojitá smyčka znatelněji viditelná. Trajektorie pravidelně střídá první a druhou smyčku.

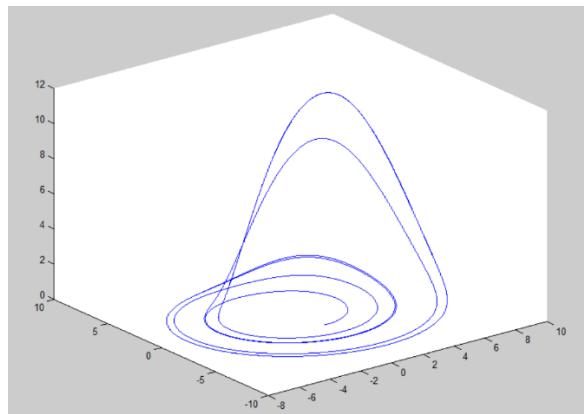


Obrázek 4-5 Graf Rösslerova systému  $c=2,8$  3D

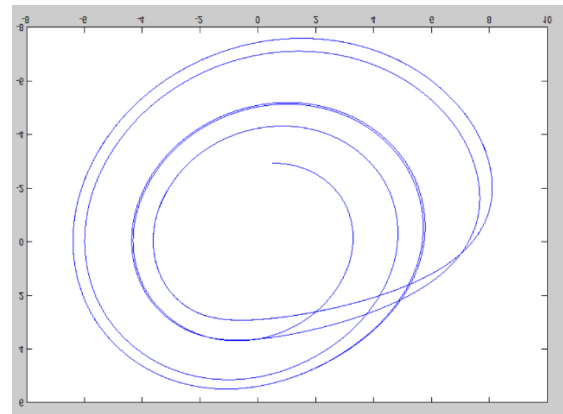


Obrázek 4-6 Graf Rösslerova systému  $c=2,8$  2D

Při hodnotě přibližně  $c = 3,7$ , se smyčka opět zdvojnásobí, nastane druhá bifurkace. Vykreslený graf je pro hodnotu  $c = 4$ . Trajektorie stále pravidelně střídá vzniklé smyčky.

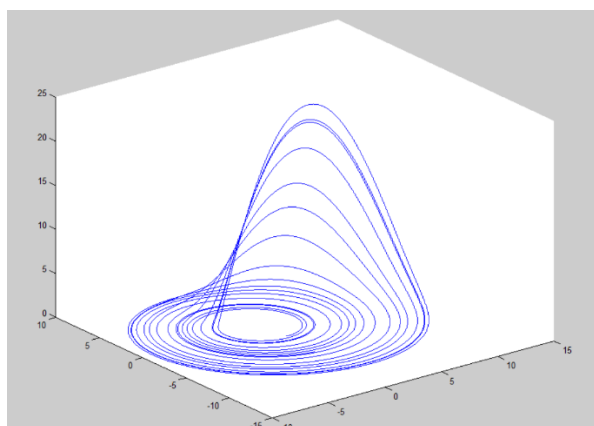


Obrázek 4-7 Graf Rösslerova systému  $c=4$  3D

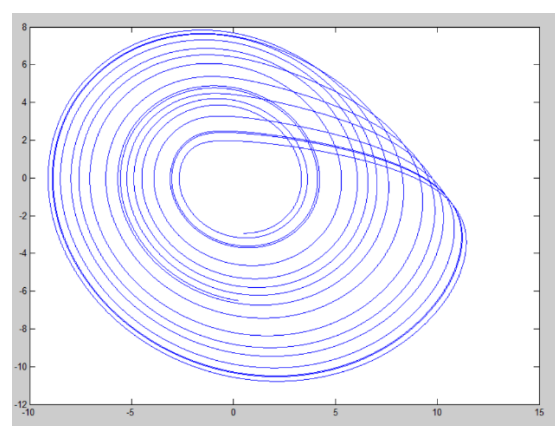


Obrázek 4-8 Graf Rösslerova systému  $c=4$  2D

Po hodnotě asi 4,3 graf neustále znásobuje svou periodu a stává se stále nepřehlednějším. Začít hovořit o chaotickém chování můžeme začít v momentě, kdy  $c$  nabývá přibližné hodnoty 5,7, kdy trajektorie již nedodrží řád ve střídání smyček. Zobrazené grafy jsou pro hodnotu  $c = 5.7$ .



Obrázek 4-9 Graf Rösslerova systému  $c=5,7$  3D



Obrázek 4-10 Graf Rösslerova systému  $c=5,7$  2D

Chaotické chování se projevuje tím, že již nedokážeme ani přibližně odhadnout trajektorii pohybu.

