

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

MATEMATICKÝ MODEL ROZLOŽENÍ TVRDOSTI NA OPĚRNÉM VÁLCI

MATHEMATICAL MODEL OF HARDNESS DISTRIBUTION INSIDE BACKING ROLL

DOKTORSKÁ PRÁCE
DOCTORAL THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

Ing. ADAM KRACÍK

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

doc. RNDr. BOHUMIL MAROŠ, CSc.

BRNO 2011

Abstrakt

Cílem této práce je získat detailní znalosti o rozložení tvrdosti v prvních 60 mm pod povrchem opěrného válce. Za tímto účelem je vyvinuta metoda pro získání vícerozměrné polynomické regrese a následně napsán počítačový program pro její zpracování.

Abstract

The aim of this work is to get the best detailed knowledge about hardness distribution in first 60 mm below the surface of backing roll. To this end, a method for obtaining multi-dimensional polynomial regression was developed and then a computer program for its processing was written.

Klíčová slova

opěrný válec, ocel, tvrdost, vícenásobná lineární regrese, polynomická regrese, metoda Monte-Carlo

Key words

backing roll, steel, hardness, multiple linear regression, polynomial regression, Monte-Carlo method

Bibliografická citace mé práce:

KRACÍK, A. Matematický model rozložení tvrdosti na opěrném válci. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2011. 59 s. Vedoucí dizertační práce doc. RNDr. Bohumil Maroš, CSc.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem dizertační práci zpracoval samostatně dle pokynů vedoucího dizertační práce a s použitím uvedené literatury.

8.5.2011

Poděkování

Úvodem chci poděkovat za ochotu a cenné rady při konzultacích

Doc. RNDr. Bohumilu Marošovi, Csc.

Doc. Ing. Františku Jandošovi, Csc.

Ing. Jiřímu Maděříčovi

OBSAH

<i>Úvod</i>	5
<i>1. Technická část</i>	6
1.1. Metody určování tvrdosti	6
1.2. Přehled vnikacích zkoušek	7
1.2.1. Zkouška podle Brinella (ČSN 42 0371)	8
1.2.2. Zkouška podle Ludwika	9
1.2.3. Zkouška podle Rockwella (ČSN 42 0373)	10
1.2.4. Zkouška podle Vickerse (ČSN 42 0374)	12
1.3. Srovnání zkoušek tvrdosti	14
1.4. Přesnost zkoušek tvrdosti	14
1.5. Postup při měření tvrdosti	15
1.6. Průběh experimentu	15
<i>2. Vytvoření matematického modelu</i>	22
2.1. Model a modelování	22
2.2. Regresní analýza	22
2.3. Lineární regresní model	23
2.4. Polynomická regrese více proměnných	27
2.5. Vícenásobná regrese s použitím metody Monte Carlo	31
<i>3. Vyhodnocení experimentu</i>	33
3.1. Regresní funkce jedné proměnné	33
3.2. Data a jejich třídění	38
3.3. Postup výpočtu pomocí metody Monte Carlo	39
3.4. Zobrazení interpolačních a regresních ploch	40
<i>4. Závěr</i>	60
<i>5. Seznam použitých zdrojů</i>	62
<i>Seznam příloh</i>	63

Úvod

Tato práce je součástí snahy naší společnosti zvýšit kvalitu a spolehlivost v oblasti výroby kalených ocelových hutních válců. Tato snaha by měla zajistit dlouhodobou konkurenceschopnost v tomto oboru a přežití na trhu i po očekávaném nástupu nových konkurentů. Jde zejména o čínské konkurenty, dotované vládou, kteří dnes výrazně rozšiřují své výrobní kapacity, přičemž díky dotacím nejsou nuceni respektovat vlastní náklady ani zohledňovat ekonomickou návratnost investic. Lze očekávat, že během několika let tito konkurenti nastoupí na světový trh ocelových válců a začnou „válcovat“ ostatní výrobce nízkými cenami, jak se již mnohokrát ukázalo v jiných průmyslových oborech. Jediná možnost obrany proti této strategické hrozbě je v neustálém zlepšování kvality kovaných válců. Jedná se zejména o zvětšení prokalené vrstvy, její rovnoměrnost a tím zvýšení životnosti válce. Možnost nabízení delších záručních dob vyplývající ze zvýšené životnosti výrobku je hodnocená zákazníkem vždy velice kladně.

1. Technická část

1.1. Metody určování tvrdosti

V této části bylo užito [3], [4], [10] a [11].

Tvrdotí rozumíme odolnost povrchových částí hmoty proti místnímu porušení nehomogenním vnikáním cizího tělesa. Jako tvrdá se v obecné mluvě také označuje hmota obtížně obrobitelná reznými nástroji. Při srovnávání různých hmot bohužel shledáváme, že pořadí jejich tvrdosti je různé podle toho, zkoušíme-li je zatlačováním druhého tělesa, rýpáním, obrusem, obráběním rezným nástrojem nebo jinak. Například srovnání čistého stříbra a měkké oceli. Podle denní zkušenosti se jeví stříbro značně měkčí, ale při zkoušce obrusem je za určitých poměrů mnohem odolnější. Tak zjišťujeme, že tvrdost není žádnou fyzikálně definovanou vlastností, nýbrž je výslednicí celé řady vlastností elastických, křehkostí a plasticity, fyzikálně chemických vlastností povrchu a někdy i vlastností chemických a jiných. Protože není určité definice tvrdosti, nemůže být ani jednotné metody jejího určování.

Pevnost definujeme jako největší napětí, jehož je zapotřebí k rozdělení kovu na dvě části. Podle způsobu, jakým se rozdělení provádí, rozlišujeme pevnost v tahu, tlaku, ohybu, stříhu a krutu. Nejúčelnější, a až na zvláštní případy skoro výlučně užívané, je u kovů zkoušení tahem.

Výsledkem každé vnikající zkoušky je určitá trvalá deformace. To je v analogii s pevností v tahu, ovšem s tím velkým rozdílem, že při trhací zkoušce je namáhání v podstatě jednoosé, kdežto při zkoušce tvrdosti vždy trojosé. Přesto je možno očekávat, že srovnávací číslo, jimž tvrdost charakterizujeme, může nějak souviset s pevností kovu. Jakého druhu je tato souvislost, je dáno zkušební metodou a způsobem vyhodnocení výsledku pokusu. Vztah mezi pevností a tvrdostí, byť je přibližný, je hlavní příčinou neobyčejného rozšíření zkoušek tvrdosti. Jednoduchým způsobem a bez vážného porušení výrobku je možno nabýt u houževnatého kovu zkouškou tvrdosti přibližný obraz o jeho pevnosti, což má pro mnohé technologické účely velký význam.

K určování tvrdosti je potřeba druhého tělesa, k jehož vlastnostem se musí také přihlížet. Žádným způsobem nesmí podléhat plastickým deformacím, musí tedy mít co největší tvrdost a mez pružnosti. Ale i pak vznikají při zatlačování deformace pružné. Aby byly co nejmenší, je třeba také požadovat vysoký modul pružnosti. Uvedeným požadavkům vyhovují nejlépe tyto materiály:

	tvrdost HV	modul pružnosti [Mpa]
diamant	9 000 – 13 000	
slínuté karbidy	1 450 – 1 600	$5,5 \cdot 10^5$ až $6,5 \cdot 10^5$
kalené ocele	kolem 900	cca $2 \cdot 10^5$

Místní porušení zkoušeného kovu se může dít několika způsoby, z nichž uvedu jen ty, které nabyly technického významu. Jsou to tyto:

(1) Zatlačování nástroje z tvrdé hmoty – indentoru – klidnou silou ve směru kolmém ke zkoušenému povrchu. Zkoušky tohoto druhu, označované jako zkoušky vnikací, jsou nejčastější, neboť jsou nejpřesnější, jednoduše proveditelné a dobře reprodukovatelné.

(2) Vnikání inventoru je způsobeno dynamicky, rázem vedeným kolmo k povrchu kovu. Mluvíme pak o zkouškách rázových. Tento způsob je mnohem méně vhodný než předešlý a užívá se jen ve zvláštních případech.

(3) Porušení je dosaženo pohybem ostrého nástroje rovnoběžně s povrchem zkoušeného kovu tak, aby se vytvořila rýha. To jsou zkoušky vrypové. Vrypová zkouška je namíště pro hmoty křehké, zvláště minerály, ale pro kovy je vhodná jen ve zvláštních případech.

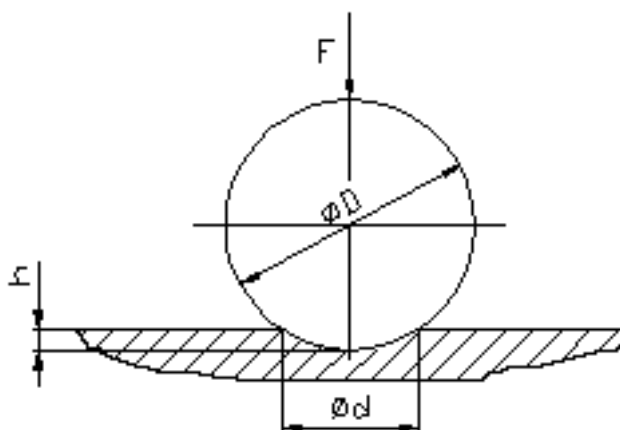
Tvrdost, ať již byla zjištěna jakoukoli technickou metodou, je pouhým číslem srovnávacím a jako takové je číslem nepojmenovatelným. Připisovat k němu údaj jednotek není správné a může vést k omylům.

1.2. Přehled vnikacích zkoušek

Podle požadavků praxe se rozlišilo několik druhů vnikacích zkoušek, které se od sebe liší tvarem a materiálem identitu, velikostí zatížení a způsobem číselného vyhodnocení. Uvedu pouze ty zkoušky, které se v praxi nejvíce používají, a uvedu je podle časového pořadí jejich vzniku. Podrobnější popis zkoušek je možné najít v [4].

1.2.1. Zkouška podle Brinella (ČSN 42 0371)

Podstatou Brinellovy metody je zatlačování ocelové kalené a leštěné kuličky průměru D do vyhlazené plochy zkoušeného kovu určitým zatížením F (obr. 1.2.1). Tvrdost je vyjádřena jako podíl zatížení a kulové plochy vzniklého vtisku S .



Obr.1.2.1. Schéma zkoušky podle Brinella

$$HB = \frac{P}{F_s} \quad (1.1)$$

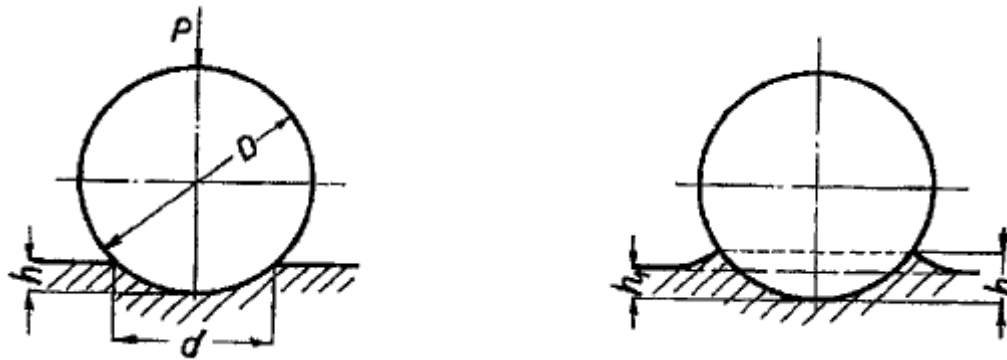
Je-li d průměr a h hloubka vtisku, je jeho plocha

$$S = \pi Dh = \frac{1}{2} \pi D \left[D - \sqrt{(D^2 - d^2)} \right] \quad (1.2)$$

Tyto vztahy platí pro zatížení $F[kp]$. Vztah mezi zatížením $F[kp]$ a $F[N]$ je

$$F[kp] = 0,102 F[N] \quad (1.3)$$

Po provedení zkoušky je tedy potřeba změřit buď průměr, nebo hloubku vtisku. Měření průměru je pomocí mikroskopu dobře možné až na setiny mm i přesněji, kdežto přesné změření hloubky je mnohem obtížnější.



Obr.1.2.2. Deformace zkoušeného kovu při zatížení kuličkou

Již Brinell zjistil, že tvrdost je závislá na velikosti zatížení, a proto normoval podmínky zkoušky. Pro ocel stanovil průměr kuličky 10 mm a zatížení 3000 kg, což bylo převzato do všech pozdějších norem. Jsme však omezeni požadavkem, že průměr vtisku musí ležet v určitých mezích. Je-li kov příliš tvrdý, pak vzniká malý vtisk, hrana je neostrá a průměr se nedá změřit s dostatečnou přesností. Je-li naopak kulička zatlačena příliš hluboko, vytvoří se tak velký val, že se výsledky rovněž zmenšují a zkouška není spolehlivá. Brinellovy tabulky bývají obvykle od průměru d 2,0 mm do 6,0 mm, ale u zkoušek, které mají být přesné, je dolní mez mnohem větší. Pro velké tvrdosti se Brinellova zkouška nehodí a pro kovy měkké je zapotřebí normovat zatížení menší, ale pak nejsou již výsledky srovnatelné se zkouškou normální. Nemáme tedy jednotné Brinellovy stupnice tvrdosti od kovů nejtvrdších k nejměkčím, což je její nevýhodou.

1.2.2. Zkouška podle Ludwika

Přes rychlé rozšíření Brinellovy zkoušky byla pocitována její velká nevýhoda a to, že tvrdost je závislá na podmínkách pokusu. To vedlo Ludwika k nahrazení kuličky kuželem, neboť při kuželovém indentoru zůstává při všech zatíženích poměr tangenciálního a normálního napětí stejný a číslo tvrdosti je na velikosti zatížení nezávislé.

Ludwik užívá kužele z kalené ocele s vrcholovým úhlem 90° a z důvodů praktických zaobluje jeho vrchol malým poloměrem, obvykle 0,2 mm.

Původně měřil Ludwik hloubku vtisku h od původní roviny zkoušeného kovu pomocí hloubkoměru přímo při zatěžování. Tvrdost definuje jako u Brinella (1.1) zatížením na jednotku plochy kuželového vtisku. Je pak dána vzorcem

$$HL = 0,225 \frac{P}{h^2} \quad (1.4)$$

Později se přešlo k měření průměru vtisku d , čímž docházíme ke vzorci

$$HL = 0,9 \frac{P}{d^2} \quad (1.5)$$

Zatížení doporučuje Ludwik volit podle tvrdosti tak, aby vznikl důlek přiměřené velikosti. Pro ocel to bývá např. 1000 až 5000 kg.

Stejně jako zkouška Brinellova se nehodí ani zkouška Ludwikova na ocele kalené. Ale dává jednotnou stupnici tvrdosti od nejměkčích kovů až po ocele asi do 100 kg na mm² pevnosti bez ohledu na velikost zatížení. Přes tuto výhodu se Ludwikova zkouška neujala. Příčina je patrně ryze praktická. Při Brinellově zkoušce užíváme normálních kuliček vyráběných na kuličková ložiska ve velkém množství s velmi přesnými rozměry, dokonale vyleštěným povrchem a stejnoměrnou tvrdostí. Ludwikův kužel se musí vyrábět v malém, výroba je mnohem dražší a jakost není nikdy tak rovnoměrná jako u kuliček. Zaoblení hrotu kužele nějakým, byť malým, poloměrem ovlivňuje výsledek při malém vtisku. Při zkouškách tvrdších kovů hrot dosti trpí a snadno se opotřebí nebo poruší. Přesto má Ludwikova metoda svůj význam, neboť ukázala cestu k vývoji nových moderních metod, u nichž byl ocelový hrot nahrazen diamantem.

1.2.3. Zkouška podle Rockwella (ČSN 42 0373)

Z předchozího textu plyne, že žádná z dosud uvedených metod nedovoluje určovat tvrdost kalených ocelí a podobných tvrdých kovů.

První opravdu dobrá a hojně používaná zkouška tvrdosti kalených ocelí, pocházející od Rockwella, je založena na myšlenkách Ludwikových. Rockwell však použil indentotu z diamantu a zatížení podstatně menšího než Ludwik. Protože tření při vnikání indentoru je tím menší, čím větší je jeho vrcholový úhel, volil Rockwell kužel s vrcholovým úhlem 120°.

Pro snadnou možnost poškození není ani tu možno diamant vybrousit do ostrého hrotu, nýbrž vrchol se zaobljuje poloměrem 0,2 mm. Tím vznikají určité nesrovnalosti u vtisků zcela malých

Metoda je vypracována záměrně pro sériové kontrolní zkoušky kalených, zušlechťovaných nebo jinak tepelně zpracovaných ocelí v kalírnách a přijímacích kontrolních odděleních. Zkouška má proto být co nejrychlejší a tak jednoduchá, aby ji mohla provádět pomocná síla bez odborného vzdělání.

Již Ludwik poznal nejistotu nulové polohy hloubkoměru a navrhoval malé předběžné zatížení. I tuto myšlenku převzal Rockwell a normoval předběžné zatížení 10 kg a zkušební zatížení 150 kg. Hloubka vtisku se měří tak, že při zatížení 10 kg se ustaví hloubkoměr na nulu, zatíží se 150 kg, po ustálení ručičky se opět odlehčí na počátečních 10 kg a odečte se hloubka vtisku. Kdyby se odčítalo při plném zatížení, jevila by se tvrdost značně menší nejen o pružné deformace vtisku, ale též o veškeré pružné deformace stojanu stroje, podložky atd.

Dělení hloubkoměru je takové, že jeden dílek odpovídá 0,002 mm. Aby se odstranily veškeré výpočty, nemá však stupnice hloubkoměru dělení délkové, nýbrž čísla uvádějí přímo Rockwellovy stupně tvrdosti.

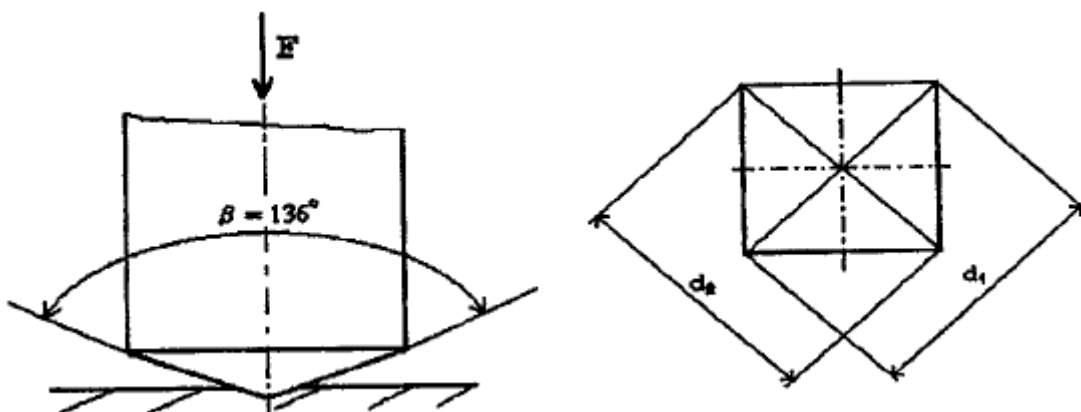
Ani Rockwell nedosáhl jednotné stupnice tvrdosti od nejměkčích kovů k nejtvrdějším. Diamant nemůže být z cenových důvodů příliš rozměrný, čímž je hloubka vtisku omezena. Nejměkčí kov, který se takto dá zkoušet, odpovídá pevnosti asi 80 kg/mm^2 (800 MPa). Stupnice pro zkoušku kuželem můžeme dle naší normy použít od HRC 20. Doporučuje se ale užívat již až od HRC 30, při menších tvrdostech jsou výsledky již málo přesné. Pro zkoušky měkčích kovů se vrací Rockwell k ocelové kuličce, ovšem tak malé (obvyklý průměr je $1/16''=1,59 \text{ mm}$), aby bylo možno požit malých zatížení, pro něž je přístroj dimenzován. Kulička se zatěžuje opět předběžně 10 kg a zkušební zatížení činí pouze 100 kg. Odečítání tvrdosti je stejné jako dříve, ale stupnice je jiná než pro diamant, a proto je nutno užít různých označení. U nás je normováno označení HRC pro zkoušku diamantovým kuželem a HRB pro zkoušku ocelovou kuličkou.

Ale ani tyto dvě stupnice nevyhovují ve všech případech. U nejtvrdějších kovů je při zatížení 150 kg nebezpečí, že se diamant poškodí. V takových případech se volí zkušební zatížení pouze 60 kg a výsledek se označuje HRA.

Všech tří zatížení 150, 100, 60 kg, pro něž jsou Rockwellovy tvrdoměry stavěny, se ke zvláštním účelům užívá jak pro zkoušky diamantovým kuželem, tak i pro zkoušky kuličkami různých průměrů od $1/16$ až do $1/2$ palce. Celkem je 30 Rockwellových stupnic, což nepřispívá k přehlednosti. Rockwell podřídil jednotnost stupnice praktické potřebě v různých průmyslových oborech.

1.2.4. Zkouška podle Vickerse (ČSN 42 0374)

Ve stejné době, jako v Americe zkouška Rockwellova, vznikla v Anglii jiná vnikající zkouška, kterou popsali Smith a Sandland. V Evropě je známa jako zkouška Vickersova podle tvrdoměru konstruovaného známou firmou Vickers, v USA je obvykle označována diamond pyramid hardness test.



Obr.1.2.3. Schéma zkoušky podle Vickerse

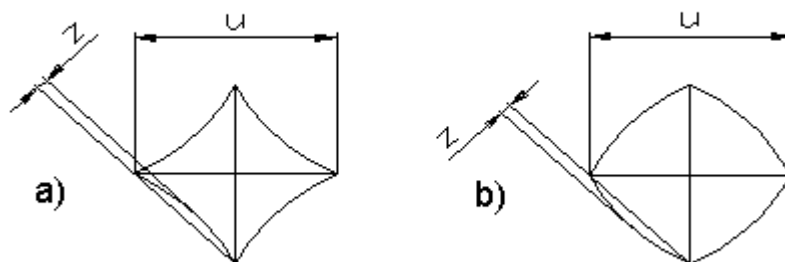
Indertorem je čtyřboký diamantový jehlan (pyramida) s vrcholovým úhlem stěn $\alpha = 136^\circ$, takže vznikají čtyřhranné vtisky. Tento úhel byl volen tak, aby tření co nejméně ovlivňovalo výsledek, a jednak také proto, aby se při středních rozměrech vtisku Vickersova tvrdost příliš neodlišovala od tvrdosti Brinellovy. Po provedení vtisku se měří jeho úhlopříčky a počítá se jejich aritmetický průměr u . Pomocí měřicího mikroskopu je měření provedeno s větší přesností než měření průměru vtisku kruhového. Výpočet tvrdosti je stejně jako u Brinella (1.1) podle vzorce

$$HV = \frac{F}{S}, \text{ kde } S = \frac{u^2}{2 \sin \frac{1}{2} \alpha}, u = \frac{d_1 + d_2}{2} \quad (1.6)$$

takže

$$HV = 1,8544 \frac{F}{u^2} \quad (1.7)$$

Platnost (1.7) není však zcela přesná, a to z toho důvodu, že zpevnění není u jehlanu stejnoměrné. Při hranách je jiné než uprostřed ploch. Následkem toho nemusí být průměr vtisku přesně čtvercový, nýbrž strany mohou být buď vyduté, nebo vypouklé.



