



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

## VYBRANÉ MODELY FINANČNÍ OPTIMALIZACE

SELECTED FINANCIAL OPTIMIZATION MODELS

### DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

### AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. DANIEL BUJNOVSKÝ

### VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

RNDr. PAVEL POPELA, Ph.D.

BRNO 2023



# Zadání diplomové práce

Ústav:	Ústav matematiky
Student:	<b>Bc. Daniel Bujnovský</b>
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	<b>RNDr. Pavel Popela, Ph.D.</b>
Akademický rok:	2022/23

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.1111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

## Vybrané modely finanční optimalizace

### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Student využije své znalosti z oblasti optimalizace, teorie pravděpodobnosti, matematické statistiky, matematické analýzy a lineární algebry, prohloubí si své znalosti z oblasti matematicko–ekonomických optimalizačních modelů a nastuduje vybrané pokročilé modely matematického programování, které bude aplikovat v oblasti finanční optimalizace při zohlednění neurčitých parametrů vstupních dat a vlivu rozložení získávání informací o realizaci neurčitých parametrů v čase. Vytvořené modely bude implementovat pomocí vhodného softwarového nástroje a bude realizovat testovací výpočty pro reálná data.

### Cíle diplomové práce:

1. Osvojení a prohloubení znalostí matematického programování a vybraných matematicko–ekonomických a finančních modelů.
2. Vytvoření matematických modelů vybraných problémů finanční optimalizace.
3. Studium jejich teoretických vlastností a jejich transformací.
4. Výběr efektivních algoritmů řešení.
5. Implementace modelů, propojení s datovou základnou a realizace výpočetních experimentů.

### Seznam doporučené literatury:

WALLACE, S. W. and KING, A. Modeling with Stochastic Programming. Springer Verlag, 2012. ISBN 978-0-387-87816-4.

WILLIAMS, H. P. Model building in mathematical programming. 5th ed. Hoboken, N.J.: John Wiley & Sons. 2013. ISBN 978-1-118-44333-0.

ANDĚL, J. Statistické metody. Vyd. 4. Praha: Matfyzpress. 2007. ISBN 978-80-7378-003-6.

BIRGE, J. R. and LOUVEAUX, F. Introduction to Stochastic Programming. Springer Verlag, 1997. ISBN: 978-1-4614-0236-7.

KALL, P. and WALLACE, S. W. Stochastic Programming. New York: John Wiley & Sons, 1993. ISBN 978-0471951582.

RUSZCZYNSKI, A. et al. Handbooks in Operations Research and Management Science, vol. 10: Stochastic Programming. Amsterdam: Elsevier, 2003. ISBN 978-0-444-50854-6.

BAZARAA, M. S., SHERALI, H. D. a SHETTY, C. M. Nonlinear programming: theory and algorithms. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons. 1993. ISBN 0471599735.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2022/23

V Brně, dne

L. S.

---

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## Abstrakt

Tato práce se zaměřuje na modely optimální správy aktiv a pasiv. Praktická část ilustruje různé přístupy modelování v závislosti na formulaci řešeného problému, volbě investičních nástrojů a rovněž zvoleném přístupu matematické optimalizace. Stěžejními ukázkami jsou imunizace portfolia a model Yasuda-Kasai doplněné o úvodní rozšířený Markowitzův model. Autor napříč prací podává ucelený přehled o typech finančních rizik a metrik jejich měření, spolu s možnými formulacemi očekávaných návratností relevantními pro studované problémy. Jednotlivé modely jsou navzájem porovnávány a častokrát obohaceny o další rozšíření s cílem zlepšit jejich možnou praktickou použitelnost. Z hlediska budování optimalizačního modelu jsou rozebrány možné způsoby generování vstupních dat např. pomocí Brownova pohybu. Vše s doprovodem ilustračních obrázků a vzorových kódů. Zahrnuta je rovněž nutná finanční a matematická teorie.

## Summary

This work is focused on models of optimal asset and liability management. The practical section illustrates various ways of modelling strategies depending on the problem formulation, chosen set of assets and the type of the used optimization technique. The main examples are portfolio immunization and the Yasuda-Kasai model together with the extended version of Markowitz model. The author provides across the work an overview of different financial risks and various tools for their measurement together with possible formulations of expected returns relevant to the studied models. The individual models are compared and often extended by other constraints in order to improve their practical applicability. From the point of view of the mathematical optimization several ways of input data generation are described for example by using the extended Brownian motion. All practical parts go hand in hand with illustrative pictures and codes. The necessary financial and mathematical theory is included as well.

## Klíčová slova

Návratnost, riziko, náklady, Markowitzův model, optimalizace portfolia, párování finančních toků, výnosová křivka, imunizace portfolia, model Yasuda-Kasai, scénáře, Brownův pohyb, CVaR, vícestupňová stochastická optimalizace, Python, Gurobi.

## Keywords

Return, risk, costs, Markowitz model, portfolio optimization, cashflow matching, yield curve, portfolio immunization, Yasuda-Kasai model, scenarios, Brownian motion, Conditional value at risk, multistage stochastic optimization, Python, Gurobi.

BUJNOVSKÝ, D. *Vybrané modely finanční optimalizace*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2023. 96 s. Vedoucí RNDr. Pavel Popela, Ph.D.



Prohlašuji, že jsem diplomovou práci *Vybrané modely finanční optimalizace* vypracoval samostatně pod vedením RNDr. Pavla Popely, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu použité literatury.

Bc. Daniel Bujnovský



Velké poděkování patří mému vedoucímu RNDr. Pavlu Popelovi, Ph.D. za odborné vedení mé diplomové práce, ochotu pomáhat, dodávání potřebných pramenů a značnou volnost ve výběru tématu a struktury práce. Neopomenutelnou pomoc a oporu v průběhu práce mi poskytla také má rodina a přátelé, kterým tímto rovněž děkuji.

Bc. Daniel Bujnovský

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Markowitzův model</b>	<b>3</b>
2.1	Modelová data	5
2.2	Rozšířená verze modelu	9
2.2.1	Transakce	9
2.2.2	Půjčky	10
2.2.3	Náklady	13
2.2.4	Sektorové omezení	18
2.3	Shrnutí	21
<b>3</b>	<b>Aktiva s pevným výnosem</b>	<b>22</b>
3.1	Dluhopisy	22
3.2	Toky peněz a úrokové sazby	23
3.3	Očekávaná návratnost	26
3.4	Termínová struktura úrokových sazeb	27
3.5	Riziko	30
3.5.1	Durace	30
3.5.2	Konvexita	33
3.6	Optimalizace portfolia	34
3.6.1	Vyrovnění finančních toků	35
3.6.2	Princip imunizace	41
3.6.3	Imunizace portfolia	44
3.7	Shrnutí	48
<b>4</b>	<b>Model Russell-Yasuda Kasai</b>	<b>49</b>
4.1	Vícestupňová stochastická optimalizace	50
4.1.1	Modelovací techniky	50
4.1.2	Vícestupňová úloha	52
4.2	Modelování vstupních dat	54
4.2.1	Wienerův proces	55
4.2.2	Brownův pohyb	56
4.2.3	Mertonův a Hestonův model	60
4.3	CVaR	65
4.4	Struktura modelu Yasuda-Kasai	68
<b>5</b>	<b>Závěr</b>	<b>83</b>
<b>6</b>	<b>Seznam použitých zkratk a symbolů</b>	<b>89</b>
<b>7</b>	<b>Ukázky programů</b>	<b>92</b>

# 1. Úvod

V první kapitole plynule navážu na svou bakalářskou práci [38], jejíž hlavní část se týkala Markowitzova modelu a teorie optimalizace investičního portfolia [4]. Přestože byl Markowitzův model jakýmsi prvotním průlomovým modelem v oblasti optimalizace portfolia, pro reálnou praxi není příliš uplatnitelný. Jedním z problémů je absence mnoha technických omezení, s kterými se finanční společnosti a investoři potýkají. V této kapitole na modelu ilustruji možnosti, jak omezení, jakými jsou například transakční náklady případně závazky, modelovat, abychom docílili realističtějšího popisu problému [12].

V druhé kapitole přímo navážeme na problematiku závazků představenou v kapitole předchozí. Snaha maximalizovat investiční zisk totiž není jediným problémem finančního inženýrství. Neméně důležitou roli hraje také optimalizace správy aktiv a závazků (anglicky *asset liability management* [12]), se kterým se potýkají všechny velké finanční společnosti jako banky či pojišťovny. Zásadním modelem této části bude tzv. *imunizace portfolia* [34]. Kvůli časové povaze této úlohy (závazky jsou vypláceny klientům nejen v různém množství ale také různém čase) investují tyto společnosti ve velkém objemu do státních či korporátních dluhopisů a těží z kupónů z nich plynoucích. Dluhopisy mají co do objemu investic ještě větší zastoupení na trhu než akcie, proto jsou nezanedbatelným investičním instrumentem. Představíme související finančně-matematickou teorii včetně různých způsobů popisu očekávané návratnosti a očekávaného rizika, které jsou odlišné od těch použitých v Markowitzově modelu. Samotný aparát matematického programování tedy rozšíříme o časový index (*multiperiod model*).

Jak již bylo zmíněno v mé bakalářské práci, dalším zásadním nedostatkem Markowitzova modelu jsou bodové odhady neznámých parametrů na základě historických dat. Ve třetí kapitole představíme v praxi velmi využívaný scénářový přístup optimalizace portfolia (tzv. *stochastická optimalizace* [8]), který namísto bodových odhadů využívá generování možných scénářů realizací náhodných proměnných. Tyto scénáře budeme generovat za pomoci zobecněného Wienerova procesu [1][2], respektive ještě obecnějšího Batesova procesu [22]. Stochastickou optimalizaci budu ilustrovat na historickém modelu Yasuda Kasai, který byl poprvé v praxi implementován touto japonskou pojišťovnou v 90 letech a znamenal velký krok vpřed v problematice správy aktiv a pasiv [43][44][45]. Narozdíl od Markowitzova modelu či modelu imunizace umožňuje model Yasuda investorovi své portfolio v průběhu času dle libosti realokovat (což je v praxi naprosto přirozené). Tím do modelu vstupuje prvek dynamiky a mluvíme o tzv. *vícestupňové stochastické optimalizaci* [8]. K popisu očekávaného rizika pak představíme obecně velmi uznávaný nástroj *Conditional value at risk* (CVaR) [26][27], který bude hlavním, nikoliv jediným rozšířením modelu Yasuda-Kasai s cílem zlepšit jeho praktickou použitelnost.

Autor si klade za cíl představit různé problémy finančního inženýrství včetně modelů, které mohou tyto problémy řešit. Samotnou optimalizaci buduje z hlediska matematiky od nejjednodušší a postupně ji obohacuje o další v praxi využívané prvky jako scénáře, případně dynamiku. Zároveň se snaží obeznámit s možnostmi využití různých investičních nástrojů, přičemž všechny vyžadují jiný přístup k popisu očekávaných návratností a očekávaných rizik. To vše v doprovodu základní finanční teorie. Všechny grafické ilustrace napříč prací jsou z vlastní tvorby, není-li uvedeno jinak.

## 2. Markowitzův model

Markowitzův model je základním modelem optimalizace portfolia, který je dodnes využíván jako podpůrný nástroj pro popis vztahu mezi rizikem a návratností investice, přičemž očekávané riziko, respektive očekávanou návratnost kvantifikuje jako rozptyl, respektive střední hodnotu návratnosti. Jednou z jeho aplikací je pak také konstrukce efektivní hranice, která spolu s investorovou mírou averze vůči riziku poskytuje informaci o dostupných tzv. efektivních portfoliích. Markowitzovým modelem a teorií portfolia jsem se již podrobně zabýval ve své bakalářské práci [38], ve které jsem podrobně ukázal vliv korelace mezi aktivy na investiční rozhodování v Markowitzově smyslu. Čtenář zde nalezne rovněž vysvětlení všech pojmů souvisejících s modelem jako je diverzifikace, a právě již zmíněná efektivní hranice, případně analytické řešení problému pomocí Lagrangeovy funkce. V této kapitole uvedu možná rozšíření tohoto modelu s cílem přiblížit jej komplexnímu prostředí reálného investování, které je třeba uvažovat v návaznosti na jistá právní omezení, státní regulace, případně jiná úskalí.

Celý Markowitzův model jsme pečlivě vybudovali v [38] včetně definic použitých pojmů ze statistiky. Jako investiční instrumenty jsme v práci uvažovali akcie, které budou (leč v doprovodu dalších investičních nástrojů) opět stěžejní. Na všechny cenné papíry pohlížíme především z hlediska jejich kapitálového výnosu (plynoucím z jejich růstového potenciálu [5]), dále však budeme opomíjet běžný výnos (tedy příjem v podobě dividend, kupónů apod.)

Návratnost akcie  $i$  modelujeme kvůli její náhodné povaze pomocí náhodné proměnné  $d_i(\xi)$ ,  $i \in I = \{1, \dots, n\}$ . Portfolio pak je tvořeno vektorem těchto akcií o jejichž návratnostech předpokládáme, že jsou z normálního rozdělení, tedy  $\mathbf{d}(\xi) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ . Neznámý parametr  $\boldsymbol{\mu}$  značí teoretické střední hodnoty návratností. Na diagonále variační matice  $\boldsymbol{\Sigma}$  pak najdeme teoretické rozptyly  $\sigma_i^2$  jednotlivých akcií, které jsou pro nás v Markowitzově smyslu ekvivalentem rizika těchto akcií. Ostatní prvky matice jsou teoretické kovariance  $\rho_{ij}$  mezi jednotlivými tituly, které jsou pak stěžejní pro diverzifikaci portfolia [4]. Hlavní riziko, kterému v tomto modelu čelíme, je *riziko tržní*. Základní finanční pojmy související s riziky uvedu formou definice (kterou chápeme jinak než matematickou definici).

**Definice 2.1** (Tržní riziko). Tržním rizikem rozumíme ztrátu způsobenou nepříznivým pohybem ceny instrumentu na daném trhu [5].

V průběhu kapitoly se zmíníme rovněž o riziku likvidity, kreditním riziku či sektorovém riziku.

**Definice 2.2** (Riziko likvidity). Jedná se o nebezpečí vzniku situace, kdy investor během držby předmětného investičního instrumentu ztratí schopnost jej zpětně přeměnit na peněžní hotovost [5].

**Definice 2.3** (Kreditní riziko). Riziko možné budoucí neschopnosti dodržet svůj závazek ze strany dlužníka.

**Definice 2.4** (Sektorové riziko). Rizikovo spojené s investicí do skupiny aktiv operující v rámci stejného odvětví, čímž také podléhají vlivu stejných faktorů a jsou tedy značně korelované.

Protože portfolio je složeno z akcií, jejichž návratnosti jsou náhodné veličiny, uvažujeme o návratnosti celého portfolia rovněž jako o náhodné veličině  $\zeta$ , která je funkcí náhodného vektoru  $\mathbf{d}(\boldsymbol{\xi})$  a vektoru vah  $\mathbf{x}$ , tedy

$$\zeta = \mathbf{d}^\top(\boldsymbol{\xi})\mathbf{x}.$$

Za návratnost portfolia považujeme střední hodnotu

$$E(\zeta) = \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{x}, \quad (2.1)$$

a za jeho riziko pak rozptyl

$$\text{Var}(\zeta) = \mathbf{y}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{y}. \quad (2.2)$$

Neznámé parametry  $\boldsymbol{\mu}$  a  $\boldsymbol{\Sigma}$  nakonec pomocí historických dat nahradíme jejich bodovými odhady  $\bar{\mathbf{d}}$ ,  $\mathbf{Q}$  [4].

V [38] jsem uvedl tři možné varianty základního Markowitzova modelu. My vyjdeme z následující formulace. Úkolem je nalézt investiční portfolio vykazující alespoň zvolenou požadovanou očekávanou návratnost  $d_0$  při minimalizaci investičního rizika, tedy

$$\min \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x},$$

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 1, \quad (2.3)$$

$$\bar{\mathbf{d}}^\top \mathbf{x} \geq d_0, \quad (2.4)$$

kde  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$  je  $n$ -rozměrný prostor přípustných řešení,  $\mathbf{Q}$  je bodový odhad variační matice reprezentující očekávané riziko portfolia,  $\bar{\mathbf{d}}$  je bodový odhad vektoru středních hodnot očekávaných návratností uvažovaných aktiv a  $d_0$  je minimální hodnota očekávané návratnosti celého portfolia, které si investor přeje dosáhnout. Opakovaným řešením modelu pro různé hodnoty  $d_0$  dostáváme efektivní hranici. Rovnice (2.3) reprezentuje rozpočtové omezení [4].

Připomeňme, že rozptyl není dobrou metrikou pro kvantifikaci rizika, protože popisuje pouze volatilitu kolem střední hodnoty, tedy vysoké návratnosti vnímá stejně negativně jako nízké a investora tak připravuje o potenciální vysoké zisky. Tento fakt je jedním z hlavních nedostatků, pro které je tzv. Moderní teorie portfolia (MPT), která je s Markowitzovým modelem úzce propojena, kritizována. Více o Moderní teorii portfolia je možno se dočíst v [4]. Obě metriky (jak rizika, tak očekávané návratnosti) postupně v rámci práce nahradíme robustnějšími přístupy. Obě metriky jsou zároveň kalkulovány pomocí historických dat. Investor tím tedy předpokládá, že může predikovat budoucí návratnosti na základě minulých, což je obecně mylný předpoklad a velký nedostatek tohoto modelu.

Pro modelaci vstupních dat se často využívá různých parametrických (faktorových modelů), případně simulací pohybu cen na základě Brownova pohybu s parametry reflektující aktuální tržní situaci. Tento přístup si ukážeme v kapitole 4.

Díky předpokladu  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  model umožňuje nákup tzv. zlomkových podílů (*fractional shares*), které dnes nabízí většina zprostředkovatelů. Investor však zároveň

předpokládá nulové transakční náklady za nákup či daně. Neuvažuje možnost půjčky za účelem zvětšení své investice a mnoho dalších aspektů, které při reálném investování nelze opomenout.

Z pohledu matematické optimalizace pak model má následující vlastnosti. Uvažovaný investiční horizont našeho modelu je pouze 1 perioda (*one period model*) a investor nemá možnost své rozhodnutí (vektor  $\mathbf{x}$ ) změnit (*static model*) [18]. Tyto vlastnosti budeme postupně uvolňovat a vytvářet komplexnější modely. Z hlediska typu účelové funkce a omezení se jedná o model konvexní (kvadratické) optimalizace [20], kterou jsem již teoreticky také definoval v [38].

## 2.1. Modelová data

Vyřešme nyní základní verzi modelu pro konkrétní historická data. Následuje tabulka investičních nástrojů, které budeme v modelu uvažovat. Hlavní zastoupení mají akcie napříč všemi hlavními sektory. Dále pak dvě hlavní obchodované komodity (respektive kontrakty typu futures na tyto komodity), americké desetileté státní dluhopisy (*Treasury Yield 10 Years*) a také tři tržně obchodovatelné fondy typu ETF (*Exchange traded funds*) investující různou formou rovněž do dluhopisů. Přesněji ETF TIP investující do amerických protiinflačních dluhopisů, LQDH zaměřené na korporátní dluhopisy chráněné proti úrokovému riziku a AGG, jež tvoří výhradně korporátní dluhopisy s nejvyšším kreditním ratingem. Konkrétní popis a parametry těchto fondů nalezne čtenář v databázi <https://www.justetf.com/>.

instrument	sektor	ticker	název
Akcie	Technologický	AAPL	Apple
		MSFT	Microsoft
	Finanční	BAC	Bank of America
		JPM	JPMorgan Chase & Co
	Zdravotnický	JNJ	Johnson Johnson
		PFE	Pfizer
	Spotřební	KO	Coca Cola
		WMT	Walmart
	Průmyslový	BA	Boeing
	Telekomunikační	META	Meta Platforms
	Realitní	AMT	American Tower Corp
	Energetický	CVX	Chevron
Futures na komodity		GC=F	Zlato
		BZ=F	Olej
Dluhopisy		^TNX	Desetileté státní americké dluhopisy
Dluhopisová ETF		AGG	iShares Core U.S. Aggregate Bond ETF
		LQDH	iShares Interest Rate Hedged Corporate Bond ETF
		TIP	iShares TIPS Bond ETF

Obrázek 2.1: Instrumenty uvažované do portfolia.

Připomeňme, že v této kapitole na všechny instrumenty nahlížíme pouze jako na držitele hodnoty, která se v průběhu času může zvýšit. Nebereme však v potaz kupóny, respektive dividendy plynoucí z jejich držení (např. dluhopisových ETF). Jejich vyplacení se v praxi většinou projeví mírným propadem cen daných instrumentů. Pro návratnost aktiva v čase  $t$  platí

$$d_{it}(\xi) = \frac{P_{it}(\xi) + P_{it-1}(\xi)}{P_{it-1}(\xi)},$$

## 2.1. MODELOVÁ DATA

kde  $P_{it}(\xi)$  je cena akcie  $i$  v čase  $t$ , která je pro budoucí  $t$  předem neznámou a tedy rovněž náhodnou proměnnou [2]. Investice do dluhopisů jsou časté především kvůli pravidelnému vyplácení dividend, jak uvidíme v další kapitole, slouží ale také jako protiváha vůči akciím.

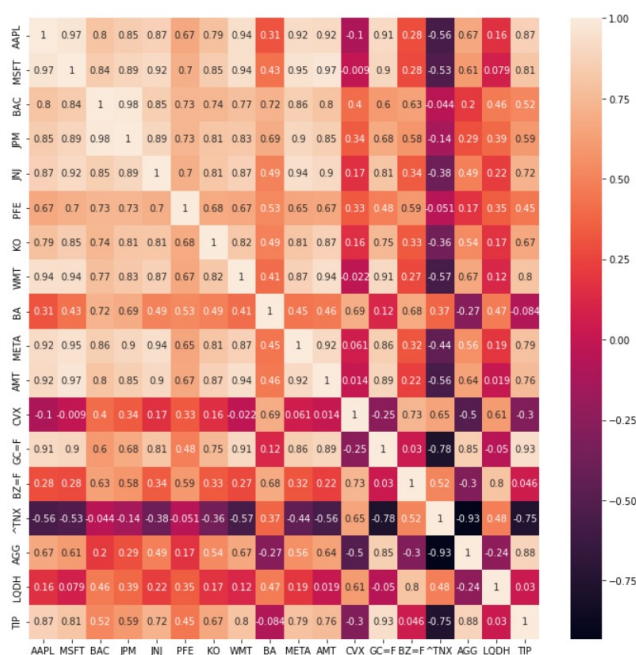
K výpočtu bodových odhadů  $\mathbf{Q}$ ,  $\bar{\mathbf{d}}$  generujeme denní historická data (uzavírací ceny) z období patrného ze sloupce "Date". Následuje ukázková tabulka dat, která v řeči statistiky obsahuje realizace náhodných proměnných  $P_{it}(\xi)$ .

Date	AAPL	MSFT	BAC	JPM	JNJ	PFE	KO	...	CVX	GC=F	BZ=F	^TNX	AGG	LQDH	TIP
2014-12-31	27.594999	46.450001	17.889999	62.580002	104.570000	29.554079	42.220001	...	112.180000	1183.900024	57.330002	2.170	110.120003	96.540001	112.010002
2015-01-02	27.332500	46.759998	17.900000	62.490002	104.519997	29.724857	42.139999	...	112.580002	1186.000000	56.419998	2.123	110.430000	96.448997	112.730003
2015-01-05	26.562500	46.330002	17.379999	60.549999	103.790001	29.563566	42.139999	...	108.080002	1203.900024	53.110001	2.039	110.669998	96.448997	112.820003
2015-01-06	26.565001	45.650002	16.860001	58.980000	103.279999	29.810247	42.459999	...	108.029999	1219.300049	51.099998	1.963	110.949997	95.160004	112.830002
2015-01-07	26.937500	46.230000	16.940001	59.070000	105.559998	30.218216	42.990002	...	107.940002	1210.599976	51.150002	1.954	110.930000	94.370003	112.919998
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
2021-12-23	176.279999	334.690002	44.419998	157.259995	168.250000	58.709999	58.220001	...	116.410004	1811.199951	76.849998	1.493	114.199997	95.616997	128.229996
2021-12-27	180.330002	342.450012	44.639999	158.160004	169.669998	59.200001	58.650002	...	118.790001	1808.099976	78.599998	1.481	114.260002	95.940002	128.660004
2021-12-28	179.289993	341.250000	44.700001	158.639999	170.350006	58.009998	58.880001	...	118.559998	1810.199951	78.940002	1.481	114.209999	95.849998	128.580002
2021-12-29	179.380005	341.950012	44.630001	158.559998	171.550003	57.580002	58.950001	...	117.949997	1805.099976	79.230003	1.543	113.870003	95.699997	128.690002
2021-12-30	178.199997	339.320007	44.529999	158.479996	172.309998	58.400002	58.779999	...	117.430000	1812.699951	79.320000	1.515	114.120003	95.989998	129.360001

Obrázek 2.2: Historické ceny uvažovaných aktiv.

Následně si zobrazíme korelační matici cen a poukážeme na jisté souvislosti. Velké investiční společnosti zahrnují z nemalé části do svých portfolií vedle akcií rovněž dluhopisy. Důvod je založen na faktu, že akcie a dluhopisy obecně nevykazují stejné chování, naopak v době dlouhodobého trendu klesajících akciových výnosů mají investoři tendenci přesouvat svá aktiva do dluhopisů. V jednoduchosti tento vztah souvisí s problematikou úrokových sazeb. V období vyšších úrokových sazeb se společněm prodražují jejich vlastní investice financované úvěrovými produkty, což má negativní efekt na jejich kvartální výnosy, a tedy také cenu jejich obchodovaných akcií. Vyšší úrokové sazby se pak naopak projevují vyššími kupónovými sazbami na dluhopisech, které se tím stávají atraktivnější investicí. Problematika úrokových sazeb bude stěžejní pro kapitolu 3.

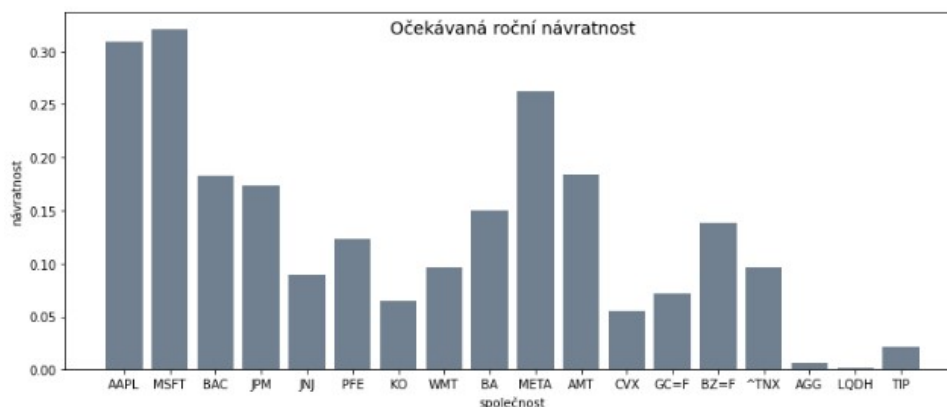
Výše popsané můžeme pozorovat ze sloupce TNX, ze kterého je patrná nekorelovanost respektive náznak záporné korelace téměř se všemi akciovými tituly ve sledovaném období. Významná negativní korelace je pak mezi těmito státními dluhopisy a ETF fondy AGG, fondem TIP a zlatem.



Obrázek 2.3: Korelační matice cen.

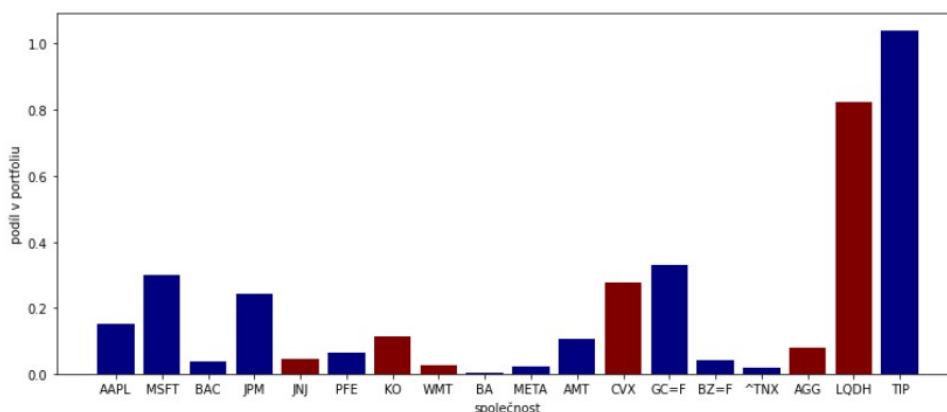
Díky širšímu spektru investičních instrumentů je možné lépe sledovat efekt korelace potažmo diverzifikace. Upozorňujeme, že tato matice je pouze názorná, pro model využíváme variační matici návratností nikoliv cen.

Následuje graf ročních průměrných historických návratností (respektive pro nás očekávaných budoucích návratností) jednotlivých instrumentů.



Obrázek 2.4: Očekávaná návratnost instrumentů.

Nyní tato data aplikujeme na model. Jako minimální požadovanou očekávanou návratnost zvolíme  $d_0 = 0.25$ , tedy roční návratnost 25%. Výslednou alokaci můžeme vidět na následujícím grafu.



Obrázek 2.5: Výsledná alokace.

Důležité údaje uvedu rovněž do tabulky. Chybějící pole jsou využita pro pozdější modely.

	$d_0$	Riziko	$\bar{x}_i$	$v_1$	$v_2$	Půjčka	Náklady
Základní	0.25	0.0222					

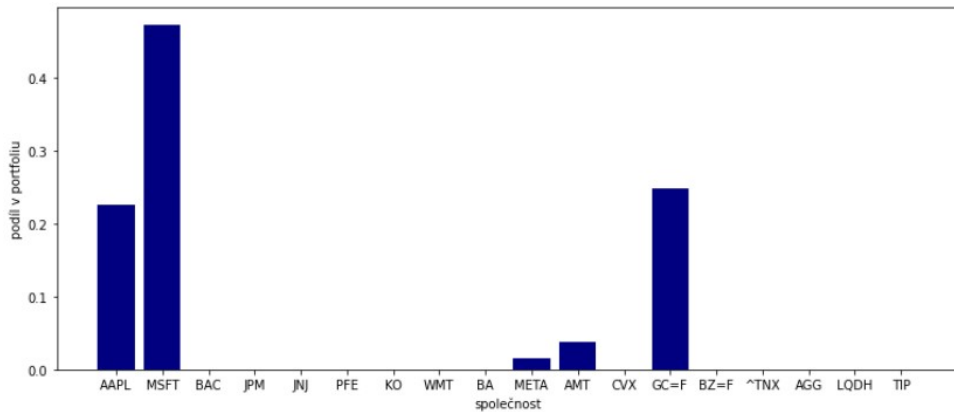
Modré sloupce značí nákup (pozici long), červené pak tzv. krátké prodeje (pozice short), na ose x můžeme nalézt jednotlivé tituly a na ose y je pak jejich podíl v portfoliu. Volatilita tohoto portfolia při očekávané návratnosti 25% je na úrovni 0.0222 což chápeme jako bezrozměrnou hodnotu. Pouze pro porovnání investice do samotné akcie AAPL (jejíž očekávaná návratnost je něco málo pod 20%) by vykazovala volatilitu 0.1055, tedy mnohonásobně vyšší než volatilita celého portfolia.

## 2.1. MODELOVÁ DATA

Krátké prodeje (možnost prodávat pozice, které investor spekulující na jejich pokles reálně nedrží [5]) obecně nejsou povoleny, proto je dále vyloučíme podmínkou

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (2.5)$$

a výsledná alokace bude viz obrázek 2.6.



Obrázek 2.6: Výsledná alokace při zakázání krátkých prodejů.

	$d_0$	Riziko	$\bar{x}_i$	$v_1$	$v_2$	Půjčka	Náklady
Základní	0.25	0.0222					
Bez krátkých prodejů	0.25	0.0362					

Můžeme vidět, že většina bohatství je najednou alokována pouze do tří titulů. Z tohoto důvodu riziko tohoto portfolia stouplu z původních 0.0222 na současných 0.0362. Investice do zbylých dvou je zanedbatelná. Taková alokace by jistě v praxi nebyla přípustná a proto model ošetříme dalšími omezeními. Aby se neztrácela v průběhu kapitoly přehlednost a návaznost jednotlivých modelů, zavedu jejich značení pomocí zkratk M1 (Markowitz1), M2 (Markowitz2) atd. Pro čtenářovu lepší představu o implementaci rovněž vždy uvedu stěžejní část kódu, který je napsán v programu Python s použitím optimalizační knihovny Gurobi.

Model M1 má tedy podobu

$$\min \mathbf{x}^\top \mathbf{Q}\mathbf{x},$$

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 1, \quad (2.6)$$

$$\bar{\mathbf{d}}^\top \mathbf{x} \geq d_0, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (2.8)$$

```

model = gp.Model("Markowitz M1")
daily_returns = closes.pct_change()

d = np.array(daily_returns.mean()*252)
Q = np.array(daily_returns.cov()*252)
d0 = 0.25

x = model.addVars(len(d), lb=0)

model.addConstr(gp.quicksum(x[i] for i in range(len(d))) == 1)
model.addConstr(gp.quicksum((x[i]*d[i]) for i in range(len(d))) >= d0)

portfolio_risk = gp.quicksum(x[i]*Q[i,j]*x[j] for i in range(len(d))
for j in range(len(d)))

obj = portfolio_risk
model.setObjective(obj, GRB.MINIMIZE)

model.write('Markowitz_no_short_sales.lp')
model.optimize()

```

## 2.2. Rozšířená verze modelu

Nyní budu ilustrovat možné způsoby modelování reálných omezení. Stěžejními zdroji pro tuto kapitolu jsou [10] [11].

### 2.2.1. Transakce

Připustme, že platí podmínka (2.5), tedy jsou zakázány krátké prodeje. V tom případě bude ve výsledném vektoru  $\mathbf{x}$  často velké množství nulových hodnot a jen několik hodnot bude nenulových. Je žádoucí pak tyto hodnoty investic z různých důvodů omezit podmínkou

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \bar{\mathbf{x}}, \quad (2.9)$$

kde  $\bar{x}_i$  je horní hranice pro nákup aktiva  $i$ . Tím omezíme tzv. nesystematické riziko spojené s konkrétním titulem (tedy riziko spojené např. s kvalitou managementu dané firmy). Toto omezení může reprezentovat vnitřní politiku dané investující instituce. Extrémní množství bohatství v jediném titulu může mít rovněž za následek, že naše rozhodnutí bude ovlivňovat budoucí návratnosti a chování celého trhu (viz situace s firmou GameStop [37]) a my bychom se vystavili rovněž vyššímu riziku likvidity viz definice 2.2. Vztah (2.8) v modelu M1 tedy nahradíme vztahem (2.9) a dostáváme model M2. V rámci implementace je pouze potřeba doplnit parametr  $ub$  v řádku definice proměnné  $\mathbf{x}$ .

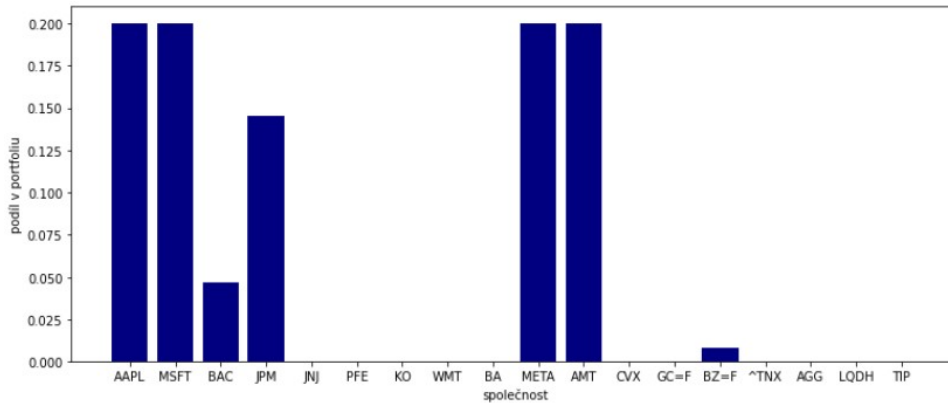
```

x = model.addVars(len(d), lb=0, ub=0.2)

```

## 2.2. ROZŠÍŘENÁ VERZE MODELU

Při volbě  $\bar{x}_i = 0.2$  je tedy do jednotlivého instrumentu možné vložit maximálně 20% kapitálu.



Obrázek 2.7: Výsledná alokace při stanovení horního limitu.

	$d_0$	Riziko	$\bar{x}_i$	$v_1$	$v_2$	Půjčka	Náklady
Základní	0.25	0.0222					
Bez krátkých prodejů	0.25	0.0362					
S horním limitem	0.25	0.0457	0.2				

Jak vidno, alokace do aktiv MSFT a GC=F se snížila pod požadovanou mez, což způsobilo přesun majetku do dalších aktiv. Vliv tohoto omezení je tím větší, čím větší očekávanou návratnost  $d_0$  požadujeme, protože tím je model nucen tlačit více bohatství do ziskovějších technologických akcií. Od určité chvíle bychom tak ale činili na úkor korelací a jejich vlivu na snižování celkového rizika.

Zkusíme modelu dále dopomoci možností získání dalšího kapitálu prostřednictvím půjček. To by nám teoreticky mělo umožnit dosáhnout rovněž vyšší očekávané návratnosti.

### 2.2.2. Půjčky

V zápisu modelu byla uvedena podmínka (2.6), na jejímž základě můžeme investovat pouze aktuálně dostupné bohatství. V dnešním komplexním prostředí úvěrových služeb by bylo však příjemné zahrnout rovněž do modelu možnost půjčky, a tedy zvýšit množství původního bohatství. Toto množství označíme jako nezápornou proměnnou  $v^-$ , vyjádřena je jako procento z původního bohatství a v budoucnu ji budeme interpretovat především jako dluh. Dále předpokládáme, že si půjčku bereme za bezrizikovou úrokovou sazbu  $r_f$  (*free*). Vnímáme ji tedy pro jednoduchost jako konstantu nikoliv náhodnou proměnnou.

