



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STAVEBNÍ

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

ÚSTAV STAVEBNÍ MECHANIKY

INSTITUTE OF STRUCTURAL MECHANICS

**STATICKÁ A DYNAMICKÁ ANALÝZA MOSTNÍ
KONSTRUKCE**

STATIC AND DYNAMIC ANALYSIS OF BRIDGE STRUCTURE

DIPLOMOVÁ PRÁCE

DIPLOMA THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Sandra Čáslavová

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. JOSEF MARTINÁSEK, Ph.D.

BRNO 2018



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

FAKULTA STAVEBNÍ

Studijní program	N3607 Stavební inženýrství
Typ studijního programu	Navazující magisterský studijní program s prezenční formou studia
Studijní obor	3607T009 Konstrukce a dopravní stavby
Pracoviště	Ústav stavební mechaniky

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student	Bc. Sandra Čáslavová
Název	Statická a dynamická analýza mostní konstrukce
Vedoucí práce	Ing. Josef Martinásek, Ph.D.
Datum zadání	31. 3. 2017
Datum odevzdání	12. 1. 2018

V Brně dne 31. 3. 2017

prof. Ing. Drahomír Novák, DrSc.
Vedoucí ústavu

prof. Ing. Rostislav Drochytka, CSc., MBA
Děkan Fakulty stavební VUT

PODKLADY A LITERATURA

Chopra A.K.: Dynamics of Structures, Theory and Applications to Earthquake Engineering, Prentice Hall.

Baťa M., Plachý V., Trávníček F.: Dynamika stavebních konstrukcí.

Němec, I. at all. (2010) Finite Elements Analysis of Structures. Aachen: Shaker Verlag.

Normy: ČSN EN 1998-1: Eurocode 8 -Navrhování konstrukcí odolných proti.

ZÁSADY PRO VYPRACOVÁNÍ

Cílem práce je statická a dynamická analýza mostní konstrukce. Studentka prostuduje danou literaturu. Následně vytvoří výpočtový MKP model mostní konstrukce ve zvoleném výpočetním programu. Na vytvořeném modelu budou řešeny úlohy statiky a dynamiky. Vybrané výsledky pak studentka ověří ručním výpočtem.

STRUKTURA DIPLOMOVÉ PRÁCE

VŠKP vypracujte a rozčleňte podle dále uvedené struktury:

1. Textová část VŠKP zpracovaná podle Směrnice rektora "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchovávání vysokoškolských kvalifikačních prací" a Směrnice děkana "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchovávání vysokoškolských kvalifikačních prací na FAST VUT" (povinná součást VŠKP).
2. Přílohy textové části VŠKP zpracované podle Směrnice rektora "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchovávání vysokoškolských kvalifikačních prací" a Směrnice děkana "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchovávání vysokoškolských kvalifikačních prací na FAST VUT" (nepovinná součást VŠKP v případě, že přílohy nejsou součástí textové části VŠKP, ale textovou část doplňují).

Ing. Josef Martinásek, Ph.D.
Vedoucí diplomové práce

ABSTRAKT

Tato diplomová práce si za hlavní náplň stanovuje provedení statických a dynamických výpočtů zvolené mostní konstrukce umístěné do Olomouckého regionu. Výpočty budou provedeny pomocí zvoleného programu a ověřeny ručním výpočtem. Konstrukce je vedena nad místní řekou a funkčně má sloužit pouze pro pěší účely.

KLÍČOVÁ SLOVA

Pěší konstrukce

Dynamika

Metoda konečných prvků

Ansys

ABSTRACT

The aim of this thesis is to conduct static and dynamic computations for selected bridge in the Moravian region, specifically in the surroundings of Olomouc. All calculations will be made by selected software and verified by manual reckon. The bridge is intended for pedestrian traffic and connects left and right side of the river underneath.

KEYWORDS

Pedestrian bridge

Dynamics

FEM principle

Ansys

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE VŠKP

Bc. Sandra Čáslavová *Statická a dynamická analýza mostní konstrukce*. Brno, 2017. 73 s., 3 s. příl. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky. Vedoucí práce Ing. Josef Martinásek, Ph.D.

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracovala samostatně a že jsem uvedla všechny použité informační zdroje.

V Brně dne 12.1.2018

Bc. Sandra Čáslavová
autor práce

PROHLÁŠENÍ O SHODĚ LISTINNÉ A ELEKTRONICKÉ FORMY VŠKP

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že elektronická forma odevzdané diplomové práce je shodná s odevzdanou listinnou formou.

V Brně dne 12. 1. 2018

Bc. Sandra Čáslavová
autor práce

PODĚKOVÁNÍ:

Tímto bych ráda poděkovala Ing. Josefu Martináskovi, Ph.D. za ochotu, trpělivost, cenné rady a odborné vedení mé diplomové práce. Dále bych chtěla poděkovat svým rodičům za veškerou podporu, kterou mi při studiu poskytli.

V Brně 12.1.2018



OBSAH

1	ÚVOD.....	3
2	STATICÁ ANALÝZA.....	4
2.1	Prostý nosník.....	4
2.1.1	Ověření vlastní tíhy prostého nosníku.....	4
2.2	Spojité nosník	4
2.2.1	Ověření vlastní tíhy u spojitého nosníku	4
2.2.2	Ověření zatížení spojitého nosníku silou v krajním poli	6
2.2.3	Ověření zatížení spojitého nosníku silou ve středním poli.....	7
3	POUŽITÉ TYPY KONEČNÝCH PRVKŮ	8
3.1	SOLID 185.....	8
3.2	MESH200	9
4	IDEALIZACE KONSTRUKCE	10
4.1.1	Parametry zjednodušeného modelu.....	10
5	MODEL S JEDNÍM STUPNĚM VOLNOSTI	13
5.1	Odvození pohybové rovnice pro model s jedním stupněm volnosti	13
6	MODEL SE TŘEMI STUPNI VOLNOSTI	15
6.1	Odvození pohybové rovnice pro model se třemi stupni volnosti.....	15
6.1.1	Popis sestavení matice tuhosti u modelu se třemi stupni volnosti	16
7	VÝPOČET	17
7.1	Modální analýza	17
7.1.1	Ruční výpočet prostého nosníku pomocí modelu s třemi stupni volnosti.....	18
7.1.2	Porovnání s výpočtem v Ansys.....	19
7.2	Metoda rozkladu podle vlastních tvarů kmitu	21
7.2.1	Vlastní tvary z modální analýzy uspořádané do modální matice ϕ	22



7.2.2	Řešení numerickou integrací s modálními počátečními podmínkami, Duhamelův integrál.....	23
7.3	Ruční výpočet	23
8	ÚTLUM	26
8.1	Tlumení na prostém nosníku.....	27
8.2	Tlumení na spojitém nosníku.....	27
9	ZATÍŽENÍ.....	29
9.1	Konstantní zatížení	29
9.2	Konstantní zatížení s lineárním náběhem.....	37
9.2.1	Konstantní zatížení s lineárním náběhem bez tlumení.....	37
9.2.2	Konstantní zatížení s lineárním náběhem se zahrnutím tlumení konstrukce.....	42
9.3	Harmonické zatížení.....	47
10	DYNAMICKÁ ANALÝZA SPOJITÉHO NOSNÍKU	55
10.1	Ruční výpočet	55
10.2	Modální analýza v Ansys.....	57
10.3	Ruční výpočet pro konstantní zatížení ve středním poli	59
10.4	Ruční výpočet pro konstantní zatížení v krajním poli.....	62
11	ZÁVĚR	66
	SEZNAM GRAFŮ	68
	SEZNAM OBRÁZKŮ	70
	SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	71
	SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK	72
	PŘÍLOHY	I



1 ÚVOD

V této diplomové práci je provedeno posouzení statických a dynamických sil působících na mostní konstrukci určenou pouze pro pěší. Posuzovaná lávka byla inspirována stávající konstrukcí v Moravském regionu (konkrétně v Olomouci), která přemostňuje přilehlou řeku.

Úkolem provedených výpočtů je posouzení vnitřních silových účinků na konstrukci a zjištění dynamického chování konstrukce. Posudek je proveden za využití programu Ansys 14.0, který pracuje na metodě konečných prvků. Takto zjištěné výsledky jsou následně porovnány s ručním postupem, je ověřena správnost a shoda provedených ručních výpočtů s programovými. V případě nesrovnalostí je provedena analýza rozdílů a jejich příčin. Na zamýšlené pěší lávce je zkoumáno svislé dynamické namáhání konstrukce vlastní silou a působení různých forem budícího zatížení.

Posuzovaná konstrukce je tvořena betonovou deskou spřaženou s ocelovými I profily. K provedení výpočtů je jako inspirace zvolen obloukový most, který je pro účely ručního výpočtu převeden na lineární konstrukci, následně jsou porovnány dynamické odezvy u zvolených typů zatížení. Statika je v diplomové práci řešena s ohledem na průhyb konstrukce od vlastní tíhy a proměnných zatížení vyvolaných budícími silami aplikovanými na lávku. Tyto údaje slouží především pro hlavní náplň této práce, kterou je výpočet dynamických vlastností konstrukce. U dynamiky jsou zkoumány tři typy budícího zatížení (konstantní, konstantní s lineárním náběhem a harmonické) a to také s ohledem na možnosti tlumení konstrukce. Ruční výpočet je proveden pomocí jednostupňového a třístupňového modelu.

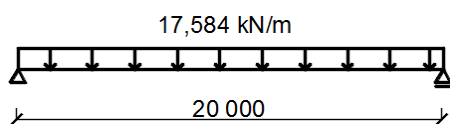


2 STATICKÁ ANALÝZA

Na zvolené konstrukci je provedena statická analýza v takovém rozsahu, aby bylo umožněno ověření dynamických vlivů na konstrukci. Bylo uvažováno zatížení vlastní tíhou konstrukce a dále pak zatížení jednou osobou v kritickém místě konstrukce. Statika byla ověřena jak na prostém, tak i na spojitém nosníku.

2.1 Prostý nosník

2.1.1 Ověření vlastní tíhy prostého nosníku



$$M_{l/2} = \frac{1}{8} g L^2 = \frac{1}{8} 17,584 \cdot 20^2 = 879,2 \text{ kNm}$$

$$w_{l/2} = \frac{5}{384} \frac{g L^4}{EI} = \frac{5}{384} \frac{17,584 \cdot 20^4}{1,199 \cdot 10^9} = 0,03055 \text{ m}$$

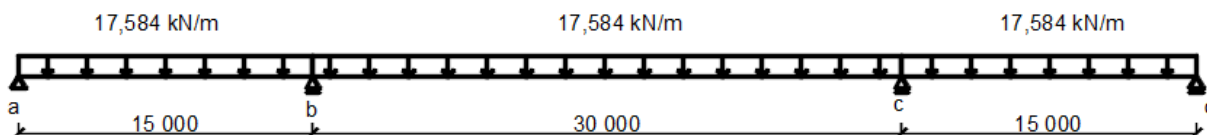
Ověření prostého nosníku pro zatížení osobou

$$w_{l/2} = \frac{F L^3}{48 E I} = \frac{1000 \cdot 20^3}{48 \cdot 1,199 \cdot 10^9} = 0,000139 \text{ m}$$

→ hodnota odpovídá statické výchylce pro dynamické posouzení konstrukce

2.2 Spojitý nosník

2.2.1 Ověření vlastní tíhy u spojitého nosníku



$$\varphi_{ba} = \varphi_{cd} = \frac{1}{24} \frac{q l^3}{EI} = \frac{1}{24} \frac{17,584 \cdot 15^3}{EI} = \frac{2472,75}{EI}$$

$$\varphi_{bc} = \varphi_{cb} = \frac{1}{24} \frac{q l^3}{EI} = \frac{1}{24} \frac{17,584 \cdot 30^3}{EI} = \frac{19782}{EI}$$

$$\alpha = \frac{L}{3EI}$$



$$\beta = \frac{L}{6EI}$$

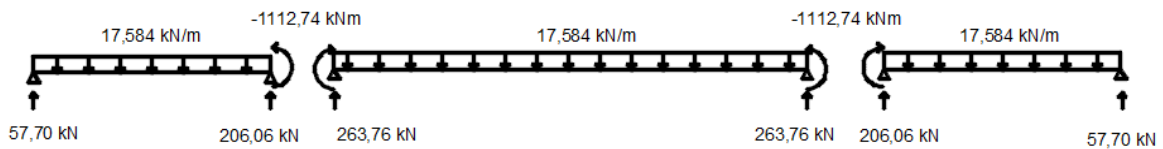
$$M_a \cdot \beta_{ab} + M_b \cdot (\alpha_{ba} + \alpha_{bc}) + M_c \cdot \beta_{cb} + \varphi_{ba} + \varphi_{bc} = 0$$

$$M_b \cdot \beta_{bc} + M_c \cdot (\alpha_{cb} + \alpha_{cd}) + M_d \cdot \beta_{dc} + \varphi_{cd} + \varphi_{cb} = 0$$

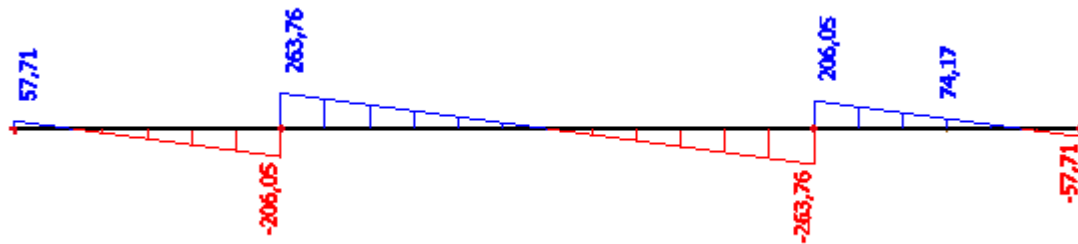
$$M_b \cdot \frac{15}{EI} + M_c \cdot \frac{5}{EI} + \frac{22\,254,75}{EI} = 0$$

$$M_b \cdot \frac{5}{EI} + M_c \cdot \frac{15}{EI} + \frac{22\,254,75}{EI} = 0$$

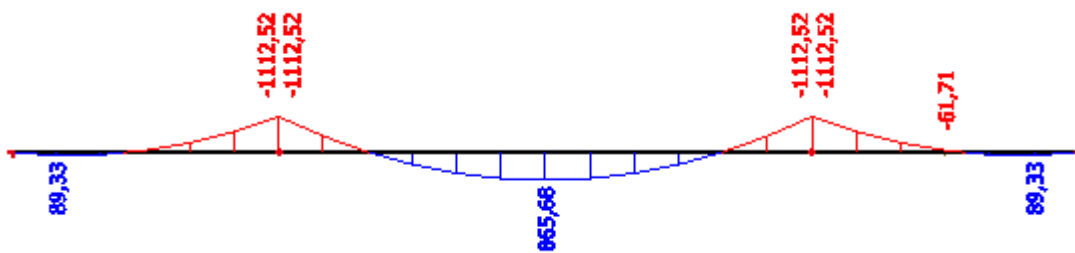
$$M_b = M_c = -1112,74 \text{ kNm}$$



a)



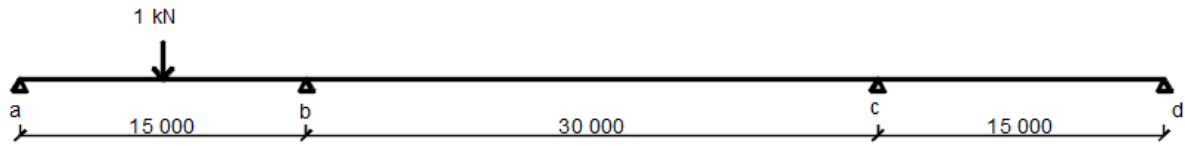
b)



Obrázek 1: Průběh a) posouvající síly a b) ohybového momentu na spojitém nosníku od vlastní tíhy,

Scia Engineer 14

2.2.2 Ověření zatížení spojitého nosníku silou v krajním poli



$$\varphi_{ba} = \varphi_{cd} = \frac{F l^2}{16 EI} = \frac{1 \cdot 15^2}{16 EI} = \frac{14,06}{EI}$$

$$\varphi_{bc} = \varphi_{cb} = \frac{F l^2}{16 EI} = \frac{1 \cdot 30^2}{16 EI} = \frac{56,25}{EI}$$

$$\alpha = \frac{L}{3EI}$$

$$\beta = \frac{L}{6EI}$$

$$M_a \cdot \beta_{ab} + M_b \cdot (\alpha_{ba} + \alpha_{bc}) + M_c \cdot \beta_{cb} + \varphi_{ba} = 0$$

$$M_b \cdot \beta_{bc} + M_c \cdot (\alpha_{cb} + \alpha_{cd}) + M_d \cdot \beta_{dc} = 0$$

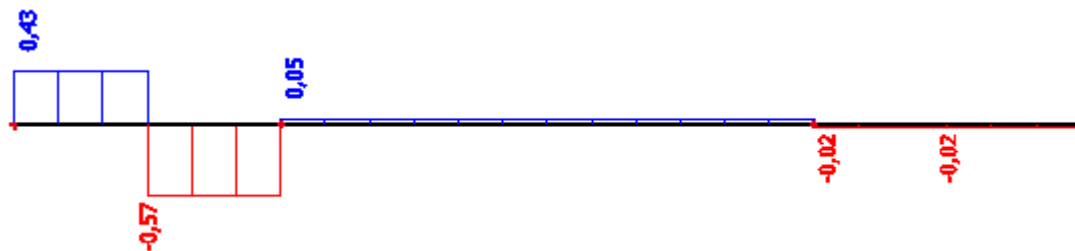
$$M_b \cdot \frac{15}{EI} + M_c \cdot \frac{5}{EI} + \frac{14,06}{EI} = 0$$

$$M_b \cdot \frac{5}{EI} + M_c \cdot \frac{15}{EI} = 0$$

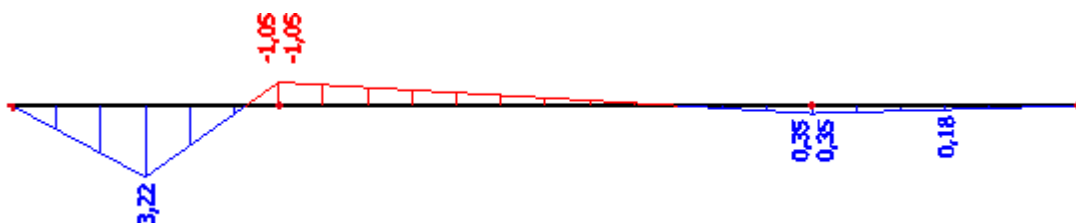
$$M_b = -1,055 \text{ kNm}$$

$$M_c = 0,352 \text{ kNm}$$

a)

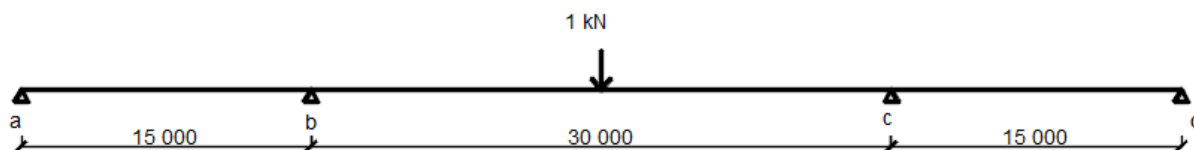


b)



Obrázek 2: Průběh a) posouvající síly a b) ohybového momentu na spojitém nosníku od zatížení silou v krajním poli, Scia Engineer 14

2.2.3 Ověření zatížení spojitého nosníku silou ve středním poli



$$\varphi_{bc} = \varphi_{cb} = \frac{F l^2}{16 EI} = \frac{1 \cdot 30^2}{16 EI} = \frac{56,25}{EI}$$

$$\alpha = \frac{L}{3EI}$$

$$\beta = \frac{L}{6EI}$$

$$M_a \cdot \beta_{ab} + M_b \cdot (\alpha_{ba} + \alpha_{bc}) + M_c \cdot \beta_{cb} + \varphi_{ba} = 0$$

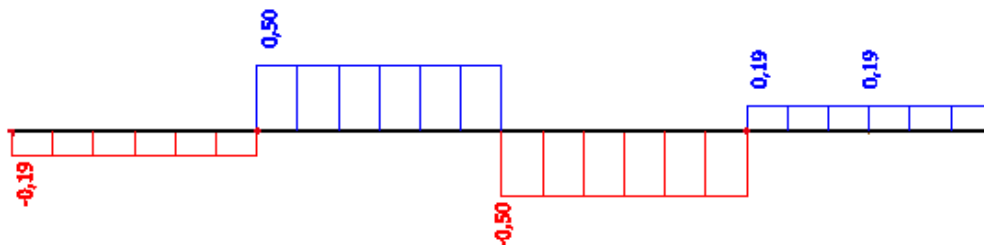
$$M_b \cdot \beta_{bc} + M_c \cdot (\alpha_{cb} + \alpha_{cd}) + M_d \cdot \beta_{dc} = 0$$

$$M_b \cdot \frac{15}{EI} + M_c \cdot \frac{5}{EI} + \frac{56,25}{EI} = 0$$

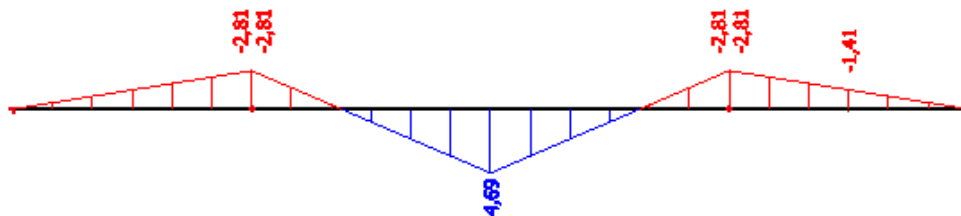
$$M_b \cdot \frac{5}{EI} + M_c \cdot \frac{15}{EI} + \frac{56,25}{EI} = 0$$

$$M_b = M_c = -2,813 \text{ kNm}$$

a)



b)

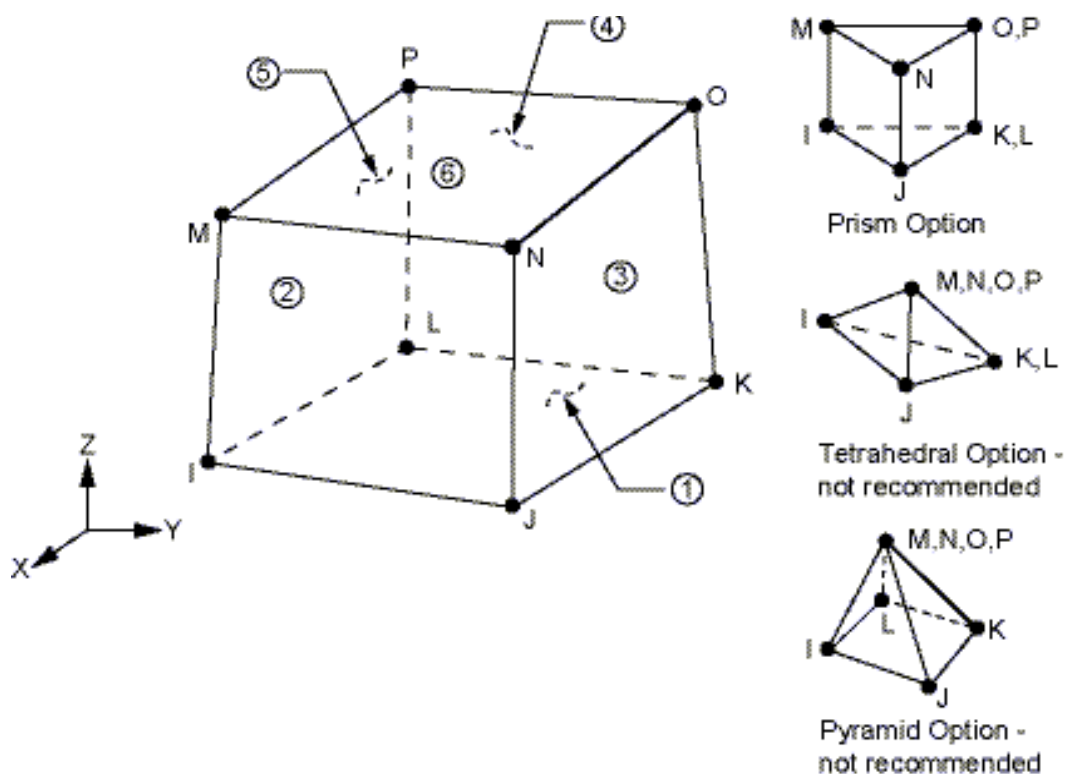


Obrázek 3: Průběh a) posouvající síly a b) ohybového momentu na spojitém nosníku od zatížení silou ve středním poli, Scia Engineer 14

3 POUŽITÉ TYPY KONEČNÝCH PRVKŮ

3.1 SOLID 185

SOLID185 se používá pro prostorové modelování pevných těles. Je definován osmi uzly se třemi stupni volnosti v každém uzlu: posuny ve směru os x , y a z . Podporuje velké deformace a také změnu tuhosti vlivem napjatosti. Prvek ve svých vlastnostech zahrnuje plastičnost, hyperelasticitu, vyztužení namáháním. Prvek lze nastavit jako homogenní a také jako skládající se z více vrstev.



Vstupními parametry jsou souřadnice uzlů, uzlová zatížení, materiálové charakteristiky, popřípadě jednotlivé vrstvy u nastavení prvku jako vícevrstvého. Výstupy prvku jsou uzlová přemístění a další odvozené veličiny. Mezi hlavní odvozené patří normálová a smyková napětí. Tento prvek byl využit při sestavení modelu posuzované konstrukce.



3.2 MESH200

MESH200 je tvořen elementy, které samy o sobě nepřispívají k obecnému řešení, ale zajišťují pravidelnost struktury sítě. Tyto elementy jsou využívány k řešení následujících druhů operací:

- rozdělení konstrukce na velký počet konečných prvků, skládající se z menšího a pravidelnějšího počtu elementů,
- provedení tohoto rozdělení podél linie ve 2D a 3D prostoru včetně nebo bez středových uzlů,
- oblastní tvorba sítě nebo také velikostní ve 3D prostoru s využitím pravidelných tvarů,
- dočasné uložení elementů v případě, že nebyly určeny fyzikální vlastnosti prvků,
- MESH200 lze využít v kombinaci s ostatními typy ANSYS elementů. Když už nejsou tyto prvky potřebné, je možno je vymazat, nebo ponechat, aniž by měly dále vliv na samotný výpočet.

MESH200 byl v této práci využit na vytvoření pravidelné sítě konečných prvků.



4 IDEALIZACE KONSTRUKCE

Pro analýzu dynamického chování konstrukce pomocí výpočtového programu konečných prvků je nutné skutečnou konstrukci vhodně idealizovat. Tutéž konstrukci lze namodelovat různými způsoby, které se liší úrovní podrobnosti (počtu konečných prvků). Základní rozdělení modelů je na diskrétní a spojitě. Nejjednodušším modelem je jednostupňový model a naopak nejsložitěji se vystihuje chování konstrukce jako kontinua. Vhodný kompromis mezi těmito dvěma extrémy pak tvoří vícestupňové modely neboli modely s n stupni volnosti.

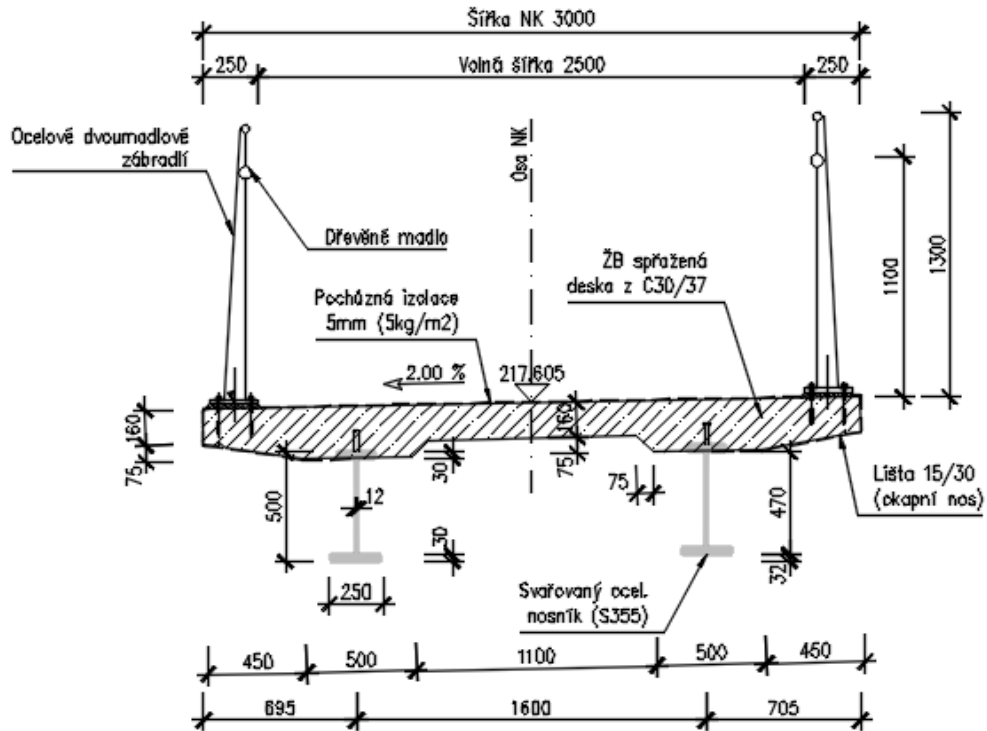
4.1.1 Parametry zjednodušeného modelu

Pro ověření a čitelnost byla v první fázi zvolena jednoduchá lávka pro pěší. Jedná se o spřaženou betonovou desku se svařovanými ocelovými I profily. Lávka má rozpětí 20 m.

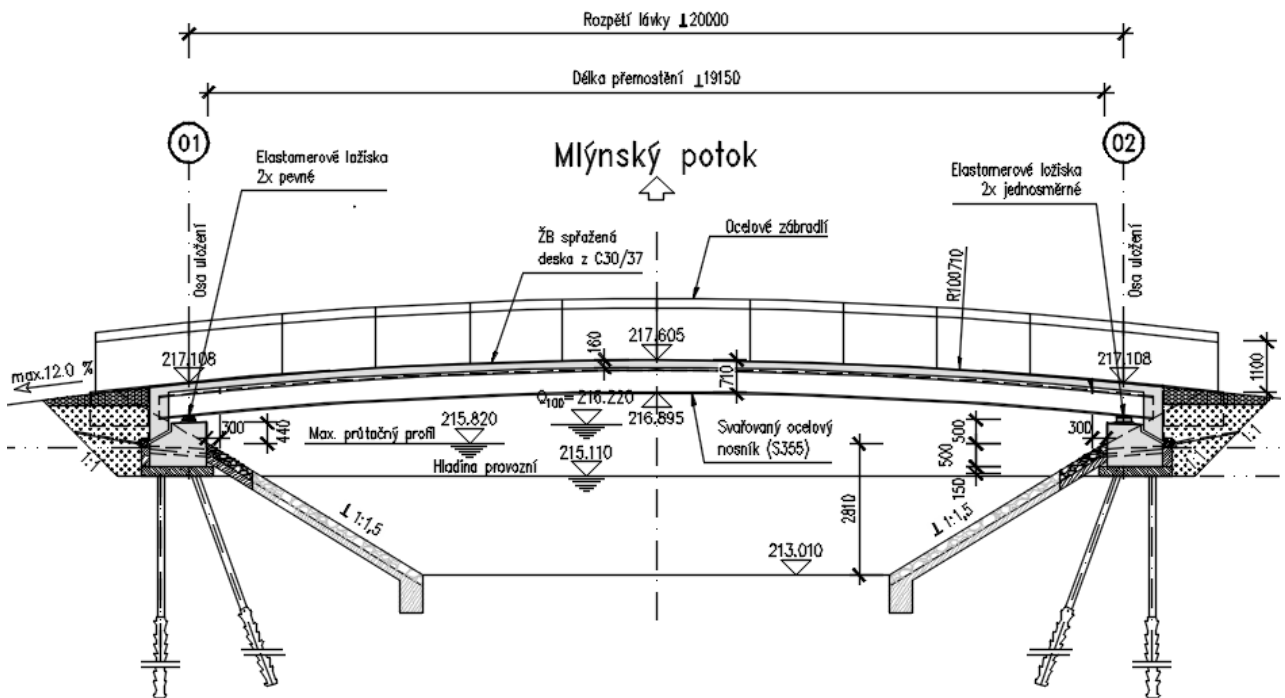
Model byl vytvořen v programu Ansys 14.0. Pro možné porovnání s ručním výpočtem bylo zanedbáno zaoblení konstrukce. Betonová deska byla v příčném řezu zjednodušena na obdélníkový průřez o výšce 0,2 m a šířce 3 m.

Pro celou konstrukci byl zvolen jako konečný prvek SOLID 185. Na ocelové I profily byla použita ocel S355 o modulu pružnosti $E = 210$ GPa. U betonové desky výpočty vychází z hodnoty modulu pružnosti $E = 30$ GPa.