Obr.1.2.4. Tvary Vickerových vtisků: vydutý a vypouklý

Vyduté vtisky vznikají u měkkých, nezpevněných kovů, kdežto vtisky vypouklé dávají kovy zpevněné. Na tuto okolnost upozornil poprvé Fischer, který zjistil, že chyby mohou činit až 10%. Navrhuje proto modifikovaný vzorec

$$HV = 0,18903 \frac{F}{(u \pm z\sqrt{2})^2} \quad (1.8)$$

kde je z největší odchylka od přímkového průměru.

Výsledek zkoušky je závislý na velikosti zatížení. V naší normě se doporučují zatížení 1, 3, 5, 10, 30 a 50 kg, pro něž jsou v normě sestaveny tabulky. Při zatížení 1 kg je však přesnost již tak malá, že není vhodné ho užívat, není-li k tomu zvláštní důvod. Vickersova zkouška je ze všech dosavadních metod jediná, která splňuje všechny teoretické požadavky. Dává jednotnou stupnici tvrdosti od nejměkčích kovů až po nejtvrďší kalené ocele a tvrdost je na velikosti zatížení prakticky nezávislá. Poměr čísel tvrdosti různých kovů odpovídá skutečným poměrům tvrdosti. Např. kov s tvrdostí 200 má dvojnásobnou tvrdost než kov s tvrdostí 100. U čísel získaných jinými metodami tomu tak není. Další výhodou je, že vtisky jsou poměrně malé, takže se ani čistě obrobená plocha příliš nepoškozuje.

Jen u kovů velmi hrubozrnných nebo nehomogenních, jako je šedá litina, ložiskové kompozice apod., je malý vtisk nevhodný a nelze obdržet jednoznačné výsledky. Pro takové případy se Vickersova metoda nehodí.

1.3. Srovnání zkoušek tvrdosti

Každá ze tří dnes nejvíce rozšířených zkoušek tvrdosti má své opodstatnění a výhody pro určité případy.

Zkouška Brinellova užívá velkých zatížení, a tedy velkých vtisků, což má určité výhody. Zkoušce se podrobují větší množství materiálu, a tím se získávají lepší průměry. Proto se zvláště dobře hodí na kovy lité, které mají zpravidla hrubší a nestejněměrnější krystalizaci. Druhou výhodou je, že nevyžaduje tak čisté obrobení povrchu, a že není tak citlivá na přesné dodržování správných zkušebních podmínek. Také indentor je levný a snadno nahraditelný. Hodí se dobře jako zkouška dílenská ke kontrole správné volby materiálu, tepelného zpracování apod.

Hlavní význam zkoušky Rockwellovy je rychlost a jednoduchost provedení, takže se stala typickou metodou pro zkoušky hromadné. U nás je nejčastější zkouška diamantovým kuželem ke kontrole tepelného zpracování, a to jak na nástroje, tak i na části konstrukční. Ani tato metoda neklade zvláštní požadavky na bezvadné obrobení povrchu. Zvláště dobře se hodí Rockwellova metoda pro kontrolu při automatické výrobě.

Zkouška Vickersova je vysloveně zkouškou laboratorní, vhodnou pro přesnější práce kontrolní, přijímací, výzkumné apod. Proto musí být povrch vzorku velmi čistě vyhlazen. Je stejně dobře použitelná pro kalené ocele, jako pro měkké kovy neželezné. Nehodí se však na kovy s hrubou krystalizací, protože jsou vtisky příliš malé.

1.4. Přesnost zkoušek tvrdosti

Nejpřesnější je svou podstatou zkouška Vickersova. Jestliže je tvrdoměr bezvadně udržován a pravidelně kontrolován, můžeme při zatížení aspoň 10 kg a provedení tří vtisků dosáhnout přesnosti u menších tvrdostí asi ± 2 ; s rostoucí tvrdostí stoupá nepřesnost až na asi ± 4 až 5. Při menších zatíženích se přesnost přiměřeně zmenšuje.

U zkoušky Brinellovy je možno počítat u tří vtisků za podmínek 10/3000/10 podle konstrukce stroje a pečlivosti měření s přesností ± 2 až 4. Při menších kuličkách a technických zkouškách méně. Různé přenosné tvrdoměry nedovolují přesnost větší než ± 10 .

Metoda Rockwellova je již svou podstatou jen hrubší metodou technickou, u níž nelze spolehlivě počítat s větší přesností než asi ± 2 jednotky Rockwellovy stupnice u diamantového kužele a ± 3 jednotky u kuličky. Při malých tvrdostech jsou to již chyby značné. U automaticky pracujících strojů jsou poměry příznivější.

1.5. Postup při měření tvrdosti

Měření tvrdosti probíhalo přímo ve výrobní hale za pomoci přístroje EQUOTIP. Přístroj je určen pro měření kovových materiálů, jejichž tvrdost se pohybuje od velmi nízkých do velmi vysokých hodnot a lze provést v jakékoli poloze. Měření tvrdosti EQUOTIPEM je dynamická metoda, spočívající na principu měření energie (EQUO=Energie – QUO tient). V průběhu měření nárazové tělísko, vybavené kulově tvarovaným zkušebním dotykem z tvrdokovu, naráží silou pružiny proti zkušebnímu povrchu, od něhož se odráží. Rychlost nárazu a odrazu jsou bezdotykově měřeny přesně v okamžiku, kdy kulově tvarovaný měřicí dotek je cca 1 mm od zkoušeného povrchu. Toto je provedeno tak, že v nárazovém tělísku zabudovaný permanentní magnet prochází při zkušebním nárazu cívkou a indukuje při pohybu vpřed a vzad elektrické napětí, které je úměrné rychlostem pohybu. Naměřené hodnoty odvozené z rychlostí nárazu a odrazu jsou zpracovány v ukazovacím zařízení na čísle tvrdosti L. Číslo L se dále přepočítá pomocí převodních tabulek na jiné měřicí metody, v našem případě na tvrdost podle Brinella (HB). Měřicí přesnost Eqt při přepočtu hodnot tvrdosti L na HB je střední převodní odchylka $\pm 3\%$ až $\pm 15\%$, v závislosti na měřícím rozsahu.

1.6. Průběh experimentu

Válec byl upevněn na horizontální frézu a na jeho těle bylo rozměřeno 10 bodů na přímce tak, že vzdálenosti mezi nimi byly shodné, stejně jako vzdálenost krajních bodů od kraje těla válce. V těchto bodech byla změřena tvrdost válce přístrojem EQUOTIP, jak je popsáno výše. Nutno dodat, že v každém měřícím bodě byla tvrdost změřena 3krát a výsledná hodnota tvrdosti je aritmetickým průměrem těchto tří měření. Poté byl v oblasti měření tvrdosti z povrchu válce odfrézován pruh o šířce asi 150 mm a hloubce 1 mm. Na této

odfrézované ploše se opět provedlo měření tvrdosti. Cyklus odfrézování 1 milimetru hloubky válce a měření hodnot tvrdosti na odfrézované ploše válce se opakoval až do hloubky 60 mm. Poté byl válec pootočen o 60 stupňů a postup rozměření bodů a měření tvrdosti se opakoval. Válec byl znova pootočen o 60 stupňů a vše se opakovalo, dokud nebyl válec otočen o 360 stupňů, tedy do své výchozí polohy.

Na obrázku 1.6.1. vidíme data sesbíraná z prvních 6 milimetrů úběru. Pozice každé naměřené hodnoty tvrdosti je definována:

- a) hloubkou úběru – první sloupec
- b) úhlem otočení – druhý sloupec
- c) vzdáleností od okraje válce – čtvrtý řádek (číslo 135 znamená vzdálenost 135 mm od levého okraje válce, číslo 270 znamená vzdálenost 270 mm od levého okraje válce, ..., číslo 1350 znamená vzdálenost 1350 mm od levého okraje válce)

Rozměry válce:

Délka válce $x = 5640$ mm

Délka pracovní části válce $l = 1650$ mm

Průměr válce $D = 1510$ mm

Hmotnost válce $m = 35\,820$ kg

Naměřená data jsou k dispozici na přiloženém CD.

Fotografie:

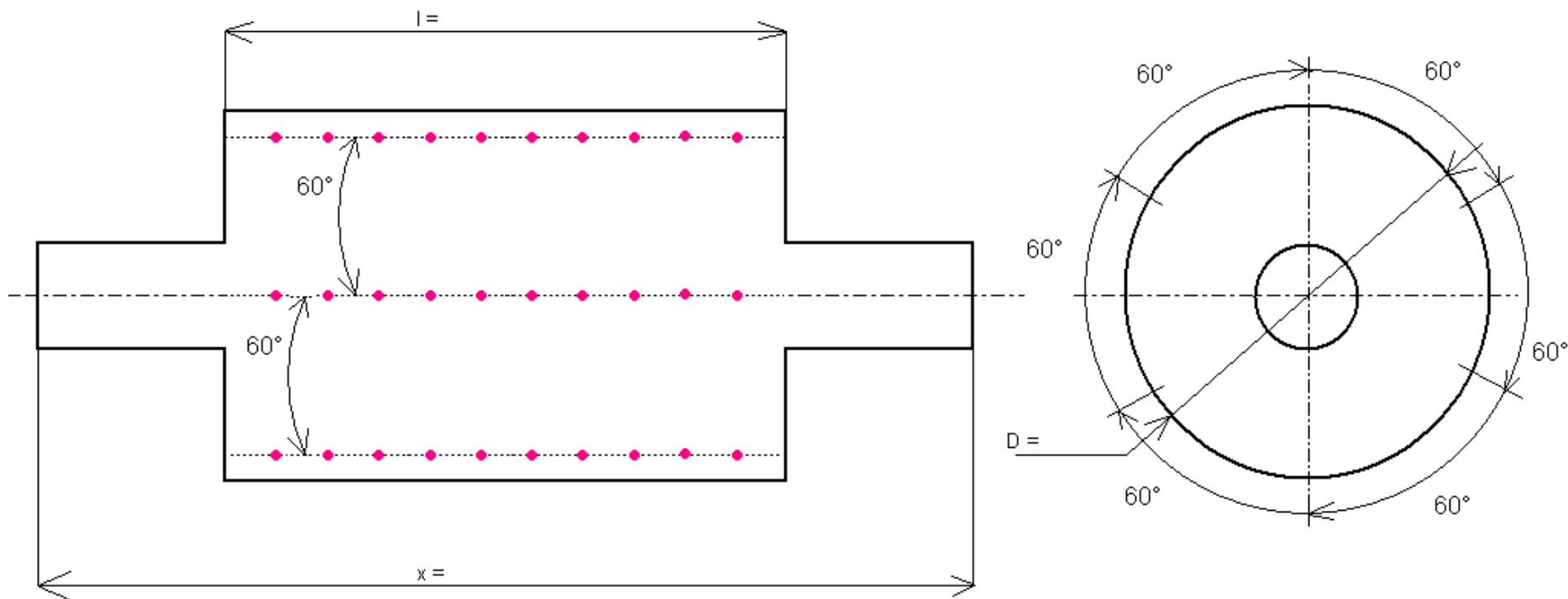
str.19 – frézování opěrného válce

str.20 – označení bodů k měření a úhlů otočení

str.21 – měření tvrdosti přístrojem EQUOTIP

Tvrдость podle Brinella											
úběř (mm)	úhel otočení	pozice měření									
		1/11 I 135	2/11 I 270	3/11 I 405	4/11 I 540	5/11 I 675	6/11 I 810	7/11 I 945	8/11 I 1080	9/11 I 1215	10/11 I 1350
1	0°	482	487	491	525	512	503	516	517	508	501
1	60°	491	491	494	576	517	492	530	512	499	516
1	120°	507	501	514	592	523	505	525	525	505	505
1	180°	517	521	530	590	525	519	555	543	510	507
1	240°	507	521	527	600	523	519	572	527	527	514
1	300°	496	510	519	570	521	499	530	499	505	503
2	0°	508	519	496	501	521	514	514	510	498	492
2	60°	508	519	503	503	510	508	514	499	491	499
2	120°	525	530	514	479	514	517	519	523	505	510
2	180°	528	538	519	532	516	517	527	514	516	508
2	240°	532	547	525	540	521	525	525	525	532	530
2	300°	519	530	514	503	506	514	530	514	498	508
3	0°	508	507	505	523	521	514	517	507	510	496
3	60°	496	508	512	517	507	512	494	494	516	501
3	120°	523	517	527	523	508	514	496	516	525	508
3	180°	514	505	504	496	528	523	514	514	528	498
3	240°	517	532	525	528	530	525	514	514	523	538
3	300°	508	512	521	505	519	517	516	510	499	498
4	0°	499	507	508	496	514	510	503	514	501	498
4	60°	505	489	505	494	510	512	508	512	512	491
4	120°	499	517	505	512	521	517	519	507	503	501
4	180°	521	521	525	516	521	523	517	516	516	505
4	240°	519	527	536	514	527	528	527	527	516	516
4	300°	514	516	517	517	519	519	508	527	512	514
5	0°	516	536	528	536	527	519	516	514	510	503
5	60°	499	508	510	507	519	507	507	512	498	499
5	120°	514	519	516	521	514	523	514	501	508	499
5	180°	517	528	536	532	528	528	527	539	532	521
5	240°	528	527	534	534	538	543	538	538	532	530
5	300°	528	517	527	514	517	521	536	543	510	523
6	0°	507	508	512	514	521	514	507	519	517	496
6	60°	496	507	510	505	505	508	514	499	503	499
6	120°	516	527	527	519	525	508	523	530	514	512
6	180°	514	525	536	526	525	532	530	530	523	516
6	240°	519	525	527	527	525	527	532	525	523	521
6	300°	514	516	517	519	519	516	519	517	517	506

Obr.1.6.1. Ukázka naměřených dat a označení jejich pozice



Obr.1.6.2. Náčrt postupu měření tvrdosti na válci







2. Vytvoření matematického modelu

2.1. Model a modelování

V této části bylo užito [2], [6], [7] a [12].

Pojem model se vyskytuje v odborné literatuře stále častěji. Teorie modelů a modelování nabývá na významu a nachází uplatnění v nejrůznějších oborech. Termín model může být chápán různě, stejně jako modely mohou sloužit různým účelům. Konstrukce modelu a pravidla této konstrukce jsou vázána na řešení určitých konkrétních úloh jak teoretického tak praktického rázu, a je proto zřejmé, že při posuzování metodologických otázek je třeba k této skutečnosti přihlídnout.

Při sledování jevů a procesů reálného světa si uvědomujeme, že v naprosté většině je nejsme schopni zcela vysvětlit. Jen velmi obtížně popisujeme zákonitosti jejich vzniku a ještě hůře pronikáme do jejich vazeb a souvislostí. Modelování je tvůrčí lidská činnost spočívající ve zjednodušení a idealizaci dějů reálného světa. Model chápeme jako určitou formu zobrazení skutečnosti. Rozdíly jsou pouze v tom, jaké jsou použity modelovací prostředky a k jakému účelu model slouží.

Slovo model má základ ve stavebnictví, kde označuje míru, podle níž jsou vyjádřeny proporce stavby. Později dostal pojem model zásadně nový význam. Připouští se, že teorie nemusí být pouze zobrazením skutečnosti v její objektivní podobě, ale může být také její idealizací. Obvykle bývá výhodné pracovat s modelem a ne se skutečností už jen proto, že ovládáme daleko lépe pravidla modelovací techniky než pravidla nezachytitelné nebo nepozorovatelné skutečnosti. Model je sestaven podle pravidel, která dovolují napodobovat chování a vlastnosti zobrazované skutečnosti. Model je nejen prostředek pro získávání poznatků, ale pomocí modelu je také možno rozvinout teorii určité oblasti. Nutností pro vyvození důsledku z modelování skutečnosti je bezesporu existence obdoby mezi modelem a realitou, která je pro poznávání skutečnosti nezbytná.

2.2. Regresní analýza

Cílem regresní analýzy je hlubší poznání obecných vztahů mezi veličinami, porozumění vnitřním souvislostem a formulace stochastických funkčních předpisů odrážejících tyto vztahy, závislosti a souvislosti. Matematické vyjádření změn hodnot vysvětlované proměnné pomocí regresních funkcí může vycházet z různých záměrů a sloužit

různým cílům. Při důrazu kladeném na vyrovnání pozorovaných hodnot vhodnou matematickou funkcí je snahou dosáhnout maximální shody mezi skutečnými a vyrovnanými hodnotami vysvětlované proměnné. Při řešení této úlohy převládají empirická kritéria kvality sestrojených modelů. Úspěšnost metody odhadu parametrů se hodnotí stupněm shody naměřených a modelovaných hodnot. V aplikacích, někdy nesprávně, ustupuje do pozadí otázka stability odhadnutých modelů a jejich použitelnost pro induktivní úsudky. Často totiž stačí jen malý zásah do údajů k tomu, aby došlo nejen ke změně hodnot odhadnutých parametrů, ale i ke změně samotného typu „nejlepšího“ regresního modelu.

V ideálním případě by regresní funkce měla na základě zatímního stavu pozorování zobrazovat zákonitosti vztahů a závislosti mezi veličinami. Získání těchto závislostí ovšem není lehkým úkolem. Ve skutečnosti je potřeba velké obezřetnosti, protože napozorované vztahy mezi veličinami mohou být ovlivněny jinými neuvažovanými vlivy, nestejnou přesností pozorování nebo špatným výběrem regresní funkce.

2.3. Lineární regresní model

Základním regresním modelem je *lineární regresní model*, dále jen LRM, který je lineární ve svých parametrech, obecný zápis LRM je

$$y(x) = \beta_0 f_0(x) + \beta_1 f_1(x) + \beta_2 f_2(x) + \dots + \beta_n f_n(x),$$

kde y je závisle proměnná, x je nezávisle proměnná, funkce $f_0(x), \dots, f_n(x)$ jsou libovolnými funkcemi a $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ jsou neznámé parametry regrese. Termín „lineární regrese“ chápeme jako linearitu v parametrech $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$, nikoliv ve vztahu k nezávisle proměnným. Speciálním případem LRM je *polynomická regrese*

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_n x^n,$$

kde $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ sice neznáme, ale můžeme je odhadnout pomocí metody nejmenších čtverců a hodnoty y jsou hodnoty námi měřeného jevu. V tomto modelu předpokládáme, že:

- pro každou pevnou hodnotu x_i mají hodnoty y_i normální rozdělení
- každé z těchto rozdělení má týž rozptyl σ^2 , tzn. $D(y_i | x_i) = \sigma^2$
- průměrné hodnoty těchto rozdělení splňují vztah:

$$E(\bar{y}_i | x_i) = y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_n x^n$$

- různá měření veličiny y_i jsou na sobě nezávislá.

Dalším způsobem zápisu LRM je tvar: $\bar{y}_i = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_n x^n + e_i$, kde e_i je náhodnou chybou, pro kterou platí následující 3 vlastnosti:

- I) $E(e_i) = 0$
- II) $D(e_i) = E(e_i^2) = \sigma^2$
- III) $E(e_i e_j) = 0$ pro $i \neq j$.

Celý model můžeme převést do vektorového zápisu jednoduše tak, že položíme

$\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)'$ jako vektor pozorování závisle proměnné,

$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_{11}, \dots, X_{1k} \\ \vdots \\ X_{n1}, \dots, X_{nk} \end{pmatrix}$ jako matici vysvětlujících proměnných,

$\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)'$ jako vektor hodnot náhodné složky vyhovující výše zmíněným podmínkám,

$\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_k)'$ jako vektor neznámých parametrů.

Pak maticový zápis LRM má tvar

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}.$$

Předpokladem pro tento model je, že musí být modelem plné hodnosti tzn.:

- 1) $k < n$
- 2) $h(\mathbf{X}) = k$ - matice \mathbf{X} je plné hodnosti
- 3) $E(\mathbf{e}) = 0$ - náhodné chyby nejsou systematické
- 4) a) $D(e_i) = \sigma^2$ (nezávisí na i) – chyby jsou homogenní
- b) $\text{cov}(e_i, e_j) = 0$ - chyby jsou nekorelované
- c) $\text{var}(\mathbf{e}) = \sigma^2 \mathbf{I}$, to plyne ze spojení a) a b), kde \mathbf{I} je jednotková matice.

Jak bylo již výše zmíněno, koeficienty $\boldsymbol{\beta}$ nejsou známé, ale dají se odhadnout *metodou nejmenších čtverců*, která vede na minimalizaci součtu čtverců $S(\boldsymbol{\beta})$, tj. hledáme $\boldsymbol{\beta}$ takové, aby součet čtverců byl minimální. Kde $S(\boldsymbol{\beta})$ je dán vztahem

$$S(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \mathbf{e}' \cdot \mathbf{e} = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' \cdot (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n (Y_i - \sum_{j=1}^k X_{ij} \beta_j)^2.$$

Z normální rovnice ve tvaru

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial \beta_j} = 0, j = 1, \dots, k$$

dostáváme po úpravě rovnici

$$\sum_{i=1}^n \left(Y_i - \sum_{l=1}^k X_{i,l} \beta_l \right) X_{i,j} = 0, j = 1, \dots, k,$$

ze které lze určit odhady koeficientů β .

Pro model plné hodnosti je maticový zápis normální rovnice

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}'\mathbf{Y},$$

ze které vyplývá odhad koeficientů β ve tvaru

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{Y}.$$

Pro koeficienty \mathbf{b} platí, že jsou nejlepšími nestrannými lineárními odhady β .

Vektor $\hat{\mathbf{Y}}$ *vyrovnaných hodnot*

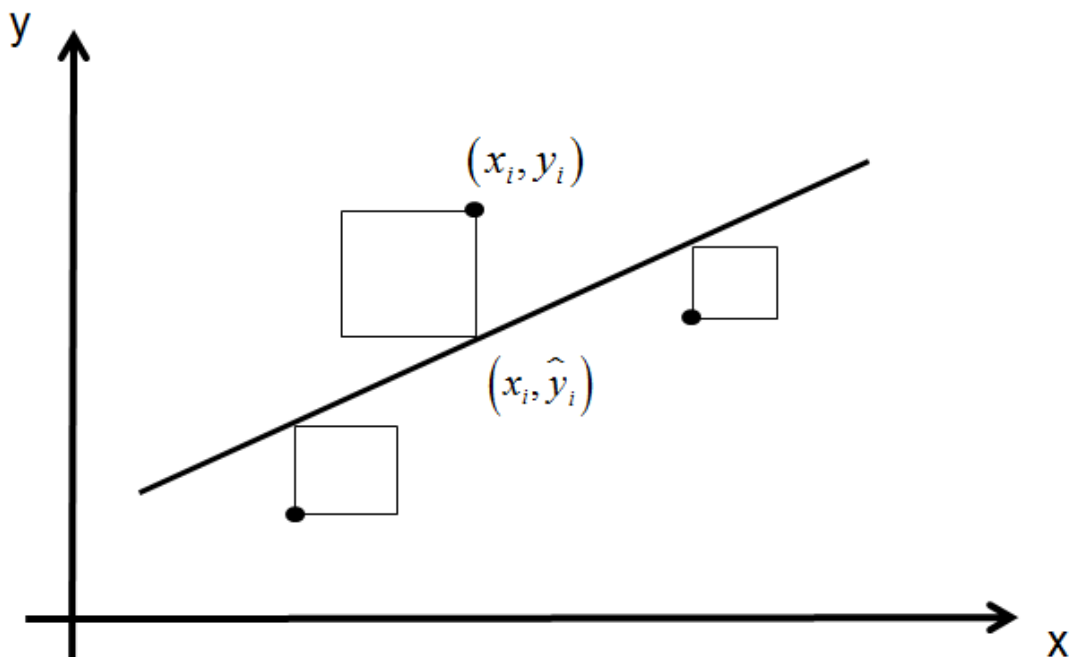
$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}\mathbf{b} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{Y},$$

může být považován za nejlepší aproximaci náhodného vektoru \mathbf{Y} , jaká se dá vytvořit lineární kombinací sloupců matice \mathbf{X} .