Omezení (2.6) upravíme jako

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{x} - v^- = 1.$$

Očekávaná návratnost portfolia je pak rovna rozdílu očekávané návratnosti z investice a hodnoty půjčky [11].

$$z_R = \bar{\mathbf{d}}^\top \mathbf{x} - r_f v^-$$

Zavedená půjčka nemá pak žádný vliv na riziko portfolia, protože si půjčujeme za bezrizikovou sazbu. I zde bychom mohli situaci dále zkomplikovat zavedením úrokové sazby jakožto další náhodné proměnné. Častou situací pak bývá, že se hodnota sazby od určité výše půjčky mění. Rovnice bychom mohli dále zobecnit na tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{1}^\top \mathbf{x} - v_1^- - v_2^- &= 1, \\ z_R &= \bar{\mathbf{d}}^\top \mathbf{x} - r_{f1} v_1^- - r_{f2} v_2^-, \end{aligned}$$

kde  $v_1^- \leq \bar{v}_1$ ,  $v_2^- \leq \bar{v}_2$ ,  $r_{f1} < r_{f2}$ ,  $v_1^-, v_2^- \geq 0$ . To znamená, že od určité výše půjčky  $v_1^-$  si již půjčujeme za vyšší úrokovou sazbu  $r_{f2}$  a to pouze do výše  $\bar{v}_2$ , aby nebylo možné půjčovat si do nekonečna. Dostáváme tedy rozšíření na model M3.

$$\min \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x},$$

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{x} - v_1^- - v_2^- = 1, \quad (2.10)$$

$$\bar{\mathbf{d}}^\top \mathbf{x} - r_{f1} v_1^- - r_{f2} v_2^- \geq d_0, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \bar{\mathbf{x}} \quad (2.12)$$

Příslušný kód je následující.

```

model = gp.Model("Markowitz M3")

d0 = 0.25, rf1 = 0.005, rf2 = 0.04

x = model.addVars(len(d), lb=0, ub=0.2)
v1 = model.addVar(ub = 0.5)
v2 = model.addVar(ub = 1)

model.addConstr(gp.quicksum(x[i] for i in range(len(d))) -v1 -v2 == 1)
model.addConstr(gp.quicksum((x[i]*d[i]) for i in range(len(d)))
-rf1*v1 -rf2*v2 >= d0)

portfolio_risk = gp.quicksum(x[i]*Q[i,j]*x[j] for i in range(len(d))
for j in range(len(d)))

obj = portfolio_risk
model.setObjective(obj, GRB.MINIMIZE)

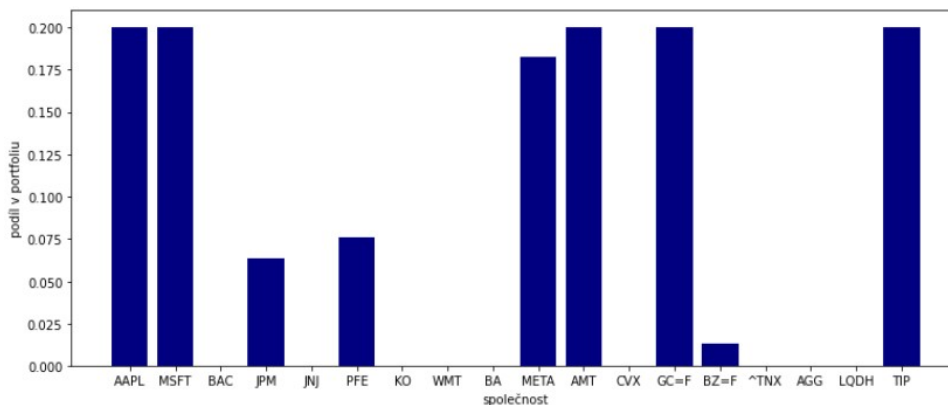
model.write('Markowitz_borrowing.lp')
model.optimize()

```

Zvolíme například hodnoty úrokových sazeb  $r_{f1} = 0.005$  a  $r_{f2} = 0.04$ . Horní limity výšky půjček pak nastavíme na  $\bar{v}_1 = 0.5$ , respektive  $\bar{v}_1 = 1$ , tedy investor má možnost navýšit svůj kapitál o 50% za nižší úrokovou sazbu, respektive o dalších 100% za vyšší.

## 2.2. ROZŠÍŘENÁ VERZE MODELU

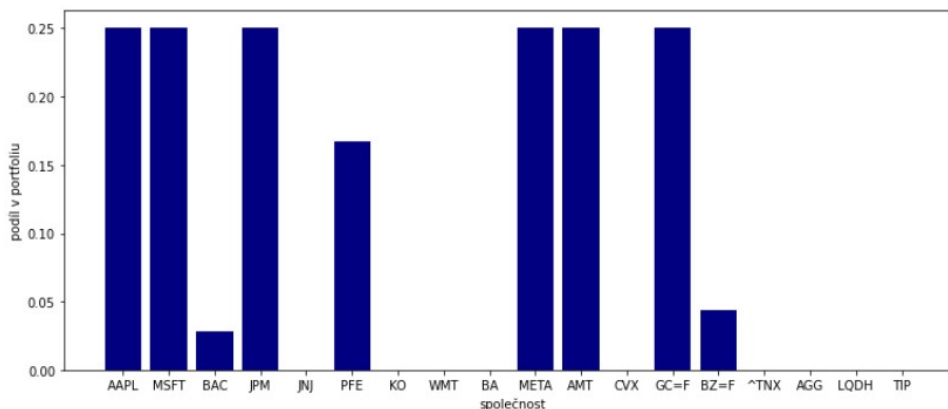
Výsledná alokace:



Obrázek 2.8: Výsledná alokace při možnosti půjčky.

	$d_0$	Riziko	$\bar{x}_i$	$v_1$	$v_2$	Půjčka	Náklady
Základní	0.25	0.0222	0.2				
Bez krátkých prodejů	0.25	0.0362	0.2				
S horním limitem	0.25	0.0457	0.2				
S možností půjčky	0.25	0.0389	0.2	0.336	0	0.0017	

Hodnota  $v_1 = 0.336$  značí, že kapitál byl navýšen o 33.6% skrze půjčku za nižší úrokovou sazbu. Možnost zvýšení kapitálu zapříčinila možnost investovat do dalších aktiv, které přispěly ke snížení celkové volatility. V pátém sloupci jsou pak náklady spojené s půjčkou, tedy hodnota  $r_{f1}v_1 + r_{f2}v_2$ . Zvyšme nyní žádanou očekávanou návratnost  $d_0$  na 0.35 spolu se zvednutím horního limitu na  $\bar{x}_i$  na 25% a pokusme se využít plný potenciál půjčky.

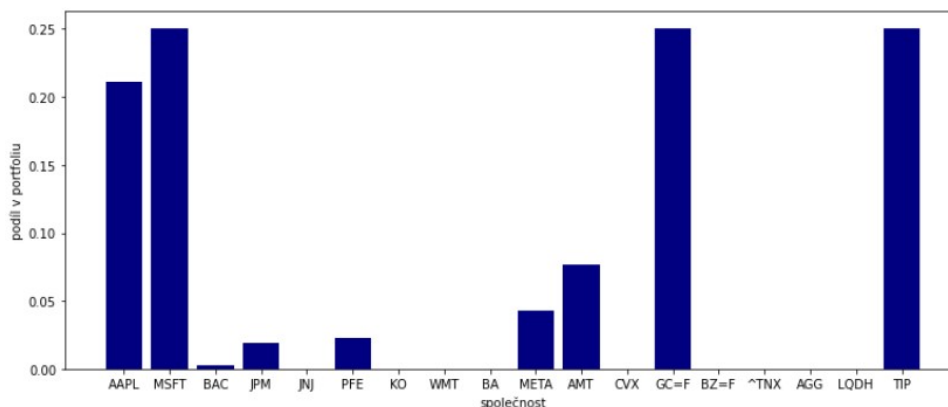


Obrázek 2.9: Výsledná alokace při možnosti půjčky.

	$d_0$	Riziko	$\bar{x}_i$	$v_1$	$v_2$	Půjčka	Náklady
Základní	0.25	0.0222					
Bez krátkých prodejů	0.25	0.0362					
S horním limitem	0.25	0.0457	0.2				
S možností půjčky	0.25	0.0389	0.2	0.336	0	0.0017	
S možností půjčky	0.35	0.09	0.25	0.5	0.239	0.012	

Jak vidno, dostupnost půjčky nám umožňuje dosáhnout značných očekávaných výnosů, nicméně však za cenu zvýšené volatility. Rovněž stouply náklady spojené s půjčkou vlivem nutnosti brát půjčku také za vyšší úrokovou sazbu.

Kvůli ilustraci dalších omezení však snížíme zpět  $d_0$  na hodnotu 0.2 s ponecháním horního limitu  $\bar{x}_i = 0.25$ , čímž prakticky vyřadíme nutnost půjčky.



Obrázek 2.10: Výsledná alokace při možnosti půjčky.

	$d_0$	Riziko	$\bar{x}_i$	$v_1$	$v_2$	Půjčka	Náklady
Základní	0.25	0.0222					
Bez krátkých prodejů	0.25	0.0362					
S horním limitem	0.25	0.0457	0.2				
S možností půjčky	0.25	0.0389	0.2	0.336	0	0.0017	
S možností půjčky	0.35	0.09	0.25	0.5	0.239	0.012	
S možností půjčky	0.2	0.0221	0.25	0.125	0	0.0006	

Vidíme, že portfolio opět obsahuje některá aktiva zastoupena pouze ze zanedbatelné části. Na tyto případy se zaměříme v další kapitole.

### 2.2.3. Náklady

Se všemi finančními operacemi jsou spojeny náklady, jako poplatky za nákup případně marže samotnému portfolio manažerovi, které rovněž musíme do modelu zahrnout.

Nejdříve probereme problematiku transakčních nákladů za nákup a prodej, které jsou nutně vždy s investováním spojeny. Budeme-li v portfoliu držet velmi malé pozice  $x_i$ , předčí tyto náklady případný zisk z držení těchto pozic. Stanovíme proto dolní hranici  $\underline{x}_i$  pod kterou nemá expozice vůči aktivu  $i$  smysl, obdobně jako jsme zaváděli horní hranici  $\bar{x}_i$  v kapitole 2.2.1.

K tomuto účelu je potřeba zavést binární proměnnou  $\delta_i$  nabývající hodnoty 1, pokud aktivum  $i$  je zahrnuto v portfoliu, a hodnoty 0 v opačném případě.

Celkové omezení velikosti transakcí má pak tvar [11]

$$\underline{x}_i \delta_i \leq x_i \leq \bar{x}_i. \quad (2.13)$$

## 2.2. ROZŠÍŘENÁ VERZE MODELU

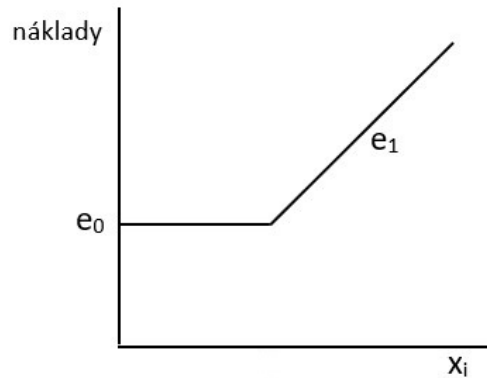
Upozorníme, že  $\delta_i$  na levé straně nerovnice je podstatné, protože dolní hranici požadujeme pouze u těch aktiv, které jsou v portfoliu zahrnuty ( $\delta_i = 1$ ), nikoliv od všech aktiv.

Zároveň je potřeba proměnnou  $\delta_i$  zakomponovat do modelu, docílíme toho následujícími nerovnicí

$$(1 - \delta_i)x_i \leq \delta_i(1 - \delta_i), \quad (2.14)$$

která spolu se vztahem (2.13) říká: alokace  $x_i$  je nenulová právě tehdy když  $\delta_i = 1$  (aby byla nerovnice splněna). Tím se dostáváme do oblasti nelineární celočíselné optimalizace více viz [18][20]. Použitá optimalizační knihovna Gurobi tento problém řeší linearizací.

V běžné praxi se investor setkává s poplatky  $e_0$  brokerů za zprostředkování (tzv. *commissions*), které budeme uvažovat konstantní. Velké instituce obchodující s velkými objemy se pak dále musí vypořádat s rostoucí tzv. cenou za likviditu  $e_1$ , která roste s velikostí obchodu. Tuto situaci můžeme znázornit obrázkem.



Obrázek 2.11: Poplatky za transakční náklady jako po částech lineární funkce.

Pro modelaci této situace si každou proměnnou  $x_i$  rozdělíme na součet pomocných proměnných  $y_{1i}$  a  $y_{2i}$ , kdy  $y_{1i}$  značí nákup aktiva  $i$  maximálně do výše, za kterou ještě není zpoplatněn poplatkem  $e_1$ . Hodnoty  $y_{2i}$  pak značí objemy nad tuto úroveň.

Očekávaná návratnost portfolia má pak tvar [11]

$$z_R = \sum_{i=1}^n (\bar{d}_i y_{1i} - e_0 \delta_i) + \sum_{i=1}^n (\bar{d}_i - e_1) y_{2i}, \quad (2.15)$$

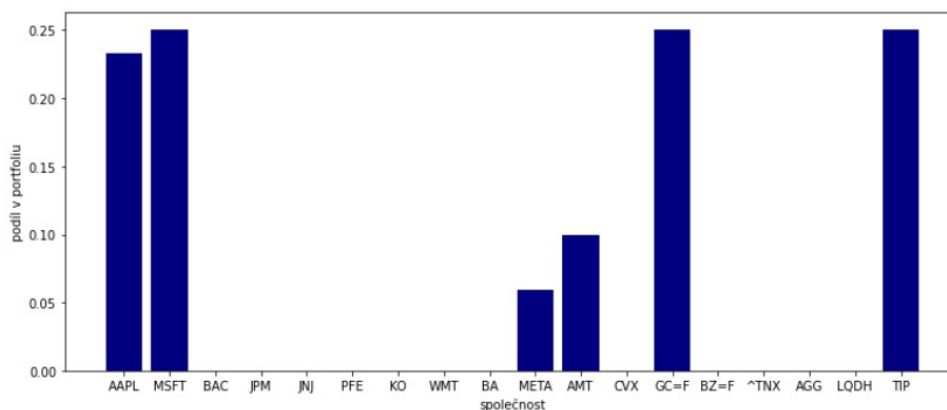
$$0 \leq y_{1i} \leq \bar{y}_1.$$

Od všech nákupů tedy odečítáme konstantní poplatek  $e_0$  a od všech nákupů nad úroveň  $\bar{y}_1$  navíc  $e_1$ , který se odvíjí od velikosti nákupu.  $\delta_i$  je již dříve zavedena binární proměnná.

Proměnné  $y_{1i}$ ,  $y_{2i}$  s modelem propojíme pomocí rovnice

$$x_i = y_{1i} + y_{2i}.$$

Zobrazíme si tedy alokaci aktiv a výslednou tabulku se zahrnutím veškerých možných nákladů. Poslední sloupec tabulky vyjadřuje náklady vynaložené na transakce, tedy  $\sum_{i=1}^n (e_0 Z_i + e_1 y_{2i})$ .



Obrázek 2.12: Výsledná alokace při započítání nákladů.

	$d_0$	Riziko	$\bar{x}_i$	$v_1$	$v_2$	Půjčka	Náklady
Základní	0.25	0.0222					
Bez krátkých prodejů	0.25	0.0362					
S horním limitem	0.25	0.0457	0.2				
S možností půjčky	0.25	0.0389	0.2	0.336	0	0.0017	
S možností půjčky	0.35	0.09	0.25	0.5	0.239	0.012	
S možností půjčky	0.2	0.0221	0.25	0.125	0	0.0006	
Náklady	0.2	0.0244	0.25	0.1426	0	0.0007	0.0089

Skutečně se nám povedlo docílit stavu, kdy zanedbatelné alokace do aktiv BAC, JPM, PFE byly z portfolia vyloučeny kvůli transakčním nákladům převyšujícím benefit z držení těchto pozic. Domnělé snížení diverzifikace se projeví jen malým nárůstem rozptylu. Tímto jsme dostali již poměrně rozsáhlý model M4 implementující různé typy nákladů.

$$\min \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}$$

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{x} - v_1^- - v_2^- = 1,$$

$$\sum_{i=1}^n (\bar{d}_i y_{1i} - e_0 \delta_i) + \sum_{i=1}^n (\bar{d}_i - e_1) y_{2i} - r_{f1} v_1^- - r_{f2} v_2^- \geq d_0,$$

$$0 \leq y_{1i} \leq \bar{y}_1,$$

$$x_i = y_{1i} + y_{2i}$$

$$0 \leq x_i \delta_i \leq x_i \leq \bar{x}_i$$

$$(1 - \delta_i) x_i \leq \delta_i (1 - \delta_i)$$

## 2.2. ROZŠÍŘENÁ VERZE MODELU

Příslušný kód je následující.

```
model = gp.Model("Markowitz M4")

d0 = 0.2, rf1 = 0.005, rf2 = 0.04, xL = 0.02, e0 = 0.001, e1 = 0.005

x = model.addVars(len(stocks), lb=0, ub=0.25)
v1 = model.addVar(ub = 0.5)
v2 = model.addVar(ub = 1)
delta = model.addVars(len(stocks), vtype = GRB.BINARY)
y1 = model.addVars(len(stocks), ub = 0.1)
y2 = model.addVars(len(stocks))

model.addConstr(gp.quicksum(x[i] for i in range(len(d))) -v1 -v2 == 1)
model.addConstr(gp.quicksum((y1[i]*d[i] - e0*delta[i])
for i in range(len(d))) + gp.quicksum((y2[i]*(d[i] - e1))
for i in range(len(stocks))) -rf1*v1 - rf2*v2 >= d0)

for i in range(len(stocks)):
model.addConstr(x[i] >= xL*delta[i])
model.addConstr((1-delta[i])*x[i] <= delta[i]*(1-delta[i]))

for i in range(len(stocks)):
model.addConstr(x[i] == y1[i] + y2[i])

portfolio_risk = gp.quicksum(x[i]*Q[i,j]*x[j] for i in range(len(d))
for j in range(len(d)))

obj = portfolio_risk
model.setObjective(obj, GRB.MINIMIZE)

model.write('Markowitz_transaction_costs.lp')
model.optimize()
```

Druhý typ nákladů je spojen se správou samotného portfolia. Ty pochopitelně narůstají s rostoucím počtem spravovaných aktiv, čímž vzniká potřeba monitorovat větší množství dat. Z [4][38] navíc víme, že od určité úrovně větší počet aktiv v portfoliu nemá podstatný vliv na diverzifikaci. Zavedeme tedy omezení, na jehož základě počet aktiv nesmí přesáhnou jistou hodnotu  $M$ , kterou zvolíme pro naše účely jako 5.

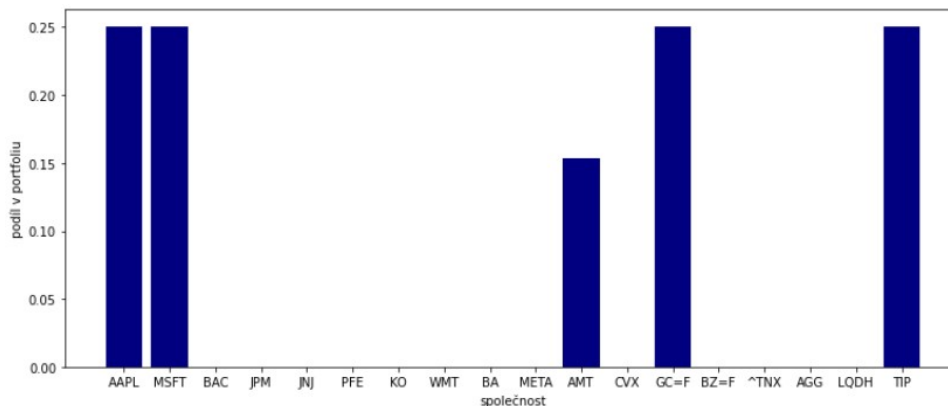
Omezení na množství aktiv v portfoliu, kterým doplníme model M4, má pak tvar

$$\sum_{i=1}^n \delta_i \leq M.$$

Příslušný kód modelu M4 je pak doplněn o následující řádek.

```
model.addConstr(gp.quicksum(delta[i] for i in range(len(stocks))) <= M)
```

Toto je poměrně striktní omezení, my jsme však záměrně ponechali modelu určitý manévrovací prostor, abychom našli přípustné řešení.



Obrázek 2.13: Výsledná alokace při omezení počtu aktiv.

	$d_0$	Riziko	$\bar{x}_i$	$v_1$	$v_2$	Půjčka	Náklady
Základní	0.25	0.0222					
Bez krátkých prodejů	0.25	0.0362					
S horním limitem	0.25	0.0457	0.2				
S možností půjčky	0.25	0.0389	0.2	0.336	0	0.0017	
S možností půjčky	0.35	0.09	0.25	0.5	0.239	0.012	
S možností půjčky	0.2	0.0221	0.25	0.125	0	0.0006	
Náklady	0.2	0.0244	0.25	0.1426	0	0.0007	0.0089
Počet aktiv	0.2	0.0245	0.25	0.153	0	0.0007	0.0082

Tímto omezením už skutečně tlačíme model na hranice přípustnosti. Veškerá zahrnutá aktiva až na AMT již narazila na svou horní hranici. Vliv korelací už je velmi potlačen na úkor ostatních omezení.

## 2.2. ROZŠÍŘENÁ VERZE MODELU

### 2.2.4. Sektorové omezení

Nakonec různé státní či právní restriktce mohou limitovat finanční instituce v nákupu jedné určité skupiny aktiv. Tato omezení pak mohou sloužit jako prostředek regulace různých druhů rizik spojených s daným sektorem viz definice 2.4. Například banky jistě nemohou investovat všechny své prostředky do státních zahraničních dluhopisů. Tím je regulované riziko spojené se změnou měnových kurzů. Banky tímto mohou kontrolovat rovněž své kreditní riziko viz definice 2.3.

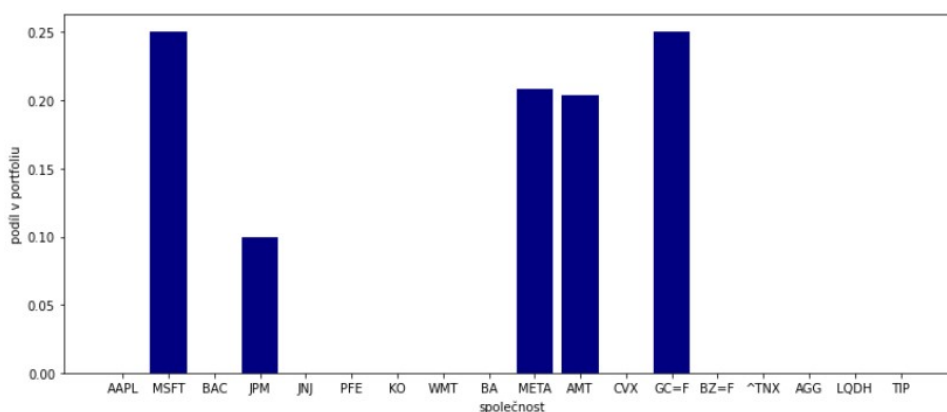
Zavedeme tedy množinu sektorů  $J$ , jejíž prvky (jednotlivé sektory) označíme v tabulce níže pomocí římských číslic. Do těchto sektorů jsou pak rozříděny instrumenty logicky dle tabulky 2.1.

I	II	III	IV
AAPL, MSFT	BAC, JPM	JNJ, PFE	KO, WMT
V	VI	VII	VIII
BA	META	AMT	CVX
IX	X	XI	
GC=F, BZ=F	TNX	AGG, LQDH, TIP	

Následně zavedeme parametr  $b_j$ , který říká, kolik aktiv může být nakoupeno v rámci sektoru  $j$  (čímž regulujeme příslušný rizikový faktor spojený s tímto sektorem). Tuto skutečnost zapíšeme pomocí omezení (a binární proměnné  $\delta_i$ ) jako

$$\sum_{i \in J[j]} \delta_i \leq b_j. \quad (2.16)$$

Konkrétně předpokládejme, že z každého sektoru můžeme investovat do jediného instrumentu, tedy  $b_j = 1 \quad \forall j$ . Například z dvou nabízených technologických akcií můžeme nakoupit pouze Apple nebo Microsoft. Stejně tak v rámci dluhopisových ETF můžeme nakoupit pouze jedno ze tří dostupných.



Obrázek 2.14: Výsledná alokace při omezení na jednotlivé sektory.

## 2. MARKOWITZŮV MODEL

	$d_0$	Riziko	$\bar{x}_i$	$v_1$	$v_2$	Půjčka	Náklady
Základní	0.25	0.0222					
Bez krátkých prodejů	0.25	0.0362					
S horním limitem	0.25	0.0457	0.2				
S možností půjčky	0.25	0.0389	0.2	0.336	0	0.0017	
S možností půjčky	0.35	0.09	0.25	0.5	0.239	0.012	
S možností půjčky	0.2	0.0221	0.25	0.125	0	0.0006	
Náklady	0.2	0.0244	0.25	0.1426	0	0.0007	0.0089
Počet aktiv	0.2	0.0245	0.25	0.153	0	0.0007	0.0082
Institucionální omezení	0.2	0.028	0.25	0.0123	0	0	0.0075

Můžeme si všimnout, že zatímco v předchozí alokaci jsme byli plně zainvestováni v obou technologických akciích, zde v žádném sektoru nemáme zainvestováno do dvou aktiv.

Finální Markowitzův model M5 je doplněním modelu M4 o podmínku (2.16).

$$\begin{aligned}
 & \min \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}, \\
 & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \\
 & \mathbf{1}^\top \mathbf{x} - v_1^- - v_2^- = 1, \\
 & \sum_{i=1}^n (y_{1i} \bar{d}_i - e_0 \delta_i) + \sum_{i=1}^n y_{2i} (\bar{d}_i - e_1) - r_{f1} v_1^- - r_{f2} v_2^- \geq d_0, \\
 & 0 \leq y_{1i} \leq \bar{y}_1, \quad \forall i \in I \\
 & x_i = y_{1i} + y_{2i}, \quad \forall i \in I \\
 & \sum_{i=1}^n \delta_i \leq M, \\
 & 0 \leq x_i \delta_i \leq x_i \leq \bar{x}_i, \quad \forall i \in I \\
 & (1 - \delta_i) x_i \leq \delta_i (1 - \delta_i), \quad \forall i \in I \\
 & \sum_{i \in J[j]} \delta_i \leq b_j, \quad \forall j \in J \\
 & \delta_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in I
 \end{aligned}$$

## 2.2. ROZŠÍŘENÁ VERZE MODELU

Příslušný kód celého modelu je následující.

```
model = gp.Model("Markowitz M5")

d0=0.2, rf1=0.005, rf2=0.04, xL=0.02, e0=0.001, e1=0.005, M=5
J = [[0, 1], [2, 3], [4, 5], [6, 7], [8], [9], [10], [11],
      [12, 13], [14], [15, 16, 17]]
b = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

x = model.addVars(len(stocks), lb=0, ub=0.25)
v1 = model.addVar(name='v1', ub = 0.5)
v2 = model.addVar(name='v2', ub = 1)
delta = model.addVars(len(stocks), vtype = GRB.BINARY)
y1 = model.addVars(len(stocks), ub = 0.1)
y2 = model.addVars(len(stocks))

model.addConstr(gp.quicksum(x[i] for i in range(len(d))) -v1 -v2 == 1)
model.addConstr(gp.quicksum((y1[i]*d[i] - e0*delta[i]
for i in range(len(d))) + gp.quicksum((y2[i]*(d[i] - e1)
for i in range(len(stocks))) -rf1*v1 - rf2*v2 >= d0)

for i in range(len(stocks)):
model.addConstr(x[i] >= xL*delta[i])
model.addConstr((1-delta[i])*x[i] <= delta[i]*(1-delta[i]))

for i in range(len(stocks)):
model.addConstr(x[i] == y1[i] + y2[i])

model.addConstr(gp.quicksum(delta[i] for i in range(len(stocks))) <= M)

portfolio_risk = gp.quicksum(x[i]*Q[i,j]*x[j] for i in range(len(d))
for j in range(len(d)))

obj = portfolio_risk
model.setObjective(obj, GRB.MINIMIZE)

model.write('Markowitz_sector_limit.lp')
model.optimize()
```

### 2.3. Shrnutí

V předchozích ukázkách jsme tedy jasně prokázali, jak je důležité při modelování investičního rozhodování brát v potaz reálná omezení jakými jsou např. transakční náklady, která mohou mít na námi očekávanou návratnost značný vliv. Zároveň jsme ukázali, jakou výhodu pro investora má dostupnost půjček a tím pádem navýšení kapitálu. Některá uvedená rozšíření dále využijeme v následujících modelech. Na závěr poznamenejme, že hodnotu  $d_0$  můžeme interpretovat nikoliv pouze jako námi očekávaný minimální zisk, ale také jako jistý závazek, který musíme naplnit. Například banky vyplácející úroky na spořicíh účtech si musí být schopny na tyto závazky vydělat. Tato myšlenka závazků bude stěžejním prvkem následující kapitoly a budeme je označovat písmenem  $L$  (*liability*).

V rámci nedostatků modelu jsme již zmínili nevhodnost rozptylu jako metriky očekávaného rizika. Za další kritický nedostatek pak můžeme považovat generování bodových odhadů na základě historických dat. Tento přístup je často nahrazován s využitím tzv. faktorových modelů. Jejich typickým zástupcem v rámci Moderní teorie portfolia je tzv. *Capital asset pricing model* (CAPM). Tento jednofaktorový model lze popsat rovnicí

$$\bar{d}_i = r_f + \beta(\bar{d}_m - r_f),$$

kde  $\beta$  je faktor představující citlivost daného aktiva na tržní změny, nebo také míra jeho volatility (ve smyslu směrodatné odchylky) v porovnání s průměrnou volatilitou celého trhu a  $r_f$  je již zmíněná bezriziková úroková míra. Tento koeficient vyjadřuje systematické riziko akcie, které narozdíl od nesystematického nelze odstranit diverzifikací. Hodnota  $\bar{d}_m$  pak představuje průměrnou návratnost celého trhu reprezentovanou hodnotou příslušného tržního indexu. Více o modelu CAPM je možno se dočíst v [2]. Vícefaktorové modely pak k popisu návratnosti akcie využívají další faktory jako očekávanou inflaci, či HDP. Typickým příkladem je model *Arbitrage pricing theory* (APT).

Posledním spíše výpočetním problémem modelu je velikost variační matice  $\mathbf{Q}$ , která roste s rostoucím množstvím proměnných. Tento problém lze řešit využitím statistických metod k redukci úlohy jako například analýza hlavních komponent, kterou znovu zmíníme v následující kapitole, ale více se jí zabývat nebudeme. O této metodě je možné se dočíst v [1].

## 3. Aktiva s pevným výnosem

Hlavní motivací pro tuto kapitolu je problematika závazků  $L$  zmíněná na konci kapitoly předchozí. V ní jsme závazky představili jako určitou (často pravidelnou a dopředu známou) platební povinnost finančních institucí vůči svým klientům plynoucích např. z benefitů penzijních fondů, garantovaných investičních smluv apod. Manažeři těchto firem se potýkají s problémem vytvoření takové investiční strategie, aby mohli tyto závazky financovat. Můžeme se však rovněž omezit na rovinu osobních financí. Takové závazky mohou tvořit pravidelné splátky hypotéky, případně platby za měsíční školné našim potomkům, přičemž je mnohdy známá jejich přesná výše a čas vyplacení. V takovém případě musíme mít pro zaplacení závazků vždy zajištěný dostatečný příjem z našich investic, a to nejpozději v době splatnosti tohoto závazku.

Protože akcie jsou obecně považovány za značně riziková aktiva s nejistou výší a termínem plateb dividend, zahrnuje většina subjektů finančního trhu do svých portfolií z nezanedbatelné části tzv. *aktiva s pevným výnosem*. Jedná se o dluhové instrumenty charakterizované konkrétní dobou splatnosti (datum navrácení dluhu) a stanoveným plánem vyplacení úroků a půjčené jistiny [1]. Jejich hlavním zástupcem jsou *dluhopisy*.

### 3.1. Dluhopisy

Dluhopis je *cenný papír s pevným výnosem*, jenž reprezentuje půjčku poskytnutou věřitelem většinou státu (státní dluhopis) nebo firmě (korporátní dluhopis). Subjekt, který pak dluhopis vydal se nazývá *emitent*. Motivací emitenta (ať už státu či firmy) pro vydání nových dluhopisů může být získání kapitálu na financování výstavby nových obytných čtvrtí, opravy infrastruktury či vybudování nové firemní pobočky. Na rozdíl od klasických úvěrů jsou však dluhopisy obchodovatelné na sekundárních trzích cenných papírů obdobně jako akcie [3][5].

Dluhopis dává svému držiteli právo na pravidelný (roční, pololetní, měsíční apod.) příjem v podobě *kupónů* (úroků)  $C$  spolu s vyplacením *nominální hodnoty*  $N$  dluhopisu v době jeho splatnosti (tzv. *mortality*)  $T$ . Velikost kupónů je pak počítána jako procento (*kupónová sazba*)  $c$  z nominální hodnoty, přičemž se kupónové sazby odvíjejí od tržních úrokových sazeb. V případě dluhopisů s pevným výnosem (*jednoduchý dluhopis*) je tato sazba neměnná po celou dobu života dluhopisu. Mezi širokou škálou dluhopisů však najdeme i takové, které mají kupónovou sazbu variabilní v čase, případně nevyplácí žádný kupón a jsou prodávány při emisi s *diskontem* (*bezkupónový dluhopis*) [3][5].

Nominální hodnotou dluhopisu rozumíme částku, kterou věřitel obdrží od dlužníka na konci doby do splatnosti. Dlužník naopak obdrží na počátku od věřitele částku odpovídající počáteční ceně dluhopisu  $P_0$ , za který jej prodává. Cena dluhopisu se během jeho života neustále mění v závislosti na změnách ve struktuře úrokových sazeb a při jeho koupi se nemusí nutně rovnat jeho nominální hodnotě. V případě, že počáteční cena je nižší než nominální hodnota, je dluhopis prodáván tzv. *s diskontem* v opačném případě je prodáván tzv. *s prémii* [3][5].

Velikost kupónové sazby dluhopisu ovlivňují především dva faktory: *úvěrový rating* a právě doba do splatnosti. Úvěrový rating je ukazatel schopnosti dlužníka dostát svým závazkům - tedy splácet kupóny případně jistinu v době splatnosti. Nejistotu s tím spojenou označujeme právě jako kreditní riziko viz definice 2.3 a významné je zejména u korporátních dluhopisů, u nichž je vždy nemalá šance, že nebudou schopny dostát svým závazkům vůči věřiteli např. z důvodu krachu. U státních dluhopisů se kreditní riziko často zanedbává, protože možnost krachu celého státu je mizivá. Toto podstoupené kreditní riziko je věřiteli kompenzováno v podobě vyšších kupónových sazeb, než tomu bývá u státních dluhopisů. Kreditní riziko bylo podstatné především v roce 2008, kdy před nástupem hypoteční krize byly prodávány velmi rizikové dluhopisy kryté hypotečními úvěry, jejichž rating naprosto neodpovídal kvalitě těchto hypoték [3][5].

Aktuální cena dluhopisu  $P_t$  v libovolném čase  $t$  není pro věřitele příliš důležitým faktorem, pokud plánuje dluhopis držet až do doby splatnosti (v takovém případě je mu navracena přesná nominální hodnota dluhopisu plus poslední kupón). Věřitel však není povinen dluhopis držet až do doby jeho splatnosti. Pokud jím držený dluhopis má na trhu v určitý moment vyšší hodnotu, než jakou měl při jeho koupi, může jej nabídnout k prodeji. Obecně platí, že cena dluhopisu roste s klesajícími (aktuálními) tržními úrokovými sazbami a naopak, protože při poklesu úrokových sazeb je dluhopis s vyšší kupónovou sazbou pro kupce daleko přitažlivější než aktuálně na trhu nabízené dluhopisy, a naopak. Možnost poklesu ceny námi drženého dluhopisu vlivem rostoucích úrokových měr vnímáme jako úrokové riziko viz definice 3.1, které bude hlavním zdrojem investičního rizika v této části práce [3][5].

Citlivost změn ceny dluhopisu na změnu úrokových sazeb měří tzv. *durace*. Míru této citlivosti, respektive změnu citlivosti pak popisuje tzv. *konvexita*. Oběma těmito pojmy se budeme zabývat později v rámci kapitoly [3].

Vyšší kupónové sazby nabízejí rovněž dluhopisy s delší dobou do splatnosti, které jsou do větší míry vystavené právě úrokovému riziku a riziku spojeném s rostoucí inflací. Jako konec tohoto úvodu shrnuji rizika spojené s dluhopisy následovně.

**Definice 3.1** (Úrokové riziko). Riziko změny cen aktiv v závislosti na změně ve struktuře úrokových sazeb.

**Definice 3.2** (Reinvestiční riziko). Riziko změny výnosů z reinvestic v závislosti na změně ve struktuře úrokových sazeb.

## 3.2. Toky peněz a úrokové sazby

Protože nyní nepracujeme pouze s návratností investice, tedy kapitálovým výnosem (přes- tože si ukážeme rovněž metody, jak vypočítat návratnost dluhopisového portfolia), ale s určitou posloupností příjmů plynoucích z držení této investice (tedy běžným výnosem), zavedeme následující pojem, který nám pomůže tuto posloupnost charakterizovat.

*Tokem peněz* rozumíme vektor  $\mathbf{F} = (F_0, \dots, F_T)$  od anglického *flow*, jenž představuje tok plateb v určitých časových okamžicích  $t \in \mathcal{T}$  generovaný příslušnou investicí případně závazkem, přičemž hodnoty  $F_t > 0$  představují investorem obdrženou hodnotu (příjem)

### 3.2. TOKY PENĚZ A ÚROKOVÉ SAZBY

a  $F_t < 0$  hodnotu investorem zaplacenou (výdaj) [1]. Hodnoty  $F_t$  mohou představovat nákup či prodej akcie, případně výplatu dividendy nebo kupónu při držení dluhopisu, ale také zaplacení závazku, které budou podstatné pro následující modely. Hodnota  $F_0$  pak často představuje platbu za daný investiční instrument, která odpovídá tržní ceně  $P_0$  tohoto instrumentu.