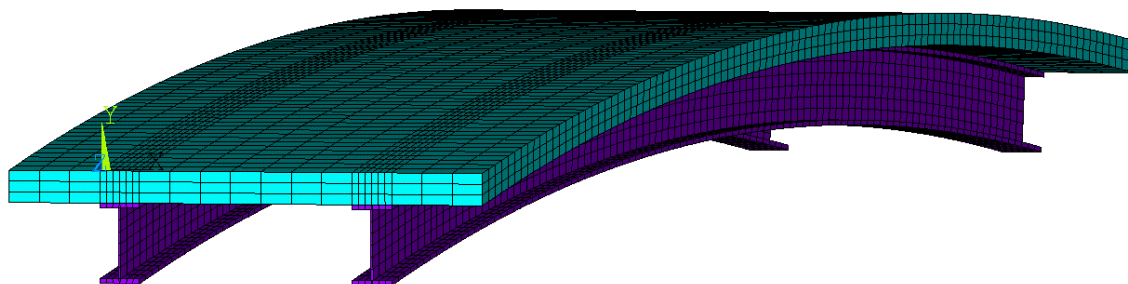
Pro účely výpočtu je uvažována soustředěná hmota m na prostém nosníku, která je rovna polovině hmotnosti celého nosníku. Tuhost k označuje tuhost konstrukce při prvním vlastním tvaru kmitu. Vystihnout skutečnou povahu tlumení v konstrukci je obtížné, neboť se jedná o spřaženou betonovou desku s ocelovými I profily. Nejedná se tedy o jednotný materiál, pro který by existovaly tabulkové hodnoty. V práci je tak po úvaze stanovena hodnota útlumu na $\zeta = 0,05$.



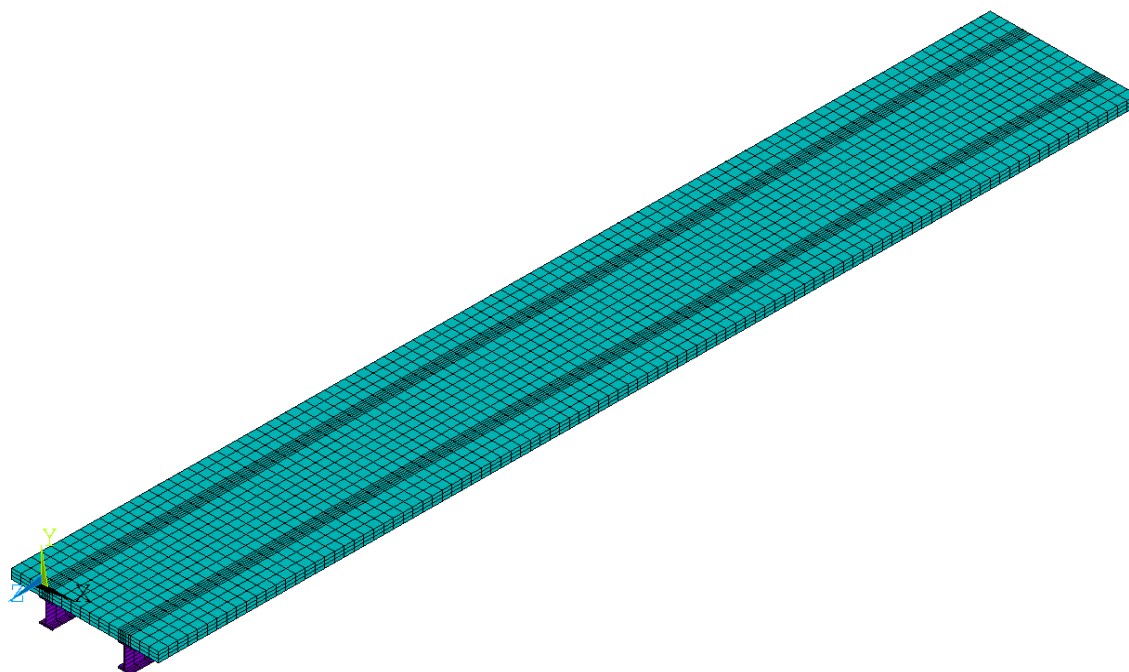
Obrázek 4: Příčný řez mostovkou



Obrázek 5: podélný profil mostu



Obrázek 6: Síť konečných prvků na obloukové konstrukci



Obrázek 7: Síť konečných prvků na rovinné konstrukci

5 MODEL S JEDNÍM STUPNĚM VOLNOSTI

Tento nejjednodušší model je tvořen soustředěnou hmotou m , tuhostí pružiny k a tlumícím členem c , tyto tři parametry popisují celý model a umožňují dostatečně přesně určit první vlastní frekvenci kmitání konstrukce, na kterou je vyvinuto dynamické zatížení. Matematicky lze toto zatížení charakterizovat jako funkci $F(t)$. První vlastní frekvence bývá zpravidla pro návrh rozhodující.

5.1 Odvození pohybové rovnice pro model s jedním stupněm volnosti

Hledané rovnice dosáhneme uplatněním 2. Newtonova zákona a následně sestavíme silovou podmínku celé soustavy.

$$\sum F = m \ddot{u}$$

$$F_t - F_k - F_c = m \ddot{u}$$

kde $F_k = k u$

$$F_c = c \dot{u}$$

Prostým dosazením jednotlivých sil do rovnice, pak získáme hledaný výraz

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = F_t .$$

Rovnice vyjadřuje soustavu diferenciálních rovnic.

Ruční výpočet první vlastní frekvence:

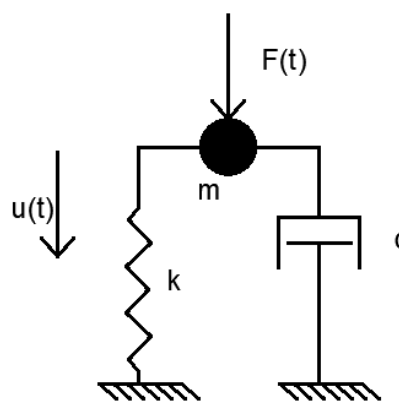
$$m = 17\,583,96 \text{ kg}$$

$$F = k \cdot u \rightarrow k$$

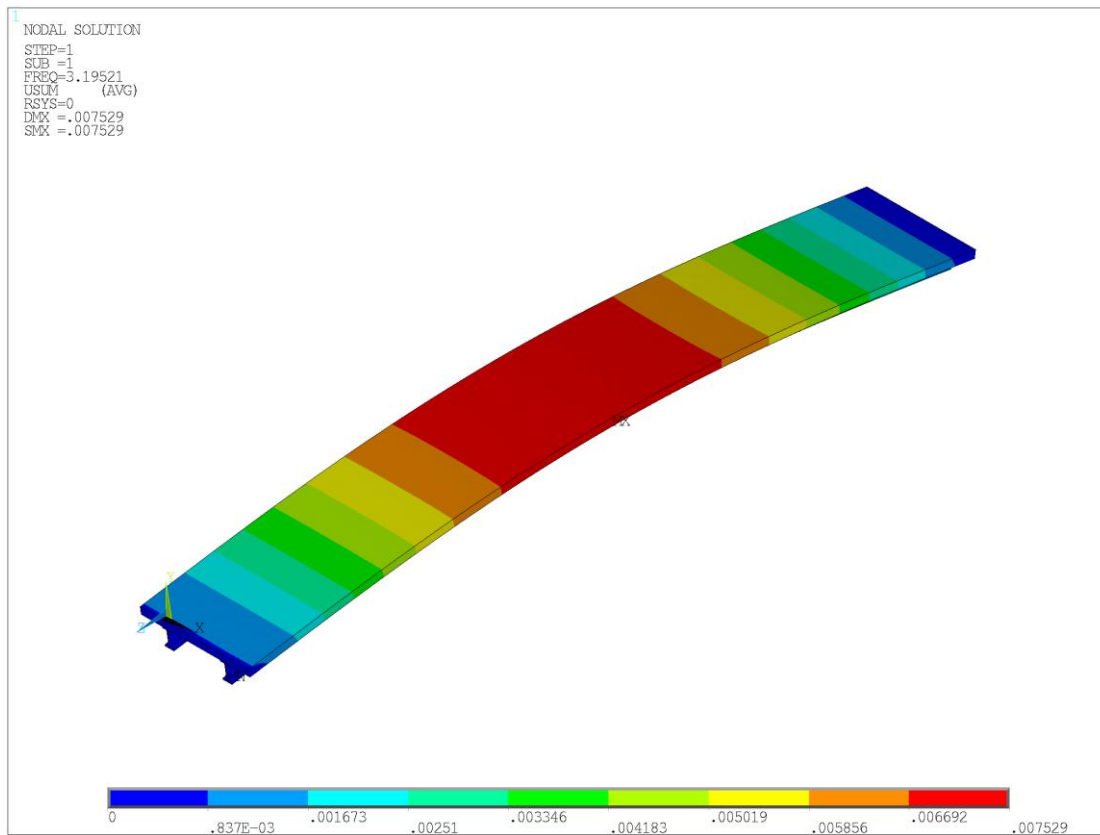
$$k = 7,09 \cdot 10^6$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{7,09 \cdot 10^6}{17583,96}} = 20,0761 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{20,0761}{2\pi} = 3,1952 \text{ Hz}$$



Obrázek 8: Schéma jednostupňového modelu



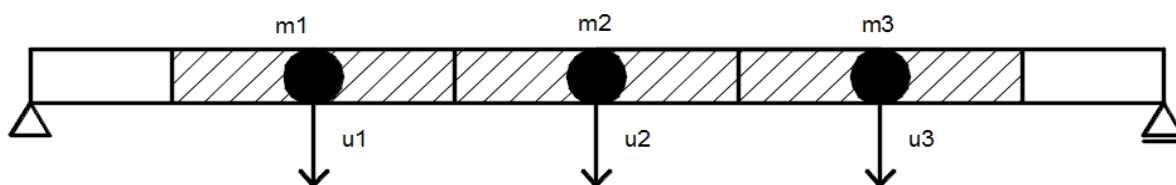
Obrázek 9: První vlastní frekvence prostého nosníku $f = 3,19521$ Hz, Ansys 14.0

6 MODEL SE TŘEMI STUPNI VOLNOSTI

Třístupňový model poskytuje již přesnější popis dynamického chování konstrukce a tato přesnost adekvátně roste s počtem stupňů volnosti n . Model je tvořen maticí hmotnosti M , maticí tuhostí pružin K a maticí tlumení C .

6.1 Odvození pohybové rovnice pro model se třemi stupni volnosti

Stejně jako u jednostupňové soustavy uplatníme i zde 2. Newtonův zákon a následně sestavíme rovnice pro jednotlivé hmotné body tak, aby byla zachována rovnováha sil.



Obrázek 10: Výpočtový model třístupňové soustavy

$$\sum F = m \ddot{u}$$

$$m_1 \ddot{u}_1 = F_{t1} - f_1 + f_2$$

$$m_2 \ddot{u}_2 = F_{t2} - f_2 + f_3$$

$$m_3 \ddot{u}_3 = F_{t3} - f_3 + f_4$$

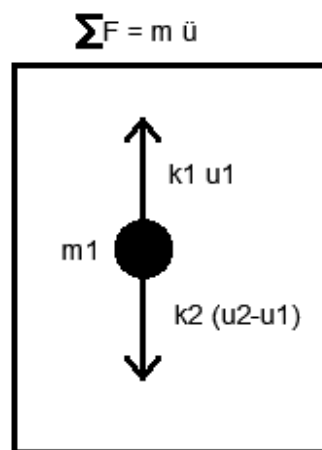
$$f_1 = k_1 u_1$$

$$f_2 = k_2 (u_2 - u_1)$$

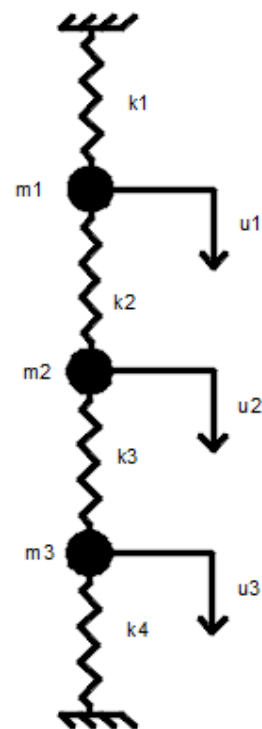
$$f_3 = k_3 (u_3 - u_2)$$

$$f_4 = k_4 (-u_3)$$

$$M \ddot{u} + C \dot{u} + K u = F_t$$



Obrázek 11: Silová rovnováha v hmotném bodě



Obrázek 12: Schéma modelu

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{t1} \\ F_{t2} \\ F_{t3} \end{Bmatrix}$$

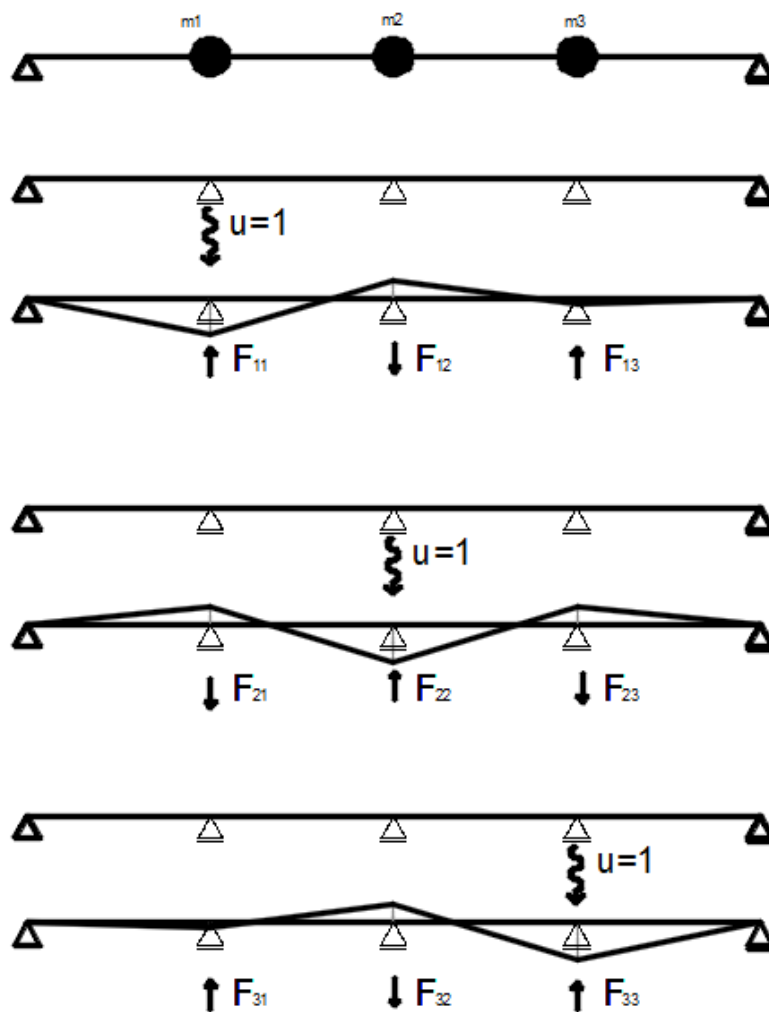
Tento výraz je diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty.

6.1.1 Popis sestavení matice tuhosti u modelu se třemi stupni volnosti

Maticе tuhosti byla stejně jako u jednostupňového modelu získána ze závislosti velikosti potřebné síly na dané posunutí. Na konstrukci bylo postupně aplikováno posunutí 1m v daných hmotných bodech, byla tak získána síla potřebná pro toto posunutí a dle vztahu

$$F = k \cdot u$$

byla stanovena tuhost a následně sestavena matice tuhosti pro třístupňový model.



Obrázek 13: Popis zjištění tuhosti pro třístupňový model



7 VÝPOČET

7.1 Modální analýza

Modální analýza slouží jako výchozí krok pro následné podrobnější řešení vystihující dynamické chování konstrukce. S její pomocí lze získat vlastní tvary a vlastní frekvence konstrukce. Pro jejich dosažení byla v programu Ansys použita bloková Lanczosova metoda. Pro ověření ručního výpočtu s programem Ansys byla využita právě modální analýza a byly porovnány vlastní tvary a vlastní frekvence.

Volné kmitání netlumených soustav vystihuje pohybová maticová rovnice:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = 0$$

Stanovené počáteční podmínky:

$$u_{(0)} = 0$$

$$\ddot{u}_{(0)} = 0$$

M ...symetrická matice hmotnosti

K ... symetrická matice tuhosti soustavy

u ... vektor přemístění

\ddot{u} ... vektor zrychlení

Pomocí funkce nadefinujeme přiložené zatížení na konstrukci (konstantní, konstantní zatížení s lineárním náběhem, harmonické zatížení).

Po dosazení do pohybové rovnice a po drobných úpravách získáme soustavu lineárních algebraických rovnic.

Zobecněný problém vlastních čísel lze vyjádřit jako:

$$(K - \omega^2 M)U = 0$$

K ...matice tuhosti

ω ...vlastní číslo (úhlová frekvence)

M ...matice hmotnosti

U ...vlastní vektor



Netriviálnímu řešení odpovídá vztah:

$$\det|K - \omega^2 M| = 0$$

Dosazením a následným řešením determinantu získáme vlastní čísla ω^2 , jejichž počet odpovídá počtu stupňů volnosti výpočtového modelu, a které jsou seřazeny vzestupně (uspořádaná množina kořenů podle velikosti tvoří spektrum vlastních čísel $0 \leq \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \dots \leq \omega_N^2$) a jim odpovídající vlastní vektory $U = \{U_1, U_2, U_3 \dots U_N\}^T$

7.1.1 Ruční výpočet prostého nosníku pomocí modelu s třemi stupni volnosti

$$M \ddot{u} + K u = F_t$$

$$\begin{bmatrix} 8792 & 0 & 0 \\ 0 & 8792 & 0 \\ 0 & 0 & 8792 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 6.67760E+07 & -5.70360E+07 & 1.73900E+07 \\ -5.70360E+07 & 8.42960E+07 & -5.70360E+07 \\ 1.73900E+07 & -5.70360E+07 & 6.67760E+07 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{t1} \\ F_{t2} \\ F_{t3} \end{Bmatrix}$$

$$M \ddot{u} + K u = 0$$

$$\begin{bmatrix} 8792 & 0 & 0 \\ 0 & 8792 & 0 \\ 0 & 0 & 8792 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 6.67760E+07 & -5.70360E+07 & 1.73900E+07 \\ -5.70360E+07 & 8.42960E+07 & -5.70360E+07 \\ 1.73900E+07 & -5.70360E+07 & 6.67760E+07 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

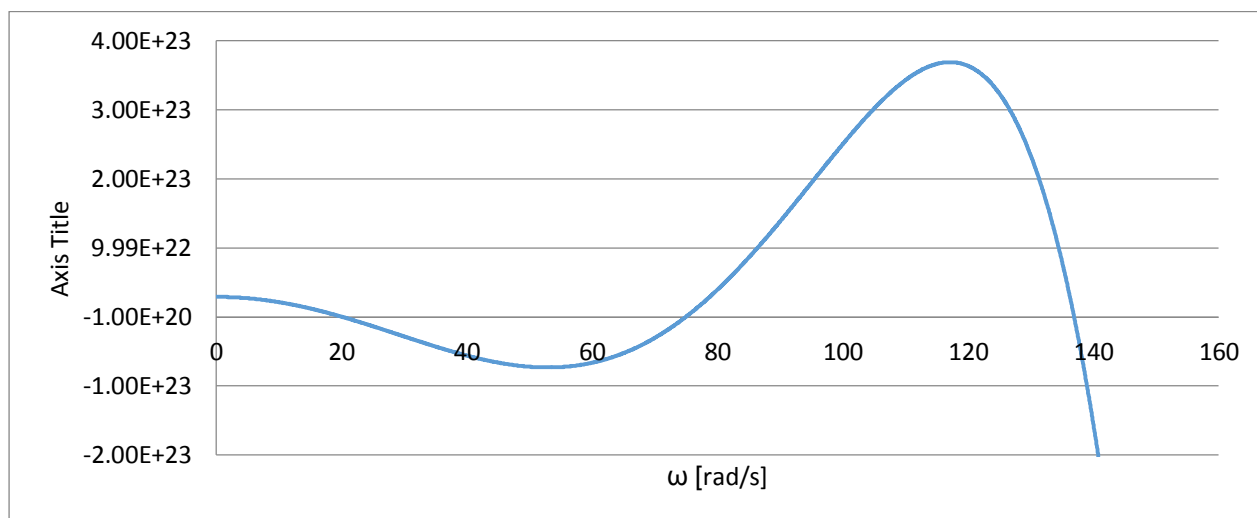
Počáteční podmínky

$$u_{(0)} = 0$$

$$\ddot{u}_{(0)} = 0$$

$$\det|K - \omega^2 M| = 0$$

$$\det \begin{vmatrix} 6.67760E+07 - \omega^2 \cdot 8792 & -5.70360E+07 & 1.73900E+07 \\ -5.70360E+07 & 8.42960E+07 - \omega^2 \cdot 8792 & -5.70360E+07 \\ 1.73900E+07 & -5.70360E+07 & 6.67760E+07 - \omega^2 \cdot 8792 \end{vmatrix} = 0$$



Graf 1: Zjištění hodnot vlastních čísel u prostého nosníku, ruční výpočet

$$\omega_1 = 20,15 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\omega_2 = 74,93 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\omega_3 = 136,93 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

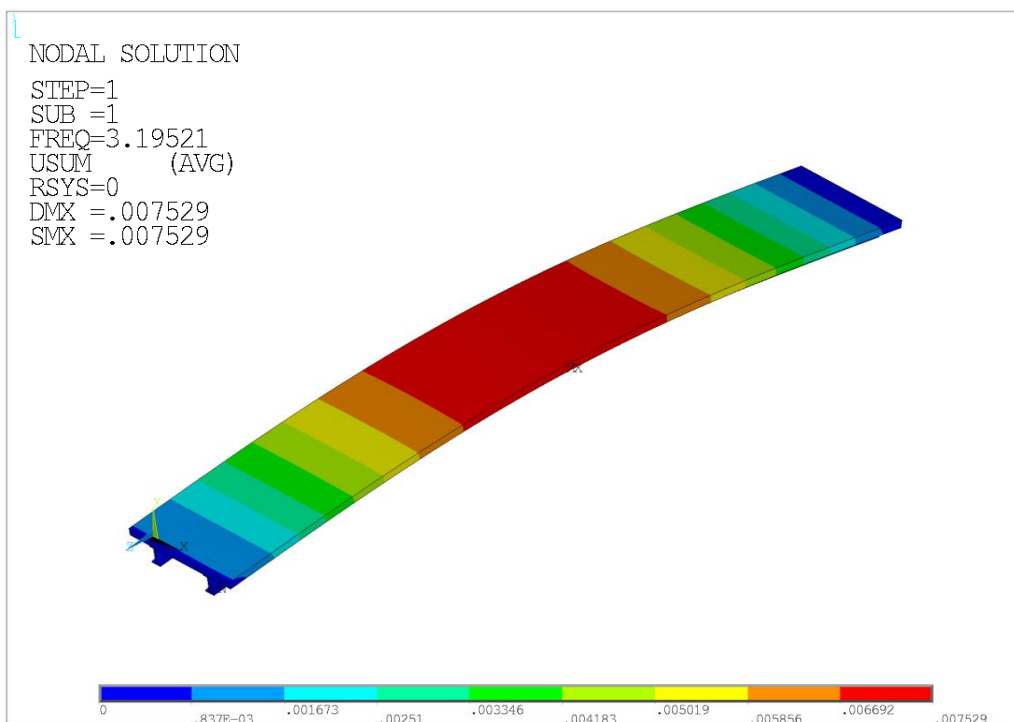
$$f_1 = 3.20697 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 11.92548 \text{ Hz}$$

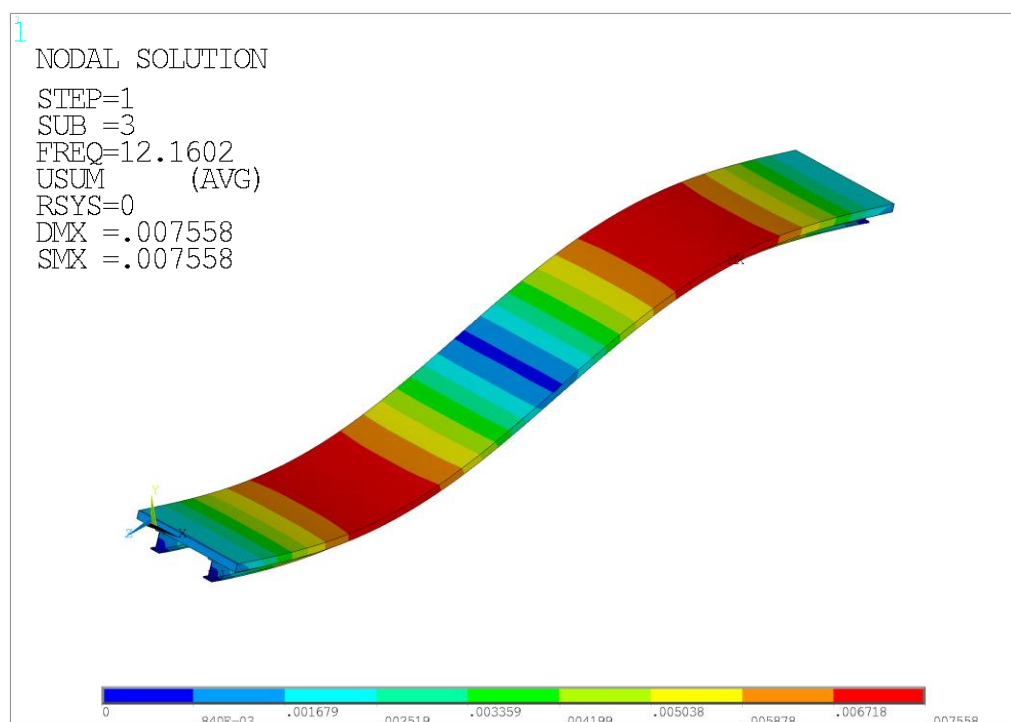
$$f_3 = 21.79309 \text{ Hz}$$

7.1.2 Porovnání s výpočtem v Ansys

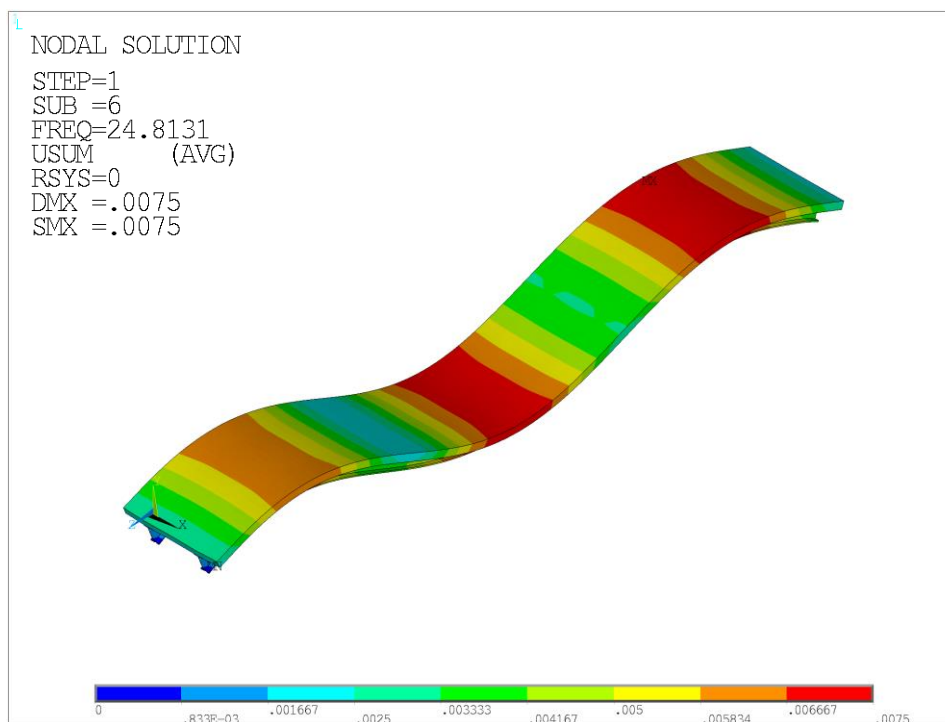
Při porovnání získaných hodnot frekvencí z ručního výpočtu a počítačem zpracovaného výpočtu vidíme prakticky shodné hodnoty u první vlastní frekvence f_1 , následují nepatrné odchylky u frekvence f_2 , zatímco u třetí vlastní frekvence f_3 jsou již rozdíly v řádu jednotek. Z uvedeného vyplývá, že ruční postup v druhé polovině matice již vykazuje méně přesné výsledky a následně tak vnášíme do výpočtu nepřesnost. Při znalosti tohoto jevu, můžeme výše zmíněné eliminovat použitím vyššího stupně volnosti a v následujících krocích výpočtu využívat pouze přesnější hodnoty v první polovině matice.



Obrázek 14: První vlastní frekvence prostého nosníku, Ansys 14.0



Obrázek 15: Druhá vlastní frekvence prostého nosníku, Ansys 14.0



Obrázek 16: Třetí vlastní frekvence prostého nosníku, Ansys 14.0

7.2 Metoda rozkladu podle vlastních tvarů kmitu

Pro řešení pohybových rovnic byla použita metoda rozkladu podle vlastních tvarů kmitu. Tato metoda umožňuje poměrně rychlé a nepříliš náročné řešení v porovnání například s přímou integrací. Vzhledem k tomu, že hmotnost i tuhost zůstává konstantní, nemění se ani okrajové podmínky a pohybujeme se v oboru malých deformací, lze metodu rozkladu podle vlastních tvarů kmitu na tento případ bezpečně aplikovat.

Základním předpokladem je sestavení pohybových rovnic, které jsou soustavou n simultánních rovnic o n neznámých a zahrnutí počátečních podmínek.

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f(t)$$

$$u(0) = u_0$$

$$\dot{u}(0) = \dot{u}_0$$

Obecně mají matice M , C , a K mimodiagonální nenulové členy (tedy $K_{ij} = K_{ji} \neq 0$).

Nezbytným krokem této metody je transformace, kdy se soustava n závislých rovnic transformuje na soustavu n nezávislých rovnic s využitím tvarů kmitu. Takto upravenou soustavu jsme již dále schopni řešit.



Prvním krokem je provedení modální analýzy. Získáme tak všechny tvary kmitu. Do dalšího postupu se předpokládá zahrnutí všech tvarů kmitu, ale musíme vzít v úvahu, že přesných výsledků takto nelze dosáhnout. Pokud máme jako v našem případě třístupňovou matici, tak 3. vlastní tvar kmitu je již velmi zkreslený a vnášíme tak do výpočtu poměrně velkou chybu.

7.2.1 Vlastní tvary z modální analýzy uspořádané do modální matice ϕ

Jednotlivé vlastní vektory tvoří sloupce transformační matice.

$$\phi = [\phi_1, \phi_2, \phi_3]$$

Transformace souřadnic

$$u(t) = \phi \eta(t)$$

Dosazením do pohybových rovnic a přenásobením transponovanou modální maticí ϕ^T zleva dostaneme pohybovou rovnici v hlavních souřadnicích:

$$M\ddot{\eta} + C\dot{\eta} + K\eta = F(t)$$

kde

$$M = \phi^T m \phi \quad \dots \text{ modální matice hmotnosti}$$

$$C = \phi^T c \phi \quad \dots \text{ modální matice tlumení}$$

$$K = \phi^T k \phi \quad \dots \text{ modální matice tuhosti}$$

$$F(t) = \phi^T f(t) \quad \dots \text{ modální zatěžovací vektor}$$

Vzhledem k podmínkám ortogonality jsou matice M a K diagonální.

Celková odezva $\eta(t)$ může být získána po zavedení počátečních podmínek

$$u(0) = \phi \eta(0)$$

$$\dot{u}(0) = \phi \dot{\eta}(0)$$

Po vynásobení těchto rovnic členem $\phi^T m$ zleva získáme

$$\phi^T m u(0) = M \eta(0)$$

$$\phi^T m \dot{u}(0) = M \dot{\eta}(0)$$

Matice M je diagonální, potom lze modální počáteční podmínky zapsat takto

$$\eta_r(0) = \left(\frac{1}{M_r} \right) \phi^T m u(0)$$

$$\dot{\eta}_r(0) = \left(\frac{1}{M_r}\right) \phi^T m \dot{u}(0)$$

pro $r = 1, 2, \dots, N$

Vyřeší se soustava pohybových rovnic v hlavních souřadnicích – soustava nezávislých rovnic – jednostupňové soustavy v hlavních souřadnicích.

7.2.2 Řešení numerickou integrací s modálními počátečními podmínkami, Duhamelův integrál

Po nalezení řešení v hlavních souřadnicích (t) se provede přepočítání do původních r souřadnic podle vztahu

$$u(t) = \phi \eta(t)$$

Řešení n stupňového modelu vede na soustavu n obyčejných diferenciálních rovnic.

Postupy řešení uvedené pro obyčejné diferenciální rovnice lze zobecnit i pro soustavy rovnic, ale pro praktické výpočty je efektivní metoda rozkladu do vlastních tvarů.