Rozdíl mezi naměřenými hodnotami \mathbf{Y} a vypočtenými hodnotami $\hat{\mathbf{Y}}$ označujeme

$$S_e = S(\mathbf{b}) = (\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}})'(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}})$$

a nazýváme *reziduální součet čtverců*.



Obr.2.3.1. Reziduální součet čtverců je součtem druhých mocnin odchylek naměřených hodnot od regresní křivky

Z reziduálního součtu čtverců, který nám udává kvalitu regrese, tj. jak moc se naše regresní křivka odchyluje od naměřených dat, lze vypočítat další charakteristiky. Mezi ně patří

$$s^2 = \frac{S_e}{n-k},$$

který je *nestranným odhadem rozptylu* σ^2 .

Míru kvality lineární regrese pro naměřené hodnoty udává druhá mocnina koeficientu vícenásobné korelace tzv. *koeficient determinace*

$$R^2 = 1 - \frac{S_e}{S_T}, \quad R^2 \in \langle 0,1 \rangle,$$

$$\text{kde } S_T = (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}})'(\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}})$$

je *celkový součet čtverců*. $\bar{\mathbf{Y}}$ je aritmetický průměr složek \mathbf{Y} . Koeficient determinace vyjadřuje jaký podíl variability v naměřených datech je vysvětlen námi navrženým regresním modelem. Často se tento koeficient vyjadřuje v procentech.

Přesnost regresního modelu popisuje také *upravený koeficient determinace (adjusted R^2)*, který je dán vzorcem

$$R_{adj}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-p} \frac{S_e}{S_T},$$

$$\text{nebo } R_{adj}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n-1}{n-p},$$

Tento koeficient zohledňuje počet odhadovaných parametrů modelu (p) vzhledem k počtu měření (n). Upravený koeficient determinace je vždy menší nebo roven R^2 a může být i záporný.

Celkovým F-testem testujeme, zda vysvětlovaná proměnná je lineární kombinací vybraných funkcí vysvětlující proměnné. Na hladině významnosti α testujeme nulovou hypotézu H_0 , která tvrdí, že všechny parametry β_j (vyjma β_0) modelu jsou rovny nule, tj.

$\beta_j = 0, j = 1, 2, \dots, k$, proti alternativní hypotéze H_1 , která tvrdí, že aspoň pro jedno j je $\beta_j \neq 0$. Testová statistika

$$F = \frac{n-k-1}{k} \cdot \frac{S_T - S_e}{S_e},$$

kde n je počet pozorování, k je počet prediktorů v modelu, se řídí Fisherovým-Snedecorovým rozložením $F = (k, n-k-1)$, je-li H_0 pravdivá. Nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti α , platí-li $F > F_{1-\alpha}$.

Dílčí *t*-testy jsou testy o hodnotách jednotlivých parametrů regresní funkce a umožňují nám testovat oprávněnost setrvání příslušné funkce vysvětlující proměnné v regresním modelu. Na hladině významnosti α testujeme nulovou hypotézu $H_0 : \beta_j = 0$, která tvrdí, že parametr β_j , pro pevně dané $j = 0, \dots, k$, je roven 0, proti alternativní hypotéze H_1 , která tvrdí, že $\beta_j \neq 0$. To znamená, že se ptáme, zda j -tý prediktor v modelu nemá významný vliv na hodnotu závisle proměnné. Testová statistika

$$t = \frac{b_j}{s(b_j)},$$

kde $s(b_j)$ je odhad směrodatné chyby odhadu parametru β_j , se řídí Studentovým rozložením $t = (n-k-1)$, je-li H_0 pravdivá. Nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti α , platí-li $|t| > t_{1-\alpha/2}$.

Na závěr je třeba zmínit, že pro regresi je důležité vybrat správnou funkci. A to funkci, která by dostatečně přesně aproximovala hodnoty naměřeného jevu, a zároveň nebyla zbytečně vysokého řádu. Pak se sice funkce blíží k interpolaci hodnot, ale tím zároveň kopíruje chyby, které při měření nastaly.

2.4. Polynomická regrese více proměnných

V modelu jednoduché statistické závislosti se předpokládalo, že změny závisle proměnné jsou vyvolány změnami jediné nezávisle proměnné. Ostatní vlivy byly považovány za náhodné. V reálných aplikacích je však hodnota sledovaného statistického znaku obvykle

výsledkem působení více různých faktorů. Je tedy třeba mít k dispozici početní aparát, který umožní studovat, jak několik faktorů (nezávislých proměnných) $X_1, X_2 \dots X_k$ ovlivňuje současně závisle proměnnou Y . Tento aparát poskytuje teorie mnohonásobné regrese, jež je zobecněním teorie jednoduché regrese. V tomto případě však podstatně narůstá objem výpočtů.

Parametry $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ v rovnici mnohonásobné lineární regrese se nazývají *parciální regresní koeficienty*. Koeficient β_j představuje průměrnou změnu vysvětlované proměnné Y při jednotkové změně j -té vysvětlující proměnné (X_j) za předpokladu, že velikosti ostatních nezávisle proměnných jsou konstantní. Každý z regresních koeficientů β_1, \dots, β_k tedy vyjadřuje pouze část z vlivů, působících na vysvětlovanou proměnnou Y , proto se k jejich názvu připojuje přívlástek „parciální“.

Koeficienty $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ jsou neznámé parametry, které je třeba odhadnout. Stejně jako v případě jednoduché závislosti se tento odhad provádí metodou nejmenších čtverců. Model mnohonásobné regrese i odhad jeho parametrů metodou nejmenších čtverců se obvykle zapisuje maticovým zápisem. Tento zápis je přehledný a nabývá na významu zejména pro výpočty s využitím výpočetní techniky. Model mnohonásobné regrese lze maticovým zápisem vyjádřit takto:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e},$$

kde \mathbf{Y} je vektor hodnot vysvětlované proměnné, \mathbf{X} je matice pozorování vysvětlujících proměnných, $\boldsymbol{\beta}$ vektor parametrů regresní funkce a \mathbf{e} vektor reziduálních odchylek. Uvedené vektory a matice jsou definovány takto:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nk} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \dots \\ \beta_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_1 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

Matice \mathbf{X} bývá někdy nazývána matice plánu pokusu.

Při odhadu vektoru neznámých parametrů $\boldsymbol{\beta}$, vycházíme z požadavku minimalizace součtu čtverců odchylek

$$S(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{e}'\mathbf{e} = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

$S(\boldsymbol{\beta})$ má minimum pro $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{b}$, kde vektor odhadů $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_k)$ se dostane jako řešení

soustavy normálních rovnic

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{b} = \mathbf{X}'\mathbf{Y},$$

ze které vyplývá

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{Y}.$$

Z reziduálního součtu čtverců

$$S_e = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \mathbf{b}'\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

vypočítáme odhad reziduálního rozptylu s^2

$$s^2 = \frac{S_e}{n - k - 1}.$$

Těsnost vztahu veličiny Y na nezávisle proměnných $X_1, X_2 \dots X_k$ se měří pomocí *koeficientu mnohonásobné determinace*

$$R^2 = 1 - \frac{S_e}{S_T}, \text{ kde } S_T = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2.$$

Jeho odmocninu R , $R \in \langle 0,1 \rangle$ nazýváme *koeficient mnohonásobné korelace*. Nulová hodnota R znamená, že mezi Y a $X_1, X_2 \dots X_k$ neexistuje lineární závislost. Hodnoty 1 nabývá v případě lineární funkční závislosti mezi Y a $X_1, X_2 \dots X_k$.

Otázku, zda vůbec existuje významný vztah mezi závisle proměnnou Y a nezávisle proměnnými $X_1, X_2 \dots X_k$, zodpovíme testem významnosti výběrového koeficientu mnohonásobné korelace R . Tento test znamená ověření hypotézy o nulovém korelačním koeficientu mnohonásobné korelace v základním souboru, kterou lze ekvivalentně zapsat

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots \beta_k = 0.$$

Její test je založen na testovém kritériu

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - k - 1}{k}.$$

Za platnosti H_0 je kritický obor vymezen takto:

$$K = \{F > F(1 - \alpha, k, n - k - 1)\},$$

Kde $F(1 - \alpha, k, n - k - 1)$ je tabelovaná kritická hodnota F-rozdělení.

Koeficient mnohonásobné korelace vyjadřuje společné působení nezávisle proměnných $X_1, X_2 \dots X_k$ na závisle proměnnou Y a určuje spolehlivost regresního odhadu.

Pro změření závislosti mezi závisle proměnnou a jedné nezávisle proměnné při vyloučení vlivu ostatních nezávisle proměnných se používá *koeficient parciální korelace*.

Označme v_p prvek matice $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ ležící v p -tem řádku na její hlavní diagonále, pak koeficient parciální korelace r_p pro p -tou dvojici indexů, která má v regresní rovnici koeficient b_p , se dá vypočíst ze vzorce

$$r_p = \frac{b_p}{\sqrt{b_p^2 + s^2 \cdot v_p}}.$$

Při testování významnosti koeficientu parciální korelace se testuje nulová hypotéza, že koeficient parciální korelace je roven nule. Testovací veličina

$$T = r_p \cdot \sqrt{\frac{n-k-1}{1-r_p^2}}$$

má Studentovo rozdělení s $n-k-1$ stupni volnosti. Jestliže $|T| > t(1-\alpha/2, n-k-1)$, pak na hladině α zamítáme nulovou hypotézu, čímž je významnost koeficientu parciální korelace prokázána.

Obvyklým výstupem počítačových programů pro testování hypotéz je *p-hodnota*, která udává nejnižší možnou hladinu významnosti pro zamítnutí nulové hypotézy. Je-li $p \leq \alpha$, pak H_0 zamítáme na hladině významnosti α , je-li $p > \alpha$ pak H_0 nezamítáme na hladině významnosti α . Způsob výpočtu p-hodnoty pro oboustrannou alternativu:

$$p = 2 \min \{ F(T \leq r_p), F(T \geq r_p) \}$$

P-hodnota vyjadřuje pravděpodobnost, s jakou testovací statistika nabývá hodnot „horších“ (více svědčících proti testované hypotéze), než je pozorovaná hodnota statistiky.

Vysvětlující proměnné regresního modelu mohou být vzájemně nezávislé nebo mezi nimi může existovat závislost. Pojem *multikolinearity* je velmi úzce svázán se silnou vzájemnou lineární závislosti vysvětlujících proměnných, jejímž důsledkem je špatně podmíněná matice \mathbf{X} . Lze ji také předpokládat v případě, kdy F-test vícenásobné regresní funkce je významný a všechny t-testy jednotlivých parametrů jsou nevýznamné (svědčí to o silné multikolinearitě mezi sloupci matice \mathbf{X}). Přesnou multikolinearitou se rozumí případ, kdy jednotlivé sloupce \mathbf{x}_j ($j = 1, 2, \dots, k$) matice \mathbf{X} jsou lineárně závislé. Tato situace může

vzniknout z toho důvodu, že některé vysvětlující proměnné jsou zbytečné, protože je lze nahradit lineární funkcí některých ostatních nebo všech vysvětlujících proměnných. K tomuto případu může dojít špatnou volbou kombinací hodnot vysvětlujících proměnných, ale i shodou okolností nebo náhodou při malém rozsahu výběru. V přítomnosti multikolinearity není jednoduchá interpretace regresních koeficientů v aditivním modelu. Multikolinearita se často vyskytuje i u modelů dobře popisujících data. Problémem tedy není běžně se vyskytující vzájemná závislost vysvětlujících proměnných, ale její síla. Vzájemná lineární závislost je dána povahou zkoumaných veličin a většinou ji nelze mechanicky eliminovat pouhou opravou některých chybných údajů anebo vyloučením některých vysvětlujících proměnných z regresní funkce. Multikolinearita zvyšuje rozptyly odhadů, což má za následek příliš široké intervaly spolehlivosti, vysoké p-hodnoty pro individuální t-testy, při kterých se některé regresní koeficienty ukazují jako statisticky nevýznamně odlišné od nuly i v případě jinak velmi kvalitního regresního modelu. Multikolinearita může být také žádoucí a to v případě, kdy koeficient determinace vychází vysoký a regresní model dobře popisuje experimentální data. Pro účely aproximace dat a konstrukce modelů, které mají „vyhladit“ experimentální závislosti, není multikolinearita na obtíž.

2.5. Vícenásobná regrese s použitím metody Monte Carlo

Pokud nemáme jednu nezávisle proměnnou, jak tomu bylo u jednoduché lineární regrese, ale máme například dvě nebo i více, nedá se popis regresní funkce najít tak snadno a rychle. Největší nesnází při regresi funkce více proměnných je stanovení optimálního výběru nezávisle proměnných a stanovení maxima mocnin u nezávisle proměnných. Pokud bychom chtěli při n nezávisle proměnných vypočítat regrese pro všechna seskupení, pak bychom museli počítat s celkem $2^n - 1$ regresemi.

Mějme závisle proměnnou z , jejíž naměřené hodnoty se dají vysvětlit pomocí dvou proměnných x, y . Jedná se tedy o polynomickou funkci zapsanou ve tvaru

$$z = \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^s b_{ij} x^i y^j .$$

V tomto polynomu dvou proměnných x, y můžeme považovat všechny výrazy $x^i y^j$ za nezávisle proměnné, takže při odhadu neznámých koeficientů b_{ij} máme regresní úlohu obsahující $(r+1)(s+1)$ nezávisle proměnných. Protože lze jen s obtížemi a s vysokými

časovými nároky vypočítat regresní funkce pro všechny možnosti, dá se zjednodušit tento problém použitím metody Monte Carlo.

Nejprve si zvolíme čísla r , s , k , kde k značí počet námi zvolených nezávisle proměnných. Pak náhodným výběrem vybereme k výrazů $x^i y^j$, $i = 0, 1, \dots, r$, $j = 0, 1, \dots, s$ tak, aby se v jednom výběru nevyskytovaly stejné výrazy. Pro zjednodušení můžeme každý výraz zapsat do vektoru a přiřadit mu pouze dvojici jeho mocnin (i, j) . Pro každou uspořádanou dvojici lze vypočítat odhad jejích regresních koeficientů pomocí metody nejmenších čtverců. Ovšem ne všechny náhodně vybrané proměnné mají stejný vliv na závisle proměnnou z . K určení důležitosti jednotlivých výrazů pro regresi slouží koeficient parciální korelace, který nám ukazuje velikost korelace mezi závisle proměnnou z a nezávisle proměnnou (i, j) .

Jeden náhodný výběr k dvojic indexů však nemá vypovídací hodnotu o kvalitě regresní funkce, stejně tak i o důležitosti jednotlivých dvojic indexů pro danou závisle proměnnou z . Je nutné provést celý postup, který je výše popsán, pro několik, řekněme t , náhodně vygenerovaných vektorů, z nichž každý obsahuje právě k dvojic indexů (i, j) . Pro každý vektor je nutné vypočítat reziduální součet čtverců, který nám vypovídá o kvalitě regrese.

Nejjednodušší způsob, jakým zjistit nejhodnější regresní model, je spočítat všechny možné kombinace indexů, po jejichž setřídění podle reziduálního součtu čtverců bychom dostali nejlepší vektor indexů. Tento způsob je ovšem schůdný jen pokud je řád regrese a počet členů v regresním polynomu nízký. V jiném případě je tato metoda příliš pomalá. Naproti tomu metodou Monte Carlo vybíráme vektory indexů čistě náhodně. I při mnohem nižším počtu výběru můžeme dosáhnout dobrých výsledků, co se kvality regrese týče. Je ovšem nutné vhodně zvolit počet náhodných výběrů. Vezmeme-li příliš málo vektorů indexů, kvalita regrese nemusí být dostačující, naproti tomu pokud by jich bylo mnoho, metoda bude příliš pomalá. Najít optimální kompromis mezi rychlostí a kvalitou regrese je u metody Monte Carlo zcela klíčové.

Pokud je náhodně vybráno dostatečné množství vektorů dvojic indexů, jsou pro všechny vektory spočteny jejich regresní koeficienty, jim odpovídající parciální koeficienty korelace a reziduální součty čtverců. Setřídíme všechny tyto regrese podle reziduálního součtu čtverců vzestupně. Regrese, která má nejnížší hodnotu rezidua, je na prvním místě a má právo být označena za nejhodnější. Zbývá ještě zjistit, zda některá dvojice indexů není pro danou regresi nadbytečná. Tady je na místě použití t-testu pro testování významnosti koeficientu parciální korelace.

3. Vyhodnocení experimentu

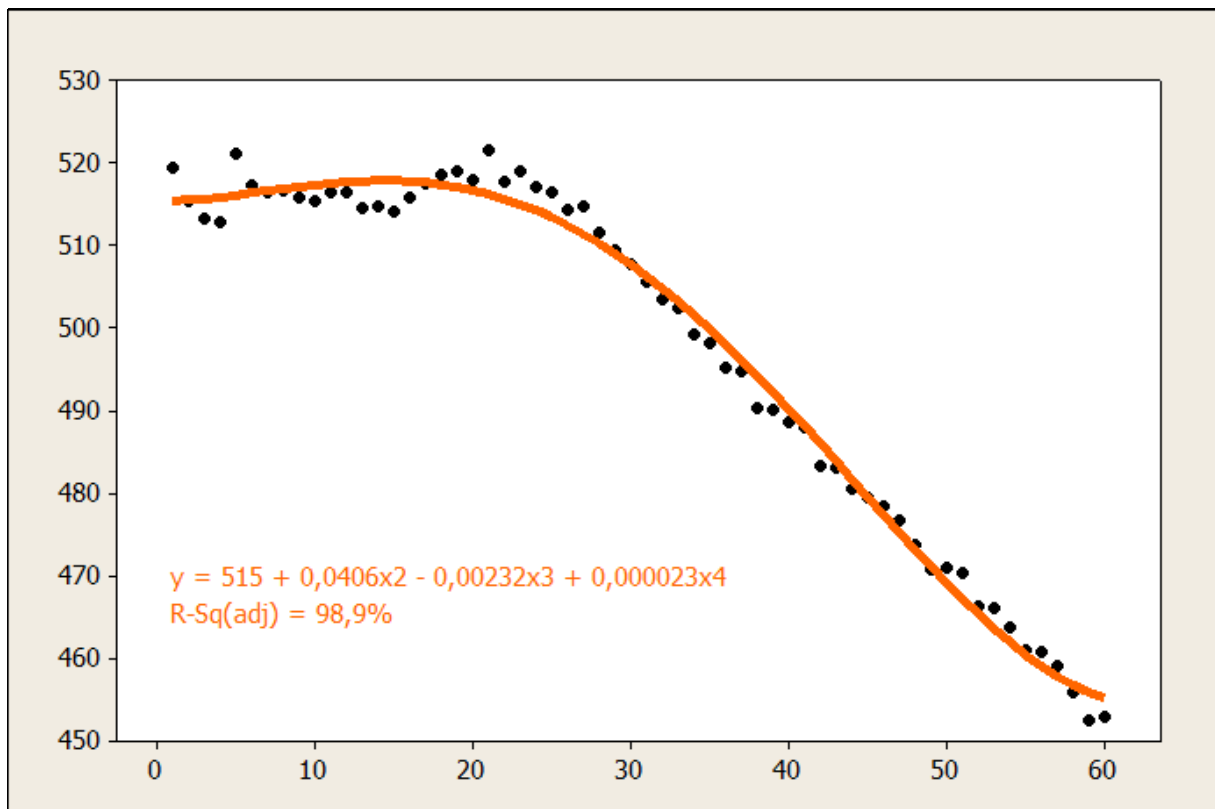
3.1. Regresní funkce jedné proměnné

Velice zajímavou zpětnou vazbu k experimentu nám poskytne již polynomická lineární regrese jedné nezávisle proměnné. V této kapitole jsou uvedeny čtyři grafy popisující z různých úhlů pohledu rozložení tvrdosti v zakalené vrstvě pod povrchem válce.

Stupeň každého regresního polynomu byl odhadnut v Minitabu pomocí funkce Best Subsets Regression, která porovnává potenciální funkce v několika kritériích: koeficient determinace, adjustovaný koeficient determinace, standardní chyba regrese a koeficient Mallows' Cp. Následně byla otestována adekvátnost modelu pomocí F testu a vliv jednotlivých prediktorů pomocí t testů. Prediktory, které se ukázaly jako nevýznamné, byly z modelu po jednom odstraněny.

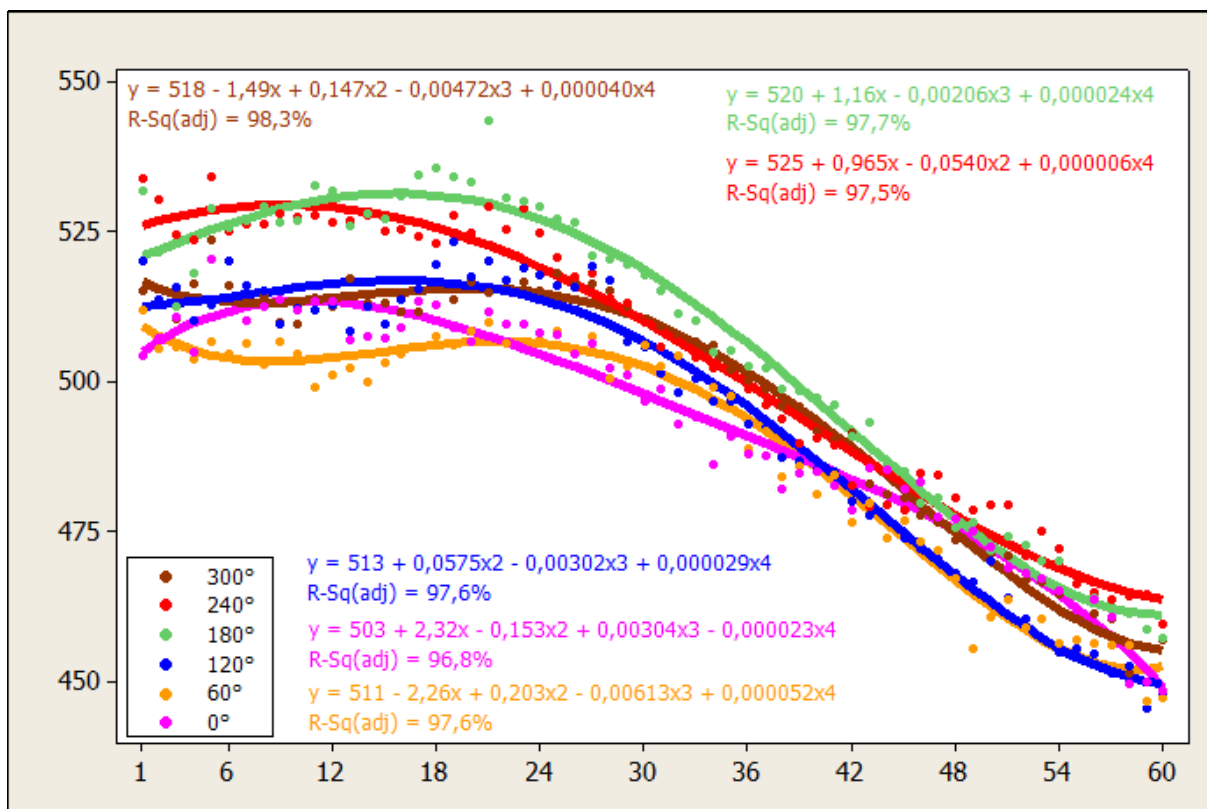
Z těchto grafů lze vyčíst dva základní typy informací. Jednak jsou to přirozené změny tvrdosti v závislosti na poloze měřené oblasti a také pozorujeme nedokonalosti v rozložení tvrdosti vnesené při tepelném zpracování válce.

