VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

PRÜFEROVY TRANSFORMACE A JEJICH APLIKACE

PRÜFER TRANSFORMATIONS AND THEIR APPLICATIONS

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE — **Bc. LUDMILA ŠVANDOVÁ**

AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE — **prof. Mgr. PAVEL ŘEHÁK, Ph.D.**

SUPERVISOR

BRNO 2022

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

Zadání diplomové práce

Ústav:	Ústav matematiky
Studentka:	**Bc. Ludmila Švandová**
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	**prof. Mgr. Pavel Řehák, Ph.D.**
Akademický rok:	2021/22

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Prüferovy transformace a jejich aplikace

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Prüferova transformace ve své základní podobě převádí lineární diferenciální rovnici 2. řádu na jistý systém, a to zavedením polárních souřadnic v příslušném fázovém prostoru. Tuto transformaci lze rozšířit na řadu dalších objektů (např. na diferenciální systémy, nelineární diferenciální rovnice či diferenční rovnice). Především však tato transformace slouží jako účinný nástroj při zkoumání kvalitativních vlastností diferenciálních rovnic důležitých v praxi (např. Schrödingerova rovnice, rovnice s p–Laplaciánem či rovnice související s modelováním kmitání nosníku).

Cíle diplomové práce:

1. Shromáždit, uspořádat a příp. zkompletovat informace o různých verzích Prüferovy transformace.
2. Demonstrovat užitečnost Prüferovy transformace v kvalitativní teorii vybraných diferenciálních a diferenčních rovnic.

Seznam doporučené literatury:

BANKS, D. O., KUROWSKI, G. J. A Prüfer Transformation for the Equation of the Vibrating Beam. Trans. Amer. Math. Soc. 199 (1974), 203-222.

BOHNER, M., DOŠLÝ, O. The Discrete Prüfer Transformation. Proceedings of the American Mathematical Society 129 (2001), 2715-2726.

DOŠLÝ, O., ŘEHÁK, P. Half-Linear Differential Equations. Elsevier, North Holland, 2005.

CHAILOS, G., Applications of Prüfer Transformations in the Theory of Ordinary Differential Equations. Irish Math. Soc. Bull. No. 63 (2009), 11-31.

KALAS, J., RÁB, M. Obyčejné diferenciální rovnice. Masarykova univerzita, 1995.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2021/22

V Brně, dne

L. S.

doc. Mgr. Petr Vašík, Ph.D. ředitel ústavu	doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D. děkan fakulty

Abstrakt
Tato práce se zabývá různými verzemi Prüferovy transformace a jejich využitím v teorii vybraných lineárních i nelineárních diferenciálních a diferenčních rovnic. Pro každou z těchto rovnic je uvedena Prüferova transformace, její vlastnosti a aplikace.

Summary
This thesis analyses various versions of Prüfer transformation and their use in the theory of selected linear and nonlinear differential and difference equations. For each of this equations we introduce the Prüfer transformation, its properties and its applications.

Klíčová slova
Prüferova transformace, lineární diferenciální rovnice, Sturmova-Liouvilleova rovnice, pololineární diferenciální rovnice, lineární Hamiltonovský systém, diferenční rovnice, dynamická rovnice na časové škále.

Keywords
Prüfer transformation, linear differential equation, Sturm-Liouville equation, half-linear differential equation, linear Hamiltonian system, difference equation, dynamic equation on time scale.

ŠVANDOVÁ, L.*Prüferovy transformace a jejich aplikace.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2022. 73 s. Vedoucí diplomové práce prof. Mgr. Pavel Řehák, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci *Prüferovy transformace a jejich aplikace* vypracovala samostatně pod vedením prof. Mgr. Pavla Řeháka, Ph.D. a s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Bc. Ludmila Švandová

Chtěla bych poděkovat prof. Mgr. Pavlu Řehákovi, Ph.D. za odborné vedení mé práce, pomoc, ochotu a čas strávený při konzultacích. Dále bych chtěla poděkovat své rodině za podporu v průběhu celého mého studia.

Bc. Ludmila Švandová

Obsah

1 Úvod

Cílem této diplomové práce je shromáždit informace o různých verzích Prüferovy transformace, uspořádat je, porovnat je mezi sebou a nalézt nové aplikace, případně nové důkazy známých tvrzení. Cílem je také doplnit detailní výpočty a argumenty často chybějící v literatuře. Následně pak ukázat užitečnost transformací v kvalitativní teorii diferenciálních rovnic či systémů a diferenčních rovnic.

Prüferova transformace je pojmenována po Heinzovi Prüferovi, který tuto transformaci použil ve svém článku z roku 1926, viz [11], a to sice jako metodu transformace Sturmova-Liouvilleova problému pro lineární diferenciální rovnici druhého řádu na dvě nelineární diferenciální rovnice prvního řádu. Ve své základní podobě jde o zavedení polárních souřadnic v příslušném fázovém prostoru.

Samotná práce je rozdělena na pět kapitol. V první kapitole se věnujeme Prüferově transformaci lineární diferenciální rovnice druhého řádu. Ve druhé kapitole rozebíráme transformaci pololineární diferenciální rovnice druhého řádu, u níž je zajímavé hlavně porovnání jejich vlastností a aplikací s transformací z první kapitoly (tzn. lineární verzí), neboť ta je speciálním případem právě této pololineární. Následuje kapitola věnující se transformaci lineární diferenciální rovnice vyššího řádu, konkrétně čtvrtého, která modeluje kmitání nosníku, a obecného lineárního Hamiltonovského systému. V předposlední kapitole rozebíráme transformaci diferenční rovnice druhého řádu a na závěr se věnujeme transformaci dynamické rovnice na časové škále, opět druhého řádu.

Každá z kapitol má podobnou strukturu. Nejprve jsou uvedeny úvodní poznámky (samotný tvar rovnice či systému, jeho aplikace). Následuje část věnující se Prüferově transformaci a příslušnému Prüferovu systému, který je obvykle uveden včetně jeho odvození. Zde bylo nutné zavést různé varianty trigonometrických funkcí, v pololineárním případě zobecněné trigonometrické funkce a pro lineární systémy maticové trigonometrické funkce. Následně jsou uvedeny vlastnosti Prüferovy transformace a na závěr pak její aplikace, které ve většině případů zahrnují existenci a jednoznačnost řešení, Sturmovy věty, ohraničenost a diskonjugovanost řešení, oscilační kritéria či Sturmovu-Liouvilleovu teorii.

2 Lineární diferenciální rovnice

Základní informace v této kapitole jsou čerpány z [4], [6], [9] a [10]. Navíc jsou prezentovány detailní výpočty, které se v literatuře neuvádí. Na některých místech jsou dokonce výpočty z literatury zkorigovány. Vlastním výsledkem je pak důkaz Věty 2.21, která je v literatuře dokázána jinou technikou.

2.1 Úvodní poznámky

Budeme uvažovat *homogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu* tvaru

$$(r(t)x'(t))' + c(t)x(t) = 0, \qquad t \in I, \tag{2.1}$$

kde na daném intervalu je $r(t) > 0$ a r, c jsou zde spojité. Nebude-li řečeno jinak, budeme po celou kapitolu předpokládat, že tyto podmínky pro koeficienty jsou splněny. Tato rovnice je často nazývána *Sturmovou-Liouvilleovou lineární diferenciální rovnicí.*

Funkci $x \in C^1(I)$ nazveme *řešením* rovnice (2.1), jestliže na daném intervalu vyhovuje rovnici (2.1) a $rx' \in C^1(I)$. Pokud je $x \equiv 0$, nazveme ho *triviálním řešením* rovnice (2.1). V opačném případě se řešení nazývá *netriviální.*

Poznámka 2.1 Většina tvrzení a úvah, které zde formulujeme, by platila i za slabšího předpokladu. Stačilo by, kdyby byly $1/r$ a c lokálně integrovatelné.

Poznámka 2.2 Homogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu také často uvažujeme ve tvaru

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0, \qquad t \in I, \tag{2.2}$$

kde a, b jsou na daném intervalu spojité. Tuto rovnici lze vždy převést na rovnici tvaru (2.1). Pokud rovnici (2.2) vynásobíme výrazem $\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s}$, $t_0, t \in I$, a budeme upravovat, dostáváme

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{e}^{\int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s}\, x''(t) + \mathrm{e}^{\int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s}\, a(t)x'(t) + \mathrm{e}^{\int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s}\, b(t)x(t) \\ &= \left(\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s}\, x'(t)\right)' + \mathrm{e}^{\int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s}\, b(t)x(t). \end{aligned}$$

Stačí tedy položit

$$r(t) = \mathrm{e}^{\int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s}, \qquad c(t) = b(t)r(t), \qquad t_0,\, t \in I.$$

Platí, že rovnice tvaru (2.1) je obecnější. Rovnici (2.1) už na rovnici (2.2), kde na daném intervalu předpokládáme spojitost a i b, nelze převést vždy. Platí to jen za předpokladu, že $r \in C^1(I)$.

Poznámka 2.3 Můžeme se setkat i s homogenní lineární diferenciální rovnicí druhého řádu v *Jacobiho tvaru*

$$x''(t) + q(t)x(t) = 0, \qquad t \in I = [a, \infty)\,, \tag{2.3}$$

kde funkce q je na daném intervalu spojitá. Platí, že rovnici tvaru (2.1) lze vždy převést na rovnici tvaru (2.3) a to dokonce při zachování typu intervalu, na kterém je rovnice uvažována (tzn., že interval $[a,\infty)$ se transformuje na interval $[A,\infty)$).

Nechť x je řešením (2.1). Transformujme nezávislou proměnnou a položme

$$
\begin{aligned}
s &= \psi(t), \qquad \psi \in C^1(I), \qquad \psi' \neq 0, \qquad t \in I,\\
y(s) &= x(t),
\end{aligned}
$$

tím rovnici (2.1) převedeme na

$$
(\widehat{r}(s)y'(s))' + \widehat{c}(s)y(s) = 0, \qquad s \in \psi(I),
$$

kde

$$
\begin{aligned}
\widehat{r} &= \left(r \circ \psi^{-1}\right)\left(\psi' \circ \psi^{-1}\right),\\
\widehat{c} &= \frac{c \circ \psi^{-1}}{\psi' \circ \psi^{-1}}.
\end{aligned}
$$

Předpokládáme-li

$$
\int_a^\infty \frac{1}{r(s)}\,\mathrm{d}s = \infty, \tag{2.4}
$$

pak zvolíme-li ψ konkrétně jako

$$
\psi(t) = \int_a^t \frac{1}{r(s)}\,\mathrm{d}s\,, \qquad t \in I, \tag{2.5}
$$

dostáváme

$$
\widehat{r} \equiv 1,
$$

tedy rovnici Jacobiho tvaru. Díky (2.4) je zachován typ intervalu.

V případě, že

$$
\int_t^\infty \frac{1}{r(s)}\,\mathrm{d}s < \infty, \qquad t \in I,
$$

by transformace (2.5) nezávislé proměnné převedla interval $[a,\infty)$ na omezený interval. Transformujme proto závislou proměnnou a položme

$$
x(t) = h(t)u(t), \qquad h', rh' \in C^1(I), \qquad h \neq 0, \qquad t \in I.
$$

Rovnici (2.1) takto převedeme na

$$
(\widetilde{r}(t)u'(t))' + \widetilde{c}(t)u(t) = 0, \qquad t \in I,
$$

kde

$$
\begin{aligned}
\widetilde{r} &= rh^2,\\
\widetilde{c} &= h\left[(rh')' + ch\right].
\end{aligned}
$$

Položíme-li

$$h(t) = \int_t^\infty \frac{1}{r(s)}\,\mathrm{d}s\,, \qquad t \in I,$$

dostáváme

$$\widetilde{r}(t) = r(t)\left(\int_t^\infty \frac{1}{r(s)}\,\mathrm{d}s\right)^2, \qquad t \in I.$$

Jelikož platí

$$\left(\frac{1}{\int_t^\infty \frac{1}{r(s)}\,\mathrm{d}s}\right)' = \frac{\frac{1}{r(t)}}{\left(\int_t^\infty \frac{1}{r(s)}\,\mathrm{d}s\right)^2} = \frac{1}{\widetilde{r}(t)},$$

celkem obdržíme

$$\int_{t_0}^t \frac{1}{\widetilde{r}(s)}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\int_t^\infty \frac{1}{r(s)}\,\mathrm{d}s} - \frac{1}{\int_{t_0}^\infty \frac{1}{r(s)}\,\mathrm{d}s} \to \infty \qquad \text{pro } t \to \infty,$$

tedy

$$\int_{t_0}^\infty \frac{1}{\widetilde{r}(s)}\,\mathrm{d}s = \infty.$$

Nyní by stačilo provést transformaci nezávislé proměnné a stejně jako výše bychom opět dostali rovnici Jacobiho tvaru, přičemž by byl zachován typ intervalu.

Ukázali jsme tedy, že vždy lze rovnici (2.1) transformovat na rovnici Jacobiho tvaru (2.3), přičemž je zachován typ intervalu.

Poznámka 2.4 Přidáme-li k rovnici (2.1) počáteční podmínky, dostaneme počáteční problém, který má jednoznačně určené řešení na celém intervalu I.

Skutečně, rovnici (2.1) můžeme přepsat na systém dvou lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{1}{r(t)}u(t), \\ u'(t) &= -c(t)x(t). \end{aligned}$$

Existence a jednoznačnost řešení počáteční úlohy tohoto systému na celém intervalu I plyne ze standardních výsledků pro lineární diferenciální systémy.

Definice 2.5 Řekneme, že netriviální řešení x rovnice (2.1), kde $I = [a, \infty)$, je *oscilující*, jestliže má na daném intervalu I nekonečně mnoho nulových bodů, tzn. že ke každému $T \in I$ existuje $t \geq T$ takové, že platí $x(t) = 0$.

Netriviální řešení se nazývá *neoscilující* v opačném případě, tzn. když existuje $T \in I$ takové, že pro všechna $t \geq T$ platí $x(t) \neq 0$.

Pokud jsou všechna řešení rovnice (2.1) oscilující, rovnice se nazývá *oscilatorická*, pokud jsou všechna neoscilující, nazývá se *neoscilatorická*.

Poznámka 2.6 Později uvidíme, že díky Sturmově oddělovací větě (Věta 2.12) platí, že nějaké řešení rovnice (2.1) osciluje právě tehdy, když oscilují všechna řešení této rovnice.

Rovnice (2.1) je jednou z nejvíce studovaných diferenciálních rovnic. Je důležitá jak z praktického tak z teoretického hlediska. Je základním prototypem diferenciálních rovnic vyššího řádu a má mnoho aplikací, za všechny zmiňme např. harmonické kmitání. Také má návaznost na další matematické oblasti, např. je Eulerovou-Lagrangeovou rovnicí jistého důležitého typu kvadratického funkcionálu.

2.2 Prüferova transformace

Nechť x je netriviálním řešením (2.1). Transformace

$$\begin{aligned} x(t) &= \rho(t)\sin\varphi(t), \\ x'(t) &= \frac{\rho(t)}{r(t)}\cos\varphi(t) \end{aligned} \tag{2.6}$$

rovnice (2.1) se nazývá *Prüferova transformace.*

Poznámka 2.7 Jak jsme již uvedli, transformace je pojmenována po Heinzovi Prüferovi, který tuto transformaci použil ve svém článku z roku 1926, viz [11]. Byl to německý matematik, který se během svého krátkého života zabýval abelovskými grupami, teorií grafů, algebraickými čísly, teorií uzlů, Sturmovou-Liouvilleovou teorií a dalším oblastem, viz [8]. Zemřel předčasně v roce 1934 na rakovinu plic, bylo mu pouhých 37 let.

Zderivujeme-li první výraz v (2.6) a porovnáme ho s druhým, dostaneme

$$\rho'(t)\sin\varphi(t) + \rho(t)\varphi'(t)\cos\varphi(t) = \frac{\rho(t)}{r(t)}\cos\varphi(t). \tag{2.7}$$

Dosazením vyjádření (2.6) do rovnice (2.1) a následnou úpravou dostaneme

$$\rho'(t)\cos\varphi(t) - \rho(t)\varphi'(t)\sin\varphi(t) + c(t)\rho(t)\sin\varphi(t) = 0. \tag{2.8}$$

Vyjádříme-li nyní z (2.7) a (2.8) ρ' a φ' pomocí proměnných ρ a φ, po úpravě dostáváme

$$\rho'(t) = \rho(t)\left(\frac{1}{r(t)} - c(t)\right)\sin\varphi(t)\cos\varphi(t), \tag{2.9}$$

$$\varphi'(t) = \frac{1}{r(t)}\cos^2\varphi(t) + c(t)\sin^2\varphi(t), \tag{2.10}$$

což nazveme *Prüferovým systémem*, jehož řešením jsou právě funkce ρ a φ.

Prüferova transformace tedy převede lineární diferenciální rovnici druhého řádu (2.1) na dvě diferenciální rovnice prvního řádu tvarů (2.9) a (2.10).

2.3 Vlastnosti

V této části si uvedeme vlastnosti Prüferovy transformace. Ukážeme, že nejenom že lze pomocí Prüferovy transformace rovnici (2.1) převést na systém (2.9) a (2.10), ale dokonce platí, že rovnice je tomuto systému ekvivalentní.

Věta 2.8 *Každé netriviální řešení (2.1) definuje jediné řešení (2.9) a (2.10). Platí i opačné tvrzení.*

Důkaz. Již jsme ukázali, že máme-li netriviální řešení rovnice (2.1), pak ρ a φ vystupující v transformaci (2.6) jsou jediným řešením systému (2.9) a (2.10). Konkrétní vyjádření těchto funkcí pomocí proměnných x a x' uvedeme v následující Větě 2.9.

Nyní budeme chtít ukázat opačnou implikaci. Máme-li tedy řešení ρ a φ systému (2.9) a (2.10), pak jsme schopni pomocí vztahů v (2.6) najít jediné řešení x. Když dosadíme (2.6) do levé strany rovnice (2.1) a budeme upravovat, dostáváme

$$\begin{aligned}\left(r(t)\frac{\rho(t)}{r(t)}\cos\varphi(t)\right)' &+ c(t)\rho(t)\sin\varphi(t)\\ &= (\rho(t)\cos\varphi(t))' + c(t)\rho(t)\sin\varphi(t)\\ &= \rho'(t)\cos\varphi(t) - \rho(t)\varphi'(t)\sin\varphi(t) + c(t)\rho(t)\sin\varphi(t).\end{aligned}$$

Do tohoto vyjádření můžeme dosadit z (2.9) a (2.10) a dále budeme upravovat

$$\begin{aligned}\rho(t)&\left(\frac{1}{r(t)} - c(t)\right)\sin\varphi(t)\cos^2\varphi(t)\\ &\quad - \rho(t)\left(\frac{1}{r(t)}\cos^2\varphi(t) + c(t)\sin^2\varphi(t)\right)\sin\varphi(t) + c(t)\rho(t)\sin\varphi(t)\\ &= -c(t)\rho(t)\sin\varphi(t)\cos^2\varphi(t) - c(t)\rho(t)\sin^3\varphi(t) + c(t)\rho(t)\sin\varphi(t)\\ &= c(t)\rho(t)\sin\varphi(t)\left(-\cos^2\varphi(t) - \sin^2\varphi(t) + 1\right) = c(t)\rho(t)\sin\varphi(t)\,(-1+1) = 0.\end{aligned}$$

Tím je důkaz hotov. □

Věta 2.9 *Nechť x je netriviální řešení rovnice (2.1), které má na intervalu $(a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$, právě n nulových bodů*

$$a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n \le b, \qquad n \ge 1.$$

Dále nechť ρ je funkce definovaná jako

$$\rho(t) = \sqrt{x^2(t) + \left(r(t)x'(t)\right)^2} \tag{2.11}$$

a φ je funkce definovaná jako

$$\varphi(t_k) = k\pi, \qquad k = 1,\dots,n,$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} \operatorname{arccotg}\frac{r(t)x'(t)}{x(t)}, & t \in [a,t_1), \qquad \varphi(a)=0,\ \textit{je-li}\ x(a)=0,\\ \operatorname{arccotg}\frac{r(t)x'(t)}{x(t)} + k\pi, & t \in (t_k,t_{k+1}), \qquad k = 2,\dots,n-1,\\ \operatorname{arccotg}\frac{r(t)x'(t)}{x(t)} + n\pi, & t \in (t_n, b]. \end{cases}$$

Potom je funkce φ je spojitá na daném intervalu a

$$\varphi(t) > k\pi, \qquad \forall\, t \in (t_k, b], \qquad k = 1,2,\dots,n. \tag{2.12}$$

Důkaz. Funkce $\varphi(t) = \operatorname{arccotg} \frac{r(t)x'(t)}{x(t)}$ je zřejmě spojitá pro všechna $t \in I$, v nichž je $x(t) \neq 0$. Pokud je $x(t^*) = 0$, musí být $x'(t^*) \neq 0$, jinak bychom měli triviální řešení. Je-li $x'(t^*) > 0$ a $t^* \neq a$, pak je x v tomto bodě rostoucí, tedy záporná na levém okolí bodu a platí

$$\lim_{t \to t^*-} \frac{x'(t)}{x(t)} = -\infty.$$

Je-li $x'(t^*) < 0$ a $t^* \neq a$, pak je x v tomto bodě klesající, tedy kladná na levém okolí bodu a opět platí

$$\lim_{t \to t^*-} \frac{x'(t)}{x(t)} = -\infty.$$

Podobně, je-li $x(t^*) = 0$ a $t^* \neq b$, pak platí

$$\lim_{t \to t^*+} \frac{x'(t)}{x(t)} = \infty.$$

Dostáváme tedy

$$\lim_{t \to t_k-} \varphi(t) = \lim_{t \to t_k-} \operatorname{arccotg} \frac{x'(t)}{x(t)} + (k-1)\pi = \pi + (k-1)\pi = k\pi,$$

$$\lim_{t \to t_k+} \varphi(t) = \begin{cases} \lim\limits_{t \to t_k+} \operatorname{arccotg} \frac{x'(t)}{x(t)} + k\pi = 0 + k\pi = k\pi, & \text{je-li } t_k < b, \\ \lim\limits_{t \to a+} \varphi(t) = 0 = \varphi(a), & \text{je-li } x(a) = 0. \end{cases}$$

Protože $0 \leq \varphi(a) < \pi$ a

$$\varphi(t_k) = k\pi, \qquad \varphi'(t_k) = \frac{1}{r(t_k)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

funkce φ nabývá každé hodnoty $k\pi$ právě jednou a $\varphi(t) > k\pi$ pro všechna $t \in (t_k, b]$. Pro $n = 3$ je funkce φ znázorněna na Obrázku 2.1. □

Poznámka 2.10 Pro funkce ρ a φ z Věty 2.9 lze odvodit ještě další skutečnosti. Funkce ρ a φ mají na daném intervalu spojité derivace

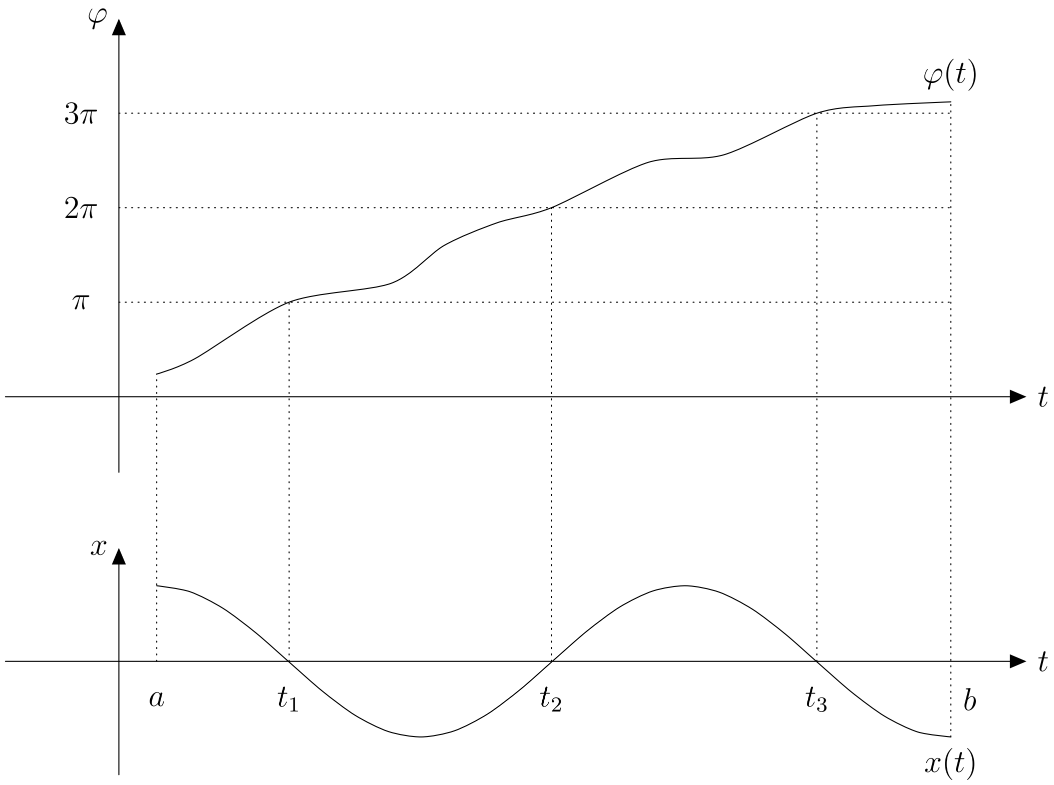
$$\rho'(t) = \frac{r(t)x(t)x'(t)\left(\frac{1}{r(t)} - c(t)\right)}{\sqrt{x^2(t) + (r(t)x'(t))^2}}, \tag{2.13}$$

$$\varphi'(t) = \frac{c(t)x^2(t) + r(t)x'^2(t)}{x^2(t) + (r(t)x'(t))^2} \tag{2.14}$$

a jsou řešením systému (2.9) a (2.10).