7.3 Ruční výpočet

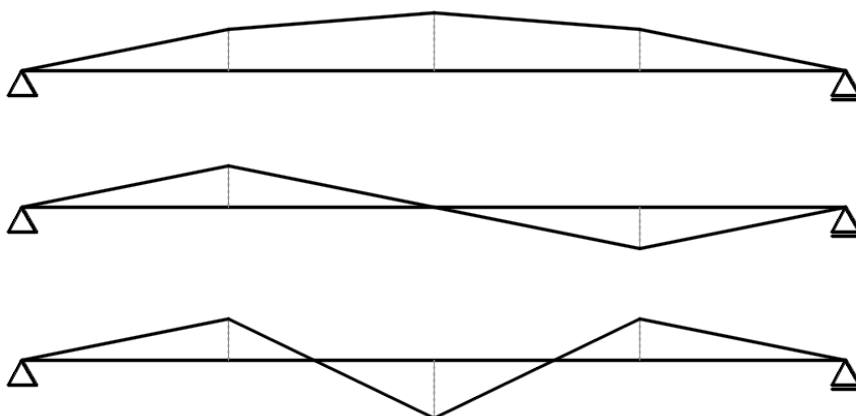
$$(K - \omega^2 M)U = 0$$

$$\begin{bmatrix} 6.67760E + 07 - \omega_i^2 \cdot 8792 & -5.70360E + 07 & 1.73900E + 07 \\ -5.70360E + 07 & 8.42960E + 07 - \omega_i^2 \cdot 8792 & -5.70360E + 07 \\ 1.73900E + 07 & -5.70360E + 07 & 6.67760E + 07 - \omega_i^2 \cdot 8792 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = 0$$

$$U_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.413089 \\ 1.000029 \end{Bmatrix}$$

$$U_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 6.67E - 05 \\ -0.999959 \end{Bmatrix}$$

$$U_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.41533 \\ 0.9998813 \end{Bmatrix}$$



Obrázek 17: Vlastní tvary konstrukce a) U_1 , b) U_2 , c) U_3



$$\phi_1^T M \phi_1 = 1$$

$$\phi_1 = c U_1$$

$$\phi = [\phi_1, \phi_2, \phi_3]$$

$$\phi = \begin{bmatrix} 5.3346E-03 & 7.5424E-03 & 5.3329E-03 \\ 7.5382E-03 & 3.7843E-06 & -7.5463E-03 \\ 5.3346E-03 & -7.5401E-03 & 5.3248E-03 \end{bmatrix}$$

$$M = \phi^T m \phi$$

$$M = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0004 & -0.0003 \\ 0.0004 & 1.0000 & 0.0004 \\ -0.0003 & 0.0004 & 1.0000 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K = \phi^T k \phi$$

$$K = \begin{bmatrix} 406.038 & 0.122 & -0.094 \\ 0.122 & 5617.152 & 0.334 \\ -0.094 & 0.334 & 18754.785 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 406.038 & 0 & 0 \\ 0 & 5617.152 & 0 \\ 0 & 0 & 18754.785 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 \end{bmatrix}$$

Pro konstantní zatížení na středním poli

$$F = \phi^T f$$

$$\begin{bmatrix} 5.33E-03 & 7.54E-03 & 5.33E-03 \\ 7.54E-03 & 5.03E-07 & -7.54E-03 \\ 5.33E-03 & -7.54E-03 & 5.33E-03 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1000 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7.538157 \\ 0.000503 \\ -7.544410 \end{Bmatrix}$$

$$M\ddot{\eta} + C\dot{\eta} + K\eta = F(t)$$

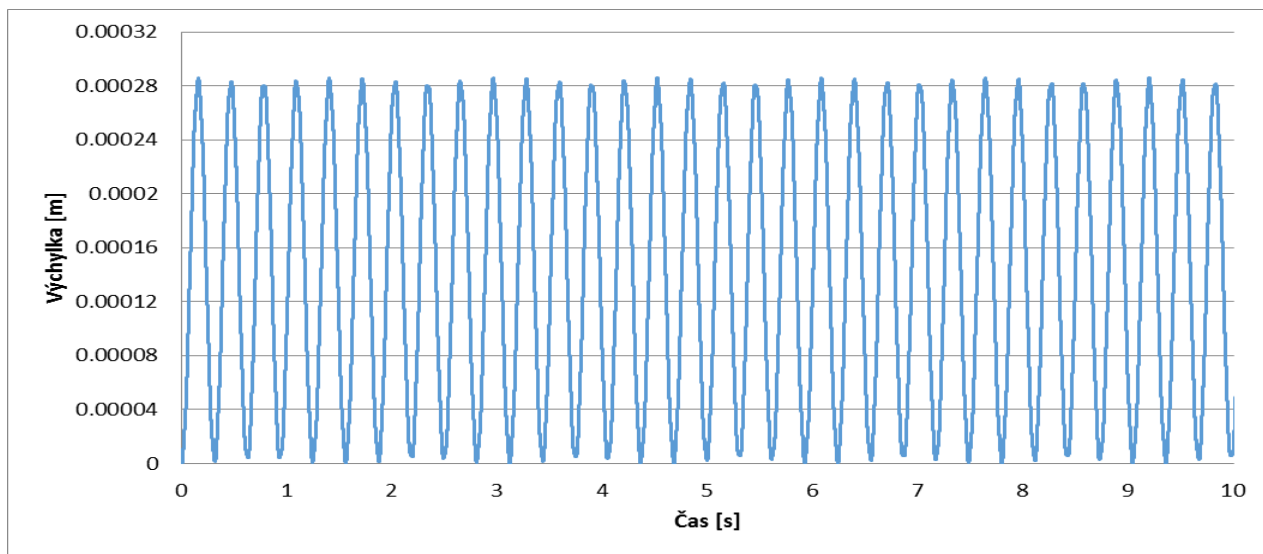
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \\ \ddot{\eta}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7.538157 \\ 0.000503 \\ -7.544410 \end{Bmatrix}$$

Dosazení počátečních podmínek

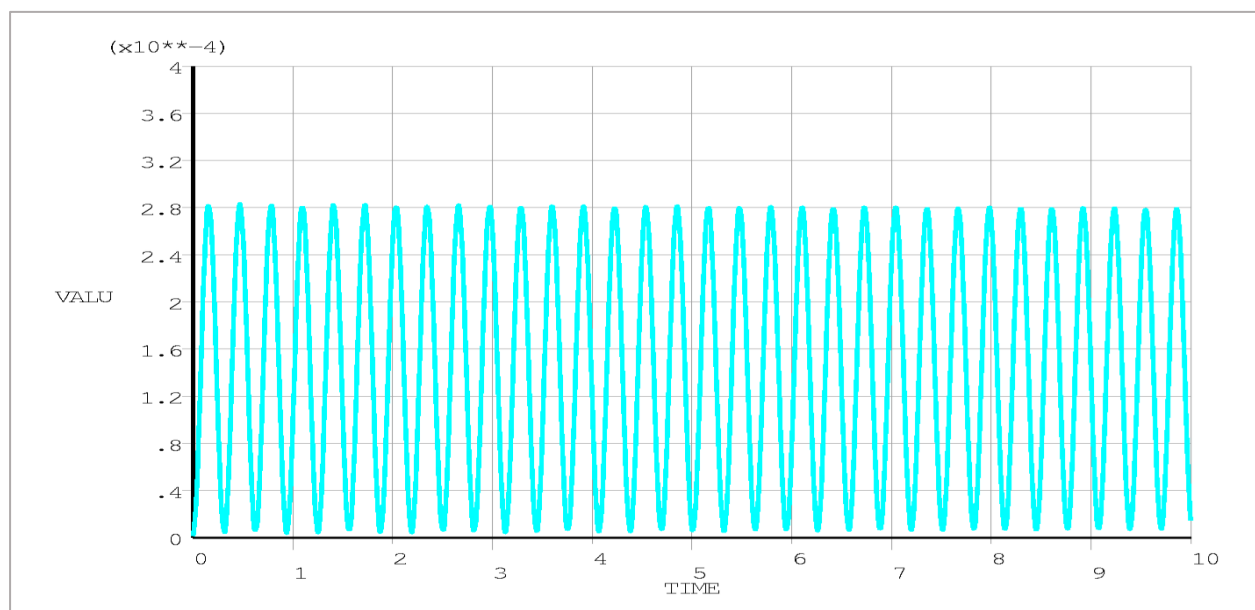
$$u(0) = \phi\eta(0)$$

$$\eta_i = \frac{F_i}{\omega_i^2} (1 - \cos(\omega_i t))$$

$$\begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9.6893E-05 \\ 1.4298E-04 \\ 9.6894E-05 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -9.9036E-05 \\ -1.3995E-04 \\ -9.9039E-05 \end{Bmatrix} \cos 20.1494 t + \begin{Bmatrix} -6.7534E-10 \\ -4.5047E-14 \\ 6.7532E-10 \end{Bmatrix} \cos 74.9477 t + \\ + \begin{Bmatrix} 2.1443E-06 \\ -3.0349E-06 \\ 2.1440E-06 \end{Bmatrix} \cos 136.9467 t$$



Graf 2: Výchylka vyvolaná konstantním zatížením na prostém nosníku řešeném jako třístupňová soustava, ruční výpočet



Graf 3: Výchylka vyvolaná konstantním zatížením na prostém nosníku řešeném jako třístupňová soustava, Ansys 14.0

Prostý nosník ručně počítaný jako třístupňová soustava s konstantním zatížením v polovině nosníku vykazuje shodný jak průběh výchylek, tak i hodnot amplitud v porovnání s řešením v Ansys. Ruční postup tedy lze bez problémů použít.



8 ÚTLUM

Útlum je vlastnost materiálů, při níž dochází k přeměně kinetické energie na energii jinou. V konstrukci lze nalézt mnoho příčin útlumu. Vzniká vlivem tření ve spojích, vnitřního tření materiálu, odporem prostředí nebo odporem v uložení celé konstrukce.

Pro popis tlumení konstrukce byl použit Rayleighův model tlumení, který definuje matici tlumení C jako lineární kombinaci matice tuhosti K a matice hmotnosti M .

$$C = \alpha M + \beta K$$

Koeficienty α a β se určí ze znalosti poměrných útlumů dvou různých tvarů vlastního kmitu.

Jejich vzájemný vztah je následovný:

$$\zeta_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\omega_1} + \beta \omega_1 \right)$$

$$\zeta_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\omega_2} + \beta \omega_2 \right)$$

kde ζ_1 a ζ_2 jsou poměrné útlumy příslušných vlastních tvarů kmitu, ω_1 , ω_2 , jsou příslušné vlastní kruhové frekvence.

$$\omega_i = 2\pi f_i ,$$

kde f_i je frekvence vlastního tvaru.

Pro praktické výpočty se zavádí relativní útlum ζ definovaný vztahem

$$\zeta = 2c\sqrt{km}$$

vyjadřující poměr mezi zvoleným a kritickým útlumem. Doporučené hodnoty ζ lze najít pro jednotlivé materiály v tabulkách. Obecně je stanovení útlumu konstrukce obtížné a většinou se vychází z již realizovaných konstrukcí a experimentů.

Po zadání konstant α , β do programu Ansys, je matice tlumení C sestavována automaticky při výpočtu.

8.1 Tlumení na prostém nosníku

Pro ruční výpočet byla použita 1. a 3. vlastní frekvence konstrukce z výpočtového programu Ansys. Poměrný útlum v těchto frekvencích byl odhadnut na 0,05 a následně byl vykreslen graf, kde:

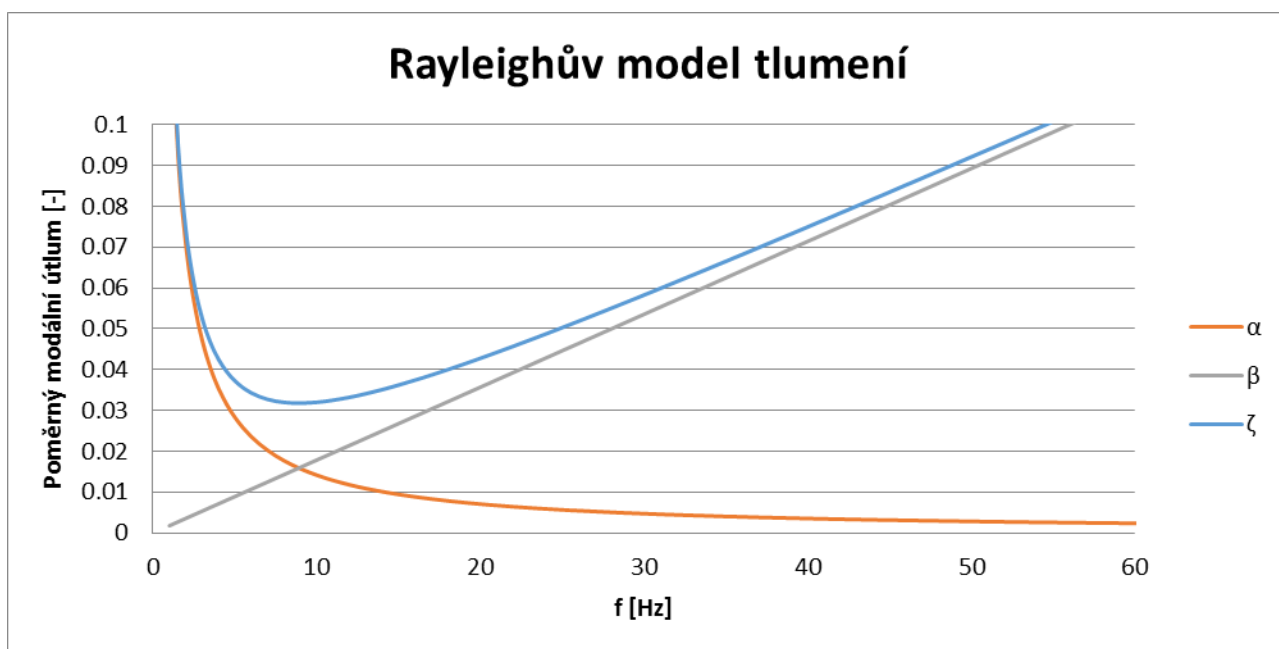
α je vyjádřena exponenciální funkcí,

β je vyjádřena lineární funkcí,

společně tvoří asymptoty pro funkci tlumení.

$$\alpha = 1.7808$$

$$\beta = 5.6841E-04$$



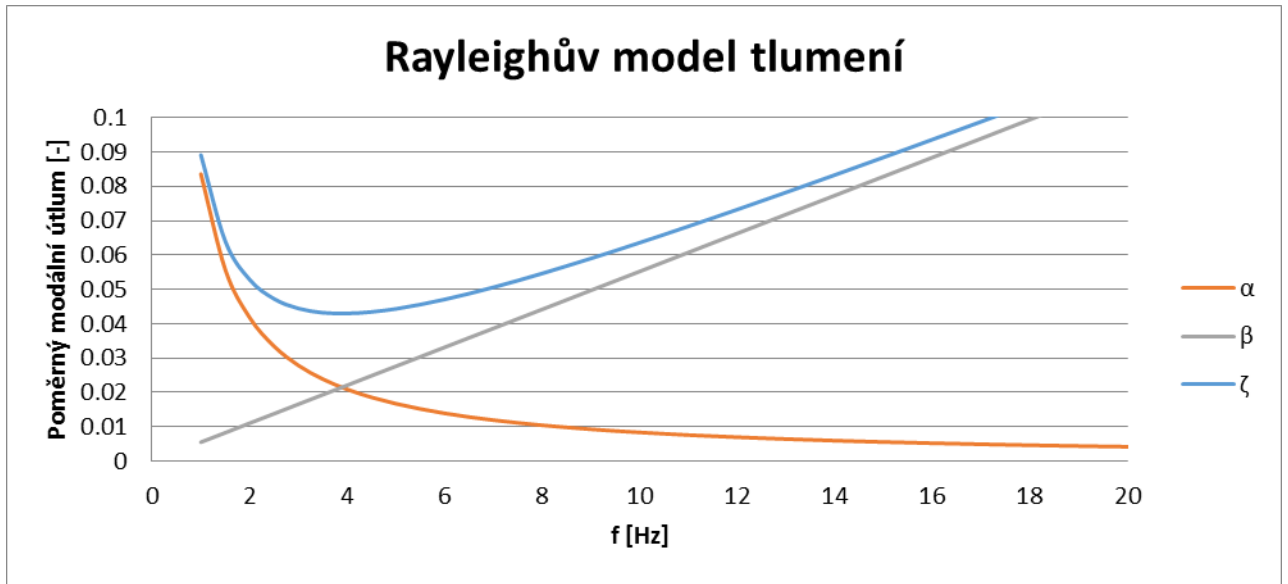
Graf 4: Rayleighův model tlumení pro jednoduchý nosník, ruční výpočet

8.2 Tlumení na spojitém nosníku

Stejně jako v předešlém případě byly koeficienty α a β vypočítány z první a třetí vlastní frekvence konstrukce.

$$\alpha = 1.0503$$

$$\beta = 1.7582E-03$$



Graf 5: Rayleighův model tlumení pro spojitý nosník, ruční výpočet



9 ZATÍŽENÍ

V této kapitole jsou simulovány speciální případy buzení, kterým může být konstrukce v reálném prostředí vystavena a které mohou mít vliv na chování konstrukce. Pro přehlednost zobrazovaných výsledků je uvažována kladná hodnota zatížení v programu Ansys a stejným způsobem bylo uvažováno i při manuálních výpočtech.

9.1 Konstantní zatížení

Jedná se o náhle přiložené zatížení, které působí na konstrukci po určitou dobu. Ve zvoleném případě byla vybrána nejkritičtější varianta, a to přiložení zatížení na střed lávky. V této variantě byla zvolena síla 1 kN a která reprezentuje zatížení jednou osobou.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_P + \mathbf{u}_H,$$

kde \mathbf{u}_P odpovídá působení síly $f(t)$

\mathbf{u}_H charakterizuje volné kmitání

Stanovené počáteční podmínky

$$u_{(0)} = 0$$

$$\dot{u}_{(0)} = 0$$

1) Konstantní zatížení bez tlumení konstrukce

Pohybové rovnice pro:

výchylku

$$u = \frac{p_0}{k} + A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t$$

rychlost

$$\dot{u} = -A_1 \omega_n \sin \omega_n t + A_2 \omega_n \cos \omega_n t$$

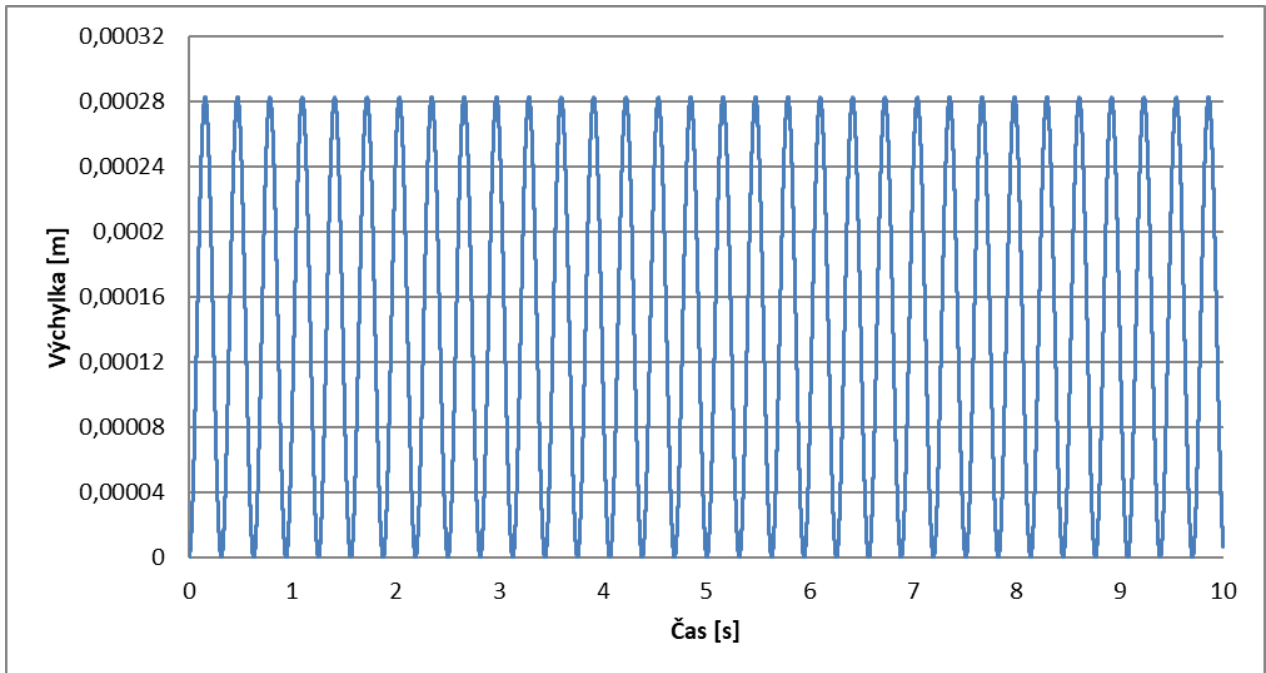
zrychlení

$$\ddot{u} = -A_1 \omega_n^2 \cos \omega_n t - A_2 \omega_n^2 \sin \omega_n t$$

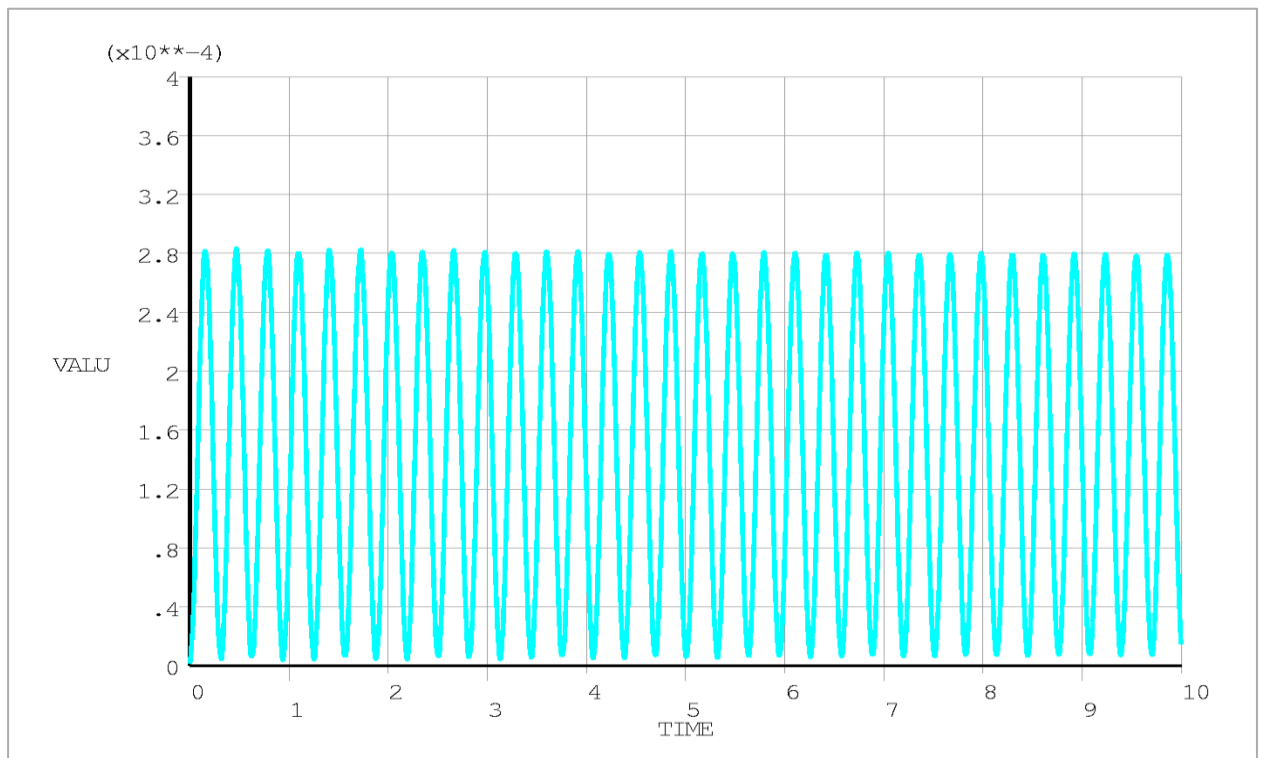
Vyjádření konstant po zavedení počátečních podmínek:

$$A_1 = -\frac{p_0}{k}$$

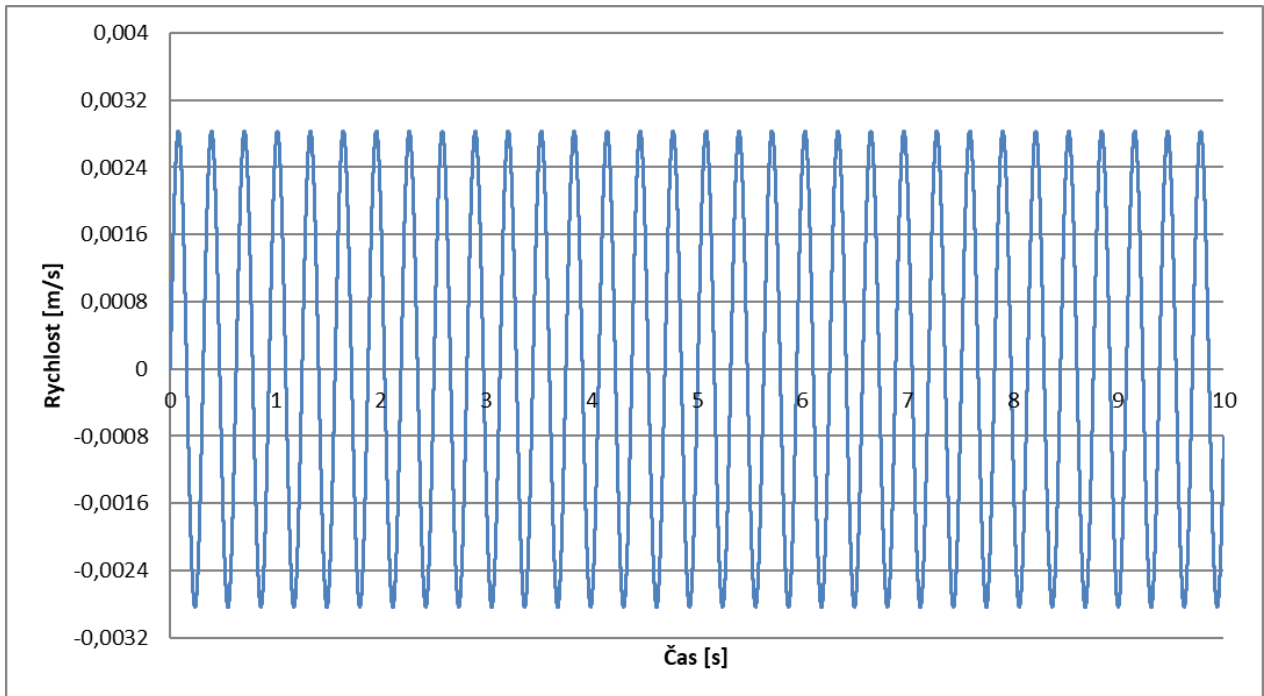
$$A_2 = 0$$



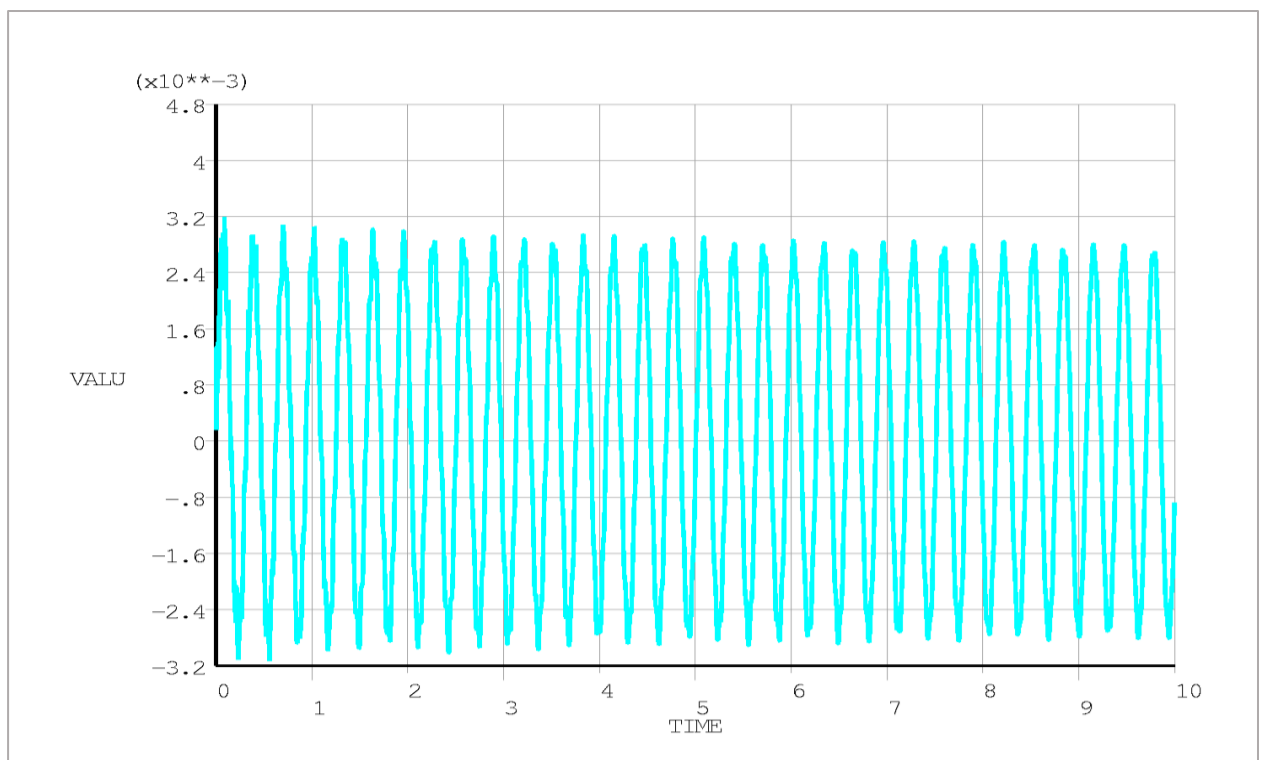
Graf 6: Výchylka vyvolaná konstantním zatížením, ruční výpočet



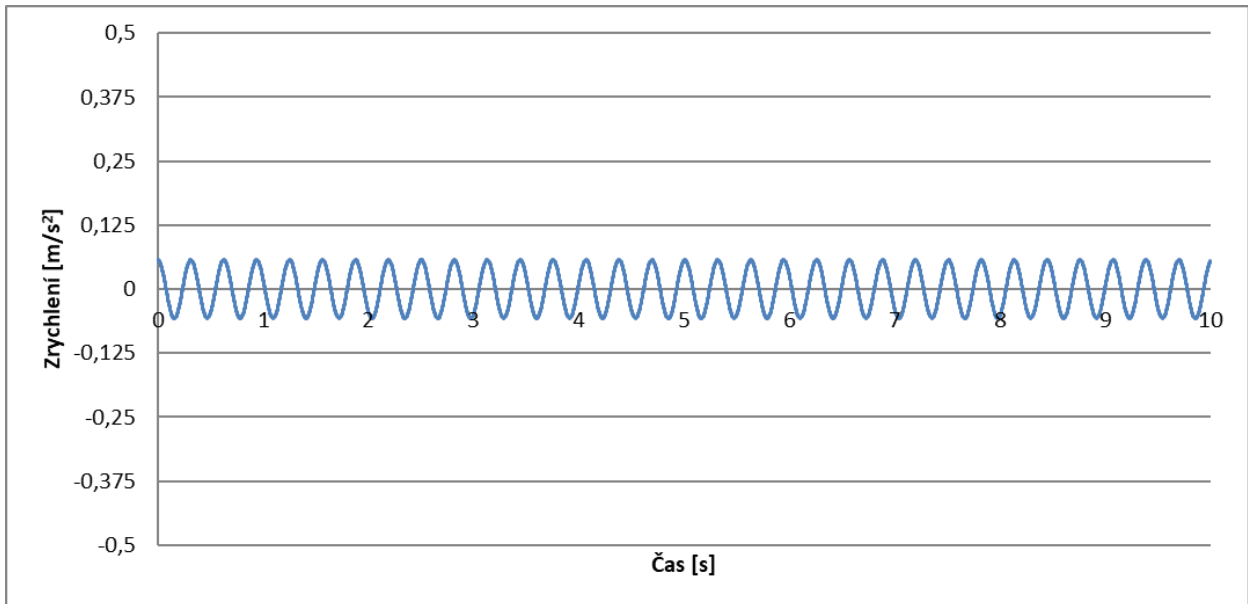
Graf 7: Výchylka pro konstantní zatížení, Ansys 14.0