S hodnotou investice (respektive její změnou) případně závazku úzce souvisí pojem *úrokové míry* (nebo také *úrokové sazby*). Úrokovou mírou  $r$  rozumíme míru odměny vyjádřené jako procento z uvažované sumy peněz, která je vyplácena po určitém období [1].

Příčina existence této míry je ukryta v samotném poptávkovo-nabídkovém principu fungování tržní ekonomiky. Velice zjednodušeně můžeme finanční trh chápat jako místo, na kterém se potkávají ekonomické subjekty poptávající určité bohatství s těmi, kteří naopak své volné finanční prostředky jsou ochotny dočasně nabídnout za určitou odměnu - úrok. Jeho výše se pak odvíjí od důvěry poptávajících, že v dané ekonomické situaci budou schopni poptávané peníze efektivně využít k vytvoření dostatečně vysoké budoucí hodnoty. Zjednodušeně, jsou-li tržní podmínky vyhovující např. pro podnikatelskou činnost, bude ochoten podnikatel zaplatit vyšší úrok, protože věří, že mu jeho podnikání vynese dostatečný příjem na zaplacení tohoto úroku a dodatečný zisk.

V tržní ekonomice jsou tedy úrokové sazby jakýmsi ukazatelem ceny peněz, přičemž jsou do jisté míry usměrňovány centrálními bankami. Ty mohou prostřednictvím monetární politiky cíleně snižovat sazby (což má přímý vliv na sazby úvěrů obchodních bank), čímž docílí zvýšení objemu úvěrů u ekonomických subjektů a rozpohybování ekonomiky. Stejně tak v době vysoké inflace (tedy vyšší míry ztráty hodnoty peněz v důsledku jejich přebytku v ekonomice) může tyto sazby uměle navyšovat. Většinou se v těchto situacích bavíme pouze o krátkodobých sazbách, nicméně i tyto vnější zásahy mohou mít vliv na firemní plánování. V neposlední řadě má na sazby vliv rovněž celková makroekonomická situace ve světě [5].

Hlavní charakteristikou toku peněz je jeho současná hodnota  $PV$ . O současné hodnotě peněz můžeme uvažovat jako o funkci finančního toku a úrokové míry, tedy

$$PV(\mathbf{F}, r) = \sum_{t=0}^T \frac{F_t}{(1+r)^t}, \quad (3.1)$$

kde výraz  $(1+r)^{-1}$  představuje *diskontní faktor* a úrokovou sazbu  $r$  zde považujeme za konstantní v čase. Hodnota  $r$ , pro kterou rovnice (3.1) nabývá hodnoty 0, se nazývá *vnitřní míra návratnosti* a představuje sazbu vyrovnávající současnou hodnotu budoucích plateb a příjmů. Dále však tento tok budeme dělit zvláště na  $F_0$ , tedy výdaj neboli cenu dluhopisu (dále  $P_0$ ) a tok příjmů  $(F_1, \dots, F_T)$  [1]. Pro upřesnění značení  $PV$  je z anglického (*present value*), nejedná se tedy o součin dvou veličin.

Úrokové sazby nejen u dluhopisů, ale také ostatních finančních instrumentů se však běžně liší v závislosti na délce trvání daného kontraktu. Zavedeme proto vektor hodnot úrokových sazeb  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_T)$ , kde  $r_t$  je sazba (míra odměny) za období od teď do budoucího času  $t$ . Tento vektor nazýváme *termínovou strukturou úrokových sazeb* [11]. Současnou hodnotu toku  $PV$  pak vyjádříme jako

$$PV(\mathbf{F}, r) = \sum_{t=1}^T \frac{F_t}{(1+r_t)^t}. \quad (3.2)$$

Pojem úrokové míry jsme zatím pouze velmi obecně představili jako jakousi odměnu za dočasné vzdání se svého peněžního bohatství, nyní ji však rozebereme více do hloubky.

**Definice 3.3** (Spotová úroková míra). Základní míra účtována za držení bezrizikového aktiva od současné doby do budoucí doby  $t$ , kterou značíme  $r_{ft}$  [11].

Jedná se vlastně o míru návratnosti, které bychom dosáhli při investování naší hotovosti do státních dluhopisů, od kterých se spotové sazby nejčastěji odvíjí (pozn. konkrétně mluvíme o státních amerických bezkupónových cenných papírech s různými dobami do splatnosti). Ty jsou považovány za bezriziková aktiva. Jinak řečeno spotová sazba představuje potenciální výnos, o který se připravujeme tím, že naši drženou hotovost nikam neinvestujeme (a nevyužíváme princip časové hodnoty peněz [6]), přestože bychom touto investicí nepodstupovali téměř žádné riziko [5].

Reálná tržní sazba však v sobě zahrnuje více elementů než pouze bezrizikovou složku, jak můžeme vidět z následující rovnice (pro jednoduchost pomineme časový index  $t$ )

$$1 + r = (1 + r_f)(1 + r_{\text{inf}})(1 + r_{\text{risk}}), \quad (3.3)$$

kde  $r_f$  představuje bezrizikovou sazbu,  $r_{\text{inf}}$  míru inflace (ztráta kupní síly peněz), kvůli které věřitel žádá vyšší odměnu, a  $r_{\text{risk}}$  odměnu za podstupování kreditního a likvidního rizika [1]. Reálné úrokové sazby, s kterými se pak člověk setká u hypoték případně výnosů z korporátních dluhopisů, jsou pak daleko bližší této míře  $r$  než spotové sazbě  $r_f$ , protože často faktory jako inflaci a kreditní riziko reflektují. Kvůli složitosti a nepředvídatelnosti vývoje úrokových sazeb jistě čtenáře nepřekvapí, že má smysl na ně pohlížet rovněž jako na náhodné proměnné  $r_t(\xi)$ .

Předpokládejme, že jediné existující sazby jsou bezrizikové sazby, tedy z rovnice (3.3) platí

$$1 + r = 1 + r_f.$$

Za této situace jsou rovněž toky peněz plynoucí z držení investice (např. kupóny) bezrizikové a platí [11], že současná hodnota dluhopisu je rovna jeho tržní ceně  $P_0$ , tedy

$$PV(\mathbf{F}, r) = \sum_{t=0}^T \frac{F_t}{(1+r_t)^t} = P_0. \quad (3.4)$$

Pro kompletní obrázek dodám, že na základě teorie efektivních trhů kromě jiného platí, že ceny odrážejí všechny dostupné informace a odpovídají tedy přesně vnitřní hodnotě aktiva [6]. Existují však trhy, kde toto nemusí platit například z důvodu nedostatečné likvidity (nedostatku poptávky či nabídky), za této situace pak aktivum nemusí být vzhledem ke své vnitřní hodnotě správně naceněno. Nedostatečná likvidita takového trhu by se pak projevila právě v likvidním riziku  $r_{\text{risk}}$  při výpočtu reálné sazby  $r$ . Uvažováním pouze bezrizikové složky  $r_f$  (dále jen  $r$ ) se problému s možnou nerovností ceny a počáteční hodnoty vyhneme. Nemusíme tedy vnímat úrokovou sazbu  $r(\xi)$  jako náhodnou proměnnou a náš model bude dále deterministický.

### 3.3. Očekávaná návratnost

Jak jsme již uvedli v úvodní kapitole, každá investice je spojena s očekávanou návratností a očekávaným rizikem. V případě akcií jsme pro odhad očekávané návratnosti portfolia využívali historická data. Existují však různé oceňovací modely akcií (vycházející především z fundamentální analýzy), které čtenář může nalézt např. v [2]. Stejně tak v případě aktiv s pevným výnosem zavádíme různé metriky očekávané návratnosti, přičemž každá je více či méně vhodná pro různé situace.

*Běžný výnos (current yield CY)* je roční výnos, který v daném roce vykazuje dluhopis s aktuální tržní cenou  $P_t$  a vyplacným kupónem  $C_t$  [2][3]. Pro jeho výpočet platí jednoduchá formule

$$CY = \frac{C_t}{P_t}.$$

Tato metrika tedy nebere v potaz počáteční investici do dluhopisu  $P_0$ , pouze bere v potaz vyplácený úrok vůči jeho aktuální tržní ceně, za kterou je možné jej zobchodovat. Jedná se o nepřesnou metriku, která nebere v potaz časovou hodnotu peněz a frekvenci vyplácení kupónů.

Je běžnou praxí, že jsou kupóny připisovány pololetně, kvartálně případně v některých případech i měsíčně. Častější frekvence kupónu je pro investora výhodnější, protože obdržené kupóny může okamžitě reinvestovat na trhu krátkodobých cenných papírů. Metriku, která bere tento faktor v potaz je *efektivní roční výnos (effective annual yield EY)* [2][3]. Platí pro ni vztah

$$EY = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1,$$

kde  $r$  je úroková míra v daném roce a  $n$  počet úročících období. Nevýhodou je předpoklad, že jsou všechny kupóny reinvestovány za stejnou úrokovou míru  $r$ , která se však v reálné praxi mění v čase podle tržní situace.

Zásadním ukazatelem očekávané návratnosti dluhopisu je tzv. *výnos do splatnosti (yield to maturity y)* [2][3]. Jedná se o takovou diskontní míru (nebo také již zmíněnou vnitřní míru návratnosti), která dává do rovnosti počáteční hodnotu (pravá strana) všech budoucích finančních toků a počáteční tržní cenu dluhopisu, a tedy splňuje rovnici

$$P_0 = \sum_{t=0}^T \frac{F_t}{(1+y)^t}, \quad (3.5)$$

kde  $F_t$  je finanční tok představující buď kupón  $C_t$  nebo kupón spolu s nominální hodnotou v čase  $T$ , tedy  $C_T + N$ . Jedná se vlastně o časově vážený průměrný výnos, který mohu očekávat, držím-li dluhopis do jeho splatnosti. Je-li  $y$  větší než kupónová míra  $c$ , je dluhopis prodáván s diskontem a naopak. Při jejich rovnosti je prodáván přesně za nominální hodnotu  $N$ . Platí rovněž, že při růstu tržních úrokových měr roste také výnos do splatnosti, protože vlivem rostoucích měr klesá cena dluhopisu v rovnici (3.5) [2]. Pozn. označení  $y$  zde nijak nesouvisí s použitím této proměnné v kapitole 2.2.3.

### 3.4. Termínová struktura úrokových sazeb

V úvodní kapitole jsme uvedli, že spotová sazba  $r_t$  je úroková míra účtována za držení bezrizikového dluhopisu do doby  $t$ , kde  $t = 1, \dots, T$ . Na konkrétním příkladě si nyní ukážeme, jak tyto sazby vypočítat. Všechny příklady jsou převzaty z [30].

**Příklad:**

Uvažujme nyní dva bezkupónové dluhopisy A, B oba s nominální hodnotou  $N = 1000$  a s dobou do splatnosti jeden respektive 2 roky. Protože se koupí dluhopisu B zbavujeme finančních prostředků na delší dobu, očekávali bychom větší slevu (diskont) při jeho nákupu. Předpokládejme tedy, že dluhopisy můžeme nakoupit za počáteční cenu  $P_0^A = 925.93$  a  $P_0^B = 826.45$ . Jinými slovy známe počáteční hodnotu toku peněz plynoucích z držení těchto dluhopisů. Dosazením do rovnice (3.4)

$$925.93 = \frac{1000}{1 + r_1} \quad 826.45 = \frac{1000}{(1 + r_2)^2}$$

můžeme nalézt spotové úrokové sazby  $r_1 = 0.08$ ,  $r_2 = 0.1$ .

Volbou dluhopisů s různými dobami do splatnosti bychom tímto způsobem získali celý vektor  $(r_1, \dots, r_T)$ , kterým bychom zkonstruovali tzv. *spotovou křivku* (*spot rate treasury curve*). V praxi bychom k tomu, jak již bylo zmíněno, využili nejlépe americké bezkupónové dluhopisy (Treasury notes, Treasury bills, Treasury bonds). Poznamenejme, že přestože se jedná o vektor, mluvíme o křivce, protože čas je spojitou veličinou.

Obdobnou a v praxi častěji využívanou je tzv. *výnosová křivka* (*yield treasury curve*). Ta se nejčastěji konstruuje z výnosů do splatnosti  $y$  opět ze státních amerických kupónových dluhopisů s různými dobami do splatnosti. Ilustrujme tuto situaci na příkladu.

**Příklad:**

Ponechejme platné spotové sazby  $r_1 = 0.08$ ,  $r_2 = 0.1$  z předchozího příkladu a uvažujme kupónový dluhopis na dva roky s nominální hodnotou  $N = 1000$  a kupónovou sazbou 5%. Takový dluhopis na konci prvního roku vyplatí kupón  $C_1 = 50$  a na konci druhého kupón  $C_2 = 50$  spolu s nominální hodnotou. Počáteční hodnota tohoto peněžního toku je

$$PV = \frac{50}{1 + 0.08} + \frac{1050}{(1 + 0.1)^2} = 914.06.$$

Dává smysl, že tento dluhopis je dražší než bezkupónový dluhopis se stejnou dobou do splatnosti, protože navyšuje investorův výnos o pravidelné kupóny. Výnosem myslíme tedy výnos do splatnosti viz rovnice (3.5).

Kolik tento výnos skutečně je? S využitím rovnice (3.2) a vyřešením nelineární rovnice (např. Newtonovou metodou)

$$914.06 = \frac{50}{1 + y} + \frac{1050}{(1 + y)^2}$$

dostáváme  $y = 0.0995$ , tedy někde mezi  $r_1$ , a  $r_2$ .

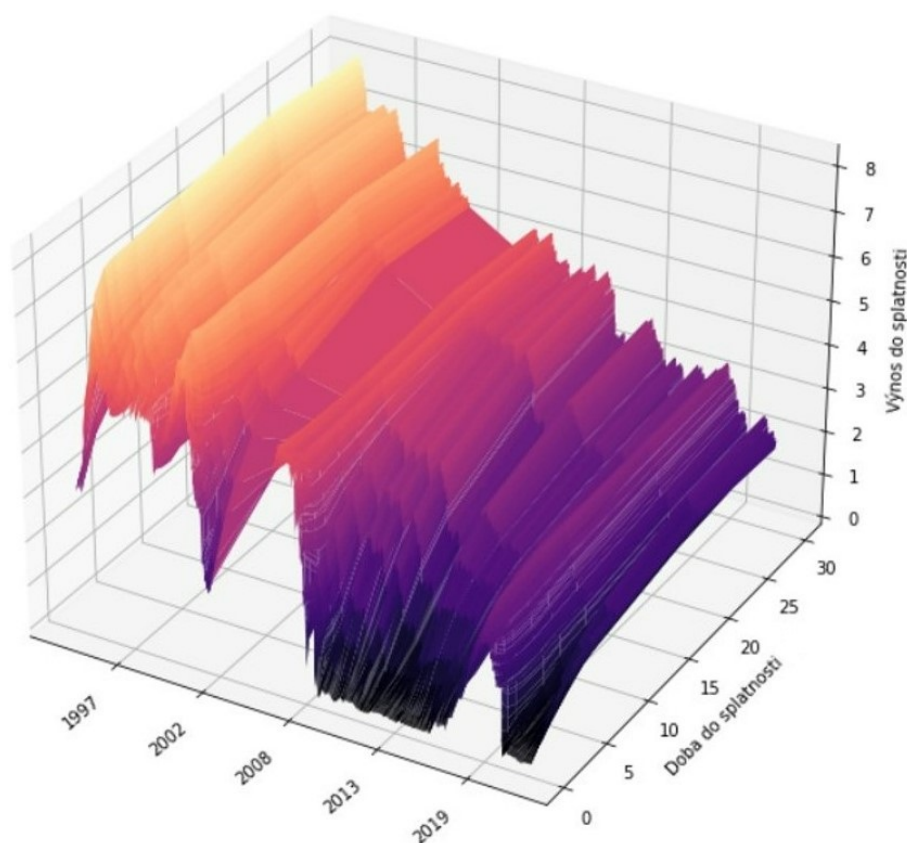
### 3.4. TERMÍNOVÁ STRUKTURA ÚROKOVÝCH SAZEB

Volbou kvalitativně podobných kupónových dluhopisů (tedy s podobným kreditovým ratingem) s různými dobami do splatnosti bychom zkonstruovali vektor výnosů  $\mathbf{y}$ , který nazýváme právě výnosovou křivkou. Ta se často nazývá také onou termínovou strukturou úrokových sazeb [11].

Poznamenejme, že v případě bezkupónového dluhopisu pojmy spotová míra a výnos do splatnosti (respektive dle nich zkonstruované křivky) splývají.

Následuje ukázka termínové struktury úrokových sazeb v různém čase (od začátku 90. let do konce roku 2021). Na svislé ose  $y$  jsou vyneseny hodnoty výnosů bezkupónových dluhopisů pro každou dobu do splatnosti. Z pohledu poslední osy pak může čtenář vnímat jak dynamicky se každá jednotlivá křivka (řez v ose  $x$ ) může měnit právě např. vlivem zásahů centrálních bank.

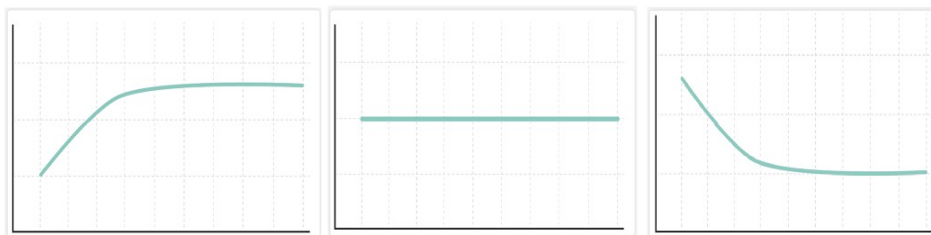
Termínová struktura úrokových sazeb



Obrázek 3.1: Termínová struktura úrokových sazeb. Zdroj: [29]

Jak spotové křivky, tak především výnosové křivky jsou naprosto stěžejní nejen pro investory a ekonomy, protože dávají určitou představu o zdraví ekonomiky (respektive očekávání její budoucí výkonosti). V dobře fungující ekonomice jsou sazby vyšší u aktiv s delší dobou do splatnosti - takové křivce říkáme, že je rostoucí. Při této křivce investoři očekávají ekonomický růst a s ním spojené riziko rostoucí inflace, za jehož podstupování očekávají rizikovou prémii - vyšší výnos. Existuje pak také tzv. invertovaná výnosová křivka, která značí možný příchod recese, a tedy zpomalení ekonomiky, což je běžně

doprovázeno nižší očekávanou inflací, a tedy nižšími výnosy pro delší splatnosti [32]. Někde na pomezí se pak rozlišuje tzv. plochá křivka, viz následující ilustrační obrázky.



Obrázek 3.2: Základní typy výnosových křivek. Zdroj: [32]

Protože se však ekonomická situace neustále vyvíjí a často je korigována nepředvídatelnými kroky centrálních bank (v posledních letech pak především značným kvantitativním uvolňováním), mění se také neustále struktura úrokových sazeb, tím pádem také ceny aktiv a závazků a jejich výnosnosti. Zde pak pramení hlavní zdroj rizika spojeného s dluhopisovými cennými papíry.

V rámci této podkapitoly zmíníme ještě poslední věc. Již známe nástroj, kterým zjistit úrokovou sazbu např. za dobu  $(t = 0, t = 1)$  (tedy  $r_1$ ) případně  $(t = 0, t = 2)$  (tedy  $r_2$ ) pomocí amerických státních dluhopisů (nicméně nebyla by chyba jít i přes jiné kvalitativně podobné dluhové nástroje). Existuje však možnost, jak odhadnout sazbu v době  $(t = 1, t = 2)$ , tedy výnos, který budou vynášet roční bezkupónové dluhopisy za rok?

**Definice 3.4** (Forwardová úroková míra). [11] Z definice spotových úrokových sazeb můžeme odhadnout úrok za držení bezrizikového aktiva od budoucí doby  $t$  do pozdější doby  $\tau$  pomocí forwardové úrokové sazby jako

$$f_{t\tau} = \frac{(1 + r_\tau)^\tau}{(1 + r_t)^t} - 1. \quad (3.6)$$

Na základě hypotézy nestrannosti forwardových sazeb jsou tyto sazby nestranným prediktorem příslušných budoucích spotových sazeb, neboť zcela reflektují všechny dostupné informace o očekáváních budoucího vývoje spotových sazeb. Problematika forwardových sazeb je složitější, než jak jsem předestřel, a nad rámec této práce, proto pro více informací odkazují na [33].

Pro nás je podstatné, že máme nástroj, jak určit budoucí spotové sazby, za které budeme v optimalizačních modelech reinvestovat přebytek případně úročit půjčky, a především určovat současné hodnoty aktiv a pasiv. Poznamenejme, že jsme tento problém u Markowitzova modelu řešit nemuseli, protože celý model pracoval s jediným časovým bodem  $t = 0$ .

#### Příklad

Mějme spotové sazby z přechozích příkladů  $r_1 = 0.08$  a  $r_2 = 0.1$ . Dle předchozího vzorce je roční spotová sazba platná za rok (tedy aktuální forwardová sazba) rovna

$$f_{12} = \frac{(1 + r_2)^2}{1 + r_1} - 1 = \frac{(1 + 0.08)^2}{1 + 0.1} - 1 = 0.12.$$

## 3.5. Riziko

Jak jsme již naznačili v předchozích odstavcích, hlavním zdrojem rizika v případě dluhopisů je riziko spojené se změnou úrokových měř viz definice 3.1. Tato změna (vyšší sazby znamenají, že se aktuálně prodávají výhodnější dluhopisy, než mám já) má za následek změnu ceny dluhopisu, a tedy také jeho kapitálového výnosu. Ruku v ruce s tím jde rovněž změna výnosů z reinvestic kupónů, jak si ukážeme v následujících příkladech.

Abychom se mohli na toto riziko zaměřit v optimalizačním modelování, musíme nejdříve popsat vztah mezi cenou aktiv (potažmo závazků) v závislosti na změně úrokových sazeb. Z tohoto vztahu pak odvodíme citlivost cen na tyto změny. K tomu nám pomohou pojmy *durace* a *konvexita*. Kreditní riziko viz definice 2.3 uvažovat nemusíme, protože pracujeme s bezpečnými státními dluhopisy.

### 3.5.1. Durace

Metrikou měřící citlivost změny ceny na změnu úrokových sazeb je tzv. *durace*  $D$ . Existuje několik různých definic durace, my budeme pracovat především s tzv. Fisher-Weilovou durací.

Uvažujme strukturu spotových úrokových sazeb  $(r_1, \dots, r_T)$ , která podléhá malé paralelní změně  $dr$ , tedy stejnému posunu na celé spotové křivce. Citlivost ceny dluhopisu  $P_i$  na tuto paralelní změnu můžeme vyjádřit s využitím derivace cenové funkce v řeči durace jako

$$D_i^{FW} = -\frac{1}{P_i} \frac{dP_i}{dr} = \frac{1}{P_i} \sum_{t=1}^T \frac{tF_{ti}}{(1+r_t)^{t+1}}. \quad (3.7)$$

Durace v této podobě nám vlastně říká, o kolik procent klesne cena (přesněji vnitřní hodnota) dluhopisu zvýší-li se úrokové sazby o 1% a obráceně [11].

Fisher-Weilova durace je pouze sofistikovanější variantou častěji používané tzv. modifikované durace

$$D_i^M = -\frac{1}{P_i} \frac{dP_i}{dr} = \frac{1}{P_i} \sum_{t=1}^T \frac{tF_{ti}}{(1+r_t)^{t+1}},$$

která předpokládá plochou strukturu úrokových sazeb, tedy  $\forall t$  platí  $r_t = r$ .

Dřívější přístup využíval k vyjádření durace nikoliv spotové sazby nýbrž výnos do splatnosti samotného dluhopisu, jmenovitě mluvíme o Macaulayově duraci

$$D_i^{MAC} = \frac{\sum_{t=1}^T t \frac{F_{ti}}{(1+y_i)^t}}{\sum_{t=1}^T \frac{F_{ti}}{(1+y_i)^t}}.$$

Ta na rozdíl od Weil-Fisherovy durace je vyjádřena v jednotkách času (letech) [11]. Durace v Macaulayově smyslu je chápána jako vážený průměr splatností všech budoucích finančních toků, kde váhami jsou právě finanční toky diskontované výnosem do splatnosti. Jinými slovy jde o průměrnou dobu splatnosti finančních toků plynoucích z dluhopisu,

tedy o jakési těžišťě těchto toků na časové ose.

Modifikovanou duraci lze převést na Macaulayovu odvozením

$$D^M = \frac{1}{P_i} \sum_{t=1}^T \frac{tF_{ti}}{(1+r)^{t+1}} = \frac{1}{1+y} \frac{\sum_{t=1}^T t \frac{F_{ti}}{(1+y_i)^t}}{P_i} = \frac{1}{1+y} \frac{\sum_{t=1}^T t \frac{F_{ti}}{(1+y_i)^t}}{\frac{F_{ti}}{(1+y_i)^t}} (1+y_i)^t = \frac{D^{MAC}}{1+y},$$

když si uvědomíme, že při konstantní struktuře sazeb ( $r_t = r$ ) je tato sazba přesně rovna výnosu do splatnosti  $y$ .

Na základě Fisher-Weilovy durace  $D^{FW}$  můžeme odhadnout změnu ceny dluhopisu  $i$  v reakci na změnu úrokové sazby jako

$$\Delta P_i \approx -D_i^{FW} P_i \Delta r. \quad (3.8)$$

Uvažujme konkrétní dluhopis dle následující tabulky, uvažujme konstantní úrokovou sazbu  $r_t = r = 8.15\%$  pro všechny doby do splatnosti a na základě Fisher-Weilovy durace ukažme, jak odhadnout cenu dluhopisu při změně úrokové sazby o  $\Delta r$ .

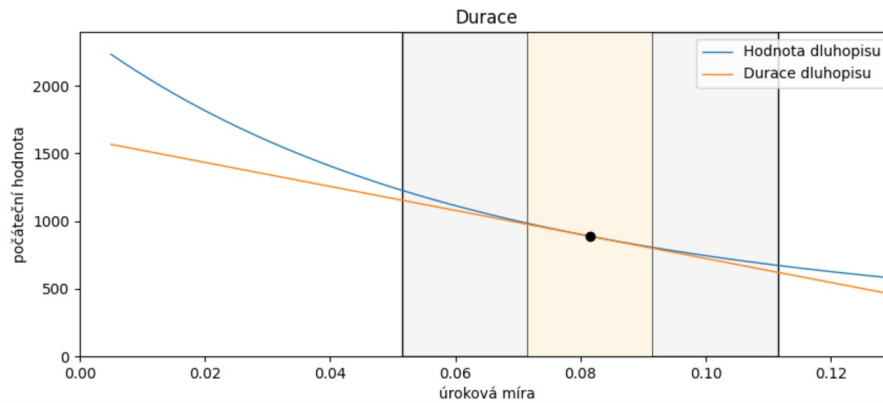
	Dluhopis		Rok	Tok	Diskontovaný tok
Doba do splatnosti	20		1	70	63.63
Nominální hodnota	1000		2	70	57.85
Kupónová míra $c$	0.07		⋮	⋮	⋮
Kupón C	70		19	70	11.45
			20	1070	159.05
Současná hodnota PV	888.34				
Durace D	10				
Konvexita K	150.71				
Výnos do splatnosti $y$	8.15%				
Běžný výnos	7.88%				

Na základě vzorce (3.2) jsme vypočítali diskontovanou hodnotu finančních toků generovaných dluhopisem, které po sečtení dají současnou hodnotu dluhopisu  $PV$ . V souladu s výpočtem durace viz vztah (3.7) určíme toky diskontované mírou  $(1+r_t)^{t+1}$ , které po vynásobení  $t$ , sečtení a vydělení současnou hodnotou dají duraci  $D$ . Protože se jedná o duraci ve Fisher-Weilově smyslu, říká nám, že změní-li se úroková sazba o 1%, změní se opačným směrem cena dluhopisu zhruba o 10%. Hodnotou konvexity se budeme zabývat později. Pro úplnost v duchu kapitoly o návratnosti doplňuji také informaci o výnosu do splatnosti (který je při ploché spotové křivce roven této spotové sazbě) a běžném výnosu.

Slovo zhruba je zde nezbytné, neboť se jedná pouze o derivaci, potažmo aproximaci cenové funkce, která dává dostatečně přesné odhady pouze pro malé hodnoty  $\Delta r$ . Přesnost této aproximace předvedme na následující tabulce a grafu. Obrázek nám v podstatě ilustruje pouze elementární fakt, že derivace potažmo tečna aproximuje původní funkci

### 3.5. RIZIKO

pouze v blízkém okolí (oranžová oblast) původní sazby, které přísluší současná hodnota dluhopisu označena černým puntíkem.



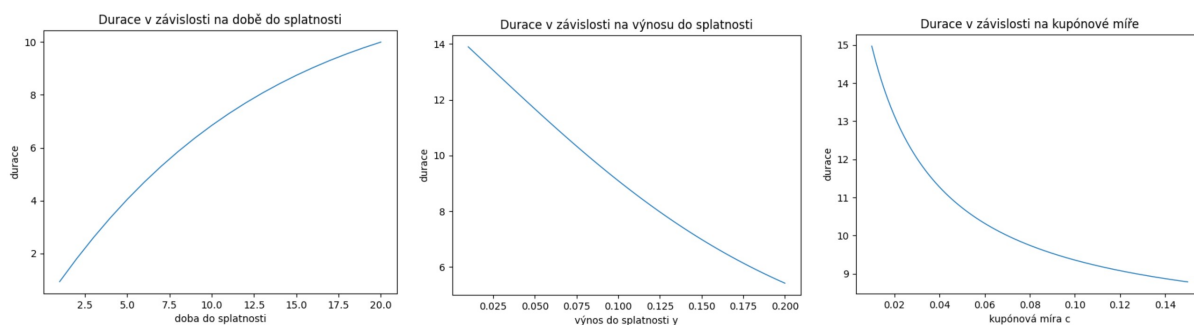
**Obrázek 3.3:** Ilustrace durace jakožto aproximace cenové funkce.

Tabulka porovnává predikci ceny na základě vzorce (3.8) se současnou hodnotou diskontovanou příslušnou sazbou. Jak vidno, rozdíl je minimální v blízkém okolí původní sazby (0.0815), nicméně s větším rozdílem  $\Delta r$  se predikce začíná poměrně značně lišit. První a poslední řádek odpovídají změně sazby o 1%. Čtenář si sám lehce ověří, že při této změně sazby predikovaná změna ceny od původní (888.34) odpovídá duraci  $D$ , tedy 10%.

Nová sazba	Predikce ceny	Skutečná cena	Rozdíl
0.0715	977.18	984.29	-7.11
0.0765	932.76	934.49	-1.72
0.0805	897.22	897.29	-0.07
0.0825	879.46	879.52	-0.07
0.0865	843.92	845.55	-1.63
0.0915	799.5	805.82	-6.32

Na následujícím obrázku ilustrujeme, jak mají jednotlivé faktory jako doba do splatnosti, výnos do splatnosti případně velikost vyplacených kupónů vliv na duraci.

Z interpretace durace (jakožto těžiště plateb na časové ose v Macaulayově smyslu) je evidentní, že dluhopisy s delší dobou do splatnosti mají vyšší duraci a jsou tedy náchylnější ke změnám ve struktuře úrokových sazeb. Toky peněz jsou rozprostřeny na delším časovém úseku, během kterého je větší pravděpodobnost změny sazby. S vyšším výnosem do splatnosti pak klesá durace dluhopisu, což plyne přímo ze vzorce pro výpočet. Nakonec durace rovněž klesá s vyšší kupónovou sazbou, protože je tím na tyto průběžné dřívější toky kladen větší důraz, a tím se ono těžiště posouvá směrem doleva.



Obrázek 3.4: Ilustrace durace v závislosti na různých parametrech.

Zároveň také záleží na systému vyplácení kupónů. Dva dluhopisy se stejnou dobou a výnosem do splatnosti, stejnou nominální hodnotou a stejnou kupónovou sazbou mohou mít jinou duraci, pokud jsou platby jednotlivých kupónů jinak rozprostřeny v průběhu doby platnosti dluhopisu. Bezcupónové dluhopisy pak mají duraci rovnu přesně době splatnosti [28].

### 3.5.2. Konvexita

Připomeňme, že na počátku jsme zavedli termínovou strukturu úrokových sazeb  $\{r_t\}_{t=1}^{t=T}$  a předpokládali malou paralelní změnu  $dr$  na celé výnosové křivce (tedy pro všechny doby do splatnosti). Požadavek malé změny jsme odůvodnili nepřesností aproximace pomocí durace, která nám slouží jako míra rizika. Tato aproximace se dá vylepšit zavedením tzv. *konvexity* [11]. Předpoklad paralelní změny okomentuji na konci.

Konvexita matematicky není nic jiného než druhá derivace cenové funkce, tedy

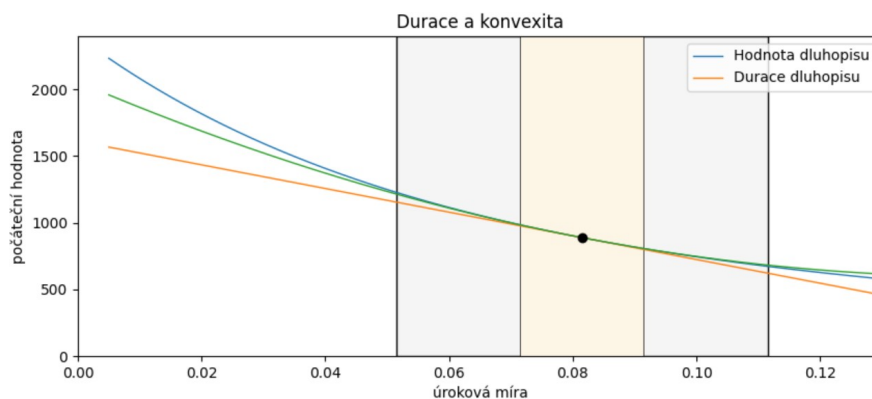
$$K_i = \frac{1}{P_i} \frac{d^2 P_i}{dr^2} = \frac{1}{P_i} \sum_{t=1}^T \frac{t(t+1)F_{ti}}{(1+r_t)^{t+2}}.$$

Na základě konvexity pak můžeme provádět přesnější odhady změny ceny v závislosti na změně úrokových sazeb pomocí následující aproximace

$$\Delta P_i \approx -D_i^{FW} P_i \Delta r + \frac{K_i P_i}{2} (\Delta r)^2, \quad (3.9)$$

kteřá není ničím jiným než Taylorovým polynomem druhého stupně.

Opět si můžeme s pomocí grafu a vzorových výpočtů naznačit přesnost této aproximace. Hodnota konvexity pro uvažovaný dluhopis je uvedena v úvodní tabulce. Výpočet vychází ze vzorce (3.9).



Obrázek 3.5: Ilustrace konvexity jakožto lepší aproximace cenové funkce.

### 3.6. OPTIMALIZACE PORTFOLIA

V tabulce je možné nalézt opět porovnání predikce ceny s použitím druhého stupně Taylorova polynomu a porovnání chyby aproximace s chybou při použití pouze durace. Oblast dostatečně přesné aproximace se nám značně zvýšila.

Nová sazba	Predikce ceny	Skutečná cena	Rozdíl	Rozdíl (pouze durace)
0.0715	983.87	984.29	-0.42	-7.11
0.0765	934.43	934.49	-0.05	-1.72
0.0805	897.29	897.29	$\approx 0$	-0.07
0.0825	879.52	879.52	$\approx 0$	-0.07
0.0865	845.59	845.55	0.05	-1.63
0.0915	806.2	805.82	0.38	-6.32

Z předchozího obrázku je evidentní, že dluhopis s vyšší konvexitou je také rizikovější ve smyslu durace.

Existují rovněž dluhopisy s negativní konvexitou, jmenovitě například dluhopisy s tzv. vnořenými *call opcemi*. Tato vnořená opce dává emitentovi právo odkoupit dluhopis zpět v případě, že se změní úrokové sazby. V případě jejich poklesu je v zájmu původního emitenta získat zpět dluhopis s relativně vyšším kupónem, v případě jejich růstu je zase v jeho zájmu držet dluhopis jehož cena výrazně vzroste a sám ho znovu prodat za vyšší cenu. Výhoda pro kupujícího spočívá ve vyšším výnosu (jako kompenzaci vyššího rizika), který tyto dluhopisy přinášejí, a jsou pro něj výhodně v době, kdy se neočekávají výrazné změny úrokových sazeb [5].

Nyní už máme všechny nutné elementární nástroje, abychom mohli začít budovat optimalizační model.

## 3.6. Optimalizace portfolia

Nyní představím konkrétní modely optimalizace portfolia pro aktiva s pevným výnosem na reálných datech. Vycházím především z [10] [11][34].

Finanční instituce se často potýkají se závazky vůči klientům, které se táhnou daleko do budoucnosti. Příkladem mohou být penzijní fondy vyplácející příjmy z penzijních spoření svých klientů. Podobným způsobem by však mohl uvažovat student soukromé univerzity, který chce ze svých investic platit průběžné splátky svého studentského úvěru.

Tato finanční problematika se nazývá rovněž problémem optimální *správy aktiv a pasiv* (*asset liability management*).

Pro modelový příklad jsem vybral data o obchodovaných amerických dluhopisech na sekundárním trhu ze serveru [31]. Data jsou ze dne 9.1.2023. Závazky jsou generovány s pomocí normálního rozdělení.