Poznámka: Číslo za písmenem x v rovnicích regresních funkcí znamená mocninu nezávisle proměnné.



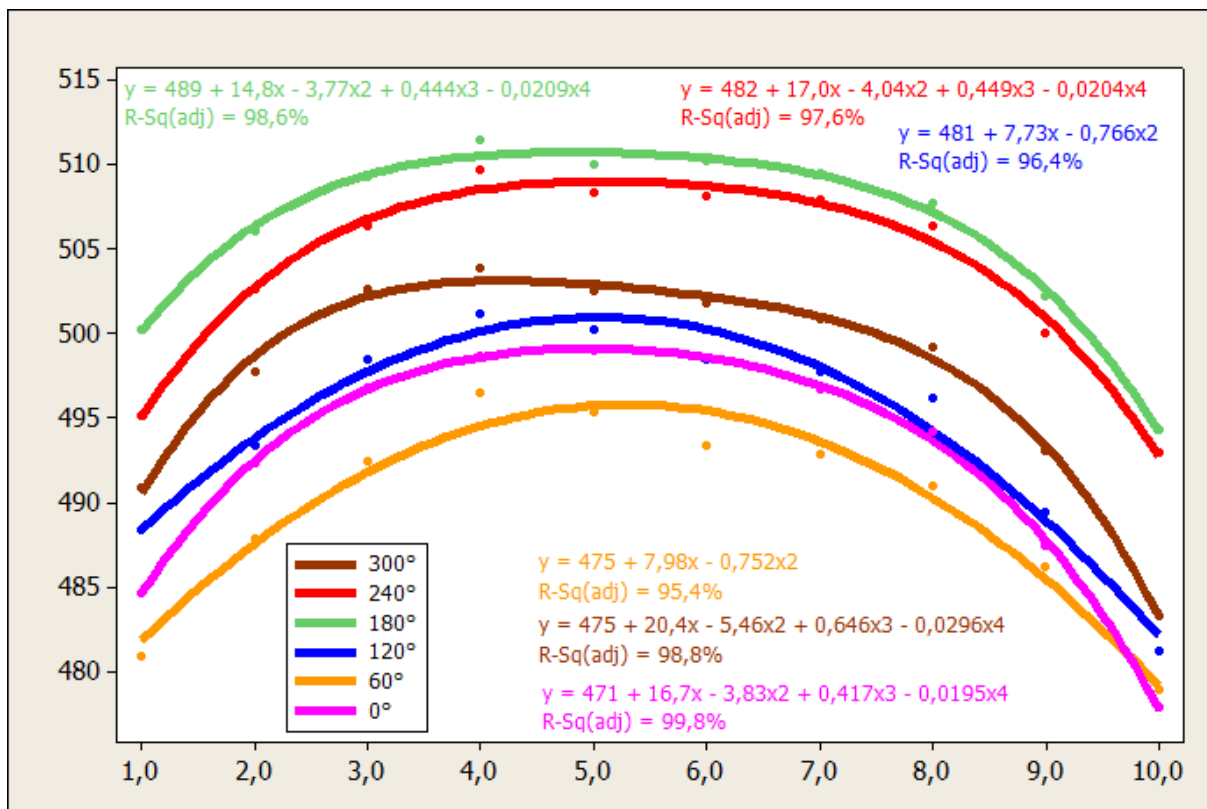
Obr.3.1.1. Celková regresní křivka

Tato funkce popisuje změnu tvrdosti od povrchu válce směrem do středu válce, konkrétně do hloubky 60 mm. Svislá osa znázorňuje hodnotu tvrdosti dle Brinella. Každý (černý) bod je průměrnou hodnotou z 60 měření na téže ploše válce.



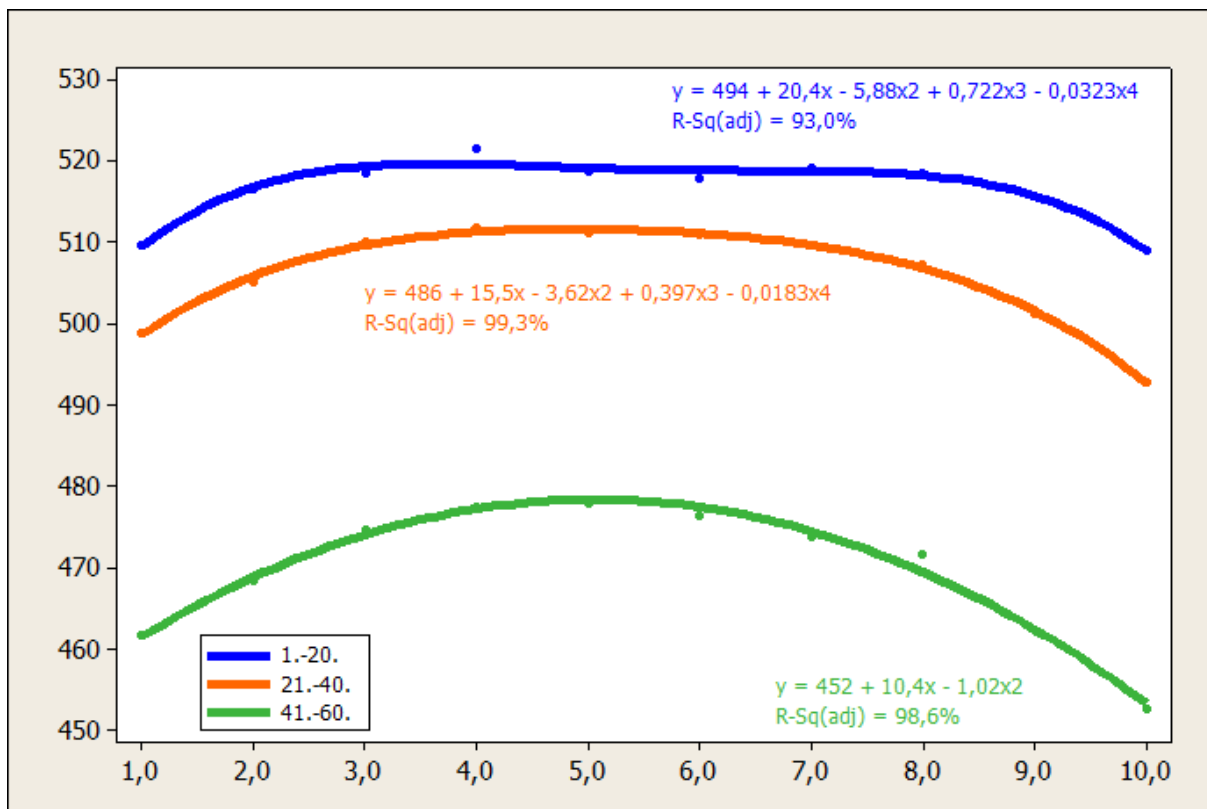
Obr.3.1.2. Regresní křivky dle otočení válce - vertikálně

Tento graf se od předchozího liší pouze tím, že změna tvrdosti od povrchu do středu válce je zobrazena pro každý úhel otočení zvlášť. Každý barevný bod je průměrnou hodnotou z 10 měření na téže ploše a při stejném úhlu otočení.



Obr.3.1.3. Regresní křivky dle otočení válce - horizontálně

Na tomto grafu je pro každý úhel otočení zvlášť nakreslen vývoj hodnoty tvrdosti z jednoho okraje válce na druhý. Každý barevný bod je tedy průměrem 60 hodnot měření se stejným úhlem otočení a vzdáleností od kraje válce. Svislá osa je opět tvrdost dle Brinella.



Obr.3.1.4. Regresní křivky horizontálně dle hloubky úběru

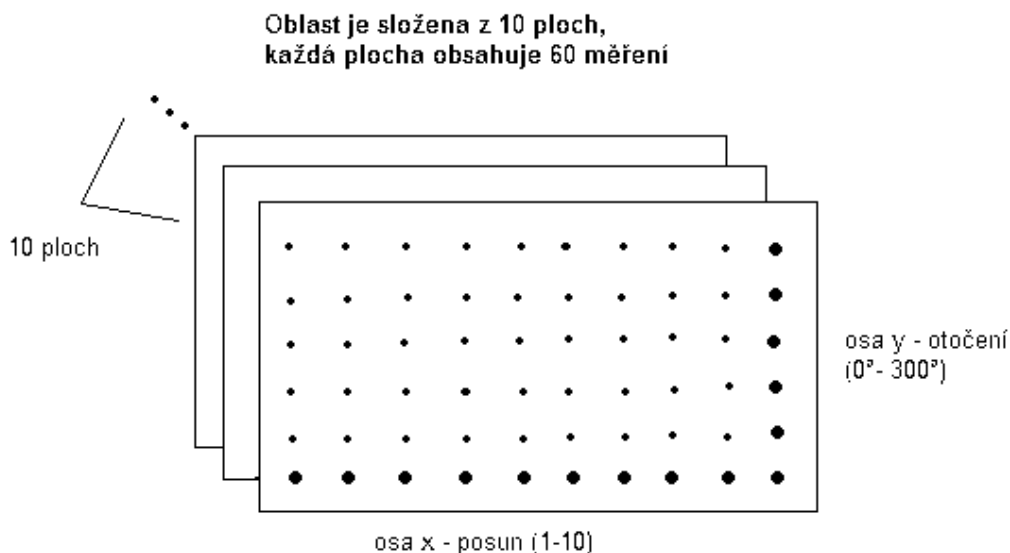
Poslední graf této kapitoly popisuje změnu hodnoty tvrdosti od jednoho ke druhému okraji válce v závislosti na hloubce měření. Modrá křivka popisuje tvrdost v prvních 20 mm pod povrchem válce, oranžová křivka mezi 21. a 40. mm, zelená křivka mezi 41. a 60. mm hloubky.

Z výše uvedených grafů můžeme vyvodit tyto závěry:

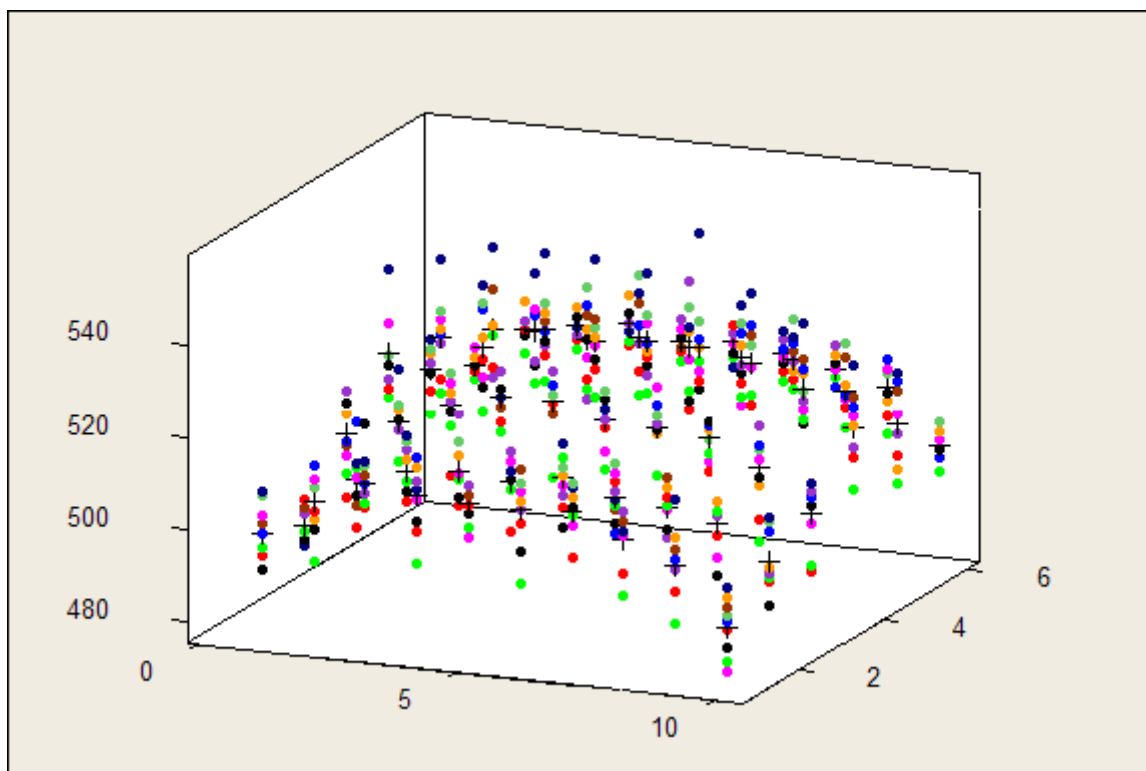
1. Prvních 30 mm pod povrchem válce je v průměru prokaleno na tvrdost 510 - 520 HB.
2. Válec není prokalený rovnoměrně, podle úhlu otočení je rozdíl v hodnotách až 40 HB.
3. Přibližně od 30 mm se tvrdost postupně snižuje, a to bez velkých rozdílů mezi jednotlivými stupni otočení.
4. Povrchová tvrdost na krajích válce je nižší než ve střední části válce.
5. Závěr z předchozího bodu nabývá na síle s rostoucí hloubkou, naopak v prvních milimetrech pod povrchem je prokalení téměř konstantní.

3.2. Data a jejich třídění

Abychom dostali určitou představu o tom, jak vypadá rozložení tvrdosti materiálu uvnitř válce, bylo rozhodnuto rozdělit zkoumanou plochu válce do šesti oblastí po 10 mm hloubky úběru. První oblast byla tedy prvních 10 mm úběru materiálu, druhá oblast byla v hloubce 11-20 mm od povrchu, až šestá oblast byla v hloubce 51-60 mm od povrchu válce. V tomto případě je vhodné použít pro počítání modelu data, které dostaneme po vypočtení aritmetického průměru tvrdosti ze všech deseti ploch ve stejné oblasti. Na obrázcích níže je dobře vidět jakým způsobem se postupovalo. Každá plocha má jednu barvu, tedy všech 60 hodnot jedné plochy má stejné barevné označení, křížkem jsou označeny body, které zastupují aritmetický průměr (Obr.3.2.2.). Z grafu je dobře patrné, že použití aritmetického průměru má za následek relativní „uklidnění“ funkce, která popisuje interpolaci těchto bodů. Rozptýl hodnot tvrdosti pro jednotlivá měření je relativně velký a interpolace těchto funkcí jsou poměrně odlišné, kdežto interpolace průměrných hodnot má vcelku malý rozptyl. Tento postup byl volen, protože je třeba najít model, který by byl dosti přesný a co možná nejjednodušší pro popis. Další argument je založen na myšlence, že průměrná hodnota alespoň částečně eliminuje chybu vzniklou při měření. Tímto způsobem se dostanou data pro všech 6 oblastí.



Obr.3.2.1. Náčrt popisující složení oblasti



Obr.3.2.2.

Deset různých barev bodů odpovídá 10 plochám ve stejné oblasti. Černé křížky označují jejich aritmetický průměr.

(osa x – posun 1-10, osa y – otočení 1-6 (0°-300°), osa z – tvrdost HB)

3.3. Postup výpočtu pomocí metody Monte Carlo

Pro regresi naměřených dat byla zvolena polynomická regrese, kde konstanty popsané v odstavci 2.5. byly zvoleny následovně $r=s=10$, a počet členů polynomu $k=10$. Pak celý polynom měl tvar $z = b_1 x^{i_1} y^{j_1} + b_2 x^{i_2} y^{j_2} + \dots + b_{10} x^{i_{10}} y^{j_{10}}$, kde $i_1, \dots, i_{10}, j_1, \dots, j_{10} \leq 10$, který vyhovuje konstrukci z odstavce 2.4. Celá regrese byla prováděna algoritmem vytvořeným v programu Minitab, program bude uveden v příloze. Následující postup byl opakován pro všech 6 oblastí úběru materiálu.

Podle metody Monte Carlo bylo náhodně vybráno 10 000 vektorů, z nichž každý obsahoval 10 dvojic indexů (i, j) . Pro každý tento vektor byly spočteny koeficienty \mathbf{b} a reziduální součet čtverců. Kritériem pro výběr nejlepší regresní plochy byl právě reziduální součet čtverců, který nejlépe vypovídá o kvalitě polynomu. Důležitost dvojic indexů pro regresi byla posuzována pomocí p-hodnoty. Domluva je taková, že pokud je p-hodnota menší než 0,05, považujeme koeficient pro regresi za důležitý se spolehlivostí 95%. Není-li tomu

tak, považujeme koeficient pro regresi za nevýznamný. Ukázala-li p-hodnota na nedůležité indexy pro danou funkci, byly tyto indexy z regrese po jednom odstraněny. Výsledný regresní polynom byl vykreslen do grafu. Pro každou oblast byly vytvořeny 4 grafy (bude popsáno níže). Pod grafy je vypsán výstup z Minitabu. Tento výstup obsahuje rovnici polynomu, který byl vybrán jako nejlepší, to znamená polynom s nejmenším reziduálním součtem čtverců. Dále regresní koeficienty s příslušnými p-hodnotami, pod nimi je S – nestranný odhad směrodatné odchylky, R-Sq – koeficient mnohonásobné korelace, R-Sq(adj) – adjustovaný koeficient mnohonásobné korelace a nakonec ověření adekvátnosti modelu opět pomocí p-hodnoty. Pod výstupem z Minitabu jsou uvedeny 3 tabulky. První tabulka obsahuje 10 dvojic indexů tvořící mocniny u nezávisle proměnných, druhá tabulka obsahuje parciální regresní koeficienty a třetí tabulka obsahuje p-hodnoty, hodnotící významnost těchto koeficientů. Hodnoty v jednotlivých řádcích si vzájemně odpovídají. Druhá a třetí tabulka obsahuje 2 sloupce hodnot, kde první sloupec patří vždy vybrané „nejlepší“ regresní funkci (b1, p-hodnota1) a ve druhém sloupci je tato regresní funkce očištěna o nevýznamné koeficienty (b2, p-hodnota2). Pod tabulkami je analytický zápis této očištěné regresní funkce a parametry S, R a R(adj).

3.4. Zobrazení interpolačních a regresních ploch

Následující grafy znázorňují, jakým způsobem se mění rozložení tvrdosti v jednotlivých oblastech pod povrchem válce. Grafy jsou vykresleny za pomoci programu Minitab. V každém ze 6 bloku obrázků (obsahuje 4 grafy) jsou znázorněny jak regresní funkce (vždy 2.a 4.graf), tak interpolace hodnot použitých pro regresi (vždy 1.a 3.graf). Je zde dobře patrné, že vypočtená funkce je hladší než prostá interpolace, což je pro regresní funkci důležité. Jejím hlavním účelem je vytvořit co možná nejjednodušší model, který by co možná nejpřesněji aproximoval skutečný jev a zároveň odstraňoval z naměřených dat náhodné chyby.

První graf (Obr.3.4.1.) znázorňuje interpolační plochu pro první oblast, kde červené body jsou body měření a jejich hodnota je aritmetickým průměrem z deseti měření na deseti plochách v této oblasti, jak je popsáno výše.

Druhý graf (Obr.3.4.2.) znázorňuje nejlepší vypočtenou regresní plochu popisující rozložení tvrdosti v této první oblasti. Tato plocha byla spočítána podle výše popsaného postupu v softwaru Minitabu. Použitý algoritmus je součástí přiloženého CD.

Všechny plochy válce jsou rozvinuty na obdélník.

Osy v těchto dvou grafech jsou rozvrženy takto:

osa x – znázorňuje posun pozice horizontálně od levého k pravému okraji válce a nabývá hodnot 1 až 10, kde vzdálenost mezi sousedními pozicemi je cca 135 mm;

osa y – znázorňuje posun pozice otočením válce o úhel 60° a jeho násobky; nabývá hodnot 1 až 6, tedy 0° až 300° ;

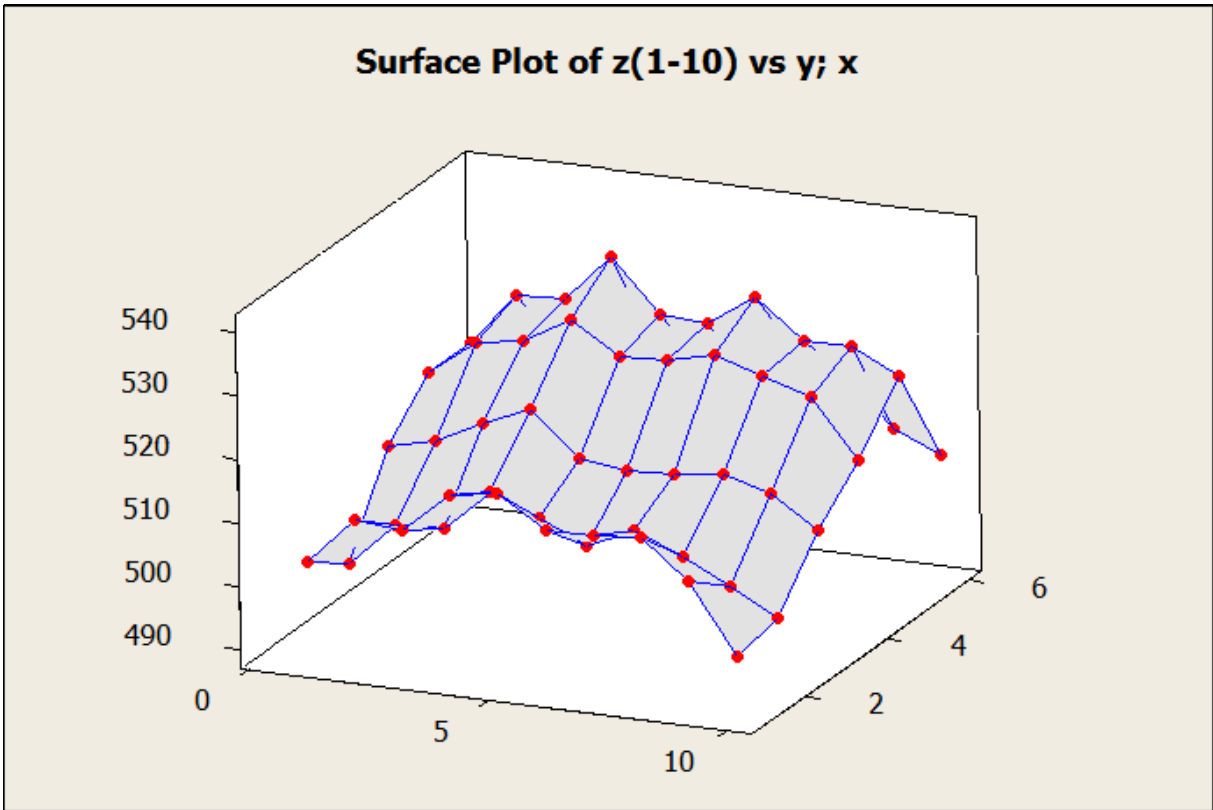
osa z – svislá osa, znázorňující hodnoty tvrdosti podle Brinella (HB)

Další dva grafy (Obr.3.4.3. a Obr.3.4.4.) jsou grafy barevných vrstevnic, kde osy x a y opět popisují posun a otočení pozice, hodnota tvrdosti HB je však znázorněna odstínem barvy. Čím je odstín barvy tmavší, tím je hodnota tvrdosti vyšší. První z těchto grafů znázorňuje opět interpolační plochu, a druhý nejlepší vypočtenou regresní plochu popisující rozložení tvrdosti v první oblasti.