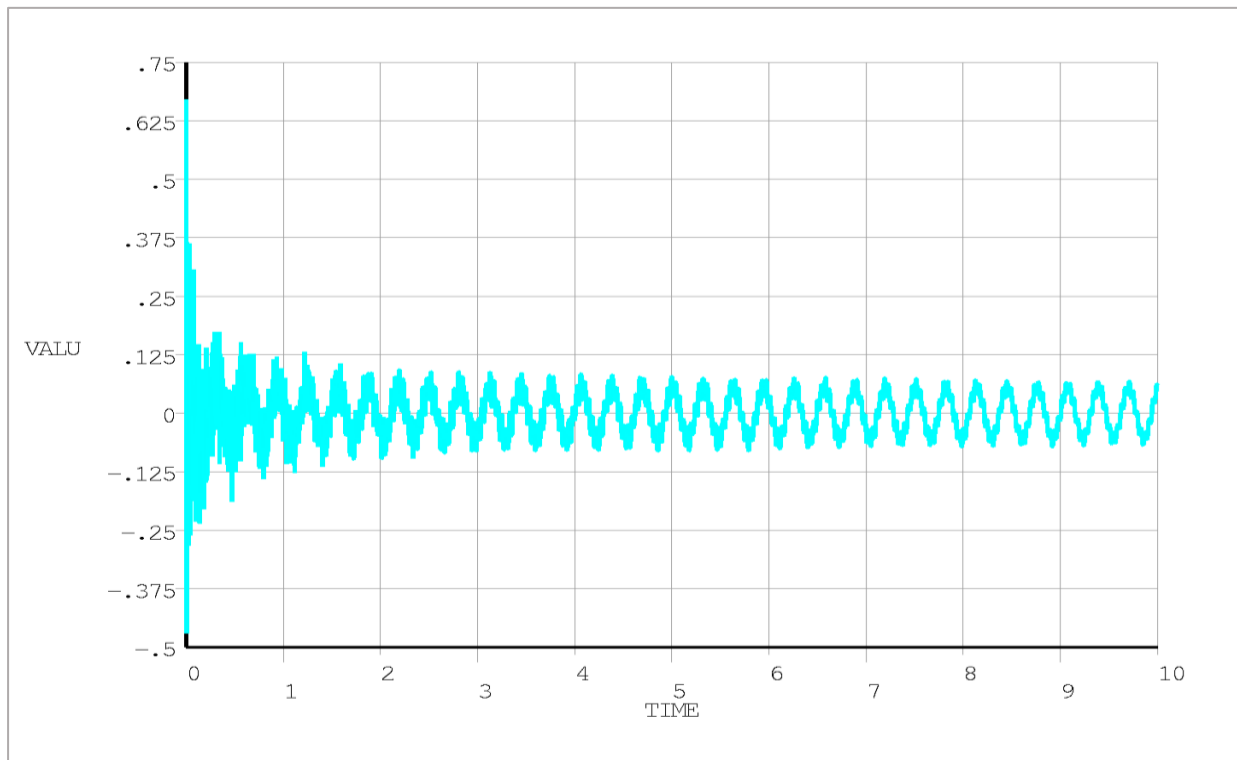
Graf 8: Graf rychlosti pro konstantní zatížení bez tlumení, ruční výpočet



Graf 9: Graf rychlosti pro konstantní zatížení bez tlumení, Ansys 14.0



Graf 10: Graf zrychlení pro konstantní zatížení bez tlumení, ruční výpočet



Graf 11: Graf zrychlení pro konstantní zatížení bez tlumení, Ansys 14.0



2) Konstantní zatížení se zahrnutím tlumení konstrukce

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$\zeta = 0,05$...uvažovaná hodnota tlumení

Pohybové rovnice pro:

výchylku

$$u = \frac{p_0}{k} + e^{-\zeta\omega_n t} (A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t)$$

rychlost

$$\dot{u} = e^{-\zeta\omega_n t} (-\zeta\omega_n) (A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t) + e^{-\zeta\omega_n t} (-A_1 \omega_d \sin\omega_d t + A_2 \omega_d \cos\omega_d t)$$

zrychlení

$$\ddot{u} = e^{-\zeta\omega_n t} (-\zeta\omega_n)^2 \cdot (A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t) + 2 \cdot e^{-\zeta\omega_n t} (-\zeta\omega_n) \cdot (-A_1 \omega_d \sin\omega_d t + A_2 \omega_d \cos\omega_d t) + e^{-\zeta\omega_n t} (-A_1 \omega_d^2 \cos\omega_d t - A_2 \omega_d^2 \sin\omega_d t)$$

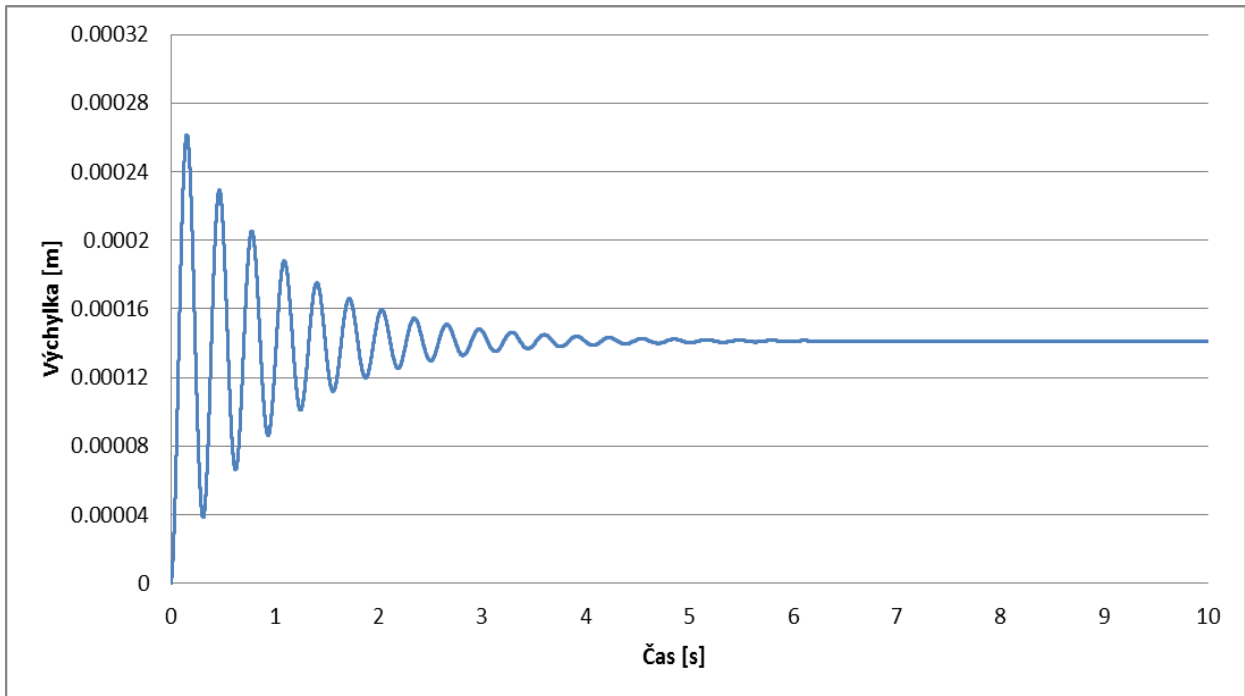
Vyjádření konstant po zavedení počátečních podmínek:

$$A_1 = -\frac{p_0}{k}$$

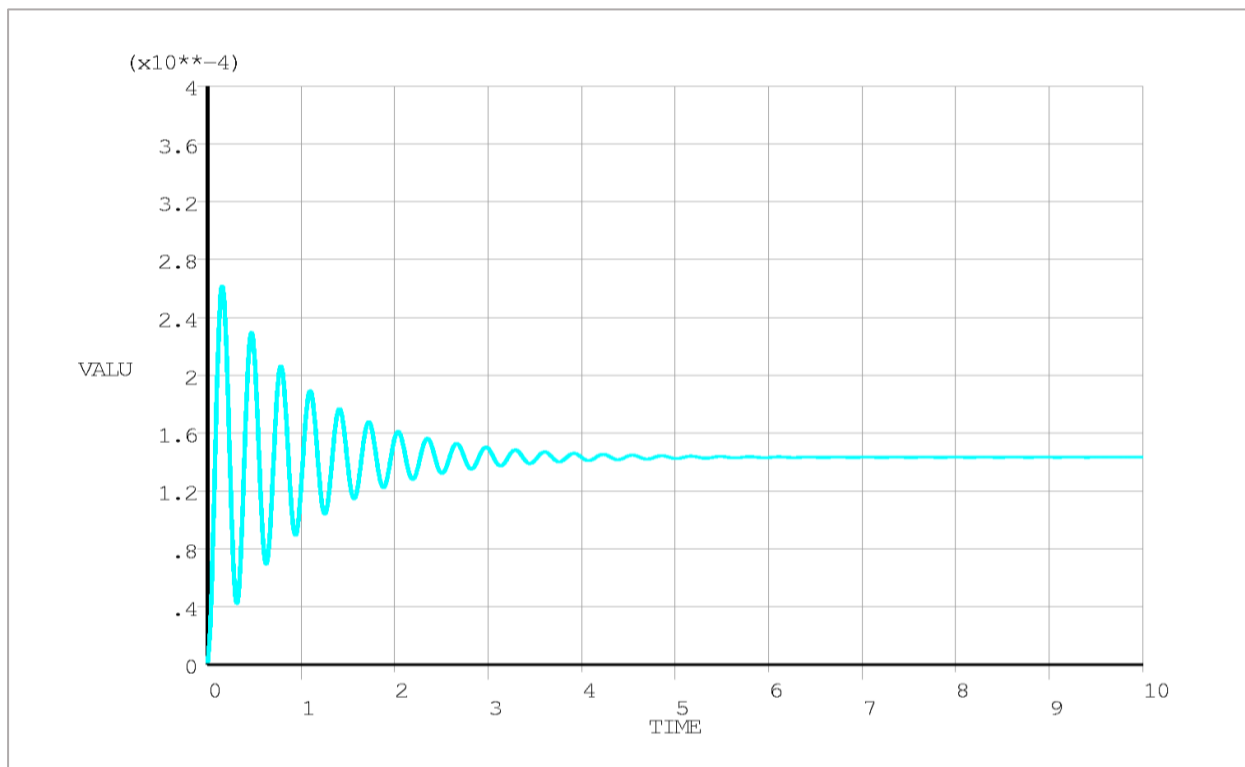
$$A_2 = -\frac{\zeta\omega_n p_0}{k\omega_d}$$

Ve srovnání grafů bez tlumení a s uvažovaným tlumením konstrukce je patrný vliv útlumu výchylek a to takový, že s uvažovaným tlumením dojde k ustálení konstrukce asi po 5,5 sekundách v hodnotě statické výchylky pro dané zatížení.

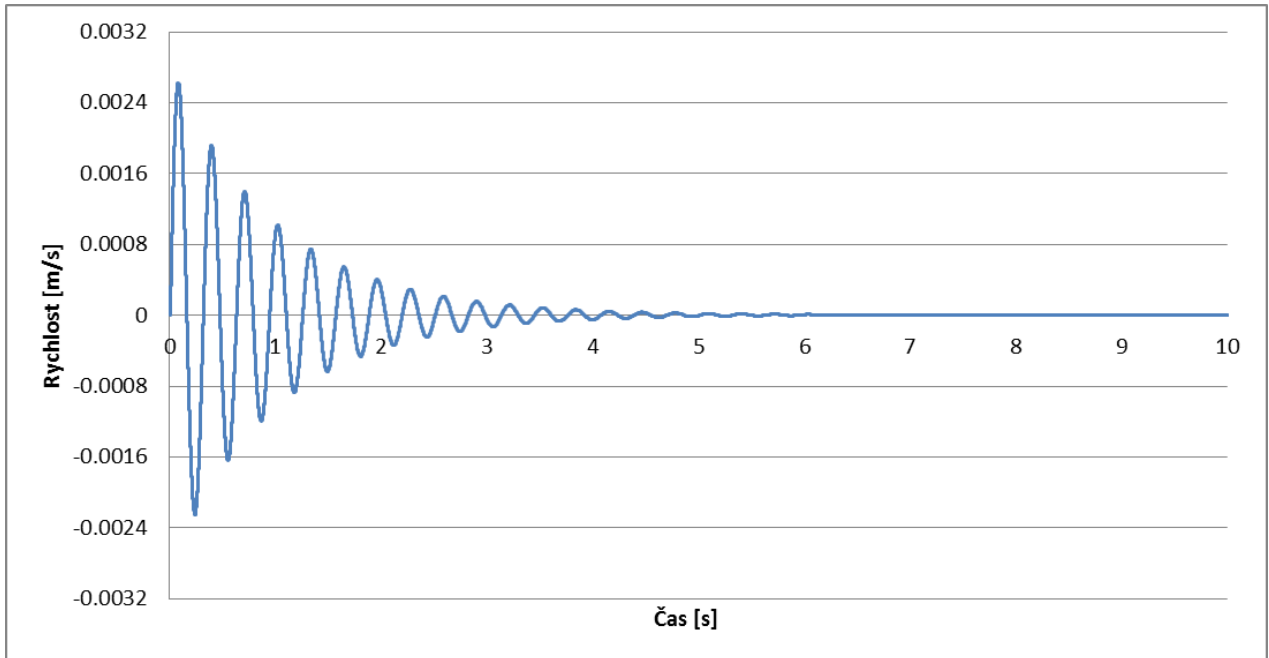
Z následujících dvojic grafů, je patrné že se výsledky průběhu (výchylky, rychlosti a zrychlení) v čase shodují a docházíme tedy v obou postupech výpočtů ke stejným závěrům.



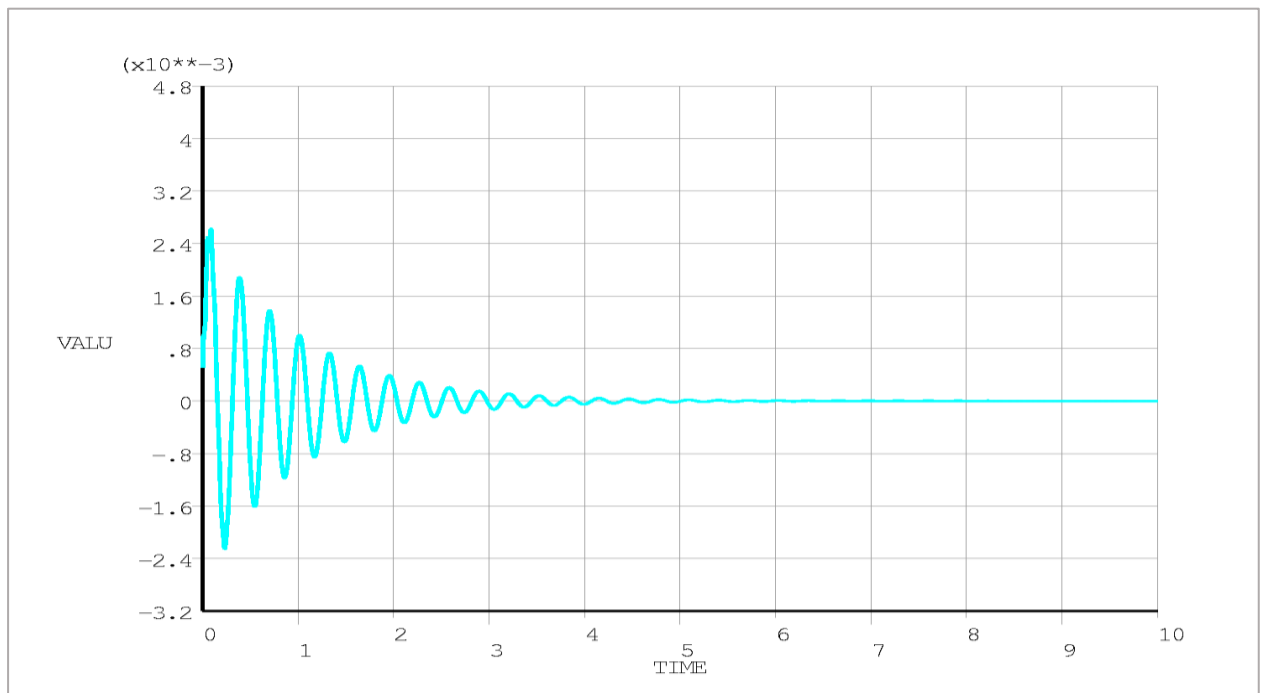
Graf 12: Výchylka pro konstantní zatížení s tlumením konstrukce, ruční výpočet



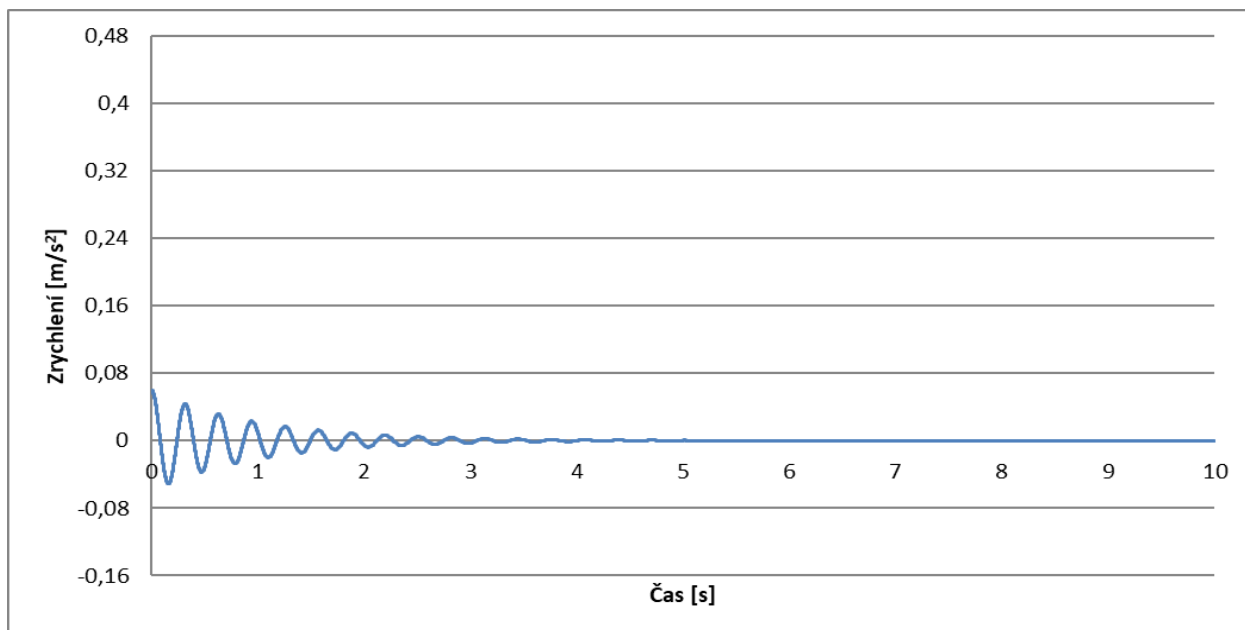
Graf 13: Výchylka pro konstantní zatížení s tlumením konstrukce, Ansys 14.0



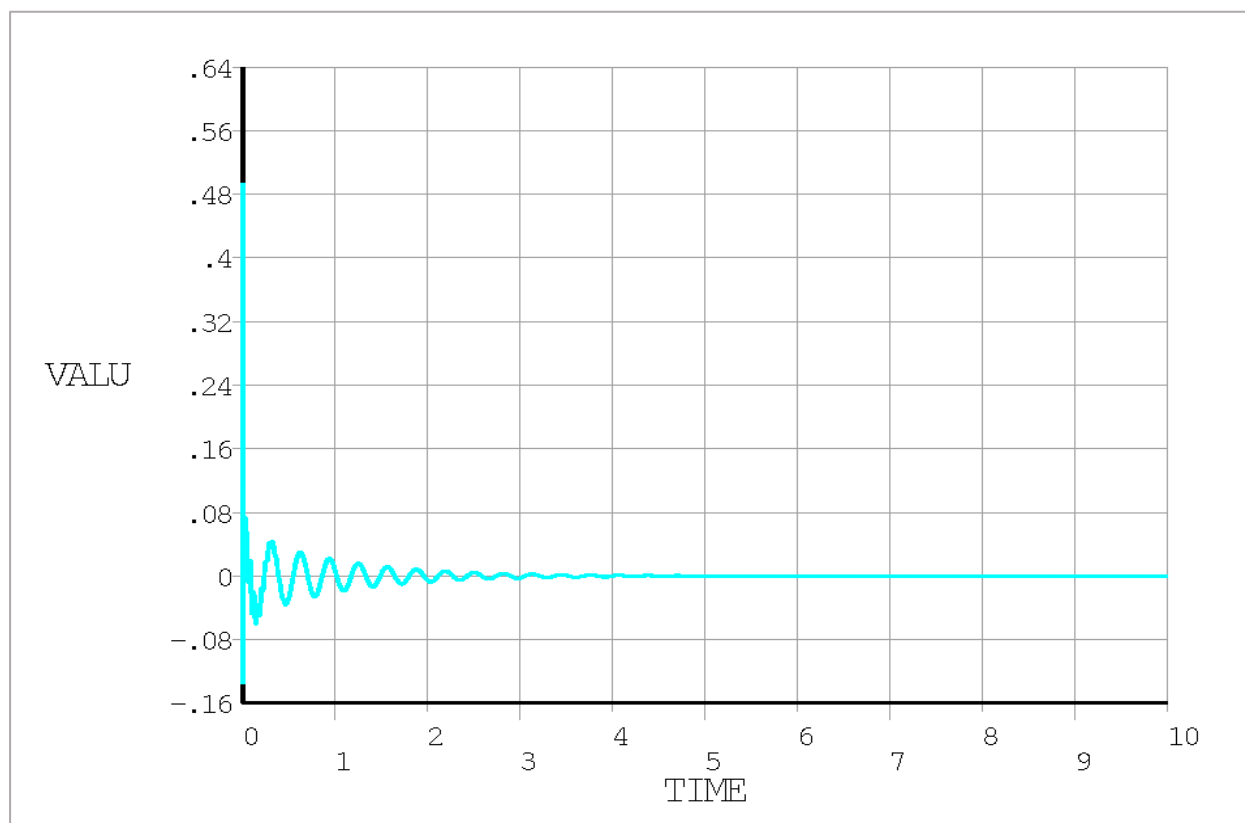
Graf 14: Rychlost konstantního zatížení s tlumením konstrukce, ruční vypočet



Graf 15: Rychlost konstantního zatížení s tlumením konstrukce, Ansys 14.0



Graf 16: Zrychlení konstantního zatížení s tlumením konstrukce, ruční vypočet



Graf 17: Zrychlení konstantního zatížení s tlumením konstrukce, Ansys 14.0



9.2 Konstantní zatížení s lineárním náběhem

V této části je zatížení charakterizováno jako postupně přikládání na konstrukci až do jeho konečné hmotnosti, doba přikládání zatížení je ohraničena časem $0 \leq t \leq t_r$, kde od doby t_r již zatížení působí konstantně. Hodnota zatížení je, stejně jako v předešlé kapitole, uvažována 1 kN.

9.2.1 Konstantní zatížení s lineárním náběhem bez tlumení

a) Lineární náběh $0 \leq t \leq t_r$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_p + \mathbf{u}_H$$

Počáteční podmínky

$$\mathbf{u}_{(0)} = \mathbf{0}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{(0)} = \mathbf{0}$$

$$t_r = 5,07 T$$

Pohybové rovnice pro:

výchylku

$$\mathbf{u} = \frac{p_0}{k} \frac{t}{t_r} + (A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t)$$

rychlost

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{p_0}{k t_r} + (-A_1 \omega_n \sin \omega_n t + A_2 \omega_n \cos \omega_n t)$$

zrychlení

$$\ddot{\mathbf{u}} = -A_1 \omega_n^2 \cos \omega_n t - A_2 \omega_n^2 \sin \omega_n t$$

Vyjádření konstant po zavedení počátečních podmínek:

$$A_1 = 0$$

$$A_2 = -\frac{p_0}{k t_r \omega_n}$$



b) Konstantní část $t \geq t_r$

$t = t_r$ → zjištění počátečních podmínek pro konstantní část

počáteční podmínky

$$u = \frac{p_0}{k} - \frac{p_0}{k t_r \omega_n} \sin \omega_n t_r$$

$$\dot{u} = \frac{p_0}{k t_r} (1 + \cos \omega_n t_r)$$

Pohybové rovnice pro:

výchylku

$$u = \frac{p_0}{k} + A_1 \cos \omega_n (t - t_r) + A_2 \sin \omega_n (t - t_r)$$

rychlost

$$\dot{u} = -A_1 \omega_n \sin \omega_n (t - t_r) + A_2 \omega_n \cos \omega_n (t - t_r)$$

zrychlení

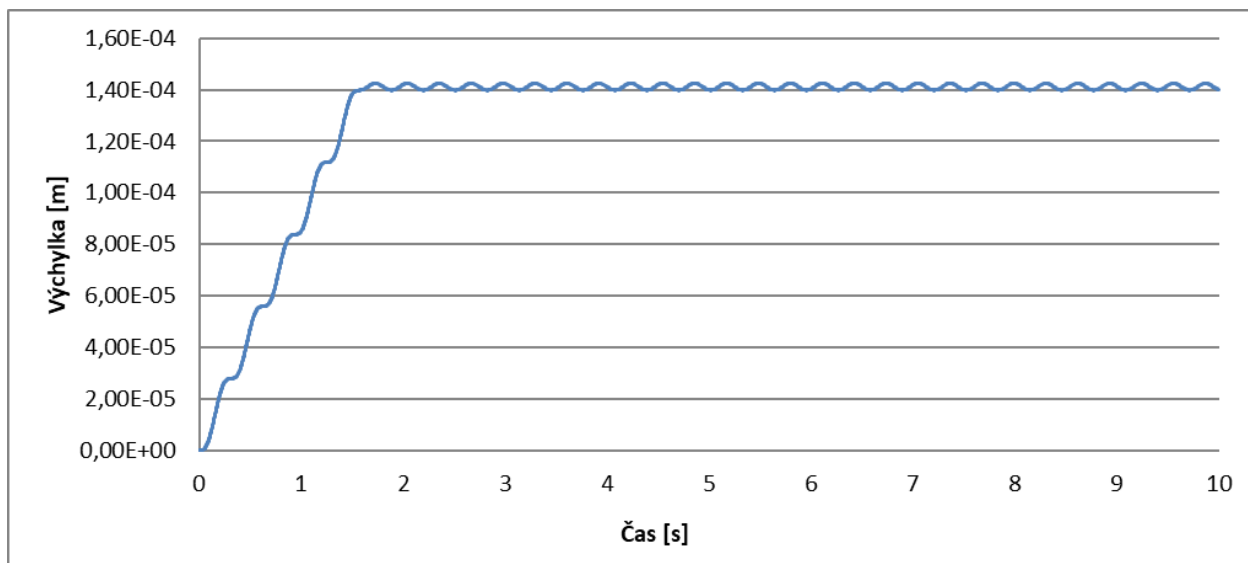
$$\ddot{u} = -A_1 \omega_n^2 \cos \omega_n (t - t_r) - A_2 \omega_n^2 \sin \omega_n (t - t_r)$$

Vyjádření konstant po zavedení počátečních podmínek:

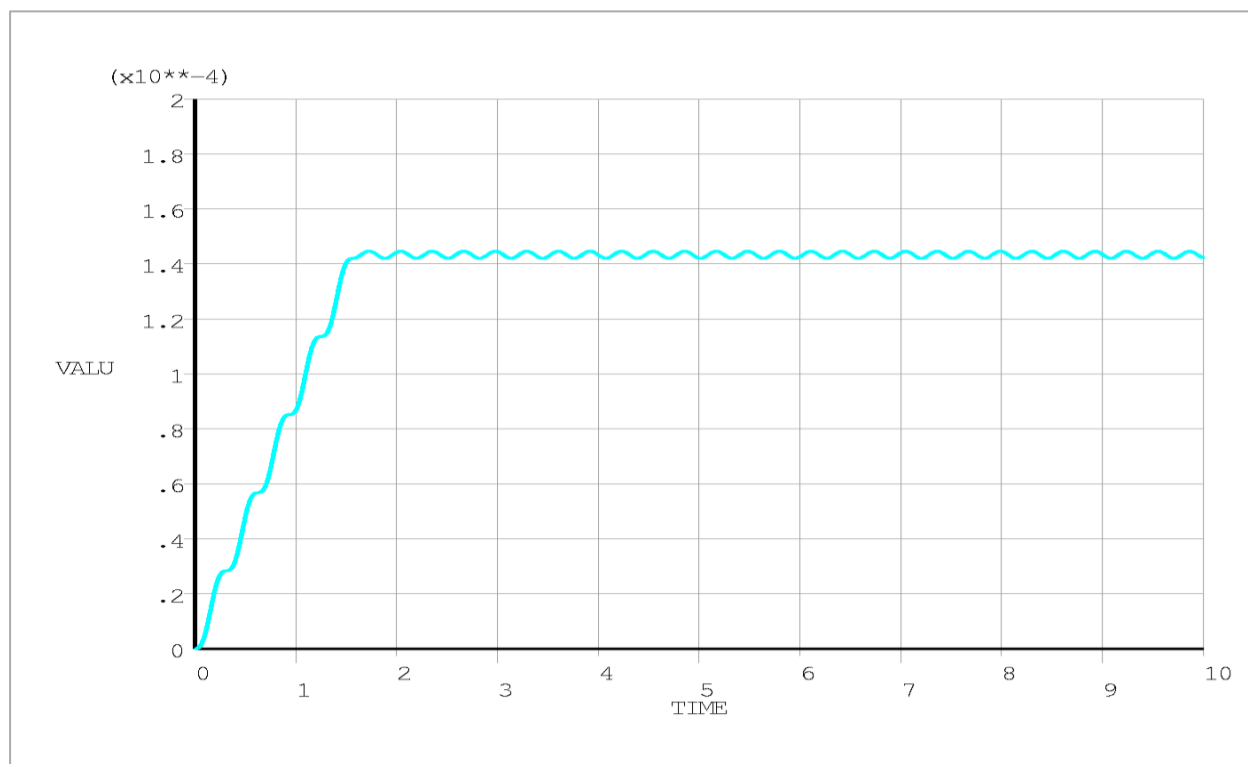
$$A_1 = u_{(tr)} - \frac{p_0}{k}$$

$$A_2 = \frac{\dot{u}_{(tr)}}{\omega_n}$$

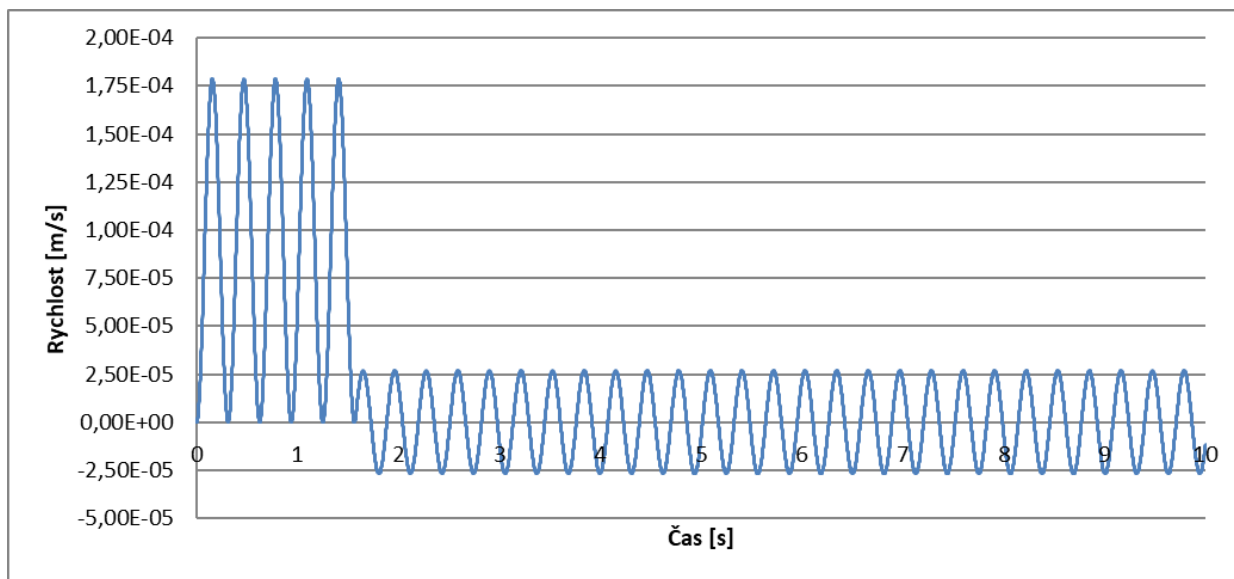
Podobně jako u předchozí volby zatížení vedou oba použité postupy ke stejným výsledkům.