## 5 Zpětně-vazební řízení

V průběhu let proběhlo několik pokusů řídit deterministický chaos tak, aby se z chaotického chování stalo stabilní (ať už periodické či neperiodické) a taktéž i ze stabilních systémů vytvořit chaotické. Popíšeme řízení pomocí zpětné vazby, které nám pomůže stabilizovat singulární bod chaotického Rösslerova systému.

Tato metoda řízení byla představena K. Pyragasem ([9]) a je stále jednou z neúčinnějších metod řízení v nelineárních systémech. Myšlenka řízení je vcelku jednoduchá, systém je ovlivňován silou přímo úměrné rozdílu  $x(t)$  a  $x(t - \tau)$ . Do první rovnice systému (1) nám tím přibude řídicí člen

$$u(t) = K (x(t) - x(t - \tau)).$$

Volbou vhodných hodnot  $K$  a  $\tau$  můžeme dosáhnout stability singulárních bodů Rösslerova systému, a to i v případě, kdy jsou tyto body systému (1) nestabilní.

Systém nyní vypadá následovně:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -y(t) - z(t) + K (x(t - \tau) - x(t)), \\ y'(t) &= x(t) + ay(t), \\ z'(t) &= b + z(t) (x(t) - c). \end{aligned} \quad (10)$$

Všimněme si, že zavedení řídicího členu nemá vliv na počet a souřadnice singulárních bodů. My se zde budeme věnovat stabilitě v bodě

$$\mathbf{S}_1 = (x^*, y^*, z^*) = \left( \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}, \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \right).$$

V další části této kapitoly symboly  $x^*, y^*, z^*$  (na rozdíl od předcházející části) představují přímo souřadnice bodu  $\mathbf{S}_1$ .

Jacobiho matice vzniká podobně jako v původním systému, ale nyní nám vzniknou dvě matice  $\mathbf{J}_1$  a  $\mathbf{J}_2$ . Matice  $\mathbf{J}_1$  vznikne derivováním pravé strany (10) podle proměnných  $x(t), y(t), z(t)$  a matice  $\mathbf{J}_2$  vznikne derivací podle proměnných  $x(t - \tau), y(t - \tau), z(t - \tau)$ . Tak zůstáváme

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} -K & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ z^* & 0 & x^* - c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla nyní zjistíme jako kořeny charakteristické rovnice, která v případě zahrnutí zpoždění je tvaru

$$\det(\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 e^{-\lambda\tau} - \lambda \mathbf{I}) = 0.$$

Po dosazení našich hodnot získáme rovnici:

$$\begin{aligned} &\lambda^3 + (K + c - x^* - a)\lambda^2 + ((c - x^* - a)K + ax^* - ac + z^* + 1)\lambda + \\ &(ax^* - ac)K - az^* + c - x^* - K(\lambda^2 + (c - a - x^*)\lambda + ax^* - ac)e^{-\lambda\tau} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Je-li  $\tau > 0$  pak rovnice (11) není algebraická a má nekonečně (spočetně) mnoho komplexních kořenů.

Dosadíme-li  $\tau = 0$ , získáme charakteristickou rovnici

$$\lambda^3 + (c - x^* - a) \lambda^2 + (ax^* - ac + z^* + 1) \lambda + (c - x^* - az^*) = 0,$$

která zůstává stejná jako u našeho původního systému (4), čímž jsme si ověřili univerzální platnost rovnice i pro případ, kdy je zpoždění nulové. Pro další použití si z dříve určených podmínek stability (8), (9) určíme naopak podmínky nestability singulárního bodu.

Singulární bod je nestabilní, pokud platí

$$\frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2} - a \leq 0$$

nebo

(12)

$$ac(a - c) + 2(a^2b - a + b) + a\sqrt{c^2 - 4ab} \left(a - \frac{c}{2}\right) \leq 0.$$

Pro určení, v kterých bodech je systém stabilní, zjistíme nejdříve hranici stability. Na hranici stability se nacházíme ve chvíli, kdy aspoň jedno vlastní číslo má nulovou reálnou část.