Nejprve uvedeme důkaz (2.13). Pokud do rovnice Prüferova systému (2.9) dosadíme ρ vyjádřené z první rovnice Prüferovy transformace (2.6), dostáváme

$$\rho'(t) = \frac{x(t)}{\sin\varphi(t)} \left(\frac{1}{r(t)} - c(t)\right) \sin\varphi(t)\cos\varphi(t) = x(t)\left(\frac{1}{r(t)} - c(t)\right)\cos\varphi(t).$$



Obrázek 2.1: Znázornění funkce φ pro $n = 3$ dle Věty 2.9.

Dosadíme cos vyjádřený z druhé rovnice Prüferovy transformace (2.6), tedy

$$\rho'(t) = x(t)\left(\frac{1}{r(t)} - c(t)\right)\frac{r(t)x'(t)}{\rho(t)}.$$

A na závěr dosadíme za ρ z (2.11)

$$\rho'(t) = \frac{r(t)x(t)x'(t)\left(\frac{1}{r(t)} - c(t)\right)}{\sqrt{x^2(t) + \left(r(t)x'(t)\right)^2}}.$$

Podobně budeme postupovat při důkazu (2.14). Pokud do rovnice Prüferova systému (2.10) dosadíme sin a cos vyjádřené z rovnic Prüferovy transformace (2.6), dostáváme

$$\varphi'(t) = \frac{1}{r(t)}\left(\frac{r(t)x'(t)}{\rho(t)}\right)^2 + c(t)\left(\frac{x}{\rho}\right)^2 = \frac{r(t)x'^2(t) + c(t)x^2(t)}{\rho^2(t)}.$$

Nakonec opět dosadíme za ρ z (2.11)

$$\varphi'(t) = \frac{r(t)x'^2(t) + c(t)x^2(t)}{x^2(t) + \left(r(t)x'(t)\right)^2}.$$

Spojitost derivací ρ a φ plyne z faktu, že x je řešením rovnice (2.1), tzn. $x \in C^1(I)$ a $rx' \in C^1(I)$.

2.4 Aplikace

V této části uvedeme některé aplikace Prüferovy transformace.

2.4.1 Existence a jednoznačnost

Jak jsme již uvedli v Poznámce 2.4, pro rovnici (2.1) s počátečními podmínkami existuje jednoznačně určené řešení, což vyplývá ze standardních výsledků. Nyní ukážeme alternativní přístup k důkazu tohoto tvrzení, a to právě pomocí Prüferovy transformace a Prüferova systému.

Věta 2.11 *Nechť $t_0 \in I$ a $A, B \in \mathbb{R}$. Pak existuje jediné řešení rovnice (2.1), které vyhovuje podmínkám $x(t_0) = A$, $x'(t_0) = B$ a které je prodloužitelné na celý interval I. Toto řešení spojitě závisí na počátečních hodnotách A, B.*

Důkaz. Vidíme, že pravé strany (2.9) a (2.10) jsou spojité vzhledem k ρ a t (resp. φ a t) a Lipschitzovské vzhledem k ρ (resp. φ), na celém intervalu I proto existuje jediné řešení ρ a φ. Dle Věty 2.8 je pak zaručena jednoznačnost a existence řešení počáteční úlohy na intervalu I i pro rovnici (2.1). □

2.4.2 Sturmovy věty

Následující Sturmova oddělovací věta nám říká, že nulové body každých dvou lineárně nezávislých řešení rovnice (2.1) se vzájemně oddělují. Důkaz lze provést více způsoby, my uvedeme ten, kde se využívá právě Prüferovy transformace. Další možností důkazu je použití Sturmovy srovnávací věty (Věta 2.16 – platí totiž, že Sturmova oddělovací věta je speciálním případem Sturmovy srovnávací věty), či Riccatiho transformace, nebo důkaz postavit na jednoznačnosti řešení.

Jak jsme již uvedli v Poznámce 2.6, důsledkem následující věty je, že řešení rovnice (2.1) osciluje právě tehdy, když oscilují všechna řešení rovnice.

Věta 2.12 (**Sturmova oddělovací věta**) *Nechť je x netriviálním řešením rovnice (2.1) a $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in I$, jsou dva jeho po sobě jdoucí nulové body. Pak libovolné další netriviální řešení (2.1), které není násobkem x, má na intervalu (t_1, t_2) právě jeden nulový bod.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že

$$x(t) > 0, \qquad t \in (t_1, t_2)\,.$$

Pak, dle Prüferovy transformace (2.6), platí, že

$$\varphi(t) \in (0, \pi) \quad (\mathrm{mod}\ \pi), \qquad t \in (t_1, t_2)\,.$$

Dle Věty 2.9 víme, že φ je rostoucí funkce. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že

$$\varphi(t_1) = 0,$$
$$\varphi(t_2) = \pi.$$

Nyní budeme uvažovat libovolné další řešení y, které ale není násobkem x. Nejprve ukážeme, že tato dvě netriviální řešení nemohou mít společný bod. Pokud bychom uvažovali, že

$$x(t_0) = y(t_0) = 0,$$

pak

$$x'(t_0) = A \neq 0 \qquad \text{a} \qquad y'(t_0) = B \neq 0.$$

Uvažujeme-li další řešení z, pro které platí

$$z(t_0) = 0 \qquad \text{a} \qquad z'(t_0) = 1,$$

pak Az a Bz jsou také řešením a splňují

$$Az(t_0) = Bz(t_0) = 0 \qquad \text{a} \qquad Az'(t_0) = A,\ Bz'(t_0) = B.$$

Díky Větě 2.11 musí platit

$$x = Az, \qquad y = Bz,$$

z čehož dostáváme

$$x = \frac{A}{B} y.$$

To znamená, že x je násobkem y, což je ale spor.

Musí tedy platit, že $y(t_1) \neq 0$, můžeme předpokládat $y(t_1) > 0$. Pak, dle Prüferovy transformace (2.6), platí, že

$$0 = \varphi(t_1) < \overline{\varphi}(t_1) < \pi,$$

kde φ přísluší řešení x a $\overline{\varphi}$ přísluší y. Z (2.10) vidíme, že φ' je funkcí pouze φ. Je proto určena jednoznačně. Z toho plyne, že je-li

$$\varphi(t_1) < \overline{\varphi}(t_1),$$

pak také

$$\varphi(t) < \overline{\varphi}(t), \qquad \forall\, t \in [t_1, t_2].$$

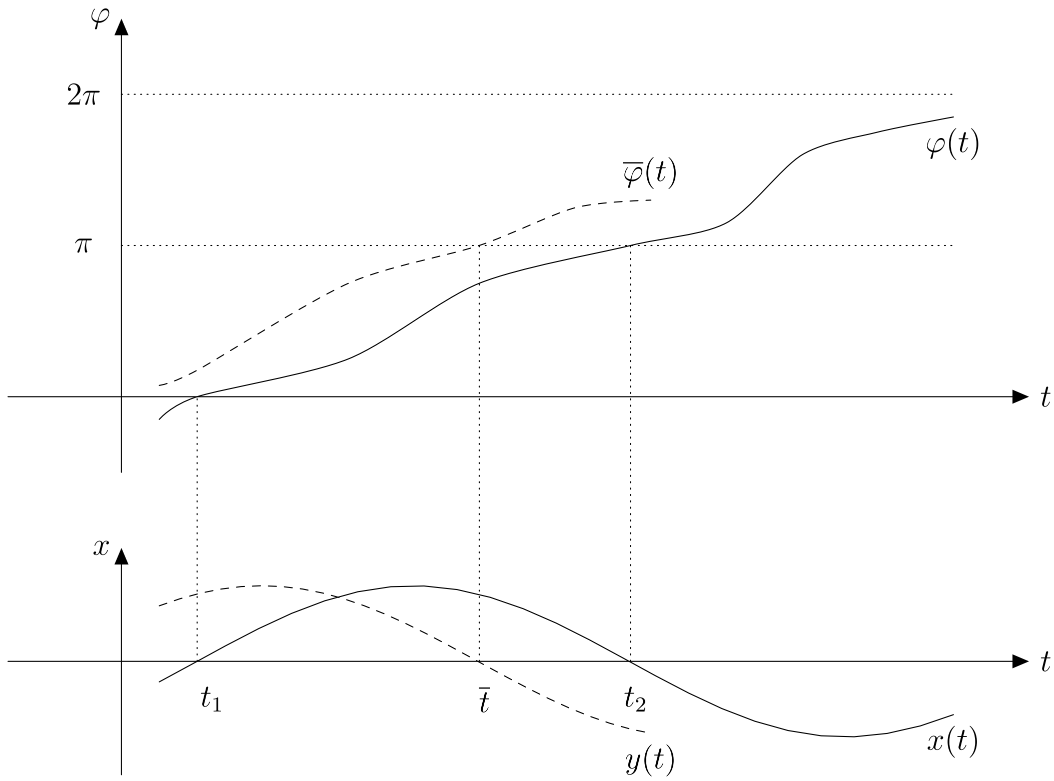
Konkrétně

$$\pi = \varphi(t_2) < \overline{\varphi}(t_2).$$

Spojitá funkce $\overline{\varphi} - \pi$ mění na intervalu $[t_1, t_2]$ znaménko. Musí tedy existovat bod $\bar{t} \in (t_1, t_2)$ takový, že

$$\overline{\varphi}(\bar{t}) = \pi,$$

dle (2.6) tedy $y(\bar{t}) = 0$. Celý důkaz je shrnut na Obrázku 2.2. □



Obrázek 2.2: Oddělení nulových bodů dvou řešení z Věty 2.12.

Nyní budeme chtít porovnávat řešení dvou různých rovnic tvaru (2.1). Uvažujme proto pro $t \in [a,b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, rovnice

$$(r_1(t)x'(t))' + c_1(t)x(t) = 0, \tag{2.15}$$

$$(r_2(t)x'(t))' + c_2(t)x(t) = 0, \tag{2.16}$$

kde na daném intervalu platí, že $r_i(t) > 0$, $i = 1, 2$, a r_i, c_i, $i = 1, 2$, jsou zde spojité.

Nejprve uvedeme pomocné lemma, které budeme potřebovat k důkazu Věty 2.14.

Lemma 2.13 (**o diferenciální nerovnosti**) *Nechť f je spojitá funkce na $[a,b) \times \mathbb{R}$ a je lokálně Lipschitzovská vzhledem k proměnné u (resp. v). Dále nechť*

(i) u je jednoznačně určené řešení počátečního problému

$$u'(t) = f(t,u), \qquad u(a) = u_0,$$

(ii) v je řešení počátečního problému

$$v'(t) \le f(t,v), \qquad v(a) \le u_0.$$

Pak (pokud obě řešení existují) platí

$$v(t) \le u(t), \qquad t \ge a.$$

Důkaz. Důkaz nebudeme uvádět, dá se nalézt např. v [10], str. 209. □

Věta 2.14 *Uvažujme rovnice (2.15) a (2.16) a nechť pro jejich koeficienty platí*

$$c_1(t) \le c_2(t), \qquad r_1(t) \ge r_2(t) > 0, \qquad t \in [a,b)\,.$$

(i) Pokud x_1 je řešením (2.15), x_2 je řešením (2.16) a φ_1, φ_2 jsou příslušná řešení (2.10) taková, že

$$\varphi_1(a) \le \varphi_2(a),$$

pak

$$\varphi_1(t) \le \varphi_2(t), \qquad \forall\, t \in [a,b)\,.$$

(ii) Pokud navíc platí, že existuje $d \in [a,b)$ takové, že buďto

$$c_1(d) < c_2(d), \tag{2.17}$$

nebo

$$r_1(d) > r_2(d) \qquad a \qquad c_2(d) \ne 0, \tag{2.18}$$

pak

$$\varphi_1(t) < \varphi_2(t), \qquad \forall\, t \in (d,b)\,.$$

Důkaz. Důkaz rozdělíme na dvě části.

(i) Dle (2.10), označíme pro $t \in [a,b)$

$$\varphi'(t) = \frac{1}{r_1(t)}\cos^2\varphi(t) + c_1(t)\sin^2\varphi(t) =: F_1(t,\varphi), \tag{2.19}$$

$$\varphi'(t) = \frac{1}{r_2(t)}\cos^2\varphi(t) + c_2(t)\sin^2\varphi(t) =: F_2(t,\varphi). \tag{2.20}$$

Pak zřejmě platí

$$F_1(t,\varphi) \le F_2(t,\varphi).$$

Je-li tedy φ_1 řešením (2.19) a φ_2 řešením (2.20) spolu s počátečními podmínkami, které splňují

$$\varphi_1(a) \le \varphi_2(a),$$

pak dle Lemmatu 2.13, dostáváme

$$\varphi_1(t) \le \varphi_2(t), \qquad t \in [a,b)\,.$$

(ii) Důkaz budeme provádět sporem, tzn. předpokládáme, že existuje $e \in (d,b)$, pro které platí

$$\varphi_1(e) = \varphi_2(e).$$

Pak musí platit, že

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t), \qquad \forall\, t \in [a, e]\,.$$

Kdyby to neplatilo, pak by existovalo $\bar{t} \in (a, e]$ takové, že

$$\varphi_1(\bar{t}) < \varphi_2(\bar{t})$$

a z (i) by pak plynulo, že

$$\varphi_1(t) < \varphi_2(t), \qquad \forall\, t \in \left[\bar{t}, b\right),$$

což je ale spor s

$$\varphi_1(d) = \varphi_2(d).$$

Pro $t \in [a, e]$ proto položme

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) = \varphi_2(t).$$

Pak pro $t \in [a, d]$ platí

$$\begin{aligned}
0 &= (\varphi_1(t) - \varphi_2(t))' \\
&= \frac{1}{r_1(t)} \cos^2 \varphi(t) + c_1(t) \sin^2 \varphi(t) - \frac{1}{r_2(t)} \cos^2 \varphi(t) - c_2(t) \sin^2 \varphi(t) \\
&= \left(\frac{1}{r_1(t)} - \frac{1}{r_2(t)} \right) \cos^2 \varphi(t) + (c_1(t) - c_2(t)) \sin^2 \varphi(t).
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Protože platí (2.17) nebo (2.18), na pravém okolí $\mathcal{O}^+(d)$ bodu d na intervalu $[a, e]$ platí buďto

$$c_1(t) < c_2(t), \qquad \forall\, t \in \mathcal{O}^+(d) \cap [a, e]\,, \tag{2.22}$$

nebo

$$r_1(t) > r_2(t) \qquad \text{a} \qquad c_2(t) \neq 0, \qquad \forall\, t \in \mathcal{O}^+(d) \cap [a, e]\,, \tag{2.23}$$

Pokud platí (2.22), pak z (2.21) dostáváme, že

$$\sin \varphi(t) = 0, \qquad \forall\, t \in \mathcal{O}^+(d) \cap [a, e]\,,$$

tedy

$$\varphi_i(t) = 0 \pmod{\pi}, \qquad \forall\, t \in \mathcal{O}^+(d) \cap [a, e]\,, \qquad i = 1, 2,$$

což je spor.

Pokud platí (2.23), pak z (2.21) dostáváme, že

$$\cos \varphi(t) = 0, \qquad \forall\, t \in \mathcal{O}^+(d) \cap [a, e]\,,$$

tedy

$$\varphi_i(t) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}, \qquad \forall\, t \in \mathcal{O}^+(d) \cap [a, e]\,, \qquad i = 1, 2,$$

což je opět spor.

□

Poznámka 2.15 Z důkazu Věty 2.14 je vidět, že uvažujeme-li r_i, c_i, $i = 1, 2$, spojité na $I = [a, b]$, pak závěry věty platí i v bodě b.

Věta 2.16 (**Sturmova srovnávací věta**) *Nechť x_1 je řešením (2.15) a $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in I$, jsou dva jeho po sobě jdoucí nulové body. Jestliže platí, že koeficienty rovnic (2.15) a (2.16) splňují*

$$c_1(t) \leq c_2(t), \qquad r_1(t) \geq r_2(t) > 0, \qquad t \in [t_1, t_2],$$

pak má řešení x_2 rovnice (2.16) na intervalu (t_1, t_2) nulový bod nebo je násobkem řešení x_1. Druhá možnost je vyloučena, pokud je jedna z nerovností ostrá na množině kladné míry.

Důkaz. Důkaz uvádět nebudeme, prezentujeme jej totiž dále u pololineární verze této věty (Věta 3.13). Jak uvidíme, lineární případ je speciálním případem pololineárního. □

Poznámka 2.17 Pokud platí předpoklady Věty 2.16, pak se rovnice (2.16) nazývá *Sturmova majoranta* rovnice (2.15) a rovnice (2.15) se nazývá *Sturmova minoranta* rovnice (2.16).

2.4.3 Ohraničenost

Jelikož nyní budeme rozebírat ohraničenost řešení, budeme uvažovat rovnici (2.1), kde je interval I konkrétního tvaru a to sice $I = [a, \infty)$. Ještě dříve, než se k této větě dostaneme, uvedeme známé lemma, které budeme potřebovat k jejímu důkazu.

Lemma 2.18 (**Gronwallovo lemma**) *Nechť u, v jsou spojité nezáporné funkce intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$, $t_0 \in J$. Dále předpokládejme, že $M \geq 0$ je reálná konstanta. Jestliže*

$$u(t) \leq M + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)\,\mathrm{d}s\,, \qquad \forall\, t \geq t_0,$$

pak

$$u(t) \leq M \exp\left(\int_{t_0}^{t} v(s)\,\mathrm{d}s\right), \qquad \forall\, t \geq t_0.$$

Důkaz. Důkaz nebudeme uvádět, lze ho nalézt např. v [9], str. 19. □

Věta 2.19 *Každé řešení rovnice (2.1) na intervalu $I = [a, \infty)$ vyhovuje nerovnosti*

$$|x(t)| \leq K \exp\left[\frac{1}{2}\int_a^t \left|\frac{1}{r(s)} - c(s)\right| \mathrm{d}s\right], \qquad t \in (a, \infty),$$

kde $K = \sqrt{x^2(a) + (r(a)x'(a))^2} = \rho(a)$.

Pokud navíc platí, že

$$\int_a^\infty \left|\frac{1}{r(t)} - c(t)\right| \mathrm{d}t < \infty, \tag{2.24}$$

pak je toto řešení ohraničené.

Důkaz. Nejprve budeme dokazovat první část tvrzení. Protože $x(t) = \rho(t)\sin\varphi(t)$, vidíme, že

$$|x(t)| \le |\rho(t)|, \qquad t \in I. \tag{2.25}$$

Z (2.9) dostáváme

$$\begin{aligned} \rho(t) - \rho(a) &= \int_a^t \rho(s)\left(\frac{1}{r(s)} - c(s)\right)\sin\varphi(s)\cos\varphi(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_a^t \rho(s)\left(\frac{1}{r(s)} - c(s)\right)\frac{1}{2}\sin 2\varphi(s)\,\mathrm{d}s\,, \qquad t \in (a,\infty) \end{aligned}$$

a protože $|\sin 2\varphi(s)| \le 1$, dostáváme

$$|\rho(t)| \le \rho(a) + \frac{1}{2}\int_a^t |\rho(s)|\left|\frac{1}{r(s)} - c(s)\right|\mathrm{d}s\,.$$

Použitím Lemmatu 2.18 máme

$$|\rho(t)| \le \rho(a)\exp\left(\frac{1}{2}\int_a^t \left|\frac{1}{r(s)} - c(s)\right|\mathrm{d}s\right).$$

Protože platí (2.25), celkem dostáváme

$$|x(t)| \le \rho(a)\exp\left(\frac{1}{2}\int_a^t \left|\frac{1}{r(s)} - c(s)\right|\mathrm{d}s\right).$$

Nyní budeme dokazovat druhou část. Předpokládejme tedy navíc, že platí (2.24). Pak

$$\exp\left(\frac{1}{2}\int_a^\infty \left|\frac{1}{r(t)} - c(t)\right|\mathrm{d}t\right) \in \mathbb{R}.$$

Označíme $L = \rho(a)\exp\left(\frac{1}{2}\int_a^\infty \left|\frac{1}{r(t)} - c(t)\right|\mathrm{d}t\right)$, pak platí, že $L \in \mathbb{R}$. Jelikož $|x(t)| \le L$, řešení x je ohraničené. □

2.4.4 Diskonjugovanost

Následující věta nám popisuje, za jakých podmínek je rovnice (2.1) tzv. *diskonjugovaná* – tzn. že všechna netriviální řešení rovnice mají na daném intervalu nejvýše jeden nulový bod.