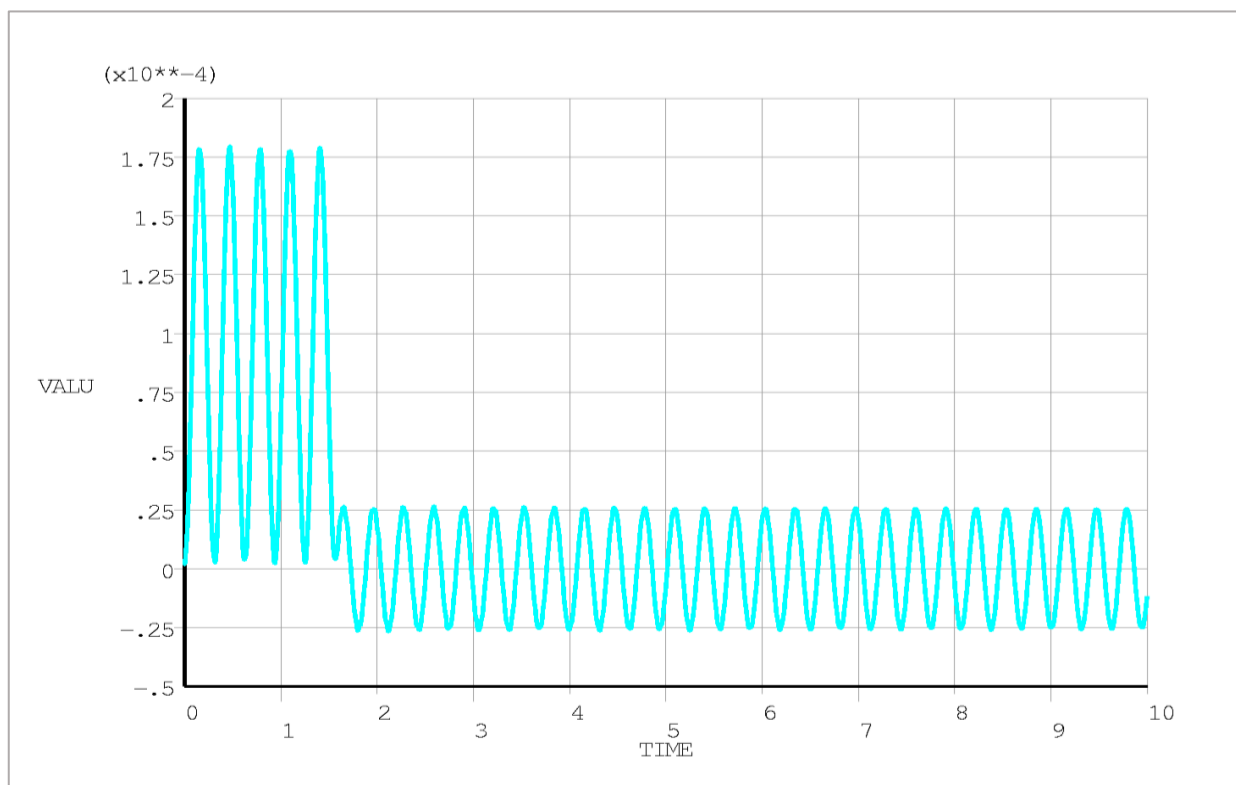
Graf 18: Výchylka pro konstantní zatížení s lineárním náběhem bez tlumení, ruční výpočet



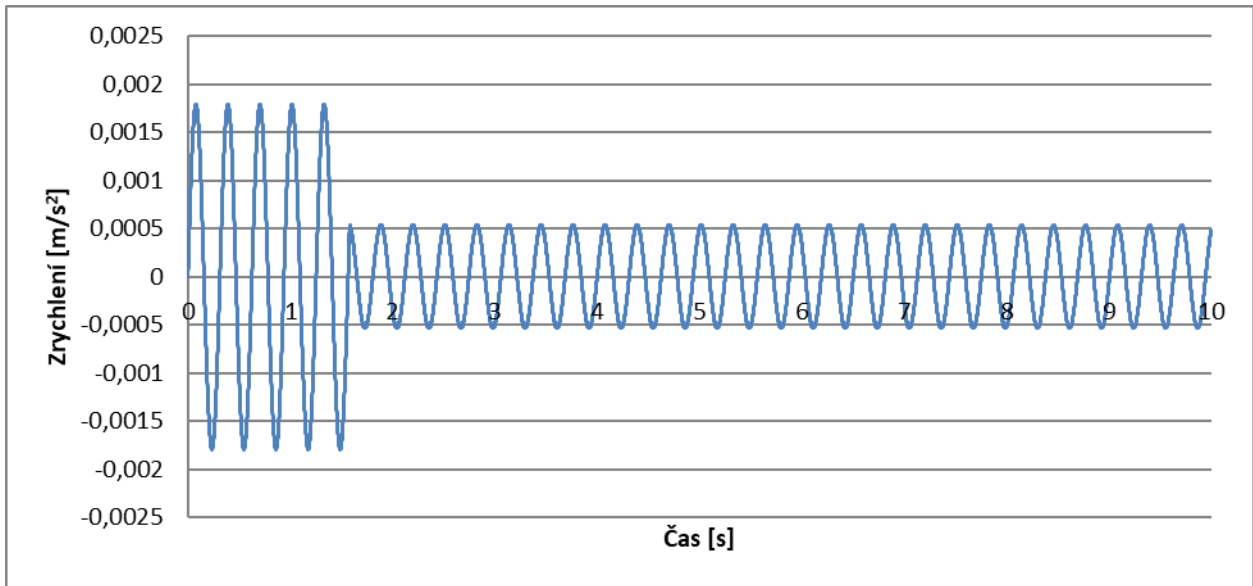
Graf 19: Výchylka pro konstantní zatížení s lineárním náběhem bez tlumení, Ansys 14.0



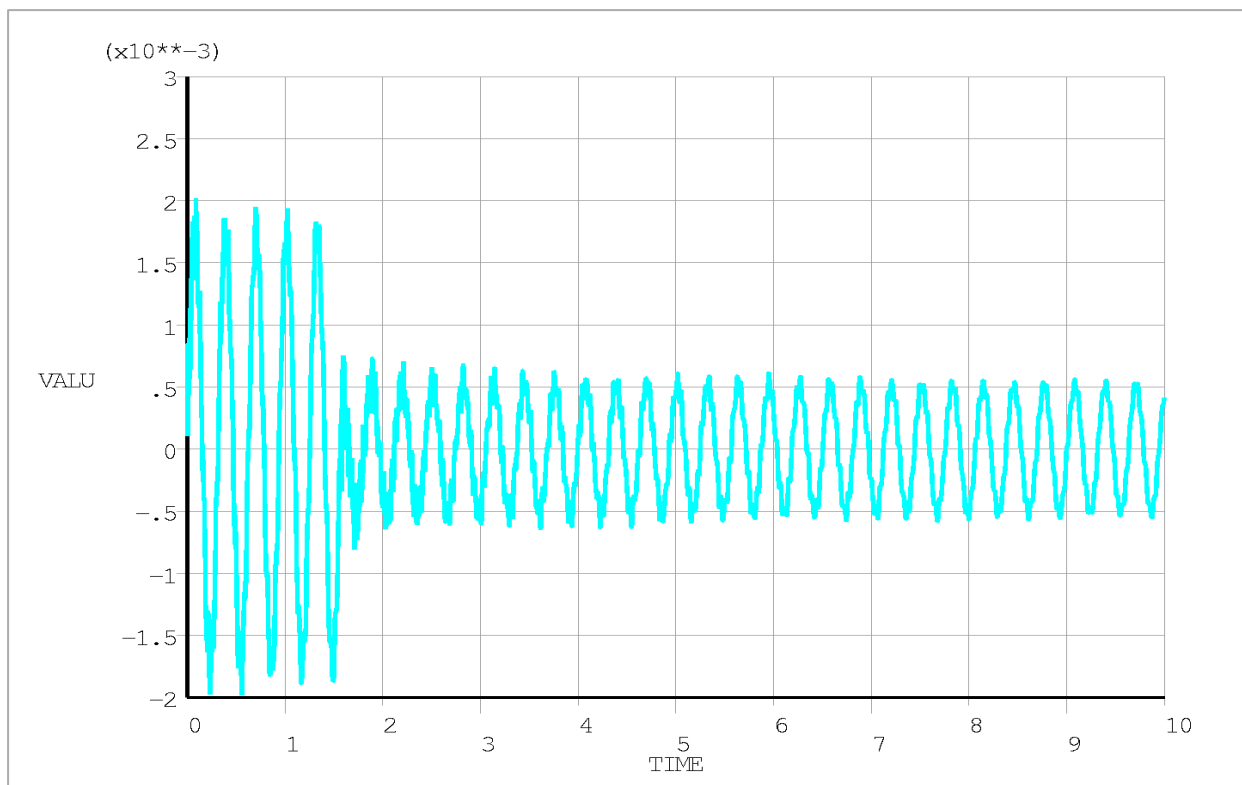
Graf 20: Rychlost pro konstantní zatížení s lineárním náběhem bez tlumení, ruční výpočet



Graf 21: Rychlost pro konstantní zatížení s lineárním náběhem bez tlumení, Ansys 14.0



Graf 22: Zrychlení pro konstantní zatížení s lineárním náběhem bez tlumení, ruční výpočet



Graf 23: Zrychlení pro konstantní zatížení s lineárním náběhem bez tlumení, Ansys 14.0



9.2.2 Konstantní zatížení s lineárním náběhem se zahrnutím tlumení konstrukce

1) Lineární náběh $0 \leq t \leq t_r$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_p + \mathbf{u}_H$$

Stanované počáteční podmínky:

$$\mathbf{u}_{(0)} = \mathbf{0}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{(0)} = \mathbf{0}$$

$$t_r = 5,07 T$$

Pohybové rovnice pro:

výchylku

$$\mathbf{u} = \frac{p_0 t}{k t_r} - \frac{p_0 2 \cdot \zeta \cdot \sqrt{k m}}{k^2 t_r} + e^{-\zeta \omega_n t} (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t)$$

rychlost

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{p_0}{k t_r} + e^{-\zeta \omega_n t} (-\zeta \omega_n) \cdot (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) + e^{-\zeta \omega_n t} (-A_1 \omega_d \sin \omega_d t + A_2 \omega_d \cos \omega_d t)$$

zrychlení

$$\ddot{\mathbf{u}} = e^{-\zeta \omega_n t} (-\zeta \omega_n)^2 \cdot (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) + 2 \cdot e^{-\zeta \omega_n t} (-\zeta \omega_n) \cdot (-A_1 \omega_d \sin \omega_d t + A_2 \omega_d \cos \omega_d t) + e^{-\zeta \omega_n t} (-A_1 \omega_d^2 \cos \omega_d t - A_2 \omega_d^2 \sin \omega_d t)$$

Vyjádření konstant po zavedení počátečních podmínek:

$$A_1 = \frac{p_0 2 \cdot \zeta \cdot \sqrt{k m}}{k^2 t_r}$$

$$A_2 = \frac{\omega_n \cdot \zeta \cdot A_1}{\omega_d} - \frac{p_0}{k t_r \omega_d}$$

2) Konstantní část $t \geq t_r$

$t = t_r$ → zjištění počátečních podmínek pro konstantní část

Pohybové rovnice pro:

výchylku

$$\mathbf{u} = \frac{p_0}{k} + e^{-\zeta \omega_n (t-t_r)} (A_1 \cos \omega_d (t-t_r) + A_2 \sin \omega_d (t-t_r))$$



rychlost

$$\dot{u} = e^{-\zeta\omega_n(t-t_r)} (-\zeta\omega_n) (A_1 \cos\omega_d(t-t_r) + A_2 \sin\omega_d(t-t_r)) + e^{-\zeta\omega_n(t-t_r)} (-A_1\omega_d \sin\omega_d(t-t_r) + A_2\omega_d \cos\omega_d(t-t_r))$$

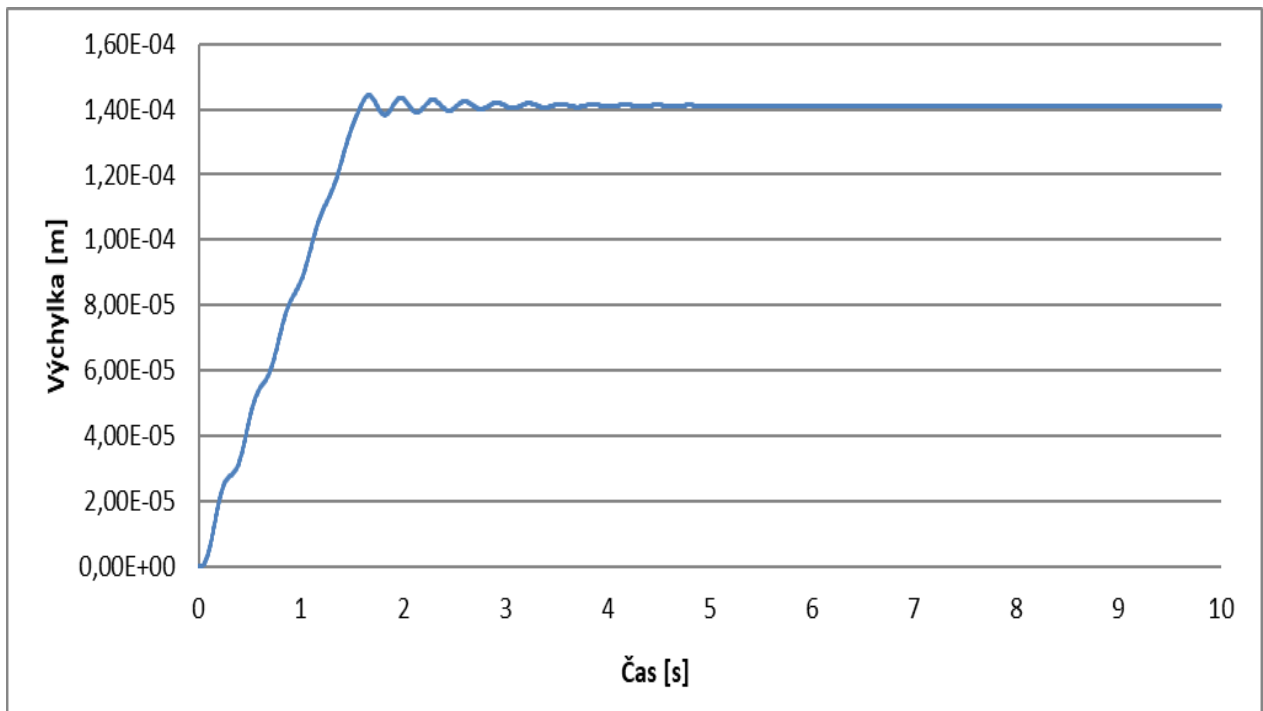
zrychlení

$$\ddot{u} = e^{-\zeta\omega_n(t-t_r)} (-\zeta\omega_n)^2 \cdot (A_1 \cos\omega_d(t-t_r) + A_2 \sin\omega_d(t-t_r)) + 2 \cdot e^{-\zeta\omega_n(t-t_r)} (-\zeta\omega_n) \cdot (-A_1\omega_d \sin\omega_d(t-t_r) + A_2\omega_d \cos\omega_d(t-t_r)) + e^{-\zeta\omega_n(t-t_r)} (-A_1\omega_d^2 \cos\omega_d(t-t_r) - A_2\omega_d^2 \sin\omega_d(t-t_r))$$

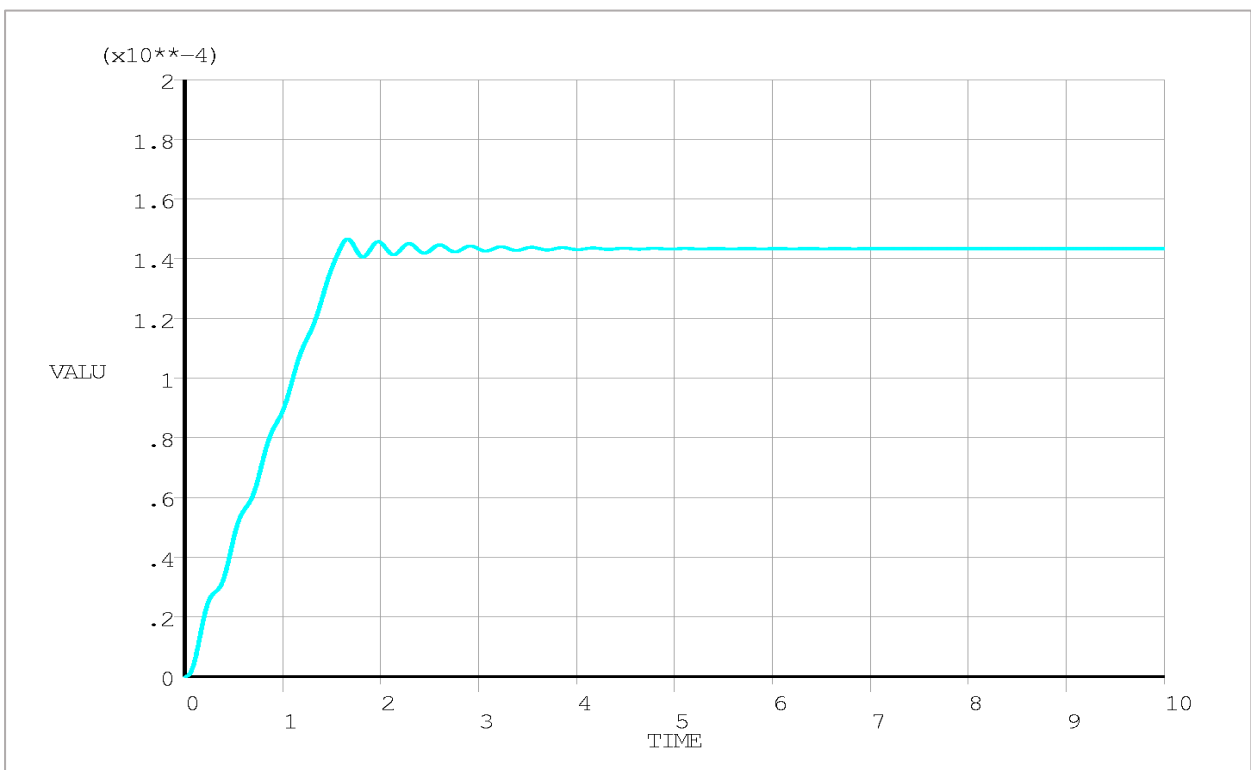
Vyjádření konstant po zavedení počátečních podmínek:

$$A_1 = u_{(tr)} - \frac{p_0}{k}$$

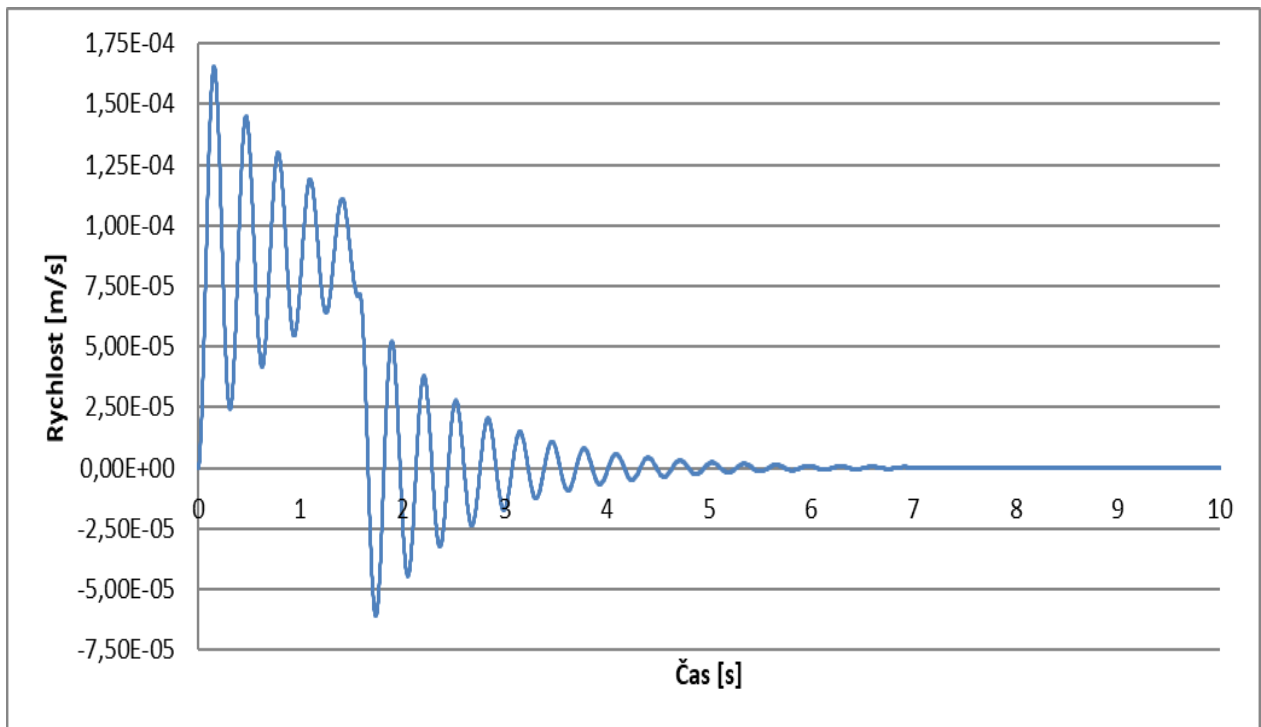
$$A_2 = \frac{\dot{u}_{(tr)} + \omega_n \cdot \zeta \cdot A_1}{\omega_d}$$



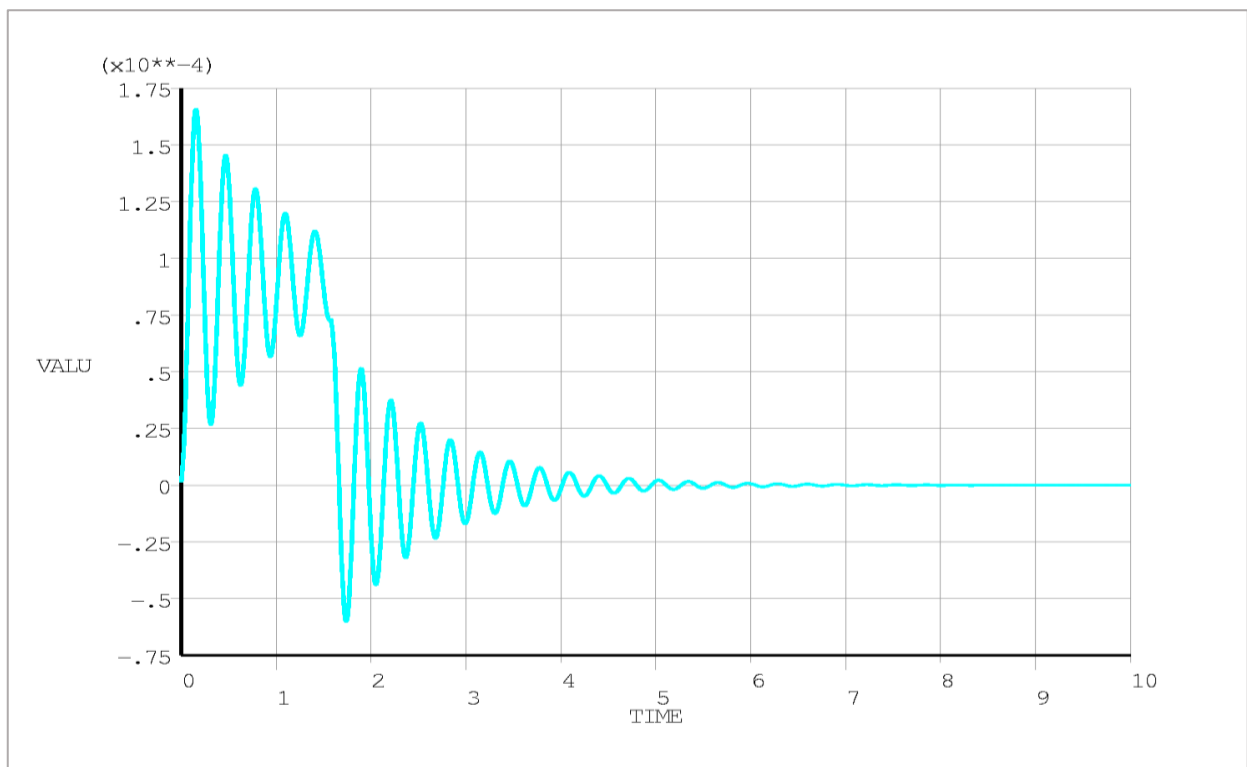
Graf 24: Výchylka pro konstantní zatížení s lineárním náběhem s tlumením, ruční výpočet



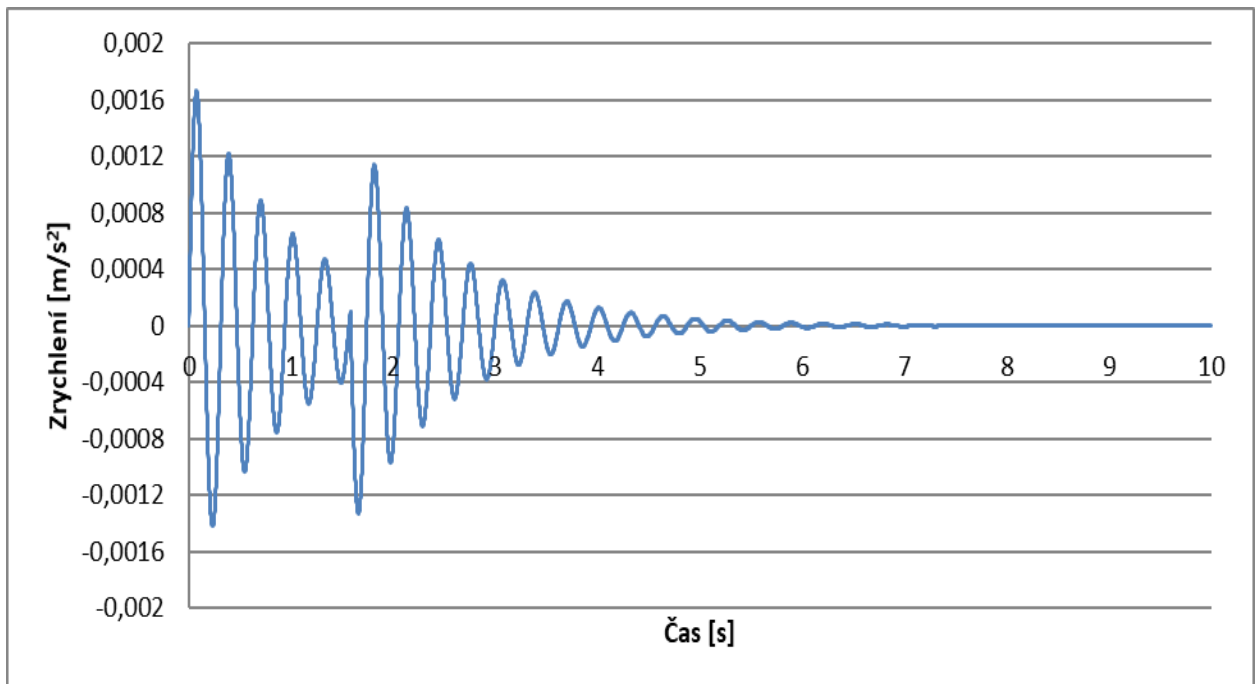
Graf 25: Výchylka pro konstantní zatížení s lineárním náběhem s tlumením, Ansys 14.0



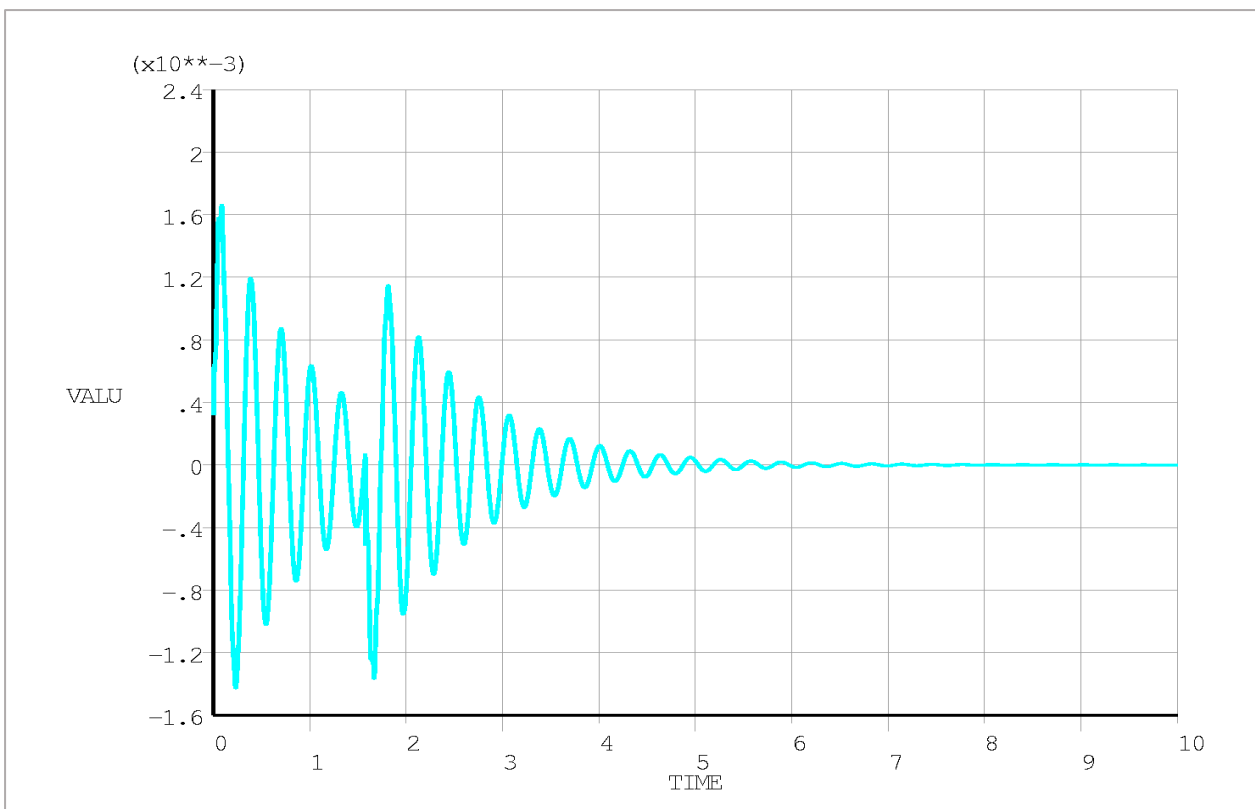
Graf 26: Rychlost pro konstantní zatížení s lineárním náběhem s tlumením, ruční výpočet



Graf 27: Rychlost pro konstantní zatížení s lineárním náběhem s tlumením, Ansys 14.0



Graf 28: Zrychlení pro konstantní zatížení s lineárním náběhem s tlumením, ruční výpočet



Graf 29: Zrychlení pro konstantní zatížení s lineárním náběhem s tlumením, Ansys 14.0



9.3 Harmonické zatížení

Tento typ zatížení vystihuje periodicky se opakující zatížení konstrukce. S touto variantou se na reálné konstrukci setkáváme nejčastěji a lze takto charakterizovat (i když s drobným zkreslením) pohyb osob po konstrukci.