	Aktiva			Pasiva		
	dluhopis	tržní cena	splatnost	kuponová míra	Rok splatnosti	Závazek
TB-1-24	95.172	2024	0.125		2023	0
TB-2-24	96.034	2024	0.750		2024	26722.54
TB-3-24	97.246	2024	2.25		2025	18493.94
TB-1-25	93.312	2025	1.125		2026	2298.19
TB-2-25	94.126	2025	1.375		2027	30669.59
TB-3-25	96.196	2025	2.5		2028	6493.21
TB-1-26	89.232	2026	0.375		2029	5356.41
TB-2-26	96.076	2026	2.625		2030	6385.73
TB-3-26	93.074	2026	1.625		2031	6942.44
TB-1-27	91.11	2027	1.5		2032	4955.12
TB-2-27	94.032	2027	2.25		2033	3138.39
TB-1-28	86.124	2028	0.75		2034	21101.26
TB-2-28	95.136	2028	2.75		2035	4743.21
TB-1-29	89.164	2029	1.75		2036	23954.62
TB-2-29	94.07	2029	2.625		2037	4027.21
TB-1-30	88.546	2030	1.5		2038	8319.01
TB-1-31	85.692	2031	1.125		2039	15757.48
TB-2-31	116.584	2031	5.375		2040	568.90
TB-1-32	92.346	2032	1.875			
TB-1-33	96.592	2033	2.5			
TB-1-34	103.012	2034	3.375			
TB-1-35	107.24	2035	4			
TB-1-36	109.084	2036	4.5			
TB-1-37	113.016	2037	4.75			
TB-1-38	108.24	2038	4.375			
TB-1-39	97.284	2039	3.5			
TB-1-40	111.264	2040	4.625			

Obrázek 3.6: Tabulka vstupních dat.

Pro názornost volíme soubor dluhopisů jejichž doby do splatnosti jsou vždy na konci ledna a liší se vždy o rok - máme tedy jednoduchou časovou strukturu finančních toků.

### 3.6.1. Vyrovnání finančních toků

Naivním způsobem, jakým by penzijní fond mohl zajistit fundování svých produktů (a po-  
tažmo svých závazků), by bylo nakoupit takové dluhopisy, jejichž platby (tedy kupóny  
a vyplacení nominální hodnoty) by velikostně i časově překonávaly platby ze spořicíh  
produktů a zároveň by na toto dluhopisové portfolio nevynaložilo přílišné náklady. K tomu  
by nám vystačily pouze vhodné bezkupónové dluhopisy, které by měly stejnou nominální  
hodnotu jako závazky, k jejichž splacení by měly být použity.

Matematicky zapsáno [11][12]

$$\min \sum_{i=1}^n P_{0i} x_i$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ti} x_i \geq L_t, \forall t \in \mathcal{T}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n,$$

kde  $P_{0i}$  jsou počáteční ceny jednotlivých dluhopisů,  $F_{ti}$  je finanční tok plynoucí z dluhi-  
pisu  $i$  v čase  $t$  a  $L_t$  je závazek v čase  $t$ . Značením  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  myslím, že můžeme nakupovat

### 3.6. OPTIMALIZACE PORTFOLIA

pouze celé jednotky dluhopisů (neexistují frakční podíly pro dluhopisy) a nejsou rovněž povoleny krátké prodeje. Minimalizujeme tedy počáteční náklady spojené s nákupem dluhopisů. Takové portfolio složeno z bezkupónových dluhopisů by navíc bylo zcela chráněno proti riziku změny úrokových sazeb, které bude hlavní náplní kapitoly. Tomuto jednoduchému přístupu se říká vyrovnání nebo spárování finančních toků (*cash flow matching*) [11].

Vyrovnaní toků však není možné nikdy přesně dosáhnout, protože načasování závazků může být libovolné, zatímco načasování dluhopisových kupónů a plateb v době splatnosti bývá jednou za čtvrt/půl roku/rok). Umožníme proto od počátku půjčky  $v_t^-$  stejně jako v Markowitzovu modelu v kapitole 2.2.2, respektive přebytky bohatství  $v_t^+$ . Tyto půjčky jsou však povoleny v libovolném čase, proto jsou proměnné opatřeny rovněž o časový index. Hodnoty půjčky na konci plánovacího horizontu nastavíme na  $v_T^- = 0$ , čímž požadujeme, aby měla firma vyrovnané všechny dluhy na konci plánovacího období.

Může se rovněž stát, že jsou dostupné dluhopisy s dobou splatnosti stejnou jako závazky anebo dluhopisy za lepší cenu s dobou splatnosti dřívější. Než slepě nakoupit ty, jejichž výplatní doba přesně sedí s dobou splatnosti závazků, je rozumnější nakoupit levnější dluhopisy s dřívější splatností a zisk reinvestovat za bezrizikovou úrokovou sazbu  $r_t$  v čase  $t$  do doby  $t + 1$  na trhu krátkodobých cenných papírů. Půjčky jsou rovněž brány za úrokovou sazbu  $r_t + \gamma$  (v praxi bezrizikové úrokové míry navýšené na úvěrech o bankovní poplatky či jiné ekonomické faktory  $\gamma$ , dále pouze jako navýšení). Rovněž v duchu rozšíření kapitoly 2.2.3 Markowitzova modelu přidáme transakční náklady jako procento  $e$  z kupní částky.

Na onu počáteční investici jistě bude firma potřebovat již nějaký počáteční kapitál  $V_0$ , její snahou pak je minimalizovat tyto nutnou počáteční investici.

Kompletní model vypadá následovně [11][12].

$$\min V_0$$

$$V_0 - \sum_{i=1}^n P_{0i}x_i - \sum_{i=1}^n P_{0i}x_i e + v_0^- = v_0^+, \quad (3.10)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ti}x_i + (1 + r_{t-1})v_{t-1}^+ = L_t + (1 + r_{t-1} + \gamma)v_{t-1}^-, \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n, v^+, v^- \geq 0 \quad (3.12)$$

Vstupní data jako  $L_t, P_{0i}, V_0, F_{ti}$  získáme buďto z úvodní tabulky nebo jednoduchým dopočtem v případě toků  $F_{ti}$ . Parametr  $r_t$  jsou forwardové sazby platné od  $t-1$  do  $t$  a vypočítáme je pomocí vzorce (3.6) ze spotových sazeb. Jak získat strukturu úrokových sazeb  $(r_1, \dots, r_T)$ , tedy spotovou křivku, z níž sazby vezmeme, jsme naznačili v ilustračních příkladech dříve v kapitole 3.4. Nyní si celý proces popíšeme podrobněji.

## Bootstrapping

V ilustračním příkladu jsme ukázali, jak z ročního bezkupónového dluhopisu najít roční úrokovou míru  $r_1$ . Ta je v druhém kroku použita k výpočtu roční úrokové míry  $r_2$  dvouletého bezkupónového dluhopisu (viz vzorový příklad v kapitole 3.4). Tímto iteračním procesem (který se nazývá *bootstrapping* [10][11]) bychom zjistili spotové sazby pro celý časový horizont (pro dluhopisy všech dob do splatnosti).

Naše situace je však poněkud komplikovanější, neboť pro danou dobu do splatnosti nemáme k dispozici vždy pouze jeden dluhopis, nýbrž hned několik dluhopisů, přičemž sazba  $r_t$  spočtená na základě každého z nich může vycházet trochu jinak. Ověřme si tuto skutečnost na dluhopisech TB-1-24, TB-2-24, TB-3-24.

**Příklad:** Spotové sazby pro tyto jednoleté dluhopisy spočítáme ze vzorců

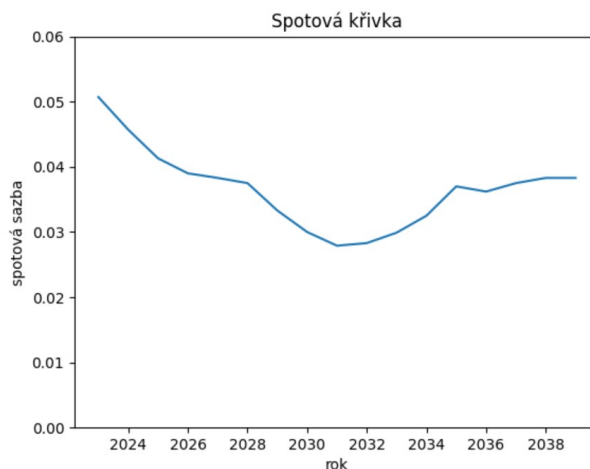
$$95.172 = \frac{100 + 0.125}{1 + r_{1A}} \quad 96.034 = \frac{100 + 0.75}{1 + r_{1B}} \quad 97.246 = \frac{100 + 2.25}{1 + r_{1C}}$$

jako  $r_{1A} = 0.052$ ,  $r_{1B} = 0.049$  a  $r_{1C} = 0.051$ .

Můžeme vidět, že spotové sazby pro každý dluhopis se mírně liší, kterou hodnotu  $r_1$  však použít pro výpočet  $r_2$  dvouletého dluhopisu? Dá se předpokládat, že hodnota reálné spotové sazby  $r_1$  je reflektována všemi třemi dluhopisy, respektive bude ležet někde mezi spočítanými hodnotami. Pro nalezení celé spotové křivky se tedy nabízí využít minimalizaci součtu čtverců, tedy řešit následující úlohu nelineárního programování [20], kterou ostatně navrhuje také [10]. Tuto úlohu je možné řešit s použitím software GAMS nebo rovněž Python s knihovnou Gurobi.

$$\min_{\mathbf{r}} \sum_{i=1}^N \left( P_{0i} - \sum_{t=1}^T \frac{F_{ti}}{(1+r_t)^t} \right)^2$$

Na základě této procedury (a našeho souboru dluhopisů) nalezneme spotovou křivku (vektor  $r_1, \dots, r_T$ ), která vypadá následovně.



Obrázek 3.7: Ilustrace získané spotové křivky.

### 3.6. OPTIMALIZACE PORTFOLIA

Výsledkem je tedy lomená čára, která jistě neodpovídá realitě (porovnejte např. s obrázkem 3.1). Zpřesnit bychom ji jistě mohli použitím většího množství dluhopisů, případně dluhopisů s dobami do splatnosti také jindy v průběhu roku (např. na konci každého měsíce). Autor se však tomuto přístupu vyhýbá, aby zachoval jednoduchou časovou strukturu peněžních toků a také, aby se při výpočtu hodnot  $PV$  vyhnul složitému diskontování s přesností na dny.

S pomocí regresní analýzy nalezenou lomenou čáru vyhladíme, konkrétně použijeme polynom 4. stupně. Podstatu regresní analýzy načrtnu v následujících řádcích. Využiji pro to značení použité v souladu s uvedeným zdrojem [9] (tj. symboly  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{X}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$ ,  $\mathbf{b}$ ), které se však v jiném významu objevuje i jinde napříč prací.

Mějme náhodné veličiny  $Y_1, \dots, Y_n$  a matici daných čísel  $\mathbf{X} = (x_{ij})$  typu  $n \times k$ , kde  $k < n$ . Pro náhodný vektor  $\mathbf{Y}$  platí  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$ , kde  $\boldsymbol{\beta}$  je vektor neznámých parametrů a  $\boldsymbol{\epsilon}$  je náhodný vektor splňující  $E\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0}$  a  $\text{Var}\boldsymbol{\epsilon} = \sigma^2\mathbf{I}$ , kde  $\mathbf{I}$  je jednotková matice a  $\sigma^2$  je neznámý parametr. Pro momenty vektoru  $\mathbf{Y}$  pak platí  $E\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$  a  $\text{Var}\mathbf{Y} = \sigma^2\mathbf{I}$  neboť vektor  $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$  je nenáhodný [9]. Vektor  $\mathbf{Y}$  odpovídá naší teoretické struktuře spotových sazeb.

Zásadním problémem je nalezení odhadu vektoru  $\boldsymbol{\beta}$ . K tomuto účelu slouží metoda nejmenších čtverců. Úkolem je tedy nalézt odhad  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  vektoru  $\boldsymbol{\beta}$  takový, že součet čtverců  $(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^\top(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$  je po nahrazení odhadem  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  minimální (např. ve smyslu wait-and-see přístupu stochastického programování [13] viz podkapitola 4.1.1), neboli platí

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \underset{\boldsymbol{\beta}}{\text{argmin}}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^\top(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}).$$

Lze ukázat [9], že tuto podmínku splňuje vektor

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^\top\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^\top\mathbf{Y},$$

který je navíc nejlepším nestranným odhadem [9].

Nahradíme-li náhodný vektor  $\mathbf{Y}$  jeho realizací, tedy měřeními  $\mathbf{y}$ , získáme realizaci odhadu  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ , tedy číselný vektor  $\mathbf{b}$

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}^\top\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^\top\mathbf{y}.$$

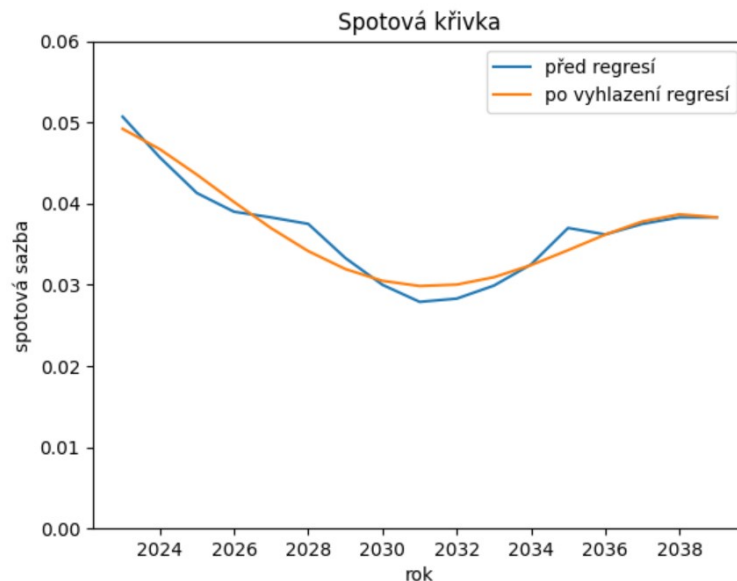
Závisí-li  $\mathbf{Y}$  na  $\boldsymbol{\beta}$  lineárně, můžeme v našem speciálním případě (jedné závislé a jedné nezávislé proměnné) psát

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \beta_3 X^3 + \beta_4 X^4 + \epsilon,$$

což je regresní polynom 4. stupně, který použijeme pro naše účely.

Dodejme ještě, že vektor  $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$  nazveme nejlepší aproximací vektoru  $\mathbf{Y}$  pomocí lineární kombinace sloupců matice  $\mathbf{X}$ . Realizací vektoru  $\hat{\mathbf{Y}}$  je pak vektor  $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\mathbf{b}$  [9], který přímo odpovídá hodnotám na vyhlazené křivce obrázku 3.8.

Následuje graf původní a vyhlazené spotové křivky. Oranžová křivka se již daleko více podobá realistické spotové křivce, a proto nám poskytne vstupní data pro úrokové sazby  $r_t$ .



Obrázek 3.8: Spotová křivka před a po regresní analýze.

Kód k regresní analýze napsaný v jazyce Python a vygenerování nového vektoru sazeb je následující.

```
spot_rates = [...]

x = [i for i in range(len(spot_rate))]
y = spot_rates
xx = np.array(x).reshape((-1,1))
yy = np.array(spot_rate)

#matice plánu
x_ = PolynomialFeatures(degree=4, include_bias=True).fit_transform(xx)

model = LinearRegression(fit_intercept=False).fit(x_, y)

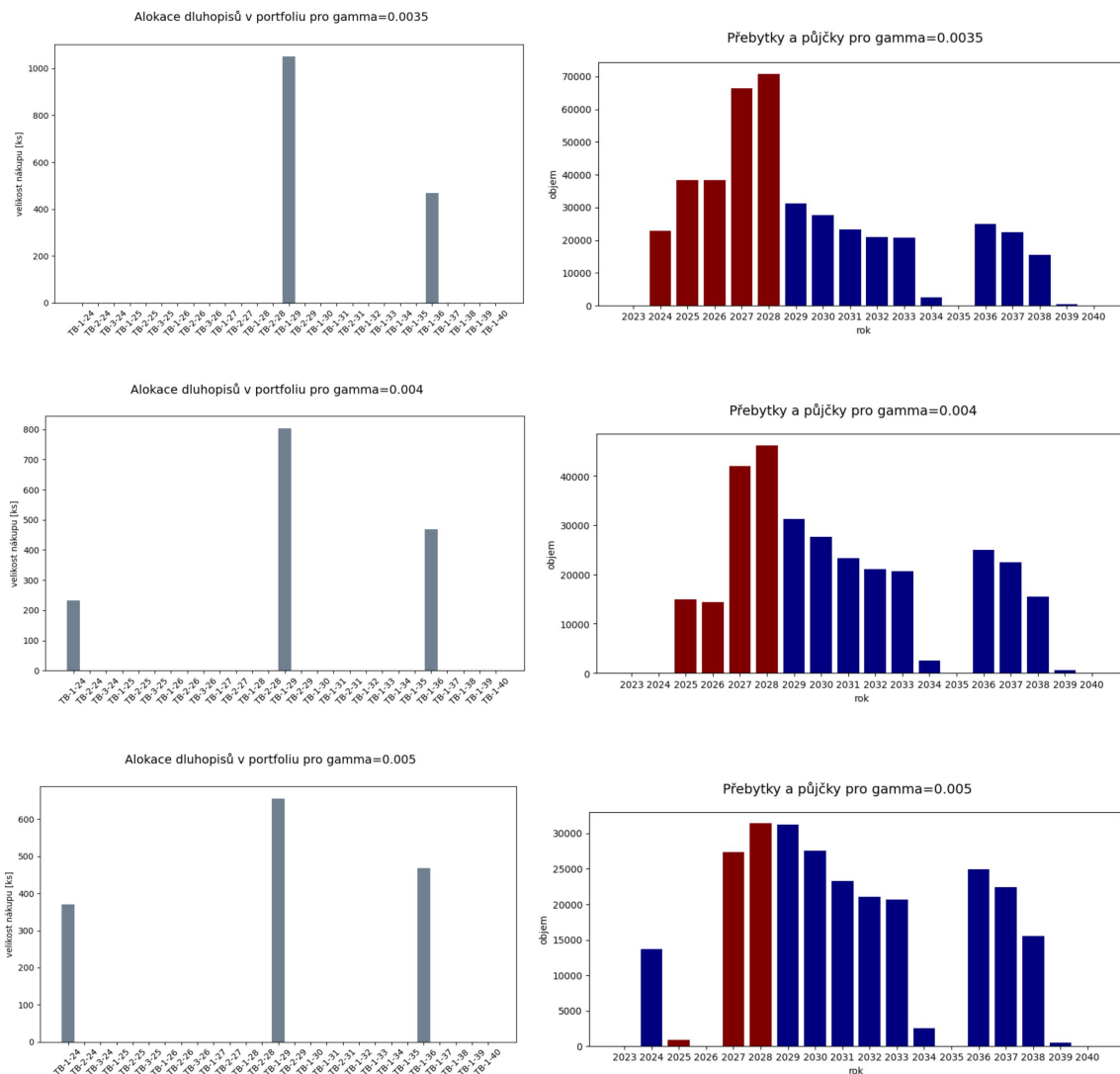
#kvalita modelu
r_sq = model.score(x_, y)

coef = model.coef_
new_y = [sum([coef[j]*x[i]**j for j in range(0,degree+1)]) for i in x]
```

Můžeme si všimnout, že křivka má tvar invertované (nebo také obrácené) spotové křivky viz obrázek 3.2 vpravo. Krátkodobé sazby jsou tedy vyšší než dlouhodobé, což zcela odráží očekávaný příchod recese a monetární politiku centrálních bank, které bojují zvyšováním sazeb proti inflaci. Očekává se, že tyto mnohdy radikální zvýšení povedou ke snížení inflace, a tedy také snižování sazeb ve střednědobém horizontu.

### 3.6. OPTIMALIZACE PORTFOLIA

Nyní se můžeme vrátit k samotnému modelu. Následuje graf výsledné alokace a graf zobrazující hodnotu půjček (červená), respektive přebytků (modrá) v různých letech. To vše pro 3 různé hodnoty navýšení  $\gamma$ . Tím ilustrujeme vliv velikosti tohoto parametru na velikost půjček.



**Obrázek 3.9:** Alokace, přebytky a půjčky pro různé hodnoty  $\gamma$

Hodnota prvotní investice je téměř totožná pro všechny tři případy. Pro nás bude podstatná hodnota  $V_0$  při navýšení  $\gamma = 0.005$ , která činí  $V_0 = 145206.6$ . Tu budeme srovnávat s hodnotou  $V_0$  následujícího modelu.

Zvyšováním hodnoty  $\gamma$  jsme evidentně docílili snížení hodnoty půjčky (která by se tak stávala méně atraktivní). Je také dosaženo stavu, kdy na konci plánovacího horizontu nemáme žádné dluhy a ani žádné přebytky. Za přítomnosti půjček jsme dosáhli portfolia, kde závazky jsou vyrovnány toky peněz plynoucí z těchto půjček případně držení dluhopisů. Další prvky modelu jako reinvestice blíže rozebereme až ve finálním modelu.

V této plánovací strategii však zatím není nijak zohledněno riziko spojené se změnou vektoru  $\mathbf{r}$  o paralelní posun  $\Delta \mathbf{r}$ .

### 3.6.2. Princip imunizace

Problém ilustrujeme na totožném dluhopisu jako doposud. Uvažujeme opět hodnotu úrokové sazby  $r = 0.0815\%$  a dále si přidáme závazek  $L$  viz tabulka. Po 10 letech máme povinnost splatit platbu v hodnotě 1944.66. Na základě vzorců (3.1) a (3.7) můžeme spočítat současnou hodnotu a duraci jak aktiva, tak závazku.

	Dluhopis	Závazek
Doba do splatnosti	20	10
Nominální hodnota	1000	1944.66
Kupónová míra $c$	0.07	
Kupón C	70	
Současná hodnota PV	888.34	888.34
Durace D	10	10

Strukturu dluhopisu jsme zvolili na počátku vcelku libovolně. Hodnotu závazku jsme zvolili účelně tak, aby jeho současná hodnota odpovídala současné hodnotě dluhopisu. Bude-li tomu tak a nezmění-li se tržní úroková míra, pak i budoucí hodnota pasiva (v čase vypořádání) bude rovna budoucí hodnotě aktiva. Z toho plyne první podmínka imunizace portfolia [11][34] obsahujícího  $n$  dluhopisů

$$\sum_{i=1}^n P_i x_i = PV_L, \quad (3.13)$$

kde  $P_i$  je cena aktiva, která je však podle vztahu (3.4) rovna jeho současné hodnotě, a  $PV_L$  je současná hodnota závazku. Teoreticky bychom mohli brát tuto podmínku jako nerovnost (s větší současnou hodnotou aktiv), tím bychom si však zbytečně zvyšovali počáteční náklady. Co se stane, změní-li se v průběhu sazby, vysvětlíme následovně.

Z následující tabulky lze vyčíst, jaká je situace investora v čase vypořádání závazku ( $t = 10$ ), konkrétně jaká je hodnota reinvestovaných kupónů, cena dluhopisu a celková hodnota investice. Všechny údaje jsou vyčíslené pro tři možné scénáře budoucího vývoje úrokových sazeb. V prvním sloupci předpokládáme, že se sazby za dobu  $t = 0$  až  $t = 10$  nezmění a zůstanou na hodnotě 8.15%. V dalších dvou scénářích předpokládáme, že se sazby ihned jednou sníží, respektive zvýší o 4%.

Úrokové sazby	0.0815	0.0415	0.1215
Hodnota kupónů v $t=10$	1021.31	846.3	1237.36
Cena dluhopisu v $t=10$	923.35	1229.44	710.79
Hodnota investice	1944.66	2075.74	1948.15

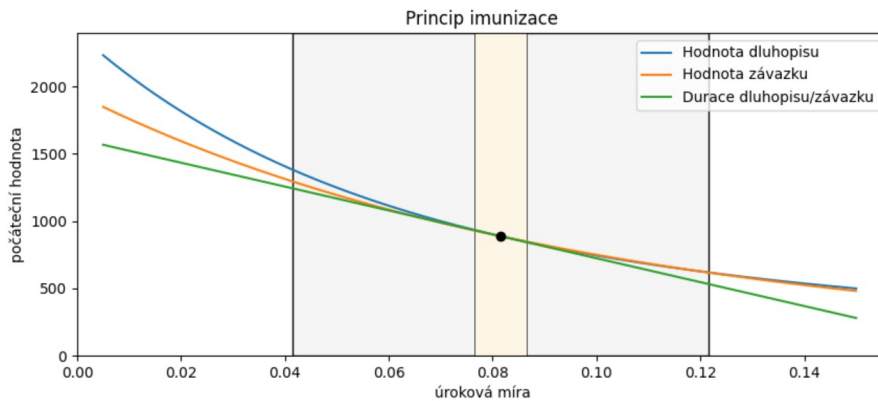
Zůstanou-li sazby na stejné hodnotě po celou dobu, bude hodnota naší investice (1944.66) rovna přesně hodnotě závazku, který musí být splacen. Toho jsme docílili dodržením nutné podmínky imunizace viz vztah (3.13). Na části hodnoty této investice (1021.31) se podílí vyplacení kupónů (700) a reinvestiční zisk těchto kupónů (321.31) při

### 3.6. OPTIMALIZACE PORTFOLIA

úrokové sazbě 8.15%. Druhou část pak tvoří samotná hodnota dluhopisu, který investor drží a v čase  $t = 10$  má tržní cenu 923.35, za kterou jej může prodat na sekundárním trhu.

Sníží-li se sazby na 4.15%, sníží se také hodnota reinvestice kupónů (které jsou tím pádem reinvestovány při nižší úrokové sazbě), hodnota dluhopisu se však zvýší na 1229.44, protože je tento dluhopis (se stálou kupónovou sazbou  $c = 7\%$ ) při snížené sazbě pro kupce atraktivnější. Při zvýšení sazby na 12.15% je situace opačná. Podstatné je, že se v obou případech celková hodnota investice při změně sazby nesnížila. Jinými slovy reinvestiční riziko a úrokové riziko se navzájem vyloučily.

S pomocí následujícího obrázku si vysvětlíme proč k tomu došlo.



Obrázek 3.10: Zdroj: vlastní

Naše situace, tedy počáteční hodnota dluhopisu a závazku, je označena opět (stejným) černým bodem (jediný společný bod obou křivek). Pokud se úrokové sazby nezmění, hodnota jak aktiva tak pasiva se touto sazbou zúročí za 10 let na hodnotu 1944.66. Modrá respektive oranžová křivka značí počáteční hodnotu dluhopisu respektive závazku při změně sazby v kterémkoliv směru. Kromě společného bodu mají však obě křivky společnou rovněž tečnu znázorněnou zelenou úsečkou, protože jsme zvolili jak dluhopis, tak závazek se stejnou durací 10. Obě křivky se tedy v okolí černého bodu (žlutá oblast) díky vlastnosti derivace chovají téměř stejně.

Toto lokálně stejné chování obou křivek pro celé portfolio zajistíme podmínkou [11][34]

$$\sum_{i=1}^n D_i^{FW} P_i x_i = D_L^{FW} PV_L.$$

V blízkém okolí původní sazby je tedy rozdíl současné hodnoty aktiv a pasiv přibližně roven nule.

$$PV_A - PV_L \approx 0 \tag{3.14}$$

Co se stane, když změna sazby  $\Delta r$  bude příliš velká (v rámci šedé oblasti a dál)? Aproximace pomocí durace přestane být přesná a hodnota rozdílu již nebude nulová. To přesně se ostatně stalo v našem příkladu (hodnota dluhopisu v době vypořádání byla mírně vyšší než hodnota závazku a to v obou směrech). To nutně není ke škodě, protože jsme v podstatě na změně sazeb vydělali. Aby se nestala opačná situace (tedy, že by

při velké změně sazeb byla hodnota aktiv v době vypořádání závazku nižší než hodnota závazku), musíme dodat poslední podmínku [11][34]

$$\sum_{i=1}^n K_i P_i x_i \geq K_L PV_L.$$

Ta nám říká, že konvexita cenové funkce aktiv v portfoliu (my uvažujeme prozatím jen jedno aktivum a pasivum, to se nicméně změní) musí být alespoň tak velká jako konvexita cenové funkce pasiv, jinými slovy modrá křivka musí ležet na oranžovou. Tím zajistíme, že rozdíl  $PV_A - PV_L$  v době vypořádání závazku bude kladný.

Následují dvě tabulky obdobné předchozí s číselnou ukázkou toho, co se stane, když podmínka rovnosti durace nebude splněna. Dluhopis ponecháme stejný, změním pouze parametry závazku. Budeme uvažovat dva různé závazky, jeden s dobou splatnosti (a tedy i durací) kratší než durace aktiva a druhý s dobou splatnosti delší. Podle toho také musíme zvolit nové hodnoty závazků, aby jejich počáteční hodnota byla opět shodná s počáteční hodnotou dluhopisu dle omezení (3.13).

	Dluhopis		Závazek1		Závazek2
Doba do splatnosti	20		12		8
Nominální hodnota	1000		2336.85		1596.1
Kupónová míra $c$	0.07				
Kupón $C$	70				
Současná hodnota $PV$	744.59		744.59		744.59
Durace $D$	10		12		8

Následují tabulky hodnoty investice pro různé úrokové sazby pro oba typy závazku.

Úrokové sazby	0.1	0.06	0.14
Hodnota kupónů v $t=12$	1496.9	1180.9	1908.95
Cena dluhopisu v $t=12$	839.95	1062.1	675.28
Hodnota investice	2336.85	2242.99	2584.23

Úrokové sazby	0.1	0.06	0.14
Hodnota kupónů v $t=8$	800.51	692.82	926.29
Cena dluhopisu v $t=8$	795.59	1083.84	603.78
Hodnota investice	1596.1	1776.66	1530.07

Podstatné je porovnat hodnotu závazku při vypořádání s hodnotou investice. V případě závazku s durací větší než durace aktiva a při poklesu úrokových měr klesla rovněž hodnota investice pod požadovanou hodnotu. To stejné se stalo v případě druhého závazku při růstu úrokových měr. V obou případech jsme tedy nevydělali dost na splacení závazku. Ve zbylých dvou případech jsme naopak vydělali. Právě uvedené vztahy pro hodnotu portfolia  $P_P$  (ve smyslu rozdílu viz rovnice (3.14)) v závislosti na duracích a změně úrokové sazby shrneme následující tabulkou.

### 3.6. OPTIMALIZACE PORTFOLIA

	$r \downarrow$	$r \uparrow$
$D_A < D_L$	$P_P < 0$	$P_P > 0$
$D_A > D_L$	$P_P > 0$	$P_P < 0$

**Tabulka 3.1:** Cena portfolia v závislosti na změně sazby a velikosti durací.

Velké penzijní fondy a jiné finanční společnosti si však nemohou dovolit spoléhat, že se úrokové sazby pohnou pro ně žádoucím směrem, proto se proti riziku jejich změny zajišťují právě imunizací portfolia. Imunizace je tedy strategie portfolia, jejíž cílem je ochránit portfolio vůči riziku změny úrokových sazeb vzájemným kompenzováním úrokového a re-investičního rizika [11][12].

#### 3.6.3. Imunizace portfolia

V našem optimalizačním problému uvažujeme obecně  $n$  dluhopisů z kterých skládáme investiční portfolio. Doposud jsme si ukázali vztah pro výpočet durace a konvexity jednoho aktiva. Odvodme si nyní duraci celého portfolia [42].

Cena portfolia  $P_P$  bude jistě rovna součtu množství dluhopisů  $x_i$  nakoupených za jejich tržní ceny  $P_i$ , tedy

$$P_P = P_1x_1 + \dots + P_nx_n.$$

Připomeňme, že cena je mj. funkcí úrokové sazby  $r$  podle které ji můžeme derivovat, tedy

$$\frac{dP_P(r)}{dr} = \sum_{i=1}^n \frac{dP_i(r)}{dr} x_i$$

a vynásobme každý člen rovnice příslušným podílem  $-\frac{P_i(r)}{P_i(r)}$ , tedy

$$\frac{dP_P(r)}{dr} \left( -\frac{P(r)}{P(r)} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{dP_i(r)}{dr} \left( -\frac{P_i(r)}{P_i(r)} \right) x_i.$$

Nakonec s využitím definice durace dostáváme

$$D_P^{FW} P_P = \sum_{i=1}^n D_i^{FW} P_i x_i$$

a po vydělení cenou portfolia  $P_P$  máme

$$D_P^{FW} = \frac{\sum_{i=1}^n D_i^{FW} P_i x_i}{P_P} = \frac{\sum_{i=1}^n P_i D_i^{FW} x_i}{\sum_{i=1}^n P_i x_i},$$

kde  $D_i^{FW}$  jsou durace jednotlivých dluhopisů a  $P_i$  jsou jejich tržní ceny.

Odvození konvexity celého portfolia by nebylo příliš odlišné, napíšme proto výsledný tvar [42].

$$K_P = \frac{\sum_{i=1}^n P_i K_i x_i}{\sum_{i=1}^n K_i x_i}$$

Existuje několik způsobu složení portfolia dluhopisů tak, aby každé z nich mělo duraci stejnou duraci závazku, nicméně každé se bude lišit dobami do splatnosti jednotlivých dluhopisů, a tedy také jejich konvexitou [35].

Prvním typem je tzv. *bullet* portfolio, které se skládá z jediného dluhopisu o době splatnosti rovné době splatnosti závazku. Takové portfolio je zcela chráněno proti změnám úrokových sazeb a je nejjednodušším (v praxi těžko dosažitelným) typem s nejmenší konvexitou [35].

Druhý typ je tzv. *barbell* portfolio, které obsahuje jak dluhopisy s krátkou, tak dluhopisy s dlouhou dobou do splatnosti rozdělenými zhruba na půl. Jejich kombinace nám pak dává požadovanou duraci, zároveň má největší konvexitu. Oproti *bullet* portfolio může dosahovat vyšších výnosů. V případě růstu úrokových sazeb investor může reinvestovat zisk z krátkodobých dluhopisů a taky mu tyto krátkodobé dluhopisy poskytují vyšší likviditu. Navíc je toto portfolio lépe diverzifikované. Dluhopisy s delšími dobami do splatnosti pak zvyšují volatilitu portfolia, protože dluhopisy s delší dobou do splatnosti jsou citlivější na změny v úrokových sazbách (vyšší durace) [35].

Posledním typem je tzv. *ladder* portfolio, které obsahuje dluhopisy s dobami do splatnosti rovnoměrně rozloženými napříč časovou osou. Jakému typu bude odpovídat naše portfolio se dovíme za okamžik [35].

Tímto jsme shrnuli problematiku rizika celého portfolia. Co se týče jeho návratnosti, [11] navrhuje použít vzorec

$$y_P = \frac{\sum_{i=1}^n D_i^{FR} P_i y_i x_i}{\sum_{i=1}^n D_i^{FW} P_i x_i} \quad (3.15)$$

tedy durací vážený průměr výnosů do splatností jednotlivých dluhopisů. Volba tohoto vztahu by vyžadovala delší debatu, autor [30] pak navrhuje jeho další zpřesnění pomocí konvexity.

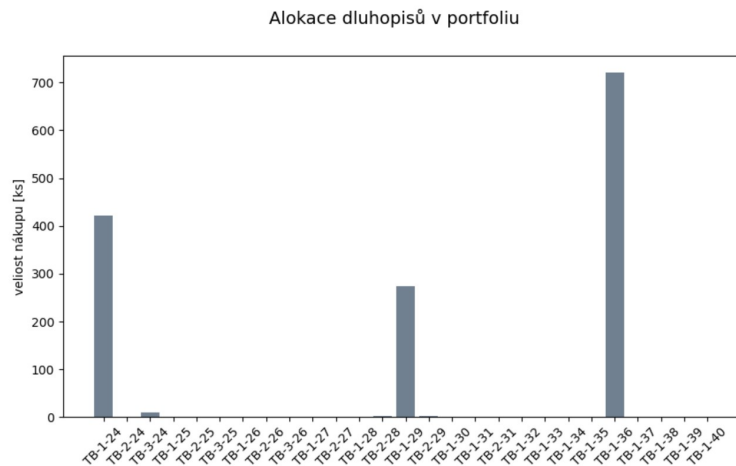
Nyní se už dostáváme k vyhodnocení modelu, shrneme si tedy všechny již známé rovnice.

### 3.6. OPTIMALIZACE PORTFOLIA

$$\begin{aligned}
 & \min V_0 \\
 & V_0 - \sum_{i=1}^n P_{0i}x_i - \sum_{i=1}^n P_{0i}x_i e + v_0^- = v_0^+, \\
 & \sum_{i=1}^n F_{ti}x_i + (1 + r_{ft-1})v_{t-1}^+ = L_t + (1 + r_{ft-1} + \gamma)v_{t-1}^-, \quad \forall t \\
 & \sum_{i=1}^n P_i x_i = PV_L \\
 & \sum_{i=1}^n D_i^{FW} P_i x_i = D_L^{FW} PV_L \\
 & \sum_{i=1}^n K_i P_i x_i \geq K_L PV_L \\
 & \mathbf{x} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n, v^+, v^- \geq 0
 \end{aligned}$$

Abychom mohli srovnat rozdíly se strategií založené pouze na vyrovnání finančních toků, připomeňme si, že počáteční nutná investice v předchozím modelu byla rovna  $b_0 = 145206$ . V onom modelu jsme ignorovali tři dodatečné podmínky a portfolio nebylo tedy imunní proti změnám úrokových sazeb. Jmenovitě pak počáteční hodnota aktiv činila  $PV_A = 147153$ , počáteční hodnota závazků  $PV_L = 146972$ . Durace ve smyslu vzorce (3.7) pak nabývaly hodnot  $D_A = 6.1$  respektive  $D_L = 6.67$ . Rozdíly tedy nejsou nikterak závratné, imunizace však i v tomto případě má smysl. Dodejme ještě technickou poznámku k omezení rovnosti durací. Toto omezení je velmi striktní a je možné, že vzhledem k našemu omezenému množství dluhopisů bychom jednoduše nebyli schopni najít portfolio jehož durace by přesně odpovídala duraci závazků, proto budeme požadovat, aby rovnice byla splněna s dostatečnou přesností  $\epsilon$ . Toto zvolnění daného omezení je v praxi běžné a říká se mu také *gap management*.

Následuje výsledná alokace portfolia s imunizací a graf zobrazující celou časovou osu s vývojem portfolia podle jeho jednotlivých komponent.