Věta 2.20 *Uvažujme rovnici (2.1), kde $I = [a,\infty)$, a řešení x, které splňuje $x(a) = 0$. Bez újmy na obecnosti můžeme navíc předpokládat, že $x'(a) > 0$. Pokud*

$$\int_a^\infty \left(\frac{1}{r(t)} + |c(t)|\right)\mathrm{d}t \le \pi,$$

pak každé netriviální řešení rovnice (2.1) má na daném intervalu nejvýše jeden nulový bod.

Důkaz. Integrací rovnice (2.10), kde $\varphi(a) = 0$, dostáváme

$$\varphi(t) = \int_a^t \left(\frac{1}{r(s)} \cos^2 \varphi(s) + c(s) \sin^2 \varphi(s) \right) \mathrm{d}s \leq \int_a^t \left(\frac{1}{r(s)} + |c(s)| \right) \mathrm{d}s\,.$$

Tedy

$$\varphi(t) < \int_a^\infty \left(\frac{1}{r(s)} + |c(s)| \right) \mathrm{d}s$$

a dle předpokladu

$$\varphi(t) < \int_a^\infty \left(\frac{1}{r(s)} + |c(s)| \right) \mathrm{d}s \leq \pi.$$

Protože $\varphi'(a) > 0$, platí

$$\varphi(t) < \int_a^\infty \left(\frac{1}{r(t)} + |c(t)| \right) \mathrm{d}t \leq \pi, \qquad t \in [a, \infty). \tag{2.26}$$

Již víme, že řešení bude mít nulový bod, když $\varphi(t) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (viz Věta 2.9). Dle (2.26) tedy platí, že žádné netriviální řešení nemůže mít na intervalu $[a, \infty)$ dva nulové body. □

2.4.5 Oscilační kritéria

Vlastním přínosem je nový důkaz následujícího oscilačního kritéria Leightonova-Wintnerova typu.

Věta 2.21 *Nechť $r(t) > 0$ a $c(t) > 0$ pro všechna $t \in I$, kde $I = [a, \infty)$, a*

$$\int_a^\infty \frac{1}{r(t)} \,\mathrm{d}t = \int_a^\infty c(t) \,\mathrm{d}t = \infty. \tag{2.27}$$

Pak je rovnice (2.1) oscilatorická.

Důkaz. Důkaz uvádět nebudeme, dále jej totiž prezentujeme v obecnější pololineární verzi (Věta 3.17). □

2.4.6 Sturmova-Liouvilleova teorie

Budeme studovat okrajový problém

$$\begin{aligned} x''(t) + \lambda d(t) x(t) &= 0, \qquad t \in [a, b], \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \\ x(a) &= 0, \\ x(b) &= 0, \end{aligned} \tag{2.28}$$

kde na daném intervalu je $d(t) \geq 0$ a $d \not\equiv 0$. Tuto úlohu nazveme *Sturmovým-Liouvilleovým problémem.* Můžeme na ni také použít Prüferovu transformaci. Dále budeme předpokládat, že $\lambda > 0$. Řešíme okrajový problém, kde na obou koncích máme předepsanou nulovou hodnotu, tzn. že řešení má na intervalu $[a, b]$ minimálně dva nulové body. Kdybychom uvažovali $\lambda \leq 0$, pak $\lambda d(t) \leq 0$. To by ale znamenalo, dle Sturmovy srovnávací věty (Věta 2.16) srovnáním s rovnicí $x''(t) = 0$, která nemá žádný nulový bod, že řešení bude mít na uvažovaném intervalu maximálně jeden nulový bod.

Věta 2.22 *Existuje neohraničená rostoucí posloupnost kladných čísel λ_n, $\lambda_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, taková, že problém (2.28) má nenulové řešení právě tehdy, když $\lambda = \lambda_n$. Odpovídající řešení $x_n(t) = x(t, \lambda_n)$ je určeno jednoznačně až na multiplikativní konstantu a má na intervalu (a, b) právě $n - 1$ nulových bodů.*

Navíc, pokud je d kladné na celém intervalu (a, b), vlastní čísla vyhovují vztahu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\lambda_n}}{n} = \frac{\pi}{\int_a^b \sqrt{d(t)}\,\mathrm{d}t}.$$

Důkaz. Důkaz je speciálním případem důkazu pololineární verze této věty (Věta 3.18). Jeho první část však lze v lineárním případě provést jednodušeji, proto ji zde uvedeme.

Nechť x je řešením rovnice z (2.28) dané počátečními podmínkami

$$x(a, \lambda) = 0, \qquad x'(a, \lambda) = 1. \tag{2.29}$$

Dále nechť ρ a φ jsou funkce definované jako ve Větě 2.9, dle (2.29) tedy platí

$$\rho(a, \lambda) = \sqrt{x^2(a, \lambda) + x'^2(a, \lambda)} = 1,$$
$$\varphi(a, \lambda) = \operatorname{arccotg} \frac{x'(a, \lambda)}{x(a, \lambda)} = 0.$$

Budeme hledat taková $\lambda = \lambda_n$, pro která platí $x(b, \lambda_n) = 0$, dle Věty 2.9 tedy

$$\varphi(b, \lambda_n) = \operatorname{arccotg} \frac{x'(b, \lambda_n)}{x(b, \lambda_n)} + n\pi = n\pi, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Na Obrázku 2.1 vidíme, že

$$\varphi(t, \lambda) = 0 \pmod{\pi} \qquad \text{právě tehdy, když} \qquad x(t, \lambda) = 0. \tag{2.30}$$

Dle Věty 2.14 víme, že φ je vzhledem k λ neklesající, tzn.

$$\lim_{\lambda\to\infty} \varphi(t, \lambda) = \infty, \qquad t \in [a, b]\,,$$

a dle Věty 2.9, že φ je vždy nezáporné, tzn.

$$\lim_{\lambda\to-\infty} \varphi(t, \lambda) = 0, \qquad t \in (a, b]\,.$$

Funkce φ má spojitou derivaci, kterou dostaneme ze vztahu (2.10) a to sice jako

$$\varphi'(t, \lambda) = \cos^2 \varphi(t, \lambda) + \lambda d(t) \sin^2 \varphi(t, \lambda).$$

V okolí $\varphi(t, \lambda) = 0 \pmod{\pi}$ pak platí

$$\varphi'(t, \lambda) = \cos^2 0 + \lambda d(t) \sin^2 0 = 1 > 0,$$

tzn. že funkce φ je v okolí nulových bodů řešení x dokonce rostoucí.

V bodě $t = b$ taktéž platí

$$\lim_{\lambda\to-\infty} \varphi(b, \lambda) = 0.$$

Protože φ je v bodě b rostoucí vzhledem k λ, musí existovat $\lambda = \lambda_1$ takové, že

$$\varphi(b, \lambda_1) = \pi.$$

Podmínka $x(b, \lambda_1) = 0$ je dle (2.30) splněna. Protože dále platí $\varphi(a, \lambda_1) = 0$, dostáváme

$$0 < \varphi(t, \lambda_1) < \pi, \qquad t \in (a, b)\,,$$

což znamená, že x_1 nemá na intervalu (a, b) žádný nulový bod.

Pokud λ necháme dále růst, musí existovat $\lambda = \lambda_2$ takové, že

$$\varphi(b, \lambda_2) = 2\pi.$$

Podmínka $x(b, \lambda_2) = 0$ je dle (2.30) splněna. Protože dále platí $\varphi(a, \lambda_2) = 0$, dostáváme

$$0 < \varphi(t, \lambda_2) < 2\pi, \qquad t \in (a, b)\,,$$

což znamená, že x_2 má na intervalu (a, b) právě jeden nulový bod.

Budeme-li dále pokračovat, v n-tém kroku dostáváme $\lambda = \lambda_n$ takové, že

$$\varphi(b, \lambda_n) = n\pi.$$

Podmínka $x(b, \lambda_n) = 0$ je dle (2.30) splněna. Protože dále platí $\varphi(a, \lambda_n) = 0$, dostáváme

$$0 < \varphi(t, \lambda_n) < \pi, \qquad t \in (a, b)\,,$$

což znamená, že x_n má na intervalu (a, b) právě $n - 1$ nulových bodů.

Pokud je x_n řešením (2.28), pak je také zřejmě i μx_n, $\mu \in \mathbb{R}$, řešením tohoto problému. Kromě toho platí také, že každá dvě řešení (2.28) musí být lineárně závislá. Řešení x_n je tedy určeno jednoznačně až na multiplikativní konstantu. □

Čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, pro které má systém (2.28) netriviální řešení, budeme nazývat *vlastními hodnotami* a jim odpovídající řešení $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *vlastními funkcemi* okrajového problému (2.28).

Poznámka 2.23 Platí, že dvě řešení x_n, x_m, $n \neq m$ okrajového problému (2.28), které odpovídají vlastním hodnotám λ_n, λ_m, jsou ortogonální, tzn. že platí

$$\int_a^b d(t) x_n(t) x_m(t)\, \mathrm{d}t = 0.$$

Skutečně, funkce x_n a x_m jsou řešeními

$$x_n''(t) + \lambda_n d(t) x_n(t) = 0, \tag{2.31}$$
$$x_m''(t) + \lambda_m d(t) x_m(t) = 0. \tag{2.32}$$

Vynásobíme-li (2.31) x_m a (2.32) x_n, odečteme a zintegrujeme, dostáváme

$$\int_a^b \left(x_n''(t) x_m(t) - x_m''(t) x_n(t)\right) \mathrm{d}t = \int_a^b (\lambda_m - \lambda_n)\, d(t) x_n(t) x_m(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Jelikož platí $x_n''(t)x_m(t) - x_m''(t)x_n(t) = \left(x_n'(t)x_m(t) - x_n(t)x_m'(t)\right)'$, dostáváme

$$\left[x_n'(t)x_m(t) - x_n(t)x_m'(t)\right]_a^b = (\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b d(t)x_n(t)x_m(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

dle okrajových podmínek

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b d(t)x_n(t)x_m(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Protože $n \neq m$, tedy $\lambda_n \neq \lambda_m$, celkově dostáváme

$$\int_a^b d(t)x_n(t)x_m(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

3 Pololineární diferenciální rovnice

Základní informace v této kapitole jsou čerpány z [7], jsou případně doplněny o detailnější výpočty a komentáře (zejména v části 3.2). Vlastními výsledky jsou pak Věta 3.15, Věta 3.16 a nový důkaz Věty 3.17.

3.1 Úvodní poznámky

Budeme uvažovat *pololineární diferenciální rovnici druhého řádu* tvaru

$$(r(t)\Phi(x'))' + c(t)\Phi(x) = 0, \qquad \Phi(x) := |x|^{p-1}\operatorname{sgn} x, \qquad p > 1, \qquad t \in I, \tag{3.1}$$

kde na daném intervalu je $r(t) > 0$ a r, c jsou zde spojité. Nebude-li řečeno jinak, budeme po celou kapitolu předpokládat, že tyto podmínky pro koeficienty jsou splněny.

Číslo $q > 1$ nazveme *konjugovaným* k číslu p, pokud platí

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Funkci $x \in C^1(I)$ nazveme *řešením* rovnice (3.1), jestliže na daném intervalu vyhovuje rovnici (3.1) a $r\Phi(x') \in C^1(I)$. Pokud je $x \equiv 0$, nazveme ho *triviálním řešením* rovnice (3.1). V opačném případě se řešení nazývá *netriviální*.

Poznámka 3.1 V případě, kdy je $p = 2$ přejde pololineární rovnice (3.1) na lineární rovnici (2.1), kterou jsme rozebírali v předchozí kapitole. Funkce Φ je pak identita.

Poznámka 3.2 Většina tvrzení, která zde formulujeme, by (podobně jako v lineárním případě) platila i za slabšího předpokladu. Stačilo by, aby byly r^{1-q} a c lokálně integrovatelné.

Poznámka 3.3 Rovnice (3.1) se nazývá *pololineární*, protože prostor jejich řešení je homogenní, ale už není aditivní. Netvoří tedy lineární prostor, neboť sdílí pouze polovinu vlastností lineárního prostoru. Ztráta aditivity je pak příčinou absence některých nástrojů známých z lineární teorie, což má za následek potřebu nalezení nových postupů.

Zásadní rozdíl se týká *Wronskiánu*, který je (v lineární teorii) pro dvě spojitě diferencovatelné funkce x_1, x_2 definován jako

$$W(x_1, x_2)(t) = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t).$$

Pro dvě řešení x_1, x_2 lineární rovnice (2.1) vždy platí *Wronského identita*

$$r(t)W(x_1, x_2)(t) \equiv \omega, \qquad \forall\, t \in I,$$

kde ω je reálná konstanta. K této identitě však neexistuje pololineární analogie.

Dále nemáme k dispozici pololineární analogii formule pro určení lineárně nezávislého řešení na základě znalosti jednoho řešení. Bohužel selhává i lineární transformace závislé proměnné, viz Poznámka 3.4.

Významné rozdíly mezi pololineárním a lineárním případem byly dále vypozorovány u okrajových úloh (Fredholmova alternativa), či ve struktuře prostoru řešení, které bere v úvahu limitní chování řešení a jeho prvních derivací. Problémy jsou i u počáteční úlohy pro nehomogenní rovnici, viz Poznámka 3.11.

Poznámka 3.4 V lineárním případě existuje transformace převádějící homogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu na Jacobiho tvar, viz Poznámka 2.3. K této transformaci existuje částečná pololineární analogie.

Uvažujme tedy rovnici (3.1), kde $I = [a, \infty)$. Platí-li

$$\int_a^\infty r^{1-q}(s)\,\mathrm{d}s = \infty,$$

pak postupujeme analogicky jako v lineárním případě, přičemž je opět zachován typ intervalu. Tedy pro netriviální řešení x rovnice (3.1) transformujeme nezávislou proměnnou a položíme

$$\begin{aligned} s &= \psi(t), \qquad \psi \in C^1(I), \qquad \psi' \neq 0, \qquad t \in I, \\ y(s) &= x(t), \end{aligned}$$

tím rovnici (3.1) převedeme na

$$\left(\widehat{r}(s)\Phi(y')\right)' + \widehat{c}(s)\Phi(y) = 0, \qquad s \in \psi(I),$$

kde

$$\begin{aligned} \widehat{r} &= \left(r \circ \psi^{-1}\right) \Phi\left(\psi' \circ \psi^{-1}\right), \\ \widehat{c} &= \frac{c \circ \psi^{-1}}{\psi' \circ \psi^{-1}}. \end{aligned}$$

Následně zvolíme ψ konkrétně jako

$$\psi(t) = \int_{t_0}^t r^{1-q}(s)\,\mathrm{d}s\,, \qquad t \in I$$

a dostáváme

$$\widehat{r} \equiv 1.$$

Avšak platí-li

$$\int_a^\infty r^{1-q}(s)\,\mathrm{d}s < \infty,$$

nelze postupovat jako v lineárním případě, neboť kvůli ztrátě aditivity prostoru řešení (3.1) neexistuje použitelná analogie lineární transformace $x(t) = h(t)u(t)$.

Definice 3.5 Řekneme, že netriviální řešení x rovnice (3.1), kde $I = [a, \infty)$, je *oscilující*, jestliže má na daném intervalu I nekonečně mnoho nulových bodů, tzn. že ke každému $T \in I$ existuje $t \geq T$ takové, že platí $x(t) = 0$.

Netriviální řešení se nazývá *neoscilující* v opačném případě, tzn. když existuje $T \in I$ takové, že pro všechna $t \geq T$ platí $x(t) \neq 0$.

Pokud jsou všechna řešení rovnice (3.1) oscilující, rovnice se nazývá *oscilatorická*, pokud jsou všechna neoscilující, nazývá se *neoscilatorická*.

Poznámka 3.6 Později uvidíme, že (stejně jako v lineárním případě) díky Sturmově oddělovací větě (Věta 3.12) platí, že nějaké řešení rovnice (3.1) osciluje právě tehdy, když oscilují všechna řešení této rovnice.

Rovnice tvaru (3.1) popisují například proudění nenewtonovských kapalin či různé modely v glaciologii (popis pohybu ledovců). Hrají také důležitou roli v eliptických parciálních diferenciálních rovnicích s p-Laplaciánem, které se za daných předpokladů dají zredukovat právě na rovnice tvaru (3.1). Původně se p-Laplacián objevil v souvislosti s nelineárním Darcyho zákonem a prouděním porézními materiály, má však i další interpretace a také se uvažují různá jeho zobecnění.

3.2 Prüferova transformace

V této části zavedeme pololineární Prüferovu transformaci rovnice (3.1). Ukáže se, že bude velmi podobného tvaru jako v lineárním případě, viz (2.6), jen místo klasických trigonometrických funkcí zde budou vystupovat zobecněné trigonometrické funkce. Proto, dříve než se dostaneme k samotné transformaci, musíme tyto zobecněné trigonometrické funkce zavést.

3.2.1 Zobecněné trigonometrické funkce

Cílem nyní bude zavést zobecněné trigonometrické funkce, zejména $\sin_p$ a $\cos_p$, které se pro $p = 2$ zredukují na klasický sin a cos.

Budeme uvažovat následující pololineární diferenciální rovnici druhého řádu

$$(\Phi(x'))' + (p-1)\Phi(x) = 0 \tag{3.2}$$

a označíme jako S řešení této rovnice dané počátečními podmínkami

$$\begin{aligned} S(0) &= 0, \\ S'(0) &= 1. \end{aligned}$$

Nyní budeme s rovnicí (3.2) pracovat. Nahradíme-li v této rovnici x za S a vynásobíme-li výrazem S' dostáváme

$$(\Phi(S'))'S' + (p-1)\Phi(S)S' = 0.$$

Dále budeme upravovat

$$\begin{aligned} 0 &= (\Phi(S'))'S' + (p-1)\Phi(S)S' = (|S'|^{p-1} \operatorname{sgn} S')'S' + (p-1)S'|S|^{p-1} \operatorname{sgn} S \\ &= (p-1)|S'|^{p-2}S''S' \left(\operatorname{sgn} S'\right)^2 + (p-1)S'|S|^{p-1} \operatorname{sgn} S, \end{aligned}$$

podělíme výrazem $p-1$

$$|S'|^{p-1}S'' \operatorname{sgn} S' + |S|^{p-1}S' \operatorname{sgn} S = 0,$$

vynásobíme výrazem p a znovu budeme upravovat

$$0 = p|S'|^{p-1}S'' \operatorname{sgn} S' + p|S|^{p-1}S' \operatorname{sgn} S = [|S'|^p + |S|^p]'$$

a tedy

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t \left[|S'|^p + |S|^p\right]' dt = \left[|S'|^p + |S|^p\right]_0^t \\ &= |S'(t)|^p + |S(t)|^p - (|S'(0)|^p + |S(0)|^p) = |S'(t)|^p + |S(t)|^p - (1+0)\,, \end{aligned}$$

odtud

$$1 = |S'(t)|^p + |S(t)|^p.$$

Pak

$$|S|^p + |S'|^p \equiv 1 \tag{3.3}$$

nazveme *zobecněnou Pythagorovou identitou.*

Protože $S'(0) = 1$, funkce S je kladná na nějakém pravém okolí bodu $t = 0$. Z (3.3) tedy dostáváme

$$S' = \sqrt[p]{1 - S^p}.$$

Tuto rovnici budeme dále upravovat

$$\begin{aligned} S' &= \sqrt[p]{1 - S^p}, \\ \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= \sqrt[p]{1 - S^p}, \\ \frac{\mathrm{d}S}{\sqrt[p]{1 - S^p}} &= \mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Celkem tedy dostáváme, že na nějakém pravém okolí bodu $t = 0$ platí

$$t = \int_0^{S(t)} (1 - s^p)^{-\frac{1}{p}}\,\mathrm{d}s\,. \tag{3.4}$$

Funkce S bude vystupovat právě v zobecněných funkcích $\sin_p$ a $\cos_p$. Abychom ale mohli tyto zobecněné funkce sestrojit, musíme ještě zavést zobecnění Ludolfova čísla π.

Při zavedení zobecněného Ludolfova čísla π_p se budeme inspirovat vztahem, který platí v případě, kdy $p = 2$, tedy v lineárním případě. Zde $\pi_2 \equiv \pi$ vyjadřuje polovinu délky jednotkové kružnice, která je dána vztahem $x^2 + y^2 = 1$, tzn.

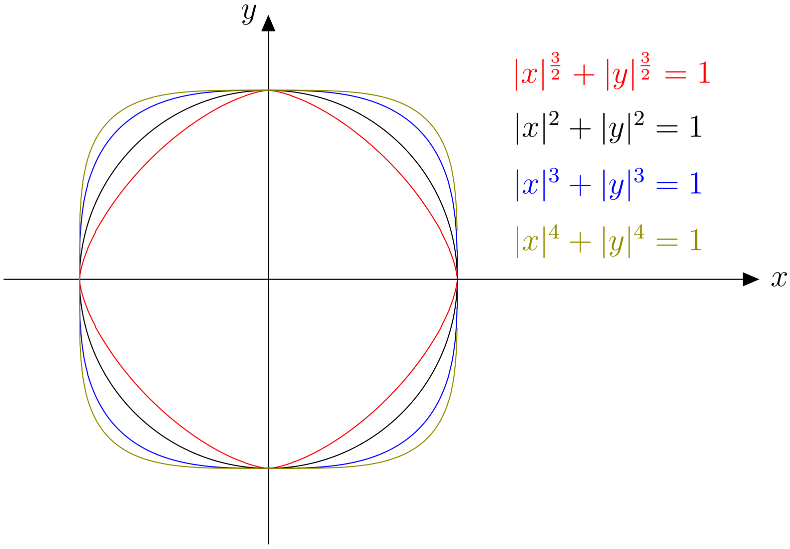
$$\pi = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x\,,$$

tedy

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^1 \left(1 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Zavedeme proto *zobecněnou kružnici* $|x|^p + |y|^p = 1$, viz Obrázek 3.1, a podobně jako v lineárním případě definujeme *zobecněné Ludolfovo číslo* π_p jako

$$\frac{\pi_p}{2} = \int_0^1 (1 - s^p)^{-\frac{1}{p}}\,\mathrm{d}s\,.$$



Obrázek 3.1: Znázornění zobecněné kružnice $|x|^p + |y|^p = 1$ pro $p \in \left\{\frac{3}{2}, 2, 3, 4\right\}$.