1) Harmonické buzení bez tlumení konstrukce

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_p + \mathbf{u}_H$$

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{u}_{st} \frac{1}{1-r^2} \cos \Omega t, \quad \text{kde} \quad r = \frac{\Omega}{\omega_n}$$

Stanovené počáteční podmínky:

$$\mathbf{u}_{(0)} = \mathbf{0}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{(0)} = \mathbf{0}$$

$$\Omega = 4\pi$$

Pohybové rovnice pro:

výchylku

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{st} \frac{1}{1-r^2} \cos \Omega t + A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t$$

rychlost

$$\dot{\mathbf{u}} = -\mathbf{u}_{st} \frac{1}{1-r^2} \Omega \sin \Omega t - A_1 \omega_n \sin \omega_n t + A_2 \omega_n \cos \omega_n t$$

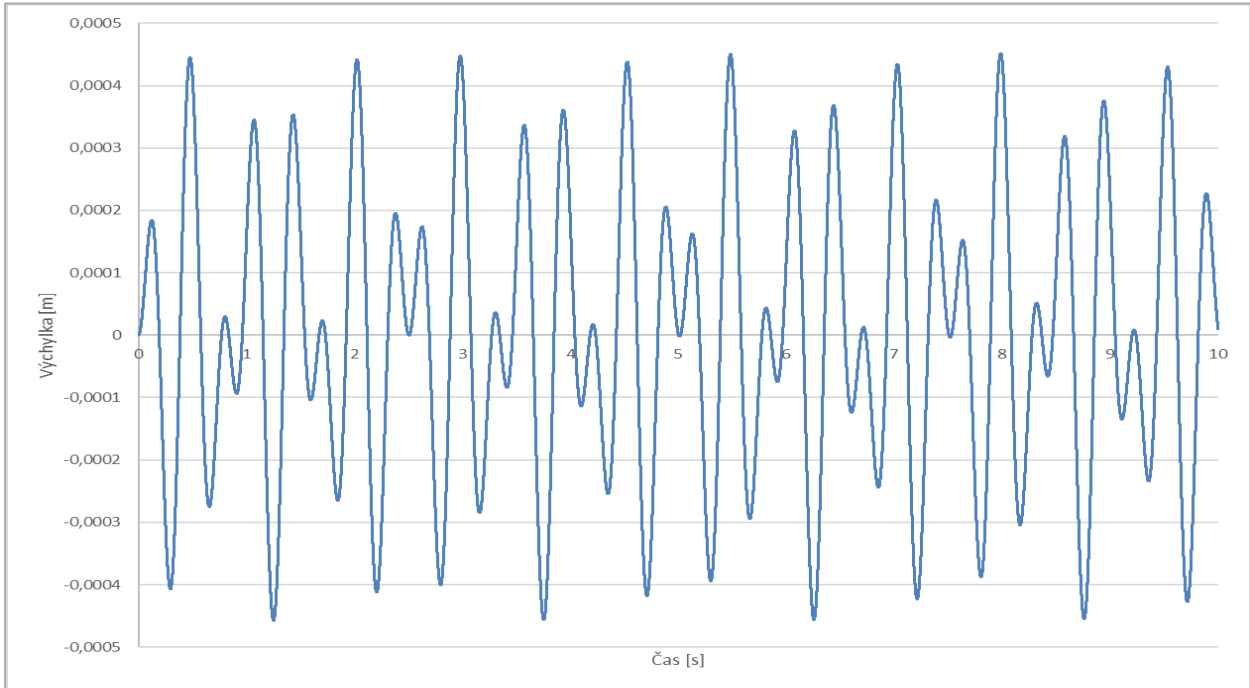
zrychlení

$$\ddot{\mathbf{u}} = -\mathbf{u}_{st} \frac{1}{1-r^2} \Omega^2 \cos \Omega t - A_1 \omega_n^2 \cos \omega_n t - A_2 \omega_n^2 \sin \omega_n t$$

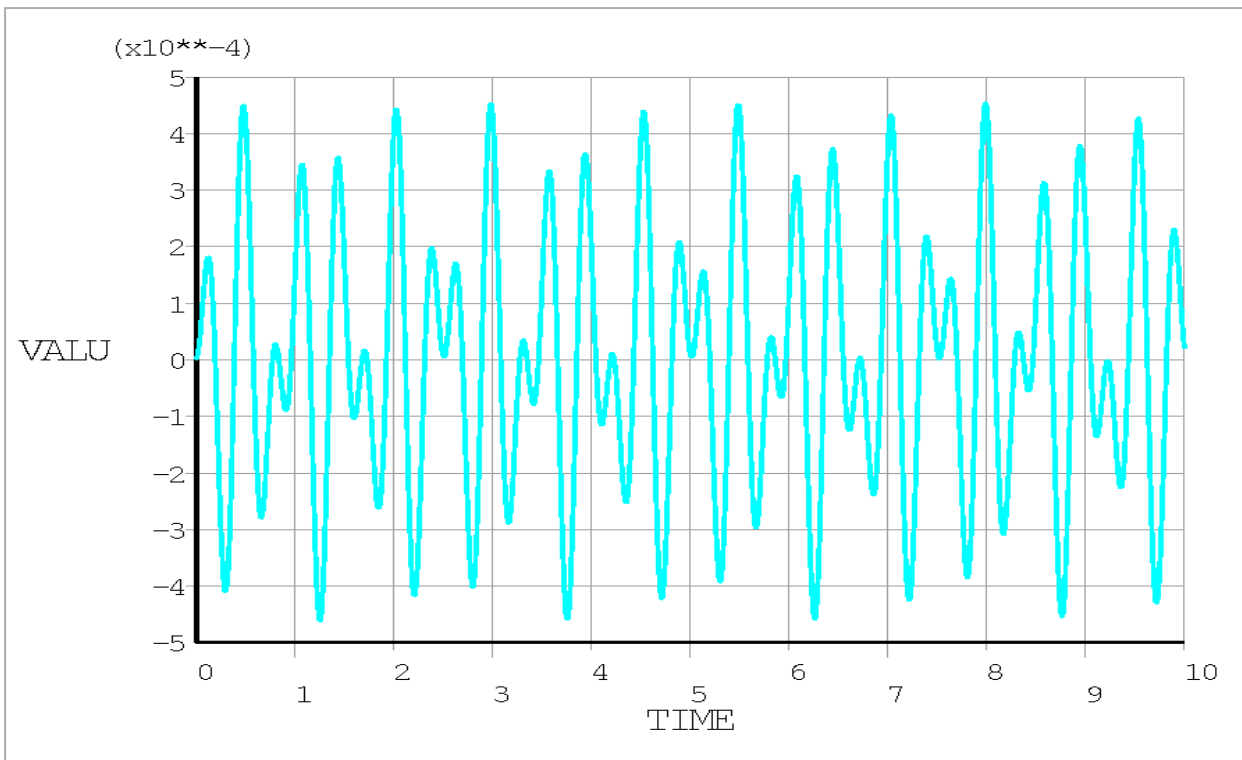
Vyjádření konstant po dosazení počátečních podmínek:

$$A_1 = -\mathbf{u}_{st} \frac{1}{1-r^2}$$

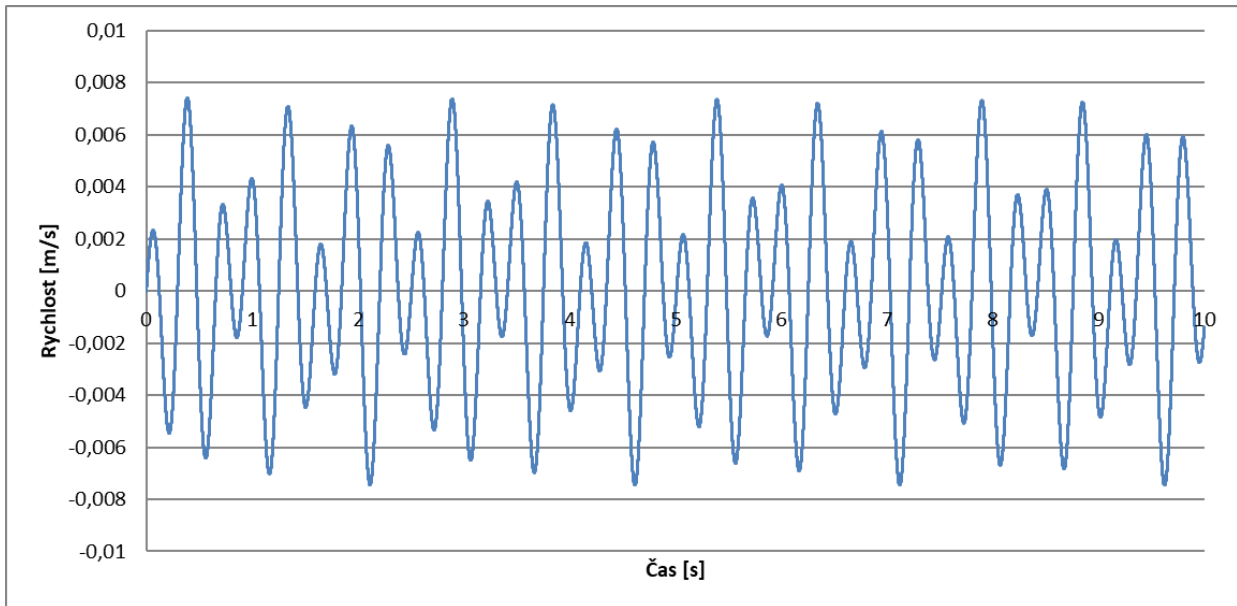
$$A_2 = 0$$



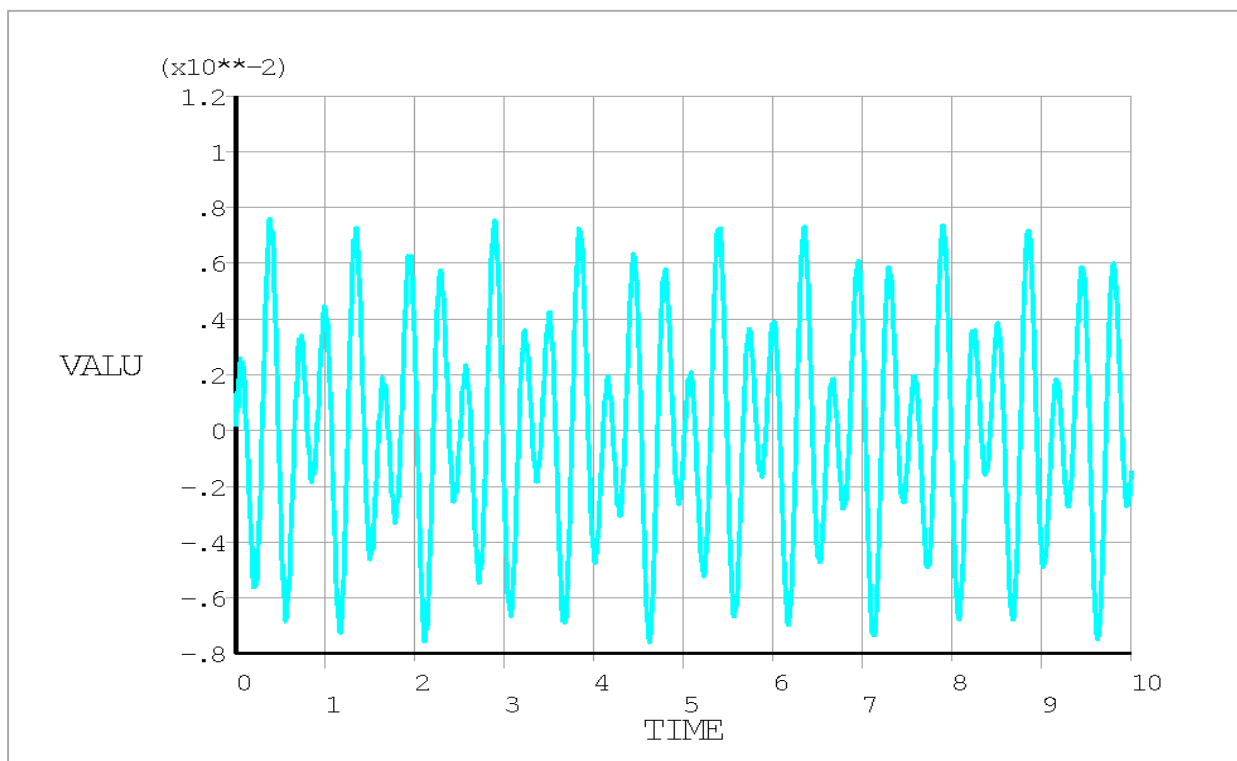
Graf 30: Výchylka pro harmonické zatížení bez tlumení, ruční výpočet



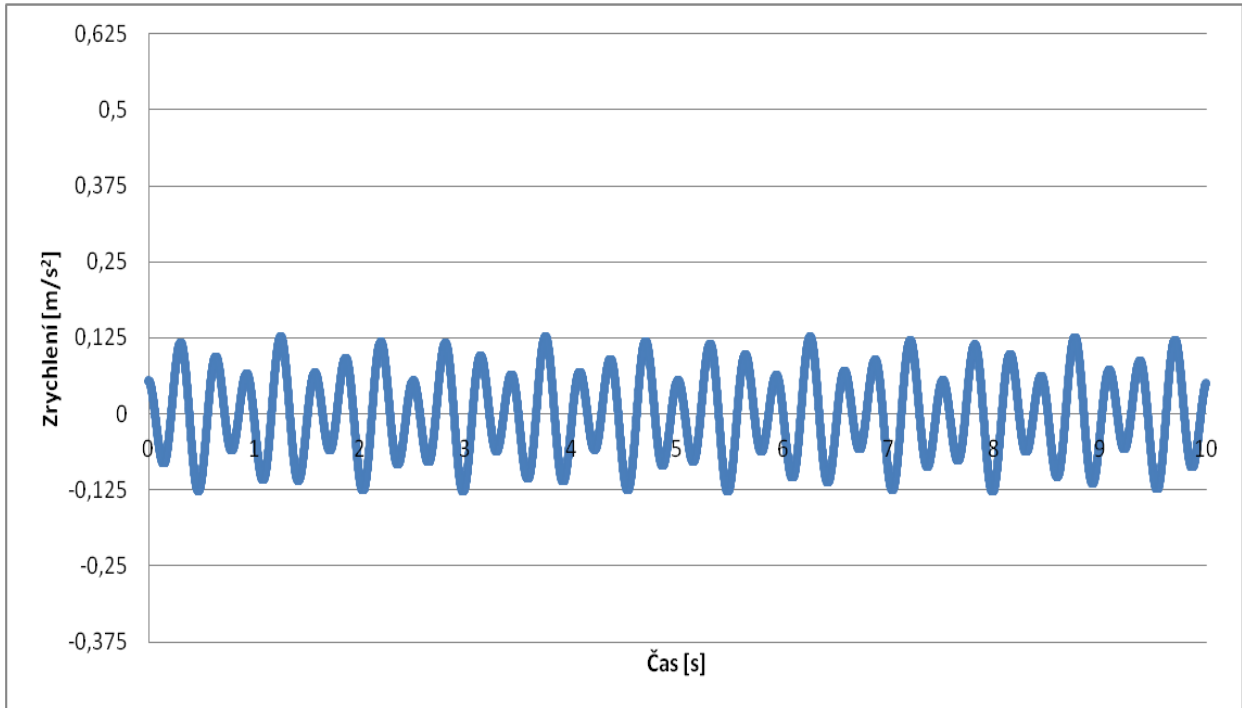
Graf 31: Výchylka pro harmonické zatížení bez tlumení, Ansys 14.0



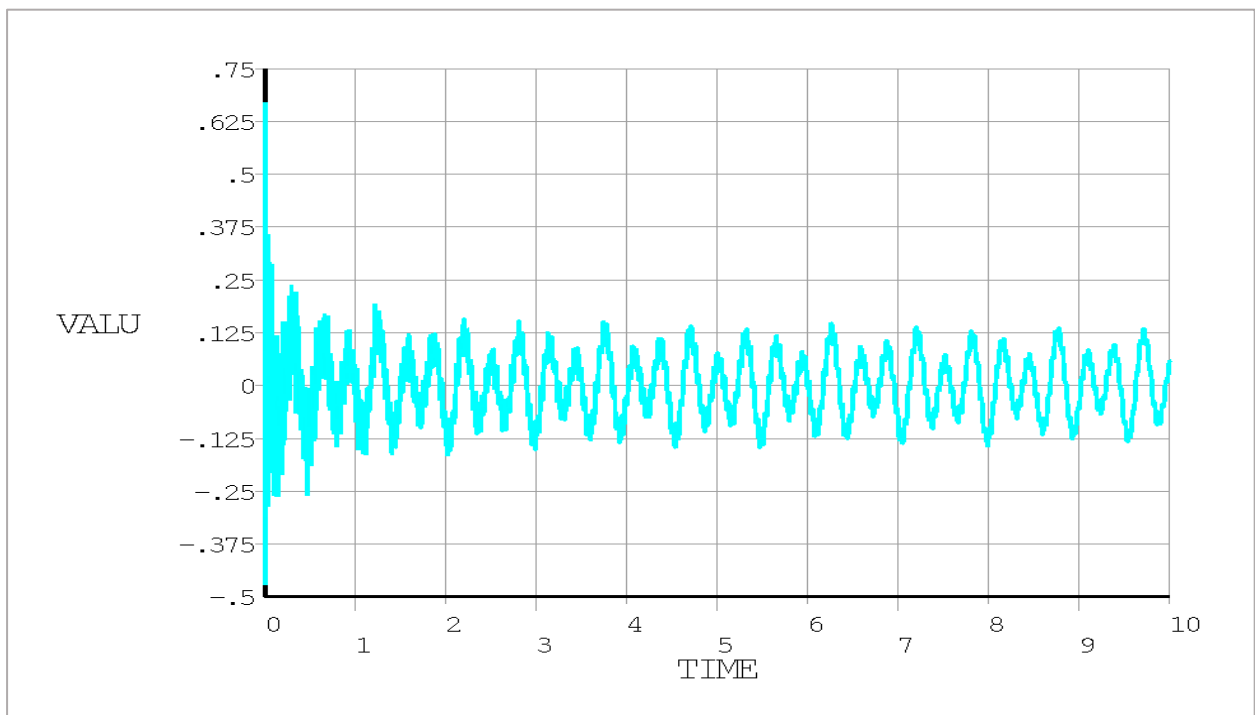
Graf 32: Rychlost pro harmonické zatížení bez tlumení, ruční výpočet



Graf 33: Rychlost pro harmonické zatížení bez tlumení, Ansys 14.0



Graf 34: Zrychlení pro harmonické zatížení bez tlumení, ruční výpočet



Graf 35: Zrychlení pro harmonické zatížení bez tlumení, Ansys 14.0



2) Harmonické buzení s tlumením konstrukce

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_p + \mathbf{u}_H$$

Stanovené počáteční podmínky:

$$\mathbf{u}_{(0)} = \mathbf{0}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{(0)} = \mathbf{0}$$

Pohybové rovnice pro:

výchylku

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{st} \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r^2)^2}} \cos \Omega t + e^{-\zeta \omega_n t} (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t)$$

rychlost

$$\dot{\mathbf{u}} = -\mathbf{u}_{st} \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r^2)^2}} \Omega \sin \Omega t + e^{-\zeta \omega_n t} (-A_1 \omega_d \sin \omega_d t + A_2 \omega_d \cos \omega_d t) + e^{-\zeta \omega_n t} (-\zeta \omega_n) (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t)$$

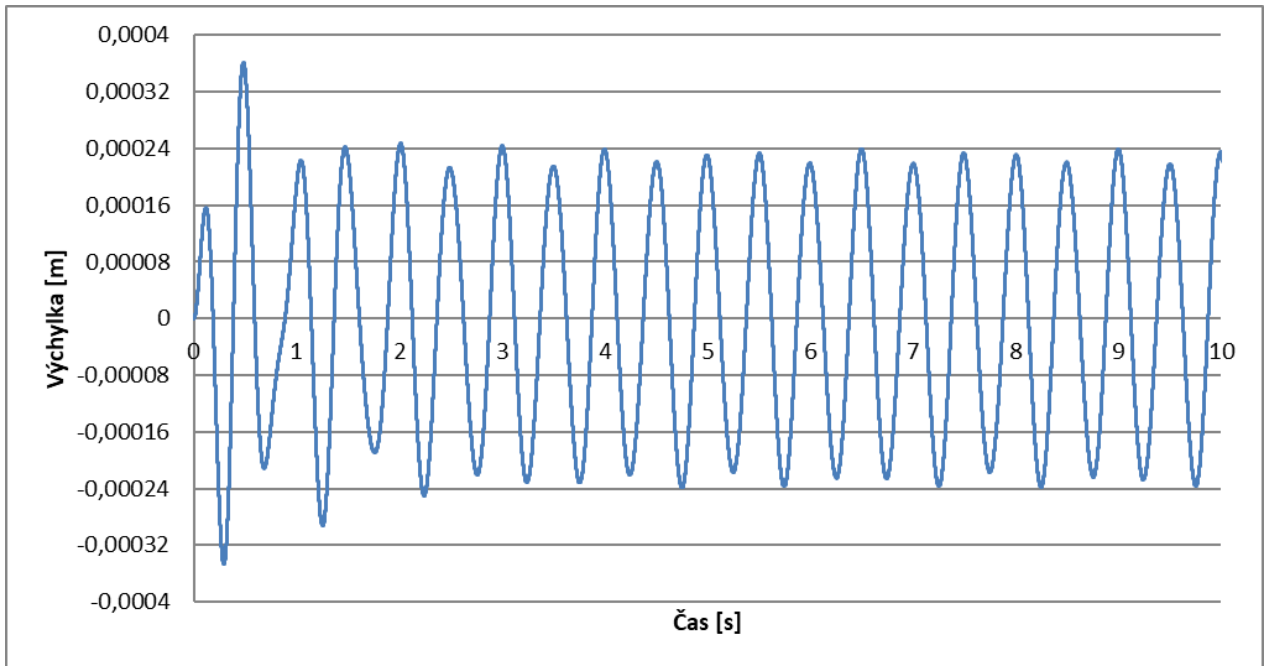
zrychlení

$$\ddot{\mathbf{u}} = -\mathbf{u}_{st} \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r^2)^2}} \Omega^2 \cos \Omega t + e^{-\zeta \omega_n t} (-\zeta \omega_n)^2 \cdot (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) + 2 \cdot e^{-\zeta \omega_n t} (-\zeta \omega_n) \cdot (-A_1 \omega_d \sin \omega_d t + A_2 \omega_d \cos \omega_d t) + e^{-\zeta \omega_n t} (-A_1 \omega_d^2 \cos \omega_d t - A_2 \omega_d^2 \sin \omega_d t)$$

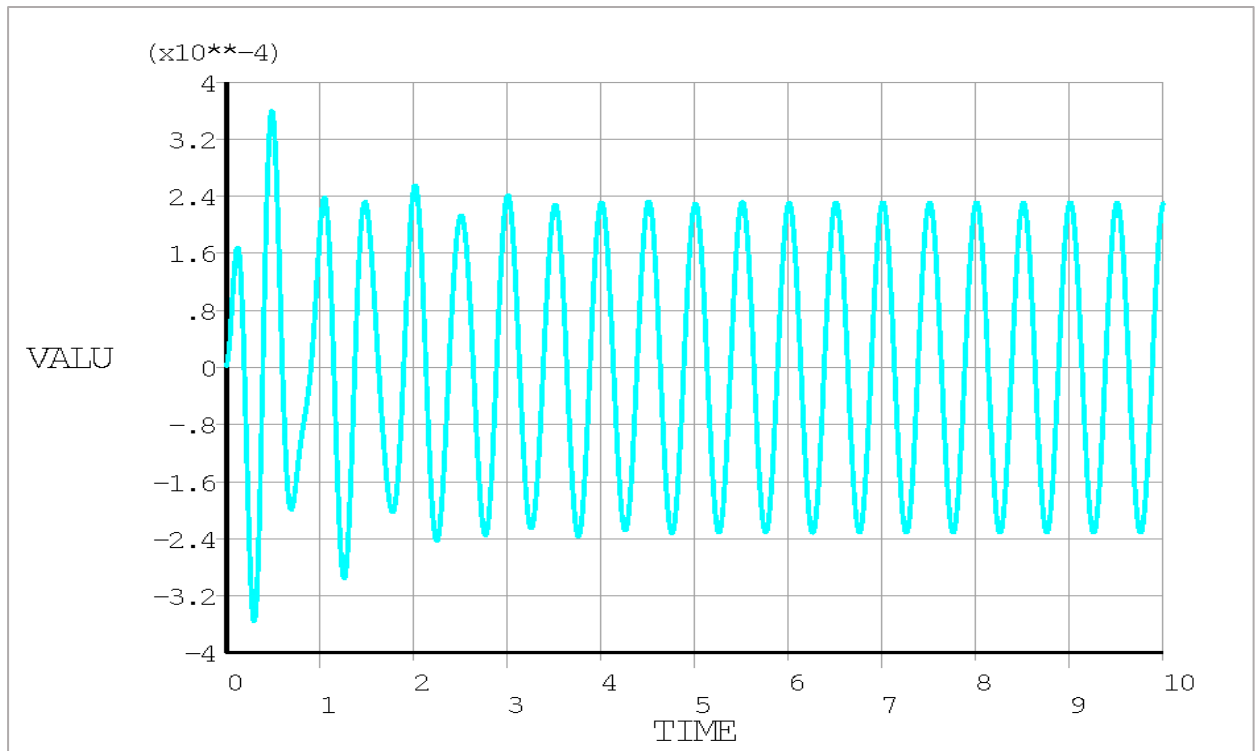
Vyjádření konstant po dosazení počátečních podmínek:

$$A_1 = -\mathbf{u}_{st} \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r^2)^2}}$$

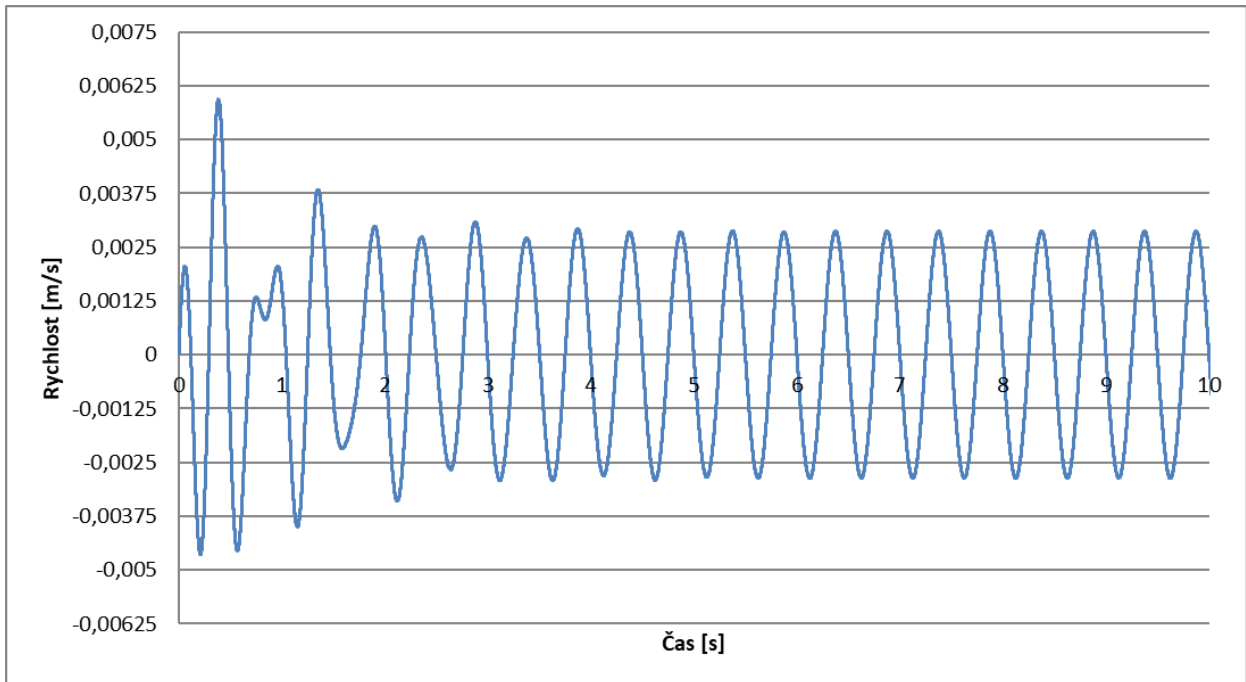
$$A_2 = -\frac{\zeta \omega_n A_1}{\omega_d}$$



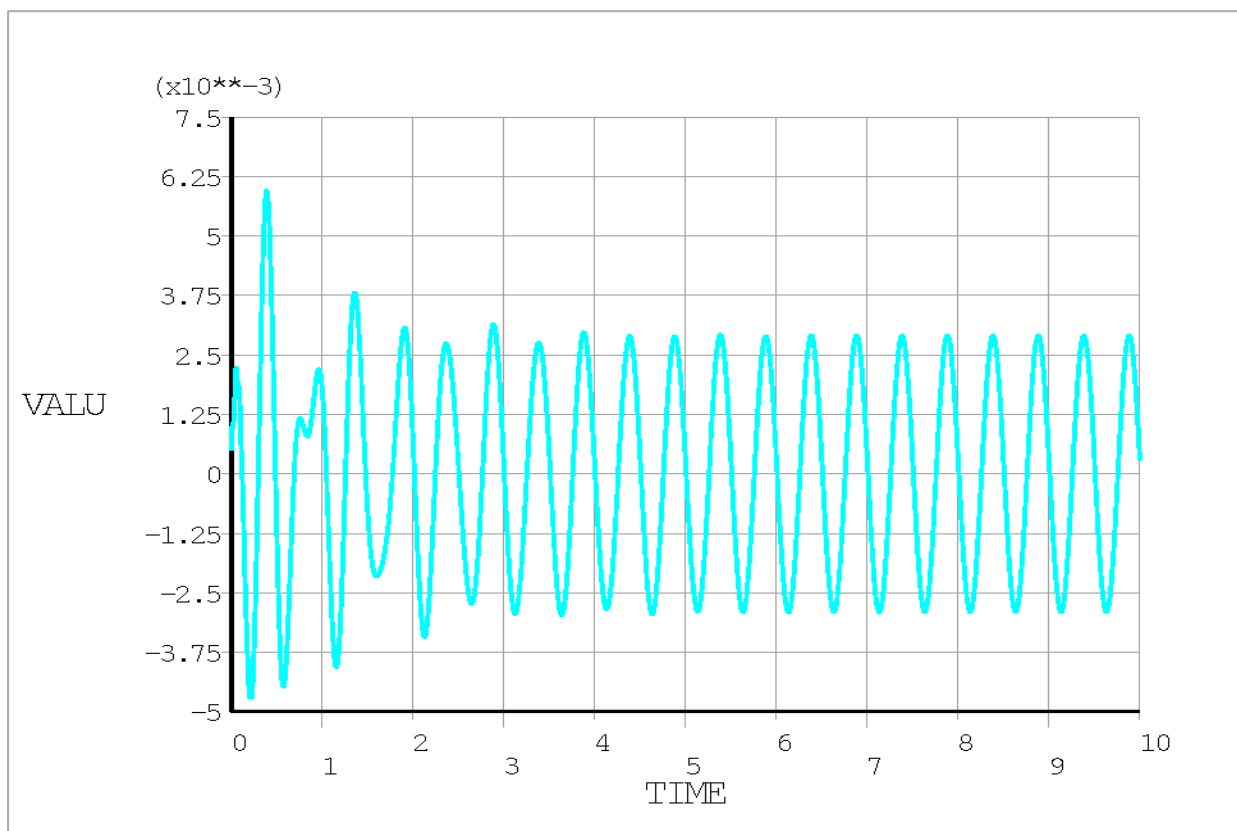
Graf 36: : Výchylka pro harmonické zatížení s tlumením, ruční výpočet



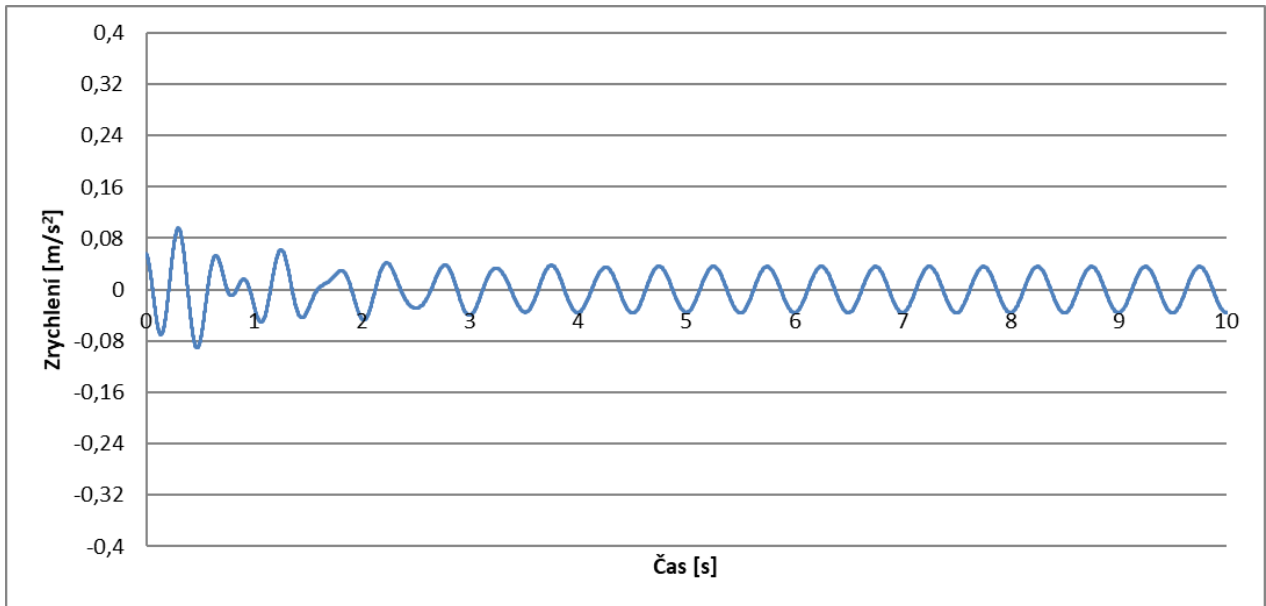
Graf 37: Výchylka pro harmonické zatížení s tlumením, Ansys 14.0



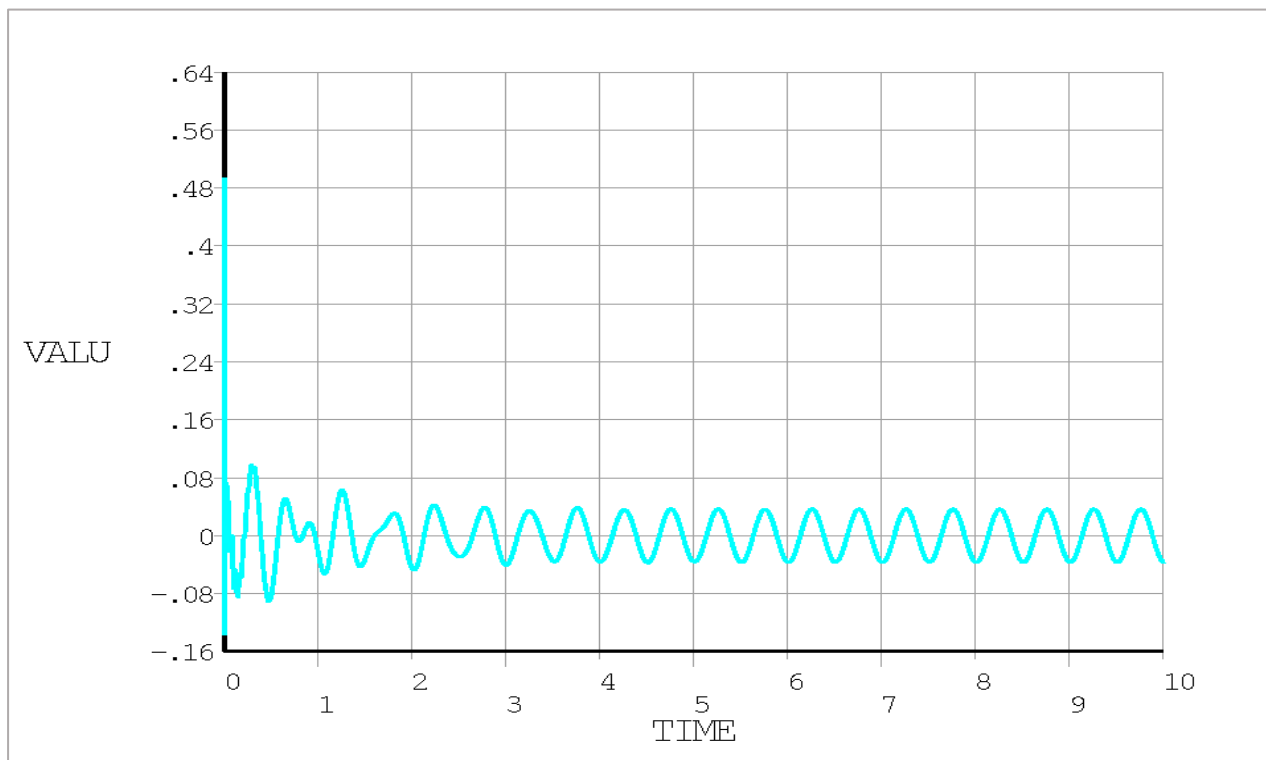
Graf 38: : Rychlost pro harmonické zatížení s tlumením, ruční výpočet



Graf 39: Rychlost pro harmonické zatížení s tlumením, Ansys 14.0



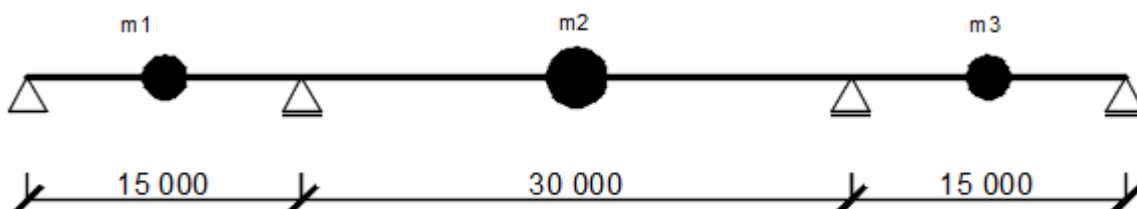
Graf 40: Zrychlení pro harmonické zatížení s tlumením, ruční výpočet



Graf 41: Zrychlení pro harmonické zatížení s tlumením, Ansys 14.0

10 DYNAMICKÁ ANALÝZA SPOJITÉHO NOSNÍKU

Pro model spojitého nosníku byly využity průřezové a materiálové charakteristiky konstrukce prostého nosníku.