Hledejme kořen rovnice (11) ve tvaru  $\lambda = i\omega$ , kde  $\omega$  je kladné reálné číslo, do (11). Rozdělením této rovnice na reálnou a imaginární část získáme dvě rovnice

$$\begin{aligned} -\omega^3 + (K(c - x^* - a) + ax^* - ac + z^* + 1)\omega = \\ (K\omega^2 - K(ax^* - ac)) \sin(\omega\tau) + K(c - a - x^*)\omega \cos(\omega\tau), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} -(K + c - x^* - a)\omega^2 + (ax^* - ac)K - az^* + c - x^* = \\ (K(ax^* - ac) - K\omega^2) \cos(\omega\tau) + K(c - a - x^*)\omega \sin(\omega\tau). \end{aligned} \quad (14)$$

Obě rovnice umocníme a sečteme. Zavedením substituce  $z = \omega^2$  dostáváme

$$z^3 + c_2z^2 + c_1z + c_0 = 0, \quad (15)$$

kde

$$c_2 = (c - x^* - a)^2 - 2(ax^* - ac + z + 1),$$

$$c_1 = 2K(cz^* + c - x^*z^* - a - c) + a^2x^{*2} - a^2cx^* + az^* + a^2c^2 - ac + z^{*2} + z + 1 + acz^* - ax^*z^* - 2a^2z^* - 2c^2 + 2cx^* + 2ac + 2cx^* - 2x^{*2} - 2ax^*,$$

$$c_0 = 2K(2acx^* - a^2x^*z^* - ax^{*2} - ac^2 + a^2cz^*) + (c - az^* - x^*)^2.$$

Nyní budeme chtít určit, kdy má tento polynom dva kladné kořeny (tento předpoklad je podmínkou dalších úvah). Pro určení těchto podmínek si nejdříve najdeme lokální minimum a maximum funkce

$$h(z) = z^3 + c_2z^2 + c_1z + c_0.$$

Stacionární body určíme jako kořeny

$$h'(z) = 3z^2 + 2c_2z + c_1 = 0$$

Tato rovnice má dva reálné kořeny jestliže  $c_2^2 > 3c_1$  tvaru

$$z_1^* = \frac{-c_2 + \sqrt{c_2^2 - 3c_1}}{3},$$

$$z_2^* = \frac{-c_2 - \sqrt{c_2^2 - 3c_1}}{3}.$$

Předpoklady pro existenci dvou kladných reálných kořenů rovnice (15) jsou následující:

$$z_1^* > 0, \quad (16)$$

$$h(z_1^*) < 0, \quad (17)$$

$$c_0 > 0. \quad (18)$$

Podmínky (16), (17) týkající se lokálního minima  $z_1^*$  jsou dostatečné pro určení existence jednoho reálného kladného kořenu (toto si lze jednoduše představit vykreslením všeobecného grafu kubické funkce). Nerovnost (18) podmiňuje existenci dvou takovýchto kořenů.

Nyní můžeme určit kořeny kubického polynomu (15). Kladné kořeny budeme označovat  $z_1$  a  $z_2$ , přičemž  $z_1 < z_2$ . Kořeny převedeme zpět na  $\omega_k = \sqrt{z_k}$ .

Ve chvíli, kdy máme vypočteno  $\omega$ , budeme chtít určit i hodnotu  $\tau$ . Tu můžeme určit z rovnic (13), (14), kde se  $\tau$  vyskytuje pouze v goniometrických členech, které z rovnic vyjádříme následovně:

$$\sin(\omega\tau) = \frac{-\omega^5 + (c^2 + x^2 + a^2 + 2cx + z + 1)\omega^3 + U\omega}{K((c - a - x^*)^2\omega^2 + (ax^* - ac - \omega^2)^2)},$$

$$\cos(\omega\tau) = \frac{K\omega^4 + V\omega^2 + (ax^* - ac)^2K + (c - az^* - x^*)(ax^* - ac)}{K(\omega^4 + ((x^* - c)^2 + a^2)\omega^2 + (ax^* - ac)^2)},$$

kde

$$U = (c - x^* - a)(c - x^* - az^*) - (ax^* - ac)(ax^* - ac + z^* + 1),$$

$$V = (K((x^* - c)^2 + a^2) + cz^* - x^*z^* - a).$$

Vyjádřením  $\tau$  z těchto rovnic dostaneme:

$$\tau_k^{(j)} = \frac{1}{\omega_k} (\arccos(P) + 2j\pi) \quad \text{pro } Q \geq 0, \quad (19)$$

$$\tau_k^{(j)} = \frac{1}{\omega_k} (2\pi - \arccos(P) + 2j\pi) \quad \text{pro } Q < 0, \quad (20)$$

$$\text{pro } k = 1, 2; j = 0, 1, 2, \dots,$$

kde

$$P = \frac{K\omega^4 + V\omega^2 + (ax^* - ac)^2K + (c - az^* - x^*)(ax^* - ac)}{K(\omega^4 + ((x^* - c)^2 + a^2)\omega^2 + (ax^* - ac)^2)},$$

$$Q = \frac{-\omega^5 + (c^2 + x^2 + a^2 + 2cx + z + 1)\omega^3 + U\omega}{K((c - a - x^*)^2\omega^2 + (ax^* - ac - \omega^2)^2)}.$$

Potom můžeme vidět, že pro  $\tau = \tau_k^{(j)}$  ( $k = 1, 2; j = 0, 1, 2 \dots$ ) má rovnice (11) dva ryze imaginární kořeny  $\pm i\omega$  a všechny zbývající kořeny mají nenulovou reálnou část.