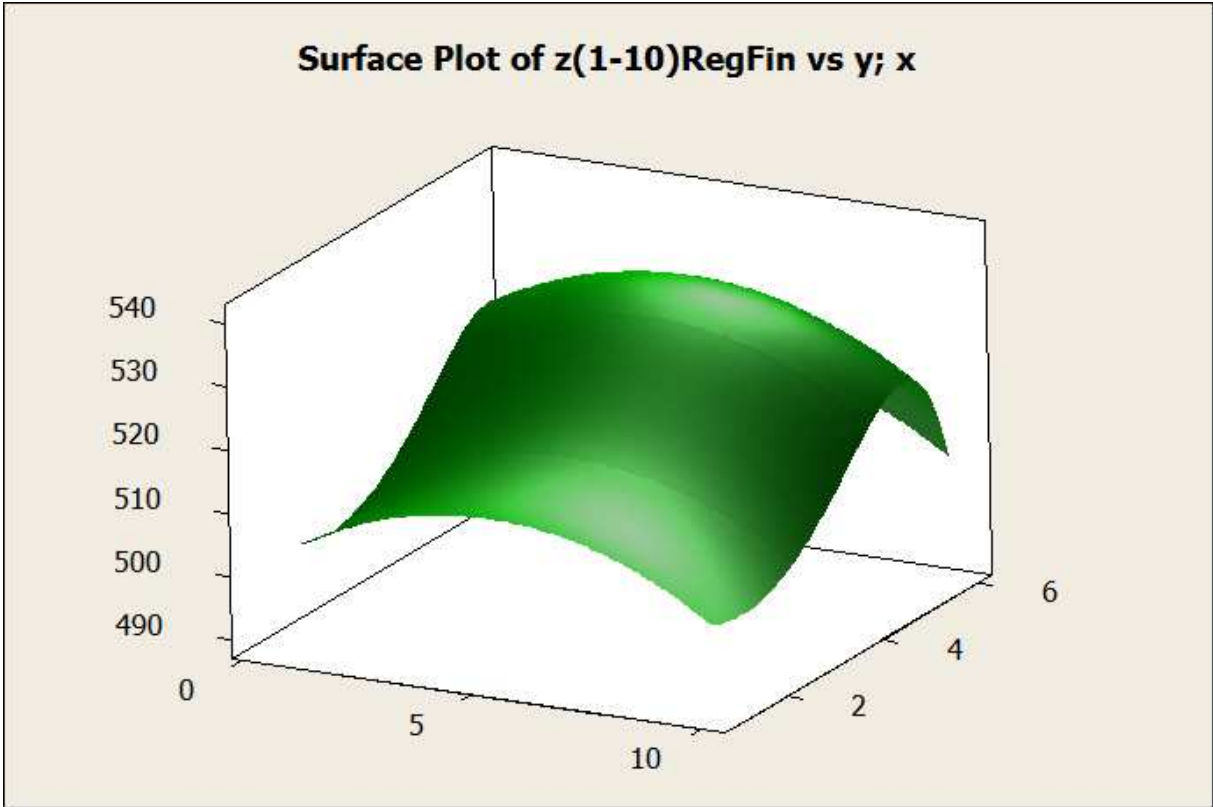
Jinými slovy, 1.a 3. graf má společná zdrojová data, jimiž jsou průměrné hodnoty měření tvrdosti v příslušných bodech. Tyto grafy se liší pouze způsobem zobrazení hodnot tvrdosti. Stejně tak 2.a 4. graf má společná zdrojová data, jimiž jsou vypočtené hodnoty tvrdosti pomocí výsledného regresního polynomu.

Tato čtveřice grafů je vyhotovena pro každou ze šesti oblastí. Grafy pro každou oblast jsou doplněny výpočtem popsáním v předchozím odstavci.

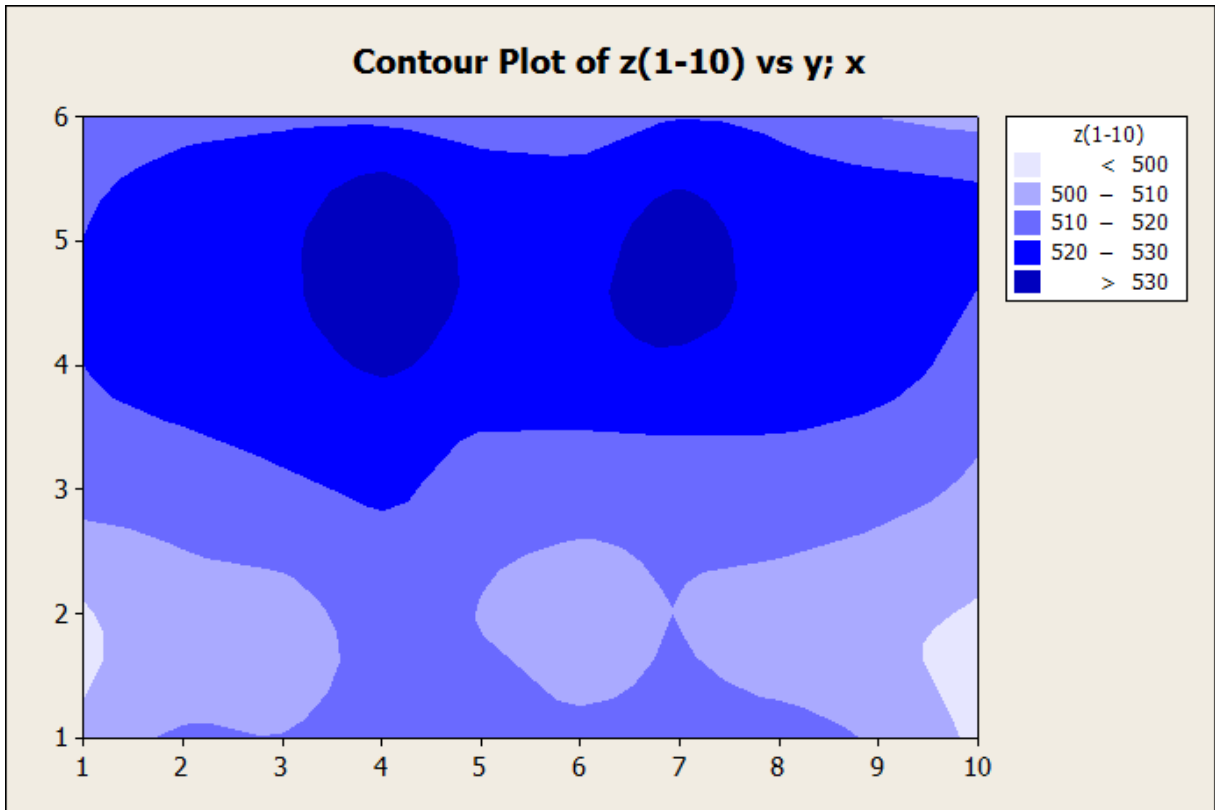
Poznámka: Z důvodů lepší čitelnosti následujících grafů, nejsou v těchto grafech označeny osy svými písmeny (x, y, z), ale pouze hodnotami. V předchozím textu jsem se snažil význam os podrobně popsat.



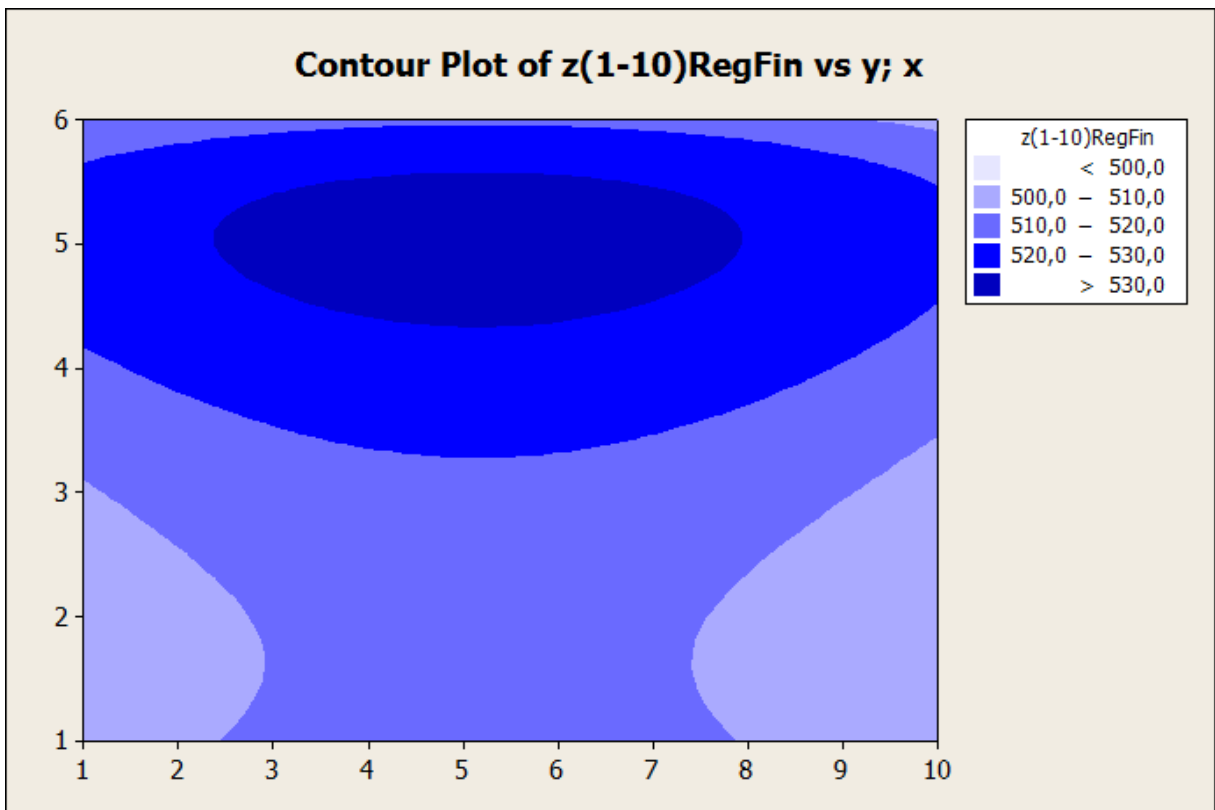
Obr.3.4.1. Interpolační plocha pro první oblast



Obr.3.4.2. Regresní plocha pro první oblast



Obr.3.4.3. Interpolační plocha pro první oblast



Obr.3.4.4. Regresní plocha pro první oblast

Regression Analysis: z(1-10)

The regression equation is

$$z(1-10) = 507 - 0,00226 xy^4 - 0,603 x^2 + 6,07 x + 0,000486 x^3y^2 + 0,000004 x^2y^6 - 10,8 y - 0,000000 x^7y^8 - 0,000028 y^8 + 3,18 y^2$$

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	506,878	2,989	169,60	0,000
xy ⁴	-0,002262	0,001787	-1,27	0,211
x ²	-0,60348	0,08576	-7,04	0,000
x	6,0673	0,8979	6,76	0,000
x ³ y ²	0,0004856	0,0002792	1,74	0,088
x ² y ⁶	0,00000427	0,00000521	0,82	0,416
y	-10,762	2,211	-4,87	0,000
x ⁷ y ⁸	-0,00000000	0,00000000	-1,07	0,292
y ⁸	-0,00002846	0,00000276	-10,32	0,000
y ²	3,1816	0,4484	7,10	0,000

S = 3,21329 R-Sq = 89,1% R-Sq(adj) = 87,2%

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	9	4224,77	469,42	45,46	0,000
Residual Error	50	516,26	10,33		
Total	59	4741,03			

prediktor	i	j
1	1	4
2	2	0
3	1	0
4	3	2
5	2	6
6	0	1
7	7	8
8	0	8
9	0	2
10	0	0

	b1	b2
1	-2,262*10 ⁻³	
2	-0,60348	-0,49457
3	6,0673	5,1057
4	4,856*10 ⁻⁴	
5	4,27*10 ⁻⁶	
6	-10,762	-9,511
7	-0,000	
8	-2,846*10 ⁻⁵	-2,971*10 ⁻⁵
9	3,1816	2,9084
10	506,878	507,079

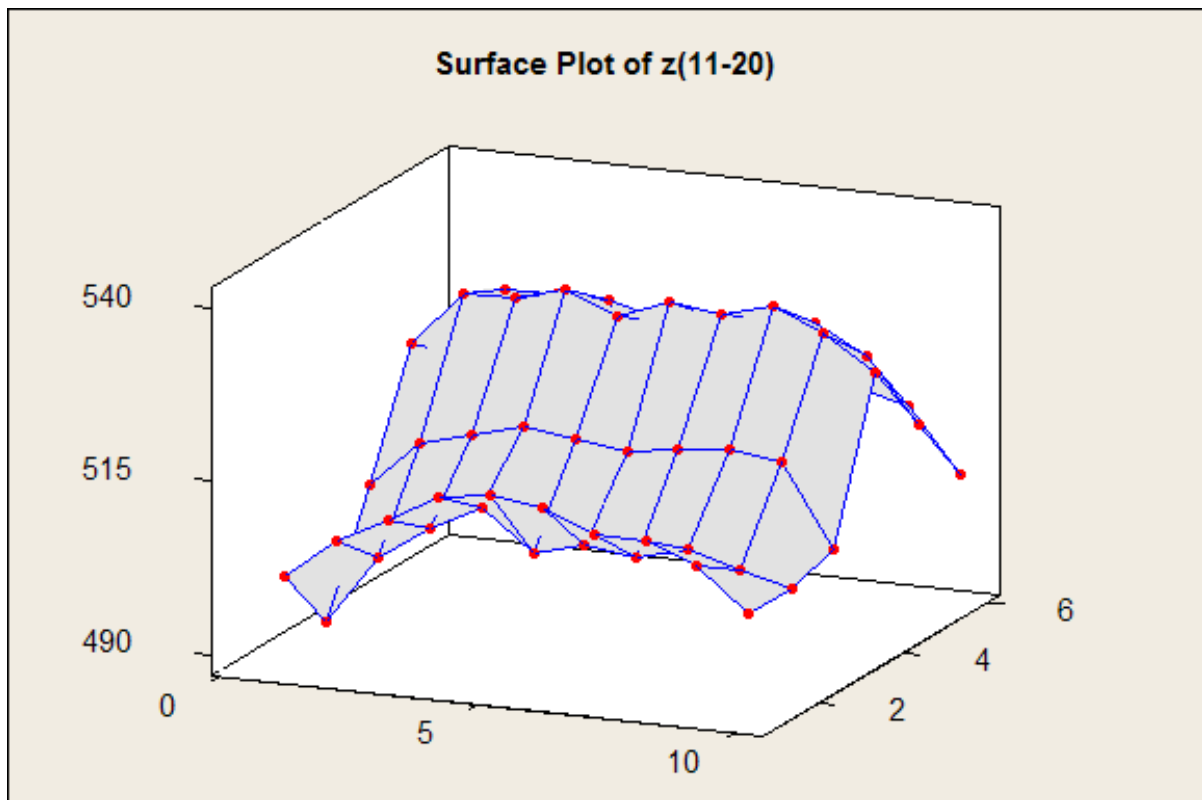
	p-hodnota1	p-hodnota2
1	0,211	
2	0,000	0,000
3	0,000	0,000
4	0,088	
5	0,416	
6	0,000	0,000
7	0,292	
8	0,000	0,000
9	0,000	0,000
10	0,000	0,000

$$z(1-10) = 507,079 - 0,49457 x^2 + 5,1057 x - 9,511 y - 2,971*10^{-5} y^8 + 2,9084 y^2$$

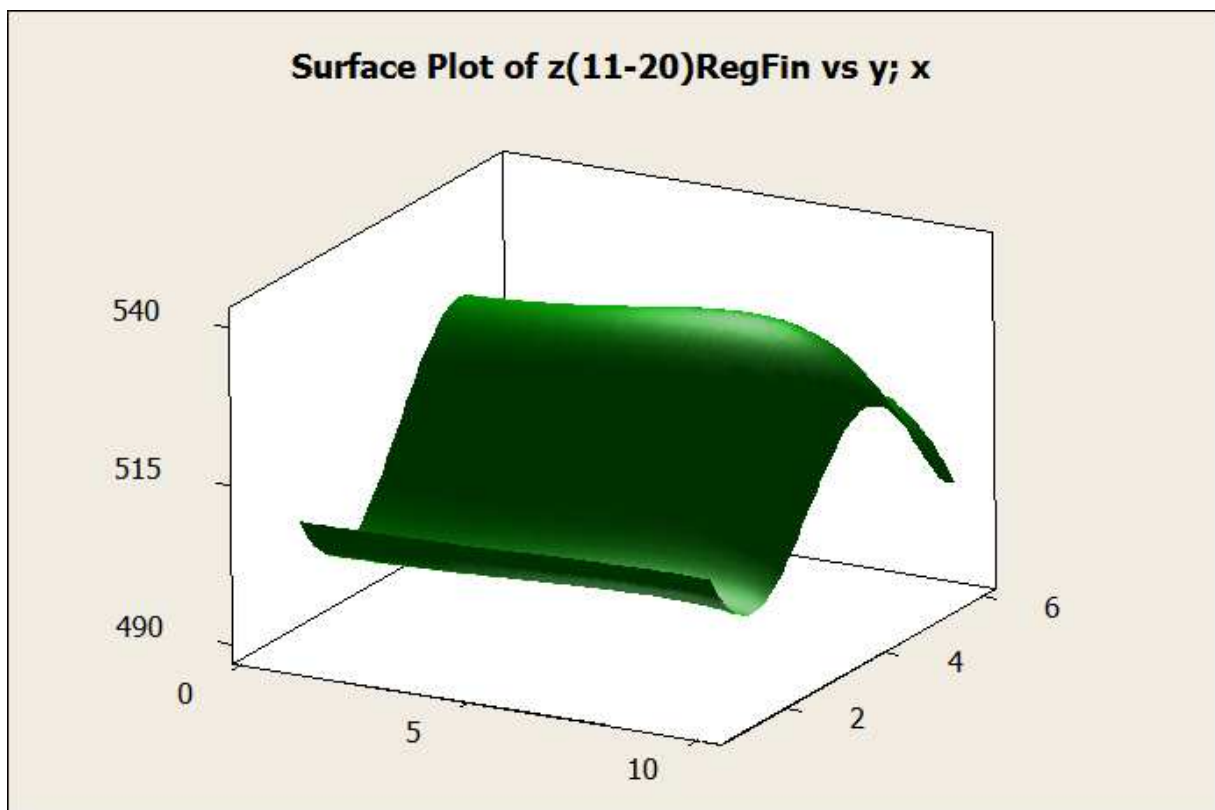
S = 3,19133

R-Sq = 88,4%

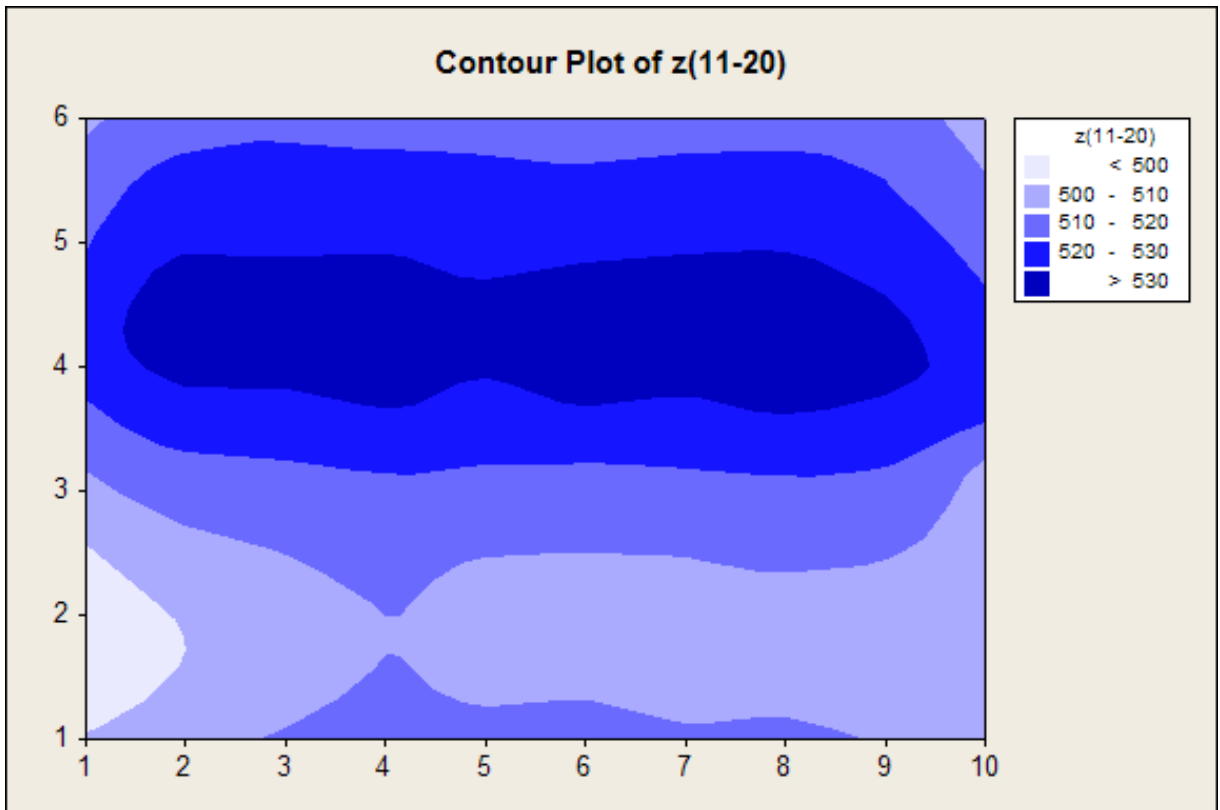
R-Sq(adj) = 87,3%



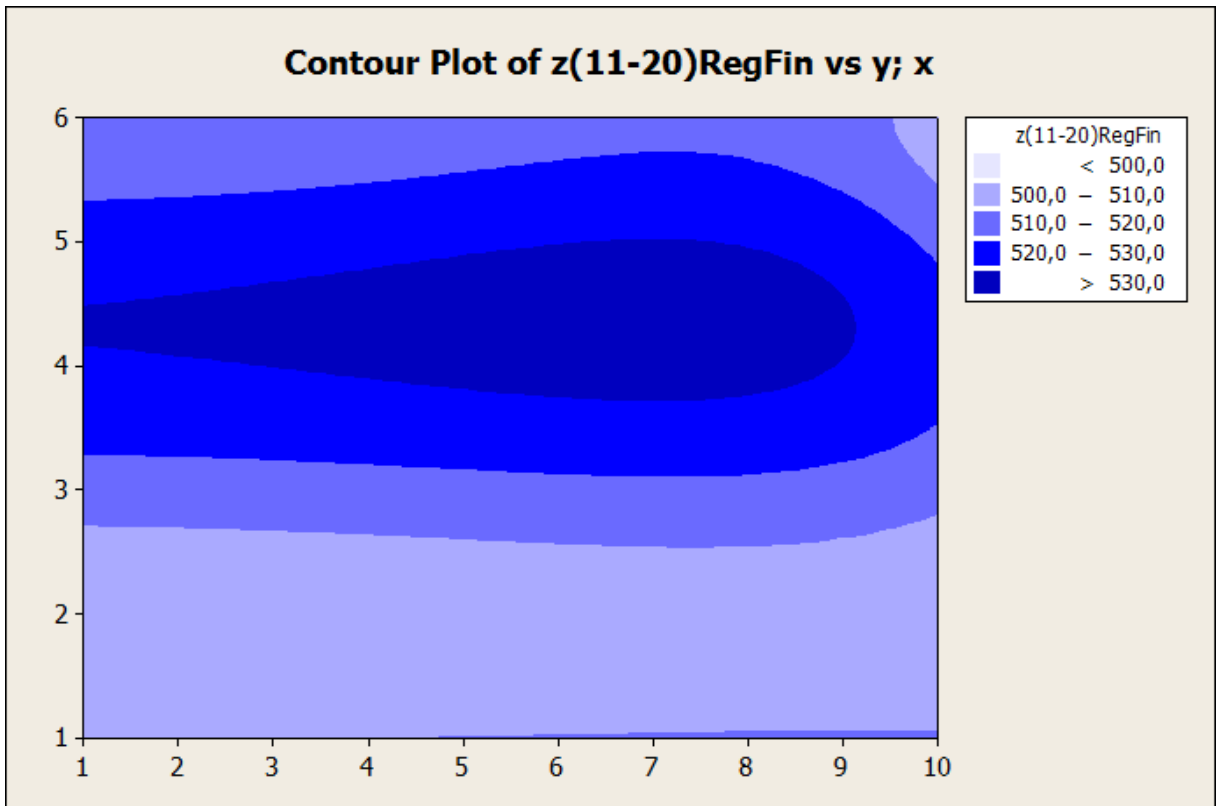
Obr.3.4.5. Interpolační plocha pro druhou oblast