Obrázek 18: Uvažovaný dynamický model spojitého nosníku

10.1 Ruční výpočet

Obecná soustava rovnic pro řešení třístupňového modelu

$$M \ddot{u} + C \dot{u} + K u = F_t .$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{t1} \\ F_{t2} \\ F_{t3} \end{Bmatrix}$$

Následný výpočet je řešen pro spojitý nosník bez zahrnutí tlumení konstrukce.

$$\begin{bmatrix} 11993.985 & 0 & 0 \\ 0 & 23987.97 & 0 \\ 0 & 0 & 11993.985 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4.04240E+07 & 1.42360E+06 & 7.12900E+05 \\ 1.42360E+06 & 6.83360E+06 & 1.42360E+06 \\ 7.12900E+05 & 1.42360E+06 & 4.04240E+07 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{t1} \\ F_{t2} \\ F_{t3} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 11993.985 & 0 & 0 \\ 0 & 23987.97 & 0 \\ 0 & 0 & 11993.985 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4.04240E+07 & 1.42360E+06 & 7.12900E+05 \\ 1.42360E+06 & 6.83360E+06 & 1.42360E+06 \\ 7.12900E+05 & 1.42360E+06 & 4.04240E+07 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

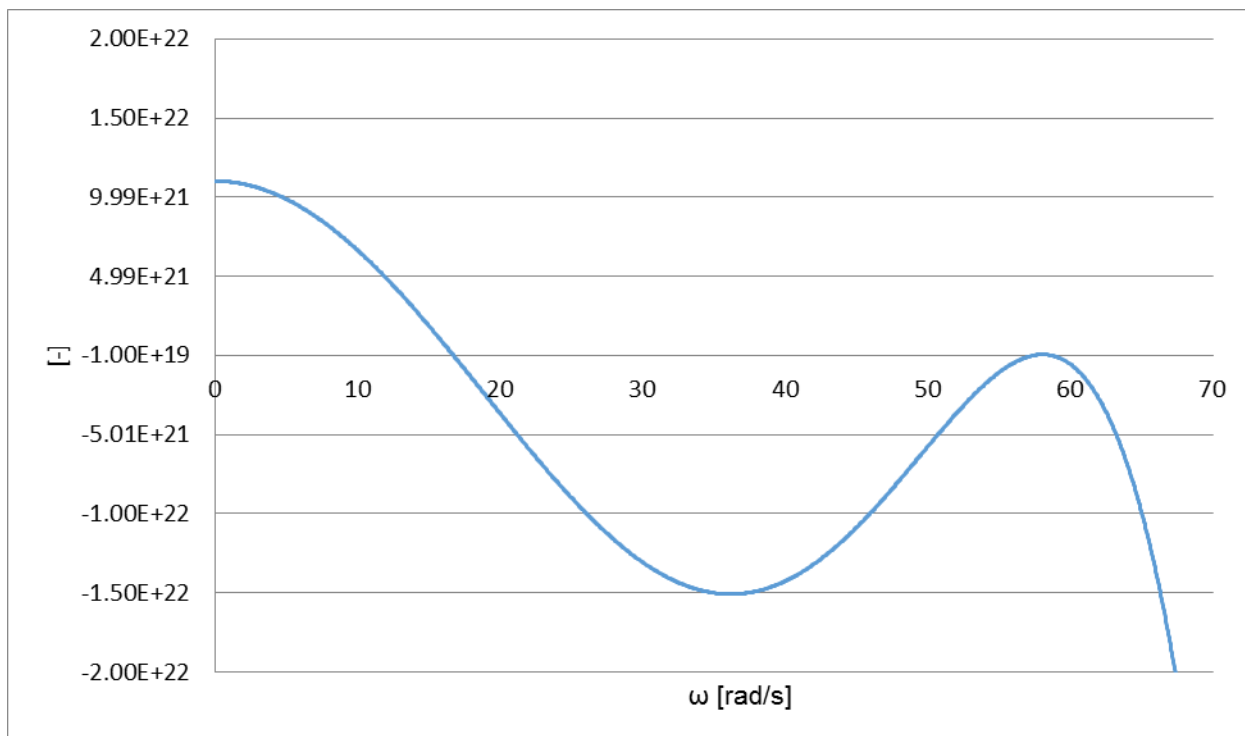
Stanovené počáteční podmínky:

$$u_{(0)} = 0$$

$$\ddot{u}_{(0)} = 0$$



$$\det |K - \omega^2 M| = 0$$
$$\det \begin{vmatrix} 4.04240E + 07 - \omega^2 \cdot 11994 & 1.42360E + 06 & 7.12900E + 05 \\ 1.42360E + 06 & 6.83360E + 06 - \omega^2 \cdot 23988 & 1.42360E + 06 \\ 7.12900E + 05 & 1.42360E + 06 & 4.04240E + 07 - \omega^2 \cdot 11994 \end{vmatrix} = 0$$



Graf 42: Graf pro zjištění vlastních čísel u spojitého nosníku, ruční výpočet

$$\omega_1 = 16,745 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\omega_2 = 57,540 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

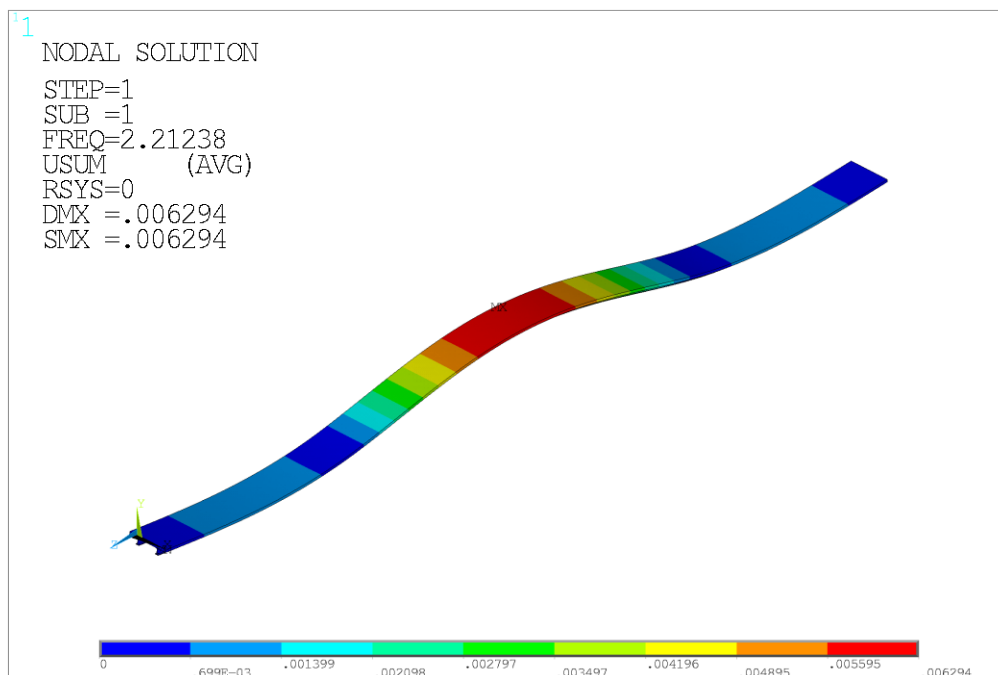
$$\omega_3 = 58,600 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$f_1 = 2,66507 \text{ Hz}$$

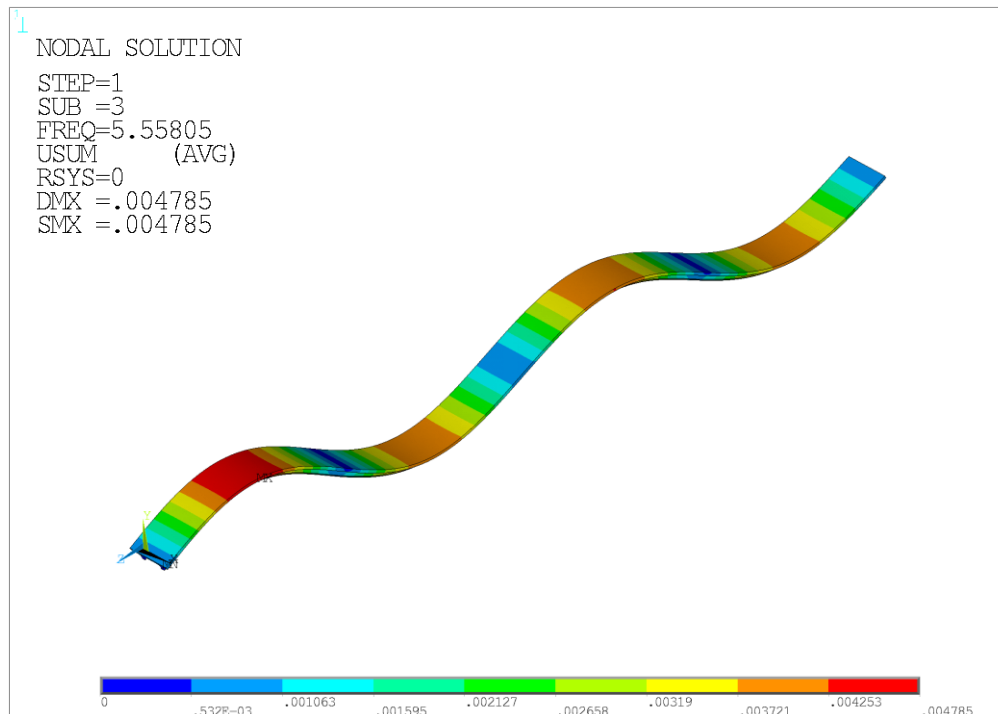
$$f_2 = 9,15770 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 9,32653 \text{ Hz}$$

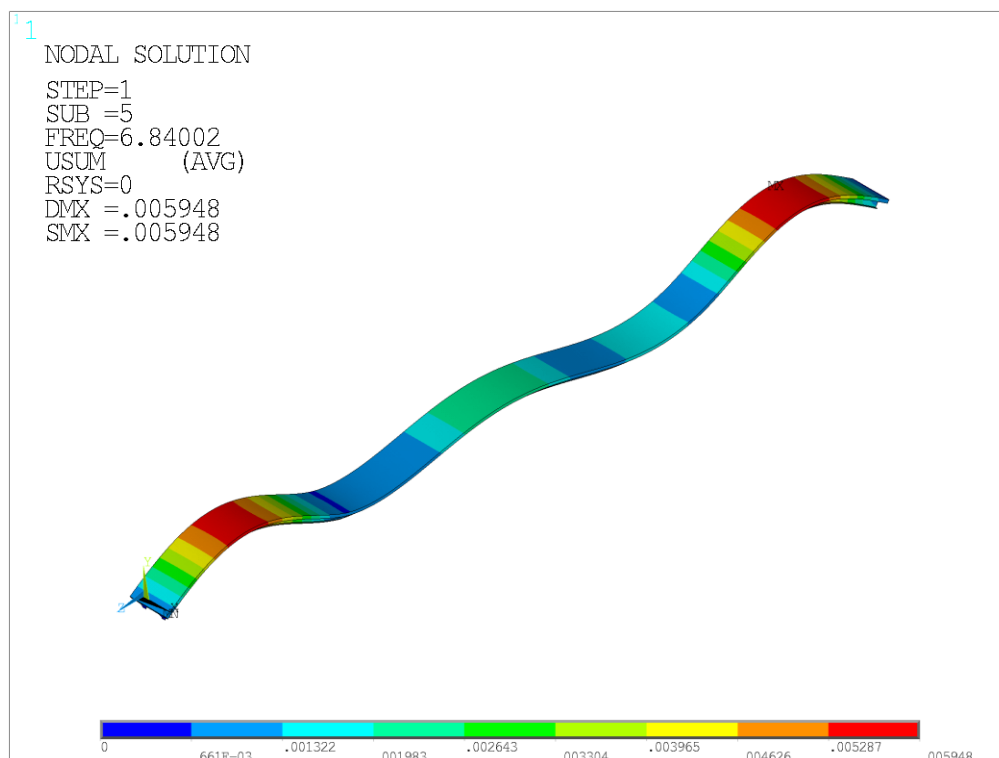
10.2 Modální analýza v Ansys



Obrázek 19: První vlastní frekvence spojitého nosníku, Ansys 14.0



Obrázek 20: Druhá vlastní frekvence spojitého nosníku, Ansys 14.0



Obrázek 21: Třetí vlastní frekvence spojitého nosníku, Ansys 14.0

Z porovnání modální analýzy manuálního a programového výpočtu jsou zřejmé výrazné rozdíly, kdy tyto nepřesnosti v druhé a třetí vlastní frekvenci, získané ručním postupem, budou mít nepříznivý dopad na následné řešení úlohy.

$$(K - \omega^2 M)U = 0$$

$$\begin{bmatrix} 4.04240E + 07 - \omega^2 \cdot 11994 & 1.42360E + 06 & 7.12900E + 05 \\ 1.42360E + 06 & 6.83360E + 06 - \omega^2 \cdot 23988 & 1.42360E + 06 \\ 7.12900E + 05 & 1.42360E + 06 & 4.04240E + 07 - \omega^2 \cdot 11994 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = 0$$

$$U_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -26.5346 \\ 1.0011798 \end{Bmatrix}$$

$$U_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -3.6E - 05 \\ -1.001842 \end{Bmatrix}$$

$$U_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.03761 \\ 0.9957275 \end{Bmatrix}$$

a)

b)

c)

Obrázek 22: Vlastní tvary ručního výpočtu a) U_1 , b) U_2 , c) U_3



$$\phi_1^T M \phi_1 = 1$$

$$\phi_1 = c U_1$$

$$\phi = [\phi_1, \phi_2, \phi_3]$$

$$\phi = \begin{bmatrix} 2.4315E-04 & 6.4506E-03 & 6.4658E-03 \\ -6.4520E-03 & -2.3307E-07 & 2.4318E-04 \\ 2.4344E-04 & -6.4625E-03 & 6.4382E-03 \end{bmatrix}$$

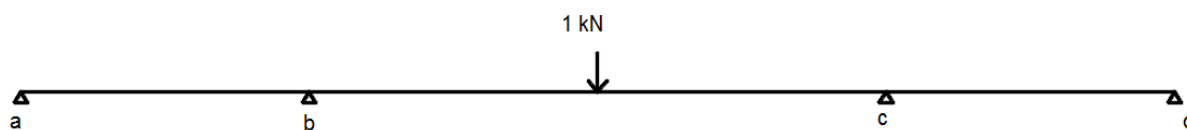
$$M = \phi_T m \phi$$

$$M = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0012 \\ 0.0000 & 0.0012 & 1.0000 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K = \phi_T k \phi$$

$$K = \begin{bmatrix} 280.403 & -0.073 & 0.072 \\ -0.073 & 3310.914 & 3.920 \\ 0.072 & 3.920 & 3434.263 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 280.403 & 0 & 0 \\ 0 & 3310.914 & 0 \\ 0 & 0 & 3434.263 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 \end{bmatrix}$$

10.3 Ruční výpočet pro konstantní zatížení ve středním poli



$$F = \phi_T f$$

$$\begin{bmatrix} 2.43E-04 & -6.45E-03 & 2.43E-04 \\ 6.45E-03 & -2.33E-07 & -6.46E-03 \\ 6.47E-03 & 2.43E-04 & 6.44E-03 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1000 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6.45200 \\ -0.00023 \\ 0.243180 \end{Bmatrix}$$

$$M\ddot{\eta} + C\dot{\eta} + K\eta = F(t)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \\ \ddot{\eta}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6.45200 \\ -0.00023 \\ 0.243180 \end{Bmatrix}$$

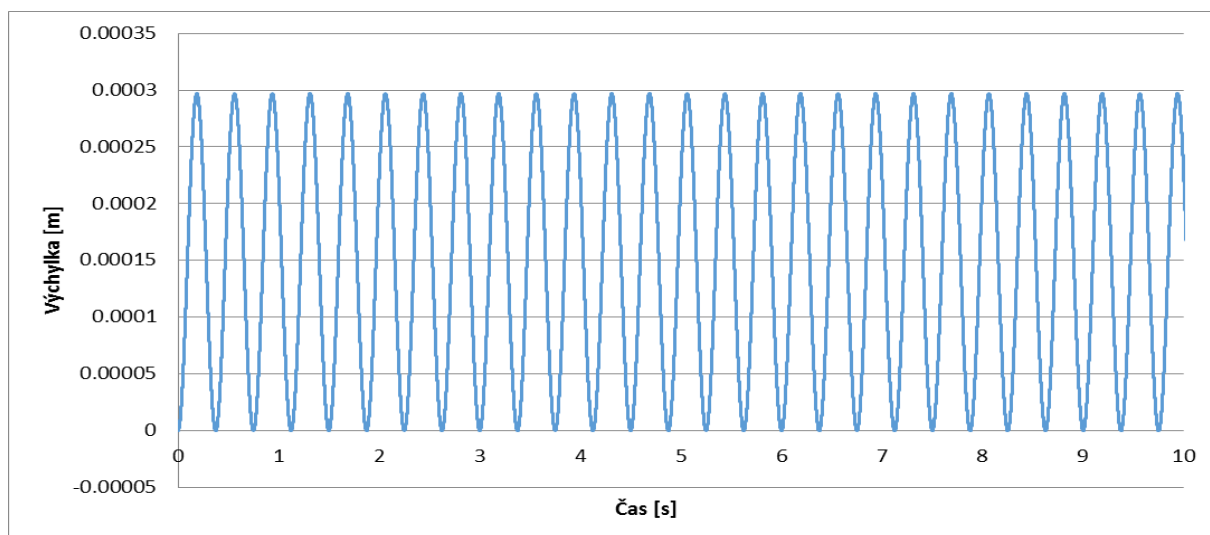
Dosazení počátečních podmínek

$$u(0) = \phi\eta(0)$$

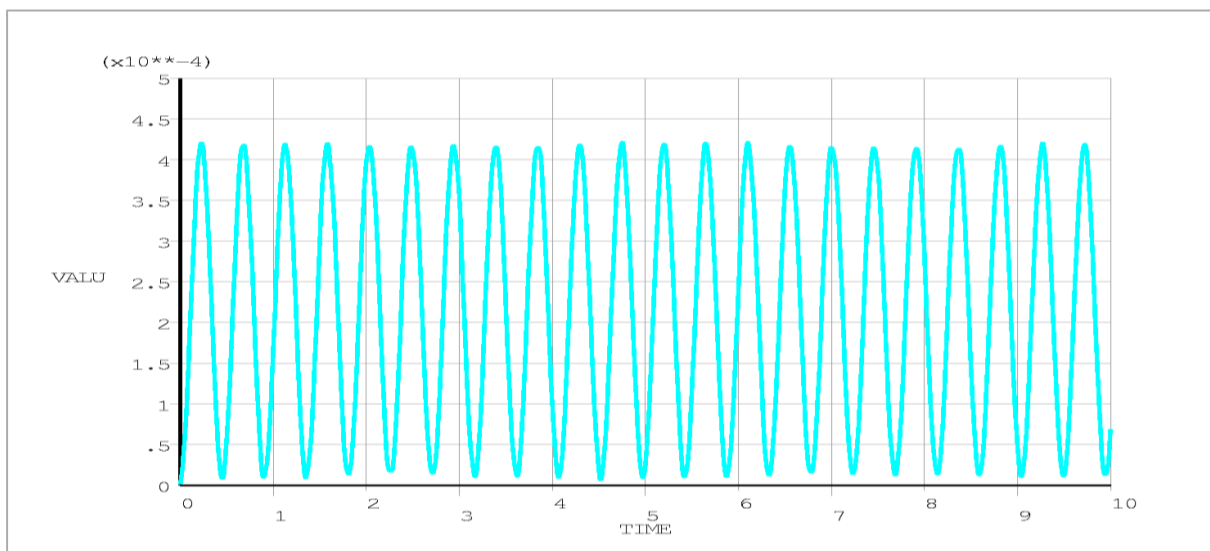
$$\eta_i = \frac{f_i}{\omega_i^2} (1 - \cos(\omega_i t))$$



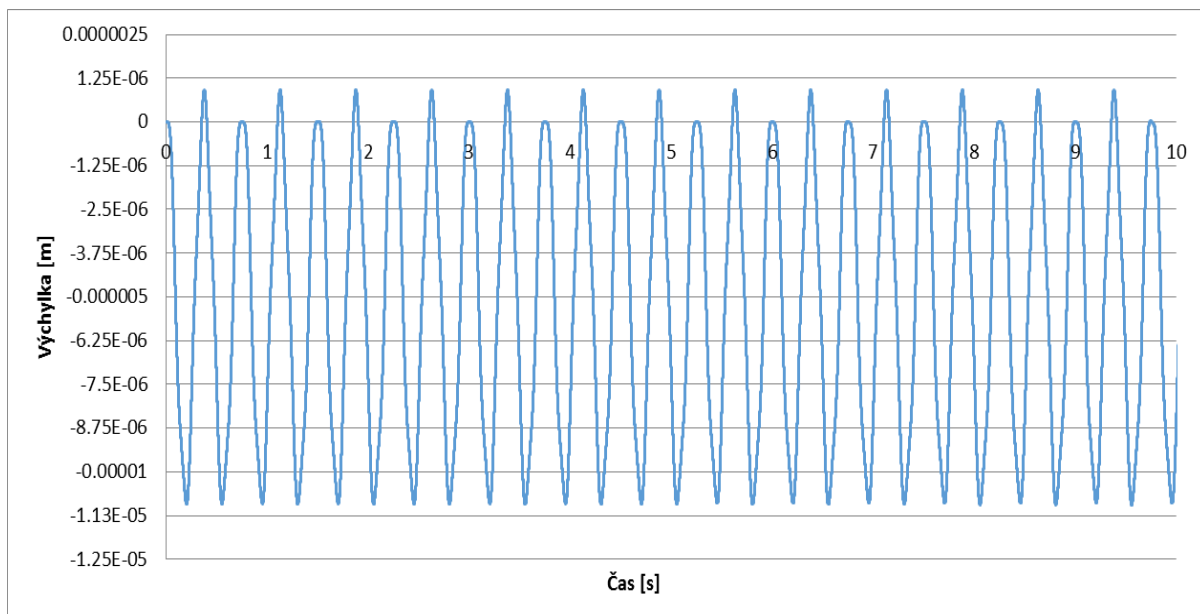
$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5.1375E-06 \\ 1.4848E-04 \\ -5.1452E-06 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5.5949E-06 \\ -1.4846E-04 \\ 5.6015E-06 \end{pmatrix} \cos 16,745 t + \begin{pmatrix} 4.5410E-10 \\ -1.6407E-14 \\ -4.5493E-10 \end{pmatrix} \cos 57,540 t + \begin{pmatrix} -4.5784E-07 \\ -1.7220E-08 \\ -4.5589E-07 \end{pmatrix} \cos 58,600 t$$



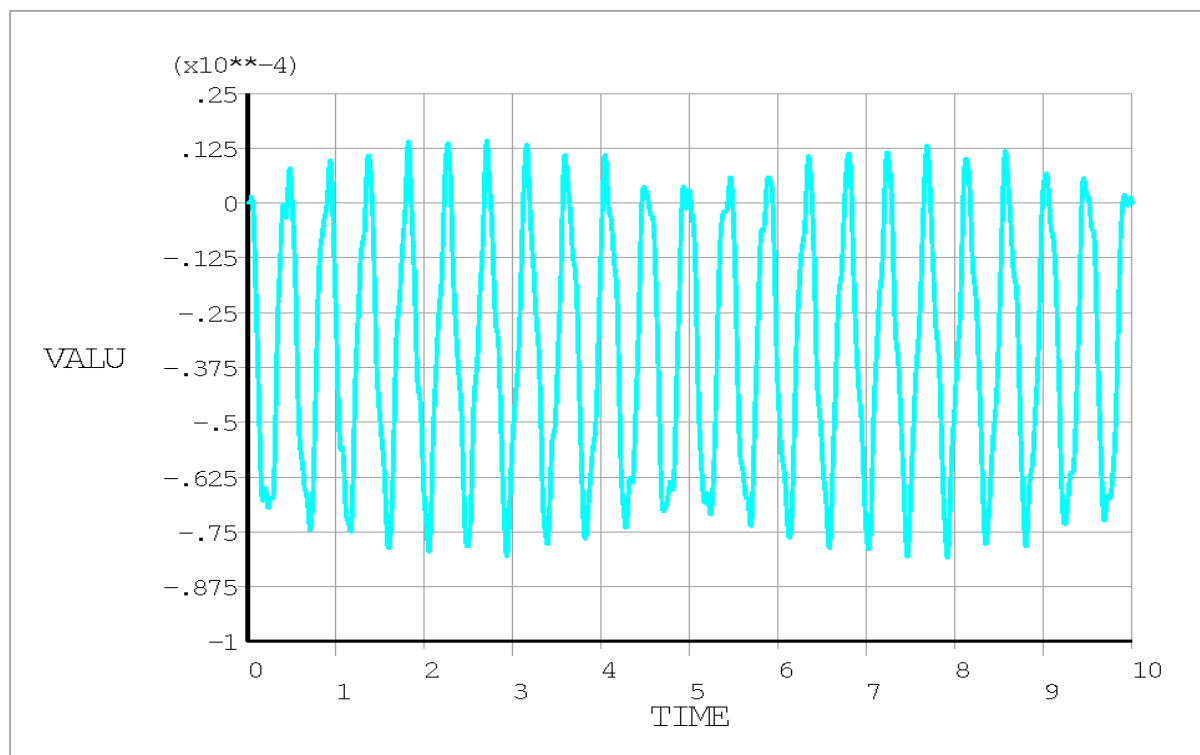
Graf 43: Výchylka vyvolaná konstantním zatížením na spojitém nosniku řešeném jako třístupňová soustava, odezva ve středním poli, ruční výpočet



Graf 44: Výchylka vyvolaná konstantním zatížením na spojitém nosniku řešeném jako třístupňová soustava, odezva ve středním poli, Ansys 14.0



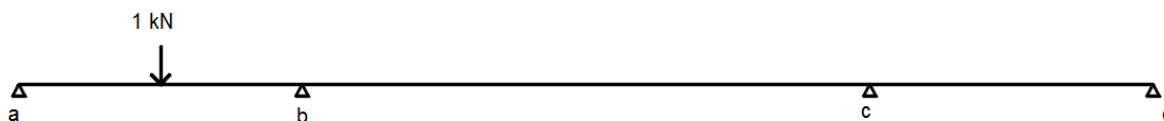
Graf 45: Výchylka vyvolaná konstantním zatížením na spojitém nosníku řešeném jako třístupňová soustava, odezva v prvním poli, ruční výpočet



Graf 46: Výchylka vyvolaná konstantním zatížením na spojitém nosníku řešeném jako třístupňová soustava, odezva v prvním poli, Ansys 14.0



10.4 Ruční výpočet pro konstantní zatížení v krajním poli



$$F = \phi_T f$$

$$\begin{bmatrix} 2.43E-04 & -6.45E-03 & 2.43E-04 \\ 6.45E-03 & -2.33E-07 & -6.46E-03 \\ 6.47E-03 & 2.43E-04 & 6.44E-03 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.243154 \\ 6.450642 \\ 6.465803 \end{Bmatrix}$$

$$M\ddot{\eta} + C\dot{\eta} + K\eta = F(t)$$

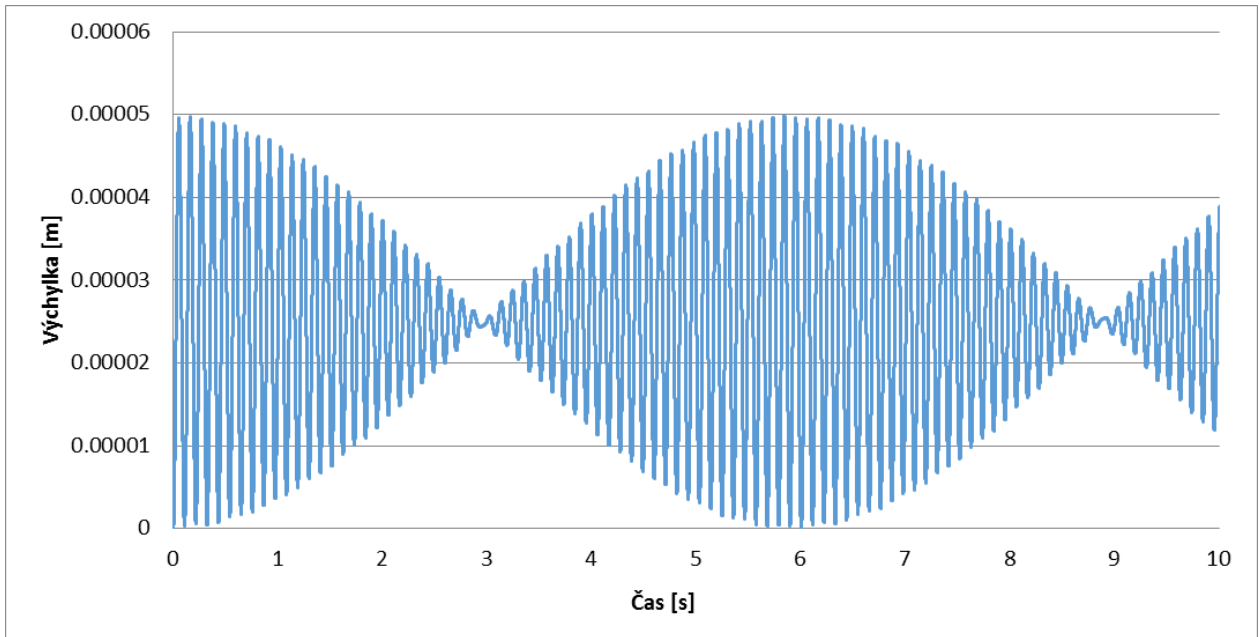
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \\ \ddot{\eta}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.243154 \\ 6.450642 \\ 6.465803 \end{Bmatrix}$$