Položme nyní  $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) + i\omega(\tau)$ . Kořeny  $\lambda$  rovnice (11) tedy budeme vyšetřovat v závislosti na měnícím se  $\tau$ . Pro ryze imaginární kořeny této rovnice platí  $\alpha(\tau_k^{(j)}) = 0$ ;  $\omega(\tau_k^{(j)}) = \omega_k$  pro  $k = 1, 2; j = 0, 1, 2 \dots$

Zásadní otázkou je určení, zda při  $\tau = \tau_k^{(j)}$  ( $k = 1, 2; j = 0, 1, 2 \dots$ ) se skutečně mění forma stability a to v jakém smyslu.

**Věta 4.1** Pokud platí podmínky (16), (17), (18), potom  $\alpha'(\tau_1^{(j)}) < 0$  a  $\alpha'(\tau_2^{(j)}) > 0$  pro  $j = 0, 1, 2 \dots$

*Důkaz:* Nejdříve pro zjednodušení zavedeme substituci

$$\begin{aligned} a_2 &= K + c + x^*, \\ a_1 &= (c - x^* - a)K + ax^* - ac + z^* + 1, \\ a_0 &= (ax^* - ac)K - az^* + c - x^*, \\ b_1 &= c - a - x^*, \\ b_0 &= ax^* - ac. \end{aligned}$$

Rovnice (11) je pak tvaru

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 - K(\lambda^2 + b_1\lambda + b_0)e^{-\lambda\tau} = 0. \quad (21)$$

Potřebujeme získat znaménko  $\alpha'(\tau)$ , což je reálná část  $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) + i\omega(\tau)$ . Postupujeme dle následující úvahy: Pokusíme se určit znaménko derivace  $\alpha$  podle  $\tau$ , tedy

$$\text{sign}\left(\frac{d\alpha}{d\tau}\right) = \text{sign}\left(\text{Re}\frac{d\lambda}{d\tau}\right).$$

Vztah (21) chápeme jako funkci danou implicitně, tedy užitím příslušných vztahů získáváme:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{d\tau} &= -\frac{\lambda K(\lambda^2 + b_1\lambda + b_0)e^{-\lambda\tau}}{3\lambda^2 + 2a_2\lambda + a_1 + \tau K(\lambda^2 + b_1\lambda + b_0)e^{-\lambda\tau} - K(2\lambda + b_1)}, \\ e^{-\lambda\tau} &= \frac{\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0}{K(\lambda^2 + b_1\lambda + b_0)}. \end{aligned}$$

Protože

$$\text{sign}\left(\text{Re}\frac{d\lambda}{d\tau}\right) = \text{sign}\left(\text{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}\right),$$

Stačí určit znaménko  $\text{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}$ . Po úpravách a dosazení  $e^{-\lambda\tau}$  dostáváme:

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = -\frac{3\lambda^2 + 2a_2\lambda + a_1}{\lambda(\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0)} + \frac{2\lambda + b_1}{\lambda(\lambda^2 + b_1\lambda + b_0)} - \frac{\tau}{\lambda}.$$

Dosadíme  $\lambda = \omega i$ , což odpovídá našim zvoleným ryze imaginárním bodům na hranici stability. Ze vzniklého vzorce určíme reálnou část a získáme

$$\text{sign}\left(\frac{d\alpha}{d\tau}\right) = \text{sign}\left(\frac{-2\omega^2 + 2b_0 - b_1^2}{\omega^4 + (b_1^2 - 2b_0)\omega^2 + b_0^2} - \frac{-3\omega^4 + 2(2a_1 - a_2^2)\omega^2 - a_1^2 + 2a_0a_2}{\omega^6 + (a_2^2 - 2a_1)\omega^4 + (a_1^2 - 2a_0a_2)\omega^2 + a_0^2}\right).$$

Po úpravách zjistíme

$$\text{sign}\left(\frac{d\alpha}{d\tau}\right) = \text{sign}\left(\frac{z_k}{K^2 b_1^2 \omega^4 + K^2 (b_0 \omega - \omega^3)} h'(z)\right),$$

kde derivaci vyčíslujeme v hodnotách  $\tau = \tau_k^{(j)}$ .