Obr.3.4.6. Regresní plocha pro druhou oblast



Obr.3.4.7. Interpolační plocha pro druhou oblast



Obr.3.4.8. Regresní plocha pro druhou oblast

Regression Analysis: z(11-20)

The regression equation is

$$z(11-20) = 541 + 0,0109 y_6 + 0,000000 x_{10}y_{10} - 0,000000 x_3y_9 + 0,000001 x_5y_4 - 1,45 y_4 + 0,0416 x_2y - 0,000002 x_6y_2 - 37,8 y + 7,27 y_3$$

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	541,204	4,753	113,87	0,000
y ₆	0,010935	0,001650	6,63	0,000
x ₁₀ y ₁₀	0,00000000	0,00000000	0,88	0,383
x ₃ y ₉	-0,00000000	0,00000000	-1,48	0,146
x ₅ y ₄	0,00000051	0,00000030	1,66	0,102
y ₄	-1,4525	0,1809	-8,03	0,000
x ₂ y	0,04162	0,01153	3,61	0,001
x ₆ y ₂	-0,00000220	0,00000067	-3,29	0,002
y	-37,843	4,654	-8,13	0,000
y ₃	7,2702	0,8406	8,65	0,000

S = 3,83883 R-Sq = 88,4% R-Sq(adj) = 86,4%

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	9	5637,90	626,43	42,51	0,000
Residual Error	50	736,83	14,74		
Total	59	6374,73			

prediktor	i	j
1	0	6
2	10	10
3	3	9
4	5	4
5	0	4
6	2	1
7	6	2
8	0	1
9	0	3
10	0	0

	b1	b2
1	0,010935	1,0413*10 ⁻²
2	0,0000000	
3	-0,0000000	
4	5,1*10 ⁻⁷	2*10 ⁻⁷
5	-1,4525	-1,4140
6	0,04162	2,9151*10 ⁻²
7	-2,2*10 ⁻⁶	-1,39*10 ⁻⁶
8	-37,843	-37,303
9	7,2702	7,1321
10	541,204	541,086

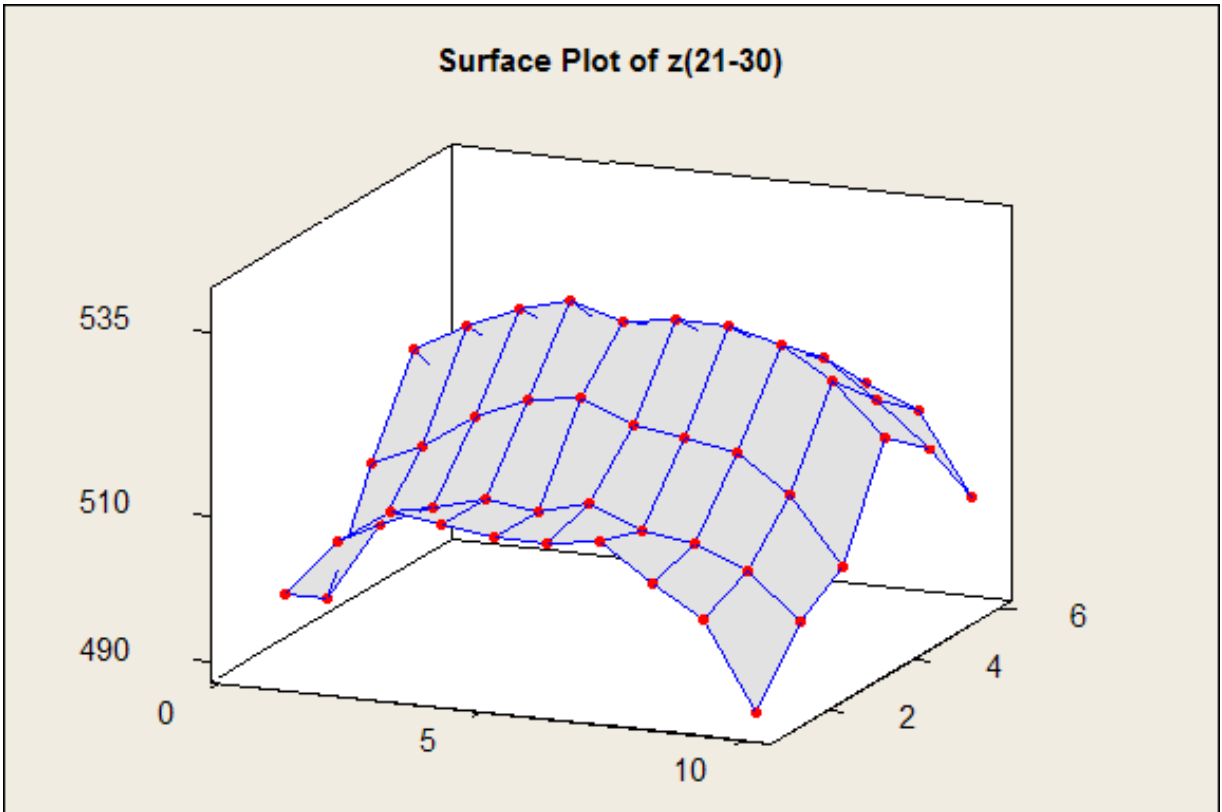
	p-hodnota1	p-hodnota2
1	0,000	0,000
2	0,000	
3	0,383	
4	0,146	0,044
5	0,102	0,000
6	0,000	0,001
7	0,001	0,000
8	0,002	0,000
9	0,000	0,000
10	0,000	0,000

$$z(1-10) = 541,086 + 1,0413*10^{-2} y_6^6 + 2*10^{-7} x_5^5 y_4^4 - 1,4140 y_4^4 + 2,9151*10^{-2} x_2^2 y + 1,39*10^{-6} x_6^6 y^2 - 37,303 y + 7,1321 y^3$$

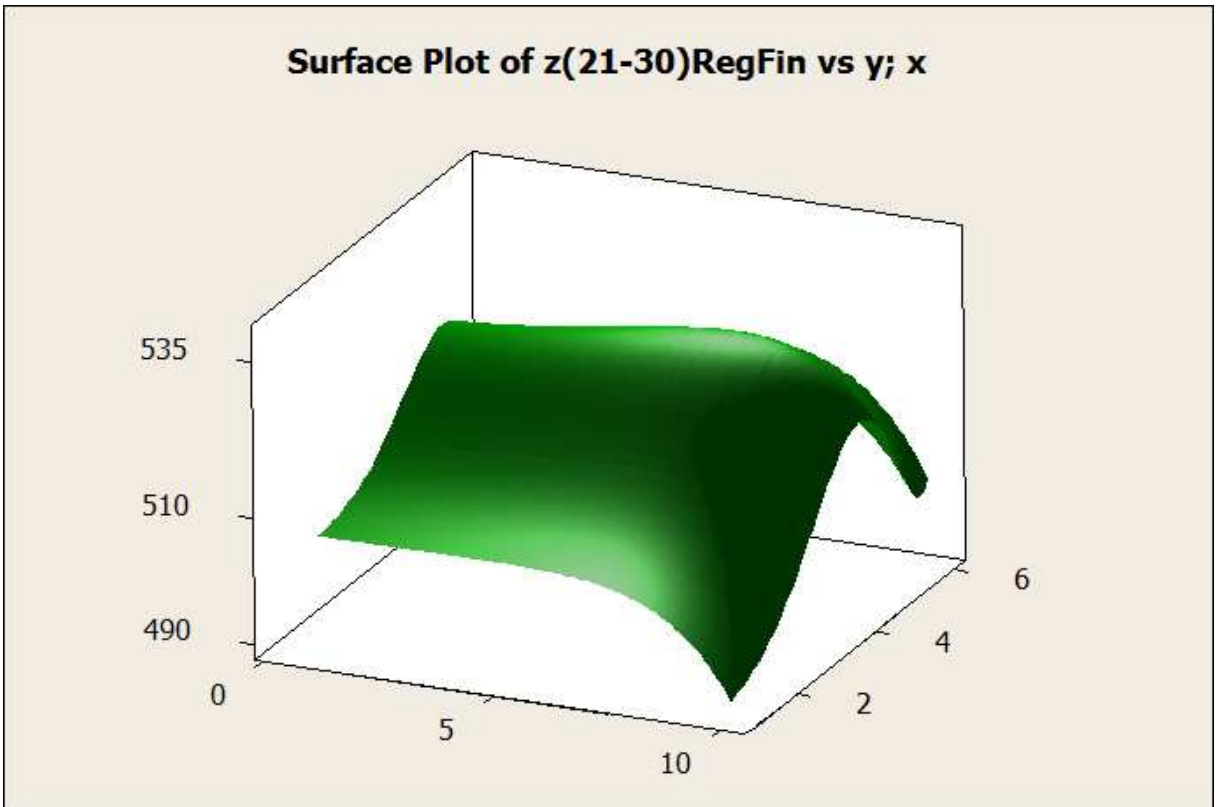
S = 3,86334

R-Sq = 87,8%

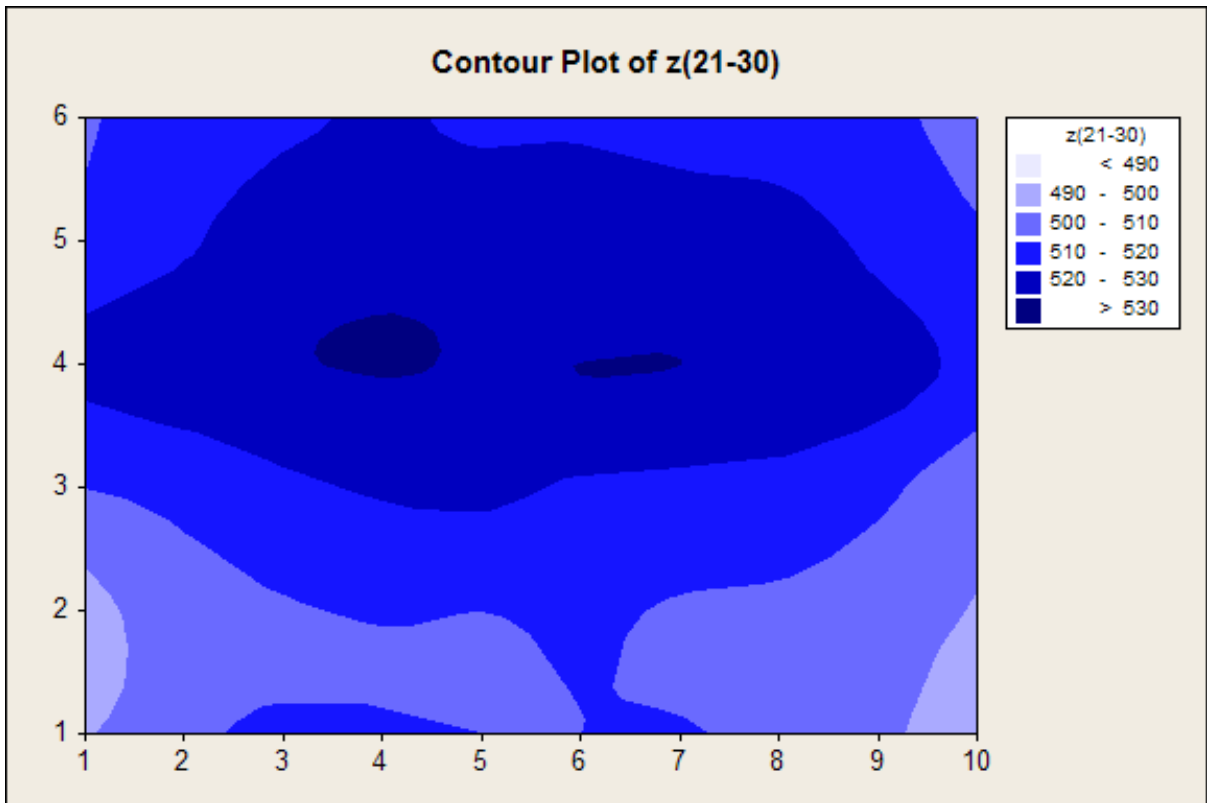
R-Sq(adj) = 86,2%



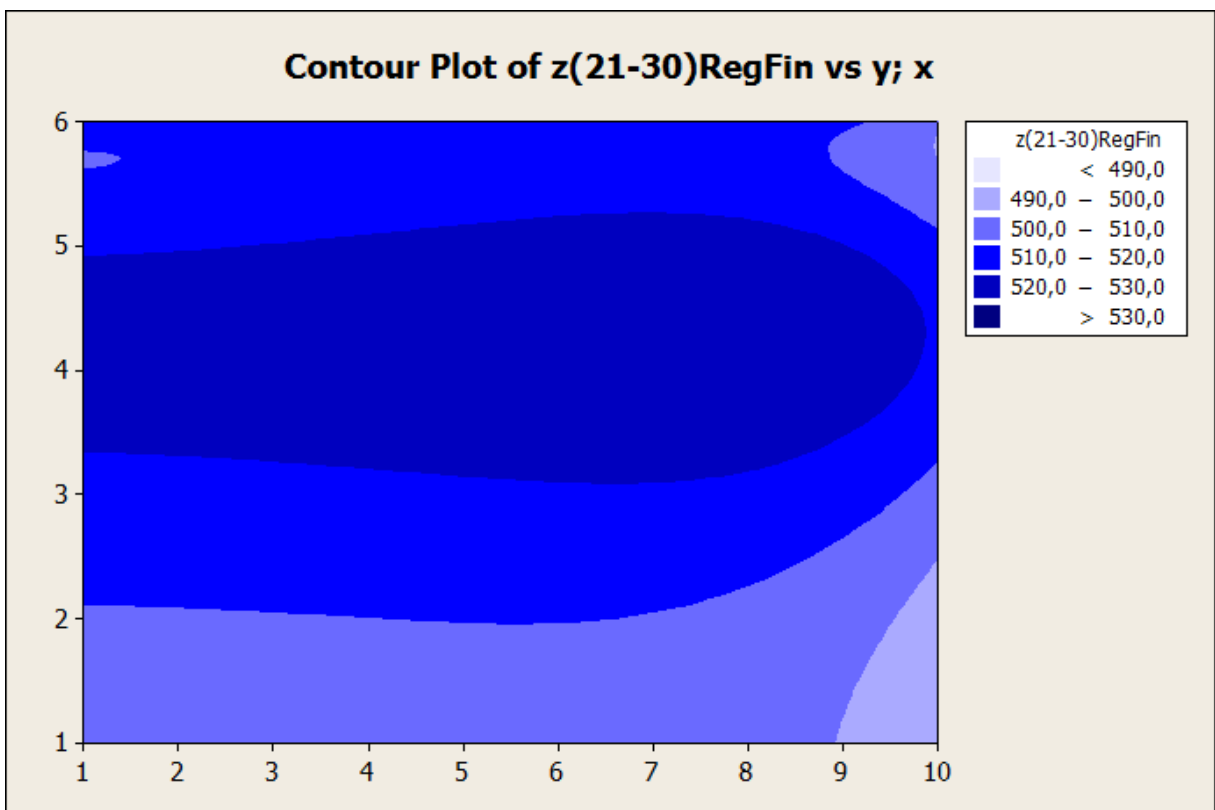
Obr.3.4.9. Interpolační plocha pro třetí oblast



Obr.3.4.10. Regresní plocha pro třetí oblast



Obr.3.4.11. Interpoláční plocha pro třetí oblast



Obr.3.4.12. Regresní plocha pro třetí oblast

Regression Analysis: z(21-30)

The regression equation is

$$z(21-30) = 507 - 0,000002 x7 + 0,165 y4 - 0,00216 y7 - 0,000006 x3y5 + 0,000039 y9 + 0,0118 x2y2 - 0,000000 x10y3 + 0,000000 x9y7 + 0,000000 x5y9$$

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	506,658	0,952	532,18	0,000
x7	-0,00000171	0,00000031	-5,54	0,000
y4	0,16475	0,02136	7,71	0,000
y7	-0,0021581	0,0003275	-6,59	0,000
x3y5	-0,00000590	0,00000532	-1,11	0,273
y9	0,00003948	0,00000649	6,09	0,000
x2y2	0,011782	0,004130	2,85	0,006
x10y3	-0,00000000	0,00000000	-0,67	0,506
x9y7	0,00000000	0,00000000	0,48	0,635
x5y9	0,00000000	0,00000000	0,04	0,967

S = 3,59927 R-Sq = 86,8% R-Sq(adj) = 84,4%

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	9	4260,85	473,43	36,54	0,000
Residual Error	50	647,74	12,95		
Total	59	4908,58			

Prediktor	i	j
1	7	0
2	0	4
3	0	7
4	3	5
5	0	9
6	2	2
7	10	3
8	9	7
9	5	9
10	0	0

	b1	b2
1	-1,71*10 ⁻⁶	-1,75*10 ⁻⁶
2	0,16475	0,16975
3	-2,158*10 ⁻³	-2,2347*10 ⁻³
4	-5,9*10 ⁻⁶	-3,56*10 ⁻⁶
5	3,948*10 ⁻⁵	4,097*10 ⁻⁵
6	1,1782*10 ⁻²	8,961*10 ⁻³
7	-0,000	
8	0,000	
9	0,000	
10	506,658	506,933

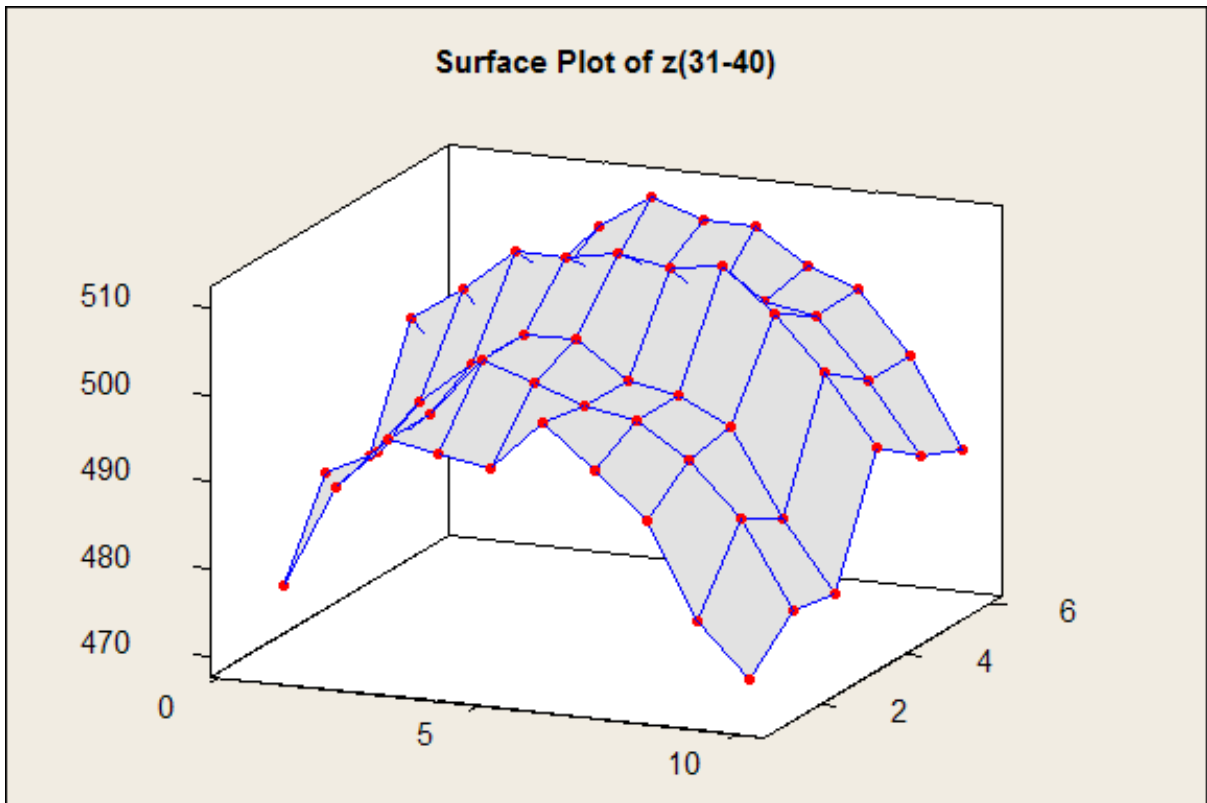
	p-hodnota1	p-hodnota2
1	0,000	0,000
2	0,000	0,000
3	0,000	0,000
4	0,273	0,002
5	0,000	0,000
6	0,006	0,000
7	0,506	
8	0,635	
9	0,967	
10	0,000	0,000

$$z(1-10) = 506,933 - 1,75*10^{-6}x^7 + 0,16975y^4 - 2,2347*10^{-3}y^7 - 3,56*10^{-6}x^3y^5 + 4,097*10^{-5}y^9 + 8,961*10^{-3}x^2y^2$$