Dosazení počátečních podmínek

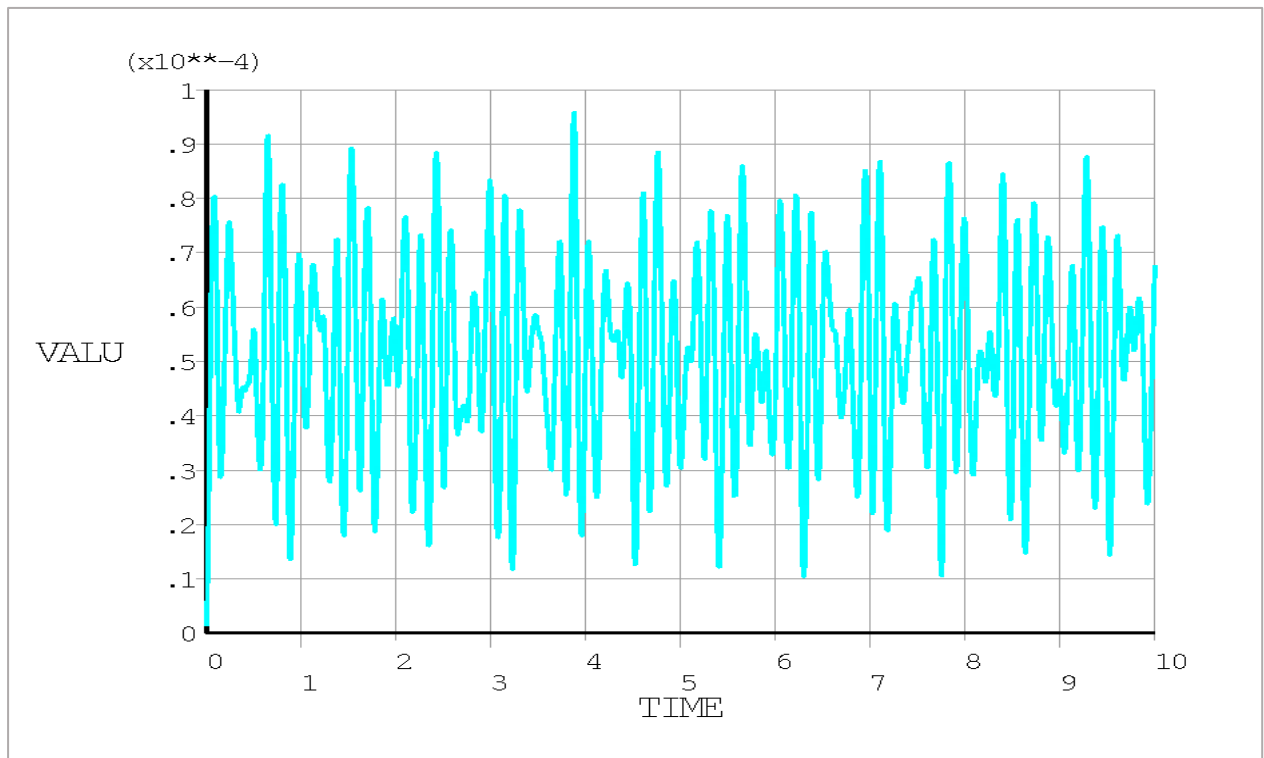
$$u(0) = \phi\eta(0)$$

$$\eta_i = \frac{f_i}{\omega_i^2} (1 - \cos(\omega_i t))$$

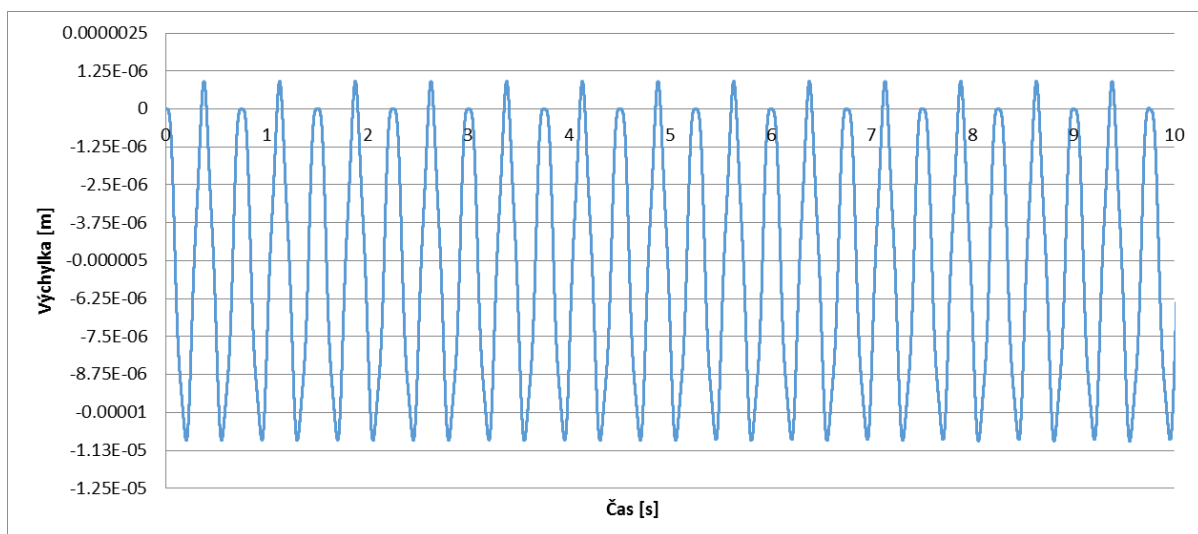
$$\begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.4952E-05 \\ -5.1375E-06 \\ -2.5844E-07 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -2.1085E-07 \\ 5.5949E-06 \\ -2.1110E-07 \end{Bmatrix} \cos 16,745 t + \begin{Bmatrix} -1.2568E-05 \\ 4.5410E-10 \\ 1.2591E-05 \end{Bmatrix} \cos 57,540 t + \\ + \begin{Bmatrix} -1.2173E-05 \\ -4.5784E-07 \\ -1.2121E-05 \end{Bmatrix} \cos 58,600 t$$



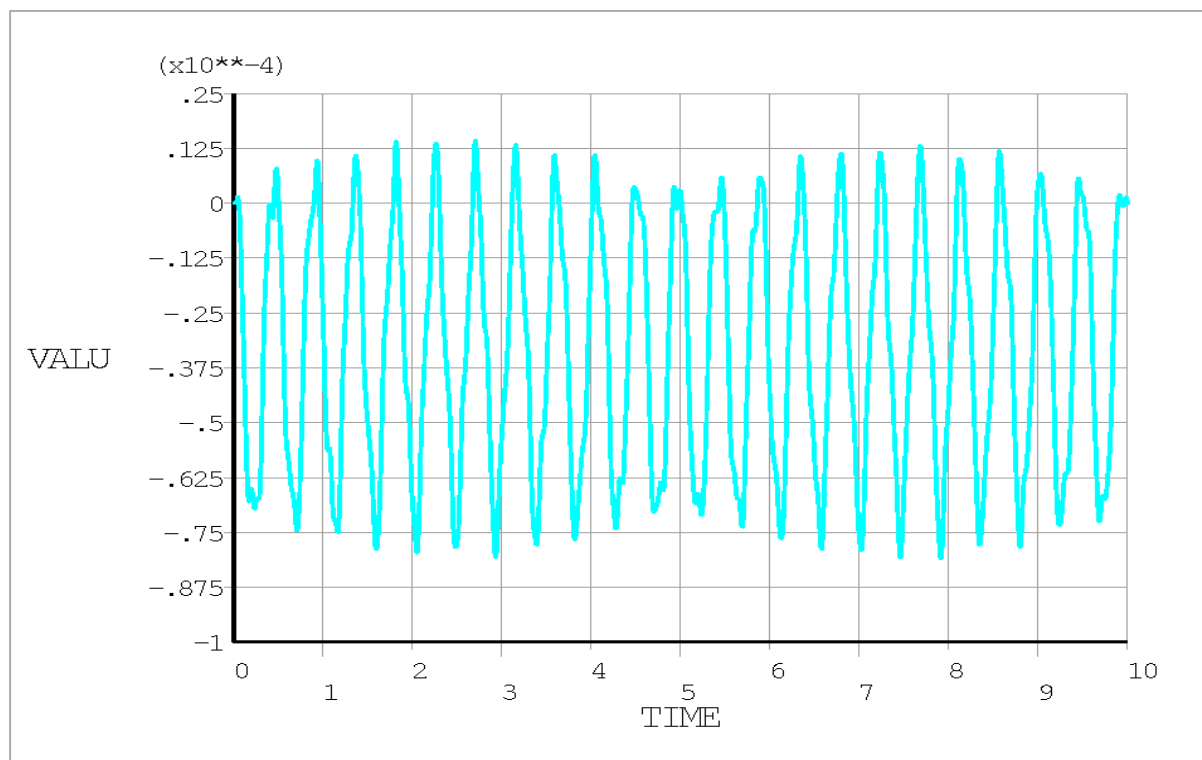
Graf 47: Výchylka vyvolaná konstantním zatížením na spojitém nosníku řešeném jako třístupňová soustava, odezva v krajním poli, ruční výpočet



Graf 48: Výchylka vyvolaná konstantním zatížením na spojitém nosníku řešeném jako třístupňová soustava, odezva v krajním poli, Ansys 14.0



Graf 49: Výchylka vyvolaná konstantním zatížením na spojitém nosniku řešeném jako třístupňová soustava, odezva ve středním poli, ruční výpočet



Graf 50: Výchylka vyvolaná konstantním zatížením na spojitém nosniku řešeném jako třístupňová soustava, odezva ve středním poli, Ansys 14.0



Z grafů pro řešení dynamické odezvy u spojitého nosníku je patrné, že v těchto případech je již ruční výpočet nedostačující. U spojitého nosníku zatíženém v hlavním poli se hodnoty ručního výpočtu od programového liší, ale vzhledem k symetrii zatížení ještě není odchylka tak zásadní jako u zatížení v krajním poli (tj. u nesymetrického zatížení). Za příčinu těchto nesrovnalostí lze označit nedostatečný počet stupňů volnosti. Pro navýšení přesnosti výpočtu (bez zásahu do úprav počtu stupňů volnosti) bychom mohli volit vhodnější umístění zkoumaných bodů. Ze statického chování konstrukce vyplývá, že při zatížení silou v hlavním poli nedojde v krajním poli k maximálnímu průhybu uprostřed. Pokud bychom tedy zkoumaný bod přesunuli do místa maximálního průhybu, došlo by touto změnou k lepšímu vystižení matice tuhosti. Další nepřesností, která vstupuje do výpočtu, je též matice hmotnosti, kterou v tomto výpočtu uvažujeme rovnu polovině hmotnosti jednoho pole.



11 ZÁVĚR

V diplomové práci byl proveden výpočet statických a dynamických sil působících na mostní konstrukci určenou pouze pro pěší. Lávka je plánována v Moravském regionu konkrétně v Olomouci, tak aby přemostila přílehlou řeku.

Řešená konstrukce je navržena jako železobetonová deska spřažená s dvěma ocelovými „I“ profily, v podélném řezu oblouková s mírným vzepětím. Od tohoto vzepětí bylo vzhledem k praktické možnosti provedení ručního výpočtu abstrahováno a konstrukce byla pro ruční i programový výpočet řešena jako rovinná.

Nejdříve byla na modelu provedena statická analýza za účelem získání hodnot statických výchylek k jednotlivým typům zvoleného namáhání, které byly následně využity pro dynamické posouzení.

Na pěší lávce byl zkoumán vliv dynamického namáhání zvolených působících sil ve svislém směru na navrženou konstrukci (ve třech různých variantách). Výpočty byly zaměřeny na získání průběhu výchylek, rychlosti a zrychlení v čase. Varianty byly zpracovány vždy pro zatížení konstantní, lineárně konstantní a harmonické. Výpočet byl proveden s a bez tlumení. Pro ruční výpočet byla zvolena metoda rozkladu podle vlastních tvarů kmitu. Pro softwarový výpočet byla využita Newmarkova metoda přímé integrace. Cílem práce bylo získání odezvy dynamického namáhání na modelu prostého a spojitého nosníku od jednotlivých typů zatížení a porovnání přesnosti/vhodnosti použití ručního výpočtu.

Z provedených analýz vyplývá, že v případě modelu prostého nosníku je použití ručního výpočtu pro zjištění první vlastní frekvence konstrukce dostatečně přesné a získané hodnoty jsou prakticky stejné jako při výpočtu metodou konečných prvků. Bylo prokázáno, že zde lze ruční postup bezpečně použít pro návrh konstrukce.

Při provádění výpočtů byly také zjištěny limitující skutečnosti ručního výpočtu, u kterého na rozdíl od programovatelných softwarů nelze s ohledem na časovou náročnost výpočtu provést



manuální výpočet pro tak velké množství konečných prvků. Proto ruční postup uvažovaný jako třístupňová soustava na modelu spojitého nosníku nedostatečně vystihuje chování reálné konstrukce oproti počítačovému zpracování výsledků. Tento nedostatek ručního postupu lze však do jisté míry eliminovat použitím vícešupňové soustavy nebo volbou vhodnějších pozic analyzovaných bodů na modelu konstrukce s cílem lepšího vystižení matice tuhosti.



SEZNAM GRAFŮ

Graf 1: Zjištění hodnot vlastních čísel u prostého nosníku, ruční výpočet	19
Graf 2: Výhybka vyvolaná konstantním zatížením na prostém nosníku řešeném jako třístupňová soustava, ruční výpočet.....	25
Graf 3: Výhybka vyvolaná konstantním zatížením na prostém nosníku řešeném jako třístupňová soustava, Ansys 14.0	25
Graf 4: Rayleighův model tlumení pro jednoduchý nosník, ruční výpočet.....	27
Graf 5: Rayleighův model tlumení pro spojitý nosník, ruční výpočet	28
Graf 6: Výhybka vyvolaná konstantním zatížením, ruční výpočet	30
Graf 7: Výhybka pro konstantní zatížení, Ansys 14.0.....	30
Graf 8: Graf rychlosti pro konstantní zatížení bez tlumení, ruční výpočet	31
Graf 9: Graf rychlosti pro konstantní zatížení bez tlumení, Ansys 14.0	31
Graf 10: Graf zrychlení pro konstantní zatížení bez tlumení, ruční výpočet.....	32
Graf 11: Graf zrychlení pro konstantní zatížení bez tlumení, Ansys 14.0	32
Graf 12: Výhybka pro konstantní zatížení s tlumením konstrukce, ruční výpočet	34
Graf 13: Výhybka pro konstantní zatížení s tlumením konstrukce, Ansys 14.0.....	34
Graf 14: Rychlost konstantního zatížení s tlumením konstrukce, ruční výpočet.....	35
Graf 15: Rychlost konstantního zatížení s tlumením konstrukce, Ansys 14.0	35
Graf 16: Zrychlení konstantního zatížení s tlumením konstrukce, ruční výpočet	36
Graf 17: Zrychlení konstantního zatížení s tlumením konstrukce, Ansys 14.0	36
Graf 18: Výhybka pro konstantní zatížení s lineárním náběhem bez tlumení, ruční výpočet	39
Graf 19: Výhybka pro konstantní zatížení s lineárním náběhem bez tlumení, Ansys 14.0	39
Graf 20: Rychlost pro konstantní zatížení s lineárním náběhem bez tlumení, ruční výpočet	40
Graf 21: Rychlost pro konstantní zatížení s lineárním náběhem bez tlumení, Ansys 14.0	40
Graf 22: Zrychlení pro konstantní zatížení s lineárním náběhem bez tlumení, ruční výpočet	41
Graf 23: Zrychlení pro konstantní zatížení s lineárním náběhem bez tlumení, Ansys 14.0	41
Graf 24: Výhybka pro konstantní zatížení s lineárním náběhem s tlumením, ruční výpočet	44
Graf 25: Výhybka pro konstantní zatížení s lineárním náběhem s tlumením, Ansys 14.0.....	44
Graf 26: Rychlost pro konstantní zatížení s lineárním náběhem s tlumením, ruční výpočet	45
Graf 27: Rychlost pro konstantní zatížení s lineárním náběhem s tlumením, Ansys 14.0	45



Graf 28: Zrychlení pro konstantní zatížení s lineárním náběhem s tlumením, ruční výpočet	46
Graf 29: Zrychlení pro konstantní zatížení s lineárním náběhem s tlumením, Ansys 14.0.....	46
Graf 30: Výchylka pro harmonické zatížení bez tlumení, ruční výpočet	48
Graf 31: Výchylka pro harmonické zatížení bez tlumení, Ansys 14.0.....	48
Graf 32: Rychlost pro harmonické zatížení bez tlumení, ruční výpočet	49
Graf 33: Rychlost pro harmonické zatížení bez tlumení, Ansys 14.0.....	49
Graf 34: Zrychlení pro harmonické zatížení bez tlumení, ruční výpočet	50
Graf 35: Zrychlení pro harmonické zatížení bez tlumení, Ansys 14.0.....	50
Graf 36: : Výchylka pro harmonické zatížení s tlumením, ruční výpočet.....	52
Graf 37: Výchylka pro harmonické zatížení s tlumením, Ansys 14.0.....	52
Graf 38: : Rychlost pro harmonické zatížení s tlumením, ruční výpočet.....	53
Graf 39: Rychlost pro harmonické zatížení s tlumením, Ansys 14.0.....	53
Graf 40: Zrychlení pro harmonické zatížení s tlumením, ruční výpočet.....	54
Graf 41: Zrychlení pro harmonické zatížení s tlumením, Ansys 14.0.....	54
Graf 42: Graf pro zjištění vlastních čísel u spojitého nosníku, ruční výpočet.....	56
Graf 43: Výchylka vyvolaná konstantním zatížením na spojitém nosníku řešeném jako třístupňová soustava, odezva ve středním poli, ruční výpočet.....	60
Graf 44: Výchylka vyvolaná konstantním zatížením na spojitém nosníku řešeném jako třístupňová soustava, odezva ve středním poli, Ansys 14.0	60
Graf 45: Výchylka vyvolaná konstantním zatížením na spojitém nosníku řešeném jako třístupňová soustava, odezva v prvním poli, ruční výpočet.....	61
Graf 46: Výchylka vyvolaná konstantním zatížením na spojitém nosníku řešeném jako třístupňová soustava, odezva v prvním poli, Ansys 14.0	61
Graf 47: Výchylka vyvolaná konstantním zatížením na spojitém nosníku řešeném jako třístupňová soustava, odezva v krajním poli, ruční výpočet.....	63
Graf 48: Výchylka vyvolaná konstantním zatížením na spojitém nosníku řešeném jako třístupňová soustava, odezva v krajním poli, Ansys 14.0.....	63
Graf 49: Výchylka vyvolaná konstantním zatížením na spojitém nosníku řešeném jako třístupňová soustava, odezva ve středním poli, ruční výpočet.....	64



Graf 50: Výhybka vyvolaná konstantním zatížením na spojitém nosníku řešeném jako třístupňová soustava, odezva ve středním poli, Ansys 14.0 64

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 1: Průběh a) posouvající síly a b) ohybového momentu na spojitém nosníku od vlastní tíhy, Scia Engineer 14.....	5
Obrázek 2: Průběh a) posouvající síly a b) ohybového momentu na spojitém nosníku od zatížení silou v krajním poli, Scia Engineer 14	6
Obrázek 3: Průběh a) posouvající síly a b) ohybového momentu na spojitém nosníku od zatížení silou ve středním poli, Scia Engineer 14	7
Obrázek 4: Příčný řez mostovkou	11
Obrázek 5: podélný profil mostu.....	11
Obrázek 6: Síť konečných prvků na obloukové konstrukci.....	12
Obrázek 7: Síť konečných prvků na rovinné konstrukci	12
Obrázek 8: Schéma jednostupňového modelu	13
Obrázek 9: První vlastní frekvence prostého nosníku $f = 3,19521$ Hz, Ansys 14.0	14
Obrázek 10: Výpočtový model třístupňové soustavy.....	15
Obrázek 11: Silová rovnováha v hmotném bodě	15
Obrázek 12: Schéma modelu	15
Obrázek 13: Popis zjištění tuhosti pro třístupňový model.....	16
Obrázek 14: První vlastní frekvence prostého nosníku, Ansys 14.0.....	20
Obrázek 15: Druhá vlastní frekvence prostého nosníku, Ansys 14.0	20
Obrázek 16: Třetí vlastní frekvence prostého nosníku, Ansys 14.0.....	21
Obrázek 17: Vlastní tvary konstrukce a) U_1 , b) U_2 , c) U_3	23
Obrázek 18: Uvažovaný dynamický model spojitého nosníku.....	55
Obrázek 19: První vlastní frekvence spojitého nosníku, Ansys 14.0.....	57
Obrázek 20: Druhá vlastní frekvence spojitého nosníku, Ansys 14.0.....	57
Obrázek 21: Třetí vlastní frekvence spojitého nosníku, Ansys 14.0.....	58
Obrázek 22: Vlastní tvary ručního výpočtu a) U_1 , b) U_2 , c) U_3	58



SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

1. Chopra A.K.: Dynamics of Structures, Theory and Applications to Earthquake Engineering, Prentice Hall.
2. Baťa M., Plachý V., Trávníček F.: Dynamika stavebních konstrukcí.
3. Němec, I. at all. (2010) Finite Elements Analysis of Structures. Aachen: Shaker Verlag.
4. Normy: ČSN EN 1998-1: Eurocode 8
5. doc. Ing. V. Salajka, CSc.: Dynamika přednášky 2009.pdf
6. Prof. Ing. Dr. V. Koloušek: Dynamika stavebních konstrukcí



SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK

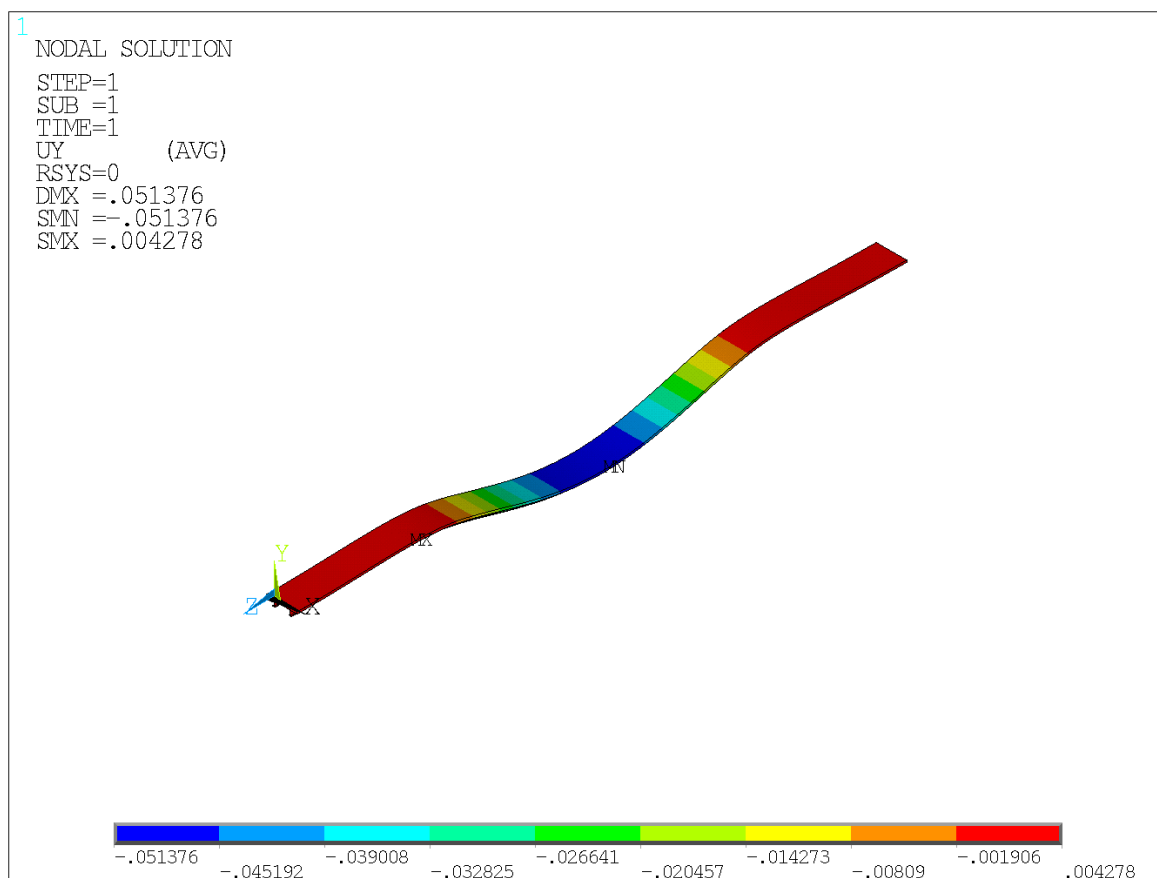
A_c	průřezová plocha
C	modální matice tlumení
C	matice tlumení
A_s	plocha závěsu
det	determinant
e	Eulerovo číslo
E	modul pružnosti
F	síla
$F_{(t)}$	modální zatěžovací vektor
$f_{(t)}$	vektor zatížení
f_1	vlastní frekvence hmotného bodu m_1
f_2	vlastní frekvence hmotného bodu m_2
f_3	vlastní frekvence hmotného bodu m_3
G	tíha
G'	tíha snižená o nadlehčení
g_1	ostatní stálé zatížení
I_y	moment setrvačnosti k ose y
K	modální matice tuhosti
K	matice tuhosti
k_1	tuhost v místě hmotného bodu m_1
k_2	tuhost v místě hmotného bodu m_2
k_3	tuhost v místě hmotného bodu m_3
k	účinnost zatížení z časového diagramu
L	rozpětí
L_i	rozpětí pole i
M	modální matice hmotnosti
M	matice hmotnosti
m_1	hmotný bod 1



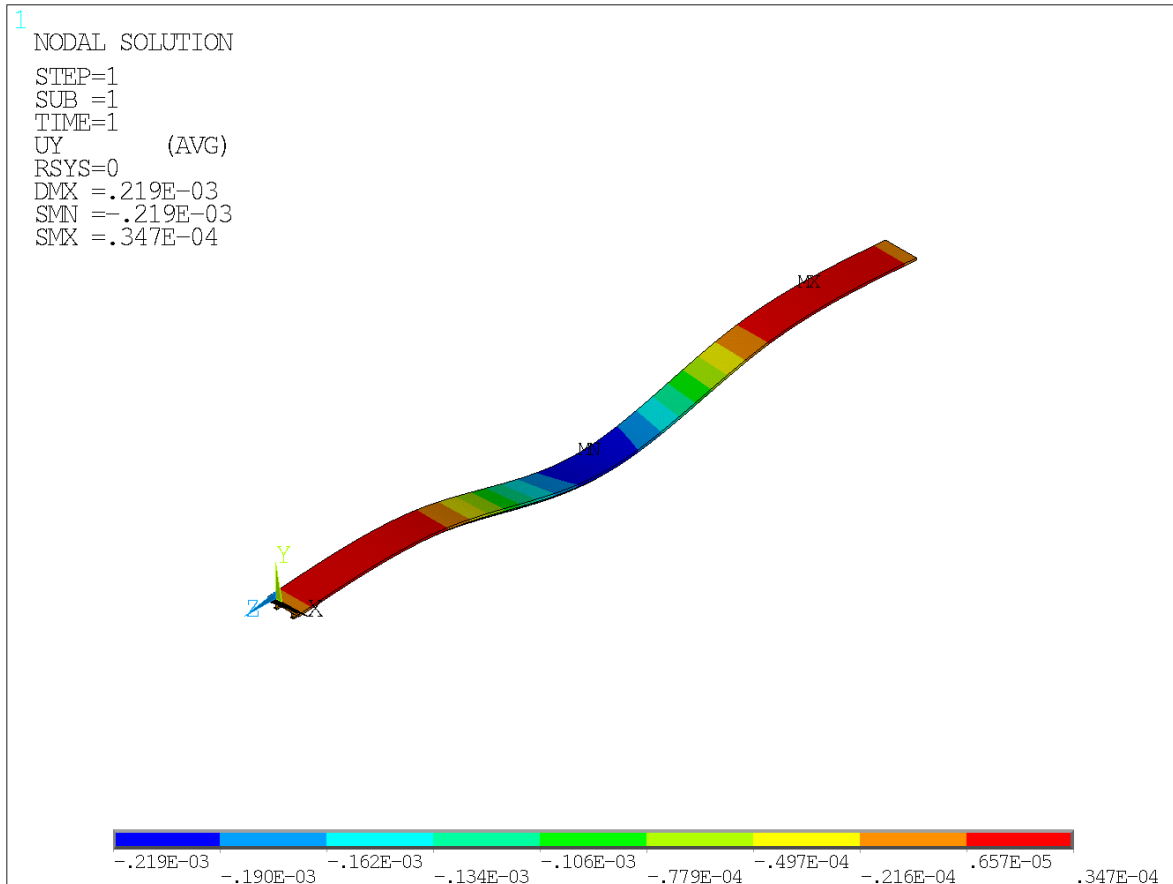
m_2	hmotný bod 2
m_3	hmotný bod 3
p_0	silové zatížení
r	přirozené číslo
t, t'	čas
t_r	čas, ve kterém dochází ke změně typu zytížení
T	perioda
t_{max}	maximální čas
Δt	velikost časového kroku
U	zatěžovací vektor
\mathbf{u}	vektor přemístění
\mathbf{u}	vektor rychlosti
$\mathbf{\ddot{u}}$	vektor zrychlení
$\mathbf{u}_{(t)}$	fyzické souřadnice
$w_{\frac{l}{2}}$	průhyb v polovině nosníku
x, y, z	osy kartézského souřadnicového systému
a, β	koeficienty útlumu
γ	objemová tíha
$\boldsymbol{\eta}_{(t)}$	hlavní (přirozené souřadnice)
π	Ludolfovo číslo
ν	Poissonův součinitel
ζ	útlum
φ_{ba}	úhel pootočení vlivem daného zatížení konstrukce
$\boldsymbol{\phi}$	modální matice
$\boldsymbol{\phi}^T$	transformovaná modální matice
ϕ	vlastní tvar
$\boldsymbol{\Omega}$	úhlová frekvence harmonického budícího zatížení
ω	vlastní úhlová frekvence



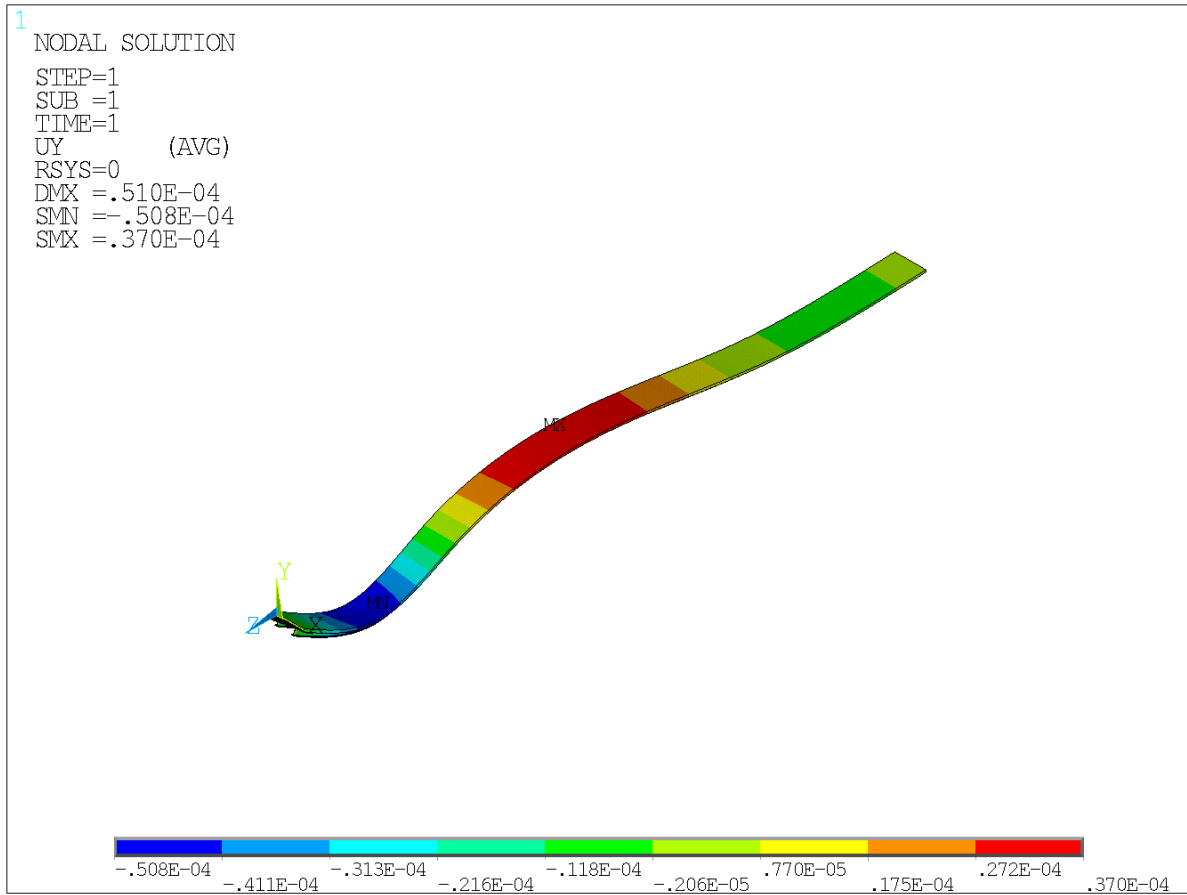
PŘÍLOHY



Obrázek I: Průhyb konstrukce od vlastní tíhy, Ansys 14.0



Obrázek II: Průhyb konstrukce od síly 1kN působící ve středním poli, Ansys 14.0



Obrázek III: Průhyb konstrukce od síly 1kN působící v krajním poli, Ansys 14.0