Nyní vidíme, že pro  $z_k > 0$  má  $\alpha'(\tau_k^{(j)})$  stejné znaménko jako  $h'(z_k)$ . Z této závislosti již jednoduše odvodíme větu 4.1.

**Věta 4.2** Jsou-li splněny podmínky (12), (16), (17), (18), potom pro singulární bod  $\mathbf{S}_1$  systému (8) užitím vztahů (19), (20) platí:

- 1) Pokud  $\tau_2^{(0)} \leq \tau_1^{(0)}$ , potom je zmíněný singulární bod nestabilní pro všechna  $\tau \geq 0$ .
- 2) Pokud  $\tau_2^{(0)} > \tau_1^{(0)}$ , potom existuje  $m \in \mathbb{N}$  takové, že  $\tau_1^{(0)} < \tau_2^{(0)} < \tau_1^{(1)} < \tau_2^{(1)} \dots \tau_1^{(m)} < \tau_2^{(m)} < \tau_2^{(m+1)} < \tau_1^{(m+1)}$ , a zkoumaný singulární bod je nestabilní pro  $\tau \in \langle 0, \tau_1^{(0)} \rangle \cup \bigcup_{l=1}^m (\tau_2^{(l-1)}, \tau_1^{(l)}) \cup (\tau_2^{(m)}, \infty)$  a asymptoticky stabilní pro  $\bigcup_{l=0}^m (\tau_1^{(l)}, \tau_2^{(l)})$ .

Pokud si představíme řešení v komplexní rovině ve výchozí situaci, kde  $\tau = 0$ , máme jedno reálné číslo v levé části komplexní roviny a dvě komplexně sdružená čísla v pravé části. Při nenulovém  $\tau$  má rovnice (11) nekonečně mnoho kořenů. Všechny tyto kořeny se „zrodí“ v levé části komplexní roviny z uvedeného reálného kořene. Dva původní komplexně sdružené kořeny se při zvyšování  $\tau$  začínají přibližovat k imaginární ose, které dosáhnou pro  $\tau = \tau_1^{(0)}$ . Při dalším zvyšování  $\tau$  mají všechny kořeny rovnice (11) zápornou reálnou část, a to až dosáhneme hodnoty  $\tau_2^{(0)}$ , kdy se opět dva komplexně sdružené kořeny objeví na imaginární ose (nemusí to být stejné body jako na začátku) a překročí ji směrem vpravo. Toto chování se může dle Věty 4.2 ještě několikrát opakovat.

Základ výše uvedených výpočtů je převzat z článku [3]. V této práci jsme ho rozšířili o další argumentaci a vysvětlení, bez kterých nebyl příliš srozumitelný.

Zkusíme nyní najít takové  $K$  a  $\tau$ , které by dokázaly stabilizovat singulární bod  $\mathbf{S}_1$  chaotického Rösslerova systému s parametry  $a = b = 0,2; c = 5,7$ , tedy

$$x' = -y - z + K(x(t - \tau) - x(t)),$$

$$y' = x + 0,2y,$$

$$z' = 0,2 + z(x - 5,7).$$

Z předchozí kapitoly víme, že je singulární bod  $\mathbf{S}_1$  pro  $\tau = 0$  nestabilní. Budeme se snažit dosáhnout stability pro tento singulární bod

$$\mathbf{S}_1 = (0,0070; -0,0351; 0,0351).$$

Nejdříve zjistíme interval, ve kterém se nachází hodnota  $K$  z podmínek (16), (17), (18):

$$z_1^* > 0, \quad \text{tj. } z_1^* = 0,9814, \quad \text{tj. } K \in \mathbb{R}$$

$$h(z_1^*) < 0, \quad \text{tj. } z_1^{*3} + c_2 z_1^{*2} + c_1 z_1^* + c_0 < 0, \quad \text{tj. } K > 0,095$$

$$c_0 > 0, \quad \text{tj. } 2K(2acx^* - a^2x^*z^* - ax^{*2} - ac^2 + a^2cz^*) + (c - az^* - x^*)^2 > 0, \\ \text{tj. } K < 2,4969.$$