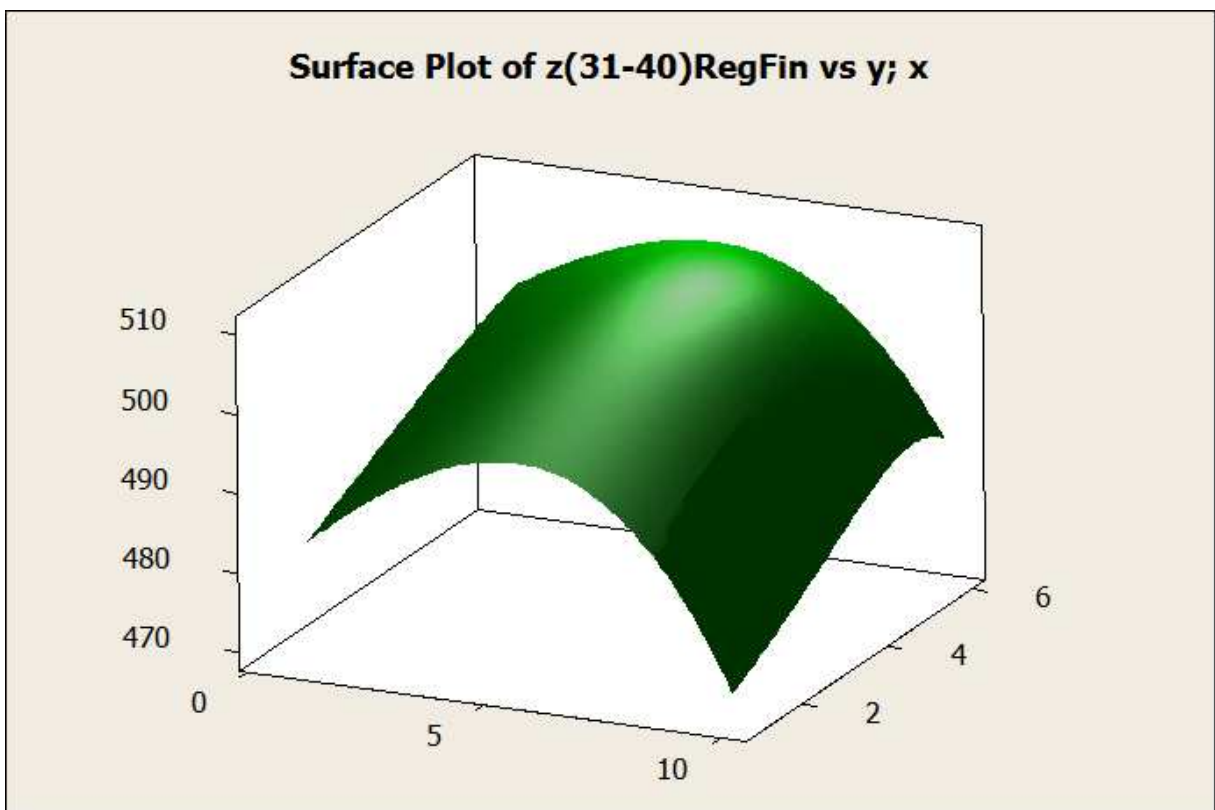
S = 3,54761

R-Sq = 86,4%

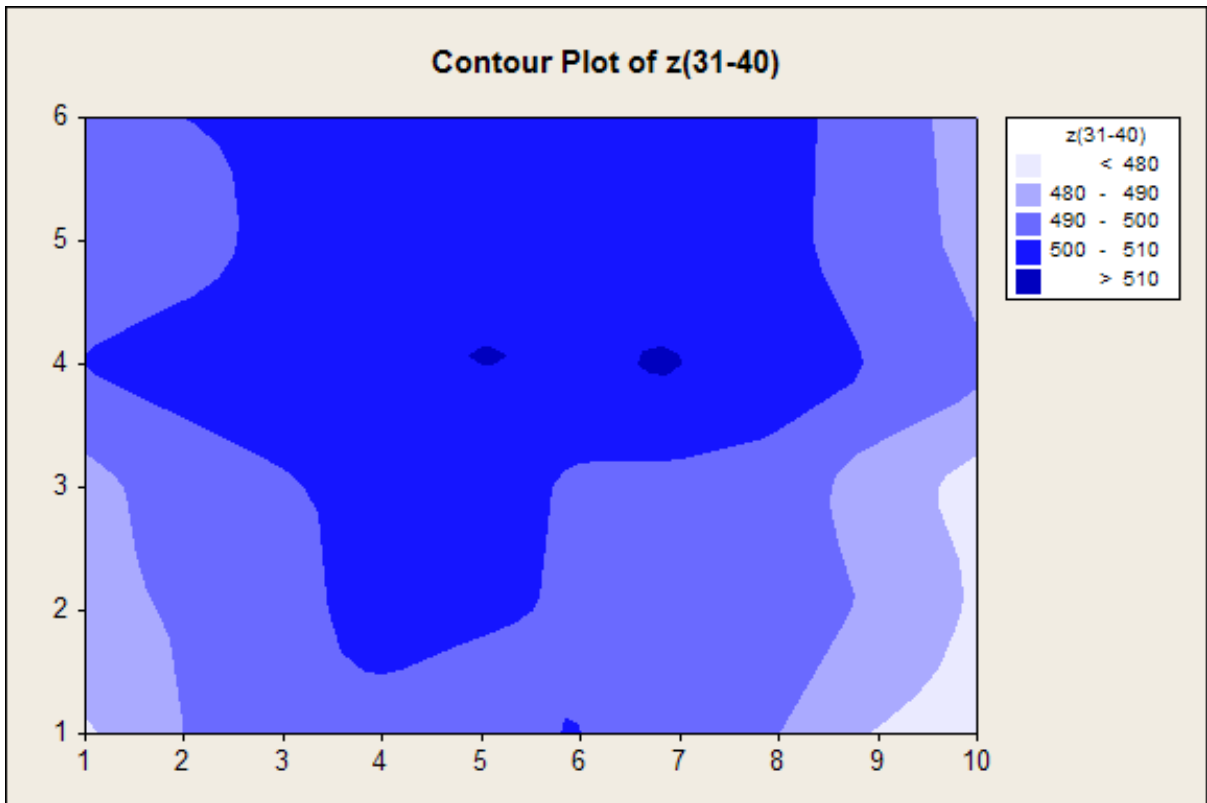
R-Sq(adj) = 84,9%



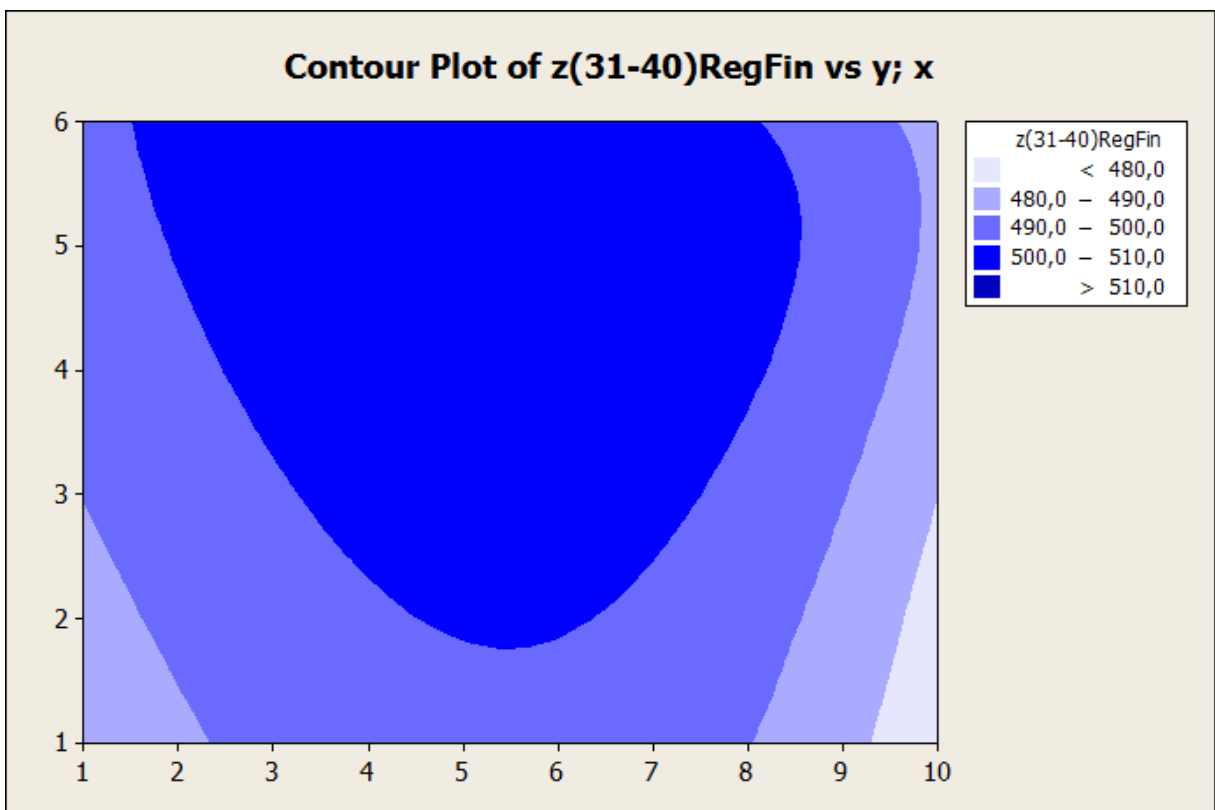
Obr.3.4.13. Interpolační plocha pro čtvrtou oblast



Obr.3.4.14. Regresní plocha pro čtvrtou oblast



Obr.3.4.15. Interpolační plocha pro čtvrtou oblast



Obr.3.4.16. Regresní plocha pro čtvrtou oblast

Regression Analysis: z(31-40)

The regression equation is

$$z(31-40) = 473 - 0,000308 xy_6 + 4,07 y_1 - 0,0595 x_3 - 0,000000 x_6y_7 - 0,00341 x_3y_1 + 5,70 x + 0,000007 xy_8 + 0,000342 x_3y_3 + 0,000000 x_8y_5$$

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	472,705	2,659	177,78	0,000
xy ₆	-0,0003080	0,0001199	-2,57	0,013
y	4,0662	0,6795	5,98	0,000
x ₃	-0,059524	0,006262	-9,51	0,000
x ₆ y ₇	-0,0000000	0,0000000	-1,84	0,071
x ₃ y ₁	-0,003411	0,003654	-0,93	0,355
x	5,6953	0,5143	11,07	0,000
xy ₈	0,00000661	0,00000280	2,36	0,022
x ₃ y ₃	0,0003421	0,0001743	1,96	0,055
x ₈ y ₅	0,0000000	0,0000000	1,33	0,188

S = 3,37458 R-Sq = 88,1% R-Sq(adj) = 86,0%

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	9	4214,79	468,31	41,12	0,000
Residual Error	50	569,39	11,39		
Total	59	4784,18			

Prediktor	i	j
1	1	6
2	0	1
3	3	0
4	6	7
5	3	1
6	1	0
7	1	8
8	3	3
9	8	5
10	0	0

	b1	b2
1	-3,08*10 ⁻⁴	-3,596*10 ⁻⁵
2	4,0662	3,2569
3	-5,952*10 ⁻²	-5,8715*10 ⁻²
4	-0,000	
5	-3,411*10 ⁻³	
6	5,6953	5,2296
7	6,61*10 ⁻⁶	
8	3,421*10 ⁻⁴	6,767*10 ⁻⁵
9	0,000	
10	472,705	475,193

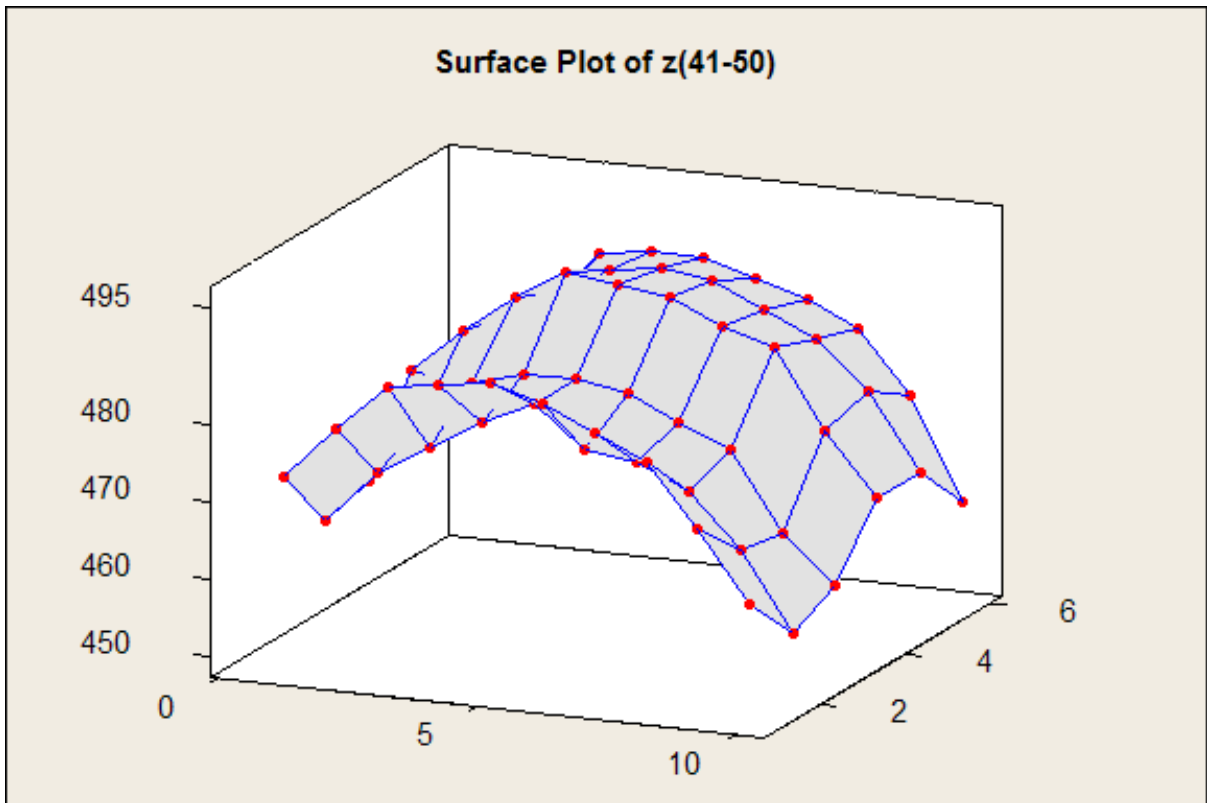
	p-hodnota1	p-hodnota2
1	0,013	0,001
2	0,000	0,000
3	0,000	0,000
4	0,071	
5	0,355	
6	0,000	0,000
7	0,022	
8	0,055	0,020
9	0,188	
10	0,000	0,000

$$z(1-10) = 475,193 - 3,596*10^{-5}xy_6 + 3,2569y - 5,8715*10^{-2}x^3 + 5,2296x + 6,767*10^{-5}x^3y^3$$

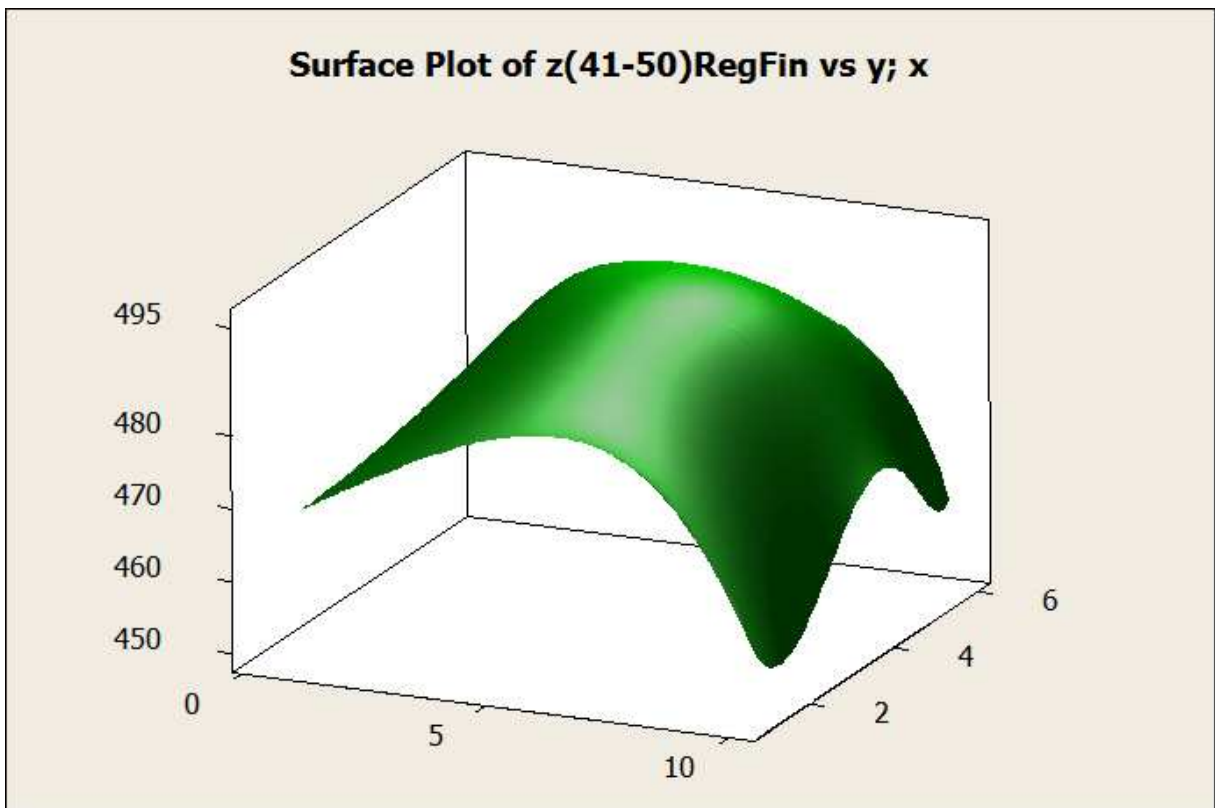
S = 3,44546

R-Sq = 86,6%

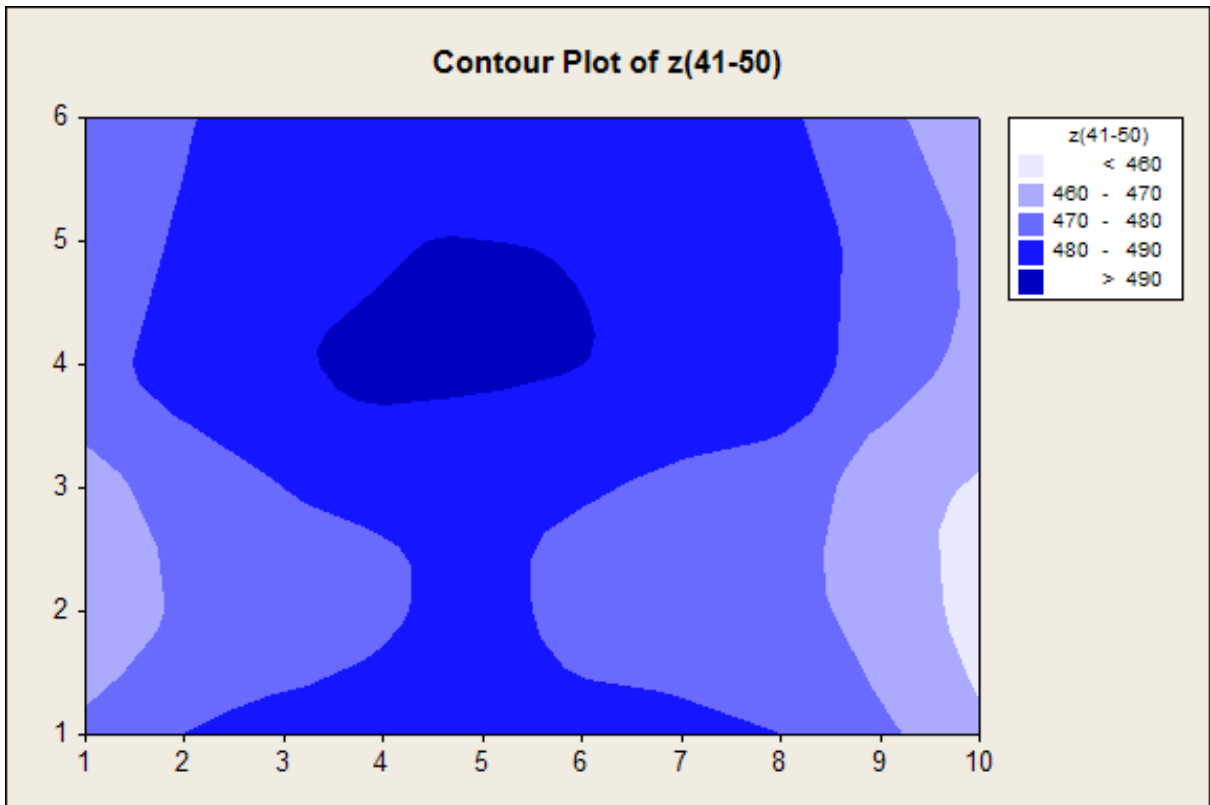
R-Sq(adj) = 85,4%



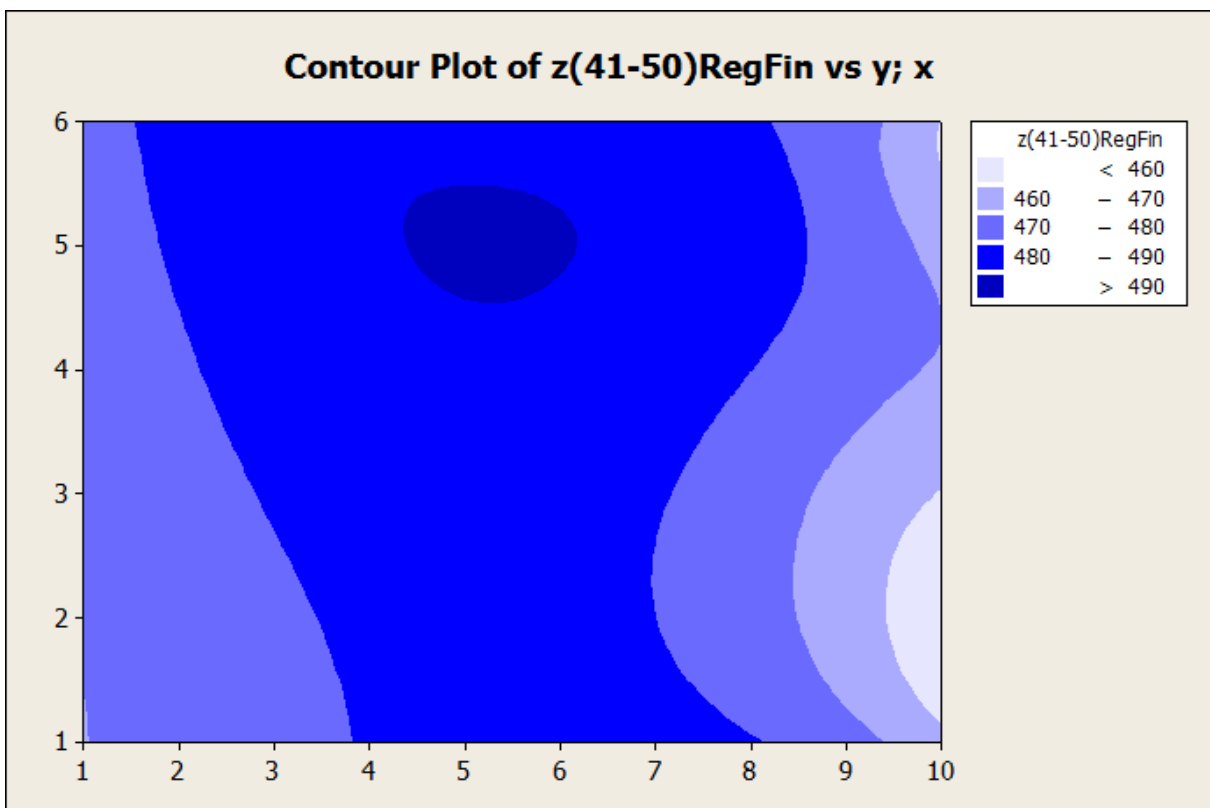
Obr.3.4.17. Interpolační plocha pro pátou oblast