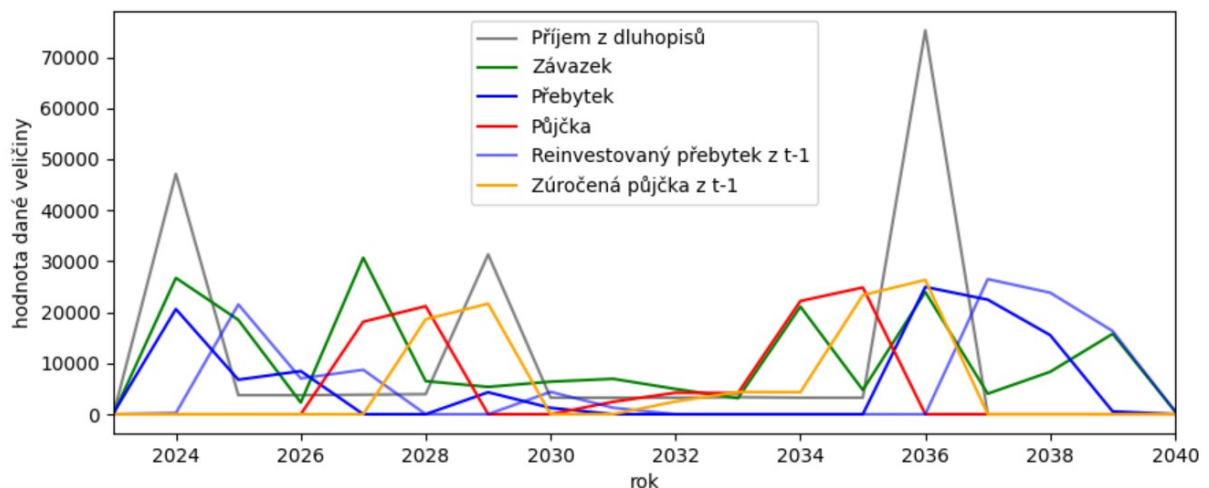


**Obrázek 3.11:** Alokace utváří portfolio typu barbell.

Z výše uvedených typů dluhopisových portfolií se pak jedná o typ barbell, které má tedy nejvyšší konvexitu. Malý podíl dluhopisu TB-3-24 bychom mohli dále ošetřit omezením na minimální nákup dle vztahu (2.13), my se bez tohoto omezení obejdeme.

Na následujícím grafu lze vidět vývoj příjmů z kupónů a navrácení nominálních hodnot dluhopisů (šedá linie), které jsou využity na splacení závazků v daných letech (zelená linie). V případě potřeby je vzata půjčka (červená linie), jejíž zúročená hodnota (oranžová linie) navýšená o  $\gamma$  je v dalších letech splacena. Jsou-li v některých letech přítomny přebytky (tmavě modrá), jsou rovněž reinvestovány a využity v dalších letech (světle modrá).

Časový vývoj celého portfolia



Hodnota účelové funkce je  $V_0 = 145276$ , což je hodnota požadovaného bohatství na počátku využita k nákupu dluhopisů a zaplacení transakčních poplatků a neliší se závratně od předchozího modelu.

Prvním zajímavým rokem k zhodnocení je rok 2024 ve kterém je navrácena nominální hodnota jednoletých dluhopisů TB-1-24 a TB-3-24 v hodnotě 47112.5. Částečně je tento zisk využit na zaplacení závazku v hodnotě 26722, zbytek tvoří přebytek dále reinvestovaný.

Reinvestovaný přebytek spolu s kupóny z dluhopisů TB-1-29 a TB-1-36 jsou dostatečné na zaplacení závazku v letech 2025 a 2026. K pokrytí závazku v roce 2027 je však již nutné si vzít půjčku v hodnotě 18122.25, která je využita na splacení velkého závazku v hodnotě 30669.

Rok 2029 je rokem splatnosti dluhopisů TB-1-29. Tento zisk je převážně využit na splacení zúročené půjčky z předešlých let.

Následuje klidnější období bez větších finančních transakcí, až do roku 2034, kdy je opět vzata půjčka na zaplacení závazku toho roku.

V roce 2036 pak končí splatnosti dluhopisům s největším podílem v portfoliu. Tento příjem je nakonec využit na splacení veškerého dluhu a všech budoucích závazků s nulovým přebytkem v posledním roce.

Na závěr pro úplnost doplníme výnos do splatnosti celého portfolia, který dle vzorce (3.15) činí  $y_P = 0.03628$ , tedy 3.628%.

### 3.7. Shrnutí

Bylo by jistě rozumné doplnit další omezení představené již v první kapitole jako minimální povolenou velikost nákupu, aby se v praxi předešlo zbytečným nákladům spojených s prováděním malých transakcí, případně omezit velikost půjček. Jak jsem již zmiňoval, museli bychom disponovat daleko širší množinou dostupných portfolií, aby takto restriktivní omezení mohla být vůbec splněna.

Nesmíme také zapomenout okomentovat zásadní nedostatky, kterých se náš model dopouští. Prvním z nich je předpoklad paralelního posunu výnosové křivky. V praxi je tento předpoklad téměř nereálný. Jeden ze způsobů, jak se s tímto problémem vyrovnat je prostřednictvím tzv. *durace klíčových sazeb* (key rate duration) [12]. Ta předpokládá, že přestože se celá výnosová křivka neposouvá paralelně, dá se to tvrdit o sazbách s blízkou dobou do splatnosti. Při popisu posunu (a tedy výpočtu *durace*) se tedy stačí zaměřit pouze na několik od sebe vzdálených sazeb. *Durace klíčové sazby*  $\tau$  (platné v čase  $t = 0$  až  $t = \tau$ ) vypočítáme jako

$$D^{KR}(\tau) = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{P(r(\tau) - \Delta r) - P(r(\tau) + \Delta r)}{2P(r)\Delta r}.$$

Na základě této *durace* pak můžeme změnu cenové funkce aproximovat bez požadavku paralelního posunu jako

$$dP \approx - \sum_{\tau} D^{KR}(\tau) P(r) dr(\tau).$$

Komplexnější (již dříve zmíněnou) metodou je pak tzv. *analýza hlavních komponent*, která se snaží popsat variabilitu výnosové křivky na základě několika faktorů (jako úroveň křivky, sklon případně konvexita).

Další nedostatek plyne ze samotného principu imunizace. Ve všech modelových příkladech jsme předpokládali jednu a okamžitou změnu sazby o  $\Delta r$ . Tedy všechny kupóny  $C_1, \dots, C_\tau$ , předcházející vypořádání závazku v čase  $\tau$  jsou reinvestovány za stejnou míru  $r + \Delta r$  a tato změna z reinvestic je vyrovnána změnou v tržní ceně dluhopisu. V praxi však takovýto změně tržní sazby jistě proběhne mnoho do vypořádání závazku a reinvestiční a úrokové riziko se nemusí navzájem zcela vyrušit.

Narozdíl od strategie vyrovnání finančních toků (pasivní strategie), je k imunizaci portfolia potřeba přistupovat do jisté míry aktivně. V průběhu času (jak se vyplácí jednotlivé kupóny/splácí jednotlivá aktiva a pasiva) se se změnou úrokových sazeb také mění *durace* jak aktiv a pasiv, a to ne stejnou měrou (tzv. *duration drift*). Teoreticky by tedy měla firma v průběhu času neustále realokovat své portfolio, aby vždy splňovala podmínku rovnosti *durace* a nerovnosti konvexity. Takový proces by sebou jistě přinášel značné transakční náklady. Proto je běžné v praxi průběžně kontrolovat *duraci* portfolia a v případě velkých rozdílů jednou za čas provést realokaci tak, aby náklady spojené s realokací nepřevýšily výhody spojené se samotnou imunizací.

Existují také aktivní strategie správy aktiv využívající derivátové instrumenty, např. tzv. *swapy*. Očekává-li investor nárůst úrokových měr může využít *swap* k prodeji dluhopisů s delší dobou do splatnosti a nákupu krátkodobých dluhopisů za účelem snížení *durace*. Chce-li zvýšit výnos portfolia, může naopak nakoupit dluhopisy dlouhodobé [35].

## 4. Model Russell-Yasuda Kasai

Doposud jsme se zabývali modelováním různých omezení, kterými jsme ilustrovali reálná úskalí investičního rozhodování. Představili jsme myšlenku závazků, s kterými se musí potýkat jak většina velkých finančních institucí, tak i jednotlivci. Imunizace portfolia rozebrána v kapitole 3 je pak hlavní, v praxi velmi využívanou technikou sloužící ke správě aktiv a pasiv. Jeho nezanedbatelnou součástí jsou pak právě některá omezení z kapitoly 2.

Tuto kapitolu bych rád věnoval představení konkrétního modelu správy aktiv a pasiv, který byl implementován do praxe v roce 1990 tehdy největší japonskou pojišťovnou Yasuda Kasai a v následujících letech přinesl společnosti značný dodatečný zisk. Tento model přistupuje ke správě aktiv a pasiv odlišným způsobem než pomocí imunizace, a to pomocí vícestupňové stochastické optimalizace. Tato technika představuje nejpokročilejší doposud v práci představenou filozofii optimalizace investičního rozhodování, a proto jejímu popisu věnuji samostatnou podkapitolu.

Hlavním cílem pojišťovny Yasuda bylo vygenerovat svou činností dostatečný pravidelný příjem k financování úroků na svých pojistkách spořicího typu, které v 90. letech byly poměrně novým a velmi žádaným produktem. Tyto pojistné produkty mají podobnou strukturu jako dluhopisy. Jsou charakterizovány konkrétní dobou mortality a přinášejí klientovi pravidelný úrok (spolu se samotnou pojistnou službou). Dluhopisy by proto byly vhodným nástrojem k jejich financování. Neméně důležitým cílem však byla rovněž maximalizace svého vlastního dlouhodobého kapitálu, k čemuž jsou díky svým vyšším průměrným návratnostem vhodnější akcie. Kvůli širšímu spektru aktiv, se kterými pojišťovna musela ke splnění svých cílů operovat, nebylo možné využití pouhého spárování toků aktiv a závazků s využitím dluhopisů viz vztahy (3.6.1).

Do té doby nejpoužívanější model optimální alokace aktiv - statický Markowitzův model se začal v komplexním prostředí závazků vůči klientům a složitých právních regulací jevit jako nedostatečný. Byla potřeba využití přístupu, který by umožňoval postupné dlouhodobé plánování, než pouze jednorázová (leč v řeči daného modelu optimální) rozhodnutí. Vznikla potřeba nových měřítek rizika než obyčejný rozptyl [43]. Dílčím problémem byla rovněž neschopnost Markowitzova modelu rozlišit mezi kapitálovým a běžným výnosem.

Ze zmíněných regulací (tehdy platných) uveďme např. omezení velikosti investice v rámci jedné třídy aktiv. Dalším příkladem je pak povinnost financovat úrok na spořicích produktech z dividend, nikoliv z prodeje aktiv (kapitálových výnosů). Tyto a další právní ale i interní restrikce bylo potřeba brát v potaz včetně faktoru měnových kurzů či daní.

## 4.1. Vícestupňová stochastická optimalizace

Než přejdeme k popisu modelu, uvedu v této kapitole základní teorii vícestupňové stochastické optimalizace.

Největší nevýhodou deterministicky zadaných úloh je předpoklad znalosti všech jeho parametrů. Snažíme-li se modelovat reálnou úlohu, budeme se však v mnoha případech potýkat s parametry, se kterými je spojena určitá nejistota (např. návratnosti aktiv či vývoj úrokových sazeb). Stochastická optimalizace poskytuje návrh řešení, jak k této nejistotě výpočetně přistupovat.

Nechť trojice  $(\Omega, \Sigma, P)$  značí pravděpodobnostní prostor [9]. Úloha stochastického programování (SP) může být formulována jako

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \\ \text{s.t.} \quad & g_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0, \quad i, \dots, m, \\ & \mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{4.1}$$

kde zobrazení  $\boldsymbol{\xi}(\omega) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  je náhodný vektor definovaný na uvedeném pravděpodobnostním prostoru a  $\mathbf{x}$  je vektor neznámých. Pro přesnou definici úlohy se všemi předpoklady odkazují na [13].

Tato úloha však není dobře definovaná, protože před pozorováním realizace náhodného vektoru není jasné co je myšleno minimalizací funkce  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  ani jaká je množina přípustných řešení určená omezeními s funkcemi  $g_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ . K vyřešení této situace nám poslouží tzv. deterministické přepisy. V závislosti na tom, zda v době učinění rozhodnutí  $\mathbf{x}$  známe realizaci vektoru  $\boldsymbol{\xi}$  či nikoliv, pak rozlišujeme dva modelovací přístupy [39].

### 4.1.1. Modelovací techniky

Je-li rozhodnutí  $\mathbf{x}$  učiněno až poté, co je známa realizace  $\boldsymbol{\xi}^s$ , hovoříme o tzv. přístupu *Wait-and-See* (WS). S rozhodnutím  $\mathbf{x}$  tedy čekáme do chvíle, kdy je realizace známa. V ten moment již však řešíme deterministickou úlohu [17]. Takovýmto modelům se také říká adaptivní. Rozhodnutí  $\mathbf{x}$  je pak závislé na tomto pozorování, je tedy funkcí  $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$  náhodného vektoru  $\boldsymbol{\xi}$  a je proto jiné pro každou realizaci  $\boldsymbol{\xi}^s$ . Stejně tak hodnota funkce  $f(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi})$  je náhodnou proměnnou. Tento přístup má opodstatnění především pro dlouhodobé plánování [8]. Deterministický přepis úlohy (4.1) metodou WS by pak vypadal

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi}) \\ \text{s.t.} \quad & g_i(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) \in X \subset \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{4.2}$$

My však čelíme situaci, kdy nyní potřebujeme rozhodnout o alokaci našeho bohatství do aktiv jejichž návratnosti budou známy až v budoucnu. Taková alokace pak musí být stejná (a v jistém smyslu optimální) pro libovolnou budoucí realizaci návratností (nebo obecně vektoru  $\boldsymbol{\xi}$ ). Takovému přístupu se říká *Here-and-Now* (HN) a většina úloh vede právě na tento přístup [17]. Těmto modelům se říká anticipativní. Metoda HN nabízí několik možných deterministických přepisů, přičemž vhodnost každého z nich závisí na

modelované situaci. Uvedme jako příklad ty, jež používáme v práci.

Deterministickým přepisem EV rozumíme úlohu

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}, E\boldsymbol{\xi}) \\ \text{s.t.} \quad & g_i(\mathbf{x}, E\boldsymbol{\xi}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (4.3)$$

kde náhodný vektor  $\boldsymbol{\xi}$  je nahrazen jednou z charakteristik jeho rozdělení, konkrétně vektorem středních hodnot. Nahrazením náhodného vektoru číselnou charakteristikou jsme z úlohy odstranili nejistotu a úloha se stala deterministickou [8].

Deterministickým přepisem EO rozumíme úlohu

$$\begin{aligned} \min \quad & Ef(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \\ \text{s.t.} \quad & g_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0, \quad \text{s.j.}, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (4.4)$$

kde zkratka s.j. značí skoro jistě [13][17]. Minimalizujeme tedy střední hodnotu celé účelové funkce  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ . V některých úlohách (v závislosti na typu funkce  $f$ ) pak tento a předchozí přístup splývají [8].

Deterministickým přepisem VO rozumíme úlohu

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{Var}f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \\ \text{s.t.} \quad & g_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0, \quad \text{s.j.}, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (4.5)$$

kde minimalizujeme rozptyl celé účelové funkce  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  [8].

Příkladem použití přepisu EO a VO je Markowitzův model, kdy v závislosti na zvolené úloze buď maximalizujeme očekávaný zisk  $E\zeta$  viz vztah (2.1) (respektive minimalizujeme jeho opačnou hodnotu), případně minimalizujeme očekávané riziko  $\text{Var}\zeta$  viz vztah (2.2) s opačnou nerovností v omezení.

Deterministickým přepisem QO rozumíme úlohu

$$\begin{aligned} \min \quad & z \\ \text{s.t.} \quad & \mathcal{P}(f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq z) \geq \alpha \\ & \mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (4.6)$$

kde  $\alpha \in [0, 1]$  je míra spolehlivosti. Tímto přepisem tedy minimalizujeme kvantil  $z$  účelové funkce (náhodné proměnné) jakožto hranici, která nemá být překročena s pravděpodobností  $\alpha$ , kde  $\mathcal{P}$  značí pravděpodobnost [8]. Uvažujeme-li náhodný vektor  $\boldsymbol{\xi}$  s diskrétním rozdělením pravděpodobnosti, pak lze tuto úlohu řešit následujícím matematickým programem.

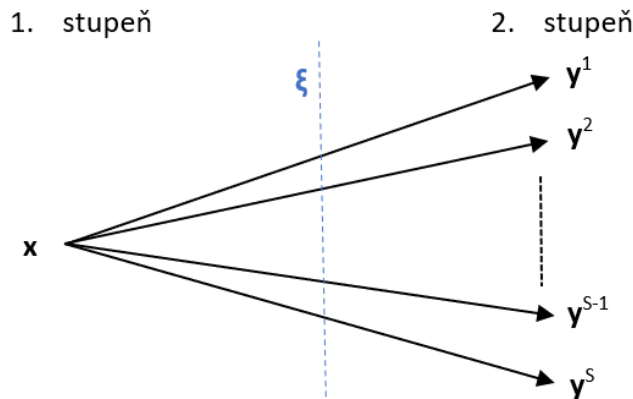
#### 4.1. VÍCESTUPŇOVÁ STOCHASTICKÁ OPTIMALIZACE

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z \\
 \text{s.t.} \quad & \delta_s = 1 \implies f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}^s) \leq z, \quad \forall s \in \mathcal{S} \\
 & \sum_{s \in \mathcal{S}} p_s \delta_s \geq \alpha, \quad \delta_s \in \{0, 1\}, \quad \forall s \in \mathcal{S},
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

kde podmínku implikace je možno nahradit podmínkou  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}^s) \leq z + M(1 - \delta_s)$  s dostatečně velkou mezí  $M$  [8].

Přepis EO je pak podstatou původní verze modelu Yasuda-Kasai.

Často pak v modelech využíváme oba přístupy WS a HN. Nejdříve provedeme alokaci  $\mathbf{x}$ , která je "optimální" pro všechny námi očekávané budoucí vývoje náhodných parametrů (HN), následně počkáme na realizaci těchto parametrů  $\boldsymbol{\xi}$  (WS), na základě kterých pak provedeme úpravu alokace  $\mathbf{y}(\boldsymbol{\xi})$ , přesněji  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ , neboť nová alokace se jistě bude do určité míry odvíjet od alokace původní [14]. Tímto rozlišením mezi prvním a druhým rozhodovacím stupněm se dostáváme do problematiky vícestupňových úloh a dynamické optimalizace, která ve své podstatě umožňuje uživateli průběžnou realokaci své investice, která je v praxi naprosto přirozená. Tím odstraníme další značný nedostatek Markowitzova přístupu, tedy jeho statickou povahu. Na následujícím obrázku můžeme vidět sled jednotlivých kroků, které se však snažíme zahrnout do jedné "předvídající" úlohy.



Obrázek 4.1: Posloupnost událostí.

##### 4.1.2. Vícestupňová úloha

Vektor  $\mathbf{y}(\boldsymbol{\xi})$ , který slouží k realokaci bohatství, jež bylo alokováno ve stupni 1 vektorem  $\mathbf{x}$ , má určitou funkci vybalancování nebo také kompenzace chyb, které vznikly nepříznivou realizací vektoru  $\boldsymbol{\xi}$ . Řečeno v duchu této práce jde o situaci, kdy se trh pohnul pro naše investice nepříznivým směrem. Smyslem této kompenzace je tedy zvýšit hodnotu účelové funkce realokací bohatství. Není-li to nutné (trh se pohnul vhodným směrem), není třeba žádné kompenzace, tedy  $\mathbf{y}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0}$ . Z této myšlenky také vychází název základních lineárních dvoustupňových úloh. Jde o tzv. úlohy s kompenzací. Jedná se o kombinaci adaptivního a anticipativního modelu [17][19].

Klasickou dvoustupňovou stochastickou úlohou s pevnou kompenzací [14] rozumíme problém

$$\min_{\mathbf{x}} \left\{ \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \mathbb{E} \left[ \min_{\mathbf{y}(\boldsymbol{\xi})} \{ \mathbf{q}^\top(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{y}(\boldsymbol{\xi}) \mid \mathbf{T}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x} + \mathbf{W} \mathbf{y}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{h}(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{y}(\boldsymbol{\xi}) \geq \mathbf{0} \} \right] \mid \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \right\}, \quad (4.8)$$

kde vektor  $\mathbf{c}$  reprezentuje ceny spojené s nákupem  $\mathbf{x}$  v prvním stupni a rovnice  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$  je omezení vztažené rovněž k prvnímu stupni. Po realizaci vektoru  $\boldsymbol{\xi}$  získáme data  $\mathbf{q}(\boldsymbol{\xi})$ ,  $\mathbf{T}(\boldsymbol{\xi})$ ,  $\mathbf{h}(\boldsymbol{\xi})$  pro druhý stupeň. Omezení  $\mathbf{T}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x} + \mathbf{W} \mathbf{y}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{h}(\boldsymbol{\xi})$  pak slouží k vzájemnému spojení obou stupňů [19].

Účelová funkce v přepise (4.4) nás vede na otázku, jak se vypořádat s integrálem, na který tato střední hodnota vede, protože takový integrál může být nesnadné numericky vypočítat.

Nejčastějším způsobem je využití tzv. scénářového přístupu. Ten spočívá v předpokladu, že pozorovaný náhodný vektor  $\boldsymbol{\xi}$  je z diskrétního rozdělení s výpočetně rozumným počtem možných realizací  $\boldsymbol{\xi}^s$ ,  $s = 1, \dots, S \in \mathcal{S}$ , kde každou realizaci  $\boldsymbol{\xi}^s$  nazveme scénářem [13]. S každým scénářem se poté pojí pravděpodobnost jeho uskutečnění  $p_s$  taková, že  $p_s = \mathcal{P}(\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^s) \geq 0$  a platí  $\sum_{s=1}^S p_s = 1$ .

Je-li počet možných realizací výpočetně příliš velký, musíme využít některou z metod pro redukci scénářů [14].

Má-li pak pozorovaná náhodná proměnná spojitě rozdělení (což je náš případ, neboť návratnosti může být teoreticky libovolné, avšak rozumné číslo), [10] navrhuje použít jeden ze tří následujících způsobů.

První způsob spočívá ve využití historických dat ke generování scénářů na základě předpokladu, že všechny možné budoucí scénáře se již v minulosti odehrály, a tudíž tento vzorek dat dává dostatečnou informaci.

Druhou metodou je využití statistické analýzy historických dat, pro která určíme vhodné rozdělení, vypočítáme statistické momenty (včetně korelací v případě vícerozměrných dat) a z tohoto rozdělení vygenerujeme nové scénáře, jejichž momenty se nebudou příliš lišit od původního vzorku. Provádíme tím vlastně minimalizaci rozdílů momentů viz [36].

Třetí možností je pak využití spojitých modelů, které teoreticky dostatečně přesně popisují pozorovaný jev, a tyto modely následně diskretizovat. Tento postup si ukážeme v kapitole 4.2, kde představíme zobecněný Wienerův (nebo také Brownův) pohyb, který se často využívá k modelování pohybu akciových cen.

Úlohu (4.8) je pak možno přepsat do scénářové formulace následujícím způsobem:

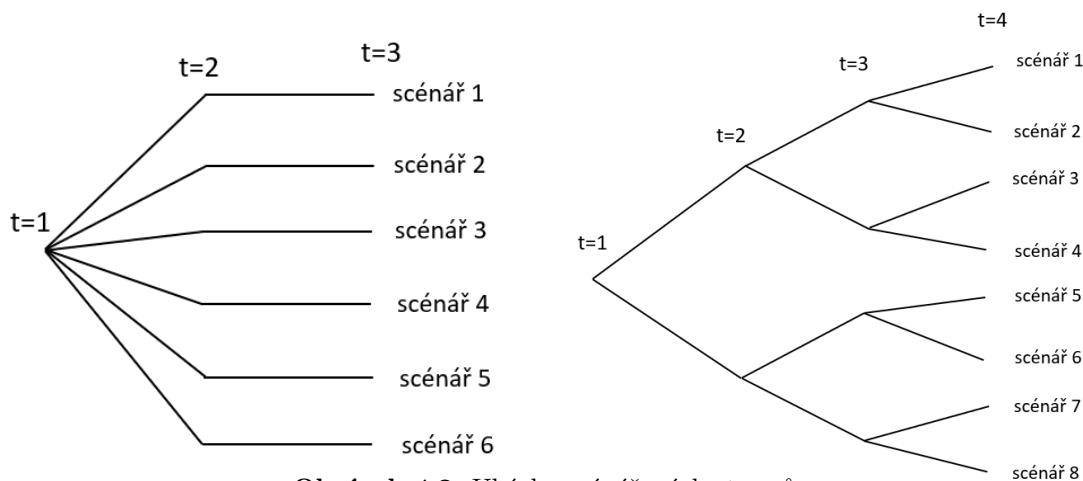
$$\min_{\mathbf{x}, \mathbf{y}_s} \left\{ \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \sum_{s=1}^S p_s \mathbf{q}_s^\top \mathbf{y}_s \mid \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{W}_s \mathbf{y}_s + \mathbf{T}_s \mathbf{x} = \mathbf{h}_s, \mathbf{y}_s \geq \mathbf{0}, s \in \mathcal{S} \right\}$$

Vše doposud uvedené můžeme dále zobecnit na vícestupňovou lineární stochastickou úlohu viz [13].

## 4.2. MODELOVÁNÍ VSTUPNÍCH DAT

Systém scénářů lze pak formálně popsat pomocí grafu, tedy dvojice  $G = (U, V)$ , kde  $U$  je množina uzlů  $(t, s)$  reprezentující stav náhodného vektoru v čase  $t$  ve scénáři  $s$ . Množina větví  $V \subseteq U \times U$  pak reprezentuje přechod mezi těmito stavy.

Zdroj [11] rozlišuje dva základní typy - lineární strom (*fan* neboli vějíř) a tzv. strom událostí (*event tree*). Oba typy se liší počtem větví vycházejících z uzlů. Zatímco u lineárního stromu má každý uzel ve stupni  $t > 0$  pouze jeden následník, strom událostí může mít následníků libovolný počet  $m$ , který navíc může být jiný v každém uzlu a každém stupni. Z jiného pohledu tedy libovolné dva scénáře mohou sdílet stejnou historii realizací až do stupně  $t < T$  viz obrázek.



Obrázek 4.2: Ukázky scénářových stromů.

Původní model Yasuda-Kasai využíval bohatější struktury stromu událostí pro generování vstupních dat. My naopak v implementaci využijeme lineární strukturu, která je vhodná pro generování dat z Brownova pohybu, který si nyní představíme.

## 4.2. Modelování vstupních dat

V Markowitzově modelu jsme vstupní data získali pomocí bodových odhadů vypočítaných z historických pozorování, kterými jsme nahradili teoretické parametry  $(\mu, \Sigma)$  rozdělení návratností aktiv. Nyní si ilustrujeme druhý způsob získání vstupních dat pomocí časově spojených modelů, jejichž následná diskretizace pak poslouží ke generování scénářového stromu (nebo množiny scénářů chcete-li). Modely, které budeme využívat my, se nazývají stochastické procesy. Ty se využívají k popisu jevů, jež se náhodným způsobem mění v čase (např. hodnoty úrokových sazeb, případně ceny akcií).

Stochastický proces je zobecněním pojmu náhodná veličina a náhodný vektor. Jedná se o zobrazení, které každému indexu  $t$  přiřadí náhodnou veličinu  $\xi_t$ . Obdobně jako realizací náhodné proměnné je číslo, realizací stochastického procesu je funkce nebo (v diskrétním případě) časová řada [15].

My nyní postupně vybudujeme stochastický proces, jehož cílem bude co nejpřesněji kopírovat historické časové řady vývoje cen aktiv. Začneme představením obyčejného *Wienerova procesu*.

### 4.2.1. Wienerův proces

Uvažujme opět obecnou náhodnou veličinu  $\xi$ . Budoucí hodnotu veličiny  $\xi$  můžeme vyjádřit na základě jejího přírůstku  $\Delta\xi$  za krátký časový okamžik  $\Delta t$  jako

$$\xi(t + \Delta t) = \xi(t) + \Delta\xi.$$

Aby se veličina  $\xi$  řídila Wienerovým procesem, musí splňovat [2] následující předpoklady

- mezi libovolnými přírůstky  $\Delta\xi$ ,  $\Delta t$  náhodné veličiny  $\xi$  platí

$$\Delta\xi = \epsilon\sqrt{\Delta t}, \quad \epsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

- přírůstky  $\Delta\xi$  jsou stochasticky nezávislé pro libovolné přírůstky  $\Delta t$  a mají stejné rozdělení.

Předpoklad nezávislosti můžeme interpretovat jako předpoklad, že minulé hodnoty nedávají žádnou informaci o budoucí hodnotě akcie. Potvrdit či rozporovat takové tvrzení by vyžadovalo daleko širší a komplexnější diskuzi. Tím bychom zabíhali do problematiky hlubokého zkoumání časových řad a hledání korelací mezi jednotlivými časovými body a také různými faktory v datech, která jsou značně zatížena šumem. Nemluvě o vlivu psychologie účastníků trhu na vývoj těchto řad. Technická analýza časových řad však není předmětem této práce.

Předpoklad stejného rozdělení rovněž není zcela přesnou charakterizací tržních časových řad, protože jak střední hodnota, tak rozptyl mají tendenci kolísat kolem své dlouhodobé střední hodnoty. Ponechme tedy oba předpoklady s jistým nadhledem.

Je evidentní [1][2], že platí

$$\begin{aligned} E(\Delta\xi) &= 0 \\ \text{Var}(\Delta\xi) &= \Delta t. \end{aligned}$$

Předchozí vlastnosti můžeme dále přenést na přírůstky  $\xi(T) - \xi(0)$  pro delší časový úsek  $T$ . Interval  $(0, T)$  rozdělíme na  $N$  intervalů stejné délky  $\Delta t$  volbou  $N = \frac{T}{\Delta t}$ . Přírůstek náhodné veličiny  $\xi$  na tomto intervalu pak můžeme vyjádřit jako

$$\xi(T) - \xi(0) = \sum_{i=1}^N \epsilon_i \sqrt{(\Delta t)},$$

kde  $\epsilon_i$  jsou nezávislé náhodné veličiny z rozdělení  $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$  [1][2][16].

Všimněme si také, že jsme náhodný proces zavedli jako diskrétní proces, což je ve finanční oblasti přirozené, neboť nás zajímá vývoj ceny/kurzu v průběhů dní, let apod. Nebyl by však problém v předešlých vztazích nahradit difference pomocí diferenciálů.

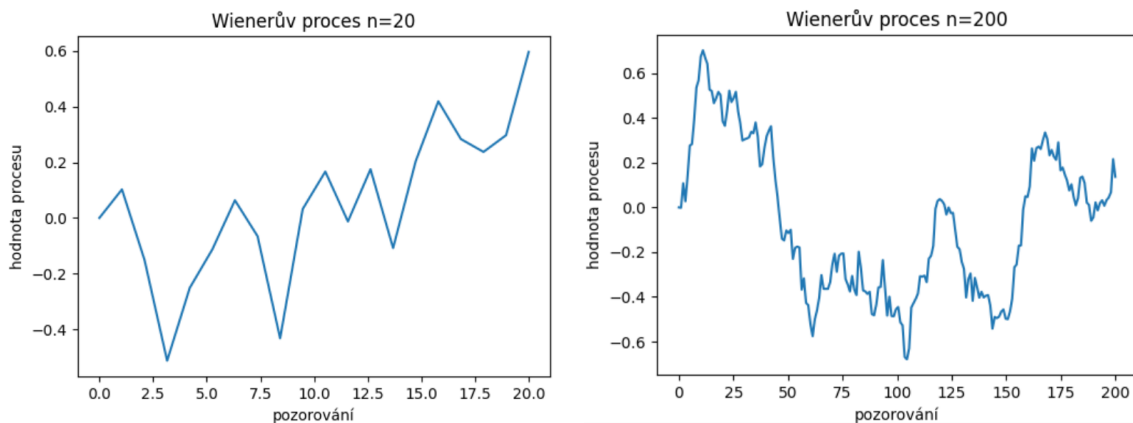
## 4.2. MODELOVÁNÍ VSTUPNÍCH DAT

Přírůstek  $\xi(T) - \xi(0)$  má opět normální rozdělení s momenty

$$\begin{aligned} E[\xi(T) - \xi(0)] &= 0 \\ \text{Var}[\xi(T) - \xi(0)] &= N \cdot \Delta t = T. \end{aligned}$$

Můžeme tedy tvrdit, že rozptyl přírůstku Wienerova procesu je roven přímo délce časového intervalu.

Na následujících obrázcích můžeme vidět dva příklady Wienerova procesu pro  $N = 20$  a  $N = 200$ .



Obrázek 4.3: Wienerův proces

### 4.2.2. Brownův pohyb

Pomocí Wienerova procesu a s využitím limitních přechodů  $\Delta\xi \rightarrow d\xi$  a  $\Delta t \rightarrow dt$  si můžeme dále ve spojitém vyjádření definovat tzv. *zobecněný Wienerův proces* častěji znám jako *Brownův pohyb*

$$dW = a dt + b d\xi,$$

kde  $a$  vyjadřuje trendový koeficient a  $b$  difúzní koeficient. Protože tato rovnice obsahuje náhodný člen  $d\xi$ , jedná se o *stochastickou diferenciální rovnici* [1][16].

Uvažujme nejprve situaci s  $b = 0$ , tedy obyčejnou diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} dW &= a dt \\ W(0) &= 0 \end{aligned}$$

Řešením této rovnice je přímka

$$W(t) = W_0 + at$$

vyjadřující samotný trend a  $W_0$  je počáteční podmínka. Při nenulovém  $b$  bude kromě trendu v procesu přítomna rovněž stochastická složka (šum) ve výši  $b$ -násobku Wienerova procesu. Dostáváme tedy [2][16]

$$dW = a dt + b\epsilon\sqrt{dt}.$$

Řešení této rovnice získáme prostou integrací [2] jako

$$W(t) = W(0) + at + b\xi(t).$$

V diskrétním vyjádření můžeme tedy psát

$$\Delta W = a\Delta t + b\epsilon\sqrt{\Delta t}$$

Momenty přírůstku zobecněného Wienerova procesu jsou

$$\begin{aligned} E(\Delta W) &= a\Delta t \\ \text{Var}(\Delta W) &= b^2\Delta t \end{aligned}$$

Obdobně pro přírůstek  $W(T) - W(0)$  platí

$$\begin{aligned} E[W(T) - W(0)] &= aT \\ \text{Var}[W(T) - W(0)] &= b^2T. \end{aligned}$$

Koeficient  $a$  tedy představuje nárůst trendu a koeficient  $b$  nárůst směrodatné odchylky zobecněného Wienerova procesu během časové jednotky.

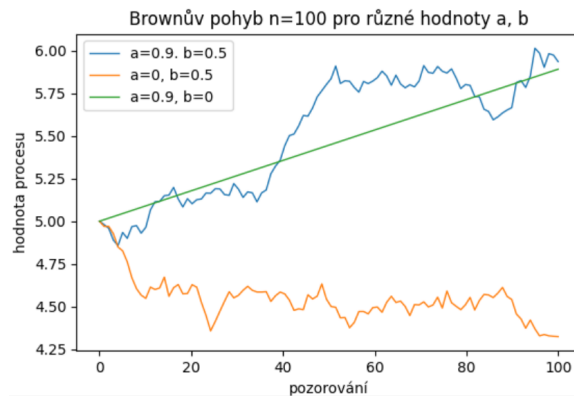
**Příklad** Uvažujme časový interval jeden rok ( $T = 1$ ) a zobecněný Wienerův proces s  $a = 0.9$  a  $b = 0.5$ , který nabývá hodnoty 5 v počátečním čase  $t = 0$ . Po půl roce má pak tento proces rozdělení  $W(T/2) \sim \mathcal{N}(5.45, 0.13)$  neboť

$$E[W(T)] = E[W(0)] + E[W(T) - W(0)] = 5 + 0.9 \cdot 0.5 = 5.45$$

Pro rozptyl pak díky nezávislosti platí

$$\text{Var}[W(T)] = \text{Var}[W(0)] + \text{Var}[W(T) - W(0)] = 0 + 0.5^2 \cdot 0.5 = 0.13.$$

Ukázka Brownova pohybu pro různé hodnoty  $a, b$ .



Obrázek 4.4: Brownův pohyb

Zvolíme-li konstanty  $a, b$  jako výrazy  $a = \mu P$  a  $b = \sigma P$ , kde  $P$  je cena akcie, pak získáváme stochastickou diferenciální rovnici [16]

$$dP = \mu P dt + \sigma P d\xi, \quad (4.9)$$

která vyjadřuje vývoj ceny akcie jako Brownův pohyb. Koeficient  $\mu$  má význam očekávaného výnosu akcie a difúzní koeficient  $\sigma$  je její volatilita.

## 4.2. MODELOVÁNÍ VSTUPNÍCH DAT

Budeme-li předpokládat, že akcie má nulovou volatilitu  $\sigma$ , nenulovou konstantní míru zisku  $\mu$  a počáteční hodnotu  $P_0$ , dostáváme obyčejnou diferenciální rovnici tvaru

$$\begin{aligned}\frac{dP}{P} &= \mu dt \\ P(0) &= P_0,\end{aligned}$$

jejíž řešení je

$$P(t) = P_0 e^{\mu t}.$$

Akcie se tedy v tomto deterministickém případě zhodnocuje formu spojitého úročení s úrokovou mírou  $\mu$  [2].