Interval pro  $K$  je tedy následující:

$$K \in (0,0959; 2,4969).$$

Z tohoto intervalu si pro další výpočty zvolíme hodnotu  $K = 0,2$ . Dle vzorců (19), (20) vypočteme hodnoty  $\omega$  a  $\tau$ :

$$\omega_1 = 0,8825,$$

$$\tau_1^{(j)} = 1,9981 + 7,1201j \quad \text{pro } j = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\omega_2 = 1,0867,$$

$$\tau_2^{(j)} = 4,5318 + 5,7819j \quad \text{pro } j = 0, 1, 2, \dots$$

Vyčíslíme nejprve hodnoty  $\tau_k^{(0)}$  ( $k = 1, 2$ ) abychom dokázali určit, zda dle věty 4.2 nastane varianta 1) nebo 2):

$$\tau_1^{(0)} = 1,9981,$$

$$\tau_2^{(0)} = 4,5318.$$

Vzhledem k tomu, že  $\tau_2^{(0)} > \tau_1^{(0)}$  víme, že existuje  $\tau$  takové, aby singulární bod  $\mathbf{S}_1$  řízeného Rösslerova systému byl stabilní. Pro určení konkrétních intervalů musíme nejdříve určit hodnotu  $m$  z věty 4.2: k tomu potřebujeme vyčíslit další hodnoty  $\tau_k^{(j)}$  pro  $k = 1, 2$  a  $j = 1, \dots$  až k takové nejmenší přirozené hodnotě  $m$ , kdy platí  $\tau_2^{(m+1)} < \tau_1^{(m+1)}$ :

$$\tau_1^{(1)} = 9,1182,$$

$$\tau_2^{(1)} = 10,3136,$$

$$\tau_1^{(2)} = 16,2383,$$

$$\tau_2^{(2)} = 16,0955.$$

Z těchto hodnot vidíme, že platí

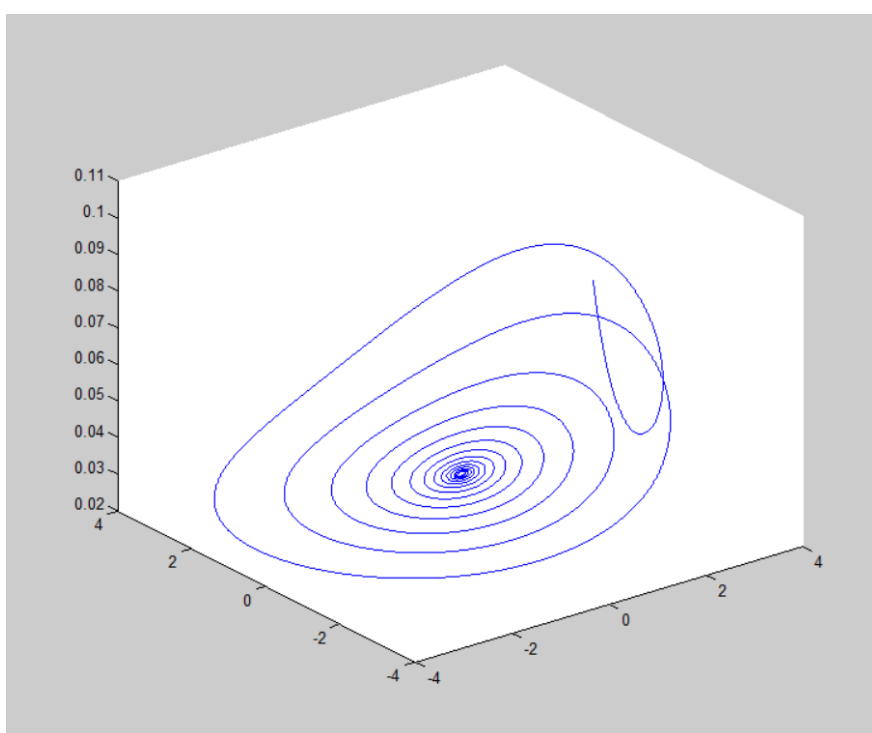
$$\tau_1^{(0)} < \tau_2^{(0)} < \tau_1^{(1)} < \tau_2^{(1)} < \tau_2^{(2)} < \tau_1^{(2)},$$

tedy naše hodnota  $m = 1$ . Nyní již můžeme určit konkrétní intervaly pro  $\tau$ .