Tento vztah budeme dále upravovat a to sice pomocí substituce $u = s^p$, pak dostáváme

$$\frac{\pi_p}{2} = \int_0^1 (1 - s^p)^{-\frac{1}{p}} \,\mathrm{d}s = \frac{1}{p} \int_0^1 (1 - u)^{-\frac{1}{p}} u^{-\frac{1}{q}} \,\mathrm{d}u\,.$$

Za použití Eulerovy beta funkce

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1 - t)^{y-1} \,\mathrm{d}t$$

můžeme psát

$$\frac{\pi_p}{2} = \frac{1}{p} B\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right).$$

Protože dále platí

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x + y)}, \\ \Gamma(x)\Gamma(1 - x) &= \frac{\pi}{\sin(\pi x)}, \end{aligned}$$

kde

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t$$

je Eulerova gamma funkce, celkem lze psát

$$\pi_p = \frac{2\pi}{p \sin \frac{\pi}{p}}. \tag{3.5}$$

Rovnice (3.4) jednoznačně definuje funkci S na intervalu $[0, \frac{\pi_p}{2}]$ s okrajovou podmínkou $S\left(\frac{\pi_p}{2}\right) = 1$. Z rovnice (3.3) dostáváme, že $S'\left(\frac{\pi_p}{2}\right) = 0$.

Nyní již můžeme definovat zobecněné trigonometrické funkce. *Zobecněnou funkci sinus* $\sin_p$ definujeme jako liché $2\pi_p$ periodické prodloužení funkce S, tedy

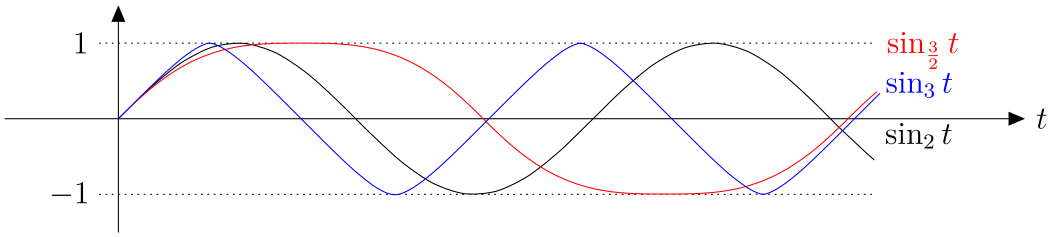
$$\sin_p t = \begin{cases} S(t), & t \in \left[0, \frac{\pi_p}{2}\right], \\ S(\pi_p - t), & t \in \left[\frac{\pi_p}{2}, \pi_p\right]. \end{cases}$$

Funkci můžeme vidět na Obrázku 3.2. *Zobecněnou funkci kosinus* $\cos_p$ definujeme jako

$$\cos_p(t) = (\sin_p(t))'.$$

Obě tyto zobecněné funkce se pro $p = 2$ redukují na klasické funkce $\sin$ a $\cos$. Z (3.3) vidíme, že platí zobecněná Pythagorova identita

$$|\sin_p t|^p + |\cos_p t|^p \equiv 1. \tag{3.6}$$



Obrázek 3.2: Znázornění zobecněné funkce sinus.

Protože $\sin_p$ bijektivně zobrazuje interval $\left[-\frac{\pi_p}{2}, \frac{\pi_p}{2}\right]$ na interval $[-1, 1]$, existuje k němu inverzní funkce, kterou označíme $\arcsin_p$. Podobně, ke $\cos_p$ také existuje inverzní funkce, kterou budeme značit $\arccos_p$.

Dále zavedeme *zobecněnou funkci tangens* tg_p a *zobecněnou funkci kotangens* cotg_p jako

$$\mathrm{tg}_p\, t = \frac{\sin_p t}{\cos_p t},$$
$$\mathrm{cotg}_p\, t = \frac{\cos_p t}{\sin_p t}.$$

Funkce tg_p je periodická s periodou π_p a má nespojitost v $\frac{\pi_p}{2} + k\pi_p$, $k \in \mathbb{Z}$. Funkce cotg_p je také periodická s periodou π_p, ale má nespojitost v $k\pi_p$, $k \in \mathbb{Z}$.

Z rovnic (3.2) a (3.6) dostáváme

$$\left(\mathrm{tg}_p\, t\right)' = \frac{1}{|\cos_p t|^p} = 1 + |\,\mathrm{tg}_p\, t|^p,$$
$$\left(\mathrm{cotg}_p\, t\right)' = -|\,\mathrm{cotg}_p\, t|^{2-p}(1 + |\,\mathrm{cotg}_p\, t|^p).$$

To znamená, že $\left(\mathrm{tg}_p\, t\right)' > 0$ a $\left(\mathrm{cotg}_p\, t\right)' < 0$ na daných definičních oborech. Existují tedy inverzní funkce arctg_p, $\mathrm{arccotg}_p$ a to na intervalu $\left(-\frac{\pi_p}{2}, \frac{\pi_p}{2}\right)$, respektive $(0, \pi_p)$.

3.2.2 Prüferova transformace

Nechť x je netriviálním řešením (3.1). Transformace

$$\begin{aligned} x(t) &= \rho(t)\sin_p\varphi(t), \\ x'(t) &= r^{1-q}(t)\rho(t)\cos_p\varphi(t) \end{aligned} \tag{3.7}$$

rovnice (3.1) se nazývá *pololineární Prüferova transformace*, kde q je konjugované číslo k p.

Zderivujeme-li první výraz v (3.7) a porovnáme ho s druhým, dostaneme

$$\rho'(t)\sin_p\varphi(t) + \rho(t)\varphi'(t)\cos_p\varphi(t) = r^{1-q}(t)\rho(t)\cos_p\varphi(t). \tag{3.8}$$

Aplikujeme funkci Φ na obě strany druhého výrazu v (3.7) a budeme upravovat

$$\begin{aligned} \Phi(x') &= \Phi(r^{1-q}(t))\Phi(\rho(t))\Phi(\cos_p\varphi(t)), \\ \Phi(r^{q-1}(t))\Phi(x') &= \Phi(\rho(t))\Phi(\cos_p\varphi(t)). \end{aligned}$$

Nejprve upravíme levou stranu rovnosti

$$\Phi(r^{q-1}(t))\Phi(x') = (r^{q-1})^{p-1}(t)\Phi(x') = r^{pq-p-q+1}(t)\Phi(x')$$

a protože platí $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, dostáváme $pq-p-q=0$ a tedy

$$r^{pq-p-q+1}(t)\Phi(x') = r(t)\Phi(x').$$

Konečně upravíme i pravou stranu rovnosti

$$\Phi(\rho(t))\Phi(\cos_p\varphi(t)) = \rho^{p-1}(t)\Phi(\cos_p\varphi(t)).$$

Celkem tedy obdržíme

$$r(t)\Phi(x') = \rho^{p-1}(t)\Phi(\cos_p\varphi(t)).$$

Nyní rovnici zderivujeme a následně budeme substituovat z (3.1), získáme

$$-c(t)\Phi(x) = (p-1)\rho^{p-2}(t)\rho'(t)\Phi(\cos_p\varphi(t)) + \rho^{p-1}(t)(p-1)|\cos_p\varphi(t)|^{p-2}\left(\cos_p\varphi(t)\right)'.$$

Odvodíme $(\cos_p\varphi(t))'$ z rovnice (3.2)

$$\begin{aligned} 0 &= (\Phi(\sin_p'\varphi(t)))' + (p-1)\Phi(\sin_p\varphi(t)) = (\Phi(\cos_p\varphi(t)))' + (p-1)\Phi(\sin_p\varphi(t)) \\ &= (p-1)|\cos_p\varphi(t)|^{p-2}\left(\cos_p\varphi(t)\right)'\frac{1}{\varphi'(t)} + (p-1)\Phi(\sin_p\varphi(t)), \end{aligned}$$

z čehož dostáváme

$$(\cos_p\varphi(t))' = -|\cos_p\varphi(t)|^{2-p}\Phi(\sin_p\varphi(t))\varphi'(t).$$

Když dosadíme zpět do původní rovnice, obdržíme

$$\begin{aligned} -c(t)\Phi(x) &= (p-1)\rho^{p-2}(t)\rho'(t)\Phi(\cos_p\varphi(t)) \\ &\qquad - \rho^{p-1}(t)(p-1)|\cos_p\varphi(t)|^{p-2}|\cos_p\varphi(t)|^{2-p}\Phi(\sin_p\varphi(t))\varphi'(t) \\ &= (p-1)\left[\rho^{p-2}(t)\rho'(t)\Phi(\cos_p\varphi(t)) - \rho^{p-1}(t)\Phi(\sin_p\varphi(t))\varphi'(t)\right]. \end{aligned}$$

Substituujeme z (3.7) a konečně dostáváme

$$
\begin{aligned}
-c(t)\rho^{p-1}(t)\Phi(\sin_p \varphi(t)) = (p-1)\, \big[& \rho^{p-2}(t)\rho'(t)\Phi(\cos_p \varphi(t)) \\
& -\rho^{p-1}(t)\Phi(\sin_p \varphi(t))\varphi'(t) \big] .
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Nyní vynásobíme (3.8) výrazem $\frac{\Phi(\cos_p \varphi)}{\rho}$ a (3.9) výrazem $\frac{\sin_p \varphi}{\rho^{p-1}}$, získáme

$$
\begin{aligned}
& r^{1-q}(t)\Phi(\cos_p \varphi(t)) \cos_p \varphi(t) \\
& \quad = \frac{\rho'(t)}{\rho(t)}\Phi(\cos_p \varphi(t)) \sin_p \varphi(t) + \varphi'(t)\Phi(\cos_p \varphi(t)) \cos_p \varphi(t), \\
& -c(t)\Phi(\sin_p \varphi(t)) \sin_p \varphi(t) \\
& \quad = (p-1) \left[\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}\Phi(\cos_p \varphi(t)) \sin_p \varphi(t) - \varphi'(t)\Phi(\sin_p \varphi(t)) \sin_p \varphi(t) \right].
\end{aligned}
$$

Úpravou obdržíme

$$
r^{1-q}(t)|\cos_p \varphi(t)|^p = \frac{\rho'(t)}{\rho(t)}\Phi(\cos_p \varphi(t)) \sin_p \varphi(t) + \varphi'(t)|\cos_p \varphi(t)|^p, \tag{3.10}
$$

$$
-c(t)|\sin_p \varphi(t)|^p = (p-1) \left[\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}\Phi(\cos_p \varphi(t)) \sin_p \varphi(t) - \varphi'(t)|\sin_p \varphi(t)|^p \right]. \tag{3.11}
$$

Od $(p-1)$ násobku (3.10) odečteme rovnici (3.11) a budeme opět upravovat

$$
\begin{aligned}
(p-1)r^{1-q}(t)|\cos_p \varphi(t)|^p + c(t)|\sin_p \varphi(t)|^p & \\
&= (p-1)\varphi'(t)|\cos_p \varphi(t)|^p + (p-1)\varphi'(t)|\sin_p \varphi(t)|^p \\
&= (p-1)\varphi'(t).
\end{aligned}
$$

Celkem tedy dostáváme

$$
\varphi'(t) = \frac{c(t)}{p-1}|\sin_p \varphi(t)|^p + r^{1-q}(t)|\cos_p \varphi(t)|^p.
$$

Dále do rovnice (3.11) dosadíme vyjádření φ'

$$
\begin{aligned}
-c(t)|\sin_p \varphi(t)|^p = (p-1) & \left[\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}\Phi(\cos_p \varphi(t)) \sin_p \varphi(t) - \right. \\
& \left. \left(\frac{c(t)}{p-1}|\sin_p \varphi(t)|^p + r^{1-q}(t)|\cos_p \varphi(t)|^p \right) |\sin_p \varphi(t)|^p \right]
\end{aligned}
$$

a budeme upravovat

$$
\begin{aligned}
\rho'(t) &= \frac{\rho(t)|\sin_p \varphi(t)|^p \left[r^{1-q}(t)|\cos_p \varphi(t)|^p + \frac{c(t)}{p-1}|\sin_p \varphi(t)|^p - \frac{c(t)}{p-1} \right]}{\Phi(\cos_p \varphi(t)) \sin_p \varphi(t)} \\
&= \frac{\rho(t)|\sin_p \varphi(t)|^p \left[r^{1-q}(t)|\cos_p \varphi(t)|^p + \frac{c(t)}{p-1} \left(|\sin_p \varphi(t)|^p - 1 \right) \right]}{\Phi(\cos_p \varphi(t)) \sin_p \varphi(t)} \\
&= \frac{\rho(t)|\sin_p \varphi(t)|^p |\cos_p \varphi(t)|^p \left[r^{1-q}(t) - \frac{c(t)}{p-1} \right]}{\Phi(\cos_p \varphi(t)) \sin_p \varphi(t)}.
\end{aligned}
$$

Určitě platí, že

$$\frac{|\sin_p \varphi(t)|^p}{\sin_p \varphi(t)} = \frac{|\sin_p \varphi(t)|^p}{|\sin_p \varphi(t)| \operatorname{sgn} \sin_p \varphi(t)} = \Phi(\sin_p \varphi(t)),$$
$$\frac{|\cos_p \varphi(t)|^p}{\Phi(\cos_p \varphi(t))} = \frac{|\cos_p \varphi(t)|^p}{|\cos_p \varphi(t)|^{p-1} \operatorname{sgn} \cos_p \varphi(t)} = \cos_p \varphi(t).$$

Proto celkově máme

$$\rho'(t) = \rho(t)\Phi(\sin_p \varphi(t)) \cos_p \varphi(t) \left[r^{1-q}(t) - \frac{c(t)}{p-1} \right].$$

Funkce ρ a φ jsou tedy řešením systému

$$\rho'(t) = \rho(t)\Phi(\sin_p \varphi(t)) \cos_p \varphi(t) \left[r^{1-q}(t) - \frac{c(t)}{p-1} \right], \tag{3.12}$$

$$\varphi'(t) = \frac{c(t)}{p-1} |\sin_p \varphi(t)|^p + r^{1-q}(t) |\cos_p \varphi(t)|^p, \tag{3.13}$$

který nazýváme *pololineárním Prüferovým systémem.*

Pololineární Prüferova transformace tedy převede pololineární diferenciální rovnici druhého řádu (3.1) na dvě diferenciální rovnice prvního řádu tvarů (3.12) a (3.13).

3.3 Vlastnosti

V této části si uvedeme vlastnosti Prüferovy transformace. Ukážeme, že nejenom že lze pomocí Prüferovy transformace rovnici (3.1) převést na systém (3.13) a (3.12), ale dokonce platí, že rovnice je tomuto systému ekvivalentní.

Věta 3.7 *Každé netriviální řešení (3.1) definuje jediné řešení (3.12) a (3.13). Platí i opačné tvrzení.*

Důkaz. Již jsme ukázali, že máme-li netriviální řešení rovnice (3.1), pak ρ a φ vystupující v transformaci (3.7) jsou jediným řešením systému (3.12) a (3.13). Konkrétní vyjádření těchto funkcí pomocí proměnných x a x' uvedeme v následující Větě 3.8.

Nyní budeme chtít ukázat opačnou implikaci. Máme-li tedy řešení ρ a φ systému (3.12) a (3.13), pak jsme schopni pomocí vztahů v (3.7) najít jediné řešení x. Když dosadíme (3.7) do levé strany rovnice (3.1) a budeme upravovat, dostáváme

$$\begin{aligned}
&\left[r(t)\Phi(r^{1-q}(t)\rho(t)\cos_p \varphi(t))\right]' + c(t)\Phi(\rho(t)\sin_p \varphi(t)) \\
&\quad = \left[r(t) \left| r^{1-q}(t) \right|^{p-1} \operatorname{sgn}\left(r^{1-q}(t)\right) |\rho(t)|^{p-1} \operatorname{sgn}\left(\rho(t)\right) \Phi(\cos_p \varphi(t)) \right]' \\
&\qquad + c(t) |\rho(t)|^{p-1} \operatorname{sgn}\left(\rho(t)\right) \Phi(\sin_p \varphi(t)) \\
&\quad = \left[r(t) r^{-1}(t) \rho^{p-1}(t) \Phi(\cos_p \varphi(t)) \right]' + c(t)\rho^{p-1}(t)\Phi(\sin_p \varphi(t)) \\
&\quad = \left[\rho^{p-1}(t)\Phi(\cos_p \varphi(t)) \right]' + c(t)\rho^{p-1}(t)\Phi(\sin_p \varphi(t)) \\
&\quad = (p-1)\,\rho^{p-2}(t)\rho'(t)\Phi\left(\cos_p \varphi(t)\right) + \rho^{p-1}(t)\,(p-1)\left|\cos_p \varphi(t)\right|^{p-2}\left(\cos_p \varphi(t)\right)' \\
&\qquad + c(t)\rho^{p-1}(t)\Phi\left(\sin_p \varphi(t)\right).
\end{aligned}$$

Dosadíme za výraz $(\cos_p \varphi(t))'$, který jsme si již odvodili, a to sice jako

$$(\cos_p \varphi(t))' = -|\cos_p \varphi(t)|^{2-p} \Phi(\sin_p \varphi(t)) \varphi'(t).$$

Dostáváme tedy

$$\begin{aligned}
&(p-1)\, \rho^{p-2}(t) \rho'(t) \Phi\left(\cos_p \varphi(t)\right) + (p-1)\, \rho^{p-1}(t) \left|\cos_p \varphi(t)\right|^{p-2} \left(\cos_p \varphi(t)\right)' \\
&\qquad + c(t) \rho^{p-1}(t) \Phi\left(\sin_p \varphi(t)\right) \\
&\quad = (p-1)\, \rho^{p-2}(t) \rho'(t) \Phi\left(\cos_p \varphi(t)\right) \\
&\qquad - (p-1)\, \rho^{p-1}(t) \left|\cos_p \varphi(t)\right|^{p-2} |\cos_p \varphi(t)|^{2-p} \Phi(\sin_p \varphi(t)) \varphi'(t) \\
&\qquad + c(t) \rho^{p-1}(t) \Phi\left(\sin_p \varphi(t)\right) \\
&\quad = (p-1)\, \rho^{p-2}(t) \rho'(t) \Phi\left(\cos_p \varphi(t)\right) - (p-1)\, \rho^{p-1}(t) \Phi(\sin_p \varphi(t)) \varphi'(t) \\
&\qquad + c(t) \rho^{p-1}(t) \Phi\left(\sin_p \varphi(t)\right).
\end{aligned}$$

Do tohoto vyjádření můžeme dosadit z (3.12) a (3.13) a dále budeme upravovat

$$\begin{aligned}
&(p-1)\, \rho^{p-2}(t) \rho'(t) \Phi\left(\cos_p \varphi(t)\right) - (p-1)\, \rho^{p-1}(t) \Phi(\sin_p \varphi(t)) \varphi'(t) \\
&\qquad + c(t) \rho^{p-1}(t) \Phi\left(\sin_p \varphi(t)\right) \\
&\quad = (p-1)\, \rho^{p-2}(t) \rho(t) \Phi(\sin_p \varphi(t)) \cos_p \varphi(t) \left[r^{1-q}(t) - \frac{c(t)}{p-1} \right] \Phi\left(\cos_p \varphi(t)\right) \\
&\qquad - (p-1)\, \rho^{p-1}(t) \Phi(\sin_p \varphi(t)) \left[\frac{c(t)}{p-1} |\sin_p \varphi(t)|^p + r^{1-q}(t) |\cos_p \varphi(t)|^p \right] \\
&\qquad + c(t) \rho^{p-1}(t) \Phi\left(\sin_p \varphi(t)\right) \\
&\quad = (p-1)\, \rho^{p-1}(t) r^{1-q}(t) \Phi\left(\sin_p \varphi(t)\right) \left[\Phi\left(\cos_p \varphi(t)\right) \cos_p \varphi(t) - \left|\cos_p \varphi(t)\right|^p\right] \\
&\qquad - \rho^{p-1}(t) c(t) \Phi\left(\sin_p \varphi(t)\right) \left[\Phi\left(\cos_p \varphi(t)\right) \cos_p \varphi(t) + \left|\sin_p \varphi(t)\right|^p - 1\right] \\
&\quad = (p-1)\, \rho^{p-1}(t) r^{1-q}(t) \Phi\left(\sin_p \varphi(t)\right) \left[\frac{\left|\cos_p \varphi(t)\right|^p}{\cos_p \varphi(t)} \cos_p \varphi(t) - \left|\cos_p \varphi(t)\right|^p \right] \\
&\qquad - \rho^{p-1}(t) c(t) \Phi\left(\sin_p \varphi(t)\right) \left[\frac{\left|\cos_p \varphi(t)\right|^p}{\cos_p \varphi(t)} \cos_p \varphi(t) + \left|\sin_p \varphi(t)\right|^p - 1 \right] \\
&\quad = (p-1)\, \rho^{p-1}(t) r^{1-q}(t) \Phi\left(\sin_p \varphi(t)\right) \left(\left|\cos_p \varphi(t)\right|^p - \left|\cos_p \varphi(t)\right|^p\right) \\
&\qquad - \rho^{p-1}(t) c(t) \Phi\left(\sin_p \varphi(t)\right) \left(\left|\cos_p \varphi(t)\right|^p + \left|\sin_p \varphi(t)\right|^p - 1\right) \\
&\quad = -\rho^{p-1}(t) c(t) \Phi\left(\sin_p \varphi(t)\right) (1-1) = 0.
\end{aligned}$$

Tím je důkaz hotov. $\square$

Věta 3.8 *Nechť x je netriviální řešení rovnice (3.1), které má na intervalu $(a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, právě n nulových bodů*

$$a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n \le b, \qquad n \ge 1.$$

Dále nechť ρ je funkce definovaná jako

$$\rho(t) = \sqrt[p]{|x(t)|^p + r^q(t)\, |x'(t)|^p} \tag{3.14}$$

a φ je funkce definovaná jako

$$\varphi(t_k) = k\pi_p, \qquad k = 1, \dots, n,$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} \operatorname{arccotg}_p \frac{r^{q-1}(t)x'(t)}{x(t)}, & t \in [a, t_1), \qquad \varphi(a) = 0, \text{ je-li } x(a) = 0, \\ \operatorname{arccotg}_p \frac{r^{q-1}(t)x'(t)}{x(t)} + k\pi, & t \in (t_k, t_{k+1}), \qquad k = 2, \dots, n-1, \\ \operatorname{arccotg}_p \frac{r^{q-1}(t)x'(t)}{x(t)} + n\pi, & t \in (t_n, b]. \end{cases}$$

Potom je funkce φ je spojitá na daném intervalu a

$$\varphi(t) > k\pi_p, \qquad \forall\, t \in (t_k, b], \qquad k = 1, 2, \dots, n. \tag{3.15}$$

Důkaz. Důkaz uvádět nebudeme, je analogický důkazu lineární verze této věty (Věta 2.9). □

Poznámka 3.9 Podobně, jako jsme rozšířili Větu 2.9 ve smyslu Poznámky 2.10, tak lze rozšířit i předchozí větu.