Není možné však předpokládat nulovou volatilitu  $\sigma$ . Je proto potřeba na rovnici (4.9) (stochastická diferenciální rovnice) použít Itoovo lemma, podle kterého pro libovolnou dostatečně hladkou funkci  $G$  difúzního procesu  $W$  a času  $t$  platí vztah [16]

$$dG(W, t) = \left( \frac{\partial G(W, t)}{\partial t} + a(W, t) \frac{\partial G(W, t)}{\partial W} + \frac{1}{2} b^2(W, t) \frac{\partial^2 G(W, t)}{\partial W^2} \right) dt + b(W, t) \frac{\partial G(W, t)}{\partial W} d\xi,$$

kde funkci  $G$  zvolíme jako

$$G = \ln P.$$

Protože platí

$$\frac{\partial G}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial G}{\partial P} = \frac{1}{P} \qquad \frac{\partial^2 G}{\partial P^2} = -\frac{1}{P^2},$$

z Itoova lemmatu dostáváme

$$d \ln P = \left( \frac{\partial G}{\partial t} + \mu P \frac{\partial G}{\partial P} + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 \frac{\partial^2 G}{\partial P^2} \right) dt + \sigma P \frac{\partial G}{\partial P} d\xi = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma d\xi, \quad (4.10)$$

kde  $\mu$  a  $\sigma$  jsou konstanty. Jde vidět, že rovněž  $\ln P$  se řídí Brownovým pohybem s trendovým koeficientem  $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$  a difúzním koeficientem  $\sigma$  [2]. Pro posun  $\Delta \ln P$  z  $\tau = 0$  do  $\tau = t$  platí

$$\begin{aligned}E(\Delta \ln P) &= \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \\ \text{Var}(\Delta \ln P) &= \sigma^2 t.\end{aligned}$$

Připomene-li, že proces  $\xi(t) = \epsilon \sqrt{t}$  s  $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , můžeme vidět, že logaritmy cen jsou normálně rozděleny [16], tedy

$$\ln P(t) \sim N \left[ \ln P(0) + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t, \sigma^2 t \right].$$

Rovnici (4.10) můžeme nyní integrovat [16] a obdržíme řešení

$$P(t) = P(0) \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\xi(t)\right) = P(0) \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\epsilon\sqrt{t}\right).$$

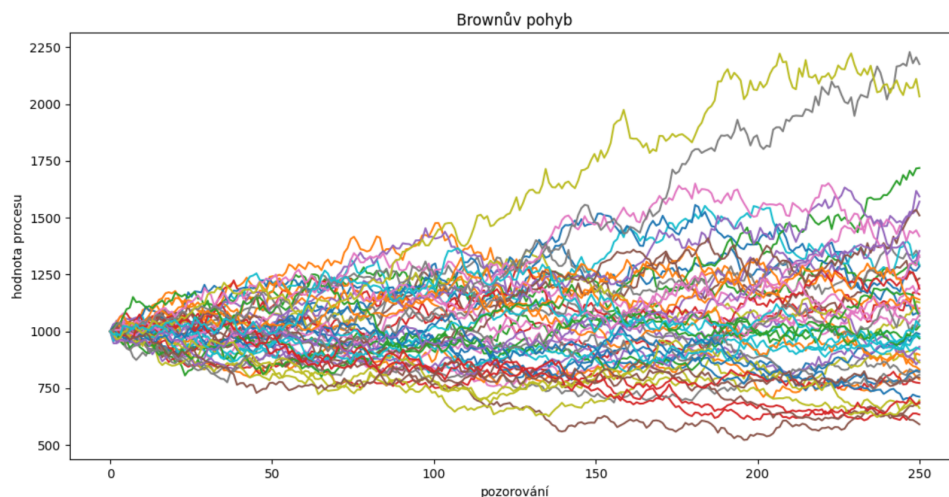
Ze stylistických důvodů ještě provedeme přepis  $P(t)$  jako funkce času  $t$  na parametr  $P_t$ , protože po diskretizaci tohoto procesu (a následném použití pro vstupní data v modelu) budeme k funkci  $P(t)$  přistupovat jako k parametru  $P_t$ .

$$P_t = P_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\xi_t\right) = P_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\epsilon\sqrt{t}\right) \quad (4.11)$$

Pro praktické účely čtenáře ještě doplním kód procesu spolu s ukázkovou simulací.

```
np.random.seed(121), n_steps = 250, n_sim = 50, method = "BM",
dt = 1/n_steps, mu = 0.1, std = 0.28, init_price = 1000

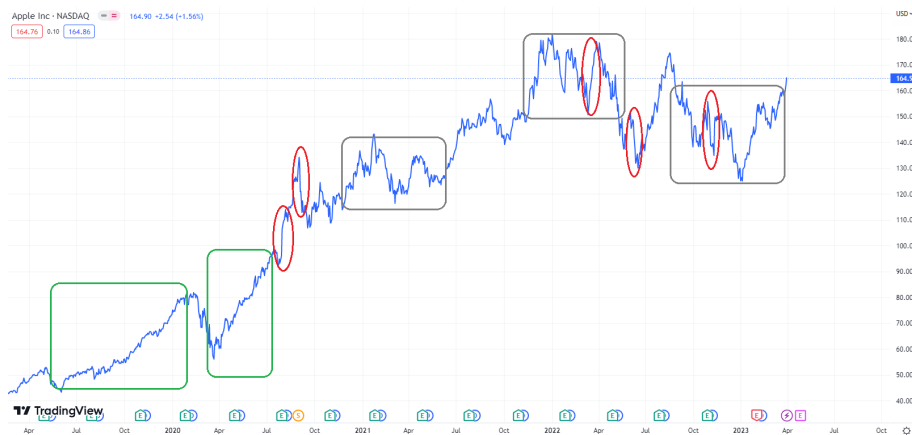
def simulation(n_steps, n_sim, method, dt, mu, std, init_price):
    P = np.zeros([n_sim, n_steps])
    P[:,0] = init_price
    if method == "BM":
        for i in range(1,n_steps):
            eps = np.random.normal(0,1, n_sim)
            P[:,i] = P[:,i-1] * np.exp((mu - std**2 / 2)*dt
                + std*np.sqrt(dt)*eps)
    P = P.transpose()
    return P
```



Obrázek 4.5: Brownův pohyb

Rovnici (4.11) bychom nyní mohli teoreticky použít k vygenerování vstupních hodnot (po získání parametrů  $\mu$  a  $\sigma$  opět z historických dat). Porovnejme si však nejdříve Brownův pohyb generovaný touto rovnicí s reálnou ukázkou vývoje ceny společnosti Apple.

## 4.2. MODELOVÁNÍ VSTUPNÍCH DAT



Rád bych zde poukázal na dvě věci. První je názorná z porovnání oblastí ohraničených zeleným obdélníkem s oblastmi ohraničenými šedými obdélníky. Zatímco v oblastech se zelenými obdélníky cena akcie v podstatě následuje lokální trend jen s malými fluktuacemi, v oblastech s šedými obdélníky jsou fluktuace daleko vyšší, z čehož můžeme usoudit, že je zde vyšší volatilita tohoto pohybu. Na základě toho tedy můžeme zpochybnit předpoklad konstantní  $\sigma$  ve vzorci (4.11).

Dále jsem pak červenými elipsami označil místa, ve kterých cena akcie prudce vyskočila/propadla se. Tyto nárazové skoky jsou typické pro akciové časové řady, jsou také příčinou toho, že rozdělení návratností akcií vykazuje tzv. tlusté chvosty (*fat tails*) a nesplňuje tedy předpoklad normálního rozdělení (které je podstatné např. právě pro Markowitzův model). Narozdíl od běžné volatility, která je způsobena především fluktuacemi v nabídce a poptávce, tyto skoky mají původ v nečekaných událostech od nečekaně nízkých/vysokých kvartálních výnosů po obyčejné tweety neobyčejných lidí.

Zaměříme se nyní na mou druhou poznámku a pokusme se Brownův pohyb obohatit právě o tyto skoky. Poslouží nám k tomu Mertonův model [21].

### 4.2.3. Mertonův a Hestonův model

Tzv. Mertonův skokově-difúzní model (*Merton jump diffusion model*) vytvoříme rozšířením rovnice (4.11) o proces  $J_t$  následovně.

$$dP_t = \mu P_t dt + \sigma P_t d\xi_t + P_t dJ_t. \quad (4.12)$$

Každý skok bude charakterizován náhodností jeho výskytu a také svou náhodnou velikostí.

Velikost skoku budeme modelovat náhodnou proměnnou  $\kappa$ , o níž budeme předpokládat, že je z log-normálního rozdělení. Cena  $P_t$  se po příchodu skoku změní na  $\kappa_t P_t$ . Pro  $\kappa_t = 0.75$  se tedy cena skokově sníží o 25%, v případě  $\kappa_t = 1.25$  se cena o stejné procento skokově zvýší. Protože náhodnou proměnnou  $\kappa_t$  modelujeme log-normálním rozdělením, máme zaručeno  $\kappa_t > 0$  a tedy nemůže cena  $P_t$  spadnout pod nulu (což je přirozené).

Změnu ceny na základě skoku tedy můžeme popsat jako

$$\begin{aligned} dP_t &= \kappa_t P_t - P_t \\ \frac{dP_t}{P_t} &= \kappa_t - 1 \end{aligned}$$

Příchod skoku je pak přirozené modelovat pomocí další náhodné proměnné s Poissonovým rozdělením  $\eta$  (které se typicky používá pro popis výskytu událostí v časovém úseku) s frekvencí výskytu pozorovaných událostí  $\lambda$ . Pro toto rozdělení platí

- pravděpodobnost  $\mathcal{P}(\eta_0 = 0) = 1$ , tedy tento proces začíná nulou.
- platí nezávislost přírůstků stejně jako u Wienerova procesu.
- pro pravděpodobnost výskytu skoku za časový interval  $\Delta t$  platí:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\eta_{t+\Delta t} - \eta_t = 1) &= \lambda \Delta t + o(\Delta t) \\ \mathcal{P}(\eta_{t+\Delta t} - \eta_t > 1) &= o(\Delta t), \end{aligned}$$

kde  $o(\Delta t)$  je libovolná funkce proměnné  $\Delta t$ , pro kterou platí  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{o(h)}{h} = 0$ . Pravděpodobnost výskytu více jak jedné události v časovém úseku  $\Delta t$  pro  $\Delta t \rightarrow 0^+$  je rovna 0 [41]. Pro elementární posun  $dt$  tedy nastane právě jedna událost s pravděpodobností  $\lambda dt$  a žádná událost s pravděpodobností  $1 - \lambda dt$ .

Celá skoková složka má pak tvar

$$dJ_t = (\kappa_t - 1) d\eta_t.$$

Tuto složku můžeme přičíst k původnímu Brownovu pohybu podle rovnice (4.12) a po vydělení cenou  $P_t$  dostaneme

$$\frac{dP_t}{P_t} = \mu dt + \sigma d\xi_t + (\kappa_t - 1) d\eta_t.$$

Pouhé přičtení je v pořádku, neboť předpokládáme vzájemnou nezávislost Wienerova, Poissonova procesu a velikosti skoků. Díky předpokladu nezávislosti můžeme také psát [21]

$$\mathbb{E}[dJ_t] = \mathbb{E}[(\kappa_t - 1) d\eta_t] = \mathbb{E}[\kappa_t - 1] \mathbb{E}[d\eta_t] = k \lambda dt,$$

kde  $k = \exp^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$  je střední hodnota log-normálního rozdělení. Vidíme tedy, že proces  $J_t$  má nenulovou střední hodnotu, a tedy má vliv na střední hodnotu celého procesu  $dW_t$ , což ošetříme odečtením složky  $k \lambda dt$  [21].

$$\frac{dP_t}{P_t} = (\mu - k \lambda) dt + \sigma d\xi_t + (\kappa_t - 1) d\eta_t.$$

Uvážíme-li, že takovýchto skoků může během časového úseku  $\Delta t$  přijít více než jeden, tedy cena  $P_t$  se změní na  $P_t \kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_{\Delta \eta_t}$ , provedeme ještě úpravu [21] na

## 4.2. MODELOVÁNÍ VSTUPNÍCH DAT

$$\frac{dP_t}{P_t} = (\mu - k\lambda)dt + \sigma d\xi_t + \left(\prod_{j=1}^{d\eta_t} \kappa_j - 1\right).$$

Nyní už je možno aplikovat Itoovo lemma. Pro zjednodušení vynechám několik následujících kroků ekvivalentních s použitím Itoova lemmatu při odvození Wienerova procesu a napíšu výsledný tvar po jeho aplikování [21].

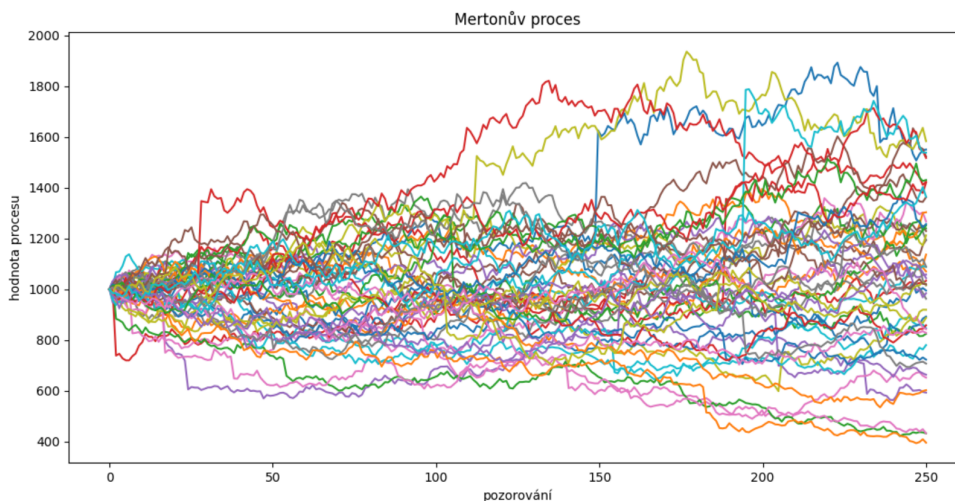
$$\ln P_t - \ln P_0 = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} - k\lambda\right)t + \sigma\xi_t + \sum_{j=1}^{\eta_t} \ln \kappa_j,$$

A tedy platí

$$P_t = P_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} - k\lambda\right)t + \sigma\xi_t + \sum_{j=1}^{\eta_t} \ln \kappa_j\right).$$

Tím jsme odvodili Mertonův skokově difúzní model [21]. Následuje opět ukázka kódu a simulace, ze kterých jsou přidáné skoky patrné.

```
mu_J = 0, std_J = 0.2, lam = 1
elif method == "HM":
    for i in range(1,n_steps):
        eps = np.random.normal(0,1, n_sim)
        jump = np.random.normal(mu_J, std_J, n_sim)
        pois = np.random.poisson(lam*dt, n_sim)
        P[:,i] = P[:,i-1] * np.exp((mu - std**2 / 2
            - lam * (np.exp(mu_J + std_J ** 2 / 2) - 1))*dt
            + std*np.sqrt(dt)*eps + jump*pois)
P = P.transpose()
```



Obrázek 4.6: Mertonův proces

Nyní se zaměříme na mou druhou poznámku v motivační části, pokusíme se tedy nahradit předpoklad konstantní volatility  $\sigma$  robustnějším přístupem. Použijeme tzv. Hestonův model stochastické volatility [24], který nabývá následující podoby

$$\frac{dP_t}{P_t} = \mu dt + \sqrt{\nu_t} d\xi_t^1$$

$$d\nu_t = \omega(\theta - \nu_t) dt + \phi\sqrt{\nu_t} d\xi_t^2,$$

kde  $\theta$  je dlouhodobá cenová volatilita,  $\omega$  je míra návratu volatilita k jejímu dlouhodobému průměru,  $\phi$  je rozptyl této volatilita, platí  $\sqrt{\nu_t} = \sigma_t$ , dále  $d\xi_t^2$  je Wienerův proces rozptylu ceny (nikoliv ceny samotné, což je  $d\xi_t^1$ ) a pro  $d\xi_t^1$ ,  $d\xi_t^2$  platí, že jsou korelované, tedy podle [22] platí

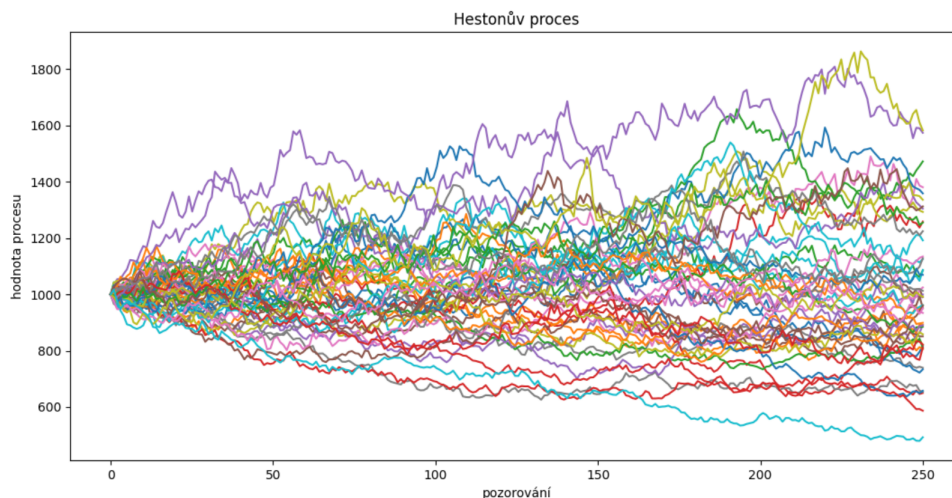
$$E[d\xi_t^1, d\xi_t^2] = \rho dt.$$

Technické detaily spojené s modelem ponechám bez bližšího komentáře a odkáži čtenáře na zdroje [22][23][24]. My se spokojíme s následující diskretizací s příslušným kódem a ukázkou.

$$P_t = P_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\nu_t}{2}\right)t + \sqrt{\nu_t}\xi_t\right)$$

$$\nu_{t+1} = \nu_t + \omega(\theta - \nu_t)\Delta t + \phi\sqrt{\nu_t}\Delta t\xi_t^2$$

```
omega = 3, theta = std**2, v0 = std**2, rho = 0.7, phi = 0.2
elif method == "HM":
    v = np.zeros([n_sim, n_steps])
    v[:,0] = v0
    cor = np.array([[1,rho], [rho,1]])
    for i in range(1,n_steps):
        eps = np.random.multivariate_normal([0,0], cor, n_sim)
        P[:,i] = P[:,i-1] * np.exp( (mu - v[:,i-1])*dt
            + np.sqrt(v[:,i-1] * dt) * eps[:,0] )
        v[:,i] = np.maximum(v[:,i-1] + omega*(theta-v[:,i-1])*dt
            + phi*np.sqrt(v[:,i-1]*dt)*eps[:,1], 0)
    P = P.transpose()
```



Obrázek 4.7: Hestonův proces

## 4.2. MODELOVÁNÍ VSTUPNÍCH DAT

Proměnlivost volatility nechť z trajektorií posoudí čtenář sám.

Po zakomponování náhodných skoků do Hestonova modelu dostáváme tzv. *Batesův model* [25].

$$P_t = P_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\nu_t}{2} - k\lambda\right)t + \sqrt{\nu_t}\xi_t + \sum_{j=1}^{n_t} \ln \kappa_j\right)$$

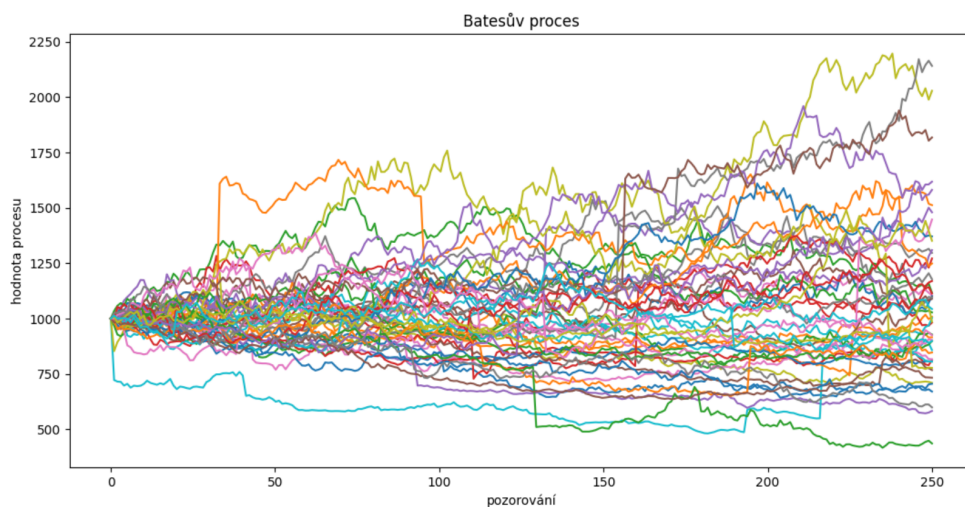
$$\nu_{t+1} = \nu_t + \omega(\theta - \nu_t)\Delta t + \phi\sqrt{\nu_t}\Delta t\xi_t^2$$

Tento model již skutečně využijeme ke generování scénářů vývoje cen (respektive z nich spočítaných návratností). Naposledy následuje ukázka 50 simulací tohoto procesu s příslušným kódem.

```
mu_J = 0, std_J = 0.2, lam = 1
omega = 3, theta = std**2, v0 = std**2, rho = 0.7, phi = 0.4
elif method == "ALL":
    jump = np.random.normal(mu_J, std_J, n_sim)
    pois = np.random.poisson(lam*dt, n_sim)
    v = np.zeros([n_sim, n_steps])
    v[:,0] = v0
    cor = np.array([[1,rho], [rho,1]])

    for i in range(1,n_steps):
        eps = np.random.multivariate_normal([0,0], cor, n_sim)
        jump = np.random.normal(mu_J, std_J, n_sim)
        pois = np.random.poisson(lam*dt, n_sim)

        P[:,i] = P[:,i-1] * np.exp( (mu - v[:,i-1] / 2
            - lam * (np.exp(mu_J + std_J ** 2 / 2) - 1))*dt
            + np.sqrt(v[:,i-1] * dt) * eps[:,0] + jump*pois )
        v[:,i] = np.maximum(v[:,i-1] + omega*(theta-v[:,i-1])*dt
            + upsilon*np.sqrt(v[:,i-1]*dt)*eps[:,1],0)
    P = P.transpose()
```



Obrázek 4.8: Batesův proces.

### 4.3. CVaR

Posledním nedostatkem Markowitzova modelu, je předpoklad normality návratností akcií. Ve skutečnosti rozdělení návratností má tzv. tlusté konce. Proto je potřeba nahradit rozptyl v Markowitzově smyslu založen na předpokladu normálního rozdělení robustnějším přístupem. Dalším důvodem je pak jistá nedokonalost v kontrole rizika v smyslu modelu Yasuda-Kasai. Nyní s použitím zdroje [26] představím teorii nové míry rizika.

Uvažujme nyní funkci  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ , kde  $\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n$  reprezentuje již tradičně portfolio (neboli vektor alokací) a náhodný vektor  $\boldsymbol{\xi} \in X \subset \mathbb{R}^m$  popisující tržní nejistotu způsobující náhodné ztráty (tedy zápornou hodnotu náhodných zisků). Tato ztráta může být také negativní, což značí dosažený zisk. Funkce  $f$  pak je tedy také sama o sobě náhodnou proměnnou popisující ztráty celého portfolia. Pro čtenářovo propojení teorie doplním, že  $f$  tedy odpovídá náhodné proměnné  $-\zeta_R$  z kapitoly 2 (značení  $f$  používá autor kvůli souladu značení s použitým zdrojem). Předpokládáme [26], že náhodná proměnná  $\xi$  má hustotu pravděpodobnosti  $p(\boldsymbol{\xi})$ .

Pravděpodobnost, že ztrátová funkce  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  nepřekročí předem stanovenou mez  $z$  (pozn. značení  $z$  zde nesouvisí se značením  $z$  kapitoly 3) je vyjádřena integrálem

$$\Psi(\mathbf{x}, z) = \int_{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq z} p(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi},$$

což je kumulativní distribuční funkce ztrát portfolia  $\mathbf{x}$  [26]. Tuto funkci využijeme následovně k definování dvou nových rizikových měr [26]

$$\text{VaR}_\alpha = \min \{z \in \mathbb{R} : \Psi(\mathbf{x}, z) \geq \alpha\}$$

a

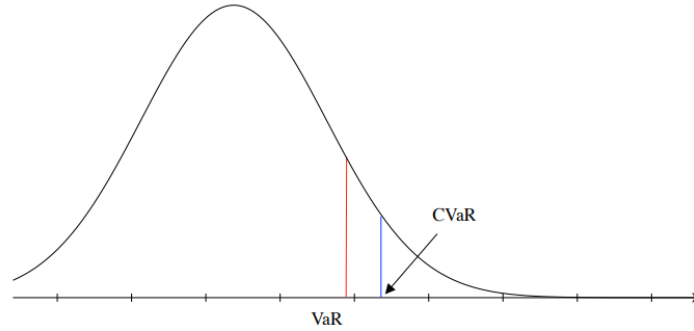
$$\text{CVaR}_\alpha = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \geq \text{VaR}_\alpha} f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) p(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \quad (4.13)$$

kde  $\text{VaR}_\alpha$  je levý koncový bod neprázdného intervalu obsahující hodnoty  $z$  takové, že platí  $\Psi(\mathbf{x}, z) = \alpha$  a tuto míru nazýváme *Value at risk* [26]. Díky tomu platí, že pravděpodobnost  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \geq \text{VaR}_\alpha$  je rovna hodnotě  $1 - \alpha$ . Podle definice ji tedy interpretujeme jako nejmenší kvantil  $z$  takový, že na zvolené hladině spolehlivosti  $\alpha$  (kterou volíme nejčastěji 0.9, 0.95, 0.99) ztráty portfolia nepřekročí ztrátu  $z$ .

Číslo  $\text{CVaR}_\alpha$  pak značí podmíněnou střední hodnotu pouze těch ztrát portfolia  $\mathbf{x}$ , které jsou větší nebo rovny hodnotě  $\text{VaR}_\alpha$ , a nazýváme ji *Conditional value at risk*. Ekonomicky ji můžeme tedy interpretovat jako očekávanou ztrátu  $(1 - \alpha)\%$  nejhorších scénářů návratnosti portfolia.

### 4.3. CVAR

Grafické znázornění významů obou funkcí (jakožto kvantilů) ilustruje následující obrázek.



**Obrázek 4.9:** Rozdělení pravděpodobnosti ztrát portfolia. Zdroj: [40]

Zdroj [26] pak dále nabízí charakterizaci obou měř prostřednictvím funkce

$$F_\alpha(\mathbf{x}, z) = z + \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^S} [f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - z]^+ p(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}. \quad (4.14)$$

Tato funkce je velmi příhodná a pojí se s ní podstatný teorém.

**Věta 4.1.** *Jakožto funkce proměnné  $z$  je funkce  $F_\alpha(\mathbf{x}, z)$  konvexní a spojitě diferencovatelná. Hodnotu  $\text{CVaR}_\alpha$  ztrát přidružených libovolnému vektoru  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  pak získáme jako*

$$\text{CVaR}_\alpha(\mathbf{x}) = \min_{z \in \mathbb{R}} F_\alpha(\mathbf{x}, z).$$

*Množina všech hodnot  $z$  pro které je dosaženo minima, tedy*

$$A_\alpha(\mathbf{x}) = \underset{z \in \mathbb{R}}{\text{argmin}} F_\alpha(\mathbf{x}, z)$$

*je neprázdný, uzavřený, ohraničený interval a hodnota  $\text{VaR}_\alpha(\mathbf{x})$  je dána jako levý bod tohoto intervalu. Vzájemný vztah obou měř je pak dán rovnicemi*

$$\begin{aligned} \text{VaR}_\alpha(\mathbf{x}) &= \underset{z \in \mathbb{R}}{\text{argmin}} F_\alpha(\mathbf{x}, z) \\ \text{CVaR}_\alpha(\mathbf{x}) &= F_\alpha(\mathbf{x}, \text{VaR}_\alpha(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Důkaz předchozího teorému čtenář nalezne v [26].

Výhody tohoto přístupu jsou relativně snadná numerická minimalizace spojitě diferencovatelných konvexních funkcí a také výpočet hodnoty  $\text{CVaR}_\alpha$  bez nutnosti předchozího výpočtu  $\text{VaR}_\alpha$ , na němž je postavena definice míry  $\text{CVaR}_\alpha$ .

V případě, kdy nejistotu spojenou s náhodným vektorem  $\boldsymbol{\xi}$  modelujeme skrze konečný počet scénářů, může integrál v definici 4.14 být dále aproximován diskrétním vyjádřením jako

$$F_\alpha(\mathbf{x}, z) = z + \frac{1}{(1 - \alpha)S} \sum_{s=1}^S [f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}^s) - z]^+. \quad (4.15)$$

Další výhoda této míry spočívá ve skutečnosti, že od vygenerovaného scénářového stromu nevyžaduje žádné speciální vlastnosti, jak tomu bývá u vícestupňových úloh (např. kontrola přítomnosti arbitráže v optimalizaci portfolia opcí [11]).

Tímto jsme teoreticky zavedli nové dvě míry rizika, přičemž pro nás bude podstatná především  $\text{CVaR}_\alpha$ . Pro její použití v našem modelu však ještě potřebujeme udělat několik úprav. Za prvé obecnou funkci  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  nahradíme konkrétním přepisem návratnosti portfolia s pomocí náhodné proměnné  $d(\xi)$  tak, jak jsme zvyklí z Markowitzova modelu. Protože funkce  $f$  popisuje ztráty, platí

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\mathbf{d}^\top(\boldsymbol{\xi})\mathbf{x}$$

Funkce (4.15) pak přechází v přepis

$$F_\alpha(\mathbf{x}, z) = z + \frac{1}{(1-\alpha)S} \sum_{s=1}^S [-\mathbf{d}^{s\top} \mathbf{x} - z]^+.$$

Minimalizace této funkce může být s použitím pomocných proměnných  $u_s$  transformována na konvexní optimalizaci, tedy minimalizaci lineární funkce

$$F_\alpha(\mathbf{x}, z) = z + \frac{1}{(1-\alpha)S} \sum_{s=1}^S u_s,$$

kde

$$\begin{aligned} u_s &\geq 0, \\ u_s &\geq -\mathbf{d}^{s\top} \mathbf{x} - z, \end{aligned}$$

jsou dvě lineární podmínky. Pro úplnost dodám, že minimalizace kvantilu  $\text{VaR}_\alpha$  by vedla na numericky komplikovanější celočíselnou optimalizaci. Případný postup pro použití byl již ukázán v zápisu (4.7).

Přestože je  $\text{VaR}_\alpha$  v praxi populární mírou, má značné nevýhody oproti  $\text{CVaR}_\alpha$ , která má v mnohých ohledech lepší vlastnosti, více viz [27].

## 4.4. Struktura modelu Yasuda-Kasai

V této části po krocích zavedu předmětný model, poukážu na některé jeho nedostatky a doplním některá další rozšíření. Vycházet budu především z článků [43], [44], [45].

Uvažujeme 4 rozhodovací stupně  $t = 0, 1, 2, T$ , které odpovídají počátku, prvnímu, druhému a čtvrtému kvartálu ( $T$ ), který je také naším plánovacím horizontem. Značení budu místy pro pohodlnost zaměňovat s označeními  $T_0, \dots, T_3$ . Na počátku firma disponuje počátečním bohatstvím  $V_0$ , které může využít v nultém stupni k nákupu aktiv  $x_{i0}$ , respektive nákupu  $x_{it}^s$  ve stupni  $t = 1, 2$  v každém uvažovaném scénáři  $s$ , a platí omezení

$$\sum_{i=1}^n x_{it}^s - V_t^s = 0, \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \forall s \in \mathcal{S}.$$

Z periody  $T$  je tato podmínka vynechána, protože v ní již neuvažujeme vektor  $\mathbf{x}$ , neboli všechna aktiva chceme směnit zpět na bohatství. Tato aktiva generují firmě kapitálový výnos  $d_{it}(\xi)$  z prodeje aktiv respektive běžný výnos  $D_{it}(\xi)$  z dividend.

Jedním z hlavních produktů, které společnost začala poskytovat, bylo pojištění se spořicí složkou. V praxi tedy firma od všech klientů získala deposit  $F_t(\xi)$  (který můžeme chápat jako finanční tok viz kapitola 3), jenž jim při úrokové sazbě  $r_t(\xi)$  generoval určitý úrok  $I_t(\xi)$ , jenž byl na tuto sazbu přirozeně navázán. Po době uplynutí kontraktů v daném roce  $t$  je příslušným klientům vyplacen zpět jejich deposit  $G_t$  spolu s úrokem  $I_t(\xi)$ . Pro upřesnění značení, v roce  $t$  musíme rozlišit mezi velikostí celkového vloženého vkladu  $F_t(\xi)$  a vyplaceného vkladu  $G_t$ . Protože se připisovaný úrok jistě odvíjel od vývoje tržních sazeb  $r_t(\xi)$ , a protože velikost vkladů  $F_t(\xi)$  v budoucím čase  $t$  se jen těžko odhaduje, jsou oba koeficienty náhodné. Výplatu vkladů  $G_t$  si může firma do určité míry dopředu plánovat, proto ji můžeme brát za známou konstantu. Tyto položky pak tvoří závazkovou část rozvahy, tedy

$$L_{t+1}^s = (1 + r_{t+1}^s)L_t^s + F_{t+1}^s - G_{t+1} - I_{t+1}^s, \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \forall s \in \mathcal{S},$$

kde předpokládáme, že firma již disponuje počátečními závazky  $L_0$ .

Veškerý přísun a odliv kapitálu je pak určen výkazem toků hotovosti

$$V_{t+1}^s - \sum_{i=1}^n (1 + d_{it+1}^s + D_{it+1}^s)x_{it}^s = F_{t+1}^s - G_{t+1} - I_{t+1}^s, \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \forall s \in \mathcal{S}. \quad (4.16)$$

Budoucí bohatství společnosti tedy tvoří zisky z jejich investic a přísun nového kapitálu v podobě nově vložených depositů. Snižuje jej pak povinnost vyplatit v daném období úrok a jistinu z vypršených kontraktů.

Na základě regulační politiky v té době mohla pojišťovna Yasuda tyto produkty financovat pouze z běžného výnosu  $D_{it}(\xi)$ , nikoliv kapitálového výnosu  $d_{it}(\xi)$ . Pokud si v daném roce na vyplacení závazků nebyla schopna vydělat, vykazala neschopnost splácet své závazky, za což je pak penalizována pokutou  $e$  v účelové funkci. Tuto neschopnost by v případě potřeby mohla řešit půjčkou  $v_t^-$ . V opačném případě vydělala na dividendách více, než by potřebovala k pokrytí úroků, což je vyjádřeno proměnnou  $v_t^+$ . Obě proměnné mají podobnou funkci půjček a přebytků z kapitoly 2.2.2 a jsou analogií kompenzačního

vektoru  $\mathbf{y}$  z teoretické části stochastického programování. Toto omezení nicméně neukládá povinnost úrok  $r_{t+1}L_t$  v daném roce  $t$  zaplatit, pouze nutí společnost si v průběhu plánovacího období být schopna svou investiční aktivitou dostatečně průběžně vydělávat, aby nefinancovala své produkty slepě pouze z vlastních úvěrů. Člen  $v_t^-$  tedy není skutečnou půjčkou, ale pouze jakousi penalizační proměnnou, proto nefiguruje v závazkové části rozvahy viz vztah (4.4) a také proto člen  $D_{it}^s$  nadále figuruje ve výkazu toků hotovosti, běžný výnos (v podobě příjmu z dividend) tedy nebyl spotřebován na financování úroků a může být dále reinvestován. Pro jednoduchost vyjadřování však budu názvy půjčka/dluh a přebytek nadále užívat. Formulovat výše uvedené můžeme tedy následovně.

$$\sum_{i=1}^n D_{it+1}^s x_{it}^s + v_{t+1}^{-s} - v_{t+1}^{+s} = r_{t+1}^s L_t^s, \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \quad \forall s \in \mathcal{S} \quad (4.17)$$

Neméně důležitý cíl společnosti je rovněž maximalizace svého očekávaného bohatství  $EV_T(\boldsymbol{\xi})$  napříč všemi scénáři na konci plánovacího horizontu  $T$ . Toto očekávané bohatství však snižují penále za nedodržení podmínky dostatečného příjmu z investic k vyplacení závazků, tedy penále za průběžný dluh  $v_t^{-s}$ .

$$\max \mathbb{E}[V_t - \sum_{t=1}^T e_t v_t^-] = \sum_{s=1}^S p_s (V_t^s - \sum_{t=1}^T e_t v_t^{-s})$$

Riziko je tedy v tomto modelu chápáno jako šance nedodržení omezení (4.17) a vystavení se následné penalizaci, která sníží očekávané bohatství na konci plánovacího horizontu. Společnost tímto krokem vlastně snižuje své vlastní kreditní riziko viz definice 2.3. Nebere však vůbec v potaz riziko tržní viz definice 2.1. Touto záležitostí se budu zabývat později.

Původní verze rovněž zahrnovala transakční náklady v každém stupni. Žádná z uvedených citací toto omezení explicitně v modelu nevyjadřuje, dá se však předpokládat, že toto omezení by mohlo být do modelu zakomponováno dle [46] jako

$$V_{t+1}^s + l \sum_{i=1}^n y_i^s - \sum_{i=1}^n (1 + d_{it+1}^s + D_{it+1}^s) x_{it}^s = F_{t+1}^s - G_{t+1} - I_{t+1}^s,$$

kde

$$\begin{aligned} y_{it}^s &\geq x_{it}^s - x_{it-1}^s, \\ y_{it}^s &\geq x_{it-1}^s - x_{it}^s, \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \quad \forall s \in \mathcal{S}, \end{aligned}$$

čímž díky koeficientu  $l$  penalizujeme prudké změny (jak zvýšení, tak snížení) v alokacích jednotlivých aktiv napříč všemi stupni. Proměnná  $y$  je pomocná alokační proměnná s podobným významem jako v kapitole 2.2.3. V duchu omezení (2.13) model rovněž obsahoval omezení na velikost alokace do jednotlivých tříd aktiv z důvodu snížení rizika likvidního viz definice 2.2, čehož docílíme podmínkou

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{x}_t^s \leq \bar{\mathbf{x}} \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \quad \forall s \in \mathcal{S}.$$

Transakční náklady jsou tedy spojené pouze s realokací aktiv, neuvažujeme počáteční náklady vynaložené na koupi.

#### 4.4. STRUKTURA MODELU YASUDA-KASAI

Původní model řešil rovněž problematiku daní, konverze měn, přítomnost několika typu peněžních účtů, či pokročilejší právní a státní restriktce, více viz [45]. Tyto technické specifikace již dále zahrnovat nebudeme a přejdeme rovnou ke generování vstupních dat.