Singulární bod  $S_I$  je stabilní pro  $K = 0,2$  a

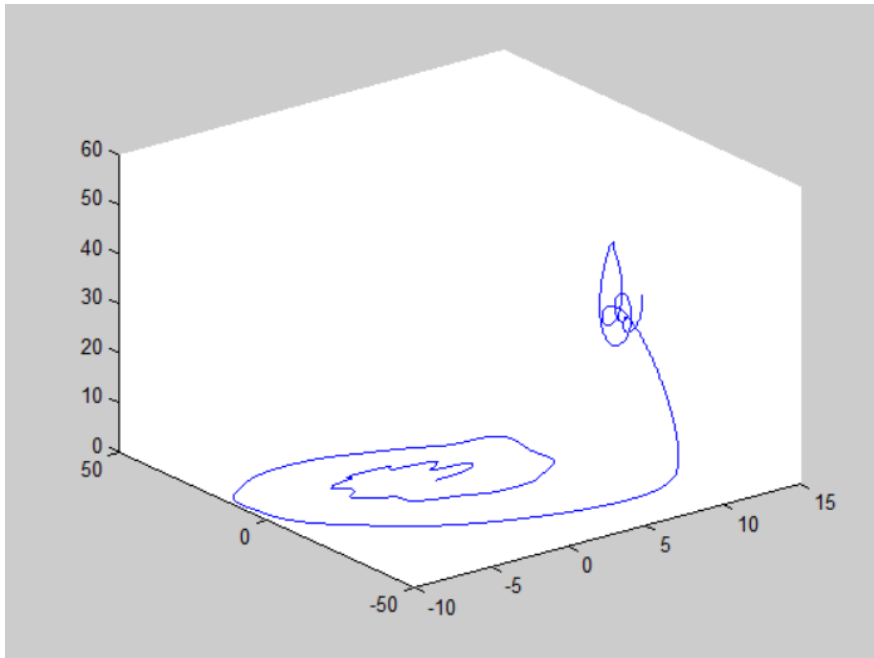
$$\tau \in (1,9981; 4,5318) \cup (9,1182; 10,3136).$$

Na následujícím obrázku vidíme graf řízeného Rösslerova systému pro hodnoty  $a = b = 0,2, c = 5,7; K = 0,2$  a  $\tau = 2,5$ . Můžeme si všimnout, že singulární bod  $S_1$  je skutečně asymptoticky stabilní.



Obrázek 5-1 Stabilizovaný Rösslerův systém  $K=0,2; \tau=2,5$

Nakonec ještě provedme úvahu, zda je ke stabilizaci nutná podmínka (18), tj.  $c_0 > 0$ . Nestačil by ke stabilizaci jen jeden kladný reálný kořen rovnice (15)? Dle věty 4.1 dokážeme určit, že v tomto případě s rostoucím  $\tau$  dojde k jediné bifurkaci, a to ze stability do nestability. Singulární bod  $S_1$  je přitom nestabilní pro  $\tau = 0$ , což je s uvedenou vlastností v rozporu. Hypotéza tedy je, že v daném případě daný singulární bod nelze stabilizovat uvedeným zpětně-vazebním řízením. Tato hypotéza byla ověřena vykreslením příslušných grafů v MATLABu pro  $K > 2,4969$  a různá  $\tau$ . Níže je přiložen případ pro  $K = 4; \tau = 2$ .



Obrázek 5- Nestabilní Rösslerův systém  $K=4$ ;  $\tau=2$

## 6 Závěr

Obsahem této práce bylo provedení analýzy Rösslerova dynamického systému a zjištění jeho chování při různých parametrech. Výsledky jsme ověřili vykreslením grafů a pokusili se stabilizovat nestabilní singulární bod vhodným zpětně-vazebním řízením.

V teoretické části byly zavedeny používané pojmy a jsou zde uvedeny tvrzení potřebné k prověřování vlastností dynamického systému. Tyto vědomosti pak byly využity v následující kapitole, kde jsme nejdříve určili singulární body Rösslerova dynamického systému a poté prověřovali jejich stabilitu. Vytvořili jsem podmínky, za kterých je systém stabilní a ty pak využili při analýze s dvěma pevnými parametry  $a = b = 0,2$  a zkoumali jsem stabilitu v závislosti pouze na parametru  $c$ . V našem konkrétním případě jsme zjistili, že neexistuje  $c$  takové, aby byl aspoň jeden singulární bod asymptoticky stabilní.

Při vizualizaci výsledků jsme kromě ověření výpočtů předchozí kapitoly zkoumali chování systému pro pevné parametry  $a = b = 0,2$  a měnící se  $c$ . Ilustrovali jsme zde, že graf chaotického Rösslerova dynamického systému připomíná systém spirál, které se na jedné straně zvedají. Tento graf je lokalizován v uzavřeném prostoru, ze kterého nevychází (tzv. Rösslerův atraktor). Pokud si představíme tento graf jako souvislou plochu, můžeme jí přirovnat k Möebiově pásce, protože tato plocha má také jen jednu stranu.