3.4 Aplikace

V této části uvedeme některé aplikace Prüferovy transformace.

3.4.1 Existence a jednoznačnost

Jak uvidíme, k existenci a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy pro rovnici (3.1) nelze přistupovat analogicky jako v lineárním případě (viz Poznámka 2.4). Přepisem rovnice (3.1) (pomocí substituce $u = r\Phi(x')$) dostáváme systém

$$\begin{aligned} x'(t) &= r^{1-q}(t)\Phi^{-1}(u), \\ u'(t) &= -c(t)\Phi(x), \end{aligned}$$

kde q je konjugované číslo k p a Φ^{-1} je inverzní funkce k funkci Φ. Nelinearita tohoto systému ovšem nesplňuje Lipschitzovu podmínku.

Věta 3.10 *Nechť $t_0 \in I$ a $A, B \in \mathbb{R}$. Pak existuje jediné řešení rovnice (3.1), které vyhovuje podmínkám $x(t_0) = A$, $x'(t_0) = B$ a které je rozšířitelné na celý interval I. Toto řešení spojitě závisí na počátečních hodnotách A, B.*

Důkaz. K důkazu použijeme pololineární Prüferovu transformaci. Nelze ale postupovat ani jako při alternativním důkazu v lineárním případě (viz Věta 2.11), neboť pravá strana (3.12) nemusí splňovat Lipschitzovu podmínku. Pravá strana (3.13) ale Lipschitzovu podmínku splňuje, na celém intervalu I tedy dostáváme jediné řešení φ. Pravá strana (3.12) je vzhledem k ρ lineární, dosadíme-li do ní tedy dané φ, dostáváme jediné řešení ρ. Dle Věty 3.7 je pak zaručena jednoznačnost a existence řešení počáteční úlohy na intervalu I i pro rovnici (3.1). □

Poznámka 3.11 Jednoznačnost počáteční úlohy pololineární rovnice je obecně komplikovaná. Například už není zachována, pokud místo homogenní rovnice (3.1) uvažujeme následující rovnici nehomogenní

$$(r(t)\Phi(x'))' + c(t)\Phi(x) = f(t),$$

kde f je spojitá funkce, viz [7], str. 9.

3.4.2 Sturmovy věty

Následující Sturmova oddělovací věta nám (stejně jako v lineární případě) říká, že nulové body každých dvou lineárně nezávislých řešení se vzájemně oddělují.

Věta 3.12 (**Sturmova oddělovací věta**) *Nechť je x netriviálním řešením rovnice (3.1) a $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in I$, jsou dva jeho po sobě jdoucí nulové body. Pak libovolné další řešení (3.1), které není násobkem x, má na intervalu (t_1, t_2) právě jeden nulový bod.*

Důkaz. Důkaz by se prováděl analogicky jako v lineární verzi této věty (Věta 2.12), proto ho nebudeme uvádět. □

Nyní budeme chtít porovnávat řešení dvou různých rovnic tvaru (3.1). Uvažujme proto pro $t \in [a, b]$ rovnice

$$(r_1(t)\Phi(x'))' + c_1(t)\Phi(x) = 0, \tag{3.16}$$

$$(r_2(t)\Phi(x'))' + c_2(t)\Phi(x) = 0, \tag{3.17}$$

kde na daném intervalu platí, že $r_i(t) > 0$, $i = 1, 2$ a r_i, c_i, $i = 1, 2$ jsou zde spojité.

Věta 3.13 (**Sturmova srovnávací věta**) *Nechť je x_1 řešením (3.16) a $t_1 < t_2, t_1, t_2 \in I$, jsou dva jeho po sobě jdoucí nulové body. Jestliže platí, že koeficienty rovnic (3.16) a (3.17) splňují*

$$c_1(t) \leq c_2(t), \qquad r_1(t) \geq r_2(t) > 0, \qquad t \in [t_1, t_2],$$

pak má řešení x_2 rovnice (3.17) na intervalu (t_1, t_2) nulový bod nebo je násobkem řešení x_1. Druhá možnost je vyloučena, pokud je jedna z nerovností ostrá na množině kladné míry.

Důkaz. Důkaz provedeme pomocí Prüferova systému (3.12) a (3.13), který je (jak již víme) ekvivalentní pololineární rovnici (3.1), tedy i rovnicím (3.16) a (3.17). Do této rovnice dosadíme různé koeficienty c_i a r_i, $i = 1, 2$. Dostáváme

$$\varphi'(t) = \frac{c_1(t)}{p-1}\left|\sin_p \varphi(t)\right|^p + r_1^{1-q}(t)\left|\cos_p \varphi(t)\right|^p =: F_1(t, \varphi), \tag{3.18}$$

$$\varphi'(t) = \frac{c_2(t)}{p-1}\left|\sin_p \varphi(t)\right|^p + r_2^{1-q}(t)\left|\cos_p \varphi(t)\right|^p =: F_2(t, \varphi). \tag{3.19}$$

Pak zřejmě platí

$$F_1(t, \varphi) \leq F_2(t, \varphi).$$

Ze srovnávací věty, která je v pololineárním případě formulována prakticky stejně jako v lineárním případě, viz Věta 2.14, plyne, že pokud φ_1 je řešením rovnice (3.18) a φ_2 řešením rovnice (3.19) spolu s počátečními podmínkami, které splňují

$$\varphi_1(a) \leq \varphi_2(a),$$

pak platí

$$\varphi_1(t) \leq \varphi_2(t), \qquad t \in [a, b]\,.$$

Jako důsledek srovnávací věty také dostáváme, že

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$$

pouze pokud

$$c_1(t) = c_2(t) \qquad \text{a} \qquad r_1(t) = r_2(t).$$

Konkrétně pak platí, že je-li v bodě a nulový bod, tzn. že $\sin_p \varphi(a) = 0$, pak je počet nulových bodů $\sin_p \varphi_2(t)$, $t \in (a, b)$, větší než počet nulových bodů $\sin_p \varphi_1(t)$, s výjimkou případu, kdy $c_1(t) = c_2(t)$ a $r_1(t) = r_2(t)$. □

Poznámka 3.14 Pokud platí předpoklady Věty 3.13, pak (stejně jako v lineárním případě) se rovnice (3.17) nazývá *Sturmova majoranta* rovnice (3.16) a rovnice (3.16) se nazývá *Sturmova minoranta* rovnice (3.17).

3.4.3 Ohraničenost

Následující věta je novým výsledkem. Je pololineární verzí Věty 2.19 a udává, za jakých podmínek je řešení rovnice (3.1) na intervalu $I = [a, \infty)$ ohraničené.

Věta 3.15 *Každé řešení rovnice (3.1) na intervalu $I = [a, \infty)$ vyhovuje nerovnosti*

$$|x(t)| \le K \exp\left[\int_a^t \left| r^{1-q}(s) - \frac{c(s)}{p-1}\right| \mathrm{d}s\right], \qquad t \in (a, \infty),$$

kde $K = \sqrt[p]{|x(a)|^p + r^q(t)|x'(a)|^p} = \rho(a)$.

Pokud navíc platí, že

$$\int_a^\infty \left| r^{1-q}(t) - \frac{c(t)}{p-1}\right| \mathrm{d}t < \infty, \tag{3.20}$$

pak je toto řešení ohraničené.

Důkaz. Budeme postupovat obdobně jako v lineární verzi této věty, tzn. Věty 2.19.

Nejprve budeme dokazovat první část tvrzení. Protože $x(t) = \rho(t) \sin_p \varphi(t)$, vidíme, že

$$|x(t)| \le |\rho(t)|, \qquad t \in I. \tag{3.21}$$

Z (3.13) dostáváme

$$\rho(t) - \rho(a) = \int_a^t \rho(s) \Phi\left(\sin_p \varphi(s)\right) \cos_p \varphi(s) \left(r^{1-q}(s) - \frac{c(s)}{p-1}\right) \mathrm{d}s\,, \qquad t \in (a, \infty)$$

a protože

$$|\Phi\left(\sin_p \varphi(s)\right)| = \left||\sin_p \varphi(s)|^{p-1} \operatorname{sgn} \sin_p \varphi(s)\right| \le 1,$$

dostáváme

$$|\rho(t)| \le \rho(a) + \int_a^t |\rho(s)| \left| r^{1-q}(s) - \frac{c(s)}{p-1}\right| \mathrm{d}s\,.$$

Použitím Lemmatu 2.18 máme

$$|\rho(t)| \le \rho(a) \exp \left(\int_a^t \left| r^{1-q}(s) - \frac{c(s)}{p-1} \right| \mathrm{d}s \right).$$

Protože platí (3.21), celkem dostáváme

$$|x(t)| \le \rho(a) \exp \left(\int_a^t \left| r^{1-q}(s) - \frac{c(s)}{p-1} \right| \mathrm{d}s \right), \qquad t \in (a, \infty).$$

Nyní budeme dokazovat druhou část. Předpokládejme tedy navíc, že platí (3.20). Pak

$$\exp \left(\int_a^\infty \left| r^{1-q}(t) - \frac{c(t)}{p-1} \right| \mathrm{d}t \right) \in \mathbb{R}.$$

Označíme $L = \rho(a) \exp \left(\int_a^\infty \left| r^{1-q}(t) - \frac{c(t)}{p-1} \right| \mathrm{d}t \right)$, pak platí, že $L \in \mathbb{R}$. Jelikož $|x(t)| \le L$ pro všechna $t \in I$, dostáváme, že x je ohraničené. □

3.4.4 Diskonjugovanost

Dalším vlastním přínosem je následující věta, která je pololineární analogií Věty 2.20 a která popisuje, za jakých podmínek je rovnice tzv. *diskonjugovaná*.

Věta 3.16 *Uvažujme rovnici (3.1), kde $I = [a, \infty)$, a řešení x, které splňuje $x(a) = 0$. Bez újmy na obecnosti můžeme navíc předpokládat, že $x'(a) > 0$. Pokud*

$$\int_a^\infty \left(\frac{|c(t)|}{p-1} + r^{1-q}(t) \right) \mathrm{d}t \le \pi_p,$$

pak každé netriviální řešení rovnice (3.1) má na daném intervalu nejvýše jeden nulový bod.

Důkaz. Pokud zintegrujeme (3.13), kde $\varphi(a) = 0$, dostáváme

$$\varphi(t) = \int_a^t \left(\frac{c(s)}{p-1} |\sin_p \varphi(s)|^p + r^{1-q}(s) |\cos_p \varphi(s)|^p \right) \mathrm{d}s \le \int_a^t \left(\frac{|c(s)|}{p-1} + r^{1-q}(s) \right) \mathrm{d}s\,.$$

Tedy

$$\varphi(t) < \int_a^\infty \left(\frac{|c(s)|}{p-1} + r^{1-q}(s) \right) \mathrm{d}s$$

a dle předpokladu

$$\varphi(t) < \int_a^\infty \left(\frac{|c(s)|}{p-1} + r^{1-q}(s) \right) \mathrm{d}s \le \pi_p.$$

Protože $\varphi'(a) > 0$, platí

$$\varphi(t) < \int_a^\infty \left(\frac{|c(t)|}{p-1} + r^{1-q}(t) \right) \mathrm{d}t \le \pi_p, \qquad t \in [a, \infty). \tag{3.22}$$

Již víme, že řešení bude mít nulový bod, když $\varphi(t) = k\pi_p$, $k \in \mathbb{Z}$ (viz Věta 3.8). Dle (3.22) tedy platí, že žádné netriviální řešení nemůže mít na intervalu $[a, \infty)$ dva nulové body. □

3.4.5 Oscilační kritéria

Vlastním přínosem je i důkaz následujícího oscilačního kritéria, které je pololineární verzí Věty 2.21.

Věta 3.17 *Nechť $r(t) > 0$ a $c(t) > 0$ pro všechna $t \in I$, kde $I = [a, \infty)$, a*

$$\int_a^\infty r^{1-q}(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^\infty c(t)\,\mathrm{d}t = \infty. \tag{3.23}$$

Pak je rovnice (3.1) oscilatorická.

Důkaz. Předpokládejme tedy, že platí (3.23). Důkaz budeme provádět sporem, proto dále předpokládejme, že rovnice (3.1) je neoscilatorická. Musí tedy platit, že φ (tj. příslušné řešení (3.13)) je ohraničené, jinak by řešení mělo nekonečně mnoho nulových bodů. Dále, díky předpokladu $c(t) > 0$, dostáváme z (3.13), že $\varphi'(t) > 0$, což znamená, že φ je rostoucí. Musejí tedy existovat

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \varphi(t) &=: \varphi_\infty, \\
\lim_{t\to\infty} \sin_p \varphi(t) &=: \alpha, \\
\lim_{t\to\infty} \cos_p \varphi(t) &=: \beta.
\end{aligned}$$

Platí, že $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, což znamená, že alespoň jedno z čísel α a β je nenulové.

Nejprve uvažujme $\alpha \neq 0$. Pak

$$\big(\operatorname{cotg}_p \varphi(t)\big)' = -\frac{\varphi'(t)}{|\sin_p \varphi(t)|^p}.$$

Nyní dosadíme za φ' z Prüferova systému (3.13)

$$\big(\operatorname{cotg}_p \varphi(t)\big)' = -\frac{c(t)}{p-1} - r^{1-q}(t)\left|\frac{\cos_p \varphi(t)}{\sin_p \varphi(t)}\right|^p.$$

Dle předpokladu (3.23) dostáváme

$$r^{1-q}(t)\left|\frac{\cos_p \varphi(t)}{\sin_p \varphi(t)}\right|^p \geq 0,$$

tedy

$$\big(\operatorname{cotg}_p \varphi(t)\big)' \leq -\frac{c(t)}{p-1}.$$

Rovnici zintegrujeme

$$\operatorname{cotg}_p \varphi(s) - \operatorname{cotg}_p \varphi(a) \leq -\frac{1}{p-1}\int_a^s c(t)\,\mathrm{d}t$$

a upravíme

$$(p-1)\big(\operatorname{cotg}_p \varphi(s) - \operatorname{cotg}_p \varphi(a)\big) \leq -\int_a^s c(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Pro $s \to \infty$ pak platí

$$
\begin{aligned}
(p-1)\big(\operatorname{cotg}_p \varphi(s) - \operatorname{cotg}_p \varphi(a)\big) &\in \mathbb{R},\\
-\int_a^s c(t)\,\mathrm{d}t &\to -\infty,
\end{aligned}
$$

což je ale spor.

Nyní uvažujme $\beta \neq 0$. Pak

$$\big(\operatorname{tg}_p \varphi(t)\big)' = \frac{\varphi'(t)}{|\cos_p \varphi(t)|^p}.$$

Opět dosadíme za φ' z Prüferova systému (3.13)

$$\big(\operatorname{tg}_p \varphi(t)\big)' = \frac{c(t)}{p-1}\left|\frac{\sin_p \varphi(t)}{\cos_p \varphi(t)}\right|^p + r^{1-q}(t).$$

Dle předpokladu (3.23) dostáváme

$$\frac{c(t)}{p-1}\left|\frac{\sin_p \varphi(t)}{\cos_p \varphi(t)}\right|^p \geq 0,$$

tedy

$$\big(\operatorname{tg}_p \varphi(t)\big)' \geq r^{1-q}(t).$$

Rovnici zintegrujeme

$$\operatorname{tg}_p \varphi(s) - \operatorname{tg}_p \varphi(a) \geq \int_a^s r^{1-q}(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Pro $s \to \infty$ pak platí

$$
\begin{aligned}
\big(\operatorname{tg}_p \varphi(s) - \operatorname{tg}_p \varphi(a)\big) &\in \mathbb{R},\\
\int_a^s r^{1-q}(t)\,\mathrm{d}t &\to \infty,
\end{aligned}
$$

což je opět spor. □

3.4.6 Sturmova-Liouvilleova teorie

V této části ukážeme, že řešení Sturmova-Liouvilleova problému pro pololineární rovnici má podobné vlastnosti jako v lineárním případě.

Budeme řešit okrajový problém

$$
\begin{aligned}
(\Phi(x'))' + \lambda d(t)\Phi(x) &= 0, \qquad t \in [a,b], \qquad \lambda \in \mathbb{R},\\
x(a) &= 0,\\
x(b) &= 0,
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

kde na daném intervalu je $d(t) \geq 0$ a $d \not\equiv 0$. Tuto úlohu nazveme *Sturmovým-Liouvilleovým problémem* pro pololineární rovnici. Můžeme na ni také použít Prüferovu transformaci. Dále budeme předpokládat, že $\lambda > 0$, a to kvůli stejné argumentaci jako v lineárním případě.

Věta 3.18 *Existuje neohraničená rostoucí posloupnost kladných čísel λ_n, $\lambda_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, taková, že problém (3.24) má nenulové řešení právě tehdy, když $\lambda = \lambda_n$. Odpovídající řešení $x_n(t) = x(t, \lambda_n)$ je určeno jednoznačně až na multiplikativní konstantu a má na intervalu (a, b) právě $n - 1$ nulových bodů.*

Navíc, pokud je d kladné na celém intervalu (a, b), vlastní čísla vyhovují vztahu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[p]{\lambda_n}}{n} = \frac{\pi_p}{\int_a^b \sqrt[p]{d(t)}\,\mathrm{d}t}.$$

Důkaz. Nechť x je řešením rovnice z (3.24) dané počátečními podmínkami

$$x(a, \lambda) = 0, \qquad x'(a, \lambda) = 1. \tag{3.25}$$

Řešení spojitě závisí na λ, tzn. že pokud

$$\lambda_i \to \lambda \qquad \text{pro } i \to \infty,$$

pak

$$x(t, \lambda_i) \to x(t, \lambda) \text{ stejnoměrně} \qquad \text{pro } i \to \infty, \qquad t \in [a, b]\,.$$

Pro toto řešení budeme uvažovat následující Prüferovu transformaci

$$x(t, \lambda) = \rho(t, \lambda) \sin_p \varphi(t, \lambda), \tag{3.26}$$

$$x'(t, \lambda) = \lambda^{q-1} \rho(t, \lambda) \cos_p \varphi(t, \lambda). \tag{3.27}$$

Funkce ρ a φ jsou (dle Věty 3.8) tvaru

$$\rho(t, \lambda) = \left[|x(t, \lambda)|^p + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^q |x'(t, \lambda)|^p \right]^{\frac{1}{p}},$$

$$\varphi(t, \lambda) = \operatorname{arccotg}_p \left(\lambda^{q-1} \frac{x'(t, \lambda)}{x(t, \lambda)} \right).$$

a Prüferův systém je tvaru

$$\rho'(t, \lambda) = \rho(t, \lambda) \Phi\left(\sin_p \varphi(t, \lambda)\right) \cos_p \varphi(t, \lambda) \left[\lambda^{q-1} - \frac{d(t)}{p-1} \right],$$

$$\varphi'(t, \lambda) = \frac{d(t)}{p-1} \left|\sin_p \varphi(t, \lambda)\right|^p + \lambda^{q-1} \left|\cos_p \varphi(t, \lambda)\right|^p,$$

s počátečními podmínkami

$$\rho(a, \lambda) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{q}{p}},$$

$$\varphi(a, \lambda) = 0.$$

Známe-li řešení φ, pak jsme schopni ρ dopočítat jako

$$\rho(t, \lambda) = \rho(a, \lambda) \exp\biggl(\int_t^a \Phi(\sin_p \varphi(s, \lambda)) \cos_p \varphi(s, \lambda) \left[\lambda^{q-1} - \frac{d(s)}{p-1} \right] \mathrm{d}s \biggr).$$

Proto budeme řešit pouze počáteční problém

$$\varphi'(t,\lambda) = \frac{d(t)}{p-1}\left|\sin_p \varphi(t,\lambda)\right|^p + \lambda^{q-1}\left|\cos_p \varphi(t,\lambda)\right|^p, \tag{3.28}$$

$$\varphi(a,\lambda) = 0. \tag{3.29}$$

Pravou stranu rovnice (3.28) označíme jako f. Platí, že pro všechna $\lambda > 0$ je f na intervalu $[a,b]$ ohraničené. Dále také platí, že pro všechna $\lambda > 0$ je $\varphi \in \mathbb{R}$. Dle zobecněné Pythagorovy identity (3.3) lze psát

$$f(t,\varphi,\lambda) = \lambda^{q-1} + \left(\frac{d(t)}{p-1} - \lambda^{q-1}\right)\left|\sin_p \varphi(t,\lambda)\right|^p.$$

Odtud vidíme, že f je vzhledem k φ Lipschitzovské, proto pro $\lambda > 0$ existuje jediné řešení φ definované na celém intervalu $[a,b]$.