Množinou investičních příležitostí pojišťovny Yasuda nebyly jednotlivé akciové tituly, jako jsme to uvažovali u Markowitzova modelu, nýbrž jednotlivé trhy reprezentovány indexy od akciového, přes dluhopisové a komoditní po realitní. Tím společnost automaticky cílí na snižování sektorového rizika což je jistá analogie omezení v rámci podkapitoly 2.2.4. My budeme uvažovat množinu aktiv uvedených v následující tabulce.

sektor	ticker	název
Akcie	SPY	SPDR S&P 500 ETF Trust
Dluhopisy	^TNX	Treasury Yield 10 Years
	AGG	iShares Core U.S. Aggregate Bond ETF
	LQDH	iShares Interest Rate Hedged Corporate Bond ETF
	TIP	iShares TIPS Bond ETF
Reality	VNQ	Vanguard Real Estate Index Fund ETF
Komodity	DBC	Invesco DB Commodity Index Tracking Fund

Obrázek 4.10: Instrumenty uvažované do portfolia.

Kromě fondů, které byly použity již v tabulce 2.1 v kapitole 2, zde uvažujeme navíc ETF fond SPY kopírující výnos indexu S&P500, realitní fond VNQ a komoditní fond DBC.

Nyní se pustíme do generování vstupních dat. Ze všeho nejdřív si vygenerujeme bodové odhady ročních středních hodnot  $\mu$  a směrodatných odchylek  $\sigma$  uvažovaných ETF fondů z jejich historických denních návratností. Počet obchodních dní stanovíme na 252.

```
def get_data(tickers):
    end_date = "2023-03-12"
    closes = yf.download(ticker, start = "2015-01-01",
                        end = end_date)['Adj Close']
    closes = closes.loc[:,ticker]

    returns = np.log(closes/closes.shift(1)).dropna()
    mu_ = returns.mean().values
    std_ = returns.std().values
    init_price = closes.tail(1).values[0]

    mu = ((mu_ + 1) ** 252) - 1
    std = std_ * np.sqrt(252)
    return [mu, std, init_price]
```

Vypočtené bodové odhady  $\bar{d}_i$ ,  $\bar{\sigma}_i$  spolu s počátečními cenami lze nalézt v následující tabulce.

Tyto hodnoty použijeme ke generování scénářů uvažovaných aktiv. K tomuto účelu využijeme stochastické procesy představené v kapitole 4.2.1. Uvedené procesy byly navrženy

	SPY	TNX	AGG	LQDH	TIP	VNQ	DBC
$\bar{d}_i$	0.1017	0.0771	0.0095	0.0254	0.0213	0.033	0.044
$\bar{\sigma}_i$	0.187	0.5292	0.0507	0.0713	0.0595	0.2171	0.1858
$P_0$	384.44	3.695	98.09	90.76	108.09	80	23.67

**Tabulka 4.1:** Tabulka bodových odhadů a počáteční ceny aktiv

k modelování vývoje především akciových časových řad, proto jsou vhodné především ke generování vstupních dat pro aktivum SPY. Pro tato data využijeme Batesův proces.

Pro modelování vývoje úrokových sazeb (a potažmo tedy výnosů fondu TNX) se často využívají různé obdoby Brownova pohybu, jmenovitě např. Vašíčkův jednofaktorový model, případně méně známý Cox-Ingersoll-Rossův model. Spokojíme se tedy s použitím Brownova pohybu.

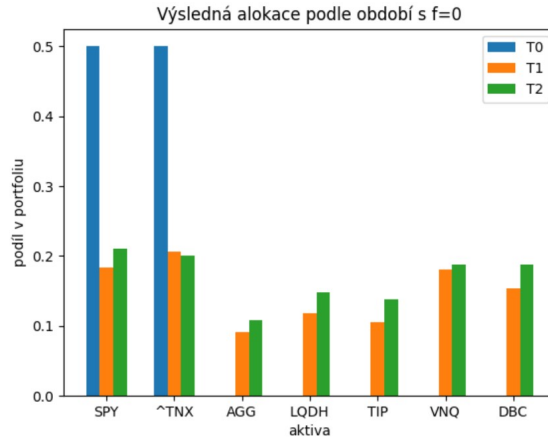
Další aktiva jako index realitního či komoditního trhu případně korporátní dluhopisy kryté proti úrokovému riziku jsou trhy, respektive produkty s jiným fundamentálním základem. Nepodnikl jsem v této oblasti dostatečný výzkum, abych dokázal posoudit, zda je pro modelování vývoje těchto trhů Brownův pohyb dostatečně dobrý. Nebylo však mým cílem přesně popsat vhodné stochastické procesy pro generování každého faktoru ovlivňující příslušný trh, proto si pro ostatní aktiva vystačíme opět s použitím (spolu s příslušnými odhady momentů jako vstupní parametry) Brownova pohybu, který se ostatně pro svou obecnost využívá pro simulace rovněž v jiných, nefinančních oblastech. Nevýhodou našeho postupu generování scénářů je však ignorování případné korelace mezi simulacemi jejich pohybů.

Vygenerované časové řady jsou pak diskretizovány v krocích 0, 62, 125 a 251 což odpovídá počátku roku a konci 1., 2., a 4. kvartálu. Následně jsou data (spolu s dalšími parametry) nahrána do struktury "dict", kterým reprezentujeme náš lineární scénářový strom.

Parametr dividendového výnosu se pak odvíjí od kapitálového výnosu příslušného instrumentu spolu s šumem generovaným náhodně z normálního rozdělení. Pro aktivum DBC je generována dividendová míra rovna nule, protože tento komoditní fond nevyplácí dividendu. Výplaty depositu  $G_t$  jsou pevně stanoveny jako desetina původního bohatství. Příliv kapitálů  $F_t(\xi)$  je poté generován z normálního rozdělení se střední hodnotou právě  $G_t$  na základě myšlenky, že se tyto dvě položky musí dlouhodobě navzájem vyrušit. Z normálního rozdělení jsou generovány rovněž úroky  $I_t(\xi)$ . Penalizační funkci konstruuje jako po částech lineární funkci, přesněji tedy vektor  $[0.01, 0.05, 0.12]$  pro příslušná období T1, T2, T3. Počáteční bohatství stanovíme na 1 (buď chápáno v jednotkách měny nebo jako 100%). Počáteční závazky jsou pak 50% počátečního bohatství. Transakční poplatek  $l$  činí 0.05. Pravděpodobnost scénářů volíme z klasického rozdělení, tedy  $p(s) = \frac{1}{5}$ .

První věc, kterou si ukážeme, je porovnání výsledné alokace napříč jednotlivými obdobími. Tím ilustrujeme rozdíly ve filozofii HN a WS. Modré sloupce odpovídají alokaci v  $t = 0$ , oranžové, respektive zelené sloupce pak zobrazují očekávané alokace v  $t = 1$  a  $t = 2$ .

#### 4.4. STRUKTURA MODELU YASUDA-KASAI



Obrázek 4.11: Výsledná alokace s nulovými transakčními náklady.

Prvním poznatkem je skutečnost, že model se snaží v čase  $t = 0$  pro hodnoty transakčních nákladů  $l = 0$  alokovat veškeré bohatství  $\mathbf{x}_0$  do fondů SPY a TNX. V této periodě rozhodnutí probíhá filozofií HN, model tedy vezme v potaz všechny možné scénáře vývoje návratností v  $t = 1$  a vyhodnotí, že v průměru (ve smyslu očekávané návratnosti) si nejlépe vede SPY následováno TNX, což je ostatně v souladu s tabulkou 4.1 zaznamenávající tyto parametry. Model tedy vsadí tzv. na jednoho koně (respektive na dva, neboť narazí na podmínku maximální alokace v rámci odvětví), protože aktivum s největší očekávanou návratností nejlépe naplňuje cíl maximalizace konečného bohatství a rovněž také podmínku dostatečného průběžného výdělku viz vztah (4.17), neboť s vyšší očekávanou návratností se pojí vyšší očekávaný dividendový příjem. O diverzifikaci zde nemůže být řeč, protože v modelu nefigurují korelace mezi aktivy v Markowitzově smyslu a nemáme v modelu zabudovaný žádný aparát, jenž by inicioval diverzifikovanější alokaci.

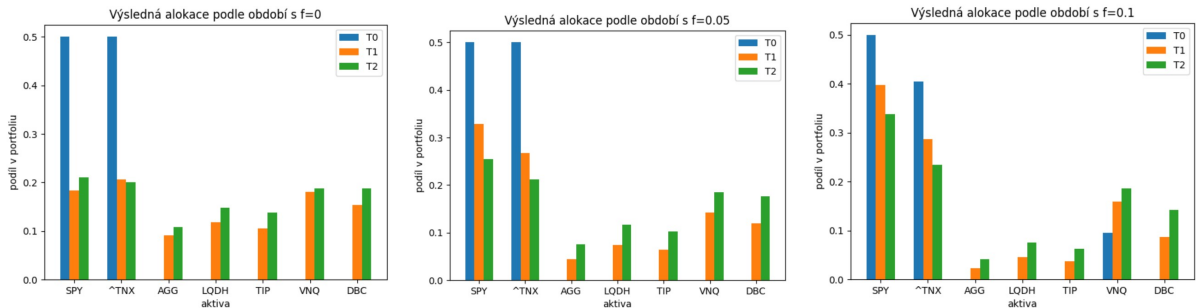
V čase  $t = 0$  musíme rovněž učinit rozhodnutí o alokacích  $\mathbf{x}_t^s$  pro stupeň  $t = 1$  (respektive  $t = 2$ ), samotná alokace však proběhne až v těchto obdobích (WS), což je zcela odlišná situace. V těchto stupních již budeme mít dodatečnou informaci, jaký z uvažovaných scénářů vývoje cen  $s$  (respektive z nich spočítaných návratností) se uskutečnil, a můžeme tedy alokaci dopředu plánovat pro každý z nich zvlášť. V každém ze scénářů je pak pochopitelně opět zvolena taková alokace, která nejlépe naplňuje požadované cíle. Protože alokací pro  $t = 1$  a  $t = 2$  je  $S$  a v čase  $t = 0$  nevíme, jaká z nich bude realizována, není nic smysluplnějšího, než alokaci  $\mathbf{x}_0$  porovnávat s očekávanými alokacemi  $\mathbf{Ex}_t(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \mathbf{x}_t^s$  v  $t = 1$  a  $t = 2$ .

Na první pohled může být zážející, jak moc se změnila alokace z  $\mathbf{x}_0$  na  $\mathbf{Ex}_1(\boldsymbol{\xi})$ , respektive do jak značné míry je očekávaná alokace  $\mathbf{Ex}_1(\boldsymbol{\xi})$  (oranžový graf) vybalancována napříč aktivy, např. pro aktiva SPY a VNQ zdá se být téměř totožná. Jsou-li přece jen roční ( $t = 0$  až  $t = T$ ) očekávané návratnosti těchto aktiv  $\bar{d}_{\text{SPY}} = 0.102$  respektive  $\bar{d}_{\text{VNQ}} = 0.033$ , očekávali bychom podobný poměr i od čtvrtletních očekávaných návratností (máme k tomu dostatečný počet scénářů  $S$ ) za období  $t = 0$  až  $t = 1$  a tomu odpovídající poměr alokace. Iterací přes všechny scénáře zvlášť bychom zjistili, že ve skutečnosti ve 2650 scénářích je  $d_{\text{SPY}}^s - d_{\text{VNQ}}^s > 0$  (označme pracovně  $S_a$ ) a ve zbylých 2350 ( $S_b$ ) je tomu naopak, tzn. poměr zhruba 1:1. Model však neřeší vůbec průměrnou velikost těchto rozdílů. Ve skutečnosti ve scénářích  $S_a$  je průměr  $\frac{1}{S_a} \sum_{s=1}^{S_a} (d_{\text{SPY}}^s - d_{\text{VNQ}}^s)$  větší než průměr  $\frac{1}{S_b} \sum_{s=1}^{S_b} (d_{\text{VNQ}}^s - d_{\text{SPY}}^s)$  ve scénářích  $S_b$ , jinými slovy je skutečně průměrná návratnost aktiva SPY vyšší. Na velikost uvedených rozdílů však model nehledí, opět pouze sází na

nejlepšího koně v daném scénáři. I tato argumentace navíc pokulhává, protože nejsme schopni systematicky kontrolovat, jak v daném  $s$  do hry vstupují další aktiva. Závěr tedy zní, že nemá cenu se původní pochybností vůbec zabývat.

V periodě  $t = 3$  už se naopak alokace příliš nezmění, model už pouze následuje trajektorie vytyčené Brownovými pohyby a značné změny mohou způsobit pouze náhodné skoky u aktiva SPY.

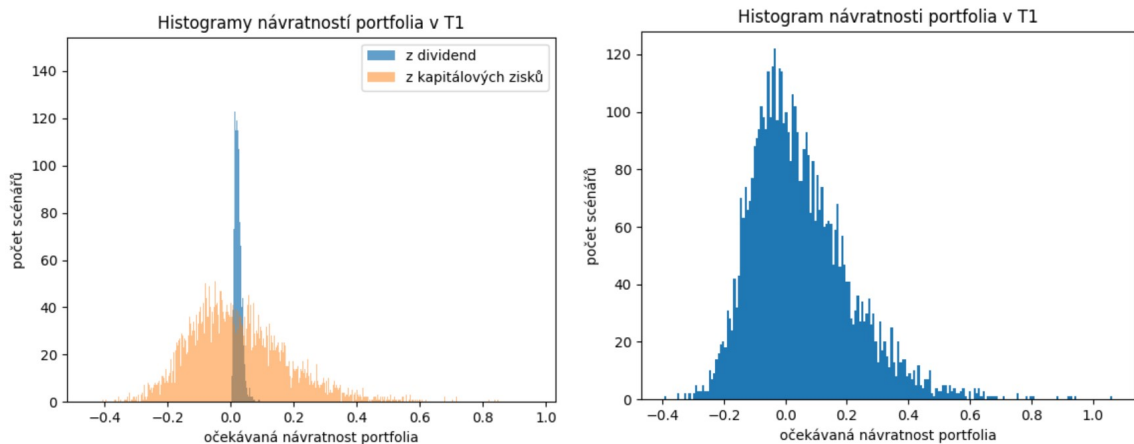
Nyní porovnáme vliv transakčních nákladů na alokace pro hodnoty poplatku  $l = 0$ ,  $l = 0.05$ ,  $l = 0.01$ , abychom připomněli jejich důležitost.



Obrázek 4.12: Porovnání alokací pro různé velikosti transakčních poplatků.

Hodnoty účelové funkce (tedy po odečtení penále, ale bez odečtení závazků  $EL_T(\xi)$ ) jsou 1.4, 1.29 a 1.23. Z druhého obrázku je patrné, jak transakční náklady (a tedy podmínka (4.17)) vytváří snahu snižovat rozdíly napříč obdobími mezi alokacemi především do prvních dvou aktiv. Zcela zřejmé je to pak ve třetím obrázku, kde náklady spojené s poplatkem  $l = 0.1$  převyšují přidanou hodnotu spojenou s vysokou očekávanou návratností aktiva TNX. Nadále budeme brát v potaz hodnotu  $l = 0.05$ . Omezíme se dále také na komentář výsledků pouze k období  $t = 1$  a  $t = 3$ , která jsou z hlediska modelu nejzajímavější, perioda  $t = 2$  plní pouze určitý překlenovací stupeň.

Dalším důležitým aspektem je histogram návratnosti portfolia v období  $t = 1$  jako výsledek rozhodnutí  $\mathbf{x}_0$ , protože od toho se následně odvíjí výkonost celého plánovacího procesu. Pro lepší představu si zobrazme zvláště histogram očekávaných kapitálových výnosů a běžných výnosů a histogram celkových očekávaných návratností.



Obrázek 4.13: Histogramy výnosů v periodě T1.

#### 4.4. STRUKTURA MODELU YASUDA-KASAI

Z histogramů vlevo je patrné, že pro maximalizaci bohatství firmy jsou důležité především kapitálové výnosy díky jejich potenciálu vyšších návratností, dividendový výnos za to v jistém ohledu přináší určitou jistotu pravidelného příjmu. Pro další analýzu modelu pak bude důležitý především histogram vpravo zakomponovávající obě složky příjmu do jednoho.

Hodí se také uvést tabulku uvádějící alespoň základní údaje o parametrech v modelu zahrnutých jako příliv depositu, velikost úroků případně hodnotu bohatství. Těmito základními údaji konkrétně myslím minimální, maximální a očekávanou (průměrnou) hodnotu daných parametrů napříč všemi scénáři v dané periodě  $t$ . Tím dostaneme lepší představu o celkové skladbě vygenerovaných scénářů.

	T1				T3		
	Min	Max	Průměr		Min	Max	Průměr
Přísun depositů	0.00015	0.2639	0.1		0.00012	0.279	0.102
Vyplacení depositů	0.1	0.1	0.1		0.1	0.1	0.1
Vyplacení úroků	~0	0.027	0.01		~0	0.028	0.0102
Bohatství	0.6	1.985	1.038		0.556	2.965	1.2943
Celková návratnost	-0.396	1.0636	0.048		-0.0713	1.4584	0.2165
Kapitálový zisk	-0.448	0.96	0.0246		-0.0908	1.312	0.1917
Kapitálový výnos	0.0027	0.127	0.0236		0.0002	0.1464	0.0249
Dluh	0	0.0283	0.0036		0	0.0407	0.0054
Přebytek	0	0.105	0.0059		0	0.1239	0.0077
Úrok na závazcích	0.004	0.039	0.0213		0.0018	0.0705	0.0226

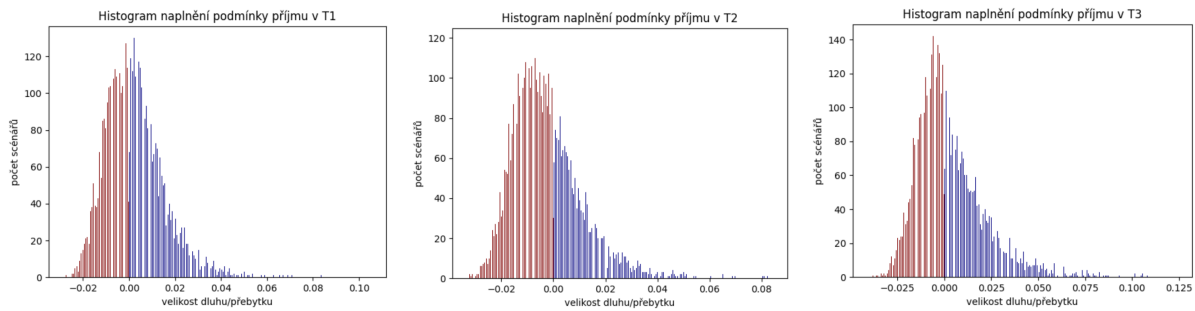
Než uvedu komentář k těmto údajům, připomeňme, že na počátku jsme uvedli, že firma disponuje počátečním bohatstvím  $V_0 = 1$ , což můžeme chápat jako absolutní jednotku bohatství (třeba v miliardách), ale také jako 100% bohatství, tedy bráno relativně. Pokud je tedy očekávané bohatství v T3 rovno 1.294, rozumíme tím, že na konci plánovacího horizontu firma zvýšila své očekávané bohatství v průměru o 29.4%, nebo také na 1.294 miliard.

Hodnota maximální celkové návratnosti 1.0636 tedy znamená, že firma v nejlepším možném scénáři dokázala své jmění za jeden kvartál navýšit dokonce o více než 100%. Existuje však také možnost, že firma v tomto období přijde o téměř 40% svého kapitálu (viz minimum celkové návratnosti), obojí lze rovněž vyzorovat z předchozího histogramu vpravo. Možnost tak velké ztráty (a jistě existují další scénáře, ve kterých bude ztráta podobně vysoká viz stejný histogram) je pro firmu velmi nebezpečná. V modelu však neexistuje nástroj, jak toto riziko (jedná se o tržní riziko) korigovat. Celý sloupec průměrných hodnot v první půlce tabulky pak přesně splňuje omezení (4.16), tedy očekávané navýšení bohatství odpovídá očekávané celkové návratnosti investic po přičtení k původnímu bohatství 1 a po odečtení úroků, přičemž přísun a odliv depositů se v průměru navzájem vyrovnaly (což je i z dlouhodobého hlediska logické). Je rovněž patrné, že během 1. kvartálu si svou investicí  $x_0$  dokázala ve většině scénářů zajistit dostatečný příjem na pokrytí úroku na závazcích v  $t = T1$ , jejich rozdíl je pak rozdílem teoretického

přebytku a teoretického dluhu v témže roce, což odpovídá rovnici (4.17) (pro připomenutí, firma si reálně žádnou půjčku nebere). Je pochopitelné, že existují rovněž scénáře s nepříznivým vývojem, ve kterých platí  $v_1^{-s} > 0$ , týká se to nicméně menšiny z nich. Některé hodnoty vykazují také poměrně vysokou volatilitu, jako např. minimální a maximální přísun deponitu či již zmíněná celková návratnost.

Hodnoty v periodě T3 je pak lepší interpretovat v absolutních částkách, protože již nejsou procentuálním vyjádřením původní částky ale navýšené částky  $V_2$ . V obou polovinách si pak opět z průměrných hodnot může čtenář ověřit platnost omezení (4.16), (4.17) (k ověření první je ještě potřeba znát hodnotu  $V_2 = 1.121$ ). Interpretace dluhu/přebytku je stejná jako v T1, ve větším množství scénářů firma vykazala dostatečný příjem. Pro zúplnění podotknu že tomu tak ale nebylo v periodě  $t=2$  (mimo tabulku), pro kterou platí  $Ev_2^-(\xi) = 0.0066$  a  $Ev_2^+(\xi) = 0.004$ . Veškeré nedostatky  $Ev_t^-(\xi)$  jsou pak penalizovány v účelové funkci, hodnota tohoto očekávaného penále činí 0.00037. Připomeňme, že šance, že firmě kvůli neplnění podmínky (4.17) naběhne na konci plánovacího období nějaké penále, je vnímána jako hlavní zdroj (kreditního). V tomto smyslu je (vzhledem k zanedbatelnému penále v porovnání s nárůstem bohatství) podstupované riziko minimální.

Celkovou představu o velikosti dluhů a přebytků v jednotlivých periodách mohou dát následné histogramy, přičemž červenou je vyznačen dluh.



Obrázek 4.14: Histogramy přebytků a dluhů napříč periodami..

Pro úplnost doplníme konečnou hodnotu očekávaného závazku  $EL_T(\xi) = 0.538$ , což značí očekávaný nárůst 7.6% z původní hodnoty  $L_0 = 0.5$ . Porovnáme-li to s očekávaným nárůstem 29.43% z  $V_0 = 1$  na  $EV_T(\xi) = 1.2943$  a připomeneme, že podstupované riziko je minimální, můžeme zhodnotit, že si společnost (při daných vstupních parametrech) vedla během plánovacího období výborně.

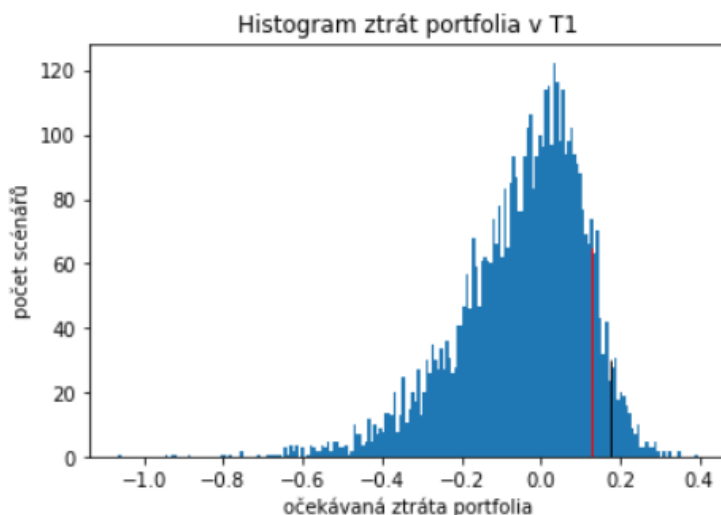
Zásadní otázka zní, zda je takové pojetí rizika dostatečné. Jak jsme již uvedli v tabulce, očekávaný dluh v periodě T1, T3 byl sice menší než očekávaný přebytek, rozhodně však ne zanedbatelný, ba dokonce byl vyšší v periodě T2. Na penalizaci se tento fakt projevil pouze zanedbatelnou částkou. Přírozeným způsobem, jak citlivost na dluhy zvýšit, by bylo zvýšit penalizační koeficienty  $e_t$ , nicméně se domnívám, že již zvolené hodnoty mohou zhruba odpovídat realitě. Jejich přílišné zvýšení by se stávalo nerealistickým a také by zcela odrazovalo od využívání možnosti půjček, které by tím postrádaly smysl. Nodostatečnost tohoto pojetí rizika však není možné ignorovat. Dovedeme si jistě představit scénář, ve kterém se našim vybraným "koním" bude dařit hluboko pod očekávání viz např. scénář minimální návratnosti v periodě T1, kdy bohatství v T1 kleslo na 60% původní hodnoty. Vysoká záporná návratnost s tím spojená pak způsobila velmi nízký dividendový výnos, který by zdaleka nestačil na pokrytí úroků ze závazků. Takovým extrémním

#### 4.4. STRUKTURA MODELU YASUDA-KASAI

scénářem můžeme rozumět třeba zcela reálné období vysoké inflace následované zvyšováním úrokových sazeb (a tedy vyšším  $r_t$ ), což je vždy období spojené s klesajícími zisky společnosti (a tedy také poklesem cen jejich akcií).

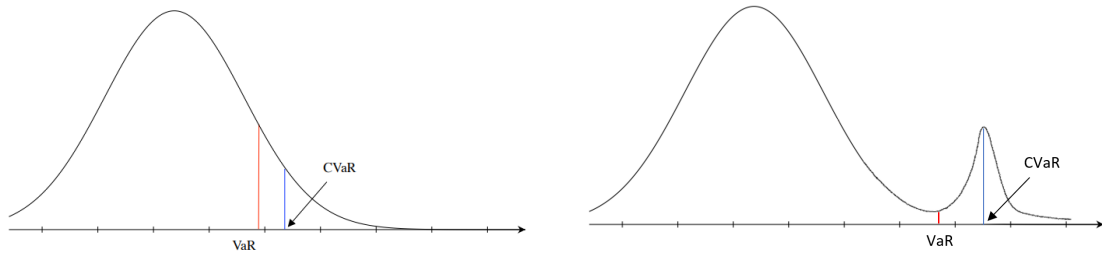
Řešením by tedy mohlo být pokusit se tyto extrémní scénáře nějakým způsobem eliminovat, k tomu si však musíme položit otázku, čím jsou tyto scénáře vyvolány. Jejich příčinou je právě ona "sázka na jednoho koně", který je slepě vybírán na základě nejvyšší očekávané roční návratnosti, příčinou je tedy vysoké tržní riziko portfolia. Tento přístup výběru sice slibuje maximalizaci očekávaného bohatství, nicméně aktiva s vysokou očekávanou návratností jsou také zpravidla spojena s vysokou volatilitou viz tabulka 4.1. Při absenci nástroje, který by bral v potaz korelace mezi aktivy, postrádá model Yasuda-Kasai jakoukoliv schopnost diverzifikace, včetně té v Markowitzově smyslu, jež byla doposud dostatečná. Takovým nástrojem, který modelu dodáme, bude míra rizika CVaR (4.13) aplikovaná na periodu T1.

Pro další úvahy si zobrazme histogram ztrát portfolia pro  $t = T1$ . Oním histogramem je vlastně histogram 4.13 vpravo, pouze překlopený přes osu y.



Obrázek 4.15: Histogram ztrát v periodě T1.

Ztráty napravo od černé linie odpovídají 10% (hodnota  $1-\alpha$ ) nejhorších scénářů možných ztrát v T1. Průsečík této linie s osou x je kvantil  $\text{VaR}_\alpha$ . Hlavní myšlenkou modelu obsahující tuto míru rizika je stanovení hranice možné návratnosti, pod kterou se z  $\alpha\%$  návratnost portfolia nedostane a tuto hranici pak mít co nejvyšší (respektive nejnižší v řeči možných ztrát). Jaký je profil  $1-\alpha$  nejvyšších ztrát za touto hranicí pak uživatele nezajímá. Spokojí se s vědomím, že z  $\alpha\%$  nejhorších scénářů je pouze několik málo skutečně katastrofálních, jako např. 40% viz histogram, a tedy jejich pravděpodobnost zanedbatelná. Pravý chvost histogramu je tedy mimo jeho zájem. Je tento přístup správný? Pokračujme v úvahách s využitím ilustračního histogramu použitého již v kapitole 4.9 a jeho porovnáním s dalším ilustračním histogramem ztrát.



**Obrázek 4.16:** Ilustrace dvou možných histogramů ztrát.

Tímto porovnáním chci ilustrovat, že rozdělení ztrát za hodnotou  $VaR_\alpha$  může být i zcela jiné, než jaké bychom přirozeně očekávali. V případě portfolia, jehož ztráty jsou vyobrazeny histogramem vpravo rozhodně nejsou šance katastrofálních ztrát nemalé. Má však takový příklad ztrát reálné opodstatnění a má tedy cenu se jím zabývat?

Představme si banku razící strategií poskytování úvěrů především startupovým společnostem. Taková strategie může přinést vysoký zisk, protože úspěšné startupové společnosti mají vysoký potenciál znásobení své tržní hodnoty. S těmito společnostmi se však také pojí vysoké riziko jejich zániku, a tedy neschopnosti splatit bance půjčený úvěr, což bance způsobí zásadní ztráty. Kreditní riziko spojené se startupy se pak navíc značně zvyšuje v době zvyšujících se úrokových sazeb (a prodražování úvěrů), což může ještě dále usnadnit krach těchto společností, a tedy dále zvýšit již tak vysoké riziko ztrát banky.

Pro podobný příklad z reálné praxe ostatně nemusíme jít daleko. Tohoto roku, konkrétně 10. března zkrachovala americká banka Silicon Valley. Ta alokovala své bohatství především do dlouhodobých státních dluhopisů, které jsou kvůli delší době do splatnosti náchylnější na změny v úrokových sazbách viz kapitola 3. Nástupem inflace a bojem proti ní zvyšováním úrokových sazeb se zásadním způsobem snížila hodnota (potažmo tržní cena) aktiv této banky (protože jí držené dluhopisy s pevnou kupónovou sazbou nebyly již zdaleka tak atraktivní), jinými slovy banka podlehla úrokovému riziku spojenému s její investiční strategií. Z důvodu vyšší ceny úvěrů (a tedy horší dostupnosti hotovosti) pak začali její velcí klienti vybírat své deposity, aby zvýšili svou peněžní likviditu. Banka musela na pokrytí těchto výběrů prodat značnou část svých nyní podhodnocených aktiv, což postupně vedlo k jejímu krachu.

Těmito příklady bych rád dokázal, že rozhodně má smysl se pravým chvostem distribuce ztrát zabývat. Míra  $VaR_\alpha$  všech tuto část chvostu nedokáže přesně charakterizovat, jak jsme již vysvětlili v podkapitole 4.3, proto použijeme míru  $CVaR_\alpha$ . Její interpretace je průměrná hodnota ztrát za hodnotou  $VaR_\alpha$ . Tím získáme lepší kontrolu nad extrémními nežádoucími scénáři včetně případů ilustrovaných histogramem 4.16 vpravo. Ponechme nyní původní formulaci modelu a zakomponujme  $CVaR_\alpha$  do periody T1 následujícími omezeními.

#### 4.4. STRUKTURA MODELU YASUDA-KASAI

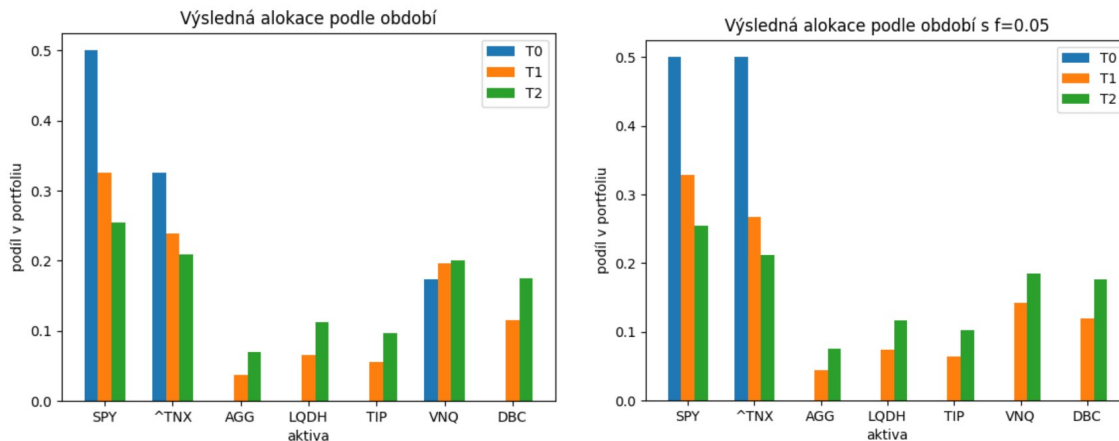
$$z + \frac{1}{(1 - \alpha)S} \sum_{s=1}^S u_s \leq 0.13$$

$$u_s \geq \sum_{i=1}^n -(d_{i1}^s + D_{i1}^s)x_{i0} - z \quad \forall s \in \mathcal{S}$$

$$u_s \geq 0 \quad \forall s \in \mathcal{S}.$$

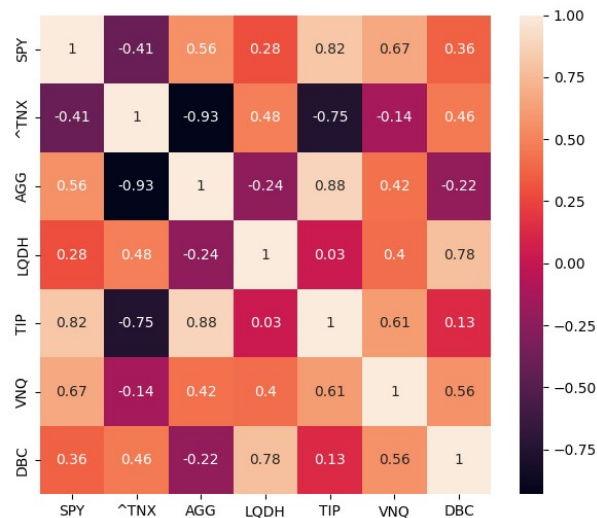
Hodnota těchto měr pro distribuci ztrát v T1 předchozího modelu jsou  $\text{CVaR}_\alpha = 0.1767$  a  $\text{VaR}_\alpha = 0.1297$ . Pokusme se snížit hodnotu  $\text{CVaR}_\alpha$  na 0.13, tedy průměrná ztráta 10% nejhorsích scénářů je 13%.

V důsledku použití  $\text{CVaR}_\alpha$  u při zachování všech ostatních parametrů vypadá nová alokace  $\mathbf{x}_t$  následovně.



Obrázek 4.17: Vlastní foto.

Oproti původní alokaci (obrázek vpravo) se nám po použití  $\text{CVaR}_\alpha$  u kromě investice do akciového fondu SPY a fondu kopírujícího výnos státních dluhopisů TNX jeví jako optimální alokovat určité bohatství rovněž do realitního VNQ. Mezi těmito sektory není výrazná korelace viz následující mapa historických korelací.



Obrázek 4.18: Mapa korelací uvažovaných aktiv.

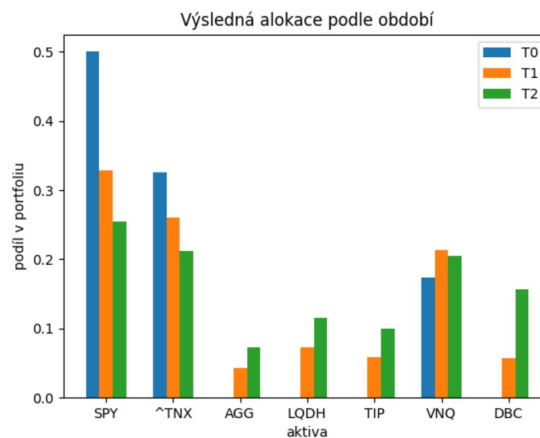
Dle Moderní teorie portfolia se nám tedy povedlo lépe diverzifikovat portfolio v T1 a tím také snížit jeho tržní riziko. Snížením podílu alokace v aktivu TNX jsme však také snížili očekávaný dividendový výnos z úvodních 0.0236 (2.36%) na 0.0213 (2.13%), čímž jsme také zhoršili naši schopnost získávat dostatečný příjem na úroky  $E(r_{t+1}(\boldsymbol{\xi})L_t(\boldsymbol{\xi}))$ , tedy schopnost plnit podmínku (4.17). Patrné to je rovněž z hodnot proměnných  $Ev_t^-(\boldsymbol{\xi})$ ,  $Ev_t^+(\boldsymbol{\xi})$  v jednotlivých obdobích.

	T1	T2	T3
Dluh	0.0039	0.0065	0.0052
Přebytek	0.0039	0.004	0.0079

Nadále platí, že očekávaná velikost půjčky v T2 je větší než očekávaná velikost přebytku. Rovněž v periodě T1 se však velikost očekávané půjčky vyrovnala očekávanému přebytku a se snižující se hodnotou  $CVaR_\alpha$  by se zastoupení půjček napříč scénáři nadále zvětšovalo. Snížili jsme tedy tržní riziko portfolia, nicméně na úkor mírného zvýšení kreditního rizika. Než se tedy pustíme k celkové analýze výsledků, navrhuji model Yasuda-Kasai obohatit pro lepší kontrolu kreditního rizika v periodách T1-T3 o poslední podmínku

$$Ev_t^-(\boldsymbol{\xi}) \leq Ev_t^+(\boldsymbol{\xi}). \quad (4.18)$$

Tím si zajistíme určitou kontrolu nad velikostí očekávaného dluhu vůči očekávanému přebytku. Naposled si tedy zobrazme výslednou alokaci

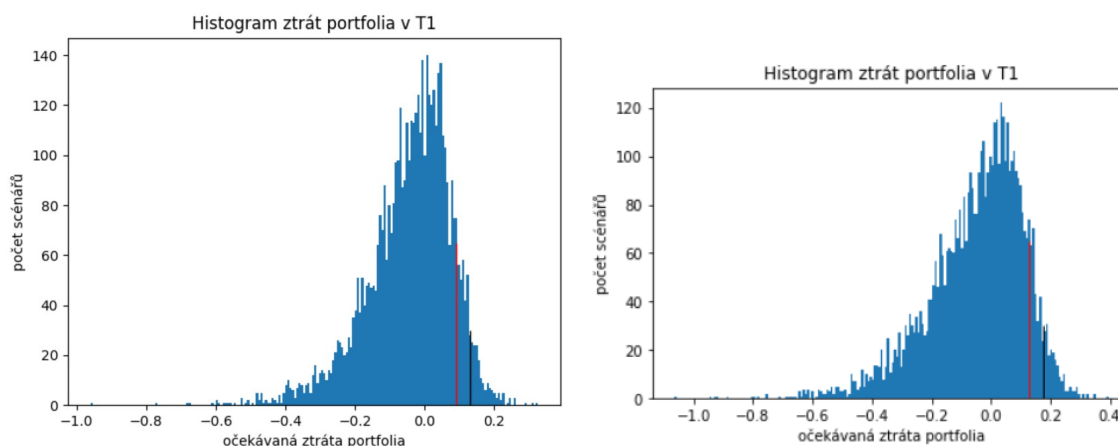


**Obrázek 4.19:** Ilustrace alokací po zavedení podmínky (4.18).

Rozdíly vůči alokaci před zavedením podmínky (4.18) jsou již spíše kosmetické.