Tato kapitola nám dále přiblížila, co si lze představit pod slovy bifurkace a chaos. Náš systém měl pro nízké hodnoty parametru  $c$  za trajektorii smyčku, po které obíhala stále dokola. Při zvyšování tohoto parametru došlo k první bifurkaci (kvalitativní změně), když se tato smyčka zdvojnásobila a trajektorie pravidelně střídala obě části. Následující bifurkace odpovídaly dalšímu znásobování smyček, avšak trajektorie stále dodržovala řád při střídání těchto smyček. V poslední části kapitoly by vykreslen případ, kdy se Rösslerův systém stane chaotickým, což se projevuje nepravidelností trajektorie, která dále nenásleduje žádný řád při střídání smyček.

Významnou součástí této práce byla stabilizace singulární bodu chaotického Rösslerova systému pomocí zpětně-vazebního řízení (využili jsme řízení  $u(t) = K(x(t) - x(t - \tau))$ ). Nejdříve jsme rozvinuli teoretické úvahy o tom, jak stability dosáhnout, poté jsme pro hodnoty  $a = b = 0,2$  a  $c = 5,7$  určili konkrétní interval pro řídicí parametr  $K \in (0,0959; 2,4969)$ , ve kterém je možné dosáhnout stabilizace. Z tohoto intervalu jsme zvolili konkrétní hodnotu  $K = 0,2$ , pro kterou jsme určili intervaly pro časové zpoždění  $\tau \in (1,9981; 4,5318) \cup (9,1182; 10,3136)$ , ve kterých se stabilizace podařilo dosáhnout.

Problém stabilizace chaotických systémů je aktuálně řešen v odborné literatuře, a proto lze na tuto práci navázat v řadě směrů, například uvažováním jiných chaotických systému, jiného typu zpětně-vazebního řízení apod.

## 7 Literatura

- [1] BELLEN, A. a ZENNARO, Marino. *Numerical Methods for Delay Differential Equations*. Oxford: Clarendon Press, 2003. Numerical mathematics and scientific computation. ISBN 0-19-850654-6.
- [2] ČIPERA, Stanislav. *Diferenciální rovnice a dynamické systémy*. Praha: Nakladatelství ČVUT, 2006. ISBN 80-01-03451-8.
- [3] DING, Yuting, JIANG, Weihua, WANG, Hongbin. *Delayed feedback control and bifurcation analysis of Rossler chaotic system*. *Nonlinear Dynamic* (2010) 61: 707.
- [4] FRANČŮ, Jan. Obyčejné diferenciální rovnice. [online]. 2005-14-12 [cit. 2015-3-24]. Dostupné z: <http://www.mat.fme.vutbr.cz/home/francu>
- [5] HIRSCH, Morris W., SMALE, Stephen a L. DEVANEY, Robert. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. 2nd ed. /. San Diego, CA: Academic Press, c2004. Pure and applied mathematics (Academic Press), 60. ISBN 0-12-349703-5.
- [6] HORÁK, Jiří, RAIDL, Aleš a KRLÍN, Ladislav. *Deterministický chaos a jeho fyzikální aplikace*. Praha: Academia, 2003. ISBN 80-200-0910-8.
- [7] MACUR, Jiří. *Úvod do teorie dynamických systémů a jejich simulace*. Brno: PC-DIR, 1995. Učební texty vysokých škol. ISBN 80-214-0698-4.
- [8] OBORNÁ, E. *Stabilní a chaotické chování Lorenzova systému*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2015. 36 s. Vedoucí doc. RNDr. Jan Čermák, CSc.
- [9] PYRAGAS, K.: *Continuous control of chaos by self-controlling feedback*. *Phys. Lett. A* 170, 421–428 (1992)
- [10] RÖSSLER, Otto.E.: *An equation for continuous chaos*. *Phys. Lett. A* 57, 397–398 (1976)
- [11] STROGATZ, Steven H. *Nonlinear Dynamics and Chaos: with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Pub., c1994. ISBN 0-201-54344-3.
- [12] *Equilibrium*. Scholarpedia. [online]. [cit. 2015-3-26]. Dostupné z: <http://www.scholarpedia.org/article/Equilibrium>
- [13] *Eulerova metoda řešení ODE*. Katedra Kybernetiky. [online] [cit. 2017-5-14]. Dostupné z: <http://www.kky.zcu.cz/uploads/courses/simul/EulerovaMetoda.pdf>