Budeme hledat taková $\lambda > 0$, pro která platí $x(b,\lambda) = 0$, tedy

$$\varphi(b,\lambda) = \operatorname{arccotg}_p\left(\lambda^{1-q}\frac{x'(b,\lambda)}{x(b,\lambda)}\right) + n\pi_p = n\pi_p, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Nejprve ukážeme, že φ je vzhledem k $\lambda > 0$ rostoucí. Platí, že φ je vzhledem k $\lambda > 0$ neklesající (Věta 3.13). Nechť máme tedy $0 < \lambda < \mu$, pak

$$\varphi(t,\lambda) \leq \varphi(t,\mu).$$

Předpokládáme-li, že

$$\varphi(t,\lambda) = \varphi(t,\mu), \qquad \forall\, t \in (a,b),$$

pak

$$\varphi'(t,\lambda) = \varphi'(t,\mu)$$

a tedy

$$f(t,\varphi(t,\lambda),\lambda) = f(t,\varphi(t,\mu),\mu).$$

Proto musí platit

$$\cos_p \varphi(t,\lambda) = \cos_p \varphi(t,\mu) = 0,$$

tzn.

$$\varphi(t,\lambda) = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi_p \qquad \text{pro nějaké } m \in \mathbb{Z}.$$

Dle (3.28) pak musí platit

$$d(t) = 0, \qquad \forall\, t \in (a,b),$$

což je ale spor s předpokladem, že

$$d(t) > 0 \qquad \text{pro nějaké } t \in (a,b).$$

Proto musí platit

$$\varphi(t_0,\lambda) < \varphi(t_0,\mu) \qquad \text{pro nějaké } t_0 \in (a,b).$$

Pomocí srovnávací věty (viz Lemma 2.13) dostáváme

$$\varphi(b,\lambda) < \varphi(b,\mu).$$

Nyní budeme chtít ukázat, že řešení x nemá na intervalu $(a,b]$ pro dostatečně malé $\lambda > 0$ žádný nulový bod. Již víme, že

$$x(t,\lambda) \to x(t,0) \text{ stejnoměrně} \qquad \text{pro } \lambda \to 0^+, \qquad \forall\, t \in [a,b].$$

Pokud zintegrujeme rovnici z (3.24) a použijeme počáteční podmínku $x'(a,\lambda) = 1$, dostáváme

$$\begin{aligned}
0 &= \int_a^s \left(\Phi(x'(\tau,\lambda))\right)' \, d\tau + \lambda \int_a^s d(\tau)\Phi(x(\tau,\lambda))\,\mathrm{d}\tau \\
&= \Phi(x'(s,\lambda)) - \Phi(x'(a,\lambda)) + \lambda \int_a^s d(\tau)\Phi(x(\tau,\lambda))\,\mathrm{d}\tau \\
&= \Phi(x'(s,\lambda)) - \Phi(1) + \lambda \int_a^s d(\tau)\Phi(x(\tau,\lambda))\,\mathrm{d}\tau \\
&= \Phi(x'(s,\lambda)) - 1 + \lambda \int_a^s d(\tau)\Phi(x(\tau,\lambda))\,\mathrm{d}\tau\,,
\end{aligned}$$

kde označíme

$$I(s,\lambda) := \int_a^s d(\tau)\Phi(x(\tau,\lambda))\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Pak lze psát

$$\Phi(x'(s,\lambda)) = 1 - \lambda I(s,\lambda).$$

Když použijeme inverzní funkci Φ^{-1}, dostáváme

$$\begin{aligned}
x'(s,\lambda) &= \Phi^{-1}\left(1-\lambda I(s,\lambda)\right) = |1-\lambda I(s,\lambda)|^{q-1}\operatorname{sgn}\left(1-\lambda I(s,\lambda)\right) \\
&= |1-\lambda I(s,\lambda)|^{q-2}\left(1-\lambda I(s,\lambda)\right),
\end{aligned}$$

z toho integrací a použitím počáteční podmínky $x(a,\lambda) = 0$ obdržíme

$$x(t,\lambda) - x(a,\lambda) = \int_a^t |1-\lambda I(s,\lambda)|^{q-2}\left\{1-\lambda I(s,\lambda)\right\}\mathrm{d}s\,,$$

tedy

$$x(t,\lambda) = \int_a^t |1-\lambda I(s,\lambda)|^{q-2}\left\{1-\lambda I(s,\lambda)\right\}\mathrm{d}s\,, \qquad t \in [a,b].$$

Z čehož je vidět, že řešení x nemá na intervalu $[a,b]$ pro malá $\lambda > 0$ žádný nulový bod.

Nyní budeme chtít ukázat, že řešení x má na intervalu $[a, b]$ pro dostatečně velké $\lambda > 0$ libovolně velký počet nulových bodů. Abychom to ukázali, budeme uvažovat rovnici

$$(\Phi(x'))' + (p-1)\,\mu^p \Phi(x) = 0,$$

kde $\mu > 0$ je konstanta. Řešením této rovnice je $\sin_p(\mu t)$ s nulovými body $t = j\frac{\pi_p}{\mu}$, $j \in \mathbb{Z}$. Předpokládáme, že $d \not\equiv 0$, tzn. že musí existovat $[a', b'] \subset [a, b]$ takový, že

$$d(t) > 0, \qquad \forall\, t \in [a', b']\,.$$

Nechť tedy $k \in \mathbb{N}$ a zvolme $\mu > 0$ takové, že $\sin_p(\mu t)$ má na intervalu $[a', b']$ nejméně $k+1$ nulových bodů. Dále nechť $\lambda^* > 0$ je takové, že

$$\lambda^* \min_{t \in [a', b']} d(t) = (p-1)\,\mu^p.$$

Pak porovnáním rovnice z (3.24) pro $\lambda > \lambda^*$ a rovnice

$$(\Phi(x'))' + (p-1)\,\mu^p \Phi(x) = 0, \qquad t \in [a', b'],$$

dle Sturmovy srovnávací věty (Věta 3.13), dostáváme, že všechna řešení rovnice z (3.24) pro $\lambda > \lambda^*$ mají na $[a, b]$ nejméně k nulových bodů. Protože k bylo libovolné, pak pro dostatečně velké $\lambda > 0$ má řešení x na intervalu $[a, b]$ libovolně velký počet nulových bodů.

Protože $\rho(t, \lambda) > 0$, dle (3.26) platí, že řešení x má v $t = c$ nulový bod právě tehdy, když existuje $j \in \mathbb{Z}$ takové, že

$$\varphi(c, \lambda) = j\pi_p.$$

Navíc, pak z (3.28) dostáváme

$$\varphi'(c, \lambda) = \lambda^{q-1} > 0,$$

tedy

$$\varphi(t, \lambda) > j\pi_p, \qquad t \in (c, b]\,.$$

Důsledkem pak je, že pro dostatečně malé $\lambda > 0$ platí

$$0 < \varphi(b, \lambda) < \pi_p$$

a dále že

$$\lim_{\lambda \to \infty} \varphi(b, \lambda) = \infty.$$

Nyní již budeme hledat $\lambda > 0$, pro které platí

$$\varphi(b, \lambda) = n\pi_p, \qquad \text{pro nějaké } n \in \mathbb{Z}.$$

Funkce φ je v b rostoucí vzhledem k λ a platí

$$0 \le \lim_{\lambda \to 0^+} \varphi(b, \lambda) < \pi_p,$$
$$\lim_{\lambda \to \infty} \varphi(b, \lambda) = \infty.$$

Z toho je přímo vidět, že pro všechna $n = 1, 2, 3, \dots$ existuje jediné $\lambda_n > 0$ takové, že

$$\varphi(b, \lambda_n) = n\pi_p.$$

Příslušná funkce x_n má na otevřeném intervalu (a, b) právě $n-1$ nulových bodů. Zřejmě platí

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \dots$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty.$$

Pokud je x_n řešením (3.24), pak je také zřejmě i μx_n, $\mu \in \mathbb{R}$, řešením tohoto problému. Kromě toho platí také, že každá dvě řešení (3.24) musí být lineárně závislá. Řešení x_n je tedy určeno jednoznačně až na multiplikativní konstantu.

Na závěr budeme chtít dokázat, že pro $d(t) > 0$ na celém intervalu (a, b) platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[p]{\lambda_n}}{n} = \frac{\pi_p}{\int_a^b \sqrt[p]{d(t)}\,\mathrm{d}t}. \tag{3.30}$$

Nejprve uvažujme $d \equiv d_1 > 0,\ t \in (a, b)$ a řešme problém

$$\begin{aligned} (\Phi(x'))' + \lambda d_1 \Phi(x) &= 0, \qquad t \in [a, b], \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \\ x(a) &= 0, \\ x(b) &= 0. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Netriviálním řešením splňujícím první okrajovou podmínku je

$$x(t) = \sin_p\left(\sqrt[p]{\lambda d_1}(t-a)\right)$$

a pro $k-$tý nulový bod platí

$$\sqrt[p]{\lambda_k d_1}(b-a) = k\pi_p,$$

tedy

$$\frac{\sqrt[p]{\lambda_k}}{k} = \frac{\pi_p}{\int_a^b \sqrt[p]{d_1}\,\mathrm{d}t},$$

zřejmě tedy platí (3.30).

Nyní uvažujme problém (3.24) a řešení x_n tohoto systému, které má na intervalu (a, b) právě $n-1$ nulových bodů. Toto řešení má nulové body $t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_{k-1} < t_k = b$. Položme $\lambda = \lambda_k$ v (3.24) a (3.31) a definujme

$$\begin{aligned} d_{1,i} &= \min_{t\in[t_{i-1},t_i]} d(t), \qquad i = 1, \dots, k, \\ d_{2,i} &= \max_{t\in[t_{i-1},t_i]} d(t), \qquad i = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Pak pokud položíme $d_1 = d_{1,i}$ na intervalu $[t_{i-1}, t_i]$, tak na tomto intervalu je (3.31) Sturmovou majorantou (3.24) (dle Věty 3.13). To ale znamená, že řešení $\sin_p\left(\sqrt[p]{\lambda d_{1,i}}(t_i - t_{i-1})\right)$ nemá na intervalu (t_{i-1}, t_i) žádný nulový bod, tedy

$$\sqrt[p]{\lambda d_{1,i}}(t_i - t_{i-1}) \leq \pi_p. \tag{3.32}$$

Pomocí podobné argumentace dostáváme

$$\pi_p \leq \sqrt[p]{\lambda d_{2,i}}(t_i - t_{i-1}).$$

Na druhou stranu musí platit i

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt[p]{\lambda_k d_{1,i}}\,\mathrm{d}t \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt[p]{\lambda_k d(t)}\,\mathrm{d}t \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt[p]{\lambda_k d_{2,i}}\,\mathrm{d}t\,.$$

Tudíž

$$\left|\pi_p - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt[p]{\lambda_k d(t)}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt[p]{\lambda_k}\left(\sqrt[p]{d_{2,i}} - \sqrt[p]{d_{1,i}}\right)\mathrm{d}t\,. \tag{3.33}$$

Nechť ω je definována pro libovolnou spojitou funkci f na intervalu $[a,b]$ jako

$$\omega(f,\delta) = \max\left\{|f(\tau_1) - f(\tau_2)| : |\tau_1 - \tau_2| \leq \delta,\ \tau_1, \tau_2 \in [a,b]\right\}.$$

Z (3.33) pak dostáváme

$$\left|\frac{\pi_p}{\sqrt[p]{\lambda_k}} - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt[p]{d(t)}\,\mathrm{d}t\right| \leq \omega\left(\sqrt[p]{d}, t_i - t_{i-1}\right)|t_i - t_{i-1}|\,.$$

Položíme

$$d_1 = \min_{i=1,\dots,k} c_{1,i}.$$

Pak pomocí (3.32) dostáváme

$$\left|\frac{k\pi_p}{\sqrt[p]{\lambda_k}} - \int_a^b \sqrt[p]{d(t)}\,\mathrm{d}t\right| \leq \omega\left(\sqrt[p]{d}, \frac{\pi_p}{\sqrt[p]{\lambda_k d_1}}\right)(b-a)\,.$$

Již víme, že $\lambda_k \to \infty$ pro $k \to \infty$. Díky tomuto a díky spojitosti d dostáváme (3.30). $\square$

Čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$, pro která má systém (3.24) netriviální řešení, nazýváme *vlastními hodnotami* a jim odpovídající řešení $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ *vlastními funkcemi* okrajového problému (3.24).

V lineárním případě máme Poznámku 2.23, která nám říká, že vlastní funkce jsou ortogonální. K tomu ale nelze zavést pololineární analogii, neboť ortogonalita vlastních funkcí v prostoru L^p pro $p \neq 2$ nemá smysl.

4 Lineární diferenciální rovnice vyššího řádu a lineární systémy

V této kapitole se budeme věnovat nejprve lineárním diferenciálním rovnicím vyššího řádu a následně lineárním systémům.

4.1 Lineární diferenciální rovnice vyššího řádu

Základní informace v této podkapitole jsou čerpány z [2] a [3].

4.1.1 Úvodní poznámky

Budeme uvažovat *homogenní lineární diferenciální rovnici čtvrtého řádu* tvaru

$$(r(t)x''(t))'' - (s(t)x'(t))' - \lambda d(t)x(t) = 0, \qquad t \in I, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

kde na daném intervalu jsou r, s, d kladné a spojité. Nebude-li řečeno jinak, budeme po celou kapitolu předpokládat, že tyto podmínky pro koeficienty jsou splněny.

Podobně jako rovnice (2.1), je také rovnice (4.1) nazývána *Sturmovou-Liouvilleovou lineární diferenciální rovnicí*. Tyto rovnice jsou speciálním případem jisté obecné rovnice řádu $2n$ (případně ještě obecnějších objektů), viz Poznámka 6.4 a Poznámka 6.5.

Funkci $x \in C^2(I)$ nazveme *řešením* rovnice (4.1), jestliže na daném intervalu vyhovuje rovnici (4.1) a $rx'' \in C^2(I)$, $sx' \in C^1(I)$. Pokud je $x \equiv 0$, nazveme ho *triviálním řešením* rovnice (4.1). V opačném případě se řešení nazývá *netriviální*.

Poznámka 4.1 Položíme-li

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ r(t)x''(t) \\ T(t)x(t) \end{pmatrix},$$

kde

$$T(t)x(t) \equiv (r(t)x''(t))' - s(t)x'(t),$$

pak lze (4.1) přepsat jako systém lineárních diferenciálních rovnic

$$X'(t) = M(t)X(t), \tag{4.2}$$

kde

$$M(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r(t)} & 0 \\ 0 & s(t) & 0 & 1 \\ \lambda d(t) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rovnice (4.1) je modelem kmitání nosníku. Jednotlivé členy mají následující význam:

r je tuhost,

$(sx')'$ jsou axiální síly,

d je hustota.

Lze ukázat, že rovnici (4.1) je možné pomocí transformace převést na jednodušší rovnici, kde jsou vynechány axiální síly (tzn. $s \equiv 0$). Problémem ovšem je, že tato transformace nezachovává formu okrajových podmínek (znaménka koeficientů u proměnných, viz [2], str. 58). Proto dává větší smysl uvažovat rovnici v obecném tvaru.

Vzhledem k tomu, že rovnici (4.1) uvažujeme v kontextu matematického modelu, přidáme okrajové podmínky a dostáváme následující okrajový problém

$$\begin{aligned} (r(t)x''(t))'' - (s(t)x'(t))' - \lambda d(t)x(t) &= 0, \qquad t \in [0,l], \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \\ x'(0)\cos\alpha - (rx'')(0)\sin\alpha &= 0, \\ x(0)\cos\beta + Tx(0)\sin\beta &= 0, \\ x'(l)\cos\gamma + (rx'')(l)\sin\gamma &= 0, \\ x(l)\cos\delta - Tx(l)\sin\delta &= 0, \end{aligned} \tag{4.3}$$

kde

$$0 \leq \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\ \leq \frac{\pi}{2}.$$

Nahradíme-li první a třetí okrajovou podmínku podmínkami

$$\begin{aligned} x'(0) &= 0, \\ x'(l) &= 0, \end{aligned}$$

dostáváme model vetknutého nosníku.

Čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, pro která má systém (4.3) netriviální řešení, budeme nazývat *vlastními hodnotami* a jim odpovídající řešení $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *vlastními funkcemi* okrajového problému (4.3).

Dále budeme předpokládat, že $\lambda \neq 0$. Tomu odpovídá, že vyloučíme následující dva případy okrajových podmínek

(i) $\alpha = \gamma = 0$ a $\beta = \delta = \frac{\pi}{2}$,

(ii) jakékoliv tři z $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ jsou rovny $\frac{\pi}{2}$.

Lze ukázat, že pro vlastní čísla okrajového problému (4.3) platí následující vlastnosti:

(i) jsou spojitá a klesající vzhledem k proměnným α, β, γ a δ, kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in (0, \pi)$,

(ii) jsou spojitá a klesající vzhledem k hustotě d,

(iii) jsou spojitá a rostoucí vzhledem k tuhosti r a k rozložení axiálních sil s,

(iv) jsou jednoduchá.

4.1.2 Prüferova transformace

Nechť x je netriviálním řešením (4.1). Transformace

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \rho(t)\sin\Psi(t)\cos\theta(t),\\
x'(t) &= \rho(t)\cos\Psi(t)\sin\varphi(t),\\
r(t)x''(t) &= \rho(t)\cos\Psi(t)\cos\varphi(t),\\
Tx(t) &= \rho(t)\sin\Psi(t)\sin\theta(t),
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

rovnice (4.1) se nazývá *Prüferova transformace.*

Dosazením této transformace do systému (4.2) dostáváme

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\rho(t)\sin\Psi(t)\cos\theta(t)\\ \rho(t)\cos\Psi(t)\sin\varphi(t)\\ \rho(t)\cos\Psi(t)\cos\varphi(t)\\ \rho(t)\sin\Psi(t)\sin\theta(t)\end{pmatrix}'
&= \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{r(t)} & 0\\ 0 & s(t) & 0 & 1\\ \lambda d(t) & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}\rho(t)\sin\Psi(t)\cos\theta(t)\\ \rho(t)\cos\Psi(t)\sin\varphi(t)\\ \rho(t)\cos\Psi(t)\cos\varphi(t)\\ \rho(t)\sin\Psi(t)\sin\theta(t)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\rho(t)\cos\Psi(t)\sin\varphi(t)\\ \frac{1}{r(t)}\rho(t)\cos\Psi(t)\cos\varphi(t)\\ s(t)\rho(t)\cos\Psi(t)\sin\varphi(t)+\rho(t)\sin\Psi(t)\sin\theta(t)\\ \lambda d(t)\rho(t)\sin\Psi(t)\cos\theta(t)\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Položíme-li

$$w(t) = \operatorname{cotg}\Psi(t)$$

a vyjádříme-li $\rho', w', \theta', \varphi'$, po úpravě dostáváme

$$
\begin{aligned}
\rho'(t) = \frac{\rho(t)}{2}\Bigg[&\sin 2\Psi(t)\cos\theta(t)\sin\varphi(t) + \left(\frac{1}{r(t)} + s(t)\right)\cos^2\Psi(t)\sin 2\varphi(t)\\
&+ \sin 2\Psi(t)\sin\theta(t)\cos\varphi(t) + \frac{\lambda d(t)}{2}\sin^2\Psi(t)\sin 2\theta(t)\Bigg],
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

$$
\begin{aligned}
w'(t) = -w^2(t)&\cos\theta(t)\sin\varphi(t) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r(t)} + s(t)\right)w(t)\sin 2\varphi(t)\\
&+ \sin\theta(t)\cos\varphi(t) - \frac{\lambda d(t)}{2}w(t)\sin 2\theta(t),
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

$$\theta'(t) = -w(t)\sin\theta(t)\sin\varphi(t) + \lambda d(t)\cos^2\theta(t), \tag{4.7}$$

$$\varphi'(t) = \frac{1}{r(t)}\cos^2\varphi(t) - s(t)\sin^2\varphi(t) - \frac{1}{w(t)}\sin\theta(t)\sin\varphi(t) \tag{4.8}$$

což nazveme *Prüferovým systémem*, jehož řešením jsou právě funkce ρ, w, θ a φ.

Prüferova transformace tedy převede lineární diferenciální rovnici čtvrtého řádu (4.1) na čtyři diferenciální rovnice prvního řádu tvaru (4.5), (4.6), (4.7) a (4.8).

4.1.3 Aplikace

V této části uvedeme aplikace Prüferovy transformace, a to sice Sturmovu větu.

Budeme chtít porovnávat řešení dvou různých rovnic tvaru (4.1). Uvažujme proto pro $t \in [0, l]$ rovnice

$$(r_1(t)x''(t))'' - (s_1(t)x'(t))' - c_1(t)x(t) = 0, \tag{4.9}$$

$$(r_2(t)x''(t))'' - (s_2(t)x'(t))' - c_2(t)x(t) = 0, \tag{4.10}$$

kde na daném intervalu jsou $r_i(t) > 0$, $s_i(t) > 0$, $c_i(t) > 0$, $i = 1, 2$, a r_i, s_i, c_i, $i = 1, 2$, jsou zde spojité.

Uvedeme pouze Sturmovu srovnávací větu, neboť, jak jsme již ukázali, Sturmova oddělovací věta je pouze speciálním případem té srovnávací. Věta bude formulována pro příslušné Prüferovy úhly, díky tomu bude formulace jednodušší.

Věta 4.2 (**Sturmova srovnávací věta**) *Nechť je x_1 řešením (4.9) a x_2 řešením (4.10), koeficienty rovnic (4.9) a (4.10) splňují*

$$r_1(t) \geq r_2(t) > 0, \qquad s_1(t) \geq s_2(t) > 0, \qquad 0 < c_1(t) \leq c_2(t), \qquad t \in I,$$

a nechť θ_1 a θ_2 jsou řešení rovnice (4.7) příslušné k rovnicím (4.9) a (4.10). Pak

$$\theta_1(l) \leq \theta_2(l),$$

kde rovnost nastane právě tehdy, když na celém intervalu I platí

$$r_1 \equiv r_2, \qquad s_1 \equiv s_2, \qquad c_1 \equiv c_2.$$

Důkaz. Důkaz uvádět nebudeme, můžeme ho nalézt např. v [2], str. 65. □

Poznámka 4.3 Pokud platí předpoklady Věty 4.2, pak se rovnice (4.10) nazývá *Sturmova majoranta* rovnice (4.9) a rovnice (4.9) se nazývá *Sturmova minoranta* rovnice (4.10).

4.2 Lineární systémy

Základní informace v této podkapitole jsou čerpány z [12] a [13].

4.2.1 Úvodní poznámky

Budeme uvažovat *systém maticových diferenciálních rovnic prvního řádu* tvaru

$$\begin{aligned} U'(t) &= A(t)U(t) + B(t)V(t), \\ V'(t) &= D(t)U(t) - A^T(t)V(t), \end{aligned} \tag{4.11}$$

pro $t \in I$, kde na daném intervalu jsou A, B a D spojité maticové funkce typu $n \times n$ a B a D jsou zde symetrické.

Tento sytém je tzv. *lineárním Hamiltonovským systémem.* Lze ukázat, že jeho speciálním případem je právě Sturmova-Liouvilleova lineární diferenciální rovnice, kterou lze obecně vyjádřit ve tvaru

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(r_k(t)x^{(k)}(t)\right)^{(k)} = 0.$$

Pokud jsou U a V maticové funkce typu $n \times r$, pak pro zjednodušení budeme psát (U, V) jako maticovou funkci typu $2n \times r$. Tato maticová funkce $(U(t), V(t))$ má v j-tém sloupci prvky $u_{1j}(t), \dots, u_{nj}(t), v_{1j}(t), \dots, v_{nj}(t)$. Jestliže jsou U a V řešením (4.11), pak má maticová funkce (U, V) na intervalu I konstantní hodnost. Dále budeme předpokládat, že tato hodnost je n.