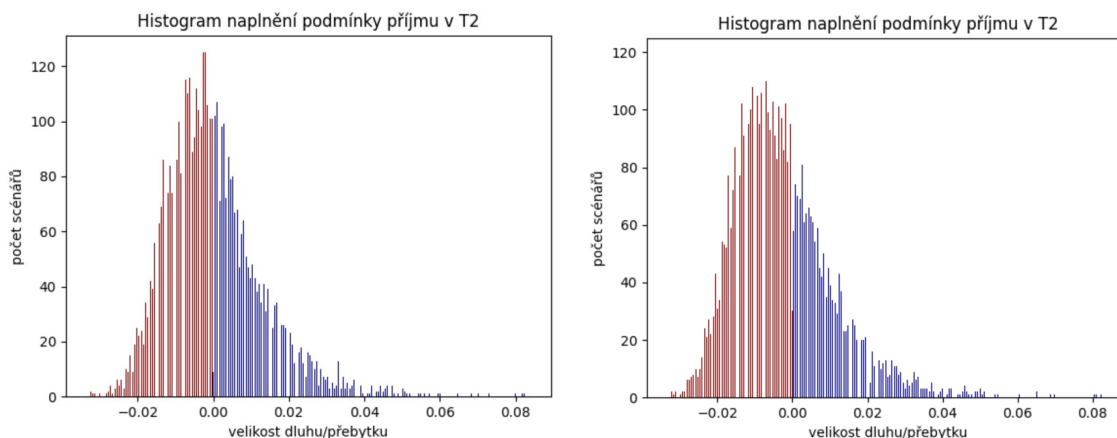
Dále si na následujícím obrázku 4.21 porovnáme změnu v nové distribuci ztrát v T1 (vlevo) vůči původní distribuci (vpravo). Všimněme si především, jak se díky podmínce omezeného  $CVaR_\alpha = 13\%$  "stlačil" histogram směrem doleva. Zmenšili jsme tedy průměrnou hodnotu 13% nejhorších ztrát z původních 17.67%. Pro úplnost hodnota  $VaR_\alpha$  je rovna 9% (oproti původní 12.97%).

#### 4.4. STRUKTURA MODELU YASUDA-KASAI



**Obrázek 4.20:** Histogramy ztrát vlevo po zavedení nové míry, vpravo původní.

Nyní si ještě porovnejme histogramy dluhů/přebytků v periodě T2, ve které došlo k největší změně implementováním podmínky (4.17) od původního histogramu (vpravo).



**Obrázek 4.21:** Histogramy půjček/přebytků vlevo nový, vpravo původní.

Nyní už zbývá pouze doplnit analogickou přehledovou tabulku se zásadními údaji.

	T1				T3		
	Min	Max	Průměr		Min	Max	Průměr
Přísun depositů	0.00015	0.2639	0.1		0.00012	0.279	0.102
Vyplacení depositů	0.1	0.1	0.1		0.1	0.1	0.1
Vyplacení úroků	~0	0.027	0.01		~0	0.028	0.0102
Bohatství	0.665	1.885	1.034		0.59	2.999	1.286
Celková návratnost	-0.326	0.867	0.0437		-0.08	1.479	0.216
Kapitálový zisk	-0.377	0.867	0.0223		-0.0908	1.312	0.1917
Kapitálový výnos	0.0037	0.0939	0.0213		0.0002	0.1491	0.025
Dluh	0	0.0269	0.0039		0	0.0407	0.0051
Přebytek	0	0.07	0.0039		0	0.1266	0.0079
Úrok na závazcích	0.004	0.039	0.0213		0.0018	0.0705	0.0228

Hodnoty v prvních třech řádcích se nijak nezměnily, protože se jedná o vstupní na pevno generované parametry. To stejné platí pro úrok na závazcích  $r_{t+1}L_t$ .

Celkově vzato neměla přidaná omezení žádný zásadní vliv na výsledky. Pro periodu T1 můžeme vlivem nově zavedené míry rizika pozorovat posun extrémních hodnot celkové návratnosti a kapitálových zisků a výnosů směrem k průměru. U minimálních hodnot to bylo naším cílem, u těch maximálních je to důsledek především menší alokace ve volatilním aktivu TNX. Změny v těchto proměnných, leč ne tak zásadní, lze pozorovat rovněž v periodě T3, protože vliv změny alokace  $\mathbf{x}_0$  se pochopitelně přenáší i do dalších period (skrze náklady za transakce). Očekávaný dluh se nám podařilo udržet nejhůře na úrovni očekávaného přebytku pro všechny tři periody (včetně  $Ev_{T_2}^-(\boldsymbol{\xi}) = Ev_{T_2}^+(\boldsymbol{\xi}) = 0.0048$ ). Dobrou zprávou je, že naše vylepšení příliš nezhoršilo hodnotu účelové funkce, konkrétně kleslo očekávané bohatství na konci plánovacího horizontu z 1.294 na 1.286. Na druhou stranu při objemech peněz, se kterými velké společnosti operují, představují i jednotky či desetiny procent zásadní změnu. Taková je tedy cena za fakt, že jsme poměrně významně snížili vystavení tržnímu riziku snížením hodnoty  $CVaR_{0.9}$  o více než 4 procentní body a rovněž zkorigovali riziko kreditní.

V rámci shrnutí bych rád uvedl, že období uplynulého roku bylo podstatnou motivací, proč se do hloubky ve své práci zaměřit na metody popisu a ochrany proti různým druhům rizika, a považoval jsem za nutné vyzdvihnout jejich důležitost, stejně jako jejich aktuálnost prostřednictvím popisných příkladů z reálné praxe.

Model Yasuda byl pro tento úkol vhodným kandidátem, protože v 90. letech nebyla kontrola finančních rizik tak zaběhnutá, jak je dnes běžné. Největší boom v oblasti risk managementu přišel především po finanční krizi v roce 2008. Ostatně rovněž k mírám VaR, CVaR vydal Rockafellar svůj článek [26] až téměř jedno desetiletí po implementaci modelu Yasuda-Kasai. Proto bylo lákavé otestovat, jaký vliv novější míry na již relativně historický model mohou mít.

#### 4.4. STRUKTURA MODELU YASUDA-KASAI

Kompletní model má pak pro úplnost podobu následující.

$$\begin{aligned}
& \max \sum_{s=1}^S p_s \left( V_t^s - \sum_{t=1}^T e_t v_t^{-s} \right) \\
& \sum_{i=1}^n x_{it}^s - V_t^s = 0, \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \forall s, \\
V_{t+1}^s + l \sum_{i=1}^n y_i^s - \sum_{i=1}^n (1 + d_{it+1}^s + D_{it+1}^s) x_{it}^s &= F_{t+1}^s - G_{t+1} - I_{t+1}^s, \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \forall s, \\
L_{t+1}^s &= (1 + r_{t+1}^s) L_t^s + F_{t+1}^s - G_{t+1} - I_{t+1}^s, \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \forall s, \\
\sum_{i=1}^n D_{it+1}^s x_{it}^s + v_{t+1}^{-s} - v_{t+1}^{+s} &= r_{t+1}^s L_t^s, \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \forall s \\
y_{it}^s &\geq x_{it}^s - x_{it-1}^s, \\
y_{it}^s &\geq x_{it-1}^s - x_{it}^s, \\
\mathbf{0} \leq \mathbf{x}_t^s &\leq \bar{\mathbf{x}} \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \forall s \\
z + \frac{1}{(1-\alpha)S} \sum_{s=1}^S u_s &\leq 0.1 \\
u_s &\geq \sum_{i=1}^n -(d_{i1}^s + D_{i1}^s) x_{i0} - z \quad \forall s \\
u_s &\geq 0 \quad \forall s, \\
\mathbb{E}v_t^-(\boldsymbol{\xi}) &\leq \mathbb{E}v_t^+(\boldsymbol{\xi}).
\end{aligned}$$

## 5. Závěr

Hlavní myšlenkou této práce bylo rozebrat problematiku optimální správy aktiv a pasiv. Má hlavní motivace pro výběr tohoto tématu je zřejmá. Žijeme ve velmi dynamické době, plné událostí mající silný dopad na ekonomické subjekty, jakými jsou jak podnikatelé, tak jednotlivci.

Pandemická krize způsobila zásadní výpadek v dodavatelských řetězcích vedoucí přímo k nerovnováze mezi nabídkou a poptávkou a zvyšující se inflaci. Válečný konflikt vedl v doprovodu s dalšími faktory k šokovému nárůstu cen (především energetických) komodit, což se pochopitelně přímo projevilo na spotřebitelských cenách, nepřímo také na zvyšování daní pro firmy v energetickém sektoru působících. Snahy centrálních bank podpořit ekonomiku kvantitativním uvolňováním pak pouze nadále zvyšují inflační tlaky a snižují reálnou hodnotu bohatství většiny z nás.

Skrze tyto příklady by se až mohlo zdát, že jsme každodenně vystaveni riziku ztráty hodnoty našeho bohatství skrze nepředvídatelné události, či vlivem jednotlivců. Každodenně tedy také všichni stojíme před otázkou, jaká finanční rozhodnutí v dané situaci učinit, abychom nejen své úspory, ale také závazky ochránili. Ostatně i rozhodnutí ponechat své peníze na prostém běžném účtu, tedy neprovádět žádné investice a vystavit se pouze inflačnímu riziku, je také investičním rozhodnutím i s následky s ním spojenými. S trochou nadsázky si dovolím tvrdit, že investičnímu rozhodování se tedy nikdo z nás nemůže vyhnout, můžeme pouze ignorovat rizika s naší investiční (ne)aktivitou spojená.

Náš rozhodovací proces ovlivňuje tedy mnoho faktorů jako inflace, měnové kurzy, daně či kreditní rating. Zvláštní pozornost si však zaslouží především úrokové sazby, jejichž prudké zvyšování je zvláště v poslední době vsudypřítomným fenoménem. Tyto sazby pak mají zásadní vliv na výnosy jak z dluhopisů, tak akciových trhů, a tedy zásadní vliv na výkonost celé investiční strategie.

Množství zmíněných faktorů pak motivuje správce portfolií vytvářet různé míry rizika počínaje rozptylem jakožto základním kamenem Moderní teorie portfolia, po komplexnější nástroje, přičemž vhodnost každého z nich závisí na uvažovaném instrumentu, ale také zvolené investiční strategii.

Za hlavní model pro krytí rizika spojeného se změnou úrokových sazeb považují imunizaci portfolia založené na kompenzaci úrokového a reinvestičního rizika. Díky své časové povaze je tento přístup spojen především s nástroji generující pravidelný příjem, jakými jsou dluhové nástroje. Běžný výnos z těchto nástrojů je pak z myšlenky modelu využit ke splácení průběžných závazků.

Tento model využívá duraci a konvexitu jako míru očekávaného rizika, které mohou poskytovat poměrně přesné údaje v období "rozumných" změn úrokových sazeb. S většími změnami v těchto sazbách se však zvyšuje jeho nepřesnost. Portfolio založené na tomto přístupu je pak často typu tzv. *barbell*, tedy alokace je učiněna jak do krátkodobých, tak dlouhodobých dluhopisů. Přes všechny dílčí nedostatky okomentované v 3 je tento přístup značně využíván v komerční sféře.

Oblast měření a zajišťování rizika (tzv. *risk management*) však není z dlouhodobého hlediska kdovíjak prehistorickým podoborem finančního inženýrství. Považoval jsem proto za zajímavé část práce věnovat příkladu modelu optimální správy aktiv a pasiv japon-

ské pojišťovny Yasuda-Kasai, jenž byl ve své době průlomový, a s odstupem tří desetiletí zhodnotit vnímání a zajišťování proti riziku v té době. Podstatnou myšlenkou modelu byla penalizace nedostatečných průběžných příjmů vedoucí ke kreditnímu riziku nemožnosti splácet své závazky. Mým zásadním poznatkem a také výtkou bylo nedostatečné krytí tržního rizika, kterého bylo dosaženo pouze skrze diverzifikaci bohatství napříč jednotlivými třídami aktiv. Absence významné metriky tržního rizika vede k nedostatečné kontrole pravého chvostu rozdělení ztrát portfolia, a tedy možnosti extrémních poklesů reálné hodnoty bohatství. Tento nedostatek mě pak přímo motivoval k implementování novější a robustnější metriky CVaR a při ponechání původní rizikové metriky k otestování vlivu na distribuci výnosů a změnu v očekávané návratnosti. Scénářový přístup modelu k uchopení nejistoty spojené se vstupními parametry mi pak poskytl příležitost představit značně zobecněný Brownův pohyb, jakožto stochastický proces generující predikce pohybu akciových cen.

Protože očekávané riziko je jen jednou stranou mince investičního rozhodnutí, věnoval jsem průběžnou pozornost rovněž metrikám očekávané návratnosti, které zvláště u aktiv s pevným výnosem mohou být poměrně rozmanité. Za hlavní metriku považuji tzv. výnos do splatnosti, jenž bere v potaz celou dobu životnosti daného instrumentu. V případě akcií jsem pak zopakoval Markowitzův přístup skrze průměrný historický výnos, naznačil však i jiné způsoby jako parametrický *Capital asset pricing* model se svým rizikovým parametrem  $\beta$ .

Svou vlastní roli z hlediska kontroly rizika pak hraje úvodní kapitola, která je sice vedena jako určité rozšíření Markowitzova modelu, některé její dílčí části však tvoří zásadní dílky skládačky dalších dvou kapitol. Tyto dílky mají z hlediska kontroly rizika zvláštní zastoupení, protože se nejedná o klasické rizikové metriky, ale na kontrolu rizika mají podstatný vliv. Přestože může např. podkapitola 2.2.4 působit poněkud uměle, v návaznosti na tzv. *dot-com* bublinu (prasknutí investiční bubliny z důvodu neúměrné alokace v technologickém sektoru) pak toto omezení dostává hlubší význam. Omezení na velikost pozice v jednotlivém aktivu pak můžeme úzce propojit s rizikem likvidním. Důležitost transakčních nákladů na riziko nižšího než očekávaného výnosu pak nevyžaduje další komentář.

Množství zdrojů rizika a rozmanitost přístupu k jejich zajištění tedy velmi komplikuje optimální investiční rozhodnutí až jej někdy může učinit takřka nemožným. Z toho důvodu je vždy podstatné hledat vhodnou rovnováhu krytí jednotlivých zdrojů rizik, protože přílišná snaha o snížení vlivu jednoho rizikového faktoru často vede ke zvyšování jiného, jak jsme rovněž ukázali v případě tržního a kreditního rizika v kapitole 4.

Z hlediska použití možných matematických technik se pak víceúrovňová stochastická optimalizace jeví jako nejmocnější technika díky své flexibilitě skrze možnou průběžnou realokaci, ale také díky svému přístupu k modelování nejistoty skrze scénáře možného budoucího vývoje.

# Literatura

- [1] DUPAČOVÁ, Jitka, Jan HURT a Josef ŠTĚPÁN. *Stochastic Modeling in Economics and Finance*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. ISBN 1-4020-0840-6.
- [2] CIPRA, Tomáš. *Matematika cenných papírů*. Praha: Professional Publishing, 2013, 288 s. ISBN 978-80-7431-079-9.
- [3] CIPRA, Tomáš. *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou*. Praha: Ekopress, 2005. ISBN 80-86119-91-2.
- [4] MARKOWITZ, Harry. *Portfolio selection: efficient diversification of investments*. 2. vyd. Cambridge, Mass.: B. Blackwell, 1991. ISBN 978-1-55786-108-5.
- [5] REJNUŠ, Oldřich. *Finanční trhy*. 4., aktualiz. a rozš. vyd. Praha: Grada Publishing, 2014. Partners. ISBN 978-80-247-3671-6.
- [6] GLADIŠ, Daniel. *Naučte se investovat*. 1. vyd. Praha: Grada Publishing, 2004. ISBN:80-247-0709-8
- [7] POPELA, Pavel. *Optimization I*. Brno, 2017. VUT, učební text.
- [8] POPELA, Pavel. Stochastic programming. Přednáškový text pro předmět Optimalizace 2 na ÚM FSI VUT v Brně, r. 2021, [cit. 2023-03-25]. Dostupné z: <http://math.fme.vutbr.cz/cz/zamestnanci>.
- [9] ANDĚL, Jiří. *Základy matematické statistiky*. 2., opr. vyd. Praha: Matfyzpress, 2007. ISBN 978-80-7378-001-2.
- [10] ZENIOS, Stavros, Andrea CONSIGLIO a Søren S. NIELSEN. *Practical Financial Optimization: A Library of GAMS Models*. Wiley-Blackwell, 2010. ISBN 978-1-405-13371-5.
- [11] ZENIOS, Stavros. *Practical Financial Optimization: Decision Making for Financial Engineers*. John Wiley and Sons, 2008. ISBN 978-1405132008.
- [12] VERONESI, Pietro. *Handbook of Fixed-Income Securities*. John Wiley & Sons, 2016. ISBN 9781118709184.
- [13] KALL, Peter. a Stein W. WALLACE. *Stochastic Programming*, 2. vyd. John Wiley & Sons, Chichester, 1993. ISBN 978-0471951582
- [14] BIRGE, John. R. a François LOUVEAUX. *Introduction to stochastic programming*. 2. vyd. New York: Springer, 2011. ISBN 978-1-4614-0236-7
- [15] BROCKWELL, Peter J. a Richard A. DAVIS. *Introduction to Time Series and Forecasting*. Springer International Publishing, 2016. ISBN 978-3319298528
- [16] BRANDIMARTE, Paolo. *Numerical Methods in Finance: a MATLAB-Based Introduction*. New York: Wiley, 2002. ISBN 978-1-118-62557-6
- [17] WALLACE, Stein W. a Alan KING. *Modeling with Stochastic Programming*. New York: Springer Verlag, 2012. ISBN 978-0-387-87816-4.

## LITERATURA

- [18] WILLIAMS, H. Paul. *Model Building in Mathematical Programming*. 5th ed. Hoboken, N.J.: John Wiley, 2013. ISBN 978-1-118-44333-0.
- [19] RUSZCZYNSKI, Andrzej. et al. *Handbooks in Operations Research and Management Science*, vol. 10: *Stochastic Programming*. Amsterdam: Elsevier, 2003. ISBN 978-0-444-50854-6.
- [20] BAZARAA, Mokhtar S., Hanif D. SHERALI a C. M. SHETTY. *Nonlinear programming: theory and algorithms*. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons. 1993. ISBN 0471599735.
- [21] MATSUDA, Kazuhisa. *Introduction to Merton Jump Diffusion Model*. The Graduate Center, Department of Economics, The City University of New York: New York, NY, USA, 2004
- [22] ROUAH, Fabrice Douglas. *Euler and Milstein Discretization*. [cit. 2023-04-18]. Dostupné z: <https://frouah.com/finance%20notes/Euler%20and%20Milstein%20Discretization.pdf>
- [23] KAHL, Christian a Peter JACKEL. *Fast Strong Approximation Monte-Carlo Schemes for Stochastic Volatility Models*. *Quantitative Finance, Finance*, Vol. 6, No. 6, 2006
- [24] HESTON, Steven L. *A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options*. *The Review of Financial Studies*, 1993, 6, 327-343
- [25] BATES, David S. *Jumps and Stochastic volatility: Exchange Rate Processes Implicity in Deutsche Mark Options*. *The Review of Financial Studies*, volume 9, number 1, 1996, pages 69–107
- [26] ROCKAFELLAR, R. Tyrrell a Stanislav URYASEV. *Optimization of conditional value-at risk*. *Journal of Risk* 3, 2000, 21-41.
- [27] SARYKALIN Sergey, Gaia SERRAINO a Stan URYASEV. *Value-at-risk vs. conditional value-at-risk in risk management and optimization*. Chen Z-L, Raghavan S, eds. *Tutorials in Operations Research*, 2008, 270–294
- [28] HLAVÁČ, Petr. *Durace a její využití – díl I*. In: *Mesec.cz* [online]. 2009 [cit. 2022-08-10]. Dostupné z: <https://www.mesec.cz/clanky/durace-a-jeji-vyuziti-dil-i/>
- [29] OHAYON, Alexandre. *Term Structure of Interest Rates: a 3D Visualization* [online]. 2021 [cit. 2023-01-27]. Dostupné z: <https://medium.com/@alexandreohayon/term-structure-of-interest-rates-a-3d-visualization-ef6efd99c486>
- [30] CHOI, Youngsoo, Park, JINWOO. *An Improved Approach to Calculate the Yield and Duration of a Bond Portfolio*, 2003. *Journal of Applied Finance*. 112.
- [31] *The Wall Street Journal* [online]. [cit. 2023-02-12]. Dostupné z: <https://www.wsj.com/market-data/bonds/treasuries>

- [32] JAROLÍM, Jaroslav. *Výnosová křivka – jak interpretovat její tvar v praxi a v čem spočívá její užitečnost pro běžného investora?*. Finex.cz [online]. 12. 11. 2021 [cit. 2023-02-12]. Dostupné z: <https://finex.cz/vynosova-krivka/>
- [33] CHIANG, Thomas. *The Forward Rate as a Predictor of the Future Spot Rate-A Stochastic Coefficient Approach*. Journal of Money, Credit and Banking, 1988, 20(2), 212–232. <https://doi.org/10.2307/1992112>
- [34] XIDONAS, Panos, Christis HASSAPIS a G. BOUZIANIS. *An Integrated Matching-Immunitation Model for Bond Portfolio Optimization*. Comput Econ 51, 595–605, 2018. <https://doi.org/10.1007/s10614-016-9626-8>
- [35] SPAULDING, William C. *Bond strategies* [online]. [cit. 2023-02-12]. Dostupné z: <https://thismatter.com/money/bonds/bond-strategies.htm>
- [36] PONOMAREVA, Ksenia, Diana ROMAN, P. DATE, *An algorithm for moment-matching scenario generation with application to financial portfolio optimisation*, European Journal of Operational Research, Volume 240, Issue 3, 2015, Pages 678-687, ISSN 0377-2217, <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2014.07.049>.
- [37] JONES, Alexander. (2021, March 29). *GameStop: What happened, and what it means*. International Banker. <https://internationalbanker.com/brokerage/gamestop-what-happened-and-what-it-means/>
- [38] BUJNOVSKÝ, Daniel. *Optimalizace investic*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2022. 51 s. Vedoucí bakalářské práce RNDr. Pavel Popela, Ph.D
- [39] CABALKA, Matouš. *Pokročilá optimalizace toků v sítích*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2018. 99 s. Vedoucí diplomové práce RNDr. Pavel Popela, PhD.
- [40] LAPPALAINEN, Mikko. *Portfolio Optimization with CVaR*. 2008. Dostupné z: <http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:umu:diva-51339>
- [41] BÍZA, Martin. *Statistické vlastnosti Poissonova procesu* [online]. Brno, 2014 [cit. 2023-05-24]. Dostupné z: <https://theses.cz/id/9lm4ey/>. Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. Vedoucí práce doc. RNDr. Petr Lánský, DrSc.
- [42] CHVÍLA, Martin. *Tvorba dluhopisového portfolia* [online]. Brno, 2014 [cit. 2023-05-25]. Dostupné z: <https://theses.cz/id/x7jt9z/>. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. Vedoucí práce Ing. Luděk Benada, Ph.D.
- [43] CARIÑO, David R., Terry KENT, David H. MYERS a William T. ZIEMBA. *The Russell-Yasuda Kasai Model: An Asset/Liability Model for a Japanese Insurance Company Using Multistage Stochastic Programming*. Interfaces 24, no. 1 1994: 29–49. <http://www.jstor.org/stable/25061842>.
- [44] CARIÑO, Davide, David H. MYERS a William T. ZIEMBA. *Concepts, Technical Issues, and Uses of the Russell-Yasuda Kasai Financial Planning Model*. Oper. Res. 46, 1998, 450-462.

## LITERATURA

- [45] CARIÑO, David R., and William T. ZIEMBA. *Formulation of the Russell-Yasuda Kasai Financial Planning Model*. *Operations Research* 46, no. 4, 1998, 433–49. <http://www.jstor.org/stable/223123>.
- [46] KOZMÍK, Václav, David P. MORTON. *Evaluating policies in risk-averse multi-stage stochastic programming*. *Math. Program.* 152, 275–300, 2015. <https://doi.org/10.1007/s10107-014-0787-8>

## 6. Seznam použitých zkratek a symbolů

$\xi$  náhodná veličina

$E(\xi)$  střední hodnota náhodné veličiny

$\text{Var}(\xi)$  rozptyl náhodné veličiny

$t$  čas

$i, j$  indexy pro jednotlivá aktiva

$\mathbf{x}$  vektor alokace

$d(\xi)$  návratnost akcie jako náhodná veličina

$d_{jt}^s$   $s$ -tá realizace návratnosti akcie  $j$  na konci dne  $t$

$\boldsymbol{\mu}$  střední hodnota náhodného vektoru  $\mathbf{d}(\boldsymbol{\xi})$

$\boldsymbol{\Sigma}$  varianční matice náhodného vektoru  $\mathbf{d}(\boldsymbol{\xi})$

$\rho_{ij}$  teoretická korelace složek  $i, j$

$\mathbf{Q}$  bodový odhad matice  $\boldsymbol{\Sigma}$

$\bar{\mathbf{d}}$  bodový odhad vektoru  $\boldsymbol{\mu}$

$d_0$  minimální očekávaný zisk

$z_R$  očekávaná návratnost portfolia

$z_V$  očekávaný rozptyl portfolia

$v^-$  půjčka

$v^+$  přebytek

$r_f$  bezriziková úroková sazba

$e$  transakční poplatky

$y$  pomocná alokační proměnná v kapitole Markowitzův model

$\delta_i$  binární pomocná proměnná

$M$  limit na počet aktiv

$a, b$  parametry pro institucionální omezení v kapitole Markowitzův model

$C_t$  kupón z dluhopisu nabytý v čase  $t$

$N$  nominální hodnota dluhopisu

$T$  investiční horizont případně doba do splatnosti dluhopisu  
 $c$  kupónová sazba  
 $P_t$  cena dluhopisu v čase  $t$   
 $r(\xi)$  úroková sazba  
 $F_t$  finanční tok  
 $PV_t$  současná hodnota toku v čase  $t$   
 $CY$  běžný výnos  
 $EY$  efektivní výnos  
 $y$  výnos do splatnosti  
 $D^{FW}$  Fisher-Weilova durace  
 $D^{MAC}$  Macaulayova durace  
 $D^M$  modifikovaná durace  
 $K$  konvexita  
 $V_0$  počáteční bohatství  
 $\gamma$  úvěrový spread  
 $V$  bohatství  
 $D_{it}(\xi)$  dividendový výnos z aktiva  $i$  v čase  $t$   
 $F_t(\xi)$  přísun depositů v čase  $t$   
 $G_t$  výplata depositů v čase  $t$   
 $I_t(\xi)$  výplata úroků v čase  $t$   
 $\epsilon$  náhodná proměnná pro Wienerův proces  
 $J_t$  skokový proces  
 $\kappa$  náhodná proměnná pro velikost skoku  
 $\eta$  náhodná proměnná pro příchod skoku  
 $\lambda$  frekvence skoků  
 $\omega, \theta, \phi$  parametry Hestonova modelu  
 $p$  pravděpodobnostní funkce  
 $z$  kvantil v kapitole Yasuda-Kasai

## 6. SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ

$\alpha$  pravděpodobnost

$\text{VaR}_\alpha$  kvantil value at risk

$\text{CVaR}_\alpha$  kvantil conditional value at risk

$u_s$  pomocná proměnná míry  $\text{CVaR}_\alpha$

## 7. Ukázky programů

Veškeré programy jsou zpracovány v programovacím jazyce Python s použitím optimalizační knihovny Gurobi.

```
import gurobipy as gp
from gurobipy import GRB
import numpy as np
import yfinance as yf

model = gp.Model("Markowitzův model")
stocks = ['AAPL', 'MSFT', 'BAC', 'JPM', 'JNJ', 'PFE', 'KO', 'WMT', 'BA',
'META', 'AMT', 'CVX', 'GC=F', 'BZ=F', '^TNX', 'AGG', 'LQDH', 'TIP']
closes = yf.download(stocks, start='2015-01-01', end='2021-12-31')['Close']
closes = closes.loc[:,stocks]
daily_returns = closes.pct_change()
d = np.array(daily_returns.mean()*252), Q = np.array(daily_returns.cov()*252)
c0 = 0.2, rf1 = 0.005, rf2 = 0.04, M = 5, xL = 0.02, e0 = 0.001, e1 = 0.005
J = [[0, 1], [2, 3], [4, 5], [6, 7], [8], [9], [10], [11], [12, 13],
[14], [15, 16, 17]]
b = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

x = model.addVars(len(stocks), name='x', ub=0.25)
v1 = model.addVar(name='v1', ub = 0.5)
v2 = model.addVar(name='v2', ub = 1)
delta = model.addVars(len(stocks), vtype = GRB.BINARY, name="Z")
y1 = model.addVars(len(stocks), ub = 0.1, name="y1")
y2 = model.addVars(len(stocks), name="y2")

model.addConstr(gp.quicksum(x[i] for i in range(len(stocks))) -v1 -v2 == 1)
model.addConstr(gp.quicksum((y1[i]*d[i] - e0*delta[i]
for i in range(len(stocks))) + gp.quicksum((y2[i]*(d[i] - e1)
for i in range(len(stocks))) - rf1*v1 - rf2*v2 >= d0)
model.addConstr(gp.quicksum(delta[i] for i in range(len(stocks))) <= M)
for i in range(len(stocks)):
    model.addConstr(x[i] >= xL*delta[i])
    model.addConstr((1-delta[i])*x[i] <= delta[i]*(1-delta[i]))
for i in range(len(stocks)):
    model.addConstr(x[i] == y1[i] + y2[i])
for j in range(len(b)):
    model.addConstr(gp.quicksum(delta[i] for i in J[j]) <= b[j])

obj = gp.quicksum(x[i]*Q[i,j]*x[j] for i in range(len(stocks))
for j in range(len(d)))

model.setObjective(obj, GRB.MINIMIZE)
model.optimize()
```

```

model = gp.Model("Párování toků")

e = 0.002, gamma = 0.005

x = model.addVars(len(bonds), vtype=GRB.INTEGER, lb = 0, name = "x")
V0 = model.addVar(lb = 0, name = "V0")
vp = model.addVars(len(time), lb= 0, name="vp")
vm = model.addVars(len(time), lb = 0, name = "vm")

model.addConstr(vm[time[-1]] == 0)
model.addConstr(gp.quicksum(data[bonds[i]]["price"]*x[i]
for i in range(len(bonds))) + gp.quicksum(data[bonds[i]]["price"]*x[i]*e
for i in range(len(bonds))) + vp[0] == V0 + vm[0])

for t in time[1:]:
    model.addConstr(gp.quicksum(F[t,i]*x[i] for i in range(len(bonds)))
+ (1+r[maturity[t]])*vp[t-1] + vm[t] == L[maturity[t]]
+ vp[t] + (1+r[maturity[t]]+ gamma)*vm[t-1])

obj = V0
model.setObjective(obj, GRB.MINIMIZE)
model.write("Parovani.lp")
model.optimize()

```

```

model = gp.Model("Imunizace")
PV_A = [], D_A = [], K_A = [], e = 0.002, gamma = 0.003

for i in range(len(bonds)):
    PV_A.append(sum((F[t,i]/((1+r[maturity[t]])**t))for t in time[1:]))
    D_A.append((1/PV_A[i])*sum(t*F[t,i]/((1+r[maturity[t]])**(t+1))
    for t in time[1:]))
    K_A.append((1/PV_A[i])*sum(t*(t+1)*F[t,i]/((1+spotRate[maturity[t]])**(t+2))
    for t in time[1:]))
    PV_L = sum(liabilities[maturity[t]]/((1+spotRate[maturity[t]])**t)
    for t in time[1:]))
    D_L = (1/PV_L)*sum(t*liabilities[maturity[t]]/
    ((1+spotRate[maturity[t]])**(t+1)) for t in time[1:]))
    K_L = (1/PV_L)*sum(t*(t+1)*liabilities[maturity[t]]/
    ((1+spotRate[maturity[t]])**(t+2)) for t in time[1:]))

x = model.addVars(len(bonds), vtype=GRB.INTEGER, lb = 0, name = "x")
V0 = model.addVar(lb = 0, name = "V0")
vp = model.addVars(len(time), lb= 0, name="vp")
vm = model.addVars(len(time), lb = 0, name = "vm")

model.addConstr(vm[time[-1]] == 0)
model.addConstr(gp.quicksum(data[bonds[i]]["price"]*x[i]
for i in range(len(bonds))) + gp.quicksum(data[bonds[i]]["price"]*x[i]*e
for i in range(len(bonds))) + vp[0] == V0 + vm[0])

for t in time[1:]:
    model.addConstr(gp.quicksum(F[t,i]*x[i] for i in range(len(bonds)))
    + (1+r[maturity[t]])*vp[t-1] + vm[t] == L[maturity[t]] + vp[t]
    + (1+r[maturity[t]]+ gamma)*vm[t-1])
    model.addConstr(gp.quicksum(PV_A[i]*x[i] for i in range(len(bonds))) == PV_L)

diff1 = model.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS)
abs1 = model.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS)

model.addConstr(diff1 == gp.quicksum(D_A[i]*PV_A[i]*x[i]
    for i in range(len(bonds))) - PV_L*D_L)
model.addGenConstrAbs(abs1, diff1)
model.addConstr(abs1 <= 100)

model.addConstr(gp.quicksum(K_A[i]*PV_A[i]*x[i] for i in range(len(bonds)))
    >= PV_L*K_L)

obj = V0
model.setObjective(obj, GRB.MINIMIZE)
model.optimize()
model.write("Imunizace.lp")

```

```

model = gp.Model("Yasuda CVaR")

S = 5000
stocks = ["SPY", "^TNX", "AGG", "LQDH", "TIP", "VNQ", "DBC"]
time = ["T0", "T1", "T2", "T3"]

d = {...}, D = {...}, r = {...}, F = {...}, I = {...}, G = 0.1
p = 1/S
alpha = 0.9, V0 = 1, f = 0.05, L0 = 0.5
e = {"T1": 0.01, "T2": 0.05, "T3": 0.12}

x = {}, V = {}, u = {}
UP = {}, UM = {}, y = {}, L = {}

z = model.addVar(name="z", lb = -100)

for t in time:
    for s in range(S):
        if t != "T0":
            V[t, s] = model.addVar()
            vp[t, s] = model.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, lb=0)
            vm[t, s] = model.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, lb=0)
            L[t, s] = model.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS)
        if t != "T0" and t != "T3":
            for i in stocks:
                x[i, t, s] = model.addVar(lb=0, ub = 0.5)
                y[i, t, s] = model.addVar(lb=0)

for i in stocks:
    x[i, "T0"] = model.addVar(lb = 0, ub = 0.5)

for period_index, t in enumerate( periods ):
    if t == "T0":
        model.addConstr(gp.quicksum(x[stock,t] for i in stocks) - V0 == 0)
        for s in range(S):
            model.addConstr(V[time[period_index+1],s]
                -gp.quicksum((1+D[stock][time[period_index+1],s]
                + d[i][time[period_index+1],s])*x[i,t] for i in stocks)
                == F[time[period_index+1],s] - G - I[time[period_index+1],s])
            model.addConstr(gp.quicksum(D[stock][time[period_index+1],s]*x[stock, t]
                for i in stocks) + vm[time[period_index+1], s]
                -vp[time[period_index+1], s] == r[periods[period_index+1],s]*L0)
            model.addConstr(L[time[period_index+1],s] ==
                (1+r[time[period_index+1],s])*L0 + F[time[period_index+1],s] - G
                - I[time[period_index+1],s])

```

```

elif t != "T0" and t != "T3":
    for s in range(S):
        model.addConstr(V[time[period_index+1],s] +
            l*gp.quicksum(y[i,t,s] for i in stocks)
            -gp.quicksum((1+d[stock][time[period_index+1],s]
            + D[s][time[period_index+1],s])*x[i,t,s] for i in stocks)
            == F[time[period_index+1],s] - G - I[time[period_index+1],s])
        model.addConstr(gp.quicksum(x[i,t,s] for i in stocks) - V[t,s] == 0)
        model.addConstr(gp.quicksum(d[i][time[period_index+1],s]*x[i, t, s]
            for i in stocks) + vm[time[period_index+1], s]
            - vp[time[period_index+1], s] == r[time[period_index+1],s]*L[t,s])
        model.addConstr(L[time[period_index+1],s]
            == (1+r[time[period_index+1],s])*L[t,s]
            +F[time[period_index+1],s] - G - I[time[period_index+1],s])
        for i in stocks:
            if t == "T1":
                model.addConstr(y[i,t,s] >= x[i,t,s] - x[i,time[period_index-1]])
                model.addConstr(y[stock,t,s] >= x[i,time[period_index-1]] - x[i,t,s])
            else:
                model.addConstr(y[i,t,s] >= x[i,t,s] - x[i,time[period_index-1],s])
                model.addConstr(y[i,t,s] >= x[i,time[period_index-1],s] - x[i,t,s])

obj = -gp.quicksum(p*(V["T3",s] - gp.quicksum(e[t]*vm[t, s] for t in time[1:3])))
for s in range(S))

model.setObjective(obj, GRB.MINIMIZE)
model.optimize()
model.write("Yasuda.lp")

```