Obr.3.4.18. Regresní plocha pro pátou oblast



Obr.3.4.19. Interpolační plocha pro pátou oblast



Obr.3.4.20. Regresní plocha pro pátou oblast

Regression Analysis: z(41-50)

The regression equation is

$$z(41-50) = 466 - 0,000005 x6y3 - 0,000586 x5y + 0,000302 x4y3 - 0,000023 x2y6 + 3,71 x + 0,000027 x6y2 - 0,00859 x3y2 + 0,210 xy2 + 0,000000 x6y10$$

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	465,809	1,735	268,49	0,000
x6y3	-0,00000488	0,00000097	-5,06	0,000
x5y	-0,00058629	0,00007061	-8,30	0,000
x4y3	0,00030241	0,00007793	3,88	0,000
x2y6	-0,00002264	0,00000494	-4,58	0,000
x	3,7115	0,4739	7,83	0,000
x6y2	0,00002695	0,00000451	5,98	0,000
x3y2	-0,008593	0,002603	-3,30	0,002
xy2	0,21023	0,03937	5,34	0,000
x6y10	0,00000000	0,00000000	3,35	0,002

S = 3,42244 R-Sq = 87,4% R-Sq(adj) = 85,1%

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	9	4061,33	451,26	38,53	0,000
Residual Error	50	585,65	11,71		
Total	59	4646,98			

Prediktor	i	j
1	6	3
2	5	1
3	4	3
4	2	6
5	1	0
6	6	2
7	3	2
8	1	2
9	6	10
10	0	0

	b1	b2
1	$-4,88 \cdot 10^{-6}$	
2	$-5,862 \cdot 10^{-4}$	
3	$3,0241 \cdot 10^{-4}$	
4	$-2,264 \cdot 10^{-5}$	
5	3,7115	
6	$2,695 \cdot 10^{-5}$	
7	$-8,593 \cdot 10^{-3}$	
8	0,21023	
9	$1,29972 \cdot 10^{-12}$	
10	465,809	

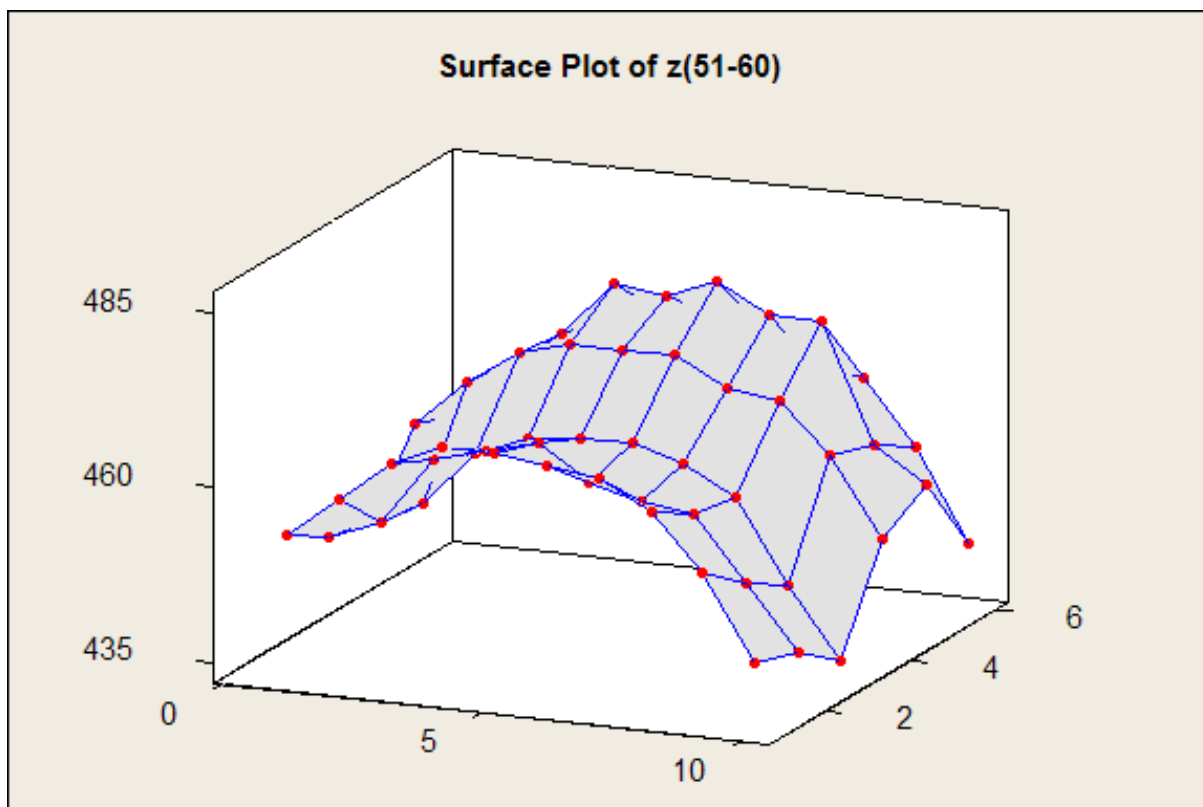
	p-hodnota1	p-hodnota2
1	0,000	
2	0,000	
3	0,000	
4	0,000	
5	0,000	
6	0,000	
7	0,002	
8	0,000	
9	0,002	
10	0,000	

$$z(1-10) = 465,809 - 4,88 \cdot 10^{-6} x^6 y^3 - 5,8629 \cdot 10^{-4} x^5 + 3,0241 \cdot 10^{-4} x^4 y^3 - 2,264 \cdot 10^{-5} x^2 y^6 + 3,7115 x + 2,695 \cdot 10^{-5} x^6 y^2 - 8,593 \cdot 10^{-3} x^3 y^2 + 0,21023 x y^2 + 1,29972 \cdot 10^{-12} x^6 y^{10}$$

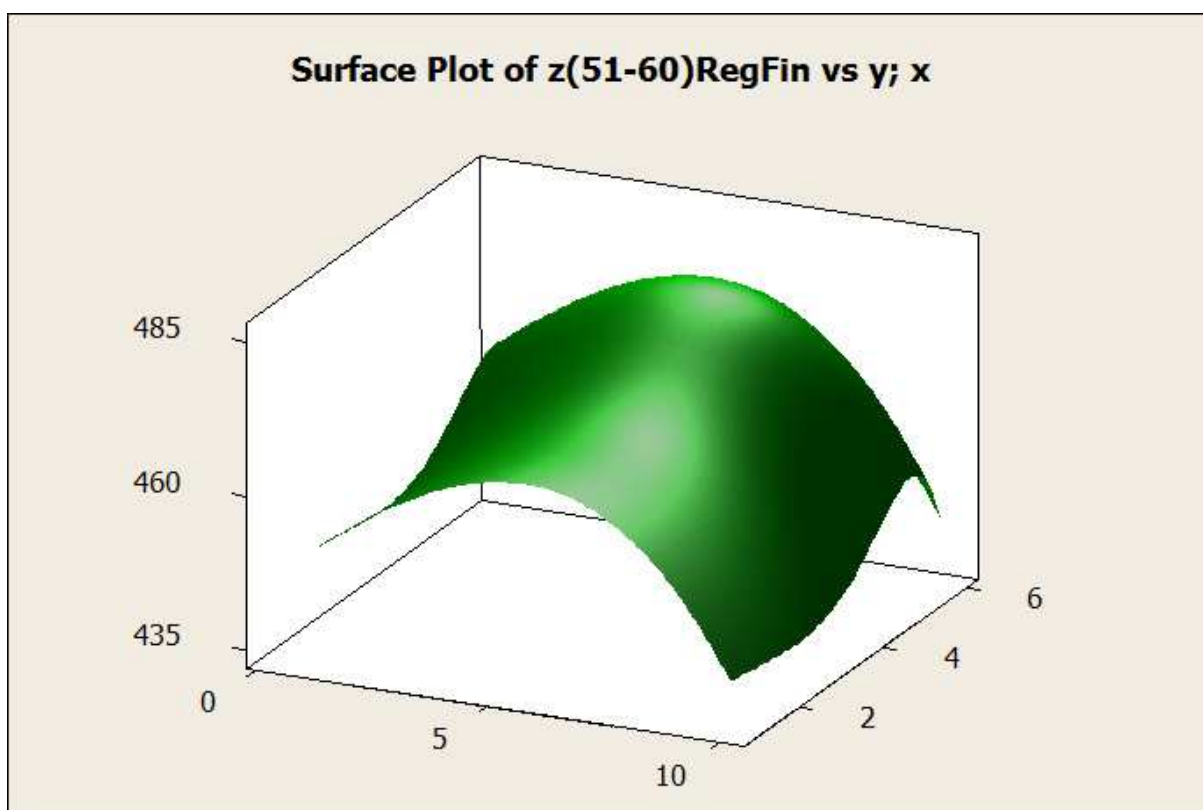
S = 3,42244

R-Sq = 87,4%

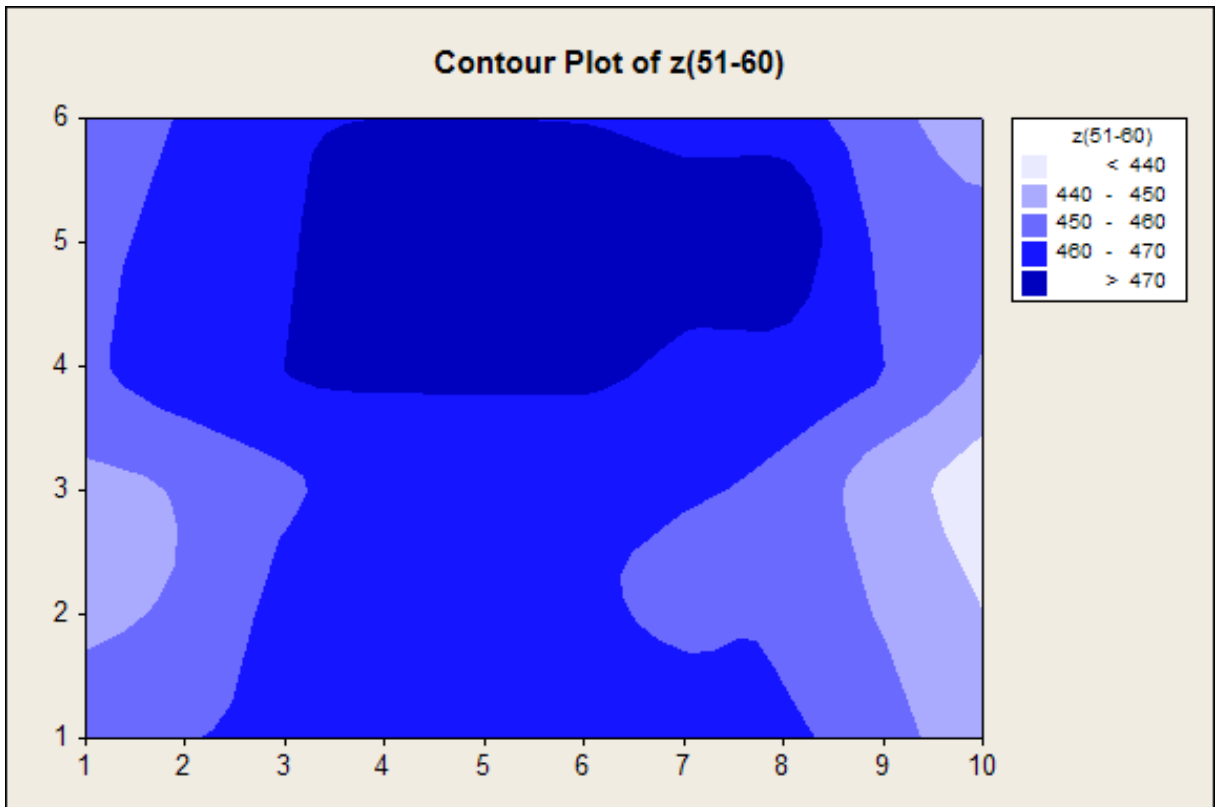
R-Sq(adj) = 85,1%



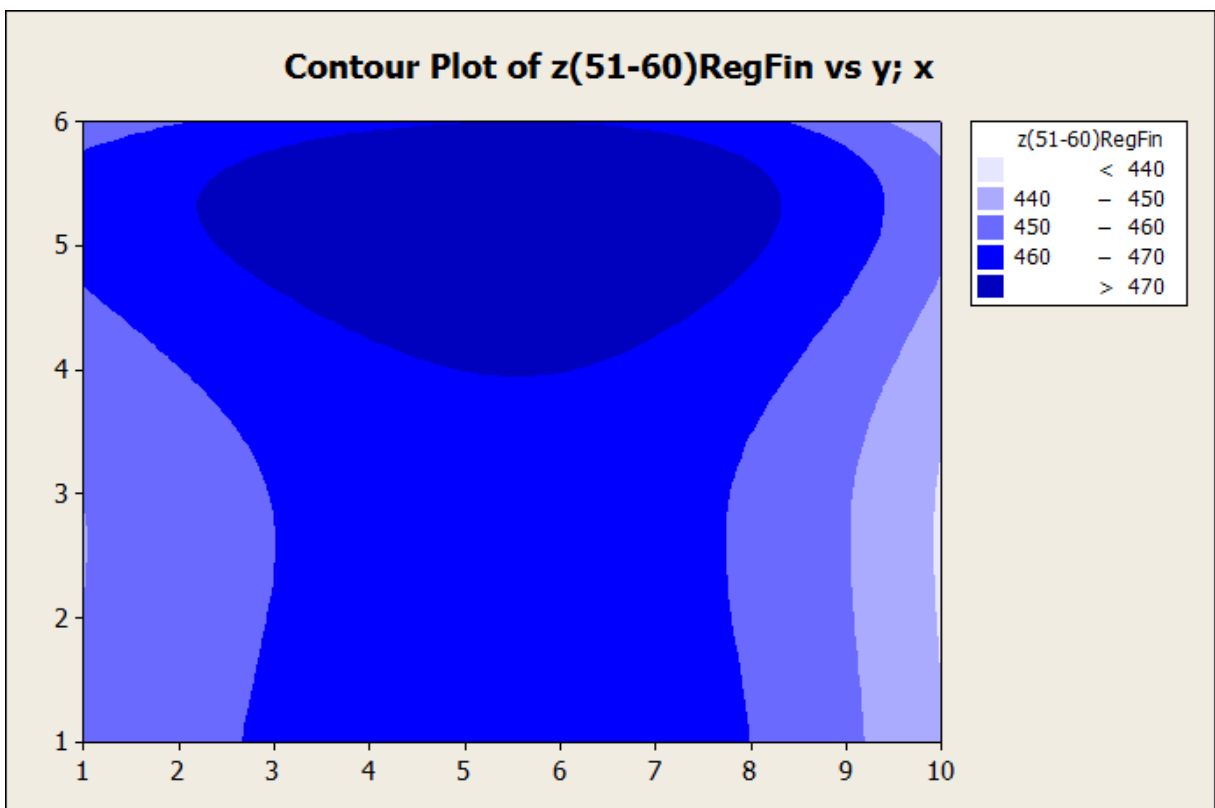
Obr.3.4.21. Interpolační plocha pro šestou oblast



Obr.3.4.22. Regresní plocha pro šestou oblast



Obr.3.4.23. Interpolační plocha pro šestou oblast



Obr.3.4.24. Regresní plocha pro šestou oblast

Regression Analysis: z(51-60)

The regression equation is

$$z(51-60) = 445 - 0,407 y^2 + 0,000000 x_{10}y^2 - 0,000168 x_4y^1 + 6,08 x - 0,000968 y^7 + 0,000000 x_7y^4 + 0,00618 y^6 - 0,0636 x^3 - 0,000000 x_{10}y^{10}$$

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	445,168	1,879	236,91	0,000
y ²	-0,4070	0,2373	-1,72	0,093
x ₁₀ y ²	0,00000000	0,00000000	0,67	0,504
x ₄ y	-0,0001680	0,0002319	-0,72	0,472
x	6,0823	0,4523	13,45	0,000
y ⁷	-0,0009680	0,0001871	-5,17	0,000
x ₇ y ⁴	0,00000000	0,00000000	0,56	0,580
y ⁶	0,006180	0,001267	4,88	0,000
x ³	-0,063607	0,006189	-10,28	0,000
x ₁₀ y ¹⁰	-0,00000000	0,00000000	-1,02	0,312

S = 3,26040 R-Sq = 90,6% R-Sq(adj) = 88,9%

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	9	5113,89	568,21	53,45	0,000
Residual Error	50	531,51	10,63		
Total	59	5645,40			

Prediktor	i	j
1	0	2
2	10	2
3	4	1
4	1	0
5	0	7
6	7	4
7	0	6
8	3	0
9	10	10
10	0	0

	b1	b2
1	-0,4070	-0,4770
2	2,166*10 ⁻¹¹	
3	-1,680*10 ⁻⁴	
4	6,0823	5,9349
5	-9,680*10 ⁻⁴	-1,041*10 ⁻³
6	1,1354*10 ⁻⁹	
7	6,180*10 ⁻³	6,654*10 ⁻³
8	-6,360*10 ⁻²	-6,4339*10 ⁻²
9	-2,765*10 ⁻¹⁷	
10	445,168	445,832

	p-hodnota1	p-hodnota2
1	0,093	0,016
2	0,504	
3	0,472	
4	0,000	0,000
5	0,000	0,000
6	0,580	
7	0,000	0,000
8	0,000	0,000
9	0,312	
10	0,000	0,000

$$z(1-10) = 445,832 - 0,4770y^2 + 5,9349x - 1,041*10^{-3}y^7 + 6,654*10^{-3}y^6 - 6,4339*10^{-2}x^3$$

S = 3,19653

R-Sq = 90,2%

R-Sq(adj) = 89,3%

4. Závěr

Smyslem tohoto velice drahého experimentu bylo získat co nejpodrobnější přehled o rozložení tvrdosti v prvních 60mm pod povrchem opěrného válce a získat tak velice cennou zpětnou vazbu o schopnostech a možnostech naší výroby. Náklady na samotnou výrobu válce a jeho následné „zničení“ při tomto experimentu se pohybují v řádech milionů Kč a bylo tedy důležité, vytěžit ze získaných dat maximum. K tomu nám měla pomoci kombinace běžné grafické analýzy a matematické statistiky, protože jedině ta nám poskytuje objektivní pohled na naměřená data.

Prvním grafickým výstupem jsou lineární regrese jedné proměnné, pomocí kterých si můžeme udělat základní obrázek o hodnotách tvrdosti pod povrchem válce a jejich rozložení. Tyto křivky modelují jak průběhy tvrdosti směrem do středu válce v závislosti na vzdálenosti od okraje válce, tak i průběhy tvrdosti ve směrech rovnoběžných s osou válce v závislosti na vzdálenosti od osy válce. Smyslem této lineární regrese bylo vytvořit co možná nejjednodušší model, který by co možná nejpřesněji aproximoval skutečný jev a zároveň odstraňoval z naměřených dat náhodné chyby. Na těchto regresních funkcích lze názorně demonstrovat hloubku a rovnoměrnost prokalení, což jsou asi dva nejvýznamnější parametry, které každého zákazníka při nákupu opěrných válců zajímají. Hloubka prokalení totiž výrazně ovlivňuje životnost opěrného válce.

Dalším výstupem byla polynomická lineární regrese více proměnných, tedy hledání vhodných regresních ploch popisujících s dostatečnou přesností a zároveň jednoduchostí rozložení tvrdosti v jednotlivých oblastech, tedy podpovrchových vrstvách válce. Protože žádný vhodný software neexistuje, bylo rozhodnuto, že součástí práce bude naprogramování tzv. lokálního makra v Minitabu, který se stále častěji objevuje v průmyslových podnicích jako nástroj grafické a statistické analýzy. Získané výsledky ukázaly, že rozložení tvrdosti je v některých ohledech jiné, než se očekávalo před experimentem a můžeme je shrnout do následujících bodů:

- 1) Tvrdosti kolem 4. a 5. pozice otočení (tedy 180° a 240°) dosahují nejvyšších hodnot.
- 2) Tvrdosti kolem 1. a 2. pozice otočení (tedy 0° a 60°) dosahují nejnižších hodnot.
- 3) Na krajích těla válce jsou tvrdosti nižší, směrem do středu válce se tvrdosti zvyšují.

- 4) Čím je zkoumaná oblast válce blíže středové ose válce, tím je zakřivení plochy popsané v předchozím bodě patrnější.
- 5) Čím je zkoumaná oblast válce blíže středové ose válce, tím jsou hodnoty tvrdosti, vynášené na ose z, nižší.

Na začátku práce byly stanoveny tyto dva cíle:

- 1) Vytvořit atraktivní zpětnou vazbu o kvalitě výroby opěrných válců ve Škoda Plzeň.
- 2) Najít způsob, jak pomocí dostupných softwarových prostředků najít vhodnou regresní plochu v reálném čase.

5. Seznam použitých zdrojů

- [1] Anděl, Jiří: Matematická statistika, SNTL/ALFA Praha 1978
- [2] Beneš, M., Maroš, B.: Vyjádření přetvárného odporu a měrné přetvárné práce materiálu 13 240 v závislosti na teplotě a logaritmickém stupni přetvoření, Hutnické listy č.3, 1985
- [3] Forejt, M.:Teorie tváření a nástroje, Brno: VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ, 1991
- [4] Jareš, Vojtěch: Základní zkoušky kovů a jejich teorie, AKADEMIA Praha 1966
- [6] Hebák, P.,Hustopecký, J.: Vícerozměrné statistické metody, Praha: SNTL/ALFA, 1987
- [7] Maroš, B.:Empirické modely I, Brno: VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ, 2001
- [8] Anděl, Jiří: Statistické metody, MATFYZPRESS Praha 1993
- [9] Reisenauer, Roman: Metody matematické statistiky a jejich aplikace, SNTL Praha 1970
- [10] Kracík, Adam: Hodnocení pevnosti šroubů M8 a M12 pomocí měření tvrdosti (diplomová práce), FSI VUT Brno 2003
- [11] Maděříč, Jiří: Matematický model nerovnoměrnosti deformace matice M16 (diplomová práce), FSI VUT Brno 2003
- [12] Meloun, M., Militký, J.: Kompendium statistického zpracování dat, Academia 2006
- [13] Elfmark, J.:Tváření kovů, Praha: SNTL,1992
- [14] Píšek, Z.:Náuka o materiálu II, 1.svazek, Praha: ČSAU 1959
- [15] Kamenský, R.:Prodlužování životnosti hutních válců, Praha: SNTL,1962
- [16] CAHN, R.W.:Physical Metallurgy, North-Holland Pub.Co, Amsterdam-London 1970
- [17] Myslivec,T.:Fyzikálně chemické základy ocelářství,SNTL,Praha-ALFA, Bratislava 1971
- [18] SMITHELLS, C.J.:Metals Reference Book, Vol.1, Butter-worths, London 1967
- [19] CHVOJKA, J.:Vady ingotů, Praha: SNTL,1968

Seznam příloh

A) Naměřené hodnoty tvrdosti (zdrojova_data.xls)

B) Program pro výpočet regresních funkcí (macro.pdf)