4.2.2 Prüferova transformace

V této části zavedeme Prüferovu transformaci rovnice (4.11). Ukáže se, že bude velmi podobného tvaru, který známe z ostatních variant transformace, jen místo klasických trigonometrických funkcí zde budou vystupovat maticově zobecněné trigonometrické funkce. Proto, dříve než se dostaneme k samotné transformaci, musíme je zavést.

4.2.2.1 Maticové trigonometrické funkce

Budeme pro $t \in I$ uvažovat následující systém maticových diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned} S'(t) &= Q(t)C(t), \\ C'(t) &= -Q(t)S(t), \end{aligned} \tag{4.12}$$

kde na daném intervalu jsou S, C a Q maticové funkce typu $n \times n$ a Q je zde spojitá a symetrická. Tento systém nazveme *trigonometrickým systémem*. Toto označení je celkem přirozené, uvědomíme-li si, že v případě $n = 1$ a $Q \equiv E$ se systém redukuje na $S'' + S = 0$. Je to vlastně systém typu (4.11), kde položíme

$$\begin{aligned} A &\equiv 0, \\ B &\equiv -D \equiv Q. \end{aligned}$$

Pro $\tau \in I$ označme $S_\tau(t)$ a $C_\tau(t)$ jako řešení systému (4.12) spolu s počátečními podmínkami

$$\begin{aligned} S(\tau) &= 0, \\ C(\tau) &= E, \end{aligned}$$

kde 0 je nulová matice typu $n \times n$ a E je jednotková matice typu $n \times n$.

Maticové funkce $S_\tau(t)$ a $C_\tau(t)$ se v dimenzi $n = 1$ a pro $Q \equiv E$ redukují na trigonometrické funkce $\sin(t - \tau)$ a $\cos(t - \tau)$.

Platí následující zobecněné identity

$$\begin{aligned} S_\tau^T(t)S_\tau(t) + C_\tau^T(t)C_\tau(t) &\equiv E, \\ S_\tau(t)S_\tau^T(t) + C_\tau(t)C_\tau^T(t) &\equiv E, \\ S_\tau^T(t)C_\tau(t) - C_\tau^T(t)S_\tau(t) &\equiv 0, \\ S_\tau(t)C_\tau^T(t) - C_\tau(t)S_\tau^T(t) &\equiv 0. \end{aligned}$$

Například první dvě identity se při volbě $n = 1$ a $Q \equiv E$ redukují na

$$\sin^2(t - \tau) + \cos^2(t - \tau) \equiv 1.$$

4.2.2.2 Prüferova transformace

Nechť $Y = (U, V)$ je netriviálním řešením (4.11). Transformace

$$\begin{aligned} U(t) &= S^T(t)R(t), \\ V(t) &= C^T(t)R(t) \end{aligned} \tag{4.13}$$

systému (4.11) se nazývá *Prüferova transformace*.

Lze odvodit, že takto zavedené maticové funkce S, C a R jsou řešením následujícího *Prüferova systému*

$$\begin{aligned} S'(t) &= Q(t)C(t), \\ C'(t) &= -Q(t)S(t), \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$R'(t) = M(t)R(t), \tag{4.15}$$

kde

$$\begin{aligned} Q(t) &= CB(t)C^T + CA(t)S^T + SA^T(t)C^T - SD(t)S^T, \\ M(t) &= SA(t)S^T + CD(t)S^T + SB(t)C^T - CA^T(t)C^T. \end{aligned}$$

Prüferova transformace tedy převede systém dvou maticových diferenciálních rovnic prvního řádu (4.11) na systém dvou maticových diferenciálních rovnic prvního řádu tvaru (4.14) (trigonometrický systém) a maticovou diferenciální rovnici prvního řádu tvaru (4.15).

Poznámka 4.4 Aplikace jsou podobné jako u jiných variant Prüferovy transformace, např. lze dokázat zobecněnou maticovou variantu Sturmových vět, viz [13], str. 401.

5 Diferenční rovnice

Základní informace v této kapitole jsou čerpány z [5].

5.1 Úvodní poznámky

Před uvedením samotné rovnice, kterou budeme studovat, si pro $a, b \in \mathbb{Z}$ zaveďme označení

$$
\begin{aligned}
[a, b]_{\mathbb{Z}} &:= \{a, a+1, \dots, b\}, \\
[a, \infty)_{\mathbb{Z}} &:= \{a, a+1, \dots\}.
\end{aligned}
$$

Budeme uvažovat *diferenční rovnici druhého řádu* tvaru

$$\Delta(r_k \Delta x_k) + c_k x_{k+1} = 0, \qquad k \in [n, \infty)_{\mathbb{Z}}, \tag{5.1}$$

kde $\{r_k\}, \{c_k\}$ jsou reálné posloupnosti takové, že $r_k > 0$ pro všechna $k \in [n, \infty)_{\mathbb{Z}}$, a kde Δ je *operátor dopředné diference* definovaný jako $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$. Nebude-li řečeno jinak, budeme po celou kapitolu předpokládat, že tyto podmínky pro koeficienty jsou splněny. Tato rovnice je často nazývána *Sturmovou-Liouvilleovou diferenční rovnicí.*

Pokud je řešením rovnice (5.1) posloupnost $x \equiv 0$, nazveme toto řešení *triviálním řešením* rovnice. V opačném případě se řešení nazývá *netriviální.*

Poznámka 5.1 Obecně by stačilo předpokládat pouze $r_k \neq 0$ pro všechna $k \in [n, \infty)_{\mathbb{Z}}$. Mnohé z výsledků, které zde uvedeme, by po příslušné modifikaci platily i za tohoto slabšího předpokladu. Tato modifikace však není zdaleka triviální, z tohoto důvodu a také proto, že chceme prezentovat širší spektrum výsledků, předpokládejme $r_k > 0$.

Poznámka 5.2 Diskrétní kalkulus má svá specifika. Například, na rozdíl od derivace, pro diferenci funkce složené s posloupností neplatí řetězové pravidlo. Problém tedy pak přirozeně nastává i v diskrétní analogii substituce v integrálu. Některé analogie spojitých postupů jsou proto problematické, či nejsou vůbec možné, což značně komplikuje naše úvahy. Pro diferenci součinu platí

$$\Delta(a_k b_k) = \Delta a_k b_{k+1} + a_k \Delta b_k. \tag{5.2}$$

Rovnice tvaru (5.1) vznikají buď diskretizací lineárních diferenciálních rovnic nebo jsou samy přímo matematickým modelem. Např. Fibonacciho posloupnost je při vhodných počátečních podmínkách řešením rekurentní relace $x_{k+2} + a_k x_{k+1} + b_k x_k = 0$, kterou lze přepsat do tvaru (5.1).

Definice 5.3 Řekneme, že řešení x rovnice (5.1) má v bodě $m \in [n, \infty)_{\mathbb{Z}}$ *zobecněný nulový bod,* pokud platí $x_m x_{m+1} \leq 0$.

Poznámka 5.4 Někdy se místo zobecněného nulového v bodě m hovoří o zobecněném nulovém bodě na intervalu $(m, m+1]$.

Definice 5.5 Řekneme, že řešení x rovnice (5.1) je *neoscilující*, jestliže existuje $m \in [n, \infty)_{\mathbb{Z}}$ takové, že platí

$$x_k x_{k+1} > 0, \qquad \forall\, k \geq m.$$

Řešení se nazývá *oscilující* v opačném případě, tzn. když má nekonečně mnoho zobecněných nulových bodů.

Pokud jsou všechna řešení rovnice (5.1) oscilující, rovnice se nazývá *oscilatorická*, pokud jsou všechna neoscilující, nazývá se *neoscilatorická*.

Poznámka 5.6 Později uvidíme, že (stejně jako v případě lineární diferenciální rovnice) platí, že nějaké řešení rovnice (5.1) osciluje právě tehdy, když oscilují všechna řešení této rovnice.

Poznámka 5.7 Platí, že i Sturmova věta má svou diskrétní analogii, kterou lze použít k porovnání řešení dvou různých rovnic tvaru (5.1).

Mějme tedy pro $k \in [n, \infty)_{\mathbb{Z}}$ rovnice

$$\Delta(r_k \Delta x_k) + c_k x_{k+1} = 0, \tag{5.3}$$
$$\Delta(R_k \Delta X_k) + C_k X_{k+1} = 0, \tag{5.4}$$

kde $\{r_k\}, \{R_k\}, \{c_k\}, \{C_k\}$ jsou reálné posloupnosti takové, že $r_k > 0$ a $R_k > 0$ pro všechna $k \in [n, \infty)_{\mathbb{Z}}$.

Nechť koeficienty rovnic (5.3) a (5.4) splňují

$$c_k \leq C_k, \qquad r_k \geq R_k > 0, \qquad k \in [a, b]_{\mathbb{Z}}, \qquad a, b \in [n, \infty)_{\mathbb{Z}}, \qquad a < b.$$

Je-li x řešením (5.3), které má na intervalu $[a, b]_{\mathbb{Z}}$ nejvýše jeden zobecněný nulový bod, pak má netriviální řešení X rovnice (5.4) na témže intervalu také nejvýše jeden zobecněný nulový bod.

Další podrobnosti a rozšíření lze nalézt v [1].

5.2 Prüferova transformace

Nechť x je netriviálním řešením (5.1). Transformace

$$\begin{aligned} x_k &= \rho_k \sin \varphi_k, \\ \Delta x_k &= \frac{\rho_k}{r_k} \cos \varphi_k \end{aligned} \tag{5.5}$$

rovnice (5.1) se nazývá *diskrétní Prüferova transformace.*

Diferencujeme-li první výraz v (5.5) dle (5.2) a porovnáme ho s druhým, dostaneme

$$\Delta\left(\rho_k \sin \varphi_k\right) = \Delta \rho_k \sin \varphi_{k+1} + \rho_k \Delta \sin \varphi_k = \frac{\rho_k}{r_k} \cos \varphi_k. \tag{5.6}$$

Dále diferencujeme výraz $r_k \Delta x_k = \rho_k \cos \varphi_k$ a dostaneme

$$\Delta(r_k \Delta x_k) = \Delta\left(\rho_k \cos \varphi_k\right) = \Delta \rho_k \cos \varphi_{k+1} + \rho_k \Delta \cos \varphi_k. \tag{5.7}$$

Protože platí $x_{k+1} = \Delta x_k + x_k$, rovnici (5.1) můžeme přepsat jako

$$\Delta(r_k \Delta x_k) + c_k (\Delta x_k + x_k) = 0.$$

Pokud do této rovnice dosadíme (5.5) a (5.7), dostaneme

$$\Delta\rho_k \cos\varphi_{k+1} + \rho_k \Delta \cos\varphi_k + c_k \left(\frac{\rho_k}{r_k} \cos\varphi_k + \rho_k \sin\varphi_k \right) = 0. \tag{5.8}$$

Nyní vynásobíme rovnici (5.6) výrazem $\sin\varphi_{k+1}$ a rovnici (5.8) výrazem $\cos\varphi_{k+1}$. Sečtením těchto dvou rovnic a následnou úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} \Delta\rho_k = \rho_k \Bigg[& \frac{1}{r_k} \cos\varphi_k \sin\varphi_{k+1} - c_k \sin\varphi_k \cos\varphi_{k+1} \\ & - \frac{c_k}{r_k} \cos\varphi_k \cos\varphi_{k+1} - \sin\varphi_{k+1} \Delta \sin\varphi_k - \cos\varphi_{k+1} \Delta \cos\varphi_k \Bigg]. \end{aligned}$$

Dále vynásobíme rovnici (5.6) výrazem $\cos\varphi_{k+1}$ a rovnici (5.8) výrazem $-\sin\varphi_{k+1}$. Sečtením těchto dvou rovnic a následnou úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} \sin\varphi_{k+1} \cos\varphi_k - \cos\varphi_{k+1} \sin\varphi_k &= \frac{1}{r_k} \cos\varphi_k \cos\varphi_{k+1} + c_k \sin\varphi_k \sin\varphi_{k+1} \\ &\quad + \frac{c_k}{r_k} \cos\varphi_k \sin\varphi_{k+1}, \\ \sin\Delta\varphi_k &= \frac{1}{r_k} \cos\varphi_k \cos\varphi_{k+1} + c_k \sin\varphi_k \sin\varphi_{k+1} \\ &\quad + \frac{c_k}{r_k} \cos\varphi_k \sin\varphi_{k+1}. \end{aligned}$$

Rovnice

$$\begin{aligned} \Delta\rho_k = \rho_k \Bigg[& \frac{1}{r_k} \cos\varphi_k \sin\varphi_{k+1} - c_k \sin\varphi_k \cos\varphi_{k+1} \\ & - \frac{c_k}{r_k} \cos\varphi_k \cos\varphi_{k+1} - \sin\varphi_{k+1} \Delta \sin\varphi_k - \cos\varphi_{k+1} \Delta \cos\varphi_k \Bigg], \end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\sin\Delta\varphi_k = \frac{1}{r_k} \cos\varphi_k \cos\varphi_{k+1} + c_k \sin\varphi_k \sin\varphi_{k+1} + \frac{c_k}{r_k} \cos\varphi_k \sin\varphi_{k+1} \tag{5.10}$$

nazýváme *diskrétním Prüferovým systémem*, jehož řešením jsou právě funkce ρ_k a φ_k.

Diskrétní Prüferova transformace tedy převede diferenční rovnici druhého řádu (2.1) na dvě diferenční rovnice prvního řádu tvarů (5.9) a (5.10).

5.3 Aplikace

V této části uvedeme aplikace Prüferovy transformace.

5.3.1 Princip reciprocity

Nejprve se budeme věnovat takzvanému *principu reciprocity.* Ten říká, že řešení x rovnice (5.1) je neoscilující právě tehdy, když je $r\Delta x$ neoscilující. Než ale uvedeme tuto větu, potřebujeme následující pomocné lemma.

Lemma 5.8 *Nechť $c_k > 0$ pro všechna $k \in [n,\infty)_{\mathbb{Z}}$. Dále nechť x je řešením (5.1) a φ je definováno pomocí (5.5). Pokud*

$$x_k x_{k+1} > 0 \qquad \textit{pro nějaké } k \in [n,\infty)_{\mathbb{Z}}, \tag{5.11}$$

pak

$$0 < \Delta\varphi_k < \pi.$$

Důkaz. Pokud za výrazy Δx_k a x_{k+1} v rovnici (5.1) dosadíme z (5.5), dostáváme

$$\Delta\left(\rho_k \cos\varphi_k\right) + c_k \rho_{k+1} \sin\varphi_{k+1} = 0,$$

a následně budeme upravovat

$$\begin{aligned}
\Delta\left(\rho_k \cos\varphi_k\right) + c_k \rho_{k+1} \sin\varphi_{k+1} &= 0,\\
\Delta\rho_k \cos\varphi_{k+1} + \rho_k \Delta\cos\varphi_k + c_k \rho_{k+1} \sin\varphi_{k+1} &= 0,\\
\rho_{k+1}\cos\varphi_{k+1} - \rho_k \cos\varphi_{k+1} + \rho_k \cos\varphi_{k+1} - \rho_k \cos\varphi_k + c_k \rho_{k+1} \sin\varphi_{k+1} &= 0,
\end{aligned}$$

z čehož dostáváme

$$\cos\varphi_{k+1} + c_k \sin\varphi_{k+1} = \frac{\rho_k \cos\varphi_k}{\rho_{k+1}}. \tag{5.12}$$

Nyní budeme upravovat rovnici (5.10)

$$\begin{aligned}
\sin\Delta\varphi_k &= \frac{1}{r_k}\cos\varphi_k \cos\varphi_{k+1} + c_k \sin\varphi_k \sin\varphi_{k+1} + \frac{c_k}{r_k}\cos\varphi_k \sin\varphi_{k+1}\\
&= \frac{\cos\varphi_k}{r_k}\left(\cos\varphi_{k+1} + c_k \sin\varphi_{k+1}\right) + c_k \sin\varphi_k \sin\varphi_{k+1},
\end{aligned}$$

dosadíme z (5.12)

$$\sin\Delta\varphi_k = \frac{\cos\varphi_k}{r_k}\frac{\rho_k \cos\varphi_k}{\rho_{k+1}} + c_k \sin\varphi_k \sin\varphi_{k+1},$$

a budeme dále upravovat, abychom mohli dosadit z (5.5)

$$\sin\Delta\varphi_k = \frac{\rho_k \cos^2\varphi_k}{r_k \rho_{k+1}} + \frac{c_k \rho_k \rho_{k+1} \sin\varphi_k \sin\varphi_{k+1}}{\rho_k \rho_{k+1}} = \frac{\rho_k \cos^2\varphi_k}{r_k \rho_{k+1}} + \frac{c_k x_k x_{k+1}}{\rho_k \rho_{k+1}}.$$

Z tohoto dostáváme, že díky předpokladům $r_k > 0$, $c_k > 0$ a (5.11), platí

$$\sin\Delta\varphi_k > 0.$$

Z čehož plyne, že $0 < \Delta\varphi_k < \pi$, což jsme chtěli dokázat. □

Věta 5.9 (**princip reciprocity**) *Nechť* $c_k > 0$ *pro všechna* $k \in [n, \infty)_{\mathbb{Z}}$ *. Dále nechť* x *je řešením (5.1). Pokud je* x *neoscilující, pak je neoscilující i* $r\Delta x$*.*

Důkaz. Nechť x je řešením (5.1) a φ je definováno pomocí (5.5). Dále nechť $m \in [n, \infty)_{\mathbb{Z}}$ je takové číslo, že

$$x_k x_{k+1} > 0, \qquad \forall\, k \geq m.$$

Pak jsou body $(r_k \Delta x_k, x_k)$, $k \geq m$, buďto všechny v horní nebo všechny v dolní polovině roviny. Přidáme-li k tomuto faktu výsledky Lemmatu 5.8, celkově dostáváme

$$\varphi_k \leq \varphi_n + \pi, \qquad \forall\, k \geq m.$$

Dle definice platí

$$\varphi_k \leq \varphi_{k+1}, \qquad \forall\, k \geq m,$$

proto musí existovat $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k$. Pak ale musí existovat také $\lim\limits_{k\to\infty} \cos\varphi_k$.
Dále musí platit buďto

$$\cos\varphi_k \geq \cos\varphi_{k+1}, \qquad \forall\, k \geq m,$$

nebo

$$\cos\varphi_k \leq \cos\varphi_{k+1}, \qquad \forall\, k \geq m.$$

Určitě tedy existuje $\widetilde{m} \in \mathbb{Z}$ takové, že

$$\cos\varphi_k \cos\varphi_{k+1} > 0, \qquad \forall\, k \geq \widetilde{m}.$$

Když k tomuto výsledku přidáme druhou rovnici v (5.5), důkaz je hotov. $\square$

Poznámka 5.10 Lze ukázat, že opačná implikace Věty 5.9 také platí. Plyne to, mimo jiné, z faktu, že $\tilde{x} = r\Delta x$ vyhovuje tzv. reciproké rovnici

$$\Delta\left(\frac{1}{c_k}\Delta\tilde{x}_k\right) + \frac{1}{r_{k+1}}\tilde{x}_{k+1} = 0.$$

5.3.2 Oscilační kritéria

Další aplikací je diskrétní Leightonovo-Wintnerovo kritérium, které dává postačující podmínku pro oscilaci rovnice (5.1). Jak uvidíme, důkaz diskrétní verze je o mnoho složitější než důkaz verze spojité (viz lineární Věta 2.21 a pololineární Věta 3.17).

Věta 5.11 (**diskrétní Leightonovo-Wintnerovo kritérium**) *Nechť* $c_k > 0$ *pro všechna* $k \in \mathbb{Z}$ *a*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k = \infty. \tag{5.13}$$

Pak je rovnice (5.1) oscilatorická.

Důkaz. Předpokládejme tedy, že platí (5.13). Důkaz budeme provádět sporem, proto dále předpokládejme, že rovnice (5.1) je neoscilatorická. To znamená, že existuje řešení x rovnice (5.1), které je pro velká k celé kladné nebo celé záporné.

Dle Lemmatu 5.8 (předpoklad (5.11) je splněn, neboť řešení je buď celé kladné nebo celé záporné, tzn. pro všechna $k \in \mathbb{Z}$ platí $x_k x_{k+1} > 0$) máme

$$0 < \Delta\varphi_k < \pi.$$

Musí platit, že φ je ohraničené, jinak by řešení mělo nekonečně mnoho nulových bodů. Musí tedy existovat

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \varphi_k &=: \varphi_\infty,\\ \lim_{k\to\infty} \sin\varphi_k &=: \alpha,\\ \lim_{k\to\infty} \cos\varphi_k &=: \beta.\end{aligned}$$

Platí, že $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, což znamená, že alespoň jedno z čísel α a β je nenulové.

Nejprve budeme uvažovat $\alpha \neq 0$. Pak dle definice limity existuje $n \geq n_0$ takové, že $\sin\varphi_k \neq 0$ pro všechna $k \geq n$. Pro $k \geq n$ pak dle (5.10) platí

$$\begin{aligned}\frac{\sin\Delta\varphi_k}{\sin\varphi_k \sin\varphi_{k+1}} &= \frac{1}{r_k}\frac{\cos\varphi_k\cos\varphi_{k+1}}{\sin\varphi_k\sin\varphi_{k+1}} + c_k + \frac{c_k}{r_k}\frac{\cos\varphi_k\sin\varphi_{k+1}}{\sin\varphi_k\sin\varphi_{k+1}}\\ &= c_k + \frac{1}{r_k}\frac{\cos\varphi_k\left(\cos\varphi_{k+1} + c_k\sin\varphi_{k+1}\right)}{\sin\varphi_k\sin\varphi_{k+1}},\end{aligned}$$

dále dosadíme z (5.12)

$$\frac{\sin\Delta\varphi_k}{\sin\varphi_k\sin\varphi_{k+1}} = c_k + \frac{\rho_k\cos^2\varphi_k}{r_k\rho_{k+1}\sin\varphi_k\sin\varphi_{k+1}},$$

a budeme dále upravovat, abychom mohli dosadit z (5.5)

$$\frac{\sin\Delta\varphi_k}{\sin\varphi_k\sin\varphi_{k+1}} = c_k + \frac{\rho_k^2\cos^2\varphi_k}{r_k\rho_k\rho_{k+1}\sin\varphi_k\sin\varphi_{k+1}} = c_k + \frac{\rho_k^2\cos^2\varphi_k}{r_k x_k x_{k+1}}.$$

Z tohoto dostáváme, že díky předpokladům $r_k > 0$ a (5.11), platí

$$\frac{\rho_k^2\cos^2\varphi_k}{r_k x_k x_{k+1}} \geq 0$$

a tedy

$$\frac{\sin\Delta\varphi_k}{\sin\varphi_k\sin\varphi_{k+1}} \geq c_k. \tag{5.14}$$

Dále můžeme psát

$$\begin{aligned}\frac{\sin\Delta\varphi_k}{\sin\varphi_k\sin\varphi_{k+1}} &= \frac{\sin\left(\varphi_{k+1} - \varphi_k\right)}{\sin\varphi_k\sin\varphi_{k+1}} = \frac{\sin\varphi_{k+1}\cos\varphi_k - \cos\varphi_{k+1}\sin\varphi_k}{\sin\varphi_k\sin\varphi_{k+1}}\\ &= \frac{\cos\varphi_k}{\sin\varphi_k} - \frac{\cos\varphi_{k+1}}{\sin\varphi_{k+1}} = \operatorname{cotg}\varphi_k - \operatorname{cotg}\varphi_{k+1} = -\Delta\operatorname{cotg}\varphi_k\end{aligned}$$

a z (5.14) tedy dostáváme

$$\Delta \operatorname{cotg} \varphi_k = \operatorname{cotg} \varphi_{k+1} - \operatorname{cotg} \varphi_k \leq -c_k.$$

Musí tedy platit, že

$$\operatorname{cotg} \varphi_{k+1} - \operatorname{cotg} \varphi_n \leq -\sum_{i=n}^{k} c_i.$$

Pro $k \to \infty$ pak dostáváme

$$\begin{aligned}(\operatorname{cotg} \varphi_{k+1} - \operatorname{cotg} \varphi_n) &\in \mathbb{R},\\ -\sum_{i=n}^{k} c_i &\to -\infty,\end{aligned}$$

což je ale spor.

Nyní uvažujme $\beta \neq 0$. Pak dle definice limity existuje $n \geq n_0$ takové, že $\cos \varphi_k \neq 0$ pro všechna $k \geq n$. Pro $k \geq n$ pak dle (5.10) platí

$$\begin{aligned}\frac{\sin \Delta\varphi_k}{\cos \varphi_k \cos \varphi_{k+1}} &= \frac{1}{r_k} + c_k \frac{\sin \varphi_k \sin \varphi_{k+1}}{\cos \varphi_k \cos \varphi_{k+1}} + \frac{c_k}{r_k} \frac{\cos \varphi_k \sin \varphi_{k+1}}{\cos \varphi_k \cos \varphi_{k+1}}\\ &= \frac{1}{r_k} + \frac{c_k \sin \varphi_{k+1} \left(\sin \varphi_k + \frac{1}{r_k} \cos \varphi_k\right)}{\cos \varphi_k \cos \varphi_{k+1}}\end{aligned}$$

a budeme dále upravovat, abychom mohli dosadit z (5.5)

$$\begin{aligned}\frac{\sin \Delta\varphi_k}{\cos \varphi_k \cos \varphi_{k+1}} &= \frac{1}{r_k} + \frac{\rho_k \rho_{k+1} c_k \sin \varphi_{k+1} \left(\sin \varphi_k + \frac{1}{r_k} \cos \varphi_k\right)}{\rho_k \rho_{k+1} \cos \varphi_k \cos \varphi_{k+1}}\\ &= \frac{1}{r_k} + \frac{\rho_k \rho_{k+1} c_k \sin \varphi_{k+1} \left(\sin \varphi_k + \frac{1}{r_k} \cos \varphi_k\right)}{r_k \Delta x_k r_{k+1} \Delta x_{k+1}}.\end{aligned}$$

Nyní budeme upravovat výraz v závorce a to s pomocí (5.5)

$$\begin{aligned}\sin \varphi_k + \frac{1}{r_k} \cos \varphi_k &= \frac{x_k}{\rho_k} + \frac{1}{r_k} \frac{\Delta x_k r_k}{\rho_k} = \frac{x_k + \Delta x_k}{\rho_k} = \frac{x_k + x_{k+1} - x_k}{\rho_k}\\ &= \frac{x_{k+1}}{\rho_k} = \frac{\rho_{k+1} \sin \varphi_{k+1}}{\rho_k}\end{aligned}$$

a dosadíme zpátky

$$\frac{\sin \Delta\varphi_k}{\cos \varphi_k \cos \varphi_{k+1}} = \frac{1}{r_k} + \frac{\rho_{k+1}^2 c_k \sin^2 \varphi_{k+1}}{r_k \Delta x_k r_{k+1} \Delta x_{k+1}}.$$

Dle Věty 5.9 jsou i $r_k \Delta x_k$ a $r_{k+1} \Delta x_{k+1}$ celé buďto kladné nebo záporné. Dále platí předpoklad $c_k > 0$. Celkově tedy dostáváme

$$\frac{\rho_{k+1}^2 c_k \sin^2 \varphi_{k+1}}{r_k \Delta x_k r_{k+1} \Delta x_{k+1}} \geq 0$$

a tedy

$$\frac{\sin \Delta\varphi_k}{\cos\varphi_k \cos\varphi_{k+1}} \geq \frac{1}{r_k}. \tag{5.15}$$

Dále můžeme psát

$$\begin{aligned}\frac{\sin \Delta\varphi_k}{\cos\varphi_k \cos\varphi_{k+1}} &= \frac{\sin(\varphi_{k+1} - \varphi_k)}{\cos\varphi_k \cos\varphi_{k+1}} = \frac{\sin\varphi_{k+1}\cos\varphi_k - \cos\varphi_{k+1}\sin\varphi_k}{\cos\varphi_k \cos\varphi_{k+1}} \\ &= \frac{\sin\varphi_{k+1}}{\cos\varphi_{k+1}} - \frac{\sin\varphi_k}{\cos\varphi_k} = \operatorname{tg}\varphi_{k+1} - \operatorname{tg}\varphi_k = \Delta \operatorname{tg}\varphi_k\end{aligned}$$

a z (5.15) tedy dostáváme

$$\Delta \operatorname{tg}\varphi_k = \operatorname{tg}\varphi_{k+1} - \operatorname{tg}\varphi_k \geq \frac{1}{r_k}.$$

Musí proto platit, že

$$\operatorname{tg}\varphi_{k+1} - \operatorname{tg}\varphi_n \geq \sum_{i=n}^{k} \frac{1}{r_i}.$$

Pro $k \to \infty$ pak dostáváme

$$\begin{aligned}(\operatorname{tg}\varphi_{k+1} - \operatorname{tg}\varphi_n) &\in \mathbb{R}, \\ \sum_{i=n}^{k} \frac{1}{r_i} &\to \infty,\end{aligned}$$

což je opět spor. $\square$

6 Dynamické rovnice na časové škále

Základní informace v této kapitole jsou čerpány z [5].

6.1 Úvodní poznámky

Před uvedením samotné rovnice, kterou budeme studovat, je třeba si zavést pár pojmů.

Definice 6.1 *Časová škála* $\mathbb{T}$ je neprázdná uzavřená podmnožina množiny reálných čísel $\mathbb{R}$.

Nyní uvedeme základy kalkulu na časové škále. Definujeme operátor *dopředného a zpětného skoku*

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \inf\{s > t, s \in \mathbb{T}\}, \\ \rho(t) &= \sup\{s < t, s \in \mathbb{T}\}, \end{aligned}$$

a *zrnitost* jako

$$\mu(t) = \sigma(t) - t,$$

přičemž klademe

$$\begin{aligned} \inf \emptyset &= \sup \mathbb{T}, \\ \sup \emptyset &= \inf \mathbb{T}. \end{aligned}$$

Pro funkci $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ je v bodě $t \in \mathbb{T}$ definována *zobecněná delta derivace* f^Δ (či Hilgerova derivace), jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje okolí $\mathcal{U} \subset \mathbb{T}$ bodu t takové, že platí

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|, \qquad \forall\, s \in \mathcal{U}.$$

Pak pro všechna $t \in \mathbb{T}$ platí

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^\Delta(t). \tag{6.1}$$

Pro zjednodušení budeme psát

$$f^\sigma := f \circ \sigma.$$

Pokud je $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, pak $f^\Delta = f'$, a pokud $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, pak $f^\Delta = \Delta f$. Platí následující pravidla pro počítání s delta derivací

$$\begin{aligned} (f+g)^\Delta &= f^\Delta + g^\Delta, \\ (fg)^\Delta &= f^\Delta g^\sigma + f g^\Delta. \end{aligned}$$

Poznámka 6.2 Protože je diference speciálním případem delta derivace (neboť $\mathbb{Z}$ je uzavřenou podmnožinou množiny $\mathbb{R}$), problémy, které nastávají v diskrétním kalkulu, viz Poznámka 5.2, zůstávají a přidávají se k nim další.

Definice 6.3 Řekneme, že funkce f je *rd-spojitá*, pokud

(i) je spojitá ve všech bodech t, ve kterých platí $\sigma(t) = t$,

(ii) ve všech bodech, ve kterých platí $\rho(t) = t$, existuje limita $\lim_{s \to t-} f(s)$.

Řekneme, že funkce f je *rd-spojitě delta diferencovatelná*, pokud f^Δ existuje a je rd-spojitá, značíme $f \in C^1_{rd}$.

Budeme uvažovat *dynamickou rovnici druhého řádu* tvaru

$$\left(r(t)x^\Delta(t)\right)^\Delta + c(t)x^\sigma(t) = 0, \qquad t \in \mathbb{T}. \tag{6.2}$$

kde na dané časové škále je $r(t) > 0$ a $1/r, c$ jsou zde rd-spojité. Nebude-li řečeno jinak, budeme po celou kapitolu předpokládat, že tyto podmínky pro koeficienty jsou splněny.

Pokud $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, pak tato rovnice přejde na lineární diferenciální rovnici druhého řádu, a pokud $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, pak přejde na diferenční rovnici druhého řádu.

Funkci $x \in C^1_{rd}$ nazveme *řešením* rovnice (6.2), jestliže na daném intervalu vyhovuje rovnici (6.2) a $rx^\Delta \in C^1_{rd}$. Pokud je $x \equiv 0$, nazveme ho *triviálním řešením* rovnice (6.2). V opačném případě se řešení nazývá *netriviální*.

6.2 Prüferova transformace

Nechť x je netriviálním řešením (6.2). Transformace

$$\begin{aligned} x(t) &= \rho(t)\sin\varphi(t), \\ x^\Delta(t) &= \frac{\rho(t)}{r(t)}\cos\varphi(t) \end{aligned} \tag{6.3}$$

rovnice (6.2) se nazývá *dynamická Prüferova transformace*.

Pokud $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, pak tato dynamická Prüferova transformace přejde na klasickou lineární Prüferovu transformaci, a pokud $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, pak přejde na diskrétní Prüferovu transformaci.

Provedeme-li delta derivaci prvního výrazu v (6.3) (dle uvedených pravidel) a porovnáme ho s druhým, dostaneme

$$(\rho(t)\sin\varphi(t))^\Delta = \rho^\Delta(t)\sin^\sigma\varphi(t) + \rho(t)\sin^\Delta\varphi(t) = \frac{\rho(t)}{r(t)}\cos\varphi(t). \tag{6.4}$$

Dále provedeme delta derivaci výrazu $r(t)x^\Delta(t) = \rho(t)\cos\varphi(t)$ a dostáváme

$$\left(r(t)x^\Delta(t)\right)^\Delta = (\rho(t)\cos\varphi(t))^\Delta = \rho^\Delta(t)\cos^\sigma(t) + \rho(t)\cos^\Delta(t). \tag{6.5}$$

Upravíme rovnici (6.2) pomocí vztahu (6.1) a následně dosadíme z (6.3) a (6.5)

$$\begin{aligned} 0 &= \left(r(t)x^\Delta(t)\right)^\Delta + c(t)x^\sigma(t) \\ &= \left(r(t)x^\Delta(t)\right)^\Delta + c(t)\left(x(t) + \mu(t)x^\Delta(t)\right) \\ &= \rho^\Delta(t)\cos^\sigma(t) + \rho(t)\cos^\Delta(t) + c(t)\left(\rho(t)\sin\varphi(t) + \mu(t)\frac{\rho(t)}{r(t)}\cos\varphi(t)\right). \end{aligned} \tag{6.6}$$

Nyní rovnici (6.4) vynásobíme výrazem $\sin^\sigma \varphi$ a přičteme k ní rovnici (6.6) vynásobenou výrazem $\cos^\sigma \varphi$

$$\begin{aligned}\frac{\rho(t)}{r(t)} \cos\varphi(t) \sin^\sigma \varphi(t) = \rho^\Delta \left(\sin^\sigma \varphi(t)\right)^2 &+ \rho(t) \sin^\Delta \varphi(t) \sin^\sigma \varphi(t) \\ &+ \rho^\Delta(t) \left(\cos^\sigma \varphi(t)\right)^2 + \rho(t) \cos^\Delta \varphi(t) \cos^\sigma \varphi(t) \\ &+ c(t) \cos^\sigma \varphi(t) \left(\rho(t) \sin\varphi(t) + \mu(t) \frac{\rho(t)}{r(t)} \cos\varphi(t)\right),\end{aligned}$$

což můžeme upravit jako

$$\begin{aligned}\rho^\Delta(t) = \rho(t) \Bigg(& \frac{1}{r(t)} \cos\varphi(t) \sin^\sigma \varphi(t) - \sin^\Delta \varphi(t) \sin^\sigma \varphi(t) \\ & - \cos^\Delta \varphi(t) \cos^\sigma \varphi(t) - c(t) \cos^\sigma \varphi(t) \left(\sin\varphi(t) + \frac{\mu(t)}{r(t)} \cos\varphi(t)\right)\Bigg).\end{aligned}$$

Dále rovnici (6.4) vynásobíme výrazem $\cos^\sigma \varphi$ a odečteme od ní rovnici (6.6) vynásobenou výrazem $\sin^\sigma \varphi$

$$\begin{aligned}\frac{\rho(t)}{r(t)} \cos\varphi(t) \cos^\sigma \varphi(t) = \rho^\Delta \sin^\sigma \varphi(t) \cos^\sigma \varphi(t) &+ \rho(t) \sin^\Delta \varphi(t) \cos^\sigma \varphi(t) \\ &- \rho^\Delta(t) \sin^\sigma \varphi(t) \cos^\sigma \varphi(t) - \rho(t) \cos^\Delta \varphi(t) \sin^\sigma \varphi(t) \\ &- c(t) \sin^\sigma \varphi(t) \left(\rho(t) \sin\varphi(t) + \mu(t) \frac{\rho(t)}{r(t)} \cos\varphi(t)\right),\end{aligned}$$

což můžeme upravit jako

$$\sin^\Delta \varphi(t) = \frac{1}{r(t)} \cos\varphi(t) + \operatorname{tg}^\sigma \varphi(t) \left(\cos^\Delta \varphi(t) + c(t) \left(\sin\varphi(t) + \frac{\mu(t)}{r(t)} \cos\varphi(t)\right)\right).$$

Rovnice

$$\begin{aligned}\rho^\Delta(t) = \rho(t) \Bigg(& \frac{1}{r(t)} \cos\varphi(t) \sin^\sigma \varphi(t) - \sin^\Delta \varphi(t) \sin^\sigma \varphi(t) \\ & - \cos^\Delta \varphi(t) \cos^\sigma \varphi(t) \\ & - c(t) \cos^\sigma \varphi(t) \left(\sin\varphi(t) + \frac{\mu(t)}{r(t)} \cos\varphi(t)\right)\Bigg),\end{aligned} \tag{6.7}$$

$$\sin^\Delta \varphi(t) = \frac{1}{r(t)} \cos\varphi(t) + \operatorname{tg}^\sigma \varphi(t) \left(\cos^\Delta \varphi(t) + c(t) \left(\sin\varphi(t) + \frac{\mu(t)}{r(t)} \cos\varphi(t)\right)\right) \tag{6.8}$$

nazýváme *dynamickým Prüferovým systémem*, jehož řešením jsou právě funkce ρ a φ.

Pokud $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, pak tento dynamický Prüferův systém přejde na klasický lineární Prüferův systém, a pokud $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, pak přejde na diskrétní Prüferův systém.

Poznámka 6.4 Tento problém je možné ještě zobecnit a to sice pomocí *symplektického dynamického systému* na časové škále $\mathbb{T}$, který je lineárním systémem prvního řádu tvaru

$$z^\Delta = \mathcal{S}(t) z, \tag{6.9}$$

kde

$$z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$$

a $\mathcal{S}$ je $2n \times 2n$ matice, pro kterou platí

$$\mathcal{S}^T(t)\mathcal{J} + \mathcal{J}\mathcal{S}(t) + \mu(t)\mathcal{S}^T(t)\mathcal{J}\mathcal{S}(t) = 0,$$

kde

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Prüferovu transformaci pak zavádíme následovně. Nechť

$$Z = \begin{pmatrix} X \\ U \end{pmatrix}$$

je $2n \times n$ izotropická maticová báze (6.9) (tzn. $X^T U = U^T X$ a hodnost této matice je n). Pak existuje rd-spojitě diferencovatelná regulární $n \times n$ matice H a $n \times n$ matice S, C takové, že $\binom{X}{U}$ se dá vyjádřit jako

$$X(t) = S^T(t)H(t), \qquad U(t) = C^T(t)H(t),$$

kde $\binom{S}{C}$ je řešením trigonometrického dynamického systému

$$\begin{pmatrix} S \\ C \end{pmatrix}^{\Delta} = \begin{pmatrix} \mathcal{P} & \mathcal{Q} \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ C \end{pmatrix},$$

které splňuje

$$\begin{aligned} S^T S + C^T C &= I, \\ S^T C - C^T S &= 0, \end{aligned}$$

a kde

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= (H^\sigma)^{T-1} \begin{pmatrix} X \\ U \end{pmatrix}^T \mathcal{S}^T \begin{pmatrix} X \\ U \end{pmatrix} H^{-1} - H^\Delta, \\ \mathcal{Q} &= (H^\sigma)^{T-1} \begin{pmatrix} X \\ U \end{pmatrix}^T \mathcal{S}^T \mathcal{J} \begin{pmatrix} X \\ U \end{pmatrix} H^{-1}, \end{aligned}$$

a H je řešením systému prvního řádu

$$H^\Delta = \left(\tilde{Z}^\sigma\right)^T \left(\mathcal{S}\tilde{Z} - \tilde{Z}^\Delta\right) H,$$

kde $\tilde{Z} = \binom{S^T}{C^T}$.

Poznámka 6.5 Speciálním případem symplektického dynamického sytému je za předpokladu $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ *lineární Hamiltonovský systém* (4.11), jehož speciálním případem je Sturmova-Liouvilleova lineární diferenciální rovnice, viz část 2.4.6. Za předpokladu $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ dostáváme *symplektický diferenční systém*

$$z_{k+1} = \overline{\mathcal{S}}_k z_k, \qquad \overline{\mathcal{S}}_k = I + \mathcal{S}_k,$$

kde $\overline{\mathcal{S}}$ je symplektická matice, tzn. platí $\overline{\mathcal{S}}^T \mathcal{J} \overline{\mathcal{S}} = \mathcal{J}$, jehož speciálním případem je *Sturmova-Liouvilleova diferenční rovnice* (5.1).

7 Závěr

Cílem této práce bylo shromáždit informace o různých verzích Prüferovy transformace, o jejich vlastnostech a aplikacích, a doplnit vše detailními výpočty. Tam, kde to bylo možné, je práce doplněna vlastními obrázky.

Důraz byl kladen také na hledání souvislostí a podobností mezi různými variantami transformace. Navzdory absenci aditivity v pololineárním případě jsou tyto podobnosti nejvíce vidět mezi lineární a pololineární verzí.

Dále jsme si kladli za cíl nalézt nové aplikace, případně alternativní přístupy k důkazu již existujících tvrzení. Za zmínku stojí zejména kritéria Leightonova-Wintnerova typu, které jsou zformulovány pro lineární případ (Věta 2.21), pololineární případ (Věta 3.17) i pro diferenční rovnici (Věta 5.11). Dále se podařilo k Větě 2.19, která popisuje za jakých podmínek je řešení lineární rovnice (2.1) ohraničené, zformulovat její pololineární zobecnění a to sice Větu 3.15, která popisuje ohraničenost řešení pololineární rovnice (3.1). Podobně, k Větě 2.20, která popisuje, za jakých podmínek je lineární rovnice (2.1) diskonjugovaná, je zformulována Věta 3.16, která popisuje, za jakých podmínek je pololineární rovnice (3.1) diskonjugovaná.

Literatura

[1] AHARONOV, Dov, Martin BOHNER a Uri ELIAS. *Discrete Sturm comparison theorems on finite and infinite intervals.* Journal of Difference Equations and Applications. 2012, 18(10), 1763–1771.

[2] BANKS, D. O. a G. J. KUROWSKI. *A Prüfer transformation for the equation of a vibrating beam subject to axial forces.* J. Differential Equations. 1977, 24, 57–74.

[3] BANKS, D. O. a G. J. KUROWSKI. *A Prüfer transformation for the equation of the vibrating beam.* Trans. Amer. Math. Soc. 1974, 199, 203–222.

[4] BIRKHOFF, Carrett a Gian-Carlo ROTA. *Ordinary Differential Equations.* Waltham, Massachusetts: Blaisdell Publishing Company, 1962. ISBN 978-0-471-86003-7.

[5] BOHNER, Martin a Ondřej DOŠLÝ. *The discrete Prüfer transformation.* Proceedings of the American Mathematical Society. 2001, 129(9), 2715–2726.

[6] CHAILOS, George. *Applications of Prüfer transformations in the theory of ordinary differential equations.* Irish Math. Soc. Bulletin. 2009, 63, 11–31.

[7] DOŠLÝ, Ondřej a Pavel ŘEHÁK. *Half-Linear Differential Equations.* Amsterdam: Elsevier, 2005. Mathematics studies (North-Holland). ISBN 04-445-2039-2.

[8] Heinz Prüfer. *Wikipedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001 [cit. 2022-03-30]. Dostupné z: `https://en.wikipedia.org/wiki/Heinz_Prufer`

[9] KALAS, Josef a Miloš RÁB. *Obyčejné diferenciální rovnice.* Brno: Vydavatelství Masarykovy univerzity, 1995. ISBN 80-210-1130-0.

[10] KONG, Qingkai. *A Short Course in Ordinary Differential Equations.* 1. Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2014. ISBN 978-3-319-11239-8.

[11] PRÜFER, Heinz. *Neue herleitung der Sturm-Liouvillesehen reihenentwicklung stetiger funktionen.* Math. Ann. 1926, (95), 499–518.

[12] REID, William T. *A Prüfer transformation for differential systems.* Pacific J. Math. 1958, 8(3), 575–584.

[13] REID, William T. *Generalized polar coordinate transformations for differential systems.* Rocky Mountain J. Math. 1971, 1(2), 